



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Ciência e Tecnologia  
Faculdade de Engenharia

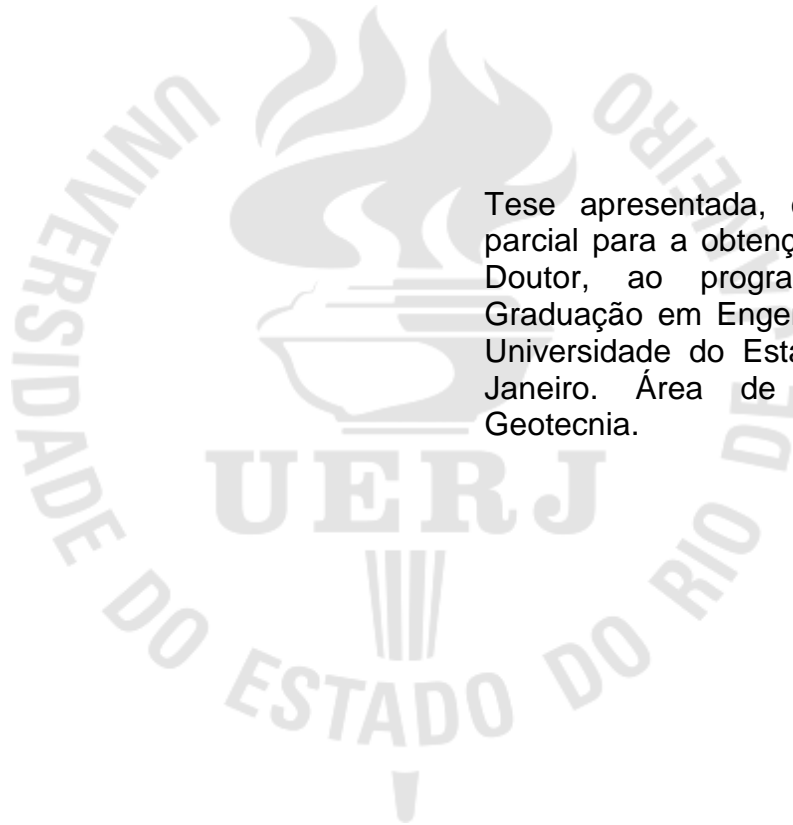
Raphael Felipe Carneiro

**Adensamento unidimensional com fluxo radial considerando a  
viscosidade dos solos e a compressão secundária**

Rio de Janeiro  
2019

Raphael Felipe Carneiro

**Adensamento unidimensional com fluxo radial considerando a viscosidade  
dos solos e a compressão secundária**



Tese apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor, ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Geotecnia.

Orientadores: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Denise Maria Soares Gerscovich  
Prof. Dr. Ian Schumann Marques Martins

Rio de Janeiro  
2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

C289 Carneiro, Raphael Felipe.  
Adensamento unidimensional com fluxo radial considerando a viscosidade dos solos e a compressão secundária / Raphael Felipe Carneiro. – 2019.  
290f.

Orientador: Denise Maria Soares Gerscovich.

Coorientador: Ian Schumann Marques Martins.

Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Solos - Permeabilidade - Teses. 3. Mecânica do solo - Teses. 4. Deformações e tensões - Teses. I. Gerscovich, Denise Maria Soares. II. Martins, Ian Schumann Marques. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 624.131.53

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

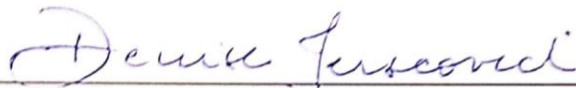
Raphael Felipe Carneiro

**Adensamento unidimensional com fluxo radial considerando a viscosidade  
dos solos e a compressão secundária**

Tese apresentada, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor, ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Geotecnia.

Aprovado em: 09 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:



\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Denise Maria Soares Gerscovich – Presidente / Orientadora  
Faculdade de Engenharia – UERJ



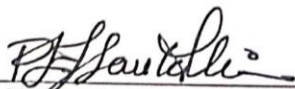
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Ian Schumann Marques Martins  
COPPE – UFRJ



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Marcus Peigas Pacheco  
Faculdade de Engenharia – UERJ



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Celso Romanel  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio



\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Paulo Eduardo Lima de Santa Maria  
Consultor

---

Rio de Janeiro

2019

## DEDICATÓRIA

À minha família, que sempre fez de tudo para que eu me tornasse o que sou hoje.

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe, à minha vó e a toda a minha família, pela confiança que tiveram em mim e pelo apoio que me deram em todos os momentos.

À minha sempre querida Stephane, que continuamente me fez crer que o esforço não seria em vão mesmo com todas as adversidades.

Às minhas amigas Rachel e Karolyn, pelas conversas sobre os assuntos mais aleatórios possíveis quando todos se sentiam exauridos pelo meio acadêmico.

À Prof<sup>a</sup> Denise, pelos longos anos de amizade, aulas, orientações, convívio, artigos e o que mais vier pela frente.

À Prof<sup>a</sup> Bernadete, pela amizade, disposição em me ajudar e pela dedicação em todos os momentos.

Ao Prof Ian, pela orientação que já se tornou amizade e pela sempre prontidão em ajudar quando necessário.

Ao Prof. Rogério Feijó, por todos os anos de aulas, estágio, amizade, planilhas, orientação, artigo, trabalho, e o que mais tivermos feito.

À minha amiga Deborah, que me atura há tanto tempo e dessa vez não pôde assistir à minha defesa.

Ao meu amigo Alexandre, que se disponibilizou a assistir à minha defesa mesmo sabendo que ia passar horas sem entender nada do assunto.

À minha amiga Raphaela, sempre disposta a me ajudar em tarefas que eu sou incapaz de fazer, como desenhar.

A todos os meus amigos e professores que de alguma forma me auxiliaram até aqui.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Keep looking up.  
*Neil deGrasse Tyson*

## RESUMO

CARNEIRO, Raphael F. **Adensamento unidimensional com fluxo radial considerando a viscosidade dos solos e a compressão secundária**. 2019. 290f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Ao longo dos anos, diversos estudos foram realizados para entender o fenômeno da compressão secundária. Os trabalhos mais consistentes apontam para a viscosidade da água adsorvida como sendo a responsável pelo adensamento secundário. A tensão efetiva seria dividida em duas parcelas: uma viscosa, dependente da velocidade de deformação volumétrica, e outra estabelecida nos contatos sólido-sólido. Nesta tese foram desenvolvidas teorias do adensamento para fluxo radial levando-se em conta o efeito viscoso como parte fundamental do processo. Foram considerados os casos de deformações verticais livres e deformações verticais iguais. No caso de deformações verticais iguais foram desenvolvidas duas teorias, uma para coeficiente de viscosidade constante e outra para coeficiente de viscosidade variável. Os resultados mostraram que a viscosidade tem influência significativa nas curvas de porcentagem média de adensamento ao longo do tempo. A abordagem de coeficiente de viscosidade variável foi capaz de reproduzir o efeito de “dupla onda” observado nos ensaios de laboratório de longa duração, sendo possível relacioná-lo à razão entre os recalques primário e total.

Palavras-chave: Compressão secundária; Adensamento; Viscosidade; Drenagem Radial; Drenos Verticais.



## ABSTRACT

CARNEIRO, Raphael F. **One-dimensional consolidation with radial drainage considering soil viscosity and secondary compression**. 2019. 290f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Over the years, several studies have been carried out to understand the phenomenon of secondary compression. The most consistent studies point to the viscosity of the adsorbed water as being responsible for secondary consolidation. The effective stress would be divided into two parts: the first one of a viscous nature and the other transmitted through the so-called solid-to-solid contact. In this thesis theories of radial flow consolidation were developed taking into account the viscous effect as a key part of the process. The cases of free strain and equal strain were considered. In the case of equal strain, two theories were developed, one for constant viscosity coefficient and another for variable viscosity coefficient. The results showed that the viscosity has a significant influence on the curves of the average degree of consolidation over time. The variable viscosity coefficient approach was able to reproduce the "double wave" effect observed in long-term laboratory tests and it can be related to the ratio between primary and total settlement.

Keywords: Secondary Compression; Consolidation; Viscosity; Radial Drainage; Vertical Drains.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Influência da velocidade (Martins, 1992, a partir de Lacerda, 1976).....	35
Figura 2 – Ensaio de relaxação (Martins, 1992, a partir de Lacerda, 1976).....	36
Figura 3 – Aumento da proressão após o fechamento da drenagem (Lima, 1993).	37
Figura 4 – Identificação da compressão secundária em um ensaio de adensamento (Martins, 2005). .....	40
Figura 5 – Influência da temperatura (adaptado de Gray, 1936).....	41
Figura 6 – Comparação entre as curvas teóricas e experimentais para variação do excesso de poropressão normalizada pela pressão $p$ (acima) e de volume normalizada pelo volume inicial $V$ , pelo módulo volumétrico $K$ e pela pressão $p$ (abaixo) (De Jong e Verruit, 1965). .....	44
Figura 7 – Estado de tensões num corpo de prova esférico com uma pedra porosa esférica central (Martins e Lacerda,1989). .....	45
Figura 8 – Ensaio realizado na Argila da Baía de São Francisco – Califórnia (Lacerda, 1976). (a) $\varepsilon_v - \varepsilon_z$ vs log t; (b) $K_0$ vs log t; (c) $\sigma_1 - \sigma_3$ vs log t.....	46
Figura 9 – Caminho de tensões efetivas durante o adensamento unidimensional idealizado por Lacerda e Martins (1985). .....	48
Figura 10 – Curvas de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo para diferentes valores de $\Theta$ , $\sigma'_{vf}/\sigma'_{v0} = 2$ e $K_{0n} = 0,6$ (Martins e Lacerda, 1985). .....	49
Figura 11 – Comportamento de $K_0$ (curvas superiores), da diferença entre a deformação volumétrica específica e a deformação axial específica (curvas centrais) e do excesso de poropressão (curvas inferiores) durante o adensamento secundário (Mesri e Castro, 1987).....	50
Figura 12 – Curvas $e$ vs tempo (log) durante o descarregamento para diferentes valores de OCR (Vieira, 1988). .....	52
Figura 13 – Curvas $e$ vs tempo (log) durante o descarregamento para diferentes valores de OCR (Feijó, 1991).....	53
Figura 14 – Ensaio de Holtz e Jamiolkowski (1985) para medição do $K_0$ durante a compressão secundária. ....	54
Figura 15 – Variação de $K_0$ ao longo do tempo na etapa de descarregamento de 320 kPa para 40 kPa (Santa Maria, 2002). .....	55

Figura 16 – Comparação entre as variações de $K_0$ ao longo do tempo nas etapas de carregamento, descarregamento e recarregamento (Santa Maria, 2002).....	56
Figura 17 – Ensaio de adensamento hidrostático no estágio de 50 kPa (Thomasi, 2000). .....	57
Figura 18 – Relação entre índice de vazios, tensão vertical efetiva e tempo durante o adensamento secundário (Mesri e Castro, 1987).....	59
Figura 19 – Ensaio de adensamento de longa duração na Argila do SENAC (Martins, 1990). .....	60
Figura 20 – Comportamento de $K_0$ para a argila da Baía de San Francisco (Kavazanjian e Mitchell, 1984). .....	63
Figura 21 – Ensaio de Leonards e Girault (1961) para estudar a influência da razão incremental de tensão. ....	66
Figura 22 – Interpretação de Martins (2005) sobre os ensaios de Leonards e Girault (1961).....	67
Figura 23 – Comparação entre curvas de adensamento com carregamento feito no fim do primário do estágio anterior (acima) e ao fim de 48h do estágio anterior (abaixo) para a mesma razão incremental de tensão (Martins, 2005). ....	68
Figura 24 – Ensaio de Martins (2005) para estudar a influência da razão incremental de tensão. ....	68
Figura 25 – Ensaio de Vieira (1988) para estudar a influência da razão incremental de tensão.....	69
Figura 26 – Ensaio de Martins (1990) para estudar a influência da razão incremental de tensão. ....	70
Figura 27 – Comparação entre as curvas teórica e experimental do ensaio de adensamento em amostra de caulim e 10% bentonita (Carvalho, 1997). (a) $\Delta\sigma/\sigma'=0,5$ . (b) $\Delta\sigma/\sigma'=1,0$ .....	71
Figura 28 – Efeito da água adsorvida (Terzaghi, 1941 <i>apud</i> Martins, 1992).....	74
Figura 29 – Curva de compressão na teoria de Taylor e Merchant (1940) .....	76
Figura 30 – Curvas de Taylor e Merchant (1940) para $R$ igual a 0,7 e diferentes valores de $F$ (Andrade, 2009).....	78
Figura 31 – Conceituação da Teoria B (Taylor, 1942).....	79
Figura 32 – Relação entre a resistência estrutural plástica e a velocidade de deformação (Taylor, 1942). ....	80
Figura 33 – Curvas de compressão para diferentes tempos (Taylor, 1942).....	81

Figura 34 – Curvas de compressão da Teoria B (adaptado de Taylor, 1942).....	82
Figura 35 – Curvas de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo da Teoria B de Taylor (1942).....	83
Figura 36 – Método das isotacas (adaptado de Šuklje, 1957).....	84
Figura 37 – Modelo de Bjerrum (1972).....	85
Figura 38 – Curvas de compressão na argila de Batiscan (Leroueil et al., 1985). ....	87
Figura 39 – Curvas de compressão normalizadas em relação à tensão de sobreadensamento obtidas dos ensaios edométricos para a argila de Batiscan (Leroueil et al., 1985). ....	87
Figura 40 – Crescimento da poropressão após fechamento da drenagem em diferentes velocidades de deformação (Thomasi, 2000).....	89
Figura 41 – Evolução da poropressão após fechamento ( $t = 0$ min), abertura ( $t = 40.000$ min) e novo fechamento ( $t = 72.000$ min) da drenagem (dos Santos, 2006).	90
Figura 42 – Resultados dos ensaios de adensamento de Garcia (1996).....	92
Figura 43 – Curvas de dissipação do excesso de poropressão no início do carregamento (Thomasi, 2000). ....	94
Figura 44 – Relação entre a parcela viscosa da tensão efetiva e a velocidade de deformação (Santa Maria e Santa Maria, 2018, a partir de Santa Maria, 2002). ....	95
Figura 45 – Caminho ideal percorrido por um elemento de solo durante o adensamento com resistência viscosa (Andrade, 2014).....	97
Figura 46 – Curva de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo para $V = 0,006$ (Andrade, 2014). ....	100
Figura 47 – Isócronas $u(Z, T)/\Delta\sigma_v$ vs $Z$ para $V = 0,006$ (Andrade, 2014).....	100
Figura 48 – Ajuste entre curva experimental e curva teórica de Andrade (2014)....	101
Figura 49 – Tipos de malhas drenantes (Almeida e Marques, 2010). (a) Quadrangular. (b) Triangular. ....	104
Figura 50 – Área equivalente de um geodreno (Almeida e Marques, 2010). ....	105
Figura 51 – Comparação entre as porcentagens de adensamento para as condições deformações verticais livres e deformações verticais iguais (Richart, 1959). ....	113
Figura 52 – Cilindro de solo com dreno central (Coelho, 1997) .....	114
Figura 53 – Relação entre $k_h/k_s$ , $v$ e $s$ , para $n = 5$ e $n = 15$ . ....	118
Figura 54 – Regiões I, II e III do corpo de prova em função do amolgamento (Santa Maria, 1977). ....	125

Figura 55 – Curvas de adensamento para diferentes tipos de drenagem radial, com $d_e = 10$ cm e espessura da região amolgada nula (Santa Maria, 1977).....	127
Figura 56 – Coeficiente de adensamento horizontal (Santa Maria, 1977).....	127
Figura 57 – Curvas recalque vs tempo obtidas em ensaio de adensamento com fluxo radial (Coutinho, 1976).....	128
Figura 58 – Comparação entre os modelos reológicos de diversas teorias (adaptado de Barden, 1965).....	129
Figura 59 – Resistência viscosa na teoria de Berry e Wilkinson (1969). (a) Curvas de resistência viscosa vs velocidade de deformação. (b) Comparação entre a curva de compressão simplificada (sem viscosidade) e a real (com viscosidade).....	130
Figura 60 – Excesso de poropressão inicial normalizado vs raio normalizado para a teoria de Berry e Wilkinson (1969), com $n = 20$ , $m = 5$ e diferentes valores de $M$ . .	131
Figura 61 – Curvas de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo para a teoria de Berry e Wilkinson (1969), com $n = 20$ , $m = 5$ e diferentes valores de $M$ . .	132
Figura 62 – Ensaios CRS com fluxo radial para diferentes velocidades de deformação (Seah e Juirnarongrit, 2003). (a) Curvas de compressão. (b) Relação entre a tensão de sobreadensamento e a velocidade de deformação. ....	133
Figura 63 – Adensamento primário e secundário de acordo com o modelo (adaptado de Andrade, 2014).....	139
Figura 64 – Coeficiente de compressibilidade $a_{vs}$ .....	141
Figura 65 – Caminho seguido durante o adensamento (Andrade, 2014). (a) Caminho obtido através da consideração de $\eta$ constante. (b) Caminho que mais se aproxima da realidade.....	143
Figura 66 – Representação esquemática de um dreno atuando em um volume cilíndrico de solo.....	145
Figura 67 – Representação de fluxo através de elemento de solo.....	145
Figura 68 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,001$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). ....	168
Figura 69 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,001$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). ....	168
Figura 70 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,003$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). ....	169

Figura 71 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,003$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	169
Figura 72 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,006$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	170
Figura 73 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,006$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	170
Figura 74 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,01$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	171
Figura 75 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,01$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	171
Figura 76 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,03$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	172
Figura 77 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,03$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	172
Figura 78 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,06$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	173
Figura 79 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,06$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	173
Figura 80 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,1$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	174
Figura 81 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,1$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	174
Figura 82 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,001$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	192
Figura 83 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,001$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	192
Figura 84 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,003$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	193
Figura 85 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,003$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	193
Figura 86 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,006$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	194

Figura 87 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,006$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	194
Figura 88 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,01$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	195
Figura 89 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,01$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	195
Figura 90 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,03$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	196
Figura 91 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,03$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	196
Figura 92 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,06$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	197
Figura 93 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,06$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	197
Figura 94 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,1$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	198
Figura 95 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_r = 0,1$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	198
Figura 96 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,001$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	226
Figura 97 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,001$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	226
Figura 98 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,003$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	227
Figura 99 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,003$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	227
Figura 100 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,006$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	228
Figura 101 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,006$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	228
Figura 102 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,01$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	229

Figura 103 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,01$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	229
Figura 104 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,03$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	230
Figura 105 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,03$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	230
Figura 106 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,06$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	231
Figura 107 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,06$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	231
Figura 108 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,1$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado). .....	232
Figura 109 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,1$ e diversos valores de $V_{rf}$ . .....	232
Figura 110 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial para a condição “equal strain” com $\eta$ constante e diversos valores de $V_r$ . ....	237
Figura 111 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,094$ ( $R = 0,75$ ) e diversos valores de $V_{rf}$ . .	241
Figura 112 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{rf} = 10.000$ e diversos valores de $V_{r0}$ . .....	241
Figura 113 – Isócronas $u/\Delta\sigma$ vs $r/r_e$ do caso “equal strain” para $n = 20$ ; $V_{r0} = 0,03$ e $V_{rf} = 10.000$ (linha cheia) em comparação com $V_{r0} = V_{rf} = 0,03$ (traço-e-ponto) e com Barron (1948) (tracejado). .....	243
Figura 114 – Comparação entre as curvas “free strain” (linha cheia) e “equal strain” (linha tracejada) com $\eta$ constante e $n = 20$ . .....	244
Figura 115 – Comparação entre curvas “equal strain” para $n = 20$ e diferentes valores de $V_{rf}$ , $V_{r0} = 0,094$ (linha cheia) em comparação com $V_{r0} = V_{rf}$ (traço-e-ponto). .....	246
Figura 116 – Comparação entre o excesso de poropressão inicial da teoria “free strain” proposta nesta tese (linha cheia) com as da teoria de Berry e Wilkinson (1969) (linha tracejada). .....	251



Figura 117 – Comparação entre a teoria “equal strain” para $\eta$ variável (linha cheia) com a teoria de Berry e Wilkinson (1969) (linha tracejada) para $n = 20$ . (a) Hipótese I. (b) Hipótese II.....	253
Figura 118 – Esquema das curvas de compressão. ....	258
Figura 119 – Curvas de compressão normalizadas, para $n = 20$ e diferentes valores de $V_{rf}$ . (a) Curvas de laboratório: $V_{r0} = 0,05$ ( $R = 85\%$ ). (b) Curvas de campo: $V_{r0} = 0,000005$ ( $R = 99,998\%$ ). ....	261
Figura 120 – Isótacas obtidas na presente teoria.....	264

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Excesso de poropressão inicial médio nas soluções “free strain” e “equal strain” para diferentes valores de $V_r$ . .....	245
Tabela 2 – Valores de $V_{r0}$ e $R$ encontrados de acordo com as duas hipóteses. ....	254

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CIU	Ensaio triaxial adensado não drenado (Consolidated Isotropic Undrained)
COPPE	Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
CRS	Constant Strain of Rate
EOP	Fim da compressão primária (End of Primary)
MIP	Porosimetria por intrusão de mercúrio
MIT	Massachusetts Institute of Technology
OCR	Razão de sobreadensamento (Over Consolidation Ratio)
OCR <sub>sec</sub>	Razão de sobreadensamento relativa ao fim do adensamento secundário
PTE	Princípio das Tensões Efetivas
PTEE	Princípio das Tensões Efetivas Expandido
PVC	Policloreto de vinila
SEM	Microscópio eletrônico de varredura
SENAC	Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Coeficiente de compressibilidade relativo ao recalque total das teorias de Taylor e Merchant e da Teoria B
$a$	Dimensão maior do geodreno
$A$	Área da superfície lateral do dreno
$a_u$	Coeficiente de compressibilidade: $a_u = \frac{\partial e}{\partial u}$
$a_v$	Coeficiente de compressibilidade relativo ao recalque primário
$a_{vs}$	Coeficiente de compressibilidade relativo à parcela sólido-sólido da tensão efetiva
$A_0$	Expressão composta pelas funções de Bessel, de ordem 0
$A_1$	Expressão composta pelas funções de Bessel, de ordem 1
$b$	Dimensão menor do geodreno
$B_0$	Expressão composta pelas funções de Bessel, de ordem 0
$B_1$	Expressão composta pelas funções de Bessel, de ordem 1
$b_1$	Parâmetro de ajuste da teoria de Berry e Wilkinson (1969)
$C_c$	Índice de compressão virgem
$c_h$	Coeficiente de adensamento horizontal
$c_i$	Constante de ordem $i$
$c_p$	Coeficiente de adensamento da Teoria B
$c_r$	Coeficiente de adensamento radial
$c_{rs}$	Coeficiente de adensamento radial relativo à parcela sólido-sólido da tensão efetiva
$c_r^*$	Coeficiente de adensamento radial corrigido
$c_v$	Coeficiente de adensamento vertical
$c_v^*$	Coeficiente de adensamento vertical equivalente para $F \rightarrow \infty$ na teoria de Taylor e Merchant
$C_\alpha$	Coeficiente de compressão secundária
$C(x_i)$	Função de $x_i$
$D$	Operador linear da derivação
$d$	Distância à superfície da partícula de argila a partir da qual a água viscosa se torna água comum

$d_e$	Diâmetro de influência do dreno
$d_s$	Diâmetro da região amolgada
$d_w$	Diâmetro do dreno
$e$	Índice de vazios
$e_f$	Índice de vazios final
$e_G$	Índice de vazios no ponto G
$e_p$	Índice de vazios no tempo $t_p$
$e_0$	Índice de vazios inicial
$\bar{e}$	Índice de vazios médio
$F$	Parâmetro da teoria de Taylor e Merchant: $F = \frac{\mu H_d^2}{Rc_v}$
$f_b$	Relação da teoria clássica entre tensão efetiva e índice de vazios na Teoria B
$F''$	Parâmetro da teoria de Santa Maria
$F_1''$	Parâmetro da teoria de Santa Maria
$f\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)$	Função da velocidade de deformação
$f(n)$	Função de $n$ da teoria de Barron
$F(r)$	Função de $r$
$G(t)$	Função de $t$
$h$	Carga hidráulica
$H_d$	Altura de drenagem
$i$	Índice
$i_r$	Gradiente hidráulico na direção radial
$H$	Altura
$j$	Índice
$J$	Parâmetro da Teoria B
$J_0$	Função de Bessel de 1ª espécie, de ordem 0
$J_1$	Função de Bessel de 1ª espécie, de ordem 1
$1/K$	Resistência hidráulica superficial de contato da teoria de Scott
$k$	Índice
$K$	Módulo volumétrico
$k_a$	Coeficiente de permeabilidade da região amolgada externa

$K_f$	Coeficiente de empuxo no repouso na situação de ruptura
$k_h$	Coeficiente de permeabilidade na direção horizontal
$k_r$	Coeficiente de permeabilidade na direção radial
$k_s$	Coeficiente de permeabilidade da região amolgada central
$k_v$	Coeficiente de permeabilidade na direção vertical
$k_w$	Coeficiente de permeabilidade do dreno
$K_0$	Coeficiente de empuxo no repouso
$K_{0l}$	Coeficiente de empuxo no repouso limite
$K_{0n}$	Coeficiente de empuxo no repouso de um solo normalmente adensado
$l$	Espaçamento dos drenos
$m$	Contador de somatório
$m$	Parâmetro de ajuste da teoria de Berry e Wilkinson
$M$	Parâmetro de somatório: $M = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$
$M$	Fator adimensional da teoria de Berry e Wilkinson
$m_v$	Coeficiente de variação volumétrica
$M'$	Módulo edométrico que leva em conta a parcela sólido-sólido da tensão efetiva da teoria de Andrade
$n$	Razão entre o raio de influência do dreno e o raio do dreno
$n$	Razão entre as distâncias de drenagem de uma camada de argila e de um corpo de prova
$p$	Pressão aplicada no corpo de prova esférico do ensaio de De Jong e Verruijt
$p_b$	Resistência de ligação da Teoria B
$p_p$	Resistência estrutural plástica à compressão da Teoria B
$p_v$	Resistência viscosa da Teoria B
$p'$	Eixo horizontal do diagrama $p'$ vs $q'$ tal que $p' = \frac{\sigma'_v + \sigma'_h}{2}$
$Q$	Vazão
$Q_{entra}$	Vazão que entra no elemento de solo
$Q_{sai}$	Vazão que sai do elemento de solo
$q$	Eixo vertical do diagrama $p'$ vs $q$ tal que $q = \frac{\sigma'_v - \sigma'_h}{2}$
$r$	Direção radial
$R$	Razão entre recalque primário e recalque total

$r_a$	Raio interno da região amolgada exterior
$r_e$	Raio de influência do dreno
$r_s$	Raio da região amolgada
$r_w$	Raio do dreno
$R_2$	Raio do corpo de prova esférico do ensaio de De Jong e Verruijt
$s$	Razão entre o raio da região amolgada e o raio do dreno
$S$	Área da superfície carregada
$S_c$	Área da superfície circular
$S_h$	Área da superfície hexagonal
$S_q$	Área da superfície quadrangular
$t$	Tempo
$t_p$	Tempo prático de fim do adensamento primário
$t_{50}$	Tempo correspondente a 50% de adensamento em um estágio de carga
$T$	Fator Tempo
$T_k$	Fator Tempo da Teoria B
$T_r$	Fator Tempo Radial
$T_{rs}$	Fator Tempo Radial relativo à parcela sólido-sólido da tensão efetiva
$u$	Poropressão
$u_0$	Excesso de poropressão inicial
$u_2$	Excesso de poropressão no limite externo do corpo de prova esférico do ensaio de De Jong e Verruijt
$u_h$	Poropressão hidrostática
$u_m$	Valor máximo de excesso de poropressão num determinado tempo
$u_r$	Excesso de poropressão variável no eixo radial
$u_{rz}$	Excesso de poropressão variável nos eixos radial e vertical
$u_z$	Excesso de poropressão variável no eixo vertical
$\bar{u}$	Excesso de poropressão médio
$\bar{U}$	Porcentagem média de adensamento
$\bar{u}_0$	Excesso de poropressão inicial médio
$\bar{u}_r$	Valor médio de $u_r$
$\bar{U}_r$	Porcentagem de adensamento média radial
$\bar{u}_{rz}$	Valor médio de $u_{rz}$
$\bar{U}_{rz}$	Porcentagem de adensamento média para fluxo combinado

$\overline{u_z}$	Valor médio de $u_z$
$\overline{U_z}$	Porcentagem de adensamento média vertical
$V$	Fator Viscosidade da teoria de Andrade
$v_r$	Velocidade na direção radial
$V_r$	Fator Viscosidade Radial
$V_{r0}$	Fator Viscosidade Radial inicial
$V_{rf}$	Fator Viscosidade Radial final
$V_s$	Volume de sólidos
$V_t$	Volume total
$V_v$	Volume de vazios
$v_z$	Velocidade na direção vertical
$v_\theta$	Velocidade na direção angular
$x$	Produto entre $r$ e $\Omega$
$X_i$	Parâmetro adimensional tal que $X_i = x_i \frac{t}{T_{rs}}$
$x_1$	Primeira raiz do polinômio característico da equação diferencial
$x_2$	Segunda raiz do polinômio característico da equação diferencial
$Y_0$	Função de Bessel de 2ª espécie, de ordem 0
$Y_1$	Função de Bessel de 2ª espécie, de ordem 1
$z$	Direção vertical
$Z$	Fator Profundidade
$\alpha$	Raiz da equação $J_1(\alpha n)Y_0(\alpha) - Y_1(\alpha n)J_0(\alpha) = 0$
$\beta$	Raiz que satisfaz $J_0(\beta) = 0$
$\gamma_w$	Peso específico da água
$\Delta$	Discriminante
$\Delta e$	Variação do índice de vazios
$\Delta t$	Intervalo de tempo
$\Delta u$	Variação da poropressão
$\Delta \sigma$	Variação da tensão total
$\Delta \sigma_v$	Variação da tensão vertical total
$\Delta \sigma'_v$	Variação da tensão vertical efetiva
$\varepsilon$	Deformação específica
$\varepsilon_a$	Deformação axial específica



$\varepsilon_v$	Deformação volumétrica específica
$\varepsilon_z$	Deformação vertical específica
$\dot{\varepsilon}$	Velocidade de deformação específica
$\dot{\varepsilon}_a$	Velocidade de deformação axial específica
$\dot{\varepsilon}_v$	Velocidade de deformação volumétrica específica
$\eta$	Coeficiente de viscosidade
$\eta_0$	Coeficiente de viscosidade inicial
$\eta_f$	Coeficiente de viscosidade final
$\bar{\eta}$	Coeficiente de viscosidade médio
$\theta$	Direção angular
$\Theta$	Parâmetro das teorias de Martins e Lacerda, de Martins et al. e de Carvalho
$\lambda$	Parâmetro que relaciona $\eta_f$ e $\eta_0$ : $\lambda = \frac{\eta_f - \eta_0}{\eta_f}$
$\Lambda$	Constante
$\mu$	Coeficiente de compressão secundária da teoria de Taylor e Merchant
$\nu$	Parâmetro que leva em conta o efeito de “smear” das teorias de Barron e de Hansbo
$\nu''$	Parâmetro da teoria de Santa Maria
$\Pi$	Parâmetro da teoria de Scott: $\Pi = 1 + 4 \frac{1}{K} \frac{k_r}{d_e}$
$\rho_p$	Recalque primário
$\rho_t$	Recalque total
$\sigma$	Tensão total
$\sigma_1$	Tensão principal total 1
$\sigma_2$	Tensão principal total 2
$\sigma_3$	Tensão principal total 3
$\sigma_r$	Tensão radial
$\sigma_t$	Tensão tangencial
$\sigma_v$	Tensão vertical total
$\sigma'$	Tensão efetiva
$\sigma'_1$	Tensão principal efetiva 1
$\sigma'_2$	Tensão principal efetiva 2
$\sigma'_3$	Tensão principal efetiva 3

$\sigma'_{3c}$	Tensão efetiva de confinamento
$\sigma'_h$	Tensão horizontal efetiva
$\sigma'_{hA}$	Tensão horizontal efetiva no ponto A
$\sigma'_{hB}$	Tensão horizontal efetiva no ponto B
$\sigma'_{oct}$	Tensão efetiva octaédrica
$\sigma'_s$	Parcela sólido-sólido da tensão efetiva
$\sigma'_v$	Tensão vertical efetiva
$\sigma'_{v0}$	Tensão vertical efetiva inicial
$\sigma'_{vA}$	Tensão vertical efetiva no ponto A
$\sigma'_{vB}$	Tensão vertical efetiva no ponto B
$\sigma'_{vG}$	Tensão vertical efetiva no ponto G
$\sigma'_{vf}$	Tensão vertical efetiva final
$\sigma'_{vs}$	Parcela sólido-sólido da tensão vertical efetiva
$\sigma'_{v\eta}$	Parcela viscosa da tensão vertical efetiva
$\sigma'_\eta$	Parcela viscosa da tensão efetiva
$\bar{\sigma}$	Tensão total média
$\bar{\sigma}'$	Tensão efetiva média
$\tau$	Resistência viscosa das teorias de Barden (1965) e Berry e Wilkinson (1969)
$\gamma$	Constante
$\phi'$	Ângulo de atrito efetivo
$\Phi(x)$	Função de $x$
$\psi_1$	Parâmetro da teoria de Taylor e Merchant: $\psi_1 = -\frac{1}{2}(F + M^2)$
$\psi_2$	Parâmetro da teoria de Taylor e Merchant: $\psi_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(F + M^2) - 4RFM^2}$
$\psi_3$	Parâmetro da teoria de Taylor e Merchant: $\psi_3 = \frac{\psi_1 + M^2}{\psi_2}$
$\omega$	Ordem da equação de Bessel
$\Omega$	Constante

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>28</b>
<b>1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>32</b>
1.1 O Princípio das Tensões Efetivas e a compressão secundária .....	32
1.1.1 O Princípio das Tensões Efetivas e sua interpretação .....	32
1.1.2 A validade do Princípio das Tensões Efetivas .....	34
1.1.3 Descoberta e definição da compressão secundária .....	39
1.1.4 Compressão secundária e o estado de tensões efetivas.....	43
1.1.5 Abordagens da compressão secundária.....	57
1.1.5.1 Mecanismo de busca por uma posição mais estável.....	58
1.1.5.2 Mecanismo baseado na viscosidade da água adsorvida.....	60
1.1.5.3 Mecanismo baseado na Teoria dos Processos Cinéticos .....	62
1.1.5.4 Mecanismo baseado na existência de macroporos e microporos .....	64
1.1.6 Influência da razão incremental de tensão no adensamento secundário .....	65
1.2 Modificação do conceito original do Princípio das Tensões Efetivas.....	72
1.2.1 Contribuição de Terzaghi (1941) .....	74
1.2.2 Contribuição de Taylor e Merchant (1940) e Taylor (1942) .....	76
1.2.3 Contribuição de Šuklje (1957), Bjerrum (1972) e Leroueil et al. (1985) .....	84
1.2.4 Estudos recentes sobre a parcela viscosa da tensão efetiva .....	88
1.2.5 Teoria do adensamento de Andrade (2014) .....	96
1.3 Adensamento com drenagem radial .....	102
1.3.1 Geometria de instalação de drenos .....	104
1.3.2 Teoria clássica do adensamento para drenagem radial .....	106
1.3.2.1 Deformações verticais livres (“free strain”) .....	108
1.3.2.2 Deformações verticais iguais (“equal strain”).....	110
1.3.3 Equação simplificada da condição “equal strain” .....	113
1.3.4 Amolgamento (“smear”) e resistência do dreno.....	116
1.3.5 Adensamento com drenagem combinada (vertical e radial) .....	119
1.3.6 Teorias para ensaios de adensamento com fluxo radial.....	122
1.3.6.1 Adensamento com drenagem radial externa .....	122
1.3.6.2 Adensamento com drenagem radial interna e externa .....	124
1.3.7 Viscosidade e compressão secundária no adensamento com fluxo radial...	128

<b>2</b>	<b>TEORIA DO ADENSAMENTO PARA DRENAGEM RADIAL CONSIDERANDO A VISCOSIDADE .....</b>	<b>134</b>
2.1	Hipóteses simplificadoras .....	135
2.2	Dedução da equação do adensamento para drenagem radial interna considerando a viscosidade.....	144
2.2.1	Deformações verticais livres (“free strain”) com coeficiente de viscosidade constante .....	150
2.2.1.1	Resolução do problema de valor de contorno .....	154
2.2.1.2	Porcentagem média de adensamento .....	164
2.2.1.3	Soluções gráficas .....	167
2.2.2	Deformações verticais iguais (“equal strain”) com coeficiente de viscosidade constante .....	175
2.2.2.1	Resolução do problema de valor de contorno .....	179
2.2.2.2	Porcentagem média de adensamento .....	189
2.2.2.3	Soluções gráficas .....	191
2.2.3	Deformações verticais iguais (“equal strain”) com coeficiente de viscosidade variável .....	199
2.2.3.1	Resolução do problema de valor de contorno .....	205
2.2.3.2	Porcentagem média de adensamento .....	219
2.2.3.3	Relação entre recalque primário e recalque total .....	222
2.2.3.4	Soluções gráficas .....	225
<b>3</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>233</b>
3.1	Soluções teóricas obtidas .....	233
3.2	Influência da viscosidade .....	236
3.2.1	Coeficiente de viscosidade constante.....	237
3.2.2	Coeficiente de viscosidade variável.....	239
3.3	Comparação entre as soluções encontradas.....	244
3.4	Comparação com outras teorias.....	247
3.5	Campo vs laboratório.....	256
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS .....</b>	<b>265</b>
4.1	Conclusões .....	265
4.2	Sugestões para pesquisas futuras.....	268
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>270</b>
	<b>APÊNDICE A – ANÁLISE DE <math>X_1</math> E <math>X_2</math>.....</b>	<b>280</b>

<b>APÊNDICE B – LIMITE QUANDO <math>V_{RF}</math> TENDE AO INFINITO .....</b>	<b>282</b>
<b>APÊNDICE C – LIMITE QUANDO <math>V_{RF}</math> TENDE A <math>V_{R0}</math>.....</b>	<b>284</b>
<b>APÊNDICE D – EQUAÇÕES “EQUAL STRAIN” SIMPLIFICADAS.....</b>	<b>286</b>

## INTRODUÇÃO

### Motivação

Ao lidar com depósitos de solos moles, a previsão de recalques representa um desafio, mesmo para os engenheiros geotécnicos mais experientes. As limitações inerentes às teorias levam, muitas vezes, a estimativas que divergem do recalque real no campo. Testes de laboratório são realizados sob condições controladas e, ainda assim, seus resultados podem divergir das teorias existentes.

As teorias de adensamento unidimensional de Terzaghi e Fröhlich (1936), para fluxo vertical, e de Barron (1948), para fluxo radial, são fundamentais para o desenvolvimento de todas as outras, mas elas compreendem apenas recalque primário. A denominada compressão secundária é observada, em laboratório, após o final do adensamento primário, com maior magnitude nos solos com elevado teor de matéria orgânica, e ocorre sob tensão vertical efetiva constante. Este fato contraria o Princípio das Tensões Efetivas enunciado por Terzaghi (1936), que diz que as deformações ocorrem como consequência da variação no estado de tensões efetivas.

A abordagem mais tradicional a respeito do adensamento secundário considera uma relação retilínea entre índice de vazios e o tempo (em escala log) e é quantificado pelo parâmetro  $C_\alpha$ . Usualmente se admite que seu valor seja aproximadamente constante ao longo do tempo, o que sugere que o processo nunca se encerra. No entanto, diversos ensaios de longa duração indicam que o processo tem um fim e que, conseqüentemente,  $C_\alpha$  tende a zero com o tempo. Esta abordagem supõe o rearranjo dos grãos buscando uma posição de maior estabilidade após a compressão primária.

Ao longo do último século, diversos trabalhos buscaram entender a compressão secundária – sua existência e o mecanismo que a causava. Particularmente nos últimos 30 anos, pesquisadores do Grupo de Reologia dos Solos da COPPE se dedicaram a compreender o fenômeno, chegando à conclusão de que ele é melhor explicado à luz da viscosidade da água adsorvida e da velocidade de deformação.

Isto culminou na proposta de Andrade (2014), que desenvolveu uma solução do adensamento unidimensional (vertical) levando em conta que a tensão vertical efetiva possa ser dividida em duas parcelas: uma de origem viscosa, que se estabelece onde os grãos se tocam através da água adsorvida (contatos viscosos), e a outra que se estabelece nos contatos do tipo sólido-sólido. Esta foi uma concepção apresentada nos estudos de Thomasi (2000), a partir dos trabalhos de Terzaghi (1941) e Taylor (1942).

Embora os resultados obtidos por Andrade (2014) tenham sido os mesmos da Teoria B de Taylor (1942), muitos aspectos interessantes foram introduzidos. Um destes aspectos diz respeito a um parâmetro adimensional, denominado Fator Viscosidade, que juntamente com o Fator Tempo governa o adensamento unidimensional.

Outro aspecto discutido por Andrade (2014) é o fato de os resultados teóricos por ele obtidos não conseguirem reproduzir a “dupla onda” observada nos gráficos recalque vs tempo (log) dos ensaios de adensamento de longa duração em laboratório. Isto se deveu, na visão de Andrade (2014), ao fato de a relação entre a parcela viscosa e a velocidade de deformação ter sido considerada linear.

O autor desta tese acredita que o comportamento viscoso dos solos plásticos, conferido pela água adsorvida, aliado à influência da velocidade de deformação, é a peça que falta para entender certos fenômenos da mecânica dos solos; como por exemplo, a compressão secundária.

Até o momento, a influência da viscosidade da forma como proposta por Thomasi (2000) foi utilizada no desenvolvimento de uma teoria de adensamento unidimensional com fluxo apenas vertical (Andrade, 2014). O autor desta tese desconhece qualquer solução teórica do adensamento unidimensional com fluxo radial que leve em conta o efeito viscoso através da mesma abordagem de Thomasi (2000) e Andrade (2014).

A motivação deste trabalho foi desenvolver uma teoria unidimensional com fluxo radial considerando os efeitos da compressão secundária através da viscosidade.

## **Objetivos**

O principal objetivo desta tese é o desenvolvimento de teorias de adensamento unidimensional com fluxo radial levando-se em conta a influência da viscosidade da água adsorvida no processo.

Foram deduzidas e solucionadas analiticamente equações para os casos de deformações verticais iguais e deformações verticais livres (Barron, 1948), considerando o efeito da viscosidade através de uma relação linear entre a parcela viscosa da tensão efetiva e a velocidade de deformação. Desse modo, tenciona-se complementar a ideia iniciada por Andrade (2014), que fez o mesmo para fluxo vertical. Embora comentados, não serão incorporados nesta tese os efeitos de “smear” e da resistência hidráulica do dreno.

Adicionalmente, foi resolvido o caso de deformações verticais iguais admitindo uma relação não-linear entre a parcela viscosa e a velocidade de deformação, também de forma analítica. A solução apresentou o efeito da “dupla onda” no gráfico recalque vs tempo (log). Esta foi uma sugestão de Andrade (2014) com base em seus próprios resultados e em discussões de natureza teórica.

Por fim, comparam-se os casos de deformações verticais iguais e deformações verticais livres, para verificar se o efeito viscoso distancia – ou não – uma solução da outra, e também comparam-se as soluções para a condição de deformações verticais iguais com coeficientes de viscosidade constante e variável, para observar sua influência no comportamento das curvas.

## **Descrição dos capítulos**

Após esta introdução, o capítulo 1 é destinado à revisão bibliográfica. Nesse capítulo serão revistos conceitos relacionados ao Princípio das Tensões Efetivas (PTE), à compressão secundária e à drenagem radial. Inicialmente será feita uma discussão a respeito da validade do PTE e da possível contradição ao PTE causada pela existência da compressão secundária, além de uma revisão das principais abordagens que buscam explicar o fenômeno. Em seguida, serão apresentados os principais trabalhos que nortearam o entendimento sobre viscosidade adotado nesta



tese. Por fim, uma revisão sobre os conceitos fundamentais do adensamento com drenagem radial.

O capítulo 2 apresenta as teorias propostas. Inicialmente serão discutidas as hipóteses simplificadoras e suas diferenças em relação às teorias clássicas – em particular, a de Barron (1948). As principais diferenças envolvem o efeito da viscosidade e sua formulação matemática para que seja introduzido no problema. Em seguida, serão desenvolvidas as soluções para deformações verticais livres e deformações verticais iguais. Ao final de cada solução serão plotadas as curvas de excesso de poropressão médio vs raio normalizado e de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo.

O capítulo 3 discute os resultados obtidos. É feita uma rápida revisão das equações encontradas, além de uma análise da influência do coeficiente de viscosidade, comparações tanto entre os resultados obtidos quanto com outras teorias, além de uma discussão sobre a transposição dos resultados de laboratório para o campo sob a ótica da teoria não-linear desenvolvida.

Por último, o capítulo 4 reúne as conclusões do trabalho e enumera sugestões para pesquisas futuras.

Ao fim dos capítulos principais seguem as Referências e os Apêndices.

## **1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O presente trabalho é pautado nos conceitos de tensão efetiva, teorias do adensamento, compressão secundária, viscosidade do solo oriunda da água adsorvida nos solos plásticos, velocidade de deformação e drenagem radial. Sendo assim, é necessária uma revisão geral dos fundamentos que regem o mecanismo do adensamento.

### **1.1 O Princípio das Tensões Efetivas e a compressão secundária**

O Princípio das Tensões Efetivas (PTE) enunciado por Terzaghi (1936) forma a base da Mecânica dos Solos. Este princípio apresenta o conceito das tensões efetivas e dita sua relação com os efeitos físicos observáveis nos solos, tais como deformações e resistência.

Assim como qualquer princípio existente na ciência, o PTE é composto de um enunciado proposto sem que seja decorrente de outros enunciados – daí o nome “princípio”. É um ponto de partida para que a teoria se desenvolva. À medida que os resultados experimentais comprovem a validade de um princípio, ele adquire cada vez mais credibilidade. Entretanto, ele deixa de ser geral a partir do momento em que se observa algum caso em que sua validade não se verifica – que, como será visto adiante, é o que acontece com o PTE.

#### **1.1.1 O Princípio das Tensões Efetivas e sua interpretação**

O PTE pode ser entendido como sendo composto de duas partes (Atkinson e Bransby, 1978), ainda que não haja qualquer divisão na sua apresentação formal em seu enunciado original (Terzaghi, 1936). A primeira parte diz respeito à definição de tensão efetiva e à equação que governa a relação entre as tensões total e efetiva e a poropressão. A segunda parte dá a importância das tensões efetivas quanto ao seu papel nas relações tensão-deformação-resistência nos solos.

Primeira parte:

*“As tensões em qualquer ponto em uma massa de solo podem ser computadas a partir das tensões principais totais  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  que atuam neste ponto. Se os vazios do solo estiverem preenchidos com água sob uma pressão  $u$ , as tensões principais consistem de duas parcelas. Uma parcela de valor  $u$  que age na água e na parte sólida, em todas as direções, com igual magnitude. Essa parcela é denominada pressão neutra. As parcelas remanescentes  $\sigma'_1 = \sigma_1 - u$ ,  $\sigma'_2 = \sigma_2 - u$  e  $\sigma'_3 = \sigma_3 - u$  são ‘sentidas’ exclusivamente pelo esqueleto sólido do solo. Estas parcelas das tensões principais totais são denominadas tensões principais efetivas”.*

Atualmente, a pressão neutra é chamada de poropressão.

Como decorrência da primeira parte do PTE, escreve-se a equação (1):

$$\sigma' = \sigma - u \quad (1)$$

Onde  $\sigma'$ ,  $\sigma$  e  $u$  são respectivamente a tensão efetiva, a tensão total e a poropressão atuando em qualquer plano que passa por um ponto. Embora a primeira parte do PTE tenha sido enunciada usando-se as tensões principais para definir as tensões efetivas e estabelecer a equação (1), esta é válida para todos os planos porque a água não resiste ao cisalhamento, apenas às tensões normais.

Segunda parte:

*“Todos os efeitos mensuráveis oriundos da variação do estado de tensões, tais como compressão, distorção e variação da resistência ao cisalhamento, são devidos exclusivamente à variação do estado de tensões efetivas”.*

Cabe aqui destacar que a prática da engenharia não utiliza a segunda parte do Princípio das Tensões Efetivas exatamente da forma como ele foi enunciado. O PTE diz que os efeitos mensuráveis são oriundos exclusivamente da variação do estado de tensões efetivas, mas não obriga que uma variação no estado de tensões efetivas provoque tais efeitos, embora se entenda dessa maneira na Geotecnia.

Na verdade, o que se faz é lançar mão da recíproca da 2ª parte do PTE para prever o comportamento dos solos. Por exemplo, ao se aplicar um carregamento, espera-se poder traduzi-lo em termos de tensões totais e “descobrir” qual parte do

referido carregamento é transferida para as tensões efetivas e qual parte é suportada pela água. A partir daí, entende-se que a variação do estado de tensões efetivas de fato implica em um efeito mensurável (deformação). Enquanto o PTE diz que, se houve um efeito mensurável, ele é consequência da variação do estado de tensões efetivas, a prática da engenharia entende que, se houver variação do estado de tensões efetivas, então haverá um efeito em termos de deformações.

Admite-se que a recíproca é verdadeira para que se possa dimensionar e projetar, e o próprio Terzaghi se fazia valer disso, mas essa interpretação não está explícita no enunciado do PTE.

### 1.1.2 A validade do Princípio das Tensões Efetivas

A partir do enunciado estabelecido por Terzaghi (1936), Atkinson e Bransby (1978) propuseram três corolários, com o objetivo de fazer valer a recíproca do PTE. Esses corolários descrevem o comportamento que os solos exibirão em função do estado de tensões efetivas ao qual estão submetidos. São eles:

- Corolário 1: *“O comportamento (em termos de engenharia) de dois solos com a mesma estrutura e mineralogia será o mesmo se eles estiverem submetidos ao mesmo estado de tensões efetivas”*;
- Corolário 2: *“Se um solo for carregado ou descarregado sem qualquer mudança de volume e sem qualquer distorção, não haverá variação no estado de tensões efetivas”*;
- Corolário 3: *“Um solo sofrerá expansão (e perderá resistência) ou sofrerá compressão (e ganhará resistência) se a poropressão isoladamente for aumentada ou diminuída”*.

Atkinson e Bransby (1978) partiram da recíproca da segunda parte do PTE para elaborar tais corolários. A rigor, eles não deveriam ser chamados “corolários”, pois eles partem da interpretação de que vale a reciprocidade na segunda parte do Princípio, em vez de partirem do Princípio em si. No entanto, é largamente entendido que a reciprocidade está implícita no enunciado.

Embora os corolários propostos por Atkinson e Bransby (1978) sejam de certa forma intuitivos, Martins (1992) utilizou diversos ensaios encontrados na literatura como contra-exemplos que invalidam tais corolários. Os contra-exemplos que sustentam essa afirmação são os seguintes:

- Contra-exemplo do corolário 1:

A Figura 1 ilustra dois ensaios em corpos de prova da argila da Baía de San Francisco (Califórnia) realizados sob velocidades de deformação diferentes (Lacerda, 1976). Como os dois corpos de prova são provenientes do mesmo solo, ambos possuem a mesma estrutura e mineralogia. Estando submetidos ao mesmo estado inicial de tensões efetivas e seguindo o mesmo caminho de tensões totais, eles deveriam apresentar o mesmo comportamento. No entanto, como os corpos de prova foram ensaiados com velocidades diferentes, apresentaram comportamentos diferentes. Portanto, o primeiro corolário é falso.

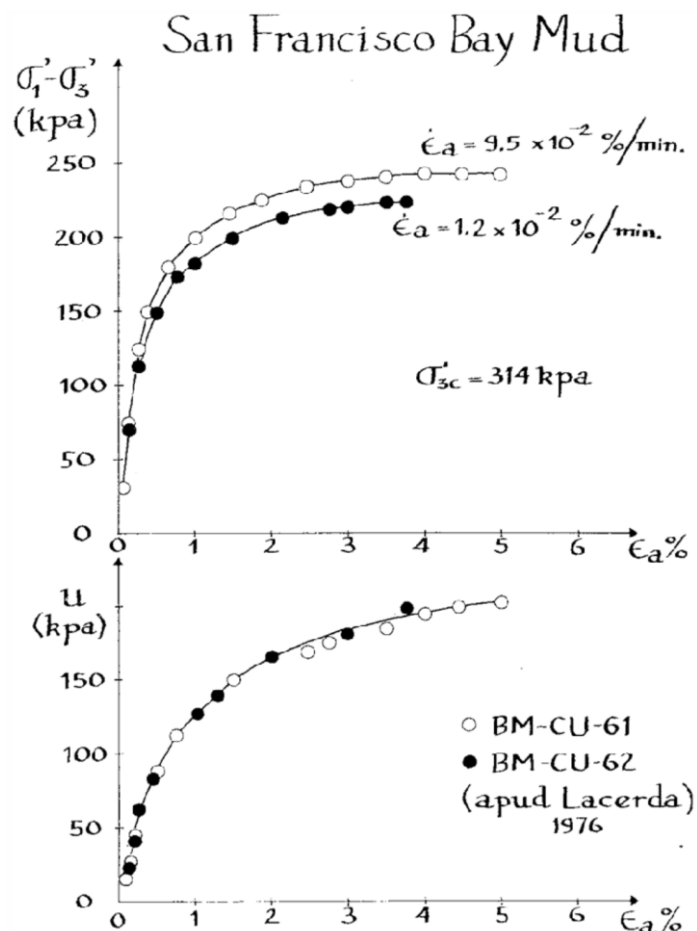


Figura 1 – Influência da velocidade (Martins, 1992, a partir de Lacerda, 1976).

- Contra-exemplo do corolário 2:

Martins (1992) também recorreu aos ensaios não drenados de relaxação de tensões realizados por Lacerda (1976), como contra-exemplo do segundo corolário. No ensaio de relaxação de tensões não drenado, o corpo de prova é ensaiado como em um ensaio CIU, com velocidade de deformação controlada até uma determinada tensão desviadora, sem que se atinja a ruptura. A relaxação ocorre quando a prensa é desligada e, a partir daí, se observa o comportamento do corpo de prova.

Como se trata de ensaio não drenado em solo saturado, não há variação de volume. E também não há distorção, porque não há deslocamento do pistão uma vez que a prensa é desligada. Entretanto, o ensaio realizado por Lacerda (1976) constatou variação no estado de tensões efetivas, como mostra a Figura 2. Portanto, o corolário 2 é falso, ou seja, pode haver variação no estado de tensões efetivas sem que haja variação de volume e distorção.

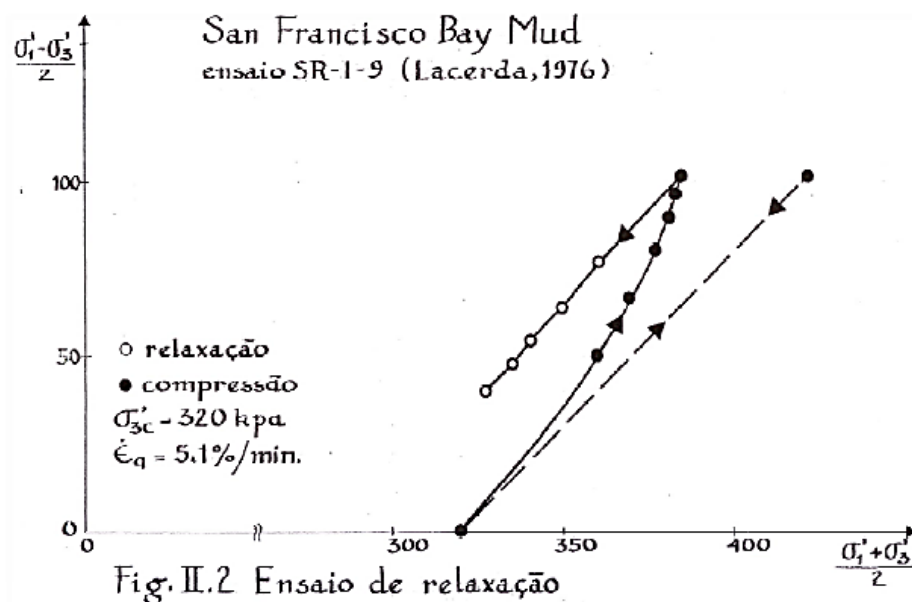


Figura 2 – Ensaio de relaxação (Martins, 1992, a partir de Lacerda, 1976).

- Contra-exemplo do corolário 3:

Para apresentar um contra-exemplo ao terceiro corolário, Martins (1992) recorreu a ensaios de adensamento unidimensional realizados por Lima (1993) numa câmara triaxial, numa amostra da argila do Sarapuí. No ensaio de adensamento em questão (Figura 3), a drenagem era fechada ao final do

adensamento primário e a poropressão medida a partir de então. A drenagem fechada impedia variações de volume e distorção. No entanto, a partir do fechamento da drenagem foi constatado um crescimento da poropressão. O corolário diz que o solo comprime ou expande se houver somente variação de poropressão, mas o ensaio demonstrou que é possível haver variação da poropressão sem haver variação de volume do solo. Contra-exemplos semelhantes podem ser encontrados em ensaios de adensamento hidrostático realizados por Holzer et al. (1973), Thomasi (2000) e Aguiar (2014).

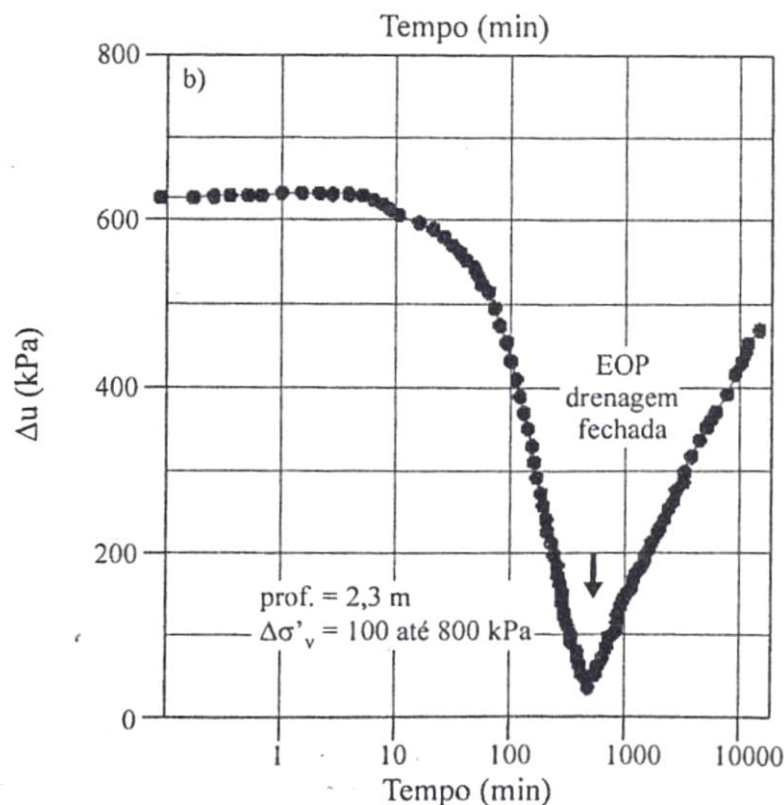


Figura 3 – Aumento da poropressão após o fechamento da drenagem (Lima, 1993).

Martins (1992) concluiu, a partir desses contra-exemplos, que o Princípio das Tensões Efetivas só pode ser interpretado da forma como foi enunciado, não valendo a recíproca comentada anteriormente. Havendo variação de volume ou distorção, isto certamente é decorrente da variação do estado de tensões efetivas. Porém, se houver variação do estado de tensões efetivas, isso não necessariamente implica em variação de volume ou distorção. Ainda com base nos contra-exemplos, Martins (1992) sugeriu que o efeito da velocidade (ou do tempo, à exceção do

adensamento primário) é a peça que falta para a completude do Princípio das Tensões Efetivas.

Para Aguiar (2014), no entanto, os resultados de Lacerda (1976) (Figura 1) mostram que a segunda parte do Princípio das Tensões Efetivas não é válida mesmo na forma como foi enunciada. Dois corpos de prova provenientes do mesmo solo, partindo do mesmo estado de tensões efetivas inicial e seguindo o mesmo caminho de tensões totais apresentaram resistências ao cisalhamento diferentes, bastando para isso terem sido cisalhados com velocidades diferentes. Sendo assim, a variação da resistência neste caso parece decorrer do uso de diferentes velocidades influenciando o estado de tensões efetivas. Desse modo, não se pode garantir que se houve variação da resistência ao cisalhamento é porque houve variação do estado de tensões efetivas.

O contra-exemplo do corolário 2 apresentado por Martins (1992) (Figura 2) explicita que o fenômeno da relaxação de tensões pode contradizer a recíproca do PTE. O ensaio de relaxação não drenada realizado por Lacerda (1976) apresentou variação do estado de tensões efetivas sem variação do estado de deformações. Um outro fenômeno que merece destaque é a fluência (“creep”), que é um fenômeno “inverso” ao da relaxação. A fluência, por definição, é a variação das deformações mantendo-se constante o estado de tensões. Se o ensaio for drenado, haverá variação do estado de deformações sem que haja variação no estado de tensões efetivas, contradizendo o próprio Princípio em si, na forma como foi enunciado.

Outro fenômeno que pode contradizer o Princípio das Tensões Efetivas, e que é de fundamental importância para o presente trabalho, é o da compressão secundária. Ao se admitir que ela ocorre sob um estado de tensões efetivas (verticais e horizontais) constante, estaria ocorrendo variação de volume sem variação do estado de tensões efetivas, contrariando o PTE.

Na realidade, a compressão secundária no ensaio edométrico é um fenômeno híbrido de fluência e relaxação de tensões. Na direção vertical, a tensão efetiva (vertical) é constante e observam-se deformações verticais (iguais às volumétricas) ao longo do tempo, o que caracterizaria a fluência. Já na direção horizontal, a deformação é nula e as tensões horizontais podem variar ou não. Uma discussão



sobre o comportamento das tensões horizontais durante a compressão secundária – e, conseqüentemente, se ela contradiz ou não o PTE – será vista no item 1.1.4.

### 1.1.3 Descoberta e definição da compressão secundária

A teoria clássica do adensamento com fluxo vertical proposta por Terzaghi e Fröhlich (1936) foi desenvolvida relacionando-se a saída de água às deformações que ocorrem no solo (equação (2)). O volume de água que sai dos vazios do solo na unidade de tempo é controlado pela lei de Darcy.

$$\frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2)$$

Em que  $k_v$  é o coeficiente de permeabilidade na direção vertical,  $\gamma_w$  é o peso específico da água,  $u$  é o excesso de poropressão,  $e$  é o índice de vazios,  $z$  é a variável espacial (vertical) e  $t$  é a variável do tempo.

Admitindo-se válido o Princípio das Tensões Efetivas e considerando aplicação instantânea do carregamento, a equação diferencial após os devidos desenvolvimentos é a equação (3), que é um caso particular da equação de difusão. A velocidade com que o adensamento se processa está associada ao coeficiente de adensamento  $c_v = \frac{k_v(1+e)}{a_v \gamma_w}$ , em que  $a_v$  é o coeficiente de compressibilidade.

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3)$$

O significado físico implícito na equação (3), decorrente do Princípio das Tensões Efetivas, é o de que toda compressão no esqueleto sólido está associada à dissipação do excesso de poropressão gerado pelo carregamento (compressão primária). No entanto, a comparação entre um ensaio de adensamento e a curva teórica de Terzaghi e Fröhlich (1936) (Figura 4) mostra que ainda ocorre deformação considerável após quase todo o excesso de poropressão já ter se dissipado. A essa

deformação dá-se o nome de compressão secundária. Considera-se, desse modo, que a compressão secundária ocorre sob tensão vertical efetiva constante.

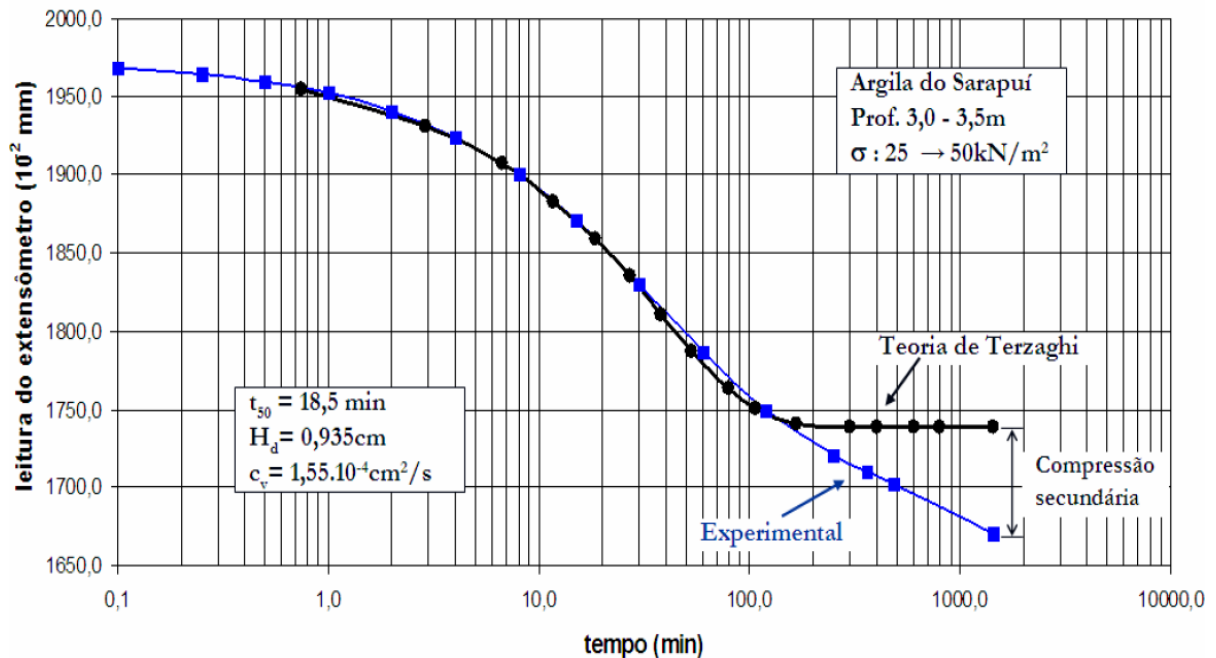


Figura 4 – Identificação da compressão secundária em um ensaio de adensamento (Martins, 2005).

Os primeiros trabalhos a identificarem e a quantificarem a compressão secundária parecem ter sido o de Gray (1936) e o de Buisman (1936).

Buisman (1936) verificou que a curva de recalque vs tempo, quando plotada com o tempo em escala logarítmica, revelava uma reta inclinada representando o então chamado “efeito secular”, que hoje se denomina adensamento secundário. Os ensaios apresentados por Buisman (1936) tiveram duração de 500 dias e o formato retilíneo do adensamento secundário se manteve. A inclinação desta reta se traduz hoje pelo índice de compressão secundária  $C_\alpha$ , que expressa a variação do índice de vazios ao longo do tempo de acordo com a relação  $C_\alpha = -\frac{de}{d \log t}$ .

Gray (1936) comparou curvas teóricas e experimentais de adensamento e a diferença entre elas, notada no fim do primário, foi atribuída ao então chamado

“efeito secundário do tempo” (“secondary time effect”). Gray (1936) pôde observar uma série de aspectos: i) a compressão secundária é mais pronunciada em solos que contenham matéria orgânica; ii) a compressão secundária tende a ser menos marcante no trecho de recompressão; iii) o amolgamento tende a reduzir a intensidade da compressão secundária; iv) a temperatura afeta a velocidade da compressão secundária.

A influência da temperatura é um aspecto importante comentado por Gray (1936). Em alguns solos, os ensaios realizados sob temperaturas mais altas mostraram uma maior inclinação do trecho de adensamento secundário. Como os estágios do ensaio de adensamento com duração de 24h em geral permitem alguma deformação por adensamento secundário, o aumento de temperatura também influencia a relação índice de vazios vs tensão vertical efetiva, como ilustra a Figura 5. Resultados semelhantes foram registrados por Campanella e Mitchell (1968), Marques (1997) e Andrade (2009).

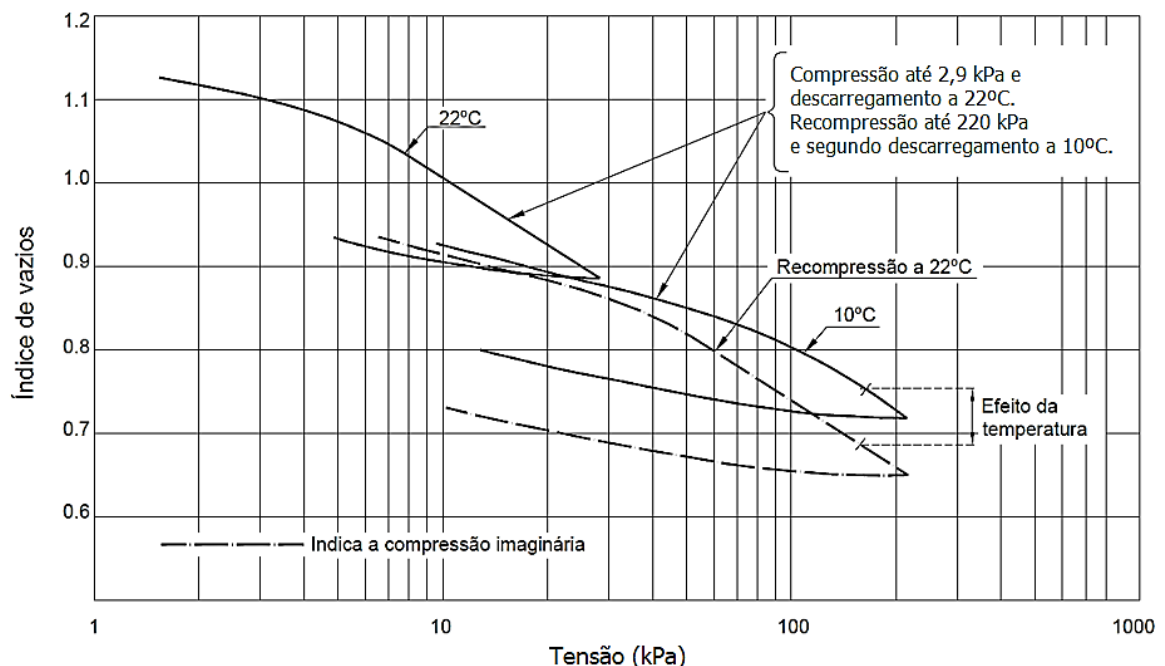


Figura 5 – Influência da temperatura (adaptado de Gray, 1936).

A definição dada por Ladd (1973) para o fenômeno da compressão secundária é:

*“Decréscimo de volume que ocorre sob tensão efetiva essencialmente constante, isto é, após todo o excesso de poropressão ter praticamente se dissipado”.*

Chamam a atenção os termos “essencialmente” e “praticamente”, que fazem a definição se tornar um tanto vaga. Para evitar os advérbios, Martins (2005) sugeriu a seguinte definição:

*“Às deformações que ocorrem principalmente ao fim do adensamento primário e que não podem ser atribuídas à dissipação dos excessos de poropressão (pequenos), ainda remanescentes no corpo de prova, dá-se o nome de adensamento secundário”.*

Há nesta percepção de “fim do adensamento primário” um problema de ordem teórica, já que a duração do adensamento primário é teoricamente infinita. Ressalta-se ainda que, embora a compressão secundária só seja percebida após o “fim do adensamento primário”, isto não significa que ela se inicie nesse momento. É uma definição do ponto de vista do observador e não do agente causador do fenômeno. É por isso que Martins (2005) também não foi capaz de eliminar todos os advérbios, fazendo-se valer do termo “principalmente”.

Um refinamento dessa definição, proposto pelo autor desta tese para contornar esses problemas, poderia ser o seguinte:

*“Adensamento secundário é o decréscimo de volume gradual que, no caso do ensaio de laboratório, é observado além da assíntota de fim do adensamento primário e apresenta magnitude elevada o suficiente para não poder ser atribuída aos excessos de poropressão que ainda restam no corpo de prova”.*

Uma breve discussão pode ser feita a respeito da expressão “adensamento secundário”. Taylor (1948) define “adensamento” (de maneira geral) como sendo “o processo gradual que envolve, simultaneamente, um escape lento de água e uma compressão gradual”, além de “um ajuste de tensão gradual”, e comenta que existe certa controvérsia a respeito da definição correta. Segundo Taylor (1948), a concepção de que o adensamento envolve drenagem, compressão e transferência de tensões é preferível à de que o adensamento é simplesmente compressão devido a um carregamento.

Se a compressão secundária no tempo ocorresse sem drenagem ou transferência de tensões, a palavra “adensamento” não deveria ser utilizada. No entanto, durante o secundário ainda ocorre drenagem e até mesmo dissipação de excesso de poropressão, ainda que imperceptível – o fim do adensamento é teoricamente em um tempo infinito. Portanto, o autor julga coerente utilizar o termo “adensamento secundário” para representar a compressão secundária ao longo do tempo.

#### 1.1.4 Compressão secundária e o estado de tensões efetivas

Deve-se fazer a ressalva de que a possível contradição ao Princípio das Tensões Efetivas causada pelo fenômeno da compressão secundária leva em conta que o estado de tensões efetivas se mantém constante – ou seja, tensões efetivas vertical  $\sigma'_v$  e horizontais  $\sigma'_h$ . Se houver variação das tensões horizontais efetivas após o dito fim do recalque primário, ainda que a tensão vertical efetiva se mantenha constante, haverá variação no estado de tensões efetivas. Desse modo, o recalque secundário ainda seria coberto pelo PTE. Taylor (1942) já havia considerado a possibilidade de um aumento das tensões horizontais durante o adensamento secundário como consequência da relaxação de tensões cisalhantes.

De Jong e Verruijt (1965) realizaram ensaios de adensamento sob estado hidrostático de tensões. Foi ensaiado um corpo de prova esférico de raio  $R_2$  com uma pedra porosa esférica situada no centro, para manter a uniformidade de tensões no corpo de prova. O objetivo era estudar a variação de volume na ausência de tensões cisalhantes. Uma pressão  $p$  foi aplicada no corpo de prova e se mediu a poropressão  $u_2$  no seu limite exterior. De Jong e Verruijt (1965) concluíram que a compressão secundária era significativa mesmo sob estado hidrostático de tensões, como mostra a Figura 6. Sendo isso verdade, a causa da compressão secundária não poderia ser a variação das tensões horizontais efetivas.

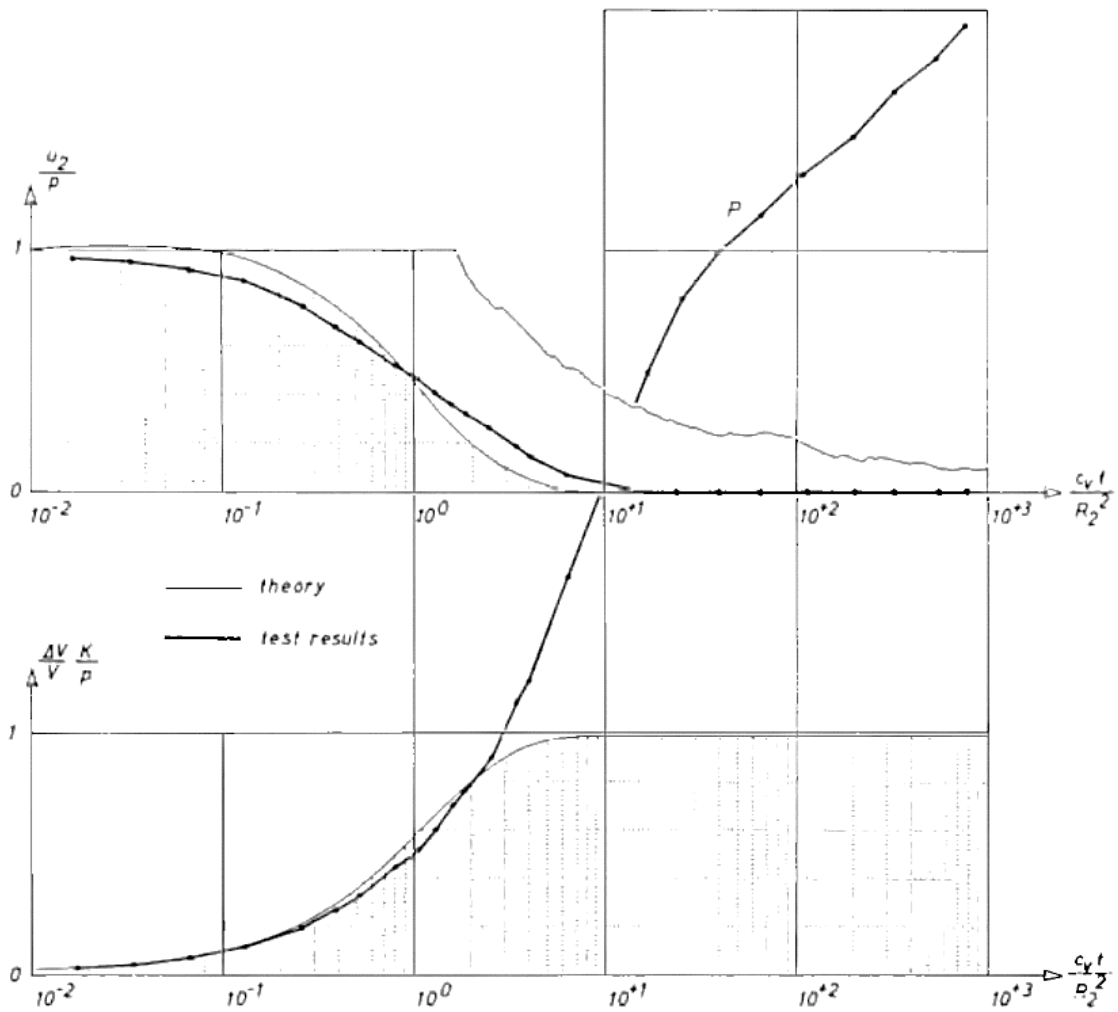


Figura 6 – Comparação entre as curvas teóricas e experimentais para variação do excesso de poropressão normalizada pela pressão  $p$  (acima) e de volume normalizada pelo volume inicial  $V$ , pelo módulo volumétrico  $K$  e pela pressão  $p$  (abaixo) (De Jong e Verruit, 1965).

Posteriormente, Martins e Lacerda (1989) argumentaram que a montagem do ensaio realizada por De Jong e Verruijt (1965) induzia tensões cisalhantes no corpo de prova esférico face à presença da pedra porosa central, como mostra a Figura 7. As tensões radiais  $\sigma_r$  seriam diferentes das tensões tangenciais  $\sigma_t$  e, assim, o estado de tensões nesse corpo de prova de solo não seria verdadeiramente hidrostático.

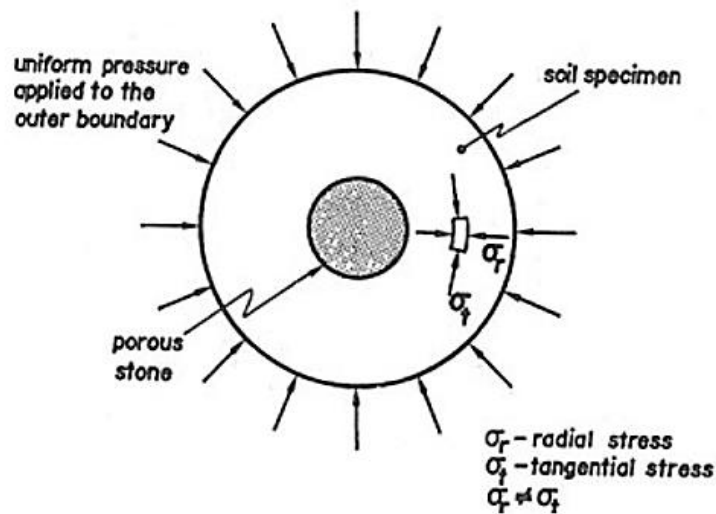


Figura 7 – Estado de tensões num corpo de prova esférico com uma pedra porosa esférica central (Martins e Lacerda, 1989).

Lacerda (1976) realizou ensaios de adensamento edométrico em amostras indeformadas da Argila da Baía de São Francisco, Califórnia, utilizando um equipamento triaxial. A amostra era adensada segundo o coeficiente de empuxo no repouso  $K_0$  e a condição edométrica era garantida por meio da diferença entre as deformações específicas volumétrica  $\varepsilon_v$  e vertical  $\varepsilon_z$  (na condição edométrica tem-se  $\varepsilon_v - \varepsilon_z = 0$ ). Entretanto, Lacerda (1976) observou que, ao fim do adensamento primário (ponto P da Figura 8), com as tensões efetivas vertical e horizontal sendo mantidas constantes, a diferença ( $\varepsilon_v - \varepsilon_z$ ) aumentava com o tempo. Isto significa que estava havendo expansão radial e que, portanto, a compressão não estava sendo realizada sob condição edométrica. Para retornar à condição de deformação radial nula, foi necessário um aumento da tensão confinante na célula triaxial, indicando que  $K_0$  crescia com o tempo.

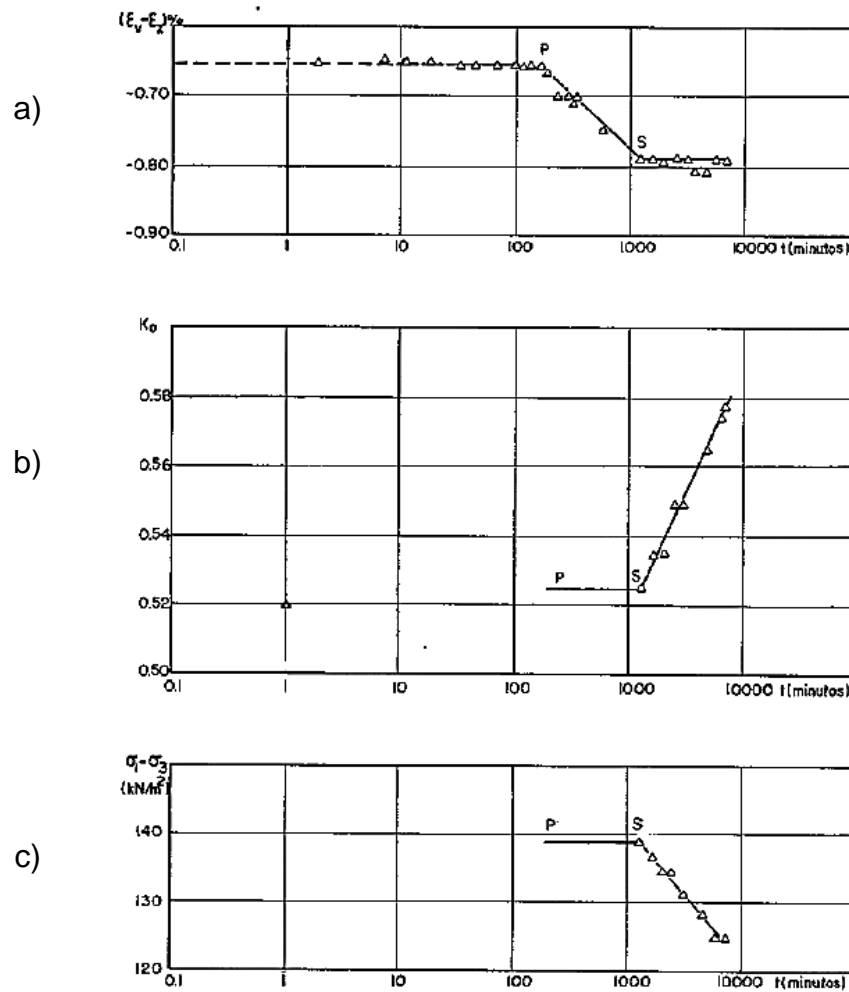


Figura 8 – Ensaio realizado na Argila da Baía de São Francisco – Califórnia (Lacerda, 1976). (a)  $\varepsilon_v - \varepsilon_z$  vs  $\log t$ ; (b)  $K_0$  vs  $\log t$ ; (c)  $\sigma_1 - \sigma_3$  vs  $\log t$ .

O questionamento a respeito do  $K_0$  foi levantado por Schmertmann (1983), em sua nota técnica intitulada “A Simple Question about Consolidation”: durante a compressão unidimensional (como um ensaio edométrico), a tensão horizontal efetiva em uma argila normalmente adensada aumenta, permanece a mesma ou diminui durante a compressão secundária?

Tal pergunta foi feita a um número considerável de profissionais e 32 destes responderam à questão: 16 afirmaram que  $K_0$  aumenta com o tempo, 4 disseram que  $K_0$  diminui, 9 consideraram  $K_0$  não depende do tempo e 3 reconheceram não saber respondê-la. Os resultados demonstraram que os engenheiros pesquisadores



ainda não tinham uma resposta definitiva para tal questão e que a compressão secundária ainda não era um tema perfeitamente compreendido na geotecnia.

Kavazanjian e Mitchell (1984) realizaram um estudo analítico para investigar o comportamento do  $K_0$  durante a compressão secundária, com base nos ensaios  $K_0$  de Lacerda (1976). A análise sugeriu um crescimento no valor de  $K_0$  para aquela argila, o qual foi explicado à luz da Teoria dos Processos Cinéticos. Segundo Kavazanjian e Mitchell (1984), ao final da compressão secundária, a teoria preconiza que o solo deve atingir a condição  $K_0 = 1$ . Para argilas normalmente adensadas e levemente sobreadensadas com  $K_0 < 1$ , a tensão horizontal efetiva aumentaria com o tempo até atingir a condição  $K_0 = 1$ . Da mesma forma, para argilas sobreadensadas com  $K_0 > 1$ , deveria haver uma diminuição da tensão horizontal efetiva com o tempo. Este assunto será novamente abordado no item 1.1.5.

Lacerda e Martins (1985), em discussão à nota técnica de Kavazanjian e Mitchell (1984), argumentaram que o processo da relaxação de tensões é o fenômeno físico que explicaria o aumento do  $K_0$  com o tempo durante a compressão secundária num ensaio edométrico. Lacerda e Martins (1985) propuseram o seguinte mecanismo, ilustrado na Figura 9: se o coeficiente de empuxo no repouso de um solo normalmente adensado ( $K_{0n}$ ) permanece constante durante o adensamento primário, o caminho de tensões efetivas seguido pelo elemento de solo pode ser representado pela reta  $AB$ . No ponto  $B$  (fim do adensamento primário) não há mais variação na tensão vertical efetiva  $\sigma'_{vB}$ . Se fosse admitido que  $K_0$  decresce, o caminho seguido durante a compressão secundária seria  $BD$  e o elemento de solo se aproximaria da envoltória de ruptura (reta  $K_f$ ), o que seria um absurdo, pois o solo estaria se aproximando de uma condição menos estável com a diminuição do índice de vazios. Caso o caminho de tensões efetivas permanecesse em  $B$  durante a compressão secundária,  $K_0$  se manteria constante, mas, nesse caso, o estado de tensões efetivas não se alteraria durante a compressão secundária. Admitindo que toda variação de volume esteja relacionada à variação de tensão efetiva octaédrica ( $\sigma'_{oct}$ ), a única possibilidade coerente seria através de um aumento na tensão horizontal efetiva  $\sigma'_h$ . O caminho de tensões efetivas seria então representado pela reta  $BC$  e isso explicaria a variação de volume com um excesso de poropressão praticamente nulo.

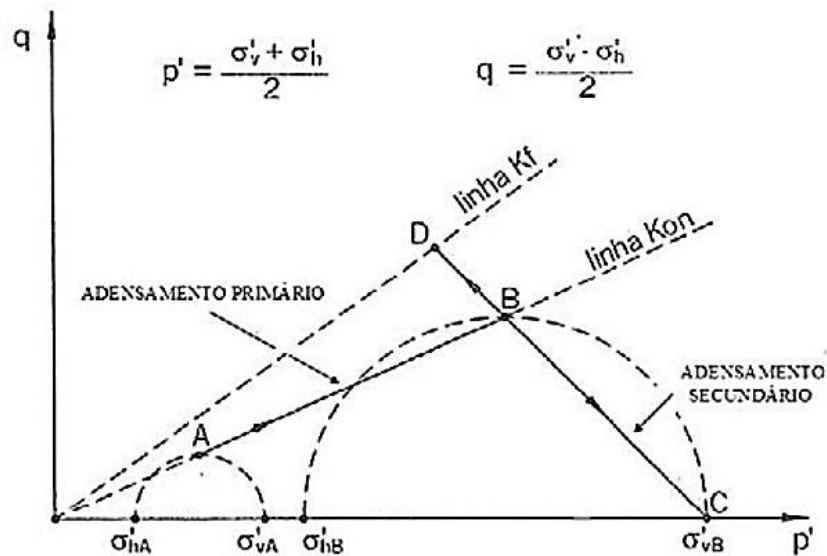


Figura 9 – Caminho de tensões efetivas durante o adensamento unidimensional idealizado por Lacerda e Martins (1985).

Com base nessas ideias, Martins e Lacerda (1985) desenvolveram uma teoria do adensamento unidimensional considerando o fenômeno da relaxação das tensões cisalhantes como sendo o responsável pela compressão secundária. Nesta proposta, a tensão desviadora diminui gradualmente, simultaneamente à velocidade da relaxação, até caírem a zero. Nesse momento, as deformações cessam.

Sendo  $K_{0n}$  o valor do coeficiente de empuxo no repouso  $K_0$  no domínio normalmente adensado, a porcentagem média de adensamento encontrada por Martins e Lacerda (1985) foi:

$$\bar{U} = \frac{\left(\frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}} - 1\right) \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T)\right]}{\left(\frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}} - 1\right) + \frac{2}{3}(1 - K_{0n})} + \frac{\frac{2}{3}(1 - K_{0n})[1 - \exp(-\Theta T)]}{\left(\frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}} - 1\right) + \frac{2}{3}(1 - K_{0n})} \quad (4)$$

Em que  $M$  é a mesma função do contador do somatório da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) e  $\Theta$  é um parâmetro relacionado à velocidade da relaxação. A razão  $\frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}}$  tem relação direta com a razão incremental  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}$ , pois  $\frac{\sigma'_{vf}}{\sigma'_{v0}} = 1 +$

$\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}$ . A Figura 10 ilustra o comportamento das curvas da teoria de Martins e Lacerda (1985) em função da variação de  $\Theta$ .

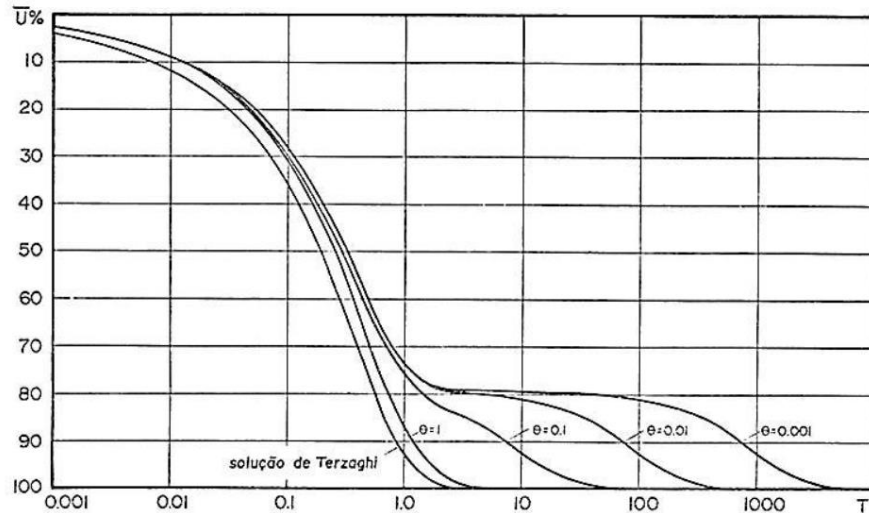


Figura 10 – Curvas de percentagem média de adensamento vs Fator Tempo para diferentes valores de  $\Theta$ ,  $\sigma'_{vf}/\sigma'_{v0} = 2$  e  $K_{0n} = 0,6$  (Martins e Lacerda, 1985).

Mesri e Castro (1987) também verificaram aumento de  $K_0$  durante a compressão secundária. Foram realizados ensaios de longa duração em equipamento triaxial, tentando simular condições edométricas através da diferença entre a deformação volumétrica específica e a deformação axial específica. Em todos os ensaios, feitos para 4 argilas naturais distintas, a drenagem foi permitida no topo e a poropressão foi medida na base do corpo de prova. As deformações axiais e as variações de volume foram então monitoradas sob um carregamento axial constante e a pressão na célula foi continuamente ajustada para manter a condição edométrica. A Figura 11 apresenta os resultados.

Entretanto, Mesri e Castro (1987) discordaram de Lacerda e Martins (1985) quanto ao fato de que o crescimento de  $K_0$  poderia ser a chave para explicar o fenômeno da compressão secundária. Isso implicaria em (1) a compressão secundária ainda não estar muito bem compreendida pela geotecnia e (2) o aumento de  $K_0$  ser a causa da compressão secundária, implicações estas que Mesri e Castro (1987) consideraram incorretas.

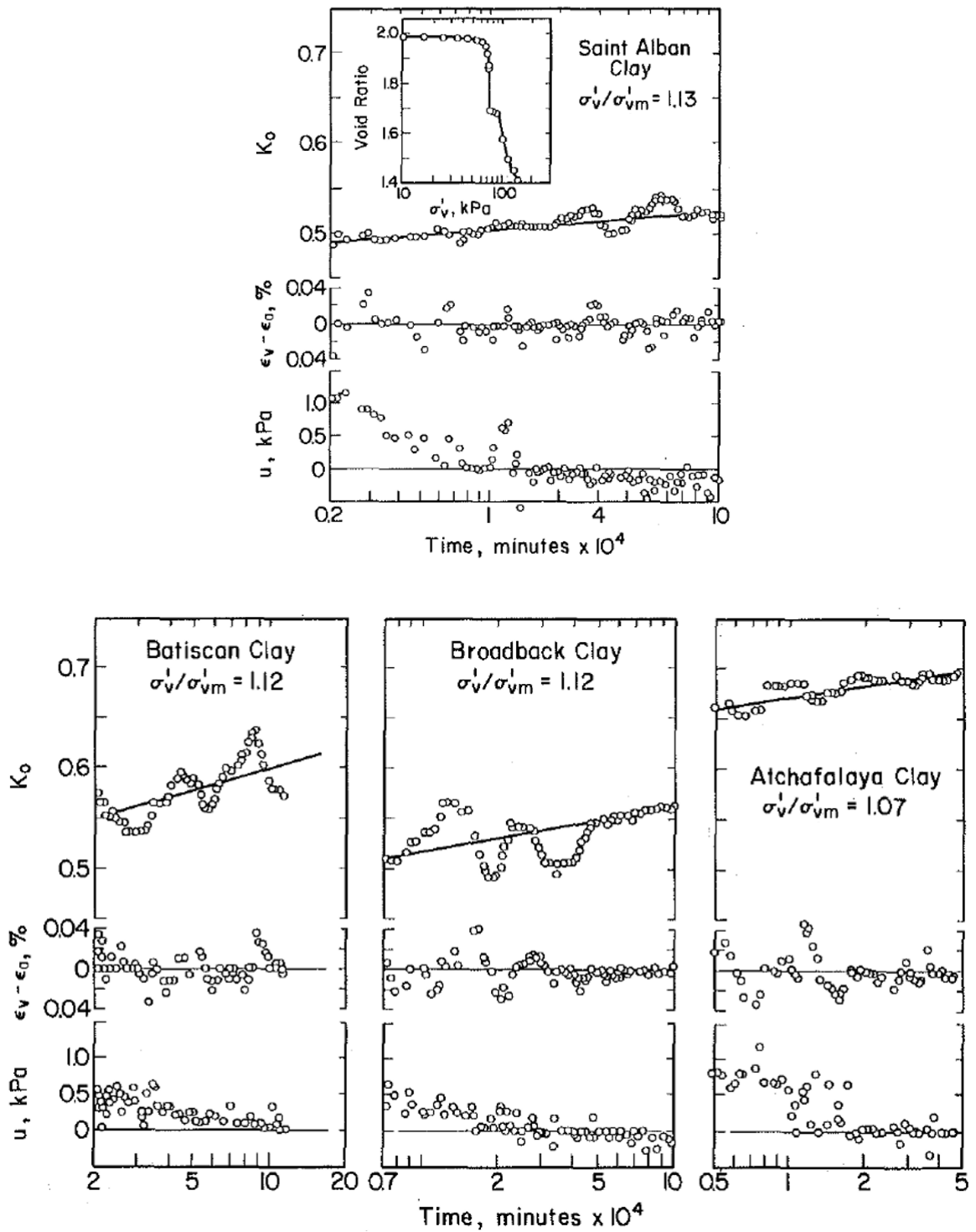


Figura 11 – Comportamento de  $K_0$  (curvas superiores), da diferença entre a deformação volumétrica específica e a deformação axial específica (curvas centrais) e do excesso de poropressão (curvas inferiores) durante o adensamento secundário (Mesri e Castro, 1987).

Admitindo haver uma relação biunívoca entre  $K_0$  e OCR e considerando que o valor de  $K_0$  tende a 1 ao fim da compressão secundária, Vieira (1988) e Feijó (1991) conjecturaram o seguinte comportamento:

- i) Solos que sofressem descarregamentos para valores de OCR que conduzissem a  $K_0 < 1$  apresentariam compressão secundária, havendo crescimento de  $\sigma'_h$  e, conseqüentemente, de  $K_0$ .
- ii) Solos que sofressem descarregamentos para valores de OCR que conduzissem a  $K_0 > 1$  apresentariam expansão secundária, com tendência de redução de  $\sigma'_h$  e, conseqüentemente, de  $K_0$ .

Para avaliar as questões acima, foram realizadas campanhas de ensaios de adensamento de longa duração em corpos de prova de amostras extraídas do depósito de argila adjacente ao Rio Sarapuí. Após a etapa de carregamento, foram realizados descarregamentos que correspondiam a diferentes valores de OCR. Estes, por sua vez, estão associados a diferentes valores de  $K_0$ . Os valores de  $K_0$  foram estimados por meio da relação empírica entre OCR e  $K_0$  proposta por Mayne e Kulhawy (1982):

$$K_0 = (1 - \sin \phi') \text{OCR}^{\sin \phi'} \quad (5)$$

Em que  $\phi'$  é o ângulo de atrito efetivo, sendo a condição  $K_0 = 1$  associada a  $\text{OCR} = 3,65$  para a argila do Rio Sarapuí ( $\phi' = 25^\circ$ ). De uma maneira geral, os corpos de prova cujo OCR gerado fosse menor do que 3,65 ( $K_0 = 1$ ) apresentariam compressão secundária e, caso o OCR gerado fosse maior, os corpos de prova apresentariam expansão secundária.

Vieira (1988) realizou ensaios de adensamento em 4 corpos de prova, denominados células verde, amarela, marrom e cinza. Os corpos de prova foram submetidos à tensão de 400 kPa (tensão sob a qual permaneceram durante 8 dias, com exceção da célula cinza que já se encontrava sob esta tensão). Feito isto, foram realizados descarregamentos correspondentes a diferentes valores de OCR. A Figura 12 apresenta as curvas índice de vazios vs tempo (log) durante os referidos

descarregamentos e também a inclinação  $C_{\alpha}$  de cada curva ao final das leituras. Com exceção do corpo de prova da célula marrom, de  $OCR = 2,7$  e  $K_0$  estimado em  $0,88$ , todos os corpos de prova se comportaram conforme o esperado.

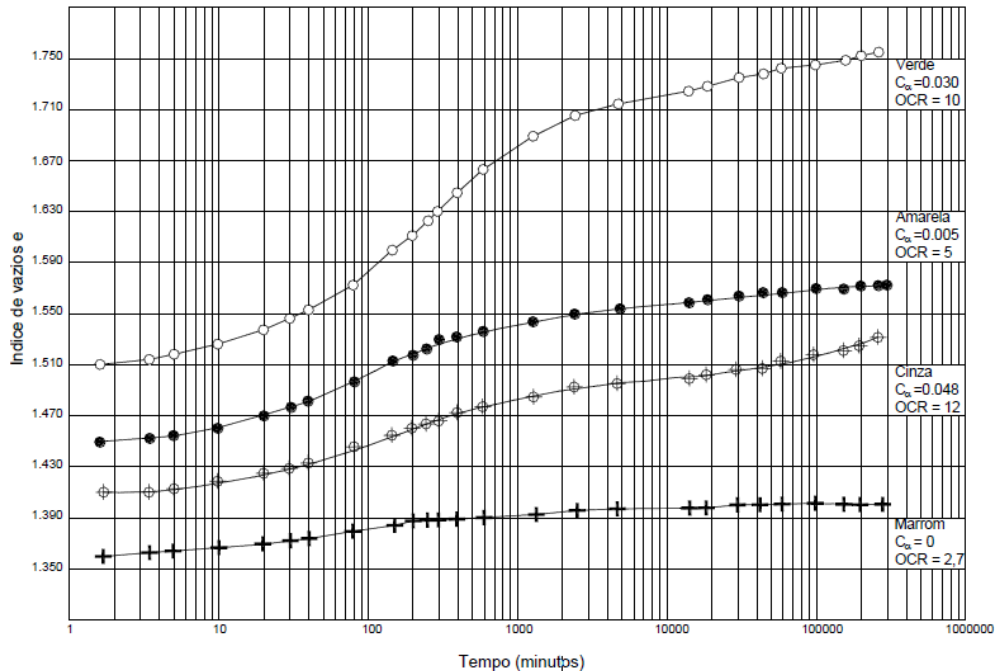


Figura 12 – Curvas  $e$  vs tempo (log) durante o descarregamento para diferentes valores de OCR (Vieira, 1988).

Feijó (1991) realizou um programa de ensaios edométricos nos quais os corpos de prova foram carregados para diferentes tensões e então descarregados ao fim do primário para a tensão de  $100 \text{ kPa}$ . A Figura 13 mostra os resultados encontrados após aproximadamente 9 meses de observação. Feijó (1991) observou que os corpos de prova com  $OCR = 1,5$  e  $OCR = 2$  sofreram compressão secundária após a expansão primária, enquanto os corpos de prova com  $OCR = 8$  e  $OCR = 12$  sofreram expansão secundária após a expansão primária. O corpo de prova de  $OCR = 4$  (que corresponde a  $K_0 = 1,04$ ) não apresentou variação de volume perceptível. Todos estes resultados estavam de acordo com a abordagem de Lacerda e Martins (1985).

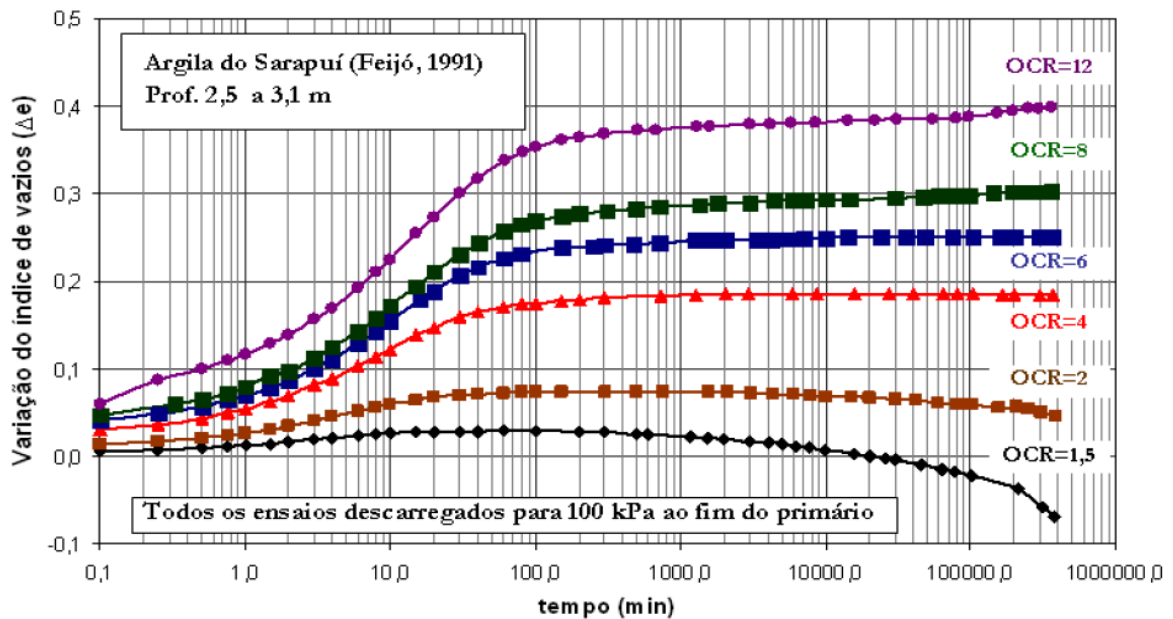


Figura 13 – Curvas  $e$  vs tempo (log) durante o descarregamento para diferentes valores de OCR (Feijó, 1991).

Entretanto, o corpo de prova de  $OCR = 6$  ( $K_0 = 1,23$ ), que deveria apresentar expansão secundária, não mostrou variação de volume. Com isso, Feijó (1991) concluiu que, em vez de um único valor limite de  $K_0$ , haveria uma “região de equilíbrio indiferente” onde não há nem expansão nem compressão secundárias. Para a Argila do Sarapuí, a região é compreendida entre a faixa  $0,77 \leq K_0 \leq 1,23$  ( $2 \leq OCR \leq 6$ ). Feijó (1991) adotou a faixa  $0,8 \leq K_0 \leq 1,2$  para efeitos de simplificação.

Os resultados obtidos por Feijó (1991) sugeriram então que as argilas não seguem fielmente o mecanismo proposto por Kavazanjian e Mitchell (1984) e Lacerda e Martins (1985), uma vez que, ao final da compressão secundária, o valor de  $K_0$  pode ser diferente de 1,0. Isto significa que, no fim do processo de adensamento, o solo se encontra num estado de tensões efetivas onde ainda há tensões cisalhantes.

Com as evidências de que o valor limite de  $K_0$  não era 1, Martins et al. (1997) fizeram uma modificação na teoria do adensamento de Martins e Lacerda (1985). O valor final de  $K_0$  deixou de ser 1 e passou a ser um valor limite denotado por  $K_{0l}$ . Assim, a equação (4) se tornou:

$$\bar{U} = \frac{\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T)\right]}{\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) + \frac{2}{3}(K_{0l} - K_{0n})} + \frac{\frac{2}{3}(K_{0l} - K_{0n})[1 - \exp(-\Theta T)]}{\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) + \frac{2}{3}(K_{0l} - K_{0n})} \quad (6)$$

Apesar dos referidos trabalhos indicarem um aumento de  $K_0$  durante a compressão secundária, outros estudos encontraram resultados diferentes.

Holtz e Jamiolkowski (1985) realizaram ensaios  $K_0$  em uma célula edométrica com transdutores de tensão total acoplados às suas paredes para medir as tensões horizontais. As leituras foram feitas durante a compressão secundária em amostras da argila de Panigaglia, Itália. A Figura 14 ilustra um dos ensaios, no qual o corpo de prova foi carregado com pequenos incrementos até a tensão de 1.000 kPa e em seguida observado por 35 dias. Os resultados mostram que  $K_0$  se manteve aproximadamente constante durante todo esse tempo. Conclusões similares foram relatadas por Jamiolkowski et al. (1985) em ensaios edométricos realizados no MIT (Massachusetts Institute of Technology), que revelaram um aumento de  $K_0$  muito pequeno e insuficiente para justificar a compressão secundária.

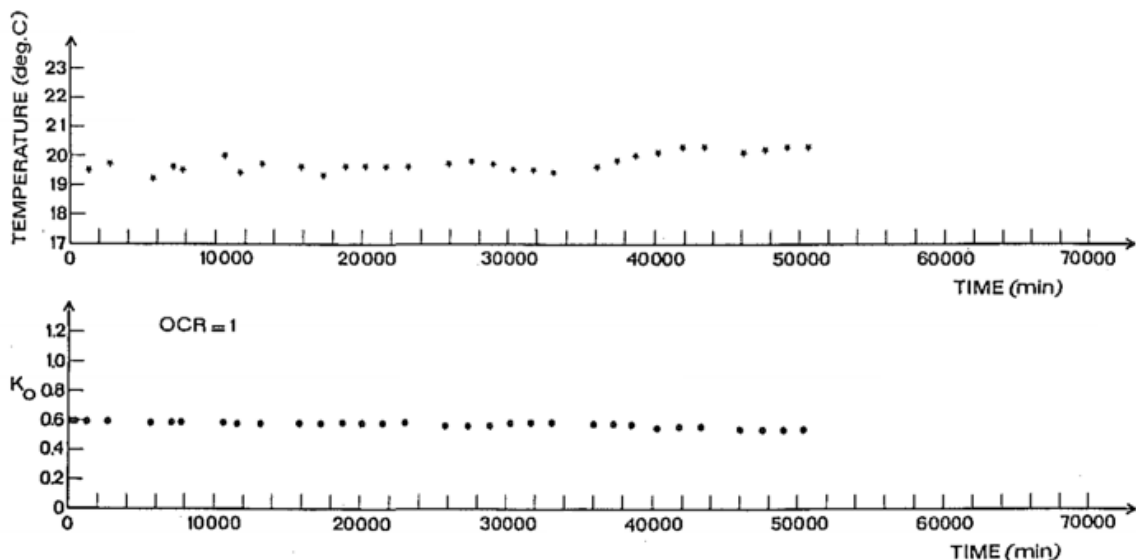


Figura 14 – Ensaio de Holtz e Jamiolkowski (1985) para medição do  $K_0$  durante a compressão secundária.



Santa Maria (2002) também realizou ensaios em uma célula edométrica com transdutores de tensão total acoplados às suas paredes, denominada “célula  $K_0$ ”. Foram realizados ao todo 13 ensaios, a maior parte deles em amostras da Argila do Rio Sarapuí. Foram feitos 5 estágios de carregamento (20 kPa, 40 kPa, 80 kPa, 160 kPa e 320 kPa), um descarregamento para 40 kPa e um recarregamento para 320 kPa.

A Figura 15 mostra a variação de  $K_0$  após um descarregamento de 320 kPa para 40 kPa (ou seja,  $OCR = 8$ ). Observa-se  $K_0$  atingindo valores da ordem de 1,3, o que implica na tensão horizontal efetiva maior do que a vertical. Depois de aproximadamente 24 horas,  $K_0$  começa a diminuir, indicando uma redução da tensão horizontal efetiva. Esse comportamento confirma a relaxação de tensões cisalhantes, que se acredita existir em ensaios edométricos de longa duração.

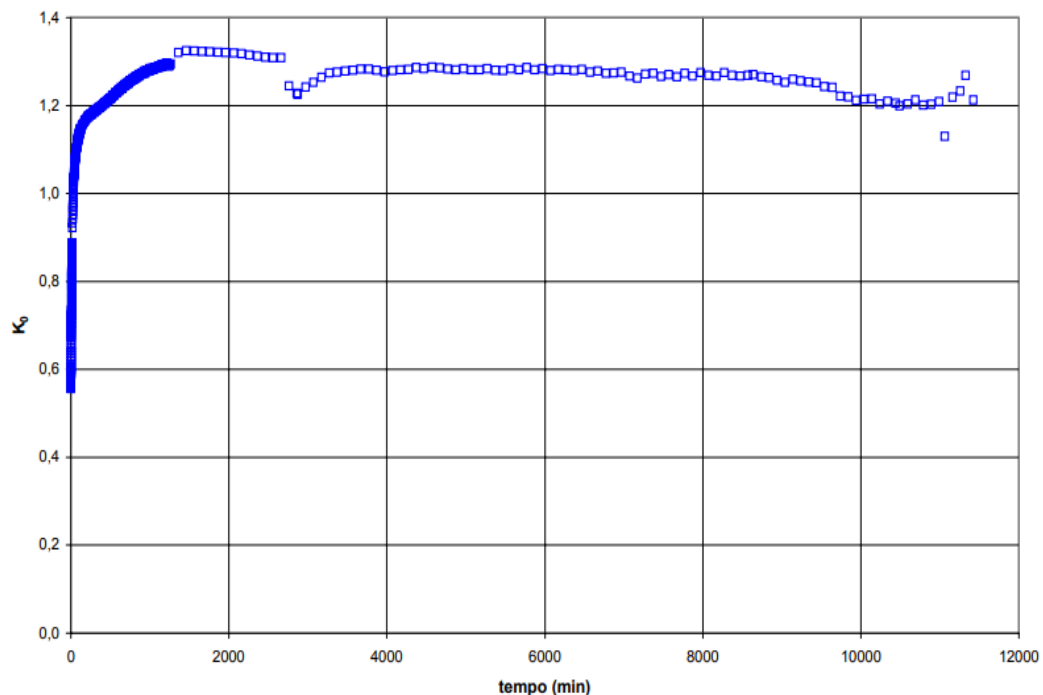


Figura 15 – Variação de  $K_0$  ao longo do tempo na etapa de descarregamento de 320 kPa para 40 kPa (Santa Maria, 2002).

Entretanto, Santa Maria (2002) ponderou que não se conseguiu observar o aumento de  $K_0$  durante a compressão secundária da fase de recarregamento (Figura 16), o que representaria também uma manifestação dessa relaxação de tensões cisalhantes. Observou-se expansão secundária no descarregamento com  $OCR = 8$ ,

mas nenhuma compressão secundária pôde ser notada no final do recarregamento para 320 kPa.

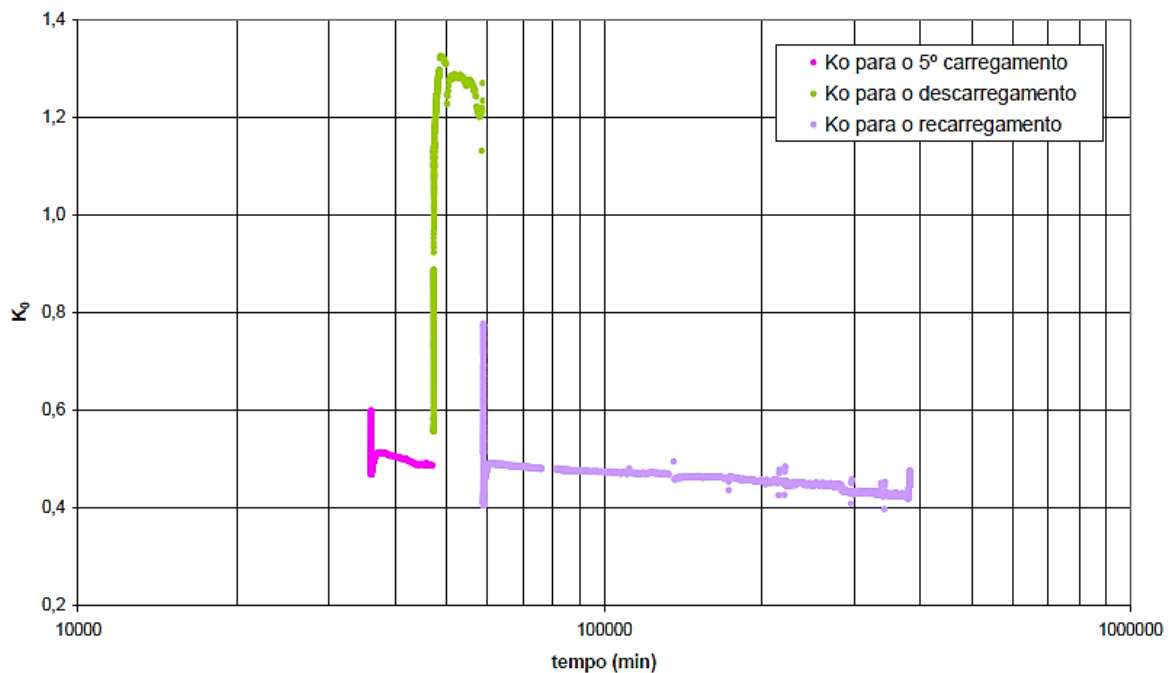


Figura 16 – Comparação entre as variações de  $K_0$  ao longo do tempo nas etapas de carregamento, descarregamento e recarregamento (Santa Maria, 2002).

Além desses trabalhos, Thomasi (2000) realizou ensaios de adensamento hidrostático em um equipamento triaxial com o intuito de verificar se a compressão secundária ocorre sob condições realmente hidrostáticas. A amostra foi fabricada em laboratório e consistiu em uma mistura de caulim (80%) e bentonita (20%) e os ensaios foram realizados com temperatura controlada em corpos de prova com extremidades lubrificadas (“free-ends”), para evitar a indução de tensões cisalhantes nas extremidades do corpo de prova. A ocorrência da compressão secundária foi confirmada nesses ensaios e pode ser vista na Figura 17.

Considerando toda essa gama de ensaios, o autor desta tese considera que a variação das tensões horizontais efetivas não deve ser a causa da compressão secundária, ou pelo menos não a única. Se o fenômeno ocorre mesmo em condições hidrostáticas, o mecanismo responsável pela compressão secundária deve estar associado a outro fenômeno físico.

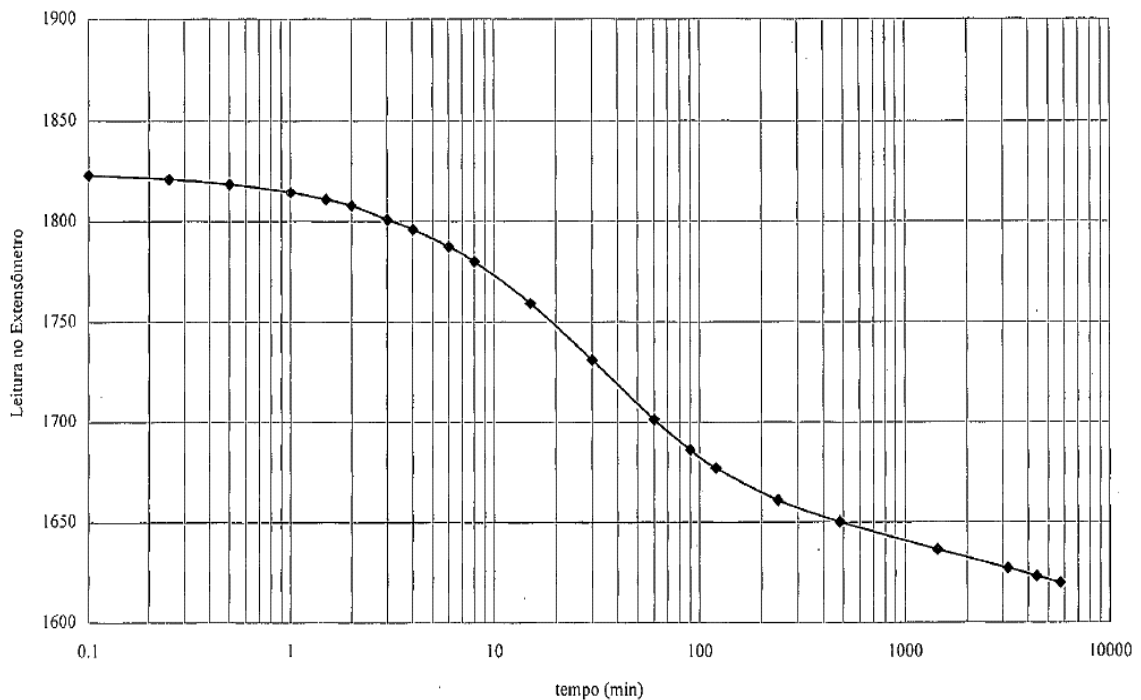


Figura 17 – Ensaio de adensamento hidrostático no estágio de 50 kPa (Thomasi, 2000).

### 1.1.5 Abordagens da compressão secundária

O mecanismo mais comum para se explicar o fenômeno foi sugerido por Ladd (1973) e reforçado por Mesri (Mesri e Godlewski, 1977; Mesri e Castro, 1987; Mesri e Castro, 1989). O adensamento secundário seria a continuação do adensamento primário com as partículas de solo buscando uma posição mais estável sob a condição de tensão efetiva constante.

Segundo Barden (1969), existem outros três tipos de abordagem do fenômeno do adensamento secundário:

- Mecanismo baseado na viscosidade da água adsorvida;
- Mecanismo baseado na teoria dos processos cinéticos;
- Mecanismo baseado na existência de macroporos e microporos.

### 1.1.5.1 Mecanismo de busca por uma posição mais estável

Ladd (1973) atribuiu a compressão secundária ao processo de busca dessas partículas ao longo do tempo por uma posição mais estável. O adensamento primário gera um rearranjo das partículas e estas ainda se encontrariam instáveis após a dissipação dos excessos de poropressão. Ladd (1973) comenta que não vê razão para crer que o mecanismo do adensamento secundário seja diferente daquele responsável pelo adensamento primário.

Mesri e Castro (1989) associaram a variação de volume decorrente da compressão secundária à redistribuição das componentes internas da tensão efetiva, no sentido de se atingir uma condição mais estável. Estas componentes surgem das várias forças de atração e repulsão entre as partículas de solo. Mesri e Castro (1989) afirmam ainda que a compressão secundária é uma implicação da definição de tensão efetiva de Terzaghi.

Essa seria a única explicação física, e não apenas experimental, que busca justificar a utilização do parâmetro  $C_\alpha$ . Desta forma, assume-se que a compressão secundária se inicia após o “fim” do primário, a partir de um tempo finito  $t_p$ .

Adicionalmente, Ladd (1973) considera a hipótese de  $C_\alpha$  constante com o tempo (pelo menos durante o intervalo de tempo de interesse) e independente da espessura da camada, do valor da razão incremental de carregamento ( $\Delta\sigma/\sigma'_v$ ) e da tensão de adensamento para argilas normalmente adensadas que apresentem  $C_c$  constante, em que  $C_c = -\frac{\partial e}{\partial \log \sigma'}$  é o índice de compressão.

Quando  $C_c$  é variável e  $C_\alpha$  também, admite-se válida a hipótese de  $C_\alpha/C_c$  constante, sugerida por Mesri e Godlewski (1977). As variações de  $C_\alpha$  com o tempo refletem também as variações de  $C_c$  com o tempo. Para tal, há que existir uma relação entre índice de vazios ( $e$ ), tensão vertical efetiva ( $\sigma'_v$ ) e tempo ( $t$ ), como mostra Figura 18. Segundo Mesri e Castro (1987), o valor de  $C_\alpha/C_c$ , em conjunto com a curva de compressão correspondente ao fim do adensamento primário (EOP), define por completo a compressão secundária.

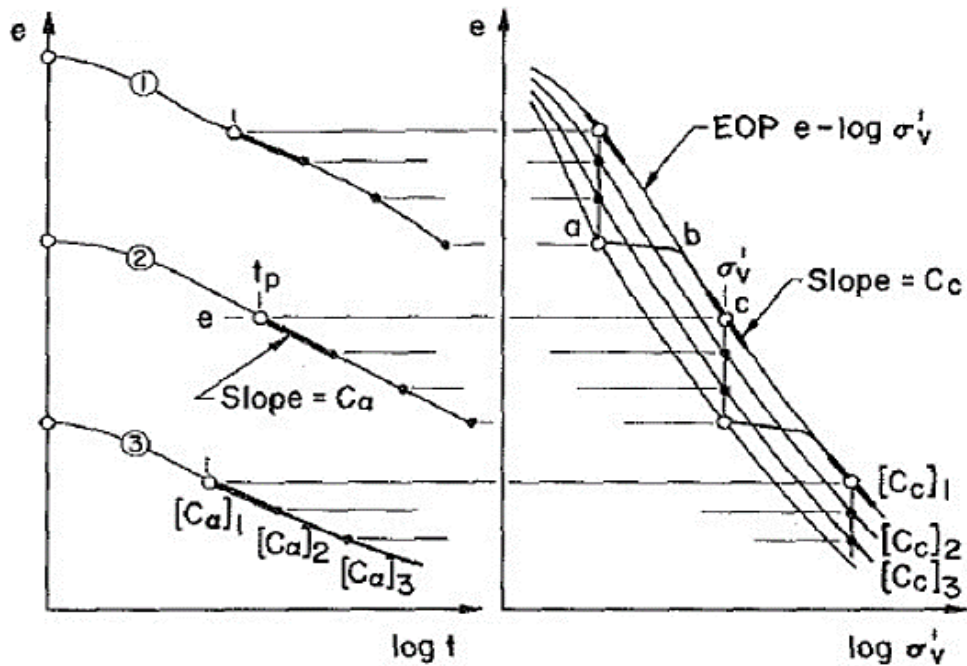


Figura 18 – Relação entre índice de vazios, tensão vertical efetiva e tempo durante o adensamento secundário (Mesri e Castro, 1987).

Embora a utilização de um único parâmetro  $C_\alpha$  seja de fácil aplicação prática, e provavelmente por isso teve seu uso consagrado, esta não prevê o momento que ocorre o final do processo de compressão secundária. Usualmente estima-se a compressão secundária até o tempo de vida útil da construção, o que é uma característica do projeto e não do solo em si.

Martins e Lacerda (1989) afirmaram que  $C_\alpha$  deveria diminuir com o tempo, de tal modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} C_\alpha = 0$ . Caso contrário, haveria um tempo finito, ainda que grande, tal que o índice de vazios se tornaria negativo, o que é uma impossibilidade física. Mesri e Castro (1989), em resposta, argumentaram que o conceito teórico de tempo infinito não é de interesse prático e que, mesmo que  $C_\alpha$  tenda a zero ao final do processo de adensamento,  $C_c$  também poderia tender a zero, de tal forma que a relação  $C_\alpha/C_c$  se mantivesse constante.

Ensaio de adensamento de longa duração ilustram a variação do coeficiente de compressão secundária  $C_\alpha$  – e que de fato tende a zero. A Figura 19 mostra os ensaios de Martins (1990), sob temperatura controlada, numa amostra indeformada

da Argila do SENAC. A observação das leituras por um período de mais de 5 anos sugere fortemente que a compressão secundária tem um fim.

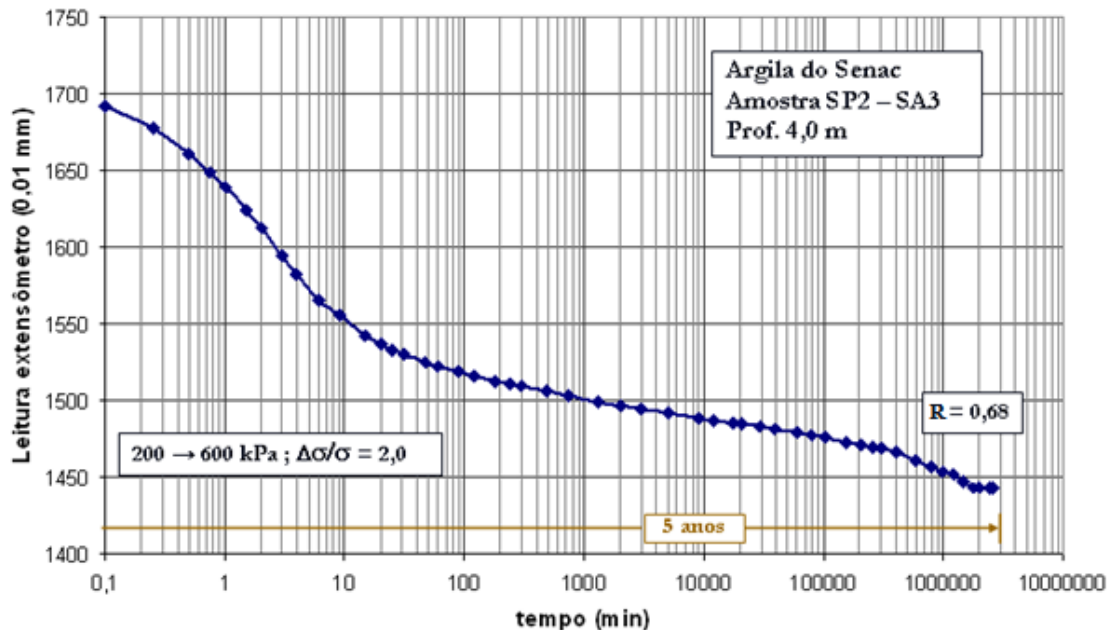


Figura 19 – Ensaio de adensamento de longa duração na Argila do SENAC (Martins, 1990).

Na opinião do autor desta tese, a sugestão de que  $C_c$  possa tender a zero ao final do adensamento não faz sentido, porque se isso fosse verdade não haveria sequer compressão primária. Além disso, da forma como Ladd (1973) e Mesri e Castro (1989) explicam o adensamento secundário, não há como negar que o fenômeno é uma variação de volume que ocorre sem variação do estado de tensões efetivas. Assim, haveria uma contradição ao se admitir que o mecanismo físico que rege a compressão secundária é o mesmo que rege a primária e que o fenômeno é uma consequência do Princípio das Tensões Efetivas.

#### 1.1.5.2 Mecanismo baseado na viscosidade da água adsorvida

De acordo com Terzaghi (1941) e Taylor (1942), as partículas de argila estão envoltas por uma camada de água adsorvida. Na superfície dos grãos a água adsorvida se encontra no estado sólido e fortemente aderida a eles. Na medida em que se afasta da superfície dos grãos, a água adsorvida se torna um líquido muito

viscoso, cuja viscosidade vai diminuindo. A partir de uma certa distância, a viscosidade da água é a da água comum. Essa água é chamada de água livre e é ela que é expulsa dos vazios do solo durante o adensamento.

Desse modo, o contato entre as partículas da argila pode se estabelecer entre as partes sólidas dos grãos (chamados contatos sólidos) ou através da água adsorvida viscosa (chamados contatos viscosos). O fenômeno da compressão secundária, segundo Terzaghi (1941), é uma consequência da viscosidade da água adsorvida. Ao final do adensamento primário, ainda haveria contatos viscosos e ocorreria um movimento relativo entre as partículas até que todos os contatos viscosos se tornassem sólidos.

É interessante notar que, por mais bem elaborada que seja a explicação fornecida por Terzaghi (1941), ela contradiz o que ele mesmo havia enunciado no Princípio das Tensões Efetivas (Terzaghi, 1936). Afinal, o movimento relativo entre as partículas – e, por consequência, a compressão secundária – ocorre sem variação do estado de tensões efetivas.

Taylor (1942) desenvolveu uma teoria do adensamento que admite a existência de uma resistência à compressão nas argilas que é função da velocidade de deformação. Ela foi denominada de resistência estrutural plástica à compressão. Ainda segundo Taylor (1942), a resistência estrutural pode ser dividida em duas parcelas: uma denominada resistência de ligação e a outra denominada resistência viscosa.

Hvorslev (1960) apresentou uma concepção bastante similar à de Terzaghi (1941). As partículas de argila estariam envoltas por uma camada fina de água fortemente adsorvida. Esta, por sua vez, estaria envolta por uma camada mais espessa de água parcialmente adsorvida. A estrutura da água nas camadas adsorvidas seria diferente da estrutura da água livre dos vazios do solo, pois ela possuiria algumas propriedades semelhantes às do gelo e impediria o contato direto entre as partículas de argila para as tensões usuais de campo.

Hvorslev (1960) complementa afirmando que é indispensável conhecer a constituição físico-química das argilas e as forças intrínsecas do sistema solo-água para um melhor entendimento da deformação dos solos. Hvorslev (1960) ainda cita

Goldstein (1957), que sugeriu que as forças intrínsecas seriam divididas em dois grupos: um que produz contatos elásticos entre as partículas e outro que forma contatos viscosos. Por fim, há ainda a afirmação da existência de uma componente viscosa da resistência ao cisalhamento, que varia com o tempo e com a velocidade de deformação.

O mecanismo baseado na existência da água adsorvida é hoje o mecanismo sobre o qual se apropriam as ideias do Grupo de Reologia dos Solos da COPPE. Esse conceito será discutido mais detalhadamente no item 1.2.

### **1.1.5.3 Mecanismo baseado na Teoria dos Processos Cinéticos**

A Teoria dos Processos Cinéticos foi inicialmente desenvolvida para a Físico-Química. Ela é utilizada para calcular as velocidades de reação a partir das distâncias, forças interatômicas e configuração espacial dos átomos nas moléculas dos reagentes e produtos de uma reação química. Seu início se deu com o desenvolvimento da equação para determinação da velocidade de reação inversa da sacarose, em função da temperatura, por Arrhenius.

Segundo a teoria, a energia que deve ser fornecida aos reagentes para que uma reação química ocorra – chamada energia de ativação – depende da disposição e proximidade dos átomos. Quando dois gases, por exemplo, entram em contato direto, suas moléculas se colidem em uma determinada frequência. Ao se fornecer uma quantidade de energia igual ou superior à energia de ativação, essas moléculas terão uma grande probabilidade de reagirem entre si e assim formarem o produto da reação.

A teoria só realmente avançou com o desenvolvimento da mecânica quântica no início do século XX. E, conforme relata Alexandre (2000), foram Glasstone et al. (1941) que afirmaram que a Teoria dos Processos Cinéticos é geral e que seu potencial é ilimitado, podendo ser aplicada a qualquer outro processo cinético que envolva rearranjo de matéria. Na Mecânica dos Solos, sua utilização começou no final da década de 50 e se desenvolveu na década de 60 com os trabalhos de Murayama e Shibata (1961), Mitchell (1964), Andesland e Douglas (1970), entre outros.



Glasstone et al. (1941) observaram uma analogia entre o fenômeno da viscosidade e os processos de reação química e aplicaram a Teoria dos Processos Cinéticos a esse problema. O deslocamento de uma molécula de uma posição de equilíbrio para outra seria equivalente à passagem por sobre uma barreira de energia potencial.

Mitchell (1976) fez um desenvolvimento muito similar ao de Glasstone et al. (1941) ao estudar especificamente a fluência dos solos. Posteriormente, Kavazanjian e Mitchell (1984) utilizaram a teoria para tentar responder à questão levantada por Schmertmann (1983) a respeito do comportamento do  $K_0$  durante a compressão secundária. Para isso, foi feita uma comparação (Figura 20) entre os resultados apresentados por Lacerda (1976) para a argila da Baía de San Francisco e os valores de  $K_0$  estimados com base na Teoria dos Processos Cinéticos.

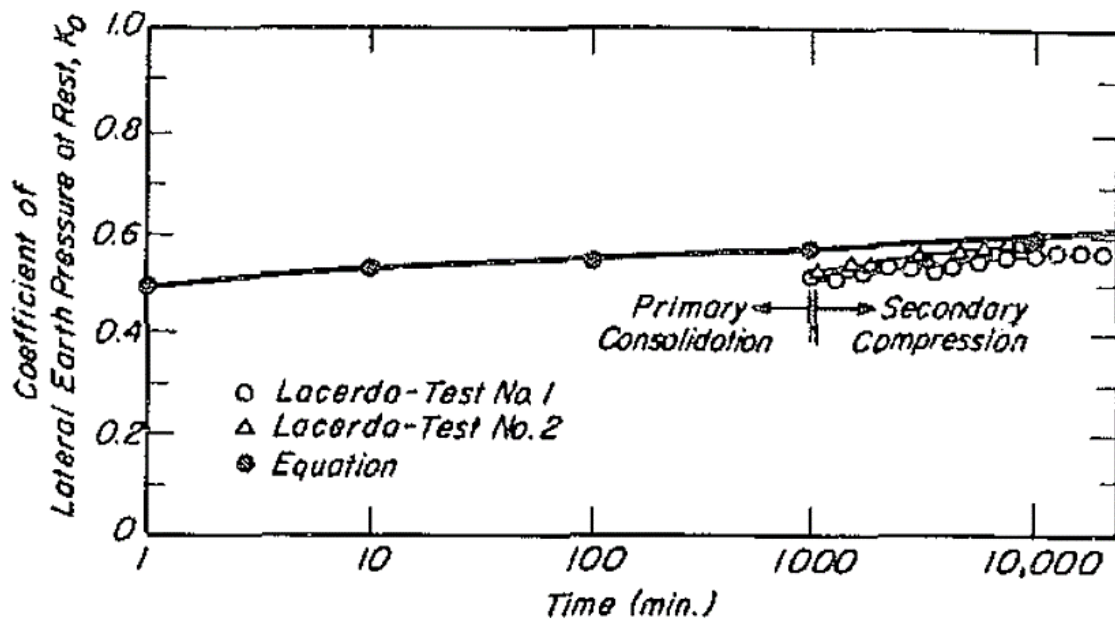


Figura 20 – Comportamento de  $K_0$  para a argila da Baía de San Francisco (Kavazanjian e Mitchell, 1984).

Kavazanjian e Mitchell (1984) comentaram que esse resultado estava de acordo a Teoria dos Processos Cinéticos, que preconizava um crescimento de  $K_0$  até a unidade. A condição  $K_0 = 1$  representa um estado mínimo de energia para o solo devido à ausência de tensão desviadora global (o Círculo de Mohr passa a ser um ponto no eixo das abscissas). Sempre que houver tensões desviadoras, os

contatos entre partículas de solo se quebrarão e o elemento de solo sofrerá distorção na direção de atuação da tensão cisalhante. Isso ocorre devido ao desequilíbrio nas barreiras de energia criado pela tensão cisalhante. Sob condições edométricas, haverá a tendência de redução do desequilíbrio e, por consequência, redução da tensão desviadora global. Como a tensão vertical efetiva se mantém constante durante a compressão secundária, a tensão horizontal efetiva precisa variar, para que haja redução da tensão desviadora.

A compressão secundária sob à luz da Teoria dos Processos Cinéticos também contradiz o Princípio das Tensões Efetivas, pois estaria havendo deformação sem variação do estado de tensões efetivas. E, como já visto, ensaios posteriores sugerem que o valor limite de  $K_0$  não é 1,0 (Feijó, 1991). Além disso, Alexandre (2000) teceu críticas à utilização da Teoria dos Processos Cinéticos ao estudar a fluência (“creep”) em ensaios não drenados. Particularmente, chama a atenção o fato de essa teoria não ser capaz de explicar a variação da velocidade de deformação durante a fluência.

#### **1.1.5.4 Mecanismo baseado na existência de macroporos e microporos**

De Jong e Verruijt (1965) propuseram um mecanismo no qual o solo é composto de dois tipos de poros, denominados macro e microporos. Nesta abordagem, o adensamento primário seria decorrente da expulsão da água dos macroporos, enquanto a compressão secundária ocorreria devido à saída da água dos micro para os macroporos e daí para o exterior da amostra. Com o tempo a taxa de deformação por compressão secundária se reduziria até que o processo fosse encerrado.

A abordagem de De Jong e Verruijt (1965) seria a única que não contradiz o Princípio das Tensões Efetivas. A variação do estado de tensões efetivas estaria de fato ocorrendo, mas ela não seria detectada nos ensaios de laboratório pois a medição da poropressão ocorreria nos macroporos e não nos microporos.

Wang e Xu (2007) realizaram uma série de ensaios de adensamento para verificar a validade do mecanismo proposto por De Jong e Verruijt (1965). Amostras de caulinita foram preparadas com a intenção de formar diferentes tipos de

estrutura, ou seja, diferentes tipos de poros. A definição da curva de volume de poros foi feita por meio da porosimetria por intrusão de mercúrio (MIP) e do microscópio eletrônico de varredura (SEM).

As amostras inicialmente foram lavadas para redução do excesso de sais e impurezas. Em seguida, foram preparadas com três tipos de fluidos, para que adquirissem estruturas diferentes – e conseqüentemente tamanhos de poros diferentes. Os estágios de carga tinham a duração de 24h e a razão incremental de tensão foi igual a 1,0. Nos estágios finais de carregamento, a compressão secundária foi acompanhada por um período de duas semanas.

A amostra com predominância de microporos não apresentou os maiores valores de  $C_\alpha$ , sendo a razão  $C_\alpha/C_c$  aproximadamente a mesma para todas as amostras. Além disso, os resultados mostraram que ambos os adensamentos primário e secundário ocorrem preferencialmente nos macroporos, em vez dos microporos. Com isso, Wang e Xu (2007) concluíram que os resultados experimentais não seguiram o mecanismo de macroporos e microporos sugerido por De Jong e Verruijt (1965).

#### **1.1.6 Influência da razão incremental de tensão no adensamento secundário**

Diversos ensaios na literatura se propuseram a estudar a influência da razão incremental de tensão ( $\Delta\sigma/\sigma'_v$ ) no comportamento das curvas de deformação vs tempo durante o adensamento.

Leonards e Girault (1961) realizaram ensaios em amostras indeformadas da argila da Cidade do México. A Figura 21 mostra a influência da razão incremental de tensão ( $\Delta\sigma/\sigma'_v$ ) sobre a curva de adensamento. Para grandes razões incrementais de tensão, o formato da curva é do tipo I, similar à da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936), com a parcela de compressão secundária ocorrendo ao final da primária. Para pequenas razões incrementais de tensão, o formato da curva obtida é do tipo III. Para razões incrementais intermediárias, obtém-se uma curva do tipo II – uma transição entre os tipos I e III.

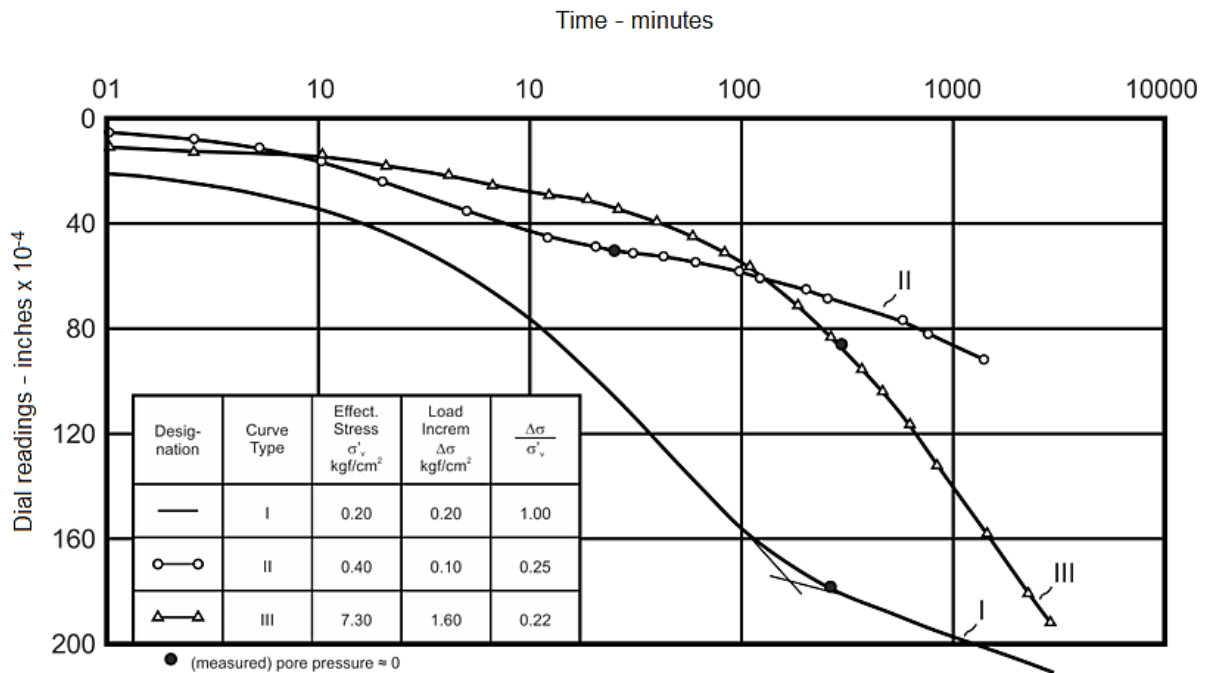


Figura 21 – Ensaios de Leonards e Girault (1961) para estudar a influência da razão incremental de tensão.

A Figura 22 ilustra a interpretação de Martins (2005) a respeito dos ensaios de Leonards e Girault (1961). Estando numa tensão correspondente ao ponto D na Figura 22a, ao se aplicar um incremento de tensão equivalente à distância horizontal entre os pontos D e C, o caminho percorrido será DBCF e a curva de adensamento será do tipo I na Figura 22b. Quanto maior a distância horizontal entre os pontos D e C, mais similar à teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) será a curva. Por outro lado, se no ponto D na Figura 22a for aplicado um incremento de tensão equivalente a DB, o caminho percorrido será DBE e a curva de adensamento será do tipo III na Figura 22b. É um caso em que praticamente não há adensamento primário e toda a deformação será compressão secundária. A curva do tipo II seria obtida caso o carregamento fosse superior a DB mas inferior a DC, de tal modo que os adensamentos primário e secundário fossem de magnitude similar.

Nota-se na Figura 22 que Martins (2005) se ampara no conceito de curvas de compressão paralelas entre si, em função da magnitude da compressão secundária para cada tensão efetiva. Este conceito será visto com mais detalhes no item 1.2.

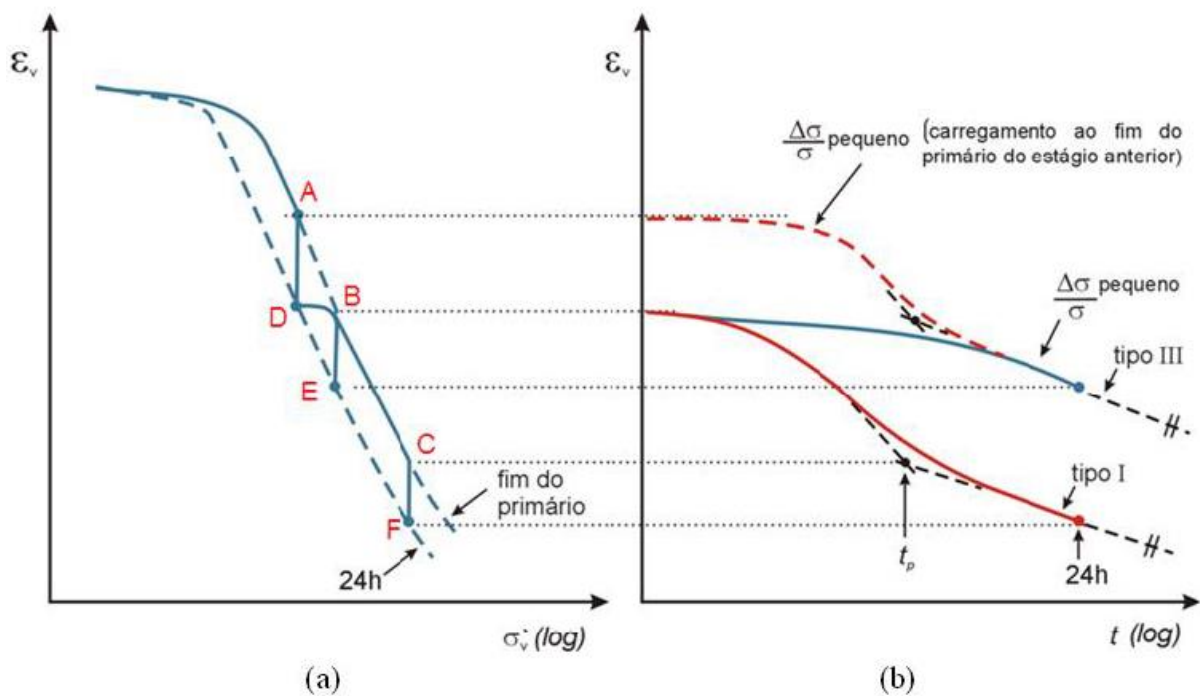


Figura 22 – Interpretação de Martins (2005) sobre os ensaios de Leonards e Girault (1961).

Para demonstrar sua interpretação, Martins (2005) apresentou três ensaios de adensamento realizados na Argila do Sarapuí (Figura 23). Os três corpos de prova foram carregados de 100 kPa para 125 kPa ( $\Delta\sigma/\sigma'_v = 0,25$ ). Dois deles foram carregados ao “fim” do adensamento primário e o outro foi carregado ao fim de 48h do estágio. As curvas de adensamento com carregamento ao fim do primário do estágio anterior mostram-se mais similares à curva teórica de Terzaghi e Fröhlich (1936) do que aquela em que o carregamento foi feito ao fim de 48h. Esta última apresenta o formato tipo III, porque o adensamento secundário é preponderante em relação ao primário.

Martins (2005) ainda apresentou três curvas de adensamento em que os carregamentos foram feitos ao “fim do primário” do estágio anterior. Em cada estágio foi empregado um valor diferente da razão incremental de tensão. A Figura 24 mostra mais uma vez que, quanto maior for o valor de  $\Delta\sigma/\sigma'_v$ , mais a curva experimental se aproxima daquela prevista pela teoria de Terzaghi e Fröhlich (1936).

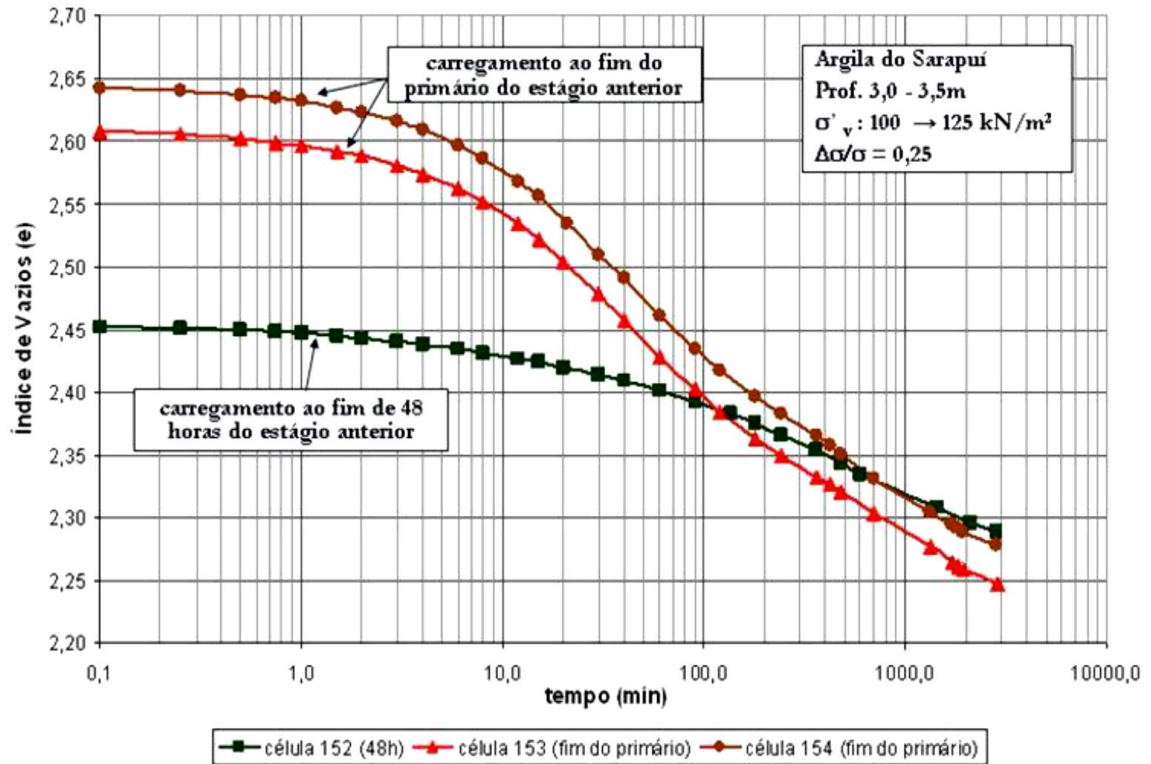


Figura 23 – Comparação entre curvas de adensamento com carregamento feito no fim do primário do estágio anterior (acima) e ao fim de 48h do estágio anterior (abaixo) para a mesma razão incremental de tensão (Martins, 2005).

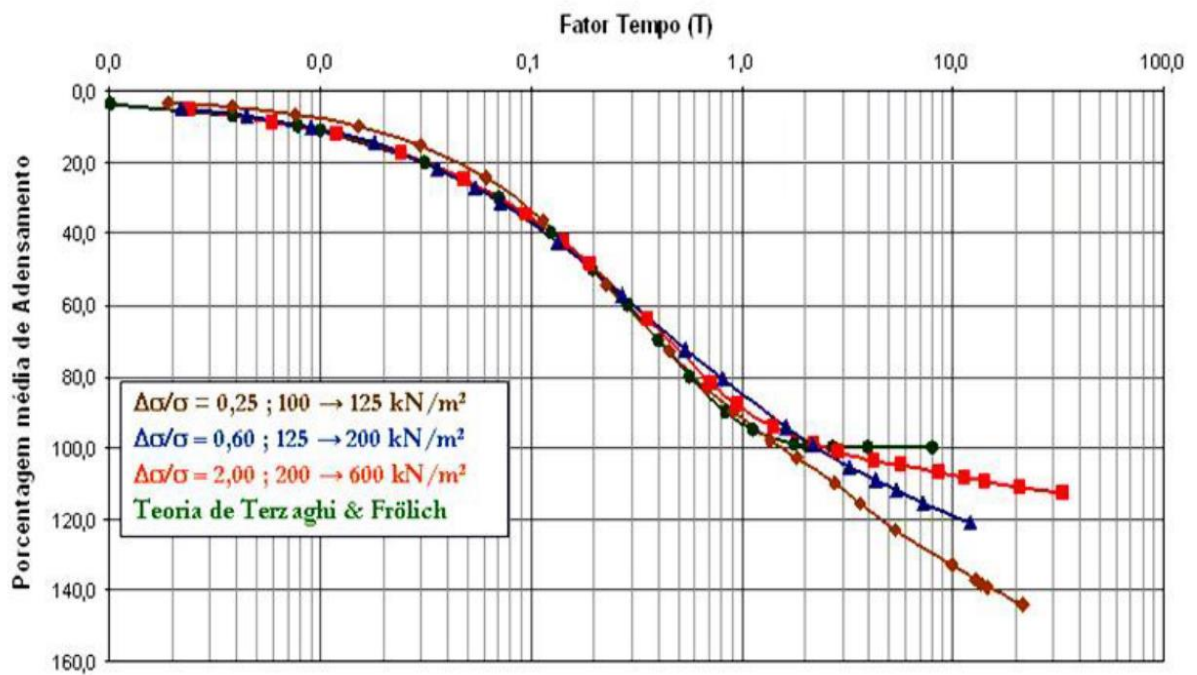


Figura 24 – Ensaios de Martins (2005) para estudar a influência da razão incremental de tensão.

Vieira (1988) realizou ensaios de adensamento em 4 corpos de prova da Argila do Sarapuí. Inicialmente todos os corpos de prova foram submetidos à tensão de 6,25 kPa e depois carregados até 50 kPa com razão incremental de tensão  $\Delta\sigma/\sigma'_v = 1$  em estágios de 24 horas. A partir de então, cada corpo de prova passou a ter uma razão incremental de tensão diferente, a saber:  $\Delta\sigma/\sigma'_v = 0,5$ ;  $\Delta\sigma/\sigma'_v = 1$ ;  $\Delta\sigma/\sigma'_v = 3$  e  $\Delta\sigma/\sigma'_v = 7$ . Com isso, os corpos de prova foram conduzidos respectivamente às tensões verticais de 75, 100, 200 e 400 kPa. Os estágios tiveram aproximadamente 11 meses de dura o, período no qual a temperatura variou entre 20 C e 26 C.

A Figura 25 mostra os estágios cujas tensões finais foram de 100, 200 e 400 kPa. Observa-se que, quanto maior a razão incremental de tensão ( $\Delta\sigma/\sigma'_v$ ) mais atenuada fica a compressão secundária. Matematicamente esse efeito é representado por um parâmetro aqui denominado  $R$ , que é a razão entre o recalque primário e o recalque total. Quanto maior o valor de  $\Delta\sigma/\sigma'_v$ , maior a razão  $R$ .

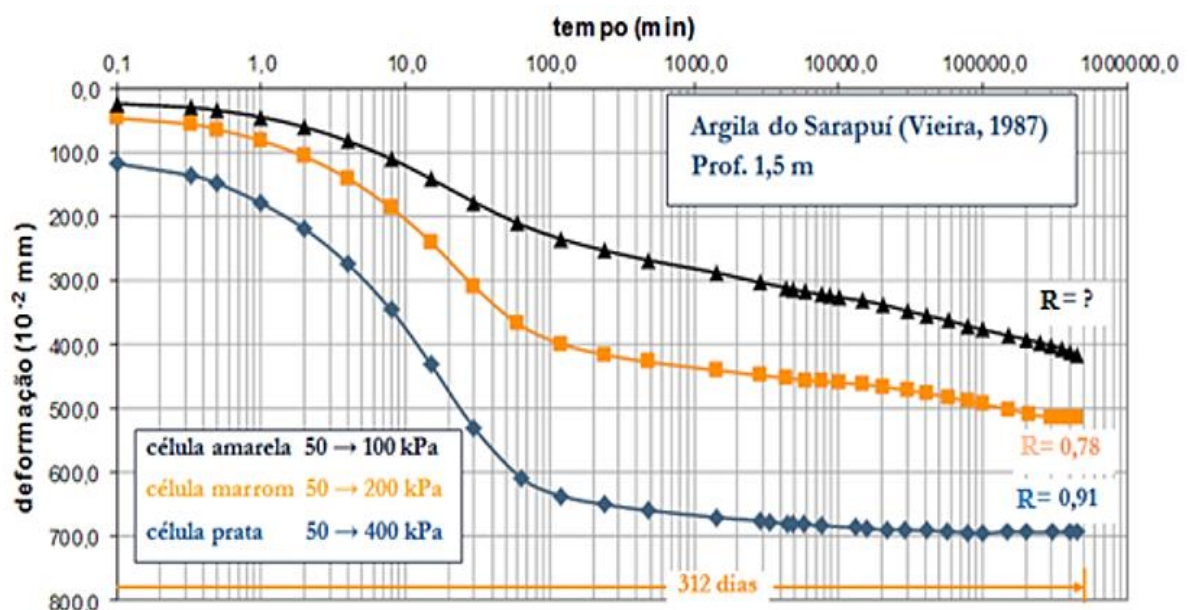


Figura 25 – Ensaio de Vieira (1988) para estudar a influência da razão incremental de tensão.

Martins (1990) realizou três ensaios de adensamento, com temperatura controlada, em corpos de prova moldados a partir de uma mistura de 90% de caulim

e 10% de bentonita. As razões incrementais de tensão aplicadas foram de 0,33; 0,5 e 1,0. Os estágios escolhidos para a observação da compressão secundária tiveram início imediatamente após o “fim do primário” do estágio anterior, para minimizar o efeito da compressão secundária do estágio anterior no estágio em estudo. A compressão secundária foi acompanhado por um período de 2,1 anos.

A Figura 26 apresenta os resultados de Martins (1990). Novamente fica evidenciada a influência da razão incremental de tensão na curva de adensamento. Quanto maior a razão  $\Delta\sigma/\sigma'_v$ , mais as curvas de adensamento se aproximam da curva teórica de Terzaghi e Fröhlich (1936) e menor se torna a importância da compressão secundária se comparada à primária.

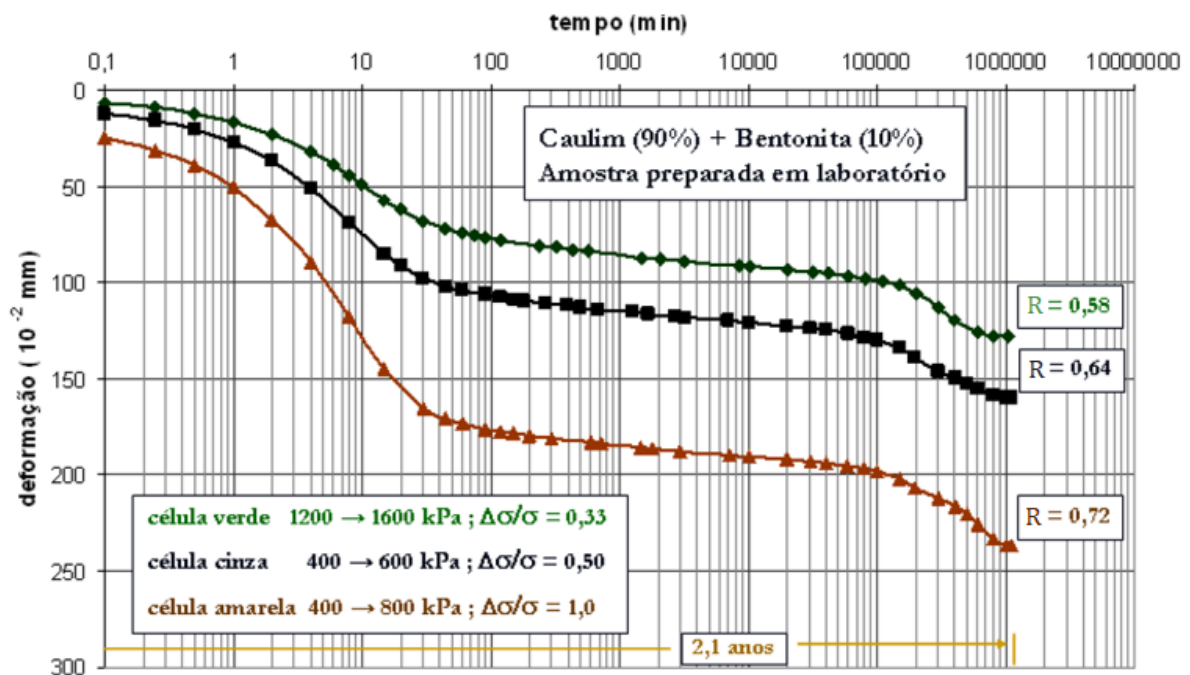


Figura 26 – Ensaio de Martins (1990) para estudar a influência da razão incremental de tensão.

Carvalho (1997) realizou ensaios de adensamento de longa duração em amostras de caulim + 10% de bentonita. Os ensaios foram realizados impondo-se diferentes valores da razão incremental de tensão  $\Delta\sigma/\sigma'_v$ . A Figura 27 mostra dois dos ensaios realizados.



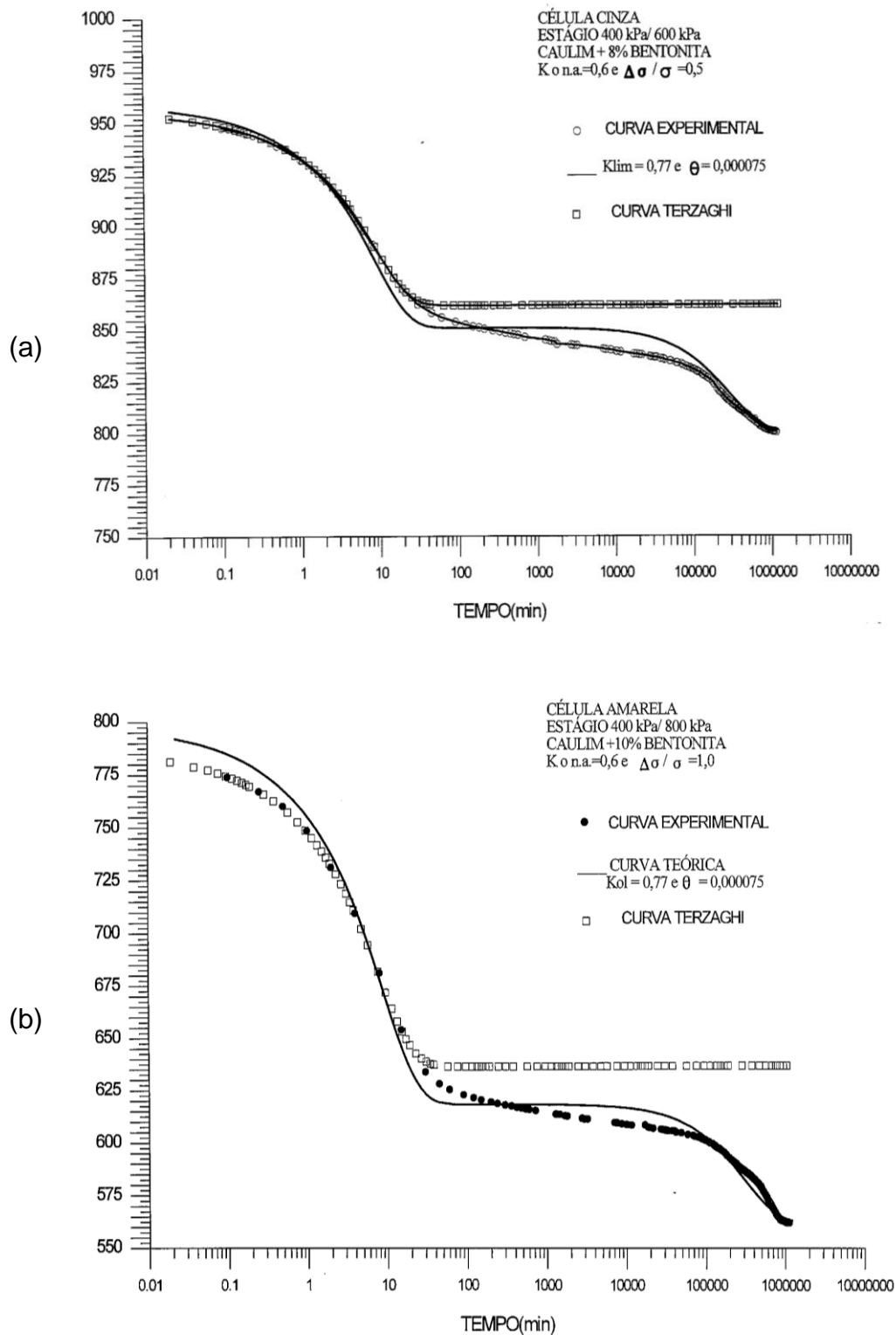


Figura 27 – Comparação entre as curvas teórica e experimental do ensaio de adensamento em amostra de caulim e 10% bentonita (Carvalho, 1997). (a)  $\Delta\sigma/\sigma'=0,5$ . (b)  $\Delta\sigma/\sigma'=1,0$ .

Nos gráficos também estão plotadas as curvas da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) e uma teoria de adensamento desenvolvida por Carvalho (1997), que buscou eliminar certas limitações das propostas de Martins e Lacerda (1985) e Martins et al. (1997) – em especial a falta de acoplamento hidromecânico. A porcentagem média de adensamento obtida por Carvalho (1997) é dada pela expressão (7), cujos parâmetros são os mesmos das teorias de Martins e Lacerda (1985) e Martins et al. (1997). Na teoria de Carvalho (1997), a variação de volume é controlada pela tensão octaédrica efetiva e o adensamento secundário se processa pelo aumento da tensão octaédrica efetiva via relaxação da tensão desviadora com o tempo. O termo  $\Delta\sigma/\sigma'_v$  aparece explicitamente na equação (7).

$$\begin{aligned} \bar{U} = & \frac{\frac{(1+2K_{0n})}{3} \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T)\right]}{\frac{(1+2K_{0n})}{3} \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) + \frac{2}{3} (K_{0l} - K_{0n}) \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right)} \\ & + \frac{\frac{2}{3} (K_{0l} - K_{0n}) \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) [1 - \exp(-\Theta T)]}{\frac{(1+2K_{0n})}{3} \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) + \frac{2}{3} (K_{0l} - K_{0n}) \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right)} \\ & + \frac{\frac{2}{3} (K_{0l} - K_{0n}) \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\theta}{M^2 - \theta} \frac{2}{M^2} [\exp(-M^2 T) - \exp(-\Theta T)] \right\}}{\frac{(1+2K_{0n})}{3} \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right) + \frac{2}{3} (K_{0l} - K_{0n}) \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma'_{v0}}\right)} \end{aligned} \quad (7)$$

Interessante notar que todos os ensaios de adensamento de longa duração (Figura 25, Figura 26 e Figura 27) apresentaram uma variação significativa de  $C_\alpha$  após um longo período de tempo, independentemente da razão incremental de tensão – assim como visto anteriormente na Figura 19. Este efeito será aqui chamado de “dupla onda”, pois uma segunda “onda” aparece durante o adensamento secundário na curva deformação vs tempo (log). Assim, há a primeira “onda”, referente ao adensamento primário, e a segunda “onda”, referente ao adensamento secundário. A transição entre as “ondas” é dada por uma inclinação aproximadamente constante ( $C_\alpha$  constante).

## 1.2 Modificação do conceito original do Princípio das Tensões Efetivas

Ao se admitir que a longo prazo as tensões cisalhantes se dissipam totalmente, fazendo com que  $K_0 = 1$ , admite-se também que o solo se comporta a

longo prazo como se fosse um fluido viscoso. Isto significa que as argilas moles só apresentariam resistência ao cisalhamento quando a velocidade da distorção fosse diferente de zero.

Com os resultados dos ensaios de Feijó (1991), sugerindo que  $K_0$  não tende a 1,0 a longo prazo, o Grupo de Reologia dos Solos da COPPE – a partir de Martins (1992) – passou a admitir que uma parte da resistência das argilas moles se devia à viscosidade (dependente da velocidade) e outra se devia ao atrito (que independe da velocidade). Assim, conjecturou-se que o adensamento secundário estaria associado à relaxação das tensões cisalhantes de origem viscosa e, portanto, a relaxação seria apenas parcial. O processo cessaria a partir do momento que essas tensões fossem de tal magnitude que pudessem ser suportadas apenas pela resistência por atrito. Desse modo, o valor de  $K_0$  poderia crescer (ou diminuir) em direção a 1, mas não necessariamente chegaria a 1.

Com a comprovação de que o adensamento secundário ocorre mesmo sob condições hidrostáticas (Figura 17), sua causa não poderia ser a relaxação das tensões cisalhantes. Desde então, passou-se a investigar o mecanismo da viscosidade conforme descrito por Terzaghi (1941) e Taylor (1942), dividindo-se as tensões efetivas em uma parcela de contatos sólidos e outra viscosa. Esta seria dependente da velocidade de deformação, pois a viscosidade é uma propriedade dos materiais que depende da taxa em que ele é deformado. Vários estudos foram desenvolvidos para verificar a validade do modelo e os resultados foram positivos.

Por isso, o presente trabalho não irá se aprofundar nos mecanismos da Teoria dos Processos Cinéticos, da existência de macroporos e microporos e do rearranjo das partículas, em função das evidências que as contradizem. Na opinião do autor, a hipótese da viscosidade da água (associada à velocidade de deformação) como sendo a principal responsável pelos efeitos não explicados pelo Princípio das Tensões Efetivas é a única que tem sido respaldada pelos resultados experimentais obtidos na literatura.

Neste item será feito um compilado sobre os principais trabalhos que moldaram o entendimento aplicado no presente trabalho.

### 1.2.1 Contribuição de Terzaghi (1941)

Uma das principais representações da interação entre as partículas de argila e as camadas de água adsorvida foi proposta por Terzaghi (1941). A Figura 28 ilustra o ponto de contato entre duas partículas. Na vizinhança imediata das superfícies das partículas, a água adsorvida é admitida como sólida. Conforme a distância à superfície da partícula aumenta, a água adsorvida ainda apresenta uma viscosidade significativa, mas cada vez menor. A partir de uma determinada distância  $d$ , que depende das propriedades químicas das partículas de argila, a água se torna água comum.

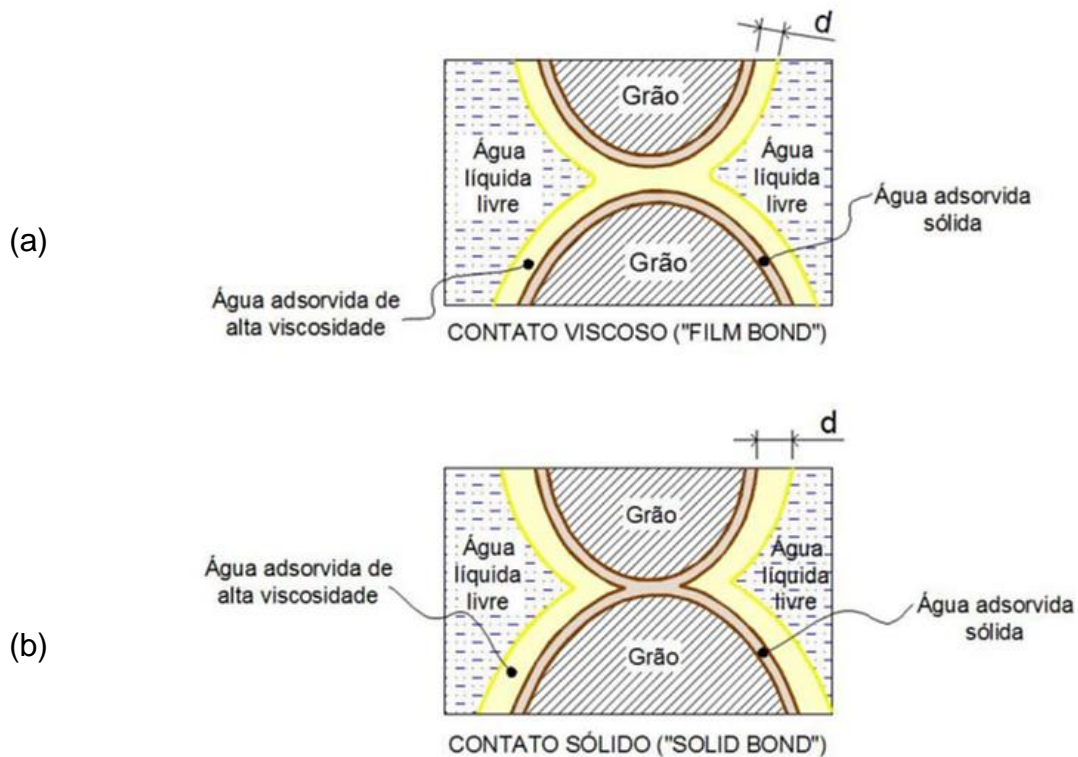


Figura 28 – Efeito da água adsorvida (Terzaghi, 1941 *apud* Martins, 1992).

A movimentação das partículas de argila – por exemplo, quando o solo está sendo comprimido – faz com que as camadas de água adsorvida que as envolvem se unam, como mostra a Figura 28a. Nesse momento, as partículas ainda estão separadas por uma camada de água adsorvida viscosa. Quanto mais as partículas se aproximam uma da outra, mais delgada vai se tornando a camada adsorvida viscosa existente entre elas, até que o contato finalmente se dá através da camada de água adsorvida sólida (Figura 28b).

De acordo com Terzaghi (1941), esse contato sólido entre as partículas de argila não ocorre simultaneamente em todo o solo. Terzaghi (1941) chamou de “processo de solidificação” o estabelecimento gradual dos contatos sólidos entre as partículas. Antes de a argila estar completamente solidificada, algumas partículas já estão conectadas por contatos sólidos (“solid bonds”), enquanto outras estão conectadas pelos contatos viscosos (“film bonds”).

Ainda segundo a concepção de Terzaghi (1941), tanto os “solid bonds” quanto os “film bonds” transmitem força intergranular. Desse modo, é necessário dividir a tensão efetiva em duas parcelas. A primeira, chamada “solid bond stress”, é inteiramente suportada pelos contatos entre as camadas adsorvidas sólidas. A segunda, denominada “film bond stress”, é suportada pela resistência viscosa das camadas adsorvidas de água viscosa.

Essa parcela relativa à resistência viscosa está associada a um movimento intergranular viscoso lento. Diz-se que, enquanto essa parcela existir, a argila se encontra no estado lubrificado. Quando toda a tensão efetiva for suportada exclusivamente por contatos sólidos, a argila encontrar-se-á no estado sólido.

Terzaghi (1941) utiliza essa ideia para explicar os recalques chamados primário e secundário. Quando um carregamento é realizado, a argila encontra-se no estado lubrificado. Devido ao excesso de poropressão, ocorre o processo conhecido por adensamento primário. Após quase todo o excesso de poropressão ter se dissipado (“fim” do adensamento primário), a argila ainda se encontra no estado lubrificado. Então, o movimento relativo entre as partículas continua até que todos os contatos viscosos (“film bonds”) se tornem sólidos (“solid bonds”). A esse processo dá-se o nome de compressão secundária. Se o adensamento primário é a transferência do excesso de poropressão para as tensões efetivas, o adensamento secundário é a transformação dos contatos viscosos em contatos sólidos.

Sendo a compressão secundária decorrente do movimento relativo das partículas de argila em direção a um estado em que não há contatos viscosos, e esse processo não é simultâneo em todo o solo, há que se considerar que ela ocorre desde o início do adensamento e não após o fim do adensamento primário.

### 1.2.2 Contribuição de Taylor e Merchant (1940) e Taylor (1942)

Taylor e Merchant (1940) desenvolveram uma teoria de adensamento unidimensional na qual a compressão secundária ocorre simultaneamente ao adensamento primário. O efeito viscoso não está citado explicitamente no trabalho de Taylor e Merchant (1940), mas, segundo Andrade (2009), a consideração da compressão secundária como fenômeno viscoso aparece de forma implícita.

A Figura 29 ilustra o conceito. O caminho ALBC representa uma curva de compressão na qual a compressão secundária ocorre após a deformação por compressão primária, a partir do índice de vazios  $e_p$ . No entanto, o caminho mais próximo da realidade deve ser AMC, no qual os adensamentos primário e secundário ocorrem simultaneamente desde o início do processo. Em uma tensão efetiva  $\sigma'_v$ , o solo já sofreu uma compressão secundária representada por LM. Admite-se que a velocidade do adensamento secundário nesse instante seja proporcional à magnitude da compressão secundária que ainda haveria de ocorrer para aquela tensão (ou seja, o segmento MN).

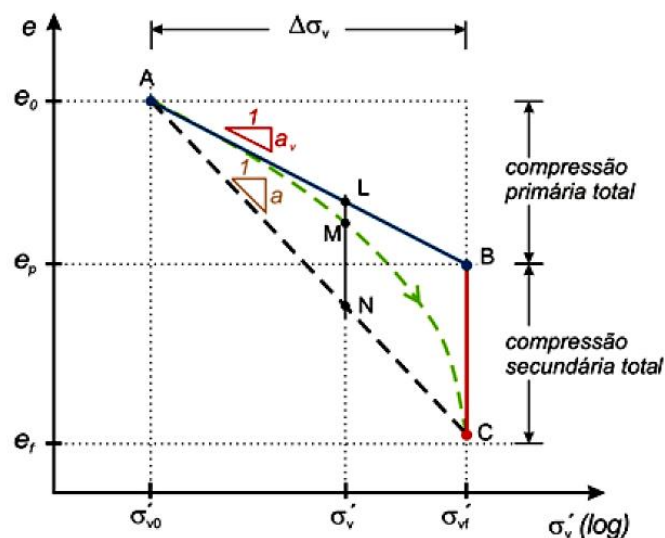


Figura 29 – Curva de compressão na teoria de Taylor e Merchant (1940)

A relação tensão vs deformação da teoria de Taylor e Merchant (1940) (equação (8)) inclui tanto a compressão primária quanto a secundária. Esta última varia ao longo do tempo  $t$  em função de um parâmetro  $\mu$ , denominado “coeficiente de compressão secundária”. Esse coeficiente tem unidade  $[t]^{-1}$ .

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = a_v \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} + \mu[a(\sigma'_v - \sigma'_{v0}) - (e_0 - e)] \quad (8)$$

Onde  $a_v$  é o coeficiente de compressibilidade relativo ao recalque primário,  $a$  é o coeficiente de compressibilidade relativo ao recalque total (ver Figura 29),  $\sigma'_{v0}$  é a tensão vertical efetiva inicial e  $e_0$  é o índice de vazios inicial.

Na visão do autor desta tese, o efeito viscoso está implícito na equação (8) devido à relação entre a tensão  $\sigma'_v$  e a velocidade de deformação  $\frac{\partial e}{\partial t}$ , que é uma característica da viscosidade. Deve-se destacar que uma das hipóteses simplificadoras da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) admite que o índice de vazios é função apenas da tensão vertical efetiva. Na teoria de Taylor e Merchant (1940) essa ideia é desconsiderada devido à inclusão da compressão secundária.

Com base na mesma associação entre saída de água e deformações da teoria clássica (equação (2)), a equação diferencial de Taylor e Merchant (1940) é:

$$\frac{k_v(1+e)}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma'_v}{\partial z^2} = a_v \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} + \mu[a(\sigma'_v - \sigma'_{v0}) - (e_0 - e)] \quad (9)$$

A solução para porcentagem média de adensamento obtida pela resolução da equação (9), revisada por Christie (1965), é:

$$\bar{U} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{FM^2} [(\Psi_1 - \Psi_2)(\Psi_3 - 1)e^{(\Psi_1 + \Psi_2)T} - (\Psi_1 + \Psi_2)(\Psi_3 + 1)e^{(\Psi_1 - \Psi_2)T}]$$

$$M = (2m + 1) \frac{\pi}{2}; m = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$$

$$T = \frac{c_v t}{H_d^2}$$

$$F = \frac{\mu H_d^2}{R c_v}$$

$$R = \frac{\rho_p}{\rho_t}$$

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2}(F + M^2)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \sqrt{(F + M^2) - 4RFM^2}$$

$$\Psi_3 = \frac{\Psi_1 + M^2}{\Psi_2}$$
(10)

Em que  $c_v$  é o coeficiente de adensamento,  $H_d$  é a altura de drenagem,  $T$  é o Fator Tempo e  $M$  é a função do contador do somatório. Todos esses termos são iguais aos da teoria de Terzaghi e Fröhlich (1936).

A teoria de Taylor e Merchant (1940) depende da razão entre o recalque primário  $\rho_p$  e o recalque total  $\rho_t$  (aqui denominada  $R$ ), além de um fator  $F$ , que seria uma medida da razão entre as velocidades das compressões secundária e primária. Para ensaios de laboratório convencionais, pelo fato de a altura de drenagem ser muito pequena (1,0 cm), grande parte do recalque secundário só se manifesta após a deformação por compressão primária. Martins (2005) descreve que o valor de  $F$  para este caso é bastante reduzido, da ordem de  $10^{-4}$ . No campo, como a altura de drenagem é da ordem de metros, ambos os recalques acontecem simultaneamente, de tal forma que  $F$  passa a ser maior que 1,0, eventualmente maior que 10.

A Figura 30 apresenta a porcentagem média de adensamento, segundo a teoria de Taylor e Merchant, considerando o recalque primário  $\rho_p$  como sendo 70% do recalque total  $\rho_t$  ( $R = 70\%$ ).

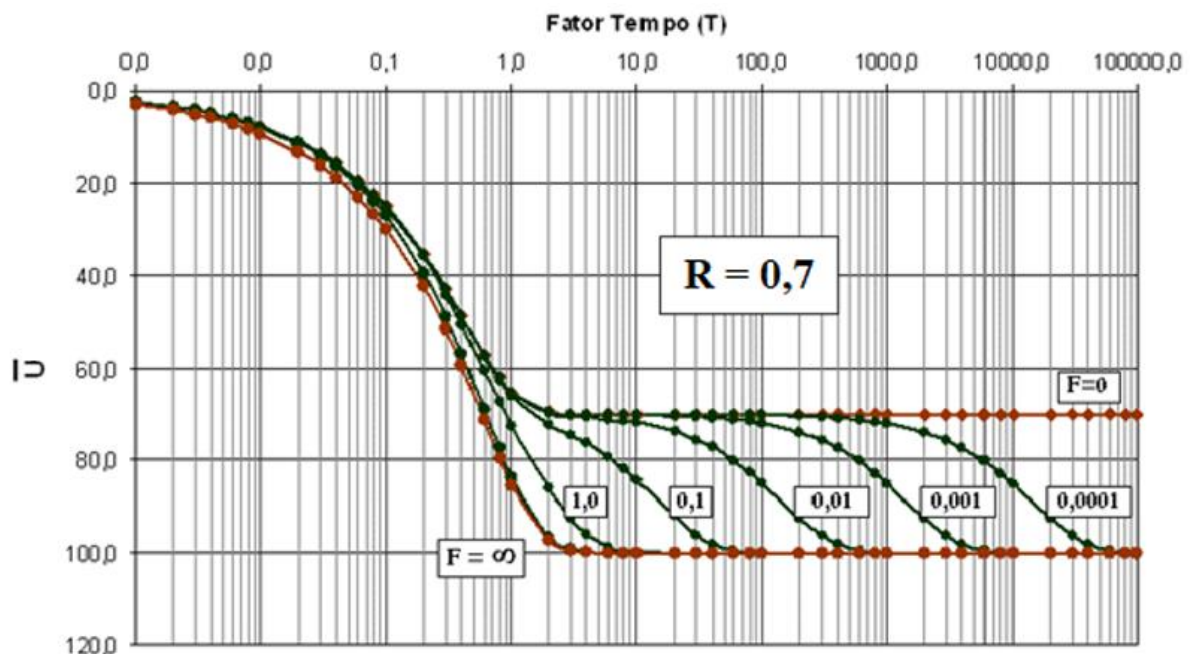


Figura 30 – Curvas de Taylor e Merchant (1940) para  $R$  igual a 0,7 e diferentes valores de  $F$  (Andrade, 2009).



As curvas apresentam “dupla onda” para a faixa  $0 < F < 1$ . As demais não apresentam “dupla onda” e podem ser consideradas praticamente coincidentes para  $F \geq 10$ . Neste caso, a expressão para porcentagem média de adensamento de Taylor e Merchant (1940) se reduz à de Terzaghi e Fröhlich (1936), desde que se substitua o coeficiente de adensamento  $c_v$  na teoria clássica por um coeficiente de adensamento equivalente  $c_v^*$ , dado por  $c_v^* = R \cdot c_v$ .

Dois anos depois da Teoria de Taylor e Merchant (1940), a qual foi denominada Teoria A, Taylor (1942) desenvolveu a chamada Teoria B. Embora seja uma teoria apenas para recalque primário, sua base teórica aborda o secundário. Nesta nova proposta, existe nas argilas uma resistência adicional à compressão que é uma função da velocidade de deformação.

A Figura 31 ilustra o conceito. De acordo com Taylor (1942), se o índice de vazios de uma amostra sob adensamento for  $e_G$ , a tensão vertical efetiva na teoria de Terzaghi e Fröhlich (1936) será  $\sigma'_{vG}$  independentemente do grau de adensamento. Essa relação única entre o índice de vazios e a tensão efetiva é dada por  $f_b(e)$ . Porém, na Teoria B, para o mesmo índice de vazios  $e_G$ , a tensão vertical efetiva é maior que  $\sigma'_{vG}$  e representada por um ponto J. O segmento GJ é uma resistência adicional  $p_p$ , dependente da velocidade de deformação, e chamada de resistência estrutural plástica à compressão (“plastic structure resistance to compression”).

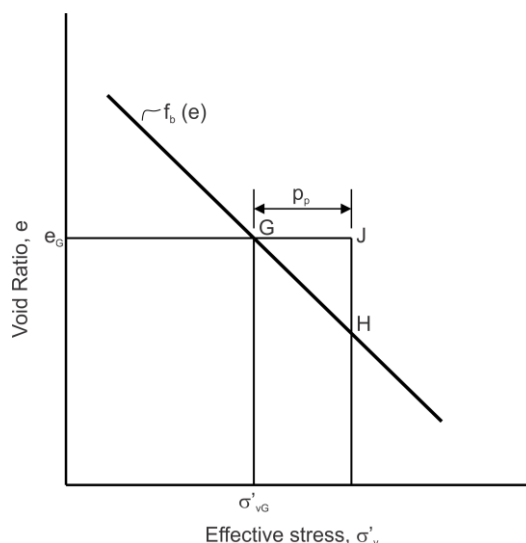


Figura 31 – Conceituação da Teoria B (Taylor, 1942)

Ainda segundo Taylor (1942), a resistência estrutural  $p_p$  pode ser dividida em duas parcelas: resistência de ligação  $p_b$  (“bond resistance”) e resistência estrutural viscosa  $p_v$  (“viscous structural resistance”). Sendo assim, a tensão vertical efetiva em qualquer ponto e qualquer tempo pode ser expressa por:

$$\sigma'_v = f_b(e) + p_p = f_b(e) + p_b + p_v \quad (11)$$

A relação entre a resistência estrutural plástica  $p_p$  e a velocidade de deformação está esquematizada na Figura 32 pela curva OABC. Ao “final” do adensamento primário, a velocidade de deformação é bastante pequena, representada pelo segmento AD, mas não é nula, pois ainda há adensamento secundário. No entanto, como a Teoria B cobre apenas o adensamento primário, considera-se que AD é nulo e a curva é simplificada para o segmento DE ou DF. O segmento OD, que representa a resistência estrutural plástica ainda remanescente após o fim do adensamento primário, corresponde a  $p_b$ . Com isso, a linha de final da compressão primária corresponde a  $f_b(e) + p_b$ .

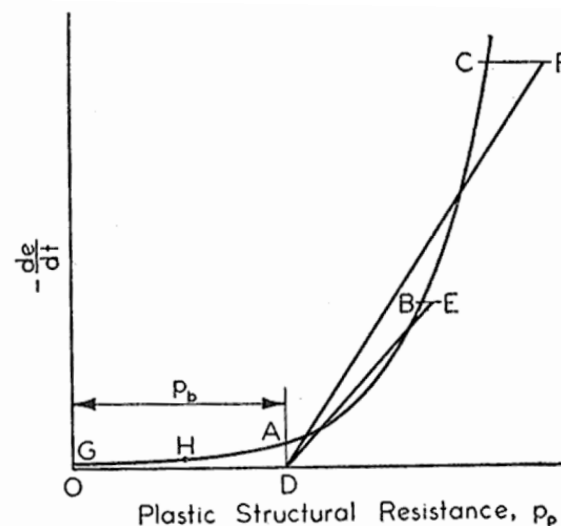


Figura 32 – Relação entre a resistência estrutural plástica e a velocidade de deformação (Taylor, 1942).

Na opinião do autor, a associação entre  $f_b(e)$  e a teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) pode causar uma errônea impressão de que  $f_b(e)$  é uma relação

fixa, independente dos efeitos da viscosidade e/ou da compressão secundária. Na realidade, Taylor (1942) explica que  $f_b(e)$  é a curva de compressão obtida nos ensaios de adensamento no laboratório e que, portanto, pode se deslocar em função da duração dos estágios de carga, como mostra a Figura 33. Usualmente os estágios de carga duram 1 dia, mas ensaios com estágios mais longos ou mais curtos forneceriam curvas de compressão diferentes, deslocadas entre si.

Quanto mais longo forem os estágios, mais para a esquerda  $f_b(e)$  se deslocaria. Em compensação,  $p_b$  se tornaria maior neste caso, de forma que a relação  $f_b(e) + p_b$  (linha de fim do primário) seja única independentemente da duração dos estágios de carga. Em um instante qualquer durante o adensamento primário, a tensão vertical efetiva está à direita da linha de fim do primário, distando dela de  $p_v$ .

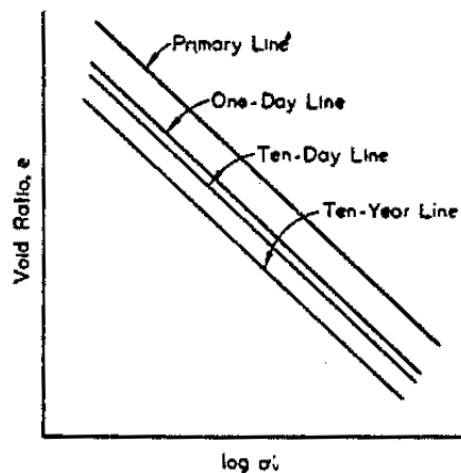


Figura 33 – Curvas de compressão para diferentes tempos (Taylor, 1942).

A Figura 34 ilustra o conceito. Após o recalque secundário do estágio anterior, representado pelo segmento EA, o novo carregamento gera uma deformação tal que o par  $(e, \sigma'_v)$  em um determinado tempo é representado pelo ponto H. Nesse instante, a magnitude da tensão que separa o ponto H da linha de fim do primário (fixa) é indicada pelo segmento GH e vale  $p_v$ . A distância da linha de fim do primário até a linha  $f_b(e)$ , que é a curva de compressão obtida no ensaio de laboratório, é representada por FG e vale  $p_b$ . O adensamento secundário é

representado por BC, propositalmente desenhado em um tamanho diferente de EA para demonstrar a possibilidade de compressões secundárias desiguais.

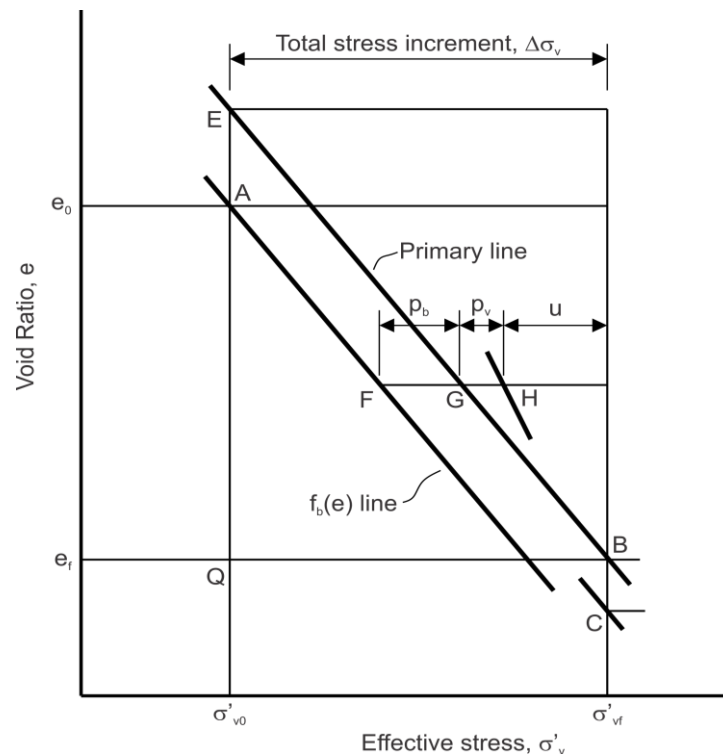


Figura 34 – Curvas de compressão da Teoria B (adaptado de Taylor, 1942).

Taylor (1942) então descreveu o valor de  $p_v$  como sendo função linear da velocidade de deformação, conforme indicado na Figura 32, isto é:

$$p_v = -\bar{\eta} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (12)$$

Onde  $-\bar{\eta}$  é uma constante de proporcionalidade que pode ser entendido como um coeficiente de viscosidade.

Taylor (1942) também partiu da equação de fluxo para determinar a porcentagem média de adensamento. Foi definido um novo coeficiente de adensamento  $c_p$ , cujo coeficiente de compressibilidade associado é o coeficiente angular  $a$  da reta que representa o fim do primário, para diferenciar do conceito original da teoria clássica. A equação que representa a porcentagem média de adensamento da Teoria B é:

$$\bar{U} = 1 - \exp\left(-\frac{T_k}{J}\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \left[ \exp\left(-\frac{T_k}{J}\right) - \exp\left(-\frac{T_k}{J + M^{-2}}\right) \right]$$

$$T_k = \frac{c_p t}{H_d^2} = \frac{k_v(1+e)t}{a\gamma_w H_d^2} \quad (13)$$

$$T_p = \frac{t}{a\bar{\eta}}$$

$$J = \frac{k_v \bar{\eta}(1+e)}{\gamma_w H_d^2}$$

Deve-se destacar que, enquanto o desenvolvimento realizado por Taylor (1942) leva em conta apenas o adensamento primário, a teoria de Taylor e Merchant (1940), que é muito mais simples em sua base teórica, cobria tanto primário quanto secundário. A Teoria B não é, portanto, capaz de reproduzir o efeito da “dupla onda” observado em laboratório, pois tal efeito está associado ao adensamento secundário.

A Figura 35 ilustra as porcentagens médias de adensamento da Teoria B para  $J = 0,1$  e  $J = 0$ . A curva para  $J = 0$  coincide com a teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936), pois todo o efeito viscoso é desconsiderado ( $\bar{\eta} = 0$ ).

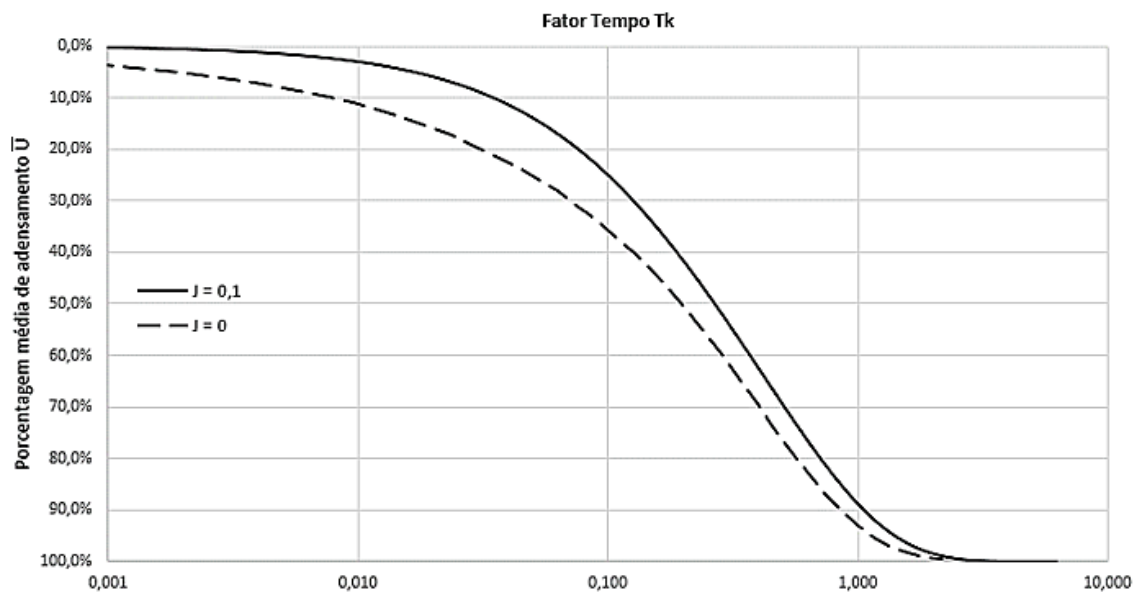


Figura 35 – Curvas de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo da Teoria B de Taylor (1942).

### 1.2.3 Contribuição de Šuklje (1957), Bjerrum (1972) e Leroueil et al. (1985)

Šuklje (1957) apresentou um método gráfico de construção de curvas de compressão que depende da velocidade de deformação, como mostra a Figura 36. Essa relação foi apresentada utilizando um conjunto de linhas de mesma velocidade de deformação, denominadas isotacas. O método, por sua vez, foi chamado de “método das isotacas”.

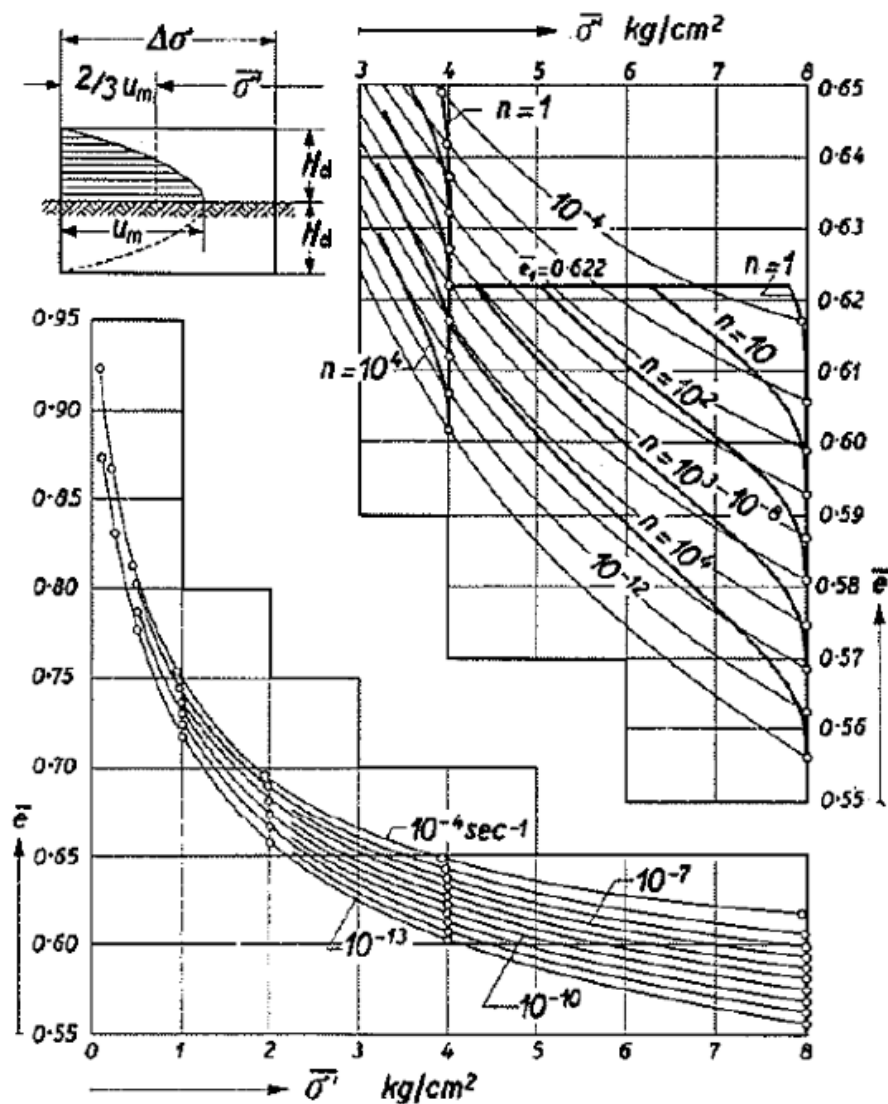


Figura 36 – Método das isotacas (adaptado de Šuklje, 1957).

Admitiu-se que a velocidade do adensamento depende dos valores médios do índice de vazios  $\bar{e}$  e da tensão efetiva  $\bar{\sigma}'$  num determinado tempo. O valor de  $\bar{\sigma}'$  é calculado em função do excesso de poropressão médio  $\bar{u}$ , cuja distribuição foi



Seja  $\sigma'_{v0}$  o valor da tensão vertical efetiva atuante em um elemento de um depósito de argila mole. Após 10.000 anos de compressão secundária, o elemento seria representado pelo ponto  $(e_0, \sigma'_{v0})$  da Figura 37. Isto significa dizer que o adensamento secundário ocorreu durante 10.000 anos sob tensão vertical efetiva constante  $\sigma'_{v0}$ . Durante esse adensamento secundário, o elemento de solo intercepta várias curvas paralelas à curva de compressibilidade do fim do primário, associadas aos diversos intervalos de tempo. A redução progressiva da distância entre curvas pressupõe a redução da velocidade de deformação com o tempo.

O envelhecimento gera uma tensão de sobreadensamento  $\sigma'_{vm}$ , que não é a maior tensão a que o solo foi submetido – pois tal tensão é  $\sigma'_{v0}$ . Quando ele for carregado sob uma tensão  $\Delta\sigma = \sigma'_{vf} - \sigma'_{v0}$ , o caminho a ser percorrido na curva de compressibilidade é  $abc$ , em que  $ab$  é o trecho de “recompressão” e  $bc$  é o trecho de “compressão virgem”. Este caminho diz respeito apenas ao recalque primário. A compressão secundária seria o trecho  $cd$ , novamente em função do tempo.

Para o caso de um carregamento efetuado no campo, o caminho completo (primário + secundário) não seria dado por  $abcd$  e sim pela linha tracejada  $ad$ . Isto se daria devido à diferença entre as distâncias de drenagem entre os corpos de prova de laboratório e os depósitos argilosos. Tal concepção se assemelha à de Taylor e Merchant (1940).

Leroueil et al. (1985) executaram ensaios CRS (“constant rate of strain”) e ensaios edométricos de longa duração, nos quais as leituras de “creep” foram feitas durante 70 dias, em corpos de prova de argilas do Canadá. Os ensaios CRS foram realizados com diferentes velocidades de deformação. É possível perceber (Figura 38) que as curvas apresentam certo paralelismo. Para uma mesma deformação  $\varepsilon_v$ , quanto menor a velocidade de deformação  $\dot{\varepsilon}_v$ , menor a tensão vertical efetiva  $\sigma'_v$  associada. Em outras palavras, quanto menor  $\dot{\varepsilon}_v$ , mais à esquerda a curva se situa.

Com esses resultados, Leroueil et al. (1985) plotaram curvas de compressão normalizadas em relação à tensão de sobreadensamento (Figura 39) e concluíram que o comportamento das argilas sob compressão edométrica é controlado por uma relação  $(\sigma'_v \text{ vs } \varepsilon_v \text{ vs } \dot{\varepsilon}_v)$  única. Os resultados evidenciam que a magnitude da compressão secundária está relacionada à velocidade de deformação volumétrica.



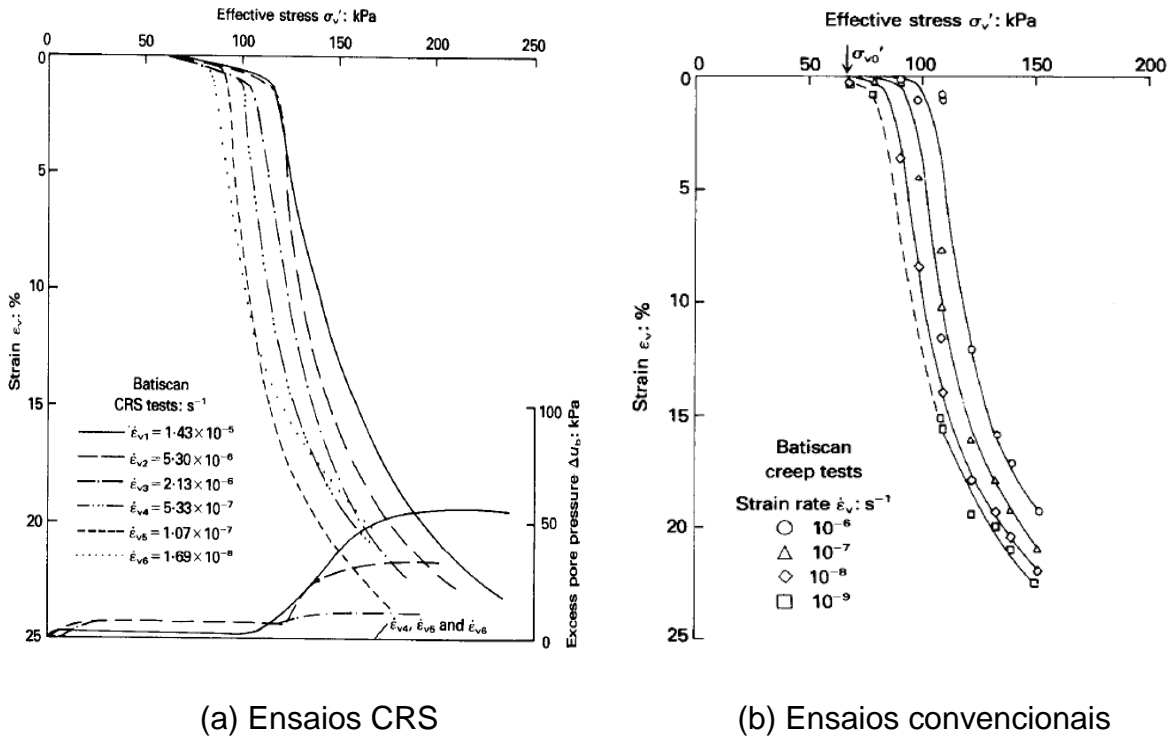


Figura 38 – Curvas de compressão na argila de Batiscan (Leroueil et al., 1985).

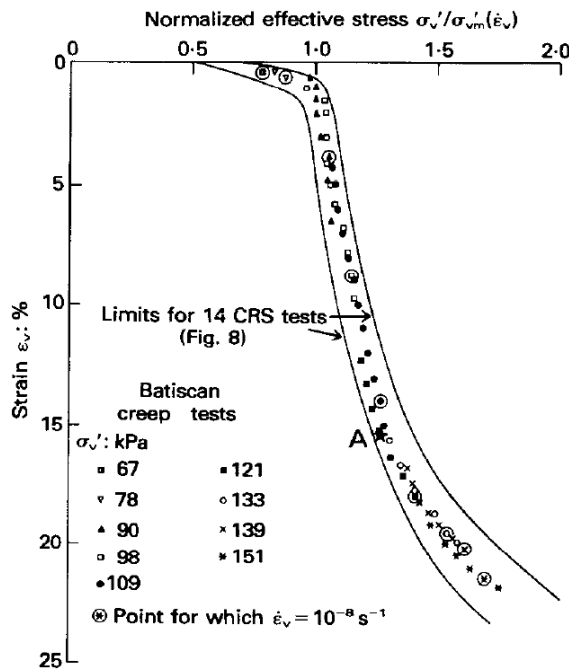


Figura 39 – Curvas de compressão normalizadas em relação à tensão de sobreadensamento obtidas dos ensaios edométricos para a argila de Batiscan (Leroueil et al., 1985).

### 1.2.4 Estudos recentes sobre a parcela viscosa da tensão efetiva

Diversos estudos já haviam constatado um crescimento da poropressão após o fechamento da drenagem em ensaios de adensamento (Bjerrum et al., 1958; Campanella, 1965; Walker, 1969; Arulanandan et al., 1971; Holzer et al., 1973 e Lima, 1993, já mostrado na Figura 3).

Para explicar o fenômeno, Thomasi (2000) propôs que a tensão efetiva fosse composta de duas parcelas: uma parcela que se estabelece nos contatos sólido-sólido (parcela sólido-sólido) e a outra que se estabelece nos contatos viscosos (parcela viscosa) através da água adsorvida, assim como sugerido por Terzaghi (1941) e Taylor (1942). Assim sendo:

$$\sigma = \sigma'_s + \sigma'_\eta + u \quad (14)$$

Em que  $\sigma'_s$  é a parcela sólido-sólido, função do índice de vazios  $e$ , e  $\sigma'_\eta$  é a parcela viscosa, função tanto do índice de vazios  $e$  quanto da velocidade de deformação  $d\varepsilon/dt$ .

A parcela viscosa só pode existir se houver uma velocidade de deformação. Segundo a concepção de Thomasi (2000), o fechamento da drenagem implica em zerar a velocidade de deformação  $d\varepsilon/dt$ , conseqüentemente fazendo com que a parcela viscosa  $\sigma'_\eta$  tenda para zero. Ao mesmo tempo, a parcela sólido-sólido  $\sigma'_s$  deve se manter constante, pois não está mais havendo qualquer variação no índice de vazios. Uma vez que a tensão total  $\sigma$  é mantida constante no ensaio, a igualdade da equação (14) só pode prevalecer com o aumento da poropressão  $u$ . Desse modo, haveria uma transferência da parcela viscosa para a poropressão.

Assim, conjecturou-se que, se a drenagem fosse fechada com  $u \cong 0$  e velocidades de deformação diferentes, a poropressão deveria crescer para valores diferentes – mais precisamente, o valor de  $\sigma'_\eta$  no instante de fechamento da drenagem. Esse comportamento foi verificado por Thomasi (2000) nos ensaios de adensamento hidrostático, como mostra a Figura 40.

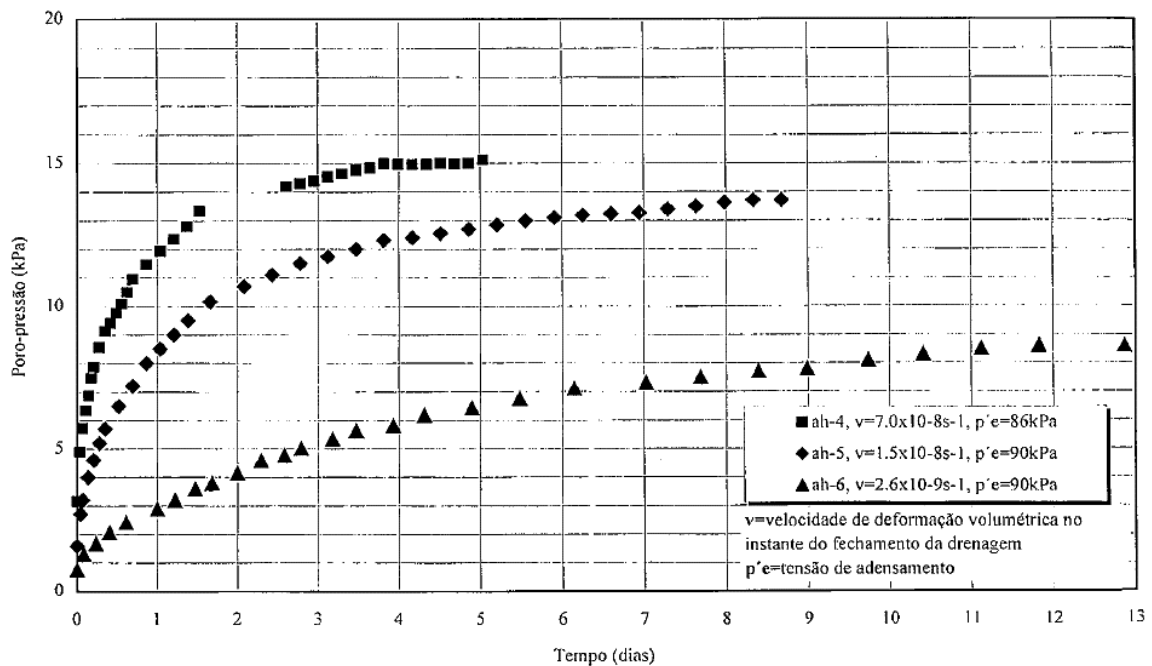


Figura 40 – Crescimento da poropressão após fechamento da drenagem em diferentes velocidades de deformação (Thomasi, 2000).

Segundo Thomasi, a transferência da parcela viscosa para a poropressão é gradual em vez de instantânea porque, embora a velocidade de deformação global seja nula após o fechamento da drenagem, localmente os elementos ainda apresentam velocidade de distorção diferente de zero. No entanto, de acordo com Martins (2019), o fenômeno se deve à compressibilidade da água. Após o fechamento da drenagem, a velocidade de deformação volumétrica não cai a zero imediatamente porque ocorre compressão da água nos vazios, em uma velocidade muito reduzida porque a compressibilidade da água é muito pequena.

Dos Santos (2006) realizou ensaios de adensamento hidrostático em corpos de prova moldados a partir de uma mistura de solo coluvial, proveniente do município de Bananal (SP), e 10% de bentonita. A drenagem foi fechada quando o excesso de poropressão remanescente era de 1,5 kPa e, a partir daí, a evolução da poropressão foi monitorada durante 40.000 min. As leituras indicaram um crescimento gradativo até 6 kPa. Em seguida, a drenagem foi aberta e se verificou que a poropressão apresentou uma queda brusca, retornando ao seu valor inicial – do momento em que a drenagem havia sido fechada – em cerca de 1.000 min. Pouco tempo depois esse excesso de poropressão remanescente foi dissipado.

Após 72.000 min a drenagem foi novamente fechada e mais uma vez foi verificado o crescimento da poropressão. A Figura 41 mostra o comportamento observado.

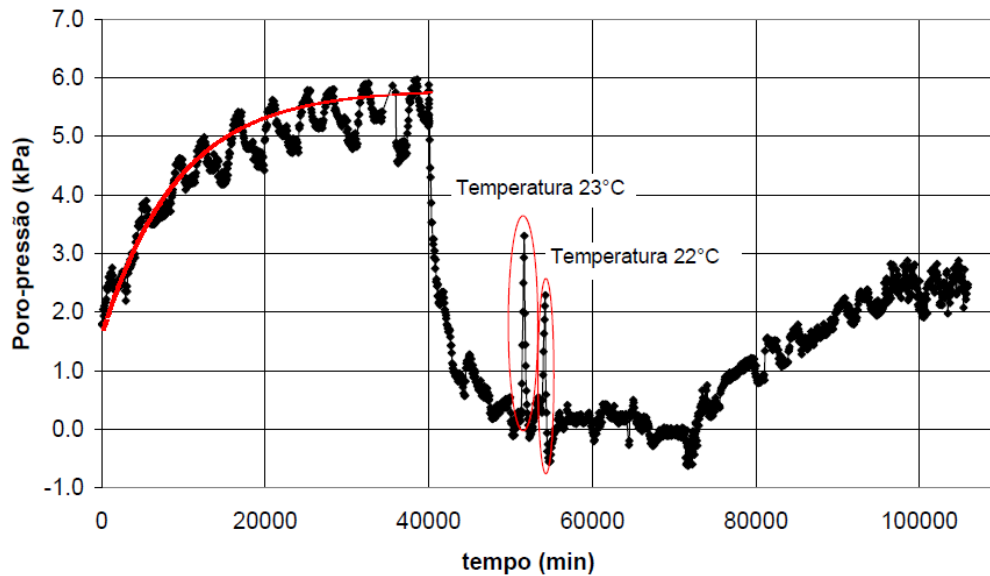


Figura 41 – Evolução da poropressão após fechamento ( $t = 0$  min), abertura ( $t = 40.000$  min) e novo fechamento ( $t = 72.000$  min) da drenagem (dos Santos, 2006).

Notam-se ainda na Figura 41 dois picos de poropressão entre 50.000 e 55.000 min, devidos a elevação acidental da temperatura, que subiu de 19 °C para 23° C e 22°C, respectivamente. Este comportamento também é esperado pelo modelo. O aumento da temperatura reduz a viscosidade, o que faz com que  $\sigma'_{\eta}$  diminua e, conseqüentemente, a poropressão  $u$  aumente.

Essa abordagem de dividir a tensão efetiva em duas parcelas foi utilizada para explicar o mecanismo do adensamento secundário (Aguiar, 2008; Andrade, 2009; Aguiar, 2014; Andrade, 2014). Ao final do adensamento primário, tem-se excesso de poropressão praticamente nulo ( $u \cong 0$ ) e velocidade de deformação diferente de zero ( $\frac{d\varepsilon}{dt} \neq 0$ ), pois ainda está havendo deformação. Quanto mais o adensamento secundário se processa, menor se torna a velocidade de deformação, até se tornar nula ao final do adensamento – e, conseqüentemente, anular a parcela viscosa  $\sigma'_{\eta}$ . Como a tensão total  $\sigma$  é constante, a variação da parcela viscosa deve estar associada a uma variação da parcela sólido-sólido  $\sigma'_{s}$ . Portanto, se a parcela

viscosa decresce até zero, isso deve ser consequência de uma transferência da parcela viscosa para a parcela sólido-sólido.

No fenômeno do crescimento da poropressão após fechamento da drenagem (Figura 40 e a Figura 41) houve variação da parcela viscosa da tensão efetiva, mas não houve deformação, pois a drenagem estava fechada. Se no adensamento secundário ocorre deformação, esta só pode estar associada à variação da parcela sólido-sólido, já que a variação da parcela viscosa por si só não gera deformação. O fato importante decorrente desta consideração é o de que a variação de volume de um solo plástico estaria ligada à variação apenas da parcela sólido-sólido das tensões efetivas e não das tensões efetivas como um todo.

Desse modo, o adensamento primário se dá por uma transferência do excesso de poropressão para a parcela sólido-sólido da tensão efetiva, enquanto o adensamento secundário se dá por uma transferência da parcela viscosa da tensão efetiva para a parcela sólido-sólido. Assim, o adensamento secundário pode ser explicado mesmo sob o estado hidrostático de tensões.

Com base nesse conceito, também se pressupõe que os adensamentos primário e secundário ocorram simultaneamente. Na realidade, a visão de que os adensamentos primário e secundário representam dois fenômenos distintos estaria incorreta. Ambos seriam o mesmo fenômeno decorrente de dois efeitos que se combinam: resistência hidrodinâmica à drenagem e resistência viscosa à deformação.

Na opinião do autor, fica reforçada a ideia de que a compressão secundária ao longo do tempo possa ser chamada de “adensamento secundário” – conforme discutido no item 1.1.3. Além da dissipação dos excessos de poropressão, há a transferência da parcela viscosa da tensão efetiva para a parcela sólido-sólido e seria essa transferência a responsável pela compressão secundária. Todos os fatores elencados por Taylor (1948) para se definir “adensamento” são atendidos.

Garcia (1996) realizou ensaios de adensamento edométrico na argila da Barra da Tijuca para estudar a relação entre a relaxação de tensões e o adensamento secundário. Os ensaios foram submetidos a diferentes sequências de carregamento. Alguns foram submetidos a estágios de relaxação, de adensamento secundário e de

descarregamento. O descarregamento foi realizado de modo a gerar  $OCR = 2$ , com base nos estudos da argila de Sarapuí (Feijó, 1991). O processo de relaxação de tensões foi feito colocando-se um apoio a mais – uma célula de carga – sob o braço de alavanca da prensa, de modo a impedir a deformação do corpo de prova.

A Figura 42 mostra os resultados. Durante os processos de relaxação e de compressão secundária, o solo apresenta uma tendência de se deslocar para uma linha paralela e à esquerda da linha de fim do adensamento primário (EOP) no gráfico  $e$  vs  $\sigma'_v$ . Tal linha havia sido encontrada por Feijó (1991) para a argila de Sarapuí, como comentado no item 1.1.4.

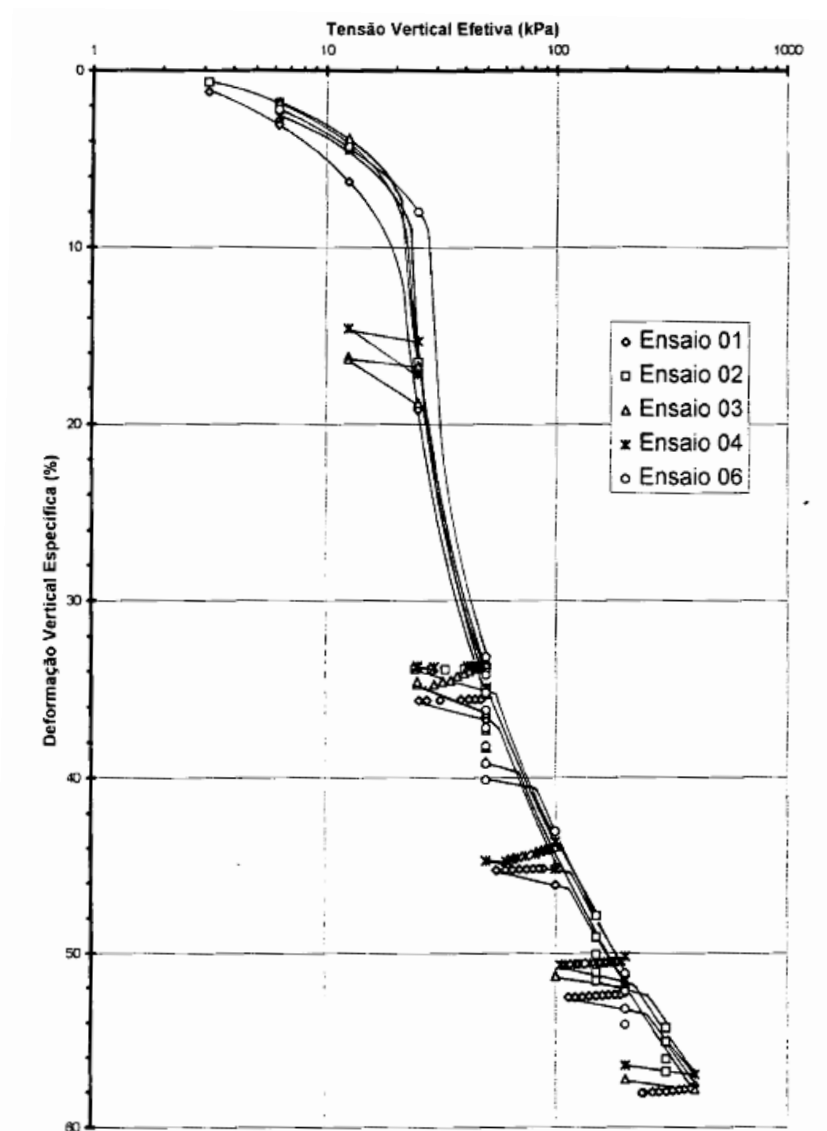


Figura 42 – Resultados dos ensaios de adensamento de Garcia (1996).

Atenta-se para o fato de que Garcia (1996) realizou ensaios de relaxação imperfeita, isto é, ainda havia uma pequena deformação ocorrendo. No entanto, a ideia central é a mesma da relaxação perfeita: durante a relaxação de tensões o estado de deformações é mantido constante, o que torna a velocidade de deformação nula. Como consequência, a parcela viscosa da tensão efetiva cai a zero, reduzindo assim a tensão efetiva. Por outro lado, o adensamento secundário ocorre (mesmo sob estado hidrostático de tensões) devido à transferência da parcela viscosa à parcela sólido-sólido e, quando as deformações cessam, a velocidade de deformação também é nula. Desse modo, a linha de fim de ambos os fenômenos está associada a  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ .

Assim, é possível entender a fluência e a relaxação de tensões não mais como dois fenômenos distintos, mas sim como o mesmo fenômeno da viscosidade atuando de maneiras distintas em função das restrições impostas nos ensaios.

Uma significativa mudança no entendimento tradicional do adensamento é o excesso de poropressão inicial. A abordagem clássica considera que, em um ensaio edométrico, o excesso de poropressão no instante inicial  $u_0$  é igual ao acréscimo de tensão total  $\Delta\sigma$  aplicado. No entanto, de acordo com o modelo, no instante  $t = 0^+$  já existe velocidade de deformação, ainda que não tenha havido deformação. Desse modo, embora  $\sigma'_s$  seja nulo,  $\sigma'_\eta$  é positivo e, por consequência,  $u_0 < \Delta\sigma$ .

A Figura 43 mostra o comportamento do excesso de poropressão inicial nos ensaios de adensamento em célula triaxial realizados por Thomasi (2000). Os dois corpos de prova foram carregados sob um acréscimo de tensão de 140 kPa e, no instante  $t = 0$ , o excesso de poropressão era de fato 140 kPa. Logo que a drenagem foi aberta, em questão de poucos segundos o excesso de poropressão caiu de forma brusca e depois cresceu novamente a um valor inferior a 140 kPa.

Esse fenômeno foi explicado por Thomasi (2000) da seguinte forma: no instante  $t = 0^+$  existe velocidade de deformação e, portanto, mobilização da parcela viscosa da tensão efetiva. Essa mobilização reduz o valor do excesso de poropressão, o que, por sua vez, reduz o gradiente hidráulico. A redução do gradiente hidráulico reduz a velocidade do adensamento, de forma que a parcela viscosa diminua. A diminuição da parcela viscosa faz com que o excesso de

poropressão cresça, o que aumenta o gradiente hidráulico e, conseqüentemente, a velocidade de deformação. Este ciclo sugere um processo de amortecimento nos segundos iniciais do adensamento.

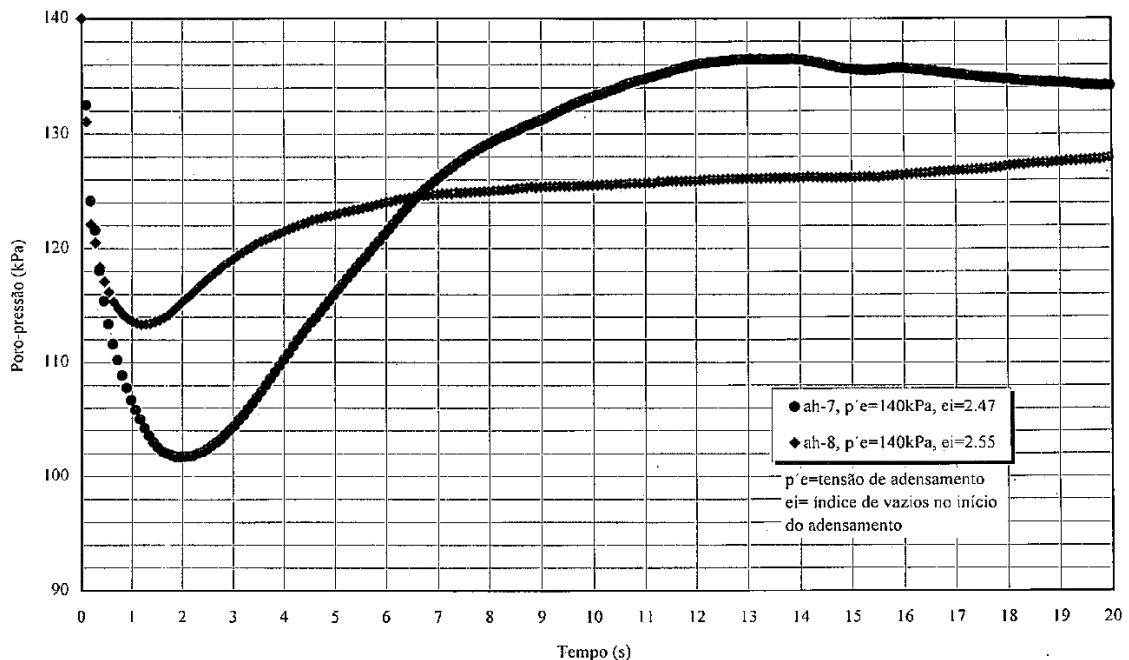


Figura 43 – Curvas de dissipação do excesso de poropressão no início do carregamento (Thomasi, 2000).

Segundo o entendimento do autor desta tese, a concepção de que o excesso de poropressão em  $t = 0^+$  é menor do que o acréscimo de tensão total aplicado parte do pressuposto que as transferências de tensões ocorrem instantaneamente ( $\Delta t \rightarrow 0$ ). Embora esse intervalo de tempo seja muito pequeno (da ordem de poucos segundos nos ensaios de Thomasi, 2000), ele é suficiente para que ocorra uma oscilação até a “estabilização” do excesso de poropressão. Na prática, essa aproximação é válida, mas corresponde a uma descontinuidade na curva de compressão. O par  $(e_0, \sigma'_{v0})$  salta horizontalmente para  $(e_0, \sigma'_{v0} + \Delta\sigma'_\eta)$ , em que  $\Delta\sigma'_\eta$  é positivo. Este salto horizontal se deve à velocidade de deformação existente no instante inicial do carregamento, que mobiliza a parcela viscosa instantaneamente, mas não é capaz de gerar variação na parcela sólido-sólido – pois esta depende exclusivamente do índice de vazios. Na realidade, a descontinuidade nessa aproximação se dá em função do carregamento ser instantâneo. Se o carregamento fosse feito de acordo com uma função contínua, tal que o acréscimo de tensão



tendesse a zero no instante inicial do carregamento, a velocidade de deformação em  $t = 0^+$  também tenderia a zero e, com isso, a descontinuidade na curva de compressão desapareceria. Neste caso, a velocidade do carregamento influenciaria na manifestação da parcela viscosa, de modo que quanto mais lenta fosse a aplicação da carga, menor seria a geração de parcela viscosa. Deve-se lembrar que a própria teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) já apresentava descontinuidades nas fronteiras drenantes, pois o excesso de poropressão variava instantaneamente de  $u = \Delta\sigma_v$  em  $t = 0$  para  $u = 0$  em  $t = 0^+$ .

A determinação do excesso de poropressão inicial pode ser ainda mais complexa devido à compressibilidade da água, pois em certos casos se observa até mesmo excesso de poropressão inicial nulo (Santa Maria e Santa Maria, 2018).

Alexandre (2000, 2006) e Santa Maria (2002) estudaram a curva que relaciona a parcela viscosa da tensão efetiva e a velocidade de deformação. A Figura 44 apresenta uma das curvas obtidas por Santa Maria (2002). Foram realizados ensaios de adensamento (já comentados no item 1.1.4) com leituras de poropressão e a diferença entre essas leituras e os valores de poropressão inferidos segundo um modelo exclusivamente hidrodinâmico foi atribuída à parcela viscosa. Os resultados mostraram que a relação  $\sigma'_{v\eta}$  vs  $d\varepsilon/dt$  é altamente não-linear.

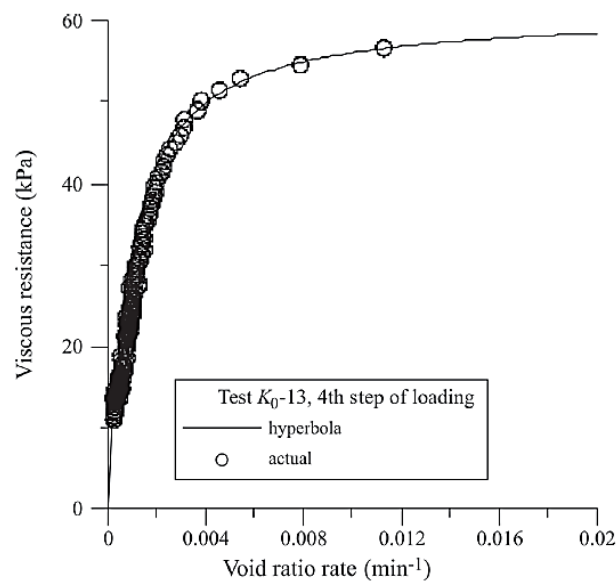


Figura 44 – Relação entre a parcela viscosa da tensão efetiva e a velocidade de deformação (Santa Maria e Santa Maria, 2018, a partir de Santa Maria, 2002).

Alexandre (2000, 2006) e Santa Maria (2002) concluíram que a relação é melhor expressa por uma função de potência da velocidade de deformação, mas Santa Maria e Santa Maria (2018) fizeram uma nova análise e concluíram que a melhor relação é, na verdade, uma hipérbole (como ilustrado na Figura 44).

### 1.2.5 Teoria do adensamento de Andrade (2014)

A partir dos trabalhos citados no item anterior, Andrade (2014) desenvolveu uma equação do adensamento unidimensional admitindo que a tensão vertical efetiva é composta de duas parcelas: uma viscosa estabelecida através da água adsorvida e outra estabelecida nos contatos tipo sólido-sólido. Essa teoria é uma referência para o presente trabalho, pois a abordagem do efeito viscoso será praticamente a mesma.

A parcela sólido-sólido, denotada por  $\sigma'_s$ , é função apenas do índice de vazios ( $e$ ). Já a parcela viscosa,  $\sigma'_{\eta}$ , é função do índice de vazios ( $e$ ) e da velocidade de deformação volumétrica específica ( $\dot{\epsilon}_v$ ). Andrade (2014) admitiu também que as deformações são devidas apenas às variações da parcela sólido-sólido.

Esta hipótese é decorrente da seguinte argumentação, já discutida no item anterior: se durante o adensamento secundário a tensão vertical efetiva é constante, a variação de volume não pode ser atribuída à variação da tensão efetiva como um todo. Entretanto, se a parcela sólido-sólido da tensão efetiva cresce, a compressão secundária está ligada à variação de  $\sigma'_s$ .

De acordo com Andrade (2014), a Figura 45 exemplifica as características que tornam sua teoria diferente da teoria de Terzaghi e Fröhlich (1936) e da teoria B de Taylor. Ao incremento de tensão vertical total  $\Delta\sigma_v$ , dado por AC, corresponde um excesso de poropressão inicial  $u(z,0)$  dado por BC. Assim, de forma geral, o excesso de poropressão inicial é menor do que o incremento de tensão vertical total  $\Delta\sigma_v$ . No início do processo, quando  $t = 0$ , a deformação volumétrica é nula, entretanto a velocidade de deformação  $\dot{\epsilon}_v$  não é.

Uma vez que a parcela viscosa ( $\sigma'_{v\eta}$ ) da tensão vertical efetiva é função da velocidade de deformação volumétrica específica ( $\dot{\epsilon}_v$ ), no instante em que ocorre a

aplicação de  $\Delta\sigma_v$  a parcela viscosa da tensão vertical efetiva ( $\sigma'_{v\eta}$ ) é mobilizada. Neste instante a deformação volumétrica específica  $\varepsilon_v = 0$ , o que permite concluir que as deformações estejam associadas às variações apenas da parcela sólido-sólido ( $\sigma'_{vs}$ ) da tensão vertical efetiva ( $\sigma'_v$ ).

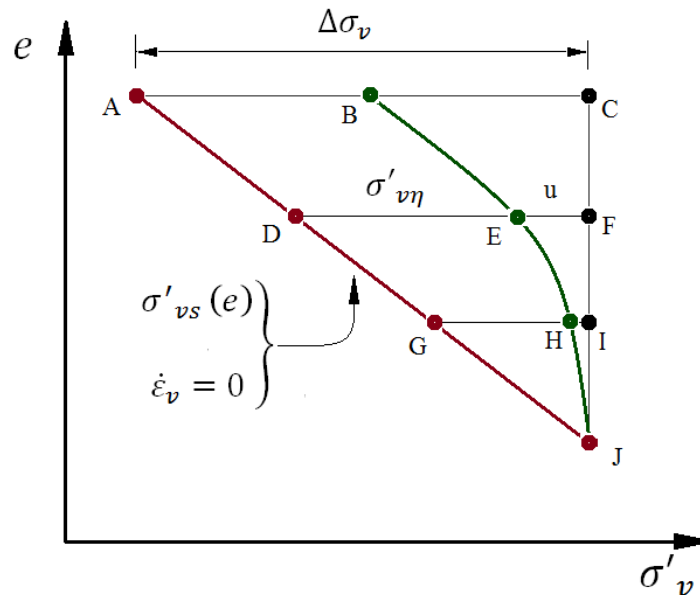


Figura 45 – Caminho ideal percorrido por um elemento de solo durante o adensamento com resistência viscosa (Andrade, 2014).

Num determinado instante do adensamento, a parcela sólido-sólido ( $\sigma'_{vs}$ ) é dada pelo ponto D. Neste mesmo instante, a parcela viscosa ( $\sigma'_{v\eta}$ ) é dada por DE e o excesso de poropressão é dado por EF. A linha ADGJ está associada à velocidade de deformação nula ( $\dot{\varepsilon}_v = 0$ ), livre de qualquer efeito viscoso. Esta linha corresponde ao fim da compressão secundária. Como  $\sigma'_{vs}$  é função exclusiva do índice de vazios, as deformações volumétricas estão associadas exclusivamente à variação de  $\sigma'_{vs}$ .

Ao atingir o ponto H, o excesso de poropressão é HI, que é praticamente nulo. Entretanto, a parcela viscosa da tensão vertical efetiva ( $\sigma'_{v\eta}$ ), representada por GH, não pode ser desprezada.

A partir da discussão acima, na visão de Andrade (2014), em vista da proximidade dos pontos H e I, a mecânica dos solos clássica resolveu chamar o adensamento representado pelo segmento IJ de compressão secundária. Como decorrência desta aproximação, o ponto I representa o chamado “fim do primário”.

A parcela viscosa da tensão vertical efetiva ( $\sigma'_{v\eta}$ ) seria função da velocidade de deformação volumétrica específica  $\partial\varepsilon_v/\partial t$ . Assim,  $\sigma'_{v\eta}$  poderia ser escrita de forma mais adequada como:

$$\sigma'_{v\eta} = -\eta(e)f\left(\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}\right) \quad (15)$$

Andrade (2014) adotou uma relação linear entre  $\sigma'_{v\eta}$  e  $\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}$ , em função de um coeficiente de viscosidade  $\eta$  considerado constante durante um estágio de adensamento, representado pelo seu valor médio  $\bar{\eta}$ :

$$\sigma'_{v\eta} = -\bar{\eta}\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (16)$$

A deformação específica  $\varepsilon_v$ , por sua vez, foi descrita por:

$$\varepsilon_v = -\frac{\sigma'_{vs}}{M'} \quad (17)$$

Onde  $\sigma'_{vs}$  é o acréscimo da parcela sólido-sólido da tensão vertical efetiva e  $M'$  é o módulo edométrico em função de  $\sigma'_{vs}$ . Baseando-se nestas hipóteses especiais, além daquelas admitidas na teoria clássica do adensamento, Andrade (2014) obteve a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\bar{\eta}k_v}{M'\gamma_w}\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{k_v}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{M'}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

A solução, em termos de poropressão com o tempo, é expressa por:

$$\frac{u(Z, V, T)}{\Delta\sigma_v} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M(VM^2 + 1)} \exp\left[\frac{-M^2 T}{VM^2 + 1}\right] \sin(MZ) \quad (19)$$

Onde  $Z = z/H_d$  é o Fator Profundidade e  $M$  é a função do contador do somatório, ambos iguais aos da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936),  $T$  é o Fator Tempo e  $V$  é denominado Fator Viscosidade e é definido por:

$$V = \frac{k_v \bar{\eta}}{\gamma_w H_d^2} \quad (20)$$

Vale destacar que o coeficiente de adensamento adotado por Andrade (2014) – e, conseqüentemente, o Fator Tempo  $T$  – leva em conta que as deformações estão associadas apenas às variações da tensão vertical efetiva sólido-sólido, como já mencionado anteriormente. Portanto, não são os mesmos parâmetros da teoria de Terzaghi e Fröhlich (1936). Todavia, eles se tornam iguais para viscosidade nula.

A solução em termos de porcentagem média de adensamento em função dos Fatores Tempo e Viscosidade é:

$$\bar{U}(V, T) = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp \left[ \frac{-M^2 T}{VM^2 + 1} \right] \quad (21)$$

As soluções dadas pelas equações (19) e (21) estão apresentadas de forma gráfica na Figura 46 e na Figura 47, respectivamente. É possível fixar o Fator Viscosidade  $V$  e, para cada Fator Tempo  $T$ , observar como se comporta a relação entre as razões  $u/\Delta\sigma_v$  e  $Z = z/H_d$ , ou seja, ao longo da camada. Interessante notar que o excesso de poropressão em  $T = 0$  em geral não é igual a  $\Delta\sigma_v$ , especialmente próximo às fronteiras drenantes – onde a velocidade de deformação é elevada. No entanto, no centro da camada ( $Z = 1$ ), que é a posição onde geralmente são feitas as leituras de poropressão,  $u/\Delta\sigma_v \cong 1$  se o valor de  $V$  for reduzido.

O Fator Viscosidade  $V$  é inversamente proporcional ao quadrado da distância de drenagem ( $H_d$ ). Assim, a influência da viscosidade se faz mais marcante no laboratório do que no campo.

A teoria desenvolvida por Andrade (2014) recai na teoria de Terzaghi quando  $V = 0$ . Isso é nítido fazendo  $V = 0$  tanto na equação (19) quanto na (21).

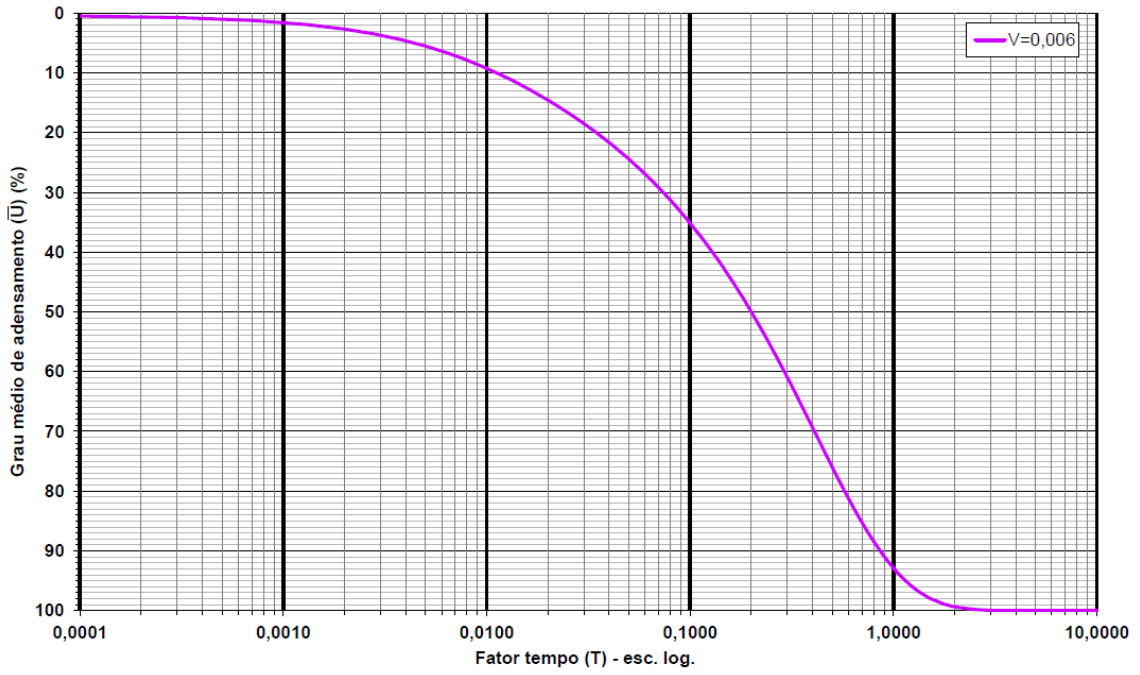


Figura 46 – Curva de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo para  $V = 0,006$  (Andrade, 2014).

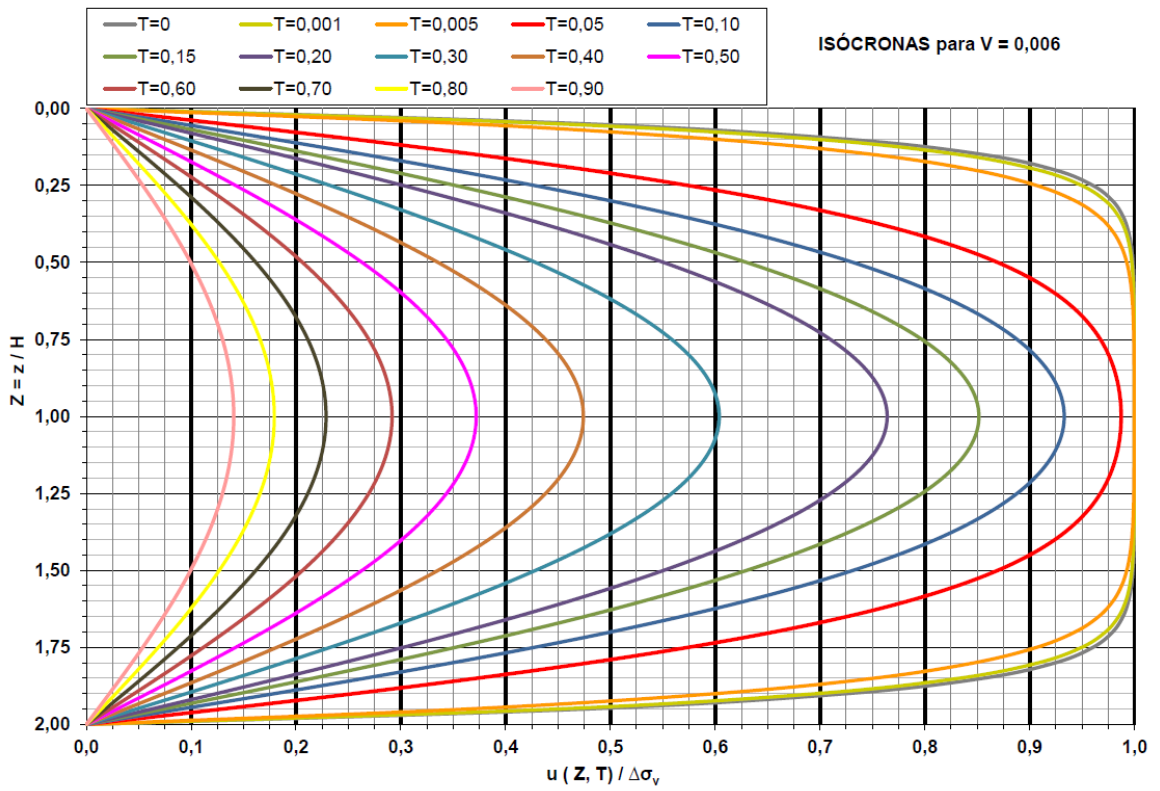


Figura 47 – Isócronas  $u(Z, T)\Delta\sigma_v$  vs  $Z$  para  $V = 0,006$  (Andrade, 2014).

Vale notar que os resultados obtidos por Andrade (2014) não exibiram o formato de “dupla onda”, observado nos ensaios de laboratório (Figura 19, Figura 25, Figura 26 e Figura 27). Teorias anteriores, como as de Taylor e Merchant (1940), Martins e Lacerda (1985) e Carvalho (1997), obtiveram sucesso nesse aspecto. Andrade (2014) argumentou que o coeficiente de viscosidade não deve ser considerado constante e sim crescente com a redução do índice de vazios – ou seja, a relação entre a parcela viscosa e a velocidade de deformação deve ser não-linear.

Andrade (2014) apresentou uma metodologia para determinação dos coeficientes de adensamento e de viscosidade em curvas de ensaios de laboratório a partir de sua curva teórica. Uma das etapas é o ajuste entre as duas curvas para obtenção do Fator Viscosidade  $V$ . O exemplo, mostrado na Figura 48, foi feito em um ensaio de adensamento convencional realizado por Martins (1990) e foi demonstrado que o ensaio se ajustava melhor para  $V = 0,008$  do que para  $V = 0,1$ . Andrade (2014) alertou ainda que, como sua teoria não foi capaz de reproduzir a “dupla onda”, o ajuste se limitaria ao trecho inicial do adensamento. O valor de  $R$  para o ensaio de Martins (1990) é da ordem de 75% a 80%.

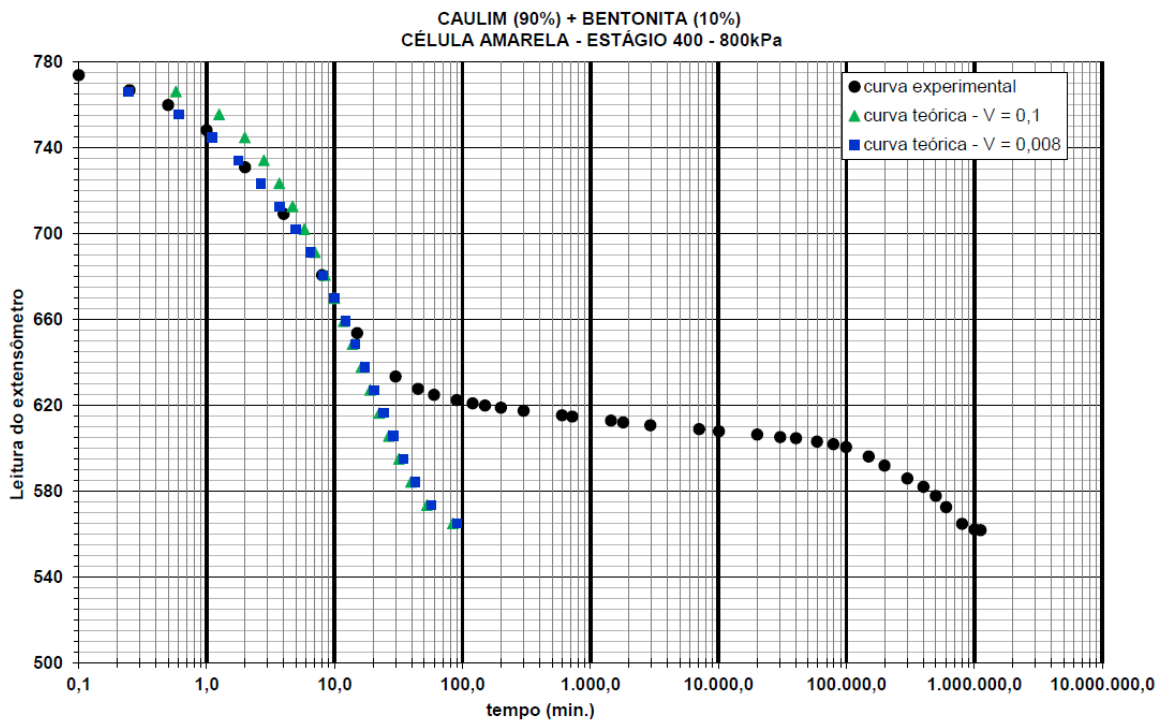


Figura 48 – Ajuste entre curva experimental e curva teórica de Andrade (2014).

O autor sugere que o procedimento de Andrade (2014) seja visto com cautela. A curva de “pontos triangulares” ( $V = 0,1$ ) da Figura 48 possui Fator Viscosidade 12,5 vezes maior do que a curva de “pontos quadrados” ( $V = 0,008$ ) e, mesmo assim, se “atrasou” menos de 1 minuto para atingir as mesmas leituras do extensômetro. Assim, curvas com Fatores Viscosidade menos discrepantes podem ser quase indistinguíveis. A maneira mais segura de se determinar a influência da viscosidade deve se dar pela compressão secundária e não pela primária, embora o autor tenha ciência de que Andrade (2014) não tinha como fazer isso, em função de sua teoria não exibir “dupla onda”.

Andrade (2014) ainda concluiu que as soluções encontradas pela sua teoria, tanto para a porcentagem média de adensamento em termos de deformação como para o excesso de poropressão, são iguais às da Teoria B de Taylor (1942). Na opinião do autor desta tese, esta é uma situação um tanto curiosa, visto que a Teoria B compreende apenas recalque primário e a teoria de Andrade (2014) compreende tanto primário quanto secundário. Isto se dá porque o mecanismo de adensamento primário adotado na Teoria B é similar ao mecanismo usado por Andrade (2014) para o recalque total.

### **1.3 Adensamento com drenagem radial**

Uma vez que esta tese se propõe a resolver uma equação do adensamento com fluxo radial, também é importante rever conceitos relacionados à drenagem radial e seu estudo ao longo dos anos.

Conforme explicam Almeida e Marques (2010), os drenos verticais de areia foram utilizados pela primeira vez em 1920 nos Estados Unidos. Os drenos pré-fabricados, por sua vez, começaram a ser usados por volta de 1970 e consistem em um núcleo de PVC com um filtro de geotêxtil ao redor.

O objetivo da instalação de drenos verticais é a redução do tempo de adensamento. Almeida e Marques (2010) comentam que a utilização dos drenos diminui o caminho de drenagem para cerca de metade da distância horizontal entre drenos. Além disso, a direção do fluxo de água no interior do solo passa de



predominantemente vertical para predominantemente radial – o coeficiente de adensamento horizontal é, na maioria das vezes, maior do que o vertical.

A combinação entre fluxo vertical e fluxo radial, com predominância da drenagem radial, torna o processo muito mais rápido.

De acordo com Richart (1959), a primeira teoria do adensamento com fluxo radial foi proposta por Rendulic (1935) trabalhando sob a supervisão de Terzaghi. Um estudo mais completo do adensamento por drenagem radial foi feito por Barron (1948), que popularizou o estudo.

Barron (1948) considerou dois tipos de deformações verticais no adensamento, a saber:

- a) Deformações verticais livres (“free strain”) – o carregamento é flexível, a distribuição das tensões totais na superfície se mantém uniforme durante o adensamento enquanto os recalques resultantes não são uniformes;
- b) Deformações verticais iguais (“equal strain”) – o carregamento é rígido, os recalques resultantes são uniformes durante o processo de adensamento enquanto a distribuição das tensões totais na superfície não é uniforme.

Segundo Scott (1963), a situação real se situa entre essas duas condições, de tal forma que a condição de deformações verticais livres é o limite superior da porcentagem média de adensamento ao longo do tempo e a condição de deformações verticais iguais é o limite inferior.

A solução do adensamento com fluxo combinado (vertical e radial) foi feita por Carrillo (1942) e depende das soluções para fluxo apenas vertical e apenas radial.

Vale mencionar que Biot (1935, 1941) propôs uma teoria do adensamento em que o solo é modelado como um meio saturado poroso e linearmente elástico sob estado de deformações 3D. Reformulações desta abordagem foram feitas por Biot (1955, 1956), Verruijt (1969) e Rice e Cleary (1976).

Embora a abordagem tridimensional possa ser considerada mais completa, ela torna os cálculos muito mais complicados e dificulta a obtenção de soluções fechadas, que são o objetivo desta tese. Por este motivo, a teoria que será

desenvolvida no próximo capítulo será unidimensional, se baseando nos trabalhos de Rendulic (1935) e Barron (1948).

### 1.3.1 Geometria de instalação de drenos

Os drenos verticais são instalados seguindo um determinado modelo de projeto. O elemento de solo analisado durante o planejamento é considerado como sendo um cilindro de raio igual ao raio de influência  $r_e$  do dreno (diâmetro de influência  $d_e$ ), tendo um dreno cilíndrico de raio  $r_w$  (diâmetro  $d_w$ ) inserido no centro.

A relação entre o raio de influência  $r_e$  e o espaçamento  $l$  dos drenos depende da configuração da malha dos drenos: quadrangular ou triangular (Figura 49). O cálculo é feito igualando-se a área de influência do dreno, que é circular, à área do quadrado (no caso de malha quadrangular) ou do hexágono (no caso de malha triangular). A área de influência circular  $S_c$  do dreno é:

$$S_c = \pi r_e^2 \quad (22)$$

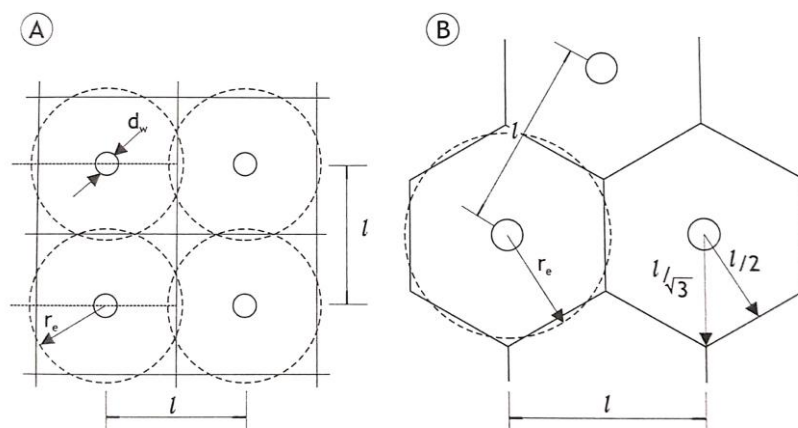


Figura 49 – Tipos de malhas drenantes (Almeida e Marques, 2010). (a) Quadrangular. (b) Triangular.

Para a configuração de malha quadrangular, a área do quadrado equivalente  $S_q$  é:

$$S_q = \left(2 \frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \quad (23)$$

Igualando as equações (22) e (23):

$$r_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} l \cong 0,564l \quad (24)$$

No caso de malha triangular, a área do hexágono equivalente  $S_h$  pode ser expressa por 6 vezes a área de um triângulo equilátero de altura  $l/2$ , ou seja:

$$S_h = 6 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \quad (25)$$

Igualando as equações (22) e (25):

$$r_e = \sqrt[4]{\frac{3}{4\pi^2}} l \cong 0,525l \quad (26)$$

Os geodrenos possuem formato retangular, com dimensões  $a$  e  $b$  da ordem de 10cm e 0,5cm, respectivamente, como mostra a Figura 50.

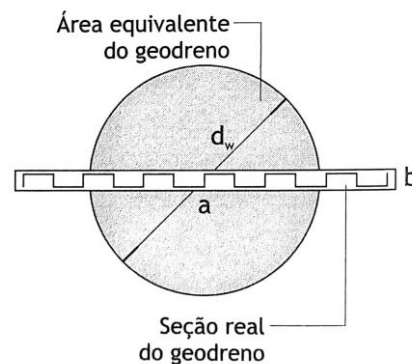


Figura 50 – Área equivalente de um geodreno (Almeida e Marques, 2010).

Sendo assim, faz-se necessária a determinação de um raio  $r_w$  equivalente. Hansbo (1979) propôs que esse diâmetro seja tal que o perímetro do geodreno seja igual ao de um dreno circular, ou seja:

$$2(a + b) = 2\pi r_w \quad (27)$$

Donde vem:

$$r_w = \frac{a + b}{\pi} \quad (28)$$

Chama-se atenção para fato de o raio equivalente de um geodreno ser calculado com base no perímetro, enquanto o raio de influência dos drenos ser calculado com base na área transversal. A utilização do perímetro para cálculo do raio equivalente se dá porque a drenagem depende da área lateral do dreno, que é função do perímetro. Já no caso do raio de influência, o fator importante nesta análise é o volume de solo compreendido pela influência do dreno, que é função da área transversal.

### 1.3.2 Teoria clássica do adensamento para drenagem radial

A teoria de adensamento considerando o uso de drenos verticais é uma extensão da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) para drenagem vertical. Conseqüentemente, as hipóteses simplificadoras adotadas no adensamento para fluxo radial são as mesmas da teoria clássica (com exceção da direção do fluxo), ou seja:

- a) Solo homogêneo
- b) Solo saturado
- c) Compressibilidade dos grãos e da água desprezíveis
- d) Validade da Lei de Darcy
- e) Fluxo da água ocorrendo num plano horizontal/radial (em direção ao dreno)

- f) Compressão unidimensional
- g) Constância de alguns parâmetros físicos que na verdade variam durante o processo
- h) Deformações infinitesimais
- i) Relação entre índices de vazios e tensões efetivas representada por uma reta

Destaca-se que, assim como na teoria clássica, a teoria de adensamento para fluxo radial admite a validade do Princípio das Tensões Efetivas e não leva em conta a compressão secundária, que é um fenômeno de absoluta importância no presente trabalho.

Uma maior discussão a respeito dessas hipóteses simplificadoras será realizada no capítulo seguinte, pois elas serão utilizadas no desenvolvimento das teorias desta tese. Da mesma forma, o desenvolvimento matemático inicial com as devidas explicações também será feito no capítulo seguinte, pois o fundamento das teorias propostas nesta tese é o mesmo, diferindo apenas a participação da viscosidade no processo.

A primeira solução para condições ideais foi apresentada por Rendulic (1935) e popularizada por Barron (1948). A variação de volume ao longo do tempo de um elemento por unidade de volume para fluxo exclusivamente radial, em termos de coordenadas cilíndricas, é dada por:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (29)$$

Em que  $k_r$  (ou  $k_h$ ) é o coeficiente de permeabilidade na direção radial e  $r$  é a variável especial (radial).

A equação (29), para fluxo radial, naturalmente possui semelhanças com a equação (2) da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) para fluxo vertical.

A partir da equação (29) é possível analisar dois casos: deformações verticais livres ou deformações verticais iguais.

### 1.3.2.1 Deformações verticais livres (“free strain”)

Na condição de deformações verticais livres, quanto mais próximo ao dreno estiver o elemento de solo, mais rapidamente ele adensa. Consequentemente, há recalques diferenciais na superfície do maciço. No entanto, considera-se que esses recalques diferenciais não causam redistribuição de tensões pelo arqueamento do aterro. Assim, as deformações são resultado de um carregamento uniforme na superfície da zona de influência de cada dreno.

Admitindo que a variação do índice de vazios possa ser expressa pela variação das tensões efetivas, a partir de um coeficiente de compressibilidade  $a_v$ , escreve-se:

$$\frac{de}{dt} = -a_v \frac{d\sigma'}{dt} \quad (30)$$

Pelo Princípio das Tensões Efetivas (equação (1)), a equação (30) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{de}{dt} = -a_v \frac{d(\sigma - u)}{dt} = a_v \frac{du}{dt} \quad (31)$$

Substituindo na equação (29), vem:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{1+e} a_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (32)$$

A equação diferencial que rege o fenômeno é, portanto:

$$c_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (33)$$

Onde  $c_r$  (ou  $c_h$ ) é o coeficiente de adensamento radial, dado por:

$$c_r = \frac{k_r(1+e)}{a_v \gamma_w} \quad (34)$$

As condições de contorno que devem ser atendidas são:

- a) O excesso de poropressão na superfície do dreno ( $r = r_w$ ) é nulo para todo  $t > 0$ ;
- b) O gradiente hidráulico na periferia da área de influência é nulo e, desse modo,  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$  para  $r = r_e$  e  $t > 0$ .

E a condição inicial que deve ser atendida é:

- c) O excesso de poropressão  $u_0$  em  $t = 0$  é uniforme ao longo da massa de solo e corresponde a  $u_0 = \Delta\sigma_v$ , sendo  $\Delta\sigma_v$  o acréscimo de tensão total aplicado;

A solução da equação (33) para as condições descritas acima é dada por:

$$u(r, t) = u_0 \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha=\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)}{\alpha[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp(-4\alpha^2 n^2 T_r) \quad (35)$$

$$A_1(\alpha) = J_1(\alpha)Y_0(\alpha) - Y_1(\alpha)J_0(\alpha)$$

$$A_0(\alpha n) = J_0(\alpha n)Y_0(\alpha) - Y_0(\alpha n)J_0(\alpha)$$

$$A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) = J_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)Y_0(\alpha) - Y_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)J_0(\alpha)$$

Onde:

$u(r, t)$  – excesso de poropressão em um determinado raio  $r$  e um tempo  $t$ ;

$J_0, J_1$  – funções de Bessel de 1ª espécie, de ordem 0 e 1, respectivamente;

$Y_0, Y_1$  – funções de Bessel de 2ª espécie, de ordem 0 e 1, respectivamente;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  – raízes que satisfazem  $J_1(\alpha n)Y_0(\alpha) - Y_1(\alpha n)J_0(\alpha) = 0$ ;

$T_r$  é o Fator Tempo para fluxo radial, dado por:

$$T_r = \frac{c_r t}{d_e^2} \quad (36)$$

E  $n$  é um parâmetro adimensional dado por:

$$n = \frac{r_e}{r_w} = \frac{d_e}{d_w} \quad (37)$$

Onde  $r_e$ ,  $d_e$ ,  $r_w$  e  $d_w$  são os raios e diâmetros dos drenos e da área (circular) de influência dos drenos, respectivamente.

A porcentagem média de adensamento para fluxo radial  $\bar{U}_r$  em condição de deformações verticais livres pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$\bar{U}_r(t) = 1 - \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha=\infty} \frac{4A_1^2(\alpha)}{\alpha(n^2 - 1)[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp(-4\alpha^2 n^2 T_r) \quad (38)$$

Vale comentar que a solução para deformações verticais livres é muito similar à situação de fluxo de calor em um cilindro (Glover, 1930).

### 1.3.2.2 Deformações verticais iguais (“equal strain”)

Há quem argumente que, no campo, o fato de o adensamento acontecer mais rapidamente no entorno dos drenos (produzindo recalques inicialmente maiores nesta região) resulta no aparecimento de um arqueamento. Este processo de arqueamento redistribui as tensões verticais na superfície do maciço e faz com que o adensamento se processe com deslocamentos verticais uniformes. Esta possibilidade deu origem à análise conhecida por “equal strain”. Não há, portanto, recalques diferenciais.

Desse modo, não se pode considerar a tensão total constante ao longo da superfície. O que é constante é a resultante do carregamento ao longo da área carregada  $S$ . A partir do Princípio das Tensões Efetivas, escreve-se:



$$\frac{\int_S \sigma' dS}{S} = \frac{\int_S \sigma dS}{S} - \frac{\int_S u dS}{S} \quad (39)$$

Ou:

$$\bar{\sigma}' = \bar{\sigma} - \bar{u} \quad (40)$$

Onde  $\bar{\sigma}'$ ,  $\bar{\sigma}$  e  $\bar{u}$  são os valores médios das tensões efetiva e total e da poropressão, respectivamente.

Admitindo que a variação do índice de vazios possa ser expressa pela variação das tensões efetivas médias, de maneira similar à equação (30), faz-se:

$$\frac{de}{dt} = -a_v \frac{d\bar{\sigma}'}{dt} \quad (41)$$

Pela equação (40), reescreve-se:

$$\frac{de}{dt} = -a_v \frac{d(\bar{\sigma} - \bar{u})}{dt} = a_v \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (42)$$

Substituindo na equação (29) e rearranjando os termos, tem-se a seguinte equação diferencial:

$$c_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (43)$$

As condições de contorno do problema são:

- a) O excesso de poropressão na superfície do dreno ( $r = r_w$ ) é nulo para todo  $t > 0$ ;

- b) O gradiente hidráulico na periferia da área de influência é nulo e, portanto,  
 $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$  para  $r = r_e$  e  $t > 0$ .

E a condição inicial que deve ser atendida é:

- c) O excesso de poropressão médio  $\bar{u}_0$  em  $t = 0$  é uniforme ao longo da massa de solo e corresponde a  $\bar{u}_0 = \bar{\Delta\sigma}_v$ , sendo  $\bar{\Delta\sigma}_v$  o acréscimo de tensão total aplicado médio;

A solução da equação (43) obtida para as referidas condições é:

$$u(r, t) = \frac{4\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \left[ r_e^2 \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{r^2 - r_w^2}{2} \right] \exp\left[\frac{-8T_r}{f(n)}\right] \quad (44)$$

$$f(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \ln n - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \cong \ln n - \frac{3}{4}$$

Em que os parâmetros são os mesmos do caso de deformações verticais livres.

A solução para a porcentagem média de adensamento é dada por:

$$\bar{U}_r(t) = 1 - \exp\left[\frac{-8T_r}{f(n)}\right] \quad (45)$$

Em que  $T_r$  e  $n$  são os mesmos definidos nas equações (36) e (37).

Os casos de deformações verticais iguais e deformações verticais livres são situações extremas. O comportamento real de um sistema de drenos é intermediário entre as duas condições.

Richart (1959) comparou as curvas de porcentagem média de adensamento para ambos os casos, para diferentes valores de  $n$  (Figura 51). As diferenças são pequenas e diminuem quanto maiores forem os valores de  $n$  ou do Fator Tempo  $T_r$ . As curvas são praticamente coincidentes para  $n \geq 5$  e porcentagens de adensamento superiores a 50%.

Com a introdução dos drenos verticais tipo “fita” cujo valor de  $n$  é da ordem de 20, a solução para deformações verticais iguais se torna uma excelente aproximação da solução para deformações verticais livres. Como os cálculos para a condição de deformações verticais livres (equações (35) e (38)) são muito mais trabalhosos do que para a condição de deformações verticais iguais (equações (44) e (45)), esta última é preferível pela simplicidade.

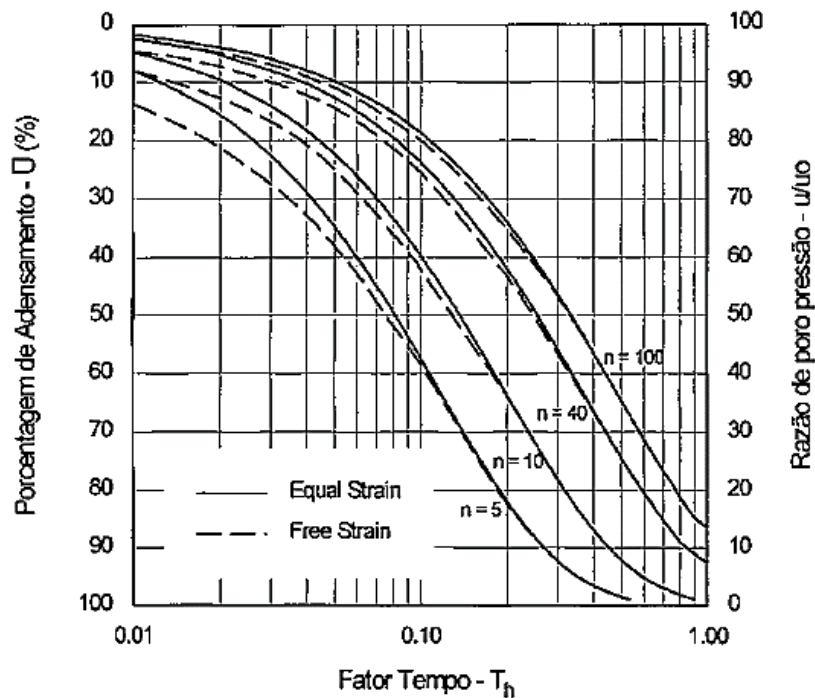


Figura 51 – Comparação entre as porcentagens de adensamento para as condições de deformações verticais livres e deformações verticais iguais (Richart, 1959).

### 1.3.3 Equação simplificada da condição “equal strain”

Coelho (1997) apresentou uma solução simplificada para a condição de deformações verticais iguais. A vantagem é que a equação diferencial se reduz em 1 ordem.

A Figura 52 ilustra uma massa de solo cilíndrica de raio  $r$  e altura  $H$ , provida de um dreno central de raio interno  $r_w$ . Como a deformação vertical é uniforme para a condição de deformações verticais iguais, todos os cilindros sempre terão as mesmas alturas durante o processo de adensamento.

Admitindo-se válida a Lei de Darcy, a vazão  $Q$  através da superfície lateral do cilindro, considerado fluxo exclusivamente radial, é:

$$Q = k_r i_r A \quad (46)$$

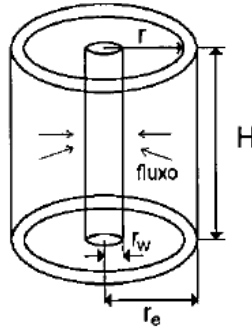


Figura 52 – Cilindro de solo com dreno central (Coelho, 1997)

Onde  $i_r$  é o gradiente hidráulico e  $A$  é a área da superfície lateral, ou seja:

$$A = 2\pi r H \quad (47)$$

Sendo  $h$  a carga hidráulica, o gradiente hidráulico  $i_r$  em função do raio  $r$ , do excesso de poropressão  $u$  e do peso específico da água  $\gamma_w$  vale:

$$i_r = \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (48)$$

Substituindo as equações (47) e (48) na (46), e sabendo-se que a vazão é a variação do volume total  $V_t$  por unidade de tempo, tem-se:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r H = - \frac{\partial V_t}{\partial t} \quad (49)$$

A variação do volume total  $V_t$  corresponde à variação do volume de vazios  $V_v$ , pois os grãos são admitidos incompressíveis. Ela pode ser expressa em termos de variação do índice de vazios da seguinte forma:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{\partial V_v}{\partial t} = \frac{\partial (eV_s)}{\partial t} = V_s \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{V_t}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (50)$$

O volume total é o volume do anel cilíndrico delimitado pelos raios  $r$  e  $r_e$ , ou seja:

$$V_t = \pi(r_e^2 - r^2)H \quad (51)$$

Substituindo as equações (50) e (51) na equação (49) e rearranjando os termos, vem:

$$-\frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{r_e^2}{2r} - \frac{r}{2} \right) \frac{\partial e}{\partial t} \quad (52)$$

Utilizando a relação entre  $\frac{de}{dt}$  e  $\frac{d\bar{u}}{dt}$  apresentada na equação (42), encontra-se:

$$-\frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{r_e^2}{2r} - \frac{r}{2} \right) a_v \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (53)$$

E finalmente:

$$-c_r \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{r_e^2}{2r} - \frac{r}{2} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (54)$$

Onde  $c_r$  é o coeficiente de adensamento radial.

A equação (54) requer apenas uma condição de contorno e uma condição inicial, a saber:

- a) O excesso de poropressão na superfície do dreno ( $r = r_w$ ) é nulo para todo  $t > 0$ .
- b) O excesso de poropressão médio  $\bar{u}_0$  em  $t = 0$  é uniforme ao longo da massa de solo e corresponde a  $\bar{u}_0 = \overline{\Delta\sigma_v}$ , sendo  $\overline{\Delta\sigma_v}$  o acréscimo de tensão total aplicado médio;

Essa redução no número de condições de contorno se dá porque a equação diferencial (54) satisfaz automaticamente a condição de não haver fluxo na fronteira ( $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0$ ), algo que é facilmente verificável fazendo-se  $r = r_e$  na equação (54).

O desenvolvimento da solução da equação diferencial pode ser visto em Coelho (1997) e coincide com a solução clássica do caso de deformações verticais iguais (Barron, 1948).

#### 1.3.4 Amolgamento (“smear”) e resistência do dreno

Barron (1948) apontou dois efeitos que afetam o processo de fluxo para a situação de drenos não ideais: o amolgamento (“smear”) e a resistência do dreno.

Durante a instalação de um dreno, o solo ao redor é perturbado devido à cravação, formando uma zona amolgada. O grau de amolgamento e a influência que ele exerce nas características geotécnicas do solo variam, mas, de qualquer forma, o amolgamento acaba reduzindo a capacidade de fluxo. Isto se dá por causa da diminuição da permeabilidade e do aumento da compressibilidade, o que diminui o coeficiente de adensamento radial. A esse amolgamento dá-se o nome de “smear”.

O efeito da resistência hidráulica do dreno está associado à permeabilidade do material de preenchimento do furo. No dreno ideal, considera-se que esse material tem permeabilidade infinita, não oferecendo resistência ao fluxo da água. Na realidade, a permeabilidade é finita, por maior que seja. Assim, durante a fase inicial do adensamento, a capacidade de descarga do dreno pode ser atingida, ocasionando um retardamento no processo. Em outras palavras, o dreno trabalha como conduto forçado, o que faz com que o excesso de poropressão na periferia do dreno não seja nulo, alterando as condições de contorno adotadas na resolução da equação diferencial.

Quanto ao efeito do amolgamento, a zona amolgada não é homogênea, pois a perturbação diminui conforme aumenta a distância ao dreno. Porém, para a introdução desse efeito de maneira prática, Barron (1948) considerou uma região anelar ao redor do dreno como sendo homogênea, com coeficiente de permeabilidade  $k_s$  e de diâmetro externo igual a  $d_s$  (raio  $r_s$ ). Barron (1948) definiu o parâmetro  $s$ , em que:

$$s = \frac{r_s}{r_w} \quad (55)$$

Barron (1948) encontrou soluções para os casos de deformações verticais livres e deformações verticais iguais. No caso de deformações verticais iguais, a solução é:

$$u(r, t) = \bar{u}_0 \left[ \ln \left( \frac{r}{r_s} \right) - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_e^2} + \frac{k_r}{k_s} \left( \frac{n^2 - s^2}{n^2} \right) \ln s \right] \exp \left[ \frac{-8T_r}{\nu} \right] \quad (56)$$

$$\nu = \frac{n^2}{n^2 - s^2} \ln \left( \frac{n}{s} \right) - \frac{3}{4} + \frac{s}{4n^2} + \frac{k_r}{k_s} \left( \frac{n^2 - s^2}{n^2} \right) \ln s$$

Hansbo (1979) relata que os valores de  $s$  encontrados na literatura variam de 1,5 a 3. Hansbo (1987) também comenta que  $s$  é bastante dependente do método de instalação, por este influenciar na extensão da zona amolgada.

A solução de Barron (1948), no entanto, não é a mais utilizada e sim a de Hansbo (1981), pela simplicidade. O cálculo da porcentagem média de adensamento admitindo-se a hipótese de deformações verticais iguais e considerando o efeito de “smear”, como sugerido por Hansbo (1981), se resume a substituir  $f(n)$  na equação (45) pelo parâmetro  $\nu$ , que, após algumas simplificações, é dado por:

$$\nu(n, s) = \ln \frac{n}{s} + \frac{k_r}{k_s} \ln s - \frac{3}{4} \quad (57)$$

De acordo com Hansbo (1981), sua solução fornece praticamente os mesmos valores que a solução de Barron (1948).

Enquanto a curva de adensamento para drenos ideais depende apenas de  $n$ , a curva de adensamento considerando o efeito de “smear” depende dos parâmetros  $s$ ,  $k_r$  e  $k_s$ , além do próprio  $n$ . Quando não há “smear”,  $s = 1$  e  $k_s = k_r$  e a equação (57) coincide com o valor aproximado de  $f(n)$  mostrado na equação (44).

A relação  $\frac{k_r}{k_s}$  é de difícil determinação e grande variabilidade. Chen et al. (2016) relatam que a literatura fornece valores de 1,3 (Xiao, 2000) a 13,5 (Shen et al., 2005). Almeida et al. (1993) utilizam uma faixa de 3 a 6 com base na própria experiência.

Richart (1959) comenta que é possível interpretar as várias combinações entre os parâmetros que compõem  $\nu$ , de forma que o efeito de “smear” seja levado em conta, admitindo-se um dreno com um raio equivalente menor do que o raio do dreno e desconsiderando o “smear”, a partir do ábaco da Figura 53. No exemplo dado por Richart (1959), em que  $s = 1,2$ ,  $\frac{k_h}{k_s} = 7$  e  $n = 5$ , o ponto no ábaco corresponde a  $s = 1$  (sem “smear”) e  $n = 15$ . Ou seja, o raio do dreno ideal equivalente foi 1/3 do raio real.

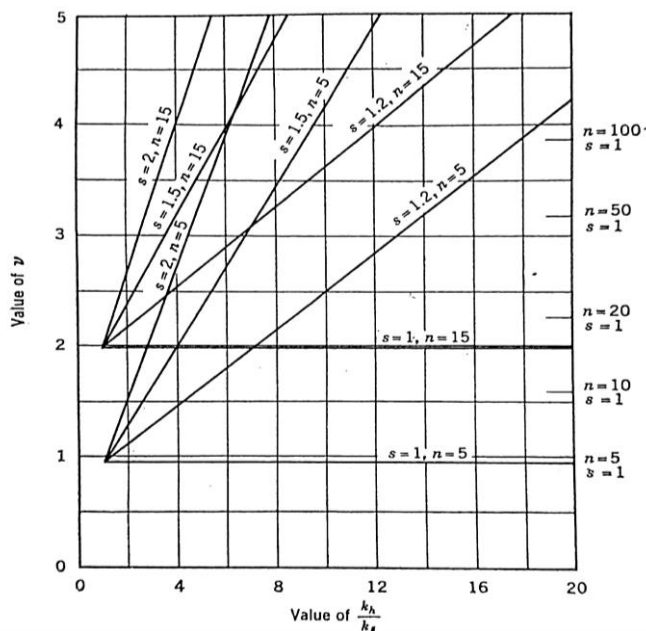


Figura 53 – Relação entre  $k_h/k_s$ ,  $\nu$  e  $s$ , para  $n = 5$  e  $n = 15$ .



Na opinião do autor desta tese, a utilização de um raio equivalente é bastante útil, visto que a dificuldade de obtenção dos parâmetros e sua variabilidade comprometem a acurácia da solução – além, é claro, de tornar o processo mais simples. A experiência do projetista acaba sendo tão ou mais relevante do que a solução teórica. Dentre os vários estudos mais recentes a respeito do “smear”, podem ser citados Walker e Indraratna (2007) e Rujikiatkamjorn et al. (2013).

Quanto ao efeito da resistência hidráulica, a magnitude das perdas depende da vazão, do tamanho do dreno e da permeabilidade do material de preenchimento. Se a vazão for grande, ou se a área do dreno for pequena, a resistência do dreno à passagem da água é considerável. Por isso, o ideal é que o dreno seja o mais permeável possível.

Tanto Barron (1948) quanto Hansbo (1981) levaram em conta a resistência hidráulica do dreno, a partir da permeabilidade  $k_w$  dos drenos. Entretanto, Richart (1959) comenta que, na prática da engenharia, em que o valor de  $n$  varia aproximadamente de 7 a 15 e que a razão  $\frac{d_e}{H_d} < 1,0$ , o efeito da resistência do dreno no processo de adensamento não deve ser significativo.

Essa discussão precisaria ser revista no caso dos drenos pré-fabricados, pois nesses casos  $n$  passa a ser da ordem de 20. No entanto, conforme relatam Almeida e Marques (2010), a maioria dos geodrenos disponíveis no mercado tem capacidade de descarga suficiente para que o efeito possa ser desprezado.

### **1.3.5 Adensamento com drenagem combinada (vertical e radial)**

Na maioria dos casos de adensamento envolvendo drenos verticais, o fluxo ocorre tanto na direção radial quanto na direção vertical. Almeida e Marques (2010) comentam que o adensamento com fluxo combinado ocorre, por exemplo, em aterros sobre drenos em depósitos argilosos de pequenas espessuras (menores que 10 metros).

A equação diferencial que rege o fenômeno, em coordenadas cilíndricas, é escrita da seguinte forma:

$$c_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (58)$$

O lado esquerdo igualdade da equação (58) é uma soma de duas parcelas. A primeira corresponde à drenagem radial, como visto no caso de deformações verticais livres (equação (33)), e a segunda diz respeito à drenagem vertical, como na teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) (equação (3)).

Uma vez que a equação (58) define um fluxo combinado (vertical e radial), as linhas de fluxo são inclinadas.

Carrillo (1942) demonstrou o seguinte teorema: se  $u_r = u_r(r, t)$  é solução da equação diferencial (33) e  $u_z = u_z(z, t)$  é solução da equação diferencial (3), então a solução da equação para fluxo combinado (equação (58)) é:

$$u_{rz} = u_r u_z \quad (59)$$

Para demonstrar a validade do teorema, Carrillo (1942) simplesmente substituiu  $u$  na equação (58) pelo produto  $u_r u_z$ :

$$c_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r u_z}{\partial r^2} \right) + c_v \left( \frac{\partial^2 u_r u_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial (u_r u_z)}{\partial t} \quad (60)$$

Por definição,  $u_r$  é constante em relação a  $z$  e  $u_z$  é constante em relação a  $r$ , mas ambos variam no tempo  $t$ . Reescrevendo a equação (60), obtém-se:

$$c_r \left( u_z \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) + c_v \left( u_r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = \left( u_z \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \quad (61)$$

Rearranjando os termos:

$$u_z c_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) + u_r c_v \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - u_z \frac{\partial u_r}{\partial t} - u_r \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \quad (62)$$

Ou ainda:

$$u_z \left[ c_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial u_r}{\partial t} \right] + u_r \left[ c_v \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial u_z}{\partial t} \right] = 0 \quad (63)$$

Como  $u_r$  é solução da equação (33), então a primeira parcela da equação (63) é nula. Da mesma forma, sendo  $u_z$  a solução da equação (3), então a segunda parcela da equação (63) também é nula. Assim, a igualdade da equação (63) está correta e, portanto, o teorema é válido.

Desse modo, pode-se dividir a equação diferencial para fluxo combinado (equação (58)) em duas equações diferenciais: a de fluxo puramente vertical e a de fluxo puramente radial. A solução  $u_z$  para fluxo vertical é dada pela teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936), enquanto a solução  $u_r$  para fluxo radial é dada pela teoria de Rendulic (1935) e Barron (1948).

Um inconveniente na equação (59) é o fato de o lado direito da igualdade não satisfazer a homogeneidade em relação à análise dimensional. É preferível, portanto, reescrevê-la em termos adimensionais e médios, da seguinte forma:

$$\frac{\overline{u_{rz}}}{u_0} = \frac{\overline{u_r} \overline{u_z}}{u_0 u_0} \quad (64)$$

Em que  $u_0$  é o excesso de poropressão inicial.

A hipótese da relação simplificada (retilínea) entre índice de vazios e tensão vertical efetiva, presente tanto na teoria clássica quanto na de fluxo radial, permite que a porcentagem média de adensamento seja definida por:

$$\bar{U} = 1 - \frac{\bar{u}}{u_0} \quad (65)$$

Assim, a equação (64) se torna:

$$1 - \overline{U_{rz}} = (1 - \overline{U_r})(1 - \overline{U_z}) \quad (66)$$

Onde  $\overline{U_{rz}}$ ,  $\overline{U_r}$  e  $\overline{U_z}$  são as porcentagens médias de adensamento para fluxo combinado, radial e vertical, respectivamente.

Atenta-se para o fato de que o desenvolvimento de Carrillo (1942) pressupõe que a solução para fluxo radial deva ser o caso de deformações verticais livres. Admite-se o uso da solução para condição de deformações verticais iguais pela satisfatória proximidade entre os dois resultados.

### 1.3.6 Teorias para ensaios de adensamento com fluxo radial

Para reproduzir a configuração de um cilindro de solo sob influência de dreno, conforme abordado pela teoria de Barron (1948), o ensaio de adensamento com fluxo puramente radial pode ser realizado introduzindo-se um dreno no centro do corpo de prova (drenagem radial interna) e impermeabilizando-se as bases.

Esse ensaio apresenta algumas dificuldades práticas. Dentre elas está a drenagem “parasita”, que é a fuga indesejada da água através das folgas existentes entre o anel e as placas junto às bases do corpo de prova. Devido a isso, outros ensaios de adensamento com drenagem radial foram propostos e, como consequência, teorias relativas a essas novas configurações foram desenvolvidas.

Neste item serão apresentadas as teorias para ensaios com drenagem radial externa e drenagem radial dupla (interna e externa). Outros trabalhos de destaque, não comentados aqui, incluem Shields e Rowe (1965) e Santa Maria e Santa Maria (2000). Um maior compilado sobre o assunto pode ser visto em Coelho (1997).

#### 1.3.6.1 Adensamento com drenagem radial externa

As dificuldades de execução de ensaios de adensamento com a inclusão de drenos levaram ao estudo de ensaios com drenagem ao redor da amostra. Silveira (1953) chamou atenção para as seguintes considerações:

- O coeficiente de permeabilidade na direção radial é obtido sem perturbações internas na amostra;
- É um processo mais rápido do que qualquer outro, para amostras longas usando drenagem nas bases;
- A amostra pode ter diâmetro moderado e o ensaio realizado com carregamentos menores;
- A precisão das medidas aumenta para amostras longas, o que permite a utilização de instrumentos de menor sensibilidade;
- O único detalhe prático a ser observado durante a execução do ensaio é preparar o dreno externo entre a amostra e o anel de adensamento, sem fixá-los por atrito e sem causar perturbações na amostra.

A interpretação de um ensaio de adensamento com drenagem radial externa foi realizada por Silveira (1953). A solução teórica (equação (67)) foi desenvolvida com base no caso de deformações verticais livres (equação (33)):

$$u(r, t) = u_0 \sum_{m=1}^{\infty} 2J_0\left(\beta_m \frac{r}{r_e}\right) \frac{\exp(-4\beta_m^2 T_r)}{mJ_1(\beta_m)} \quad (67)$$

Onde:

$u(r, t)$  – excesso de poropressão em um determinado raio  $r$  e um tempo  $t$ ;

$J_0, J_1$  – funções de Bessel de 1ª espécie, de ordem 0 e 1, respectivamente;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$  – raízes que satisfazem  $J_0(\beta_m) = 0$ ;

$T_r$  – Fator Tempo Radial, como na teoria clássica de Barron (1948);

$r_e$  – raio do dreno.

A porcentagem média de adensamento  $\bar{U}_r$  obtida por Silveira (1953) foi:

$$\bar{U}_r(t) = 1 - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-4\beta_m^2 T_r)}{\beta_m^2} \quad (68)$$

Scott (1963) estudou o adensamento com drenagem radial externa sob a ótica das duas condições de deformação conhecidas: deformações verticais livres (“free strain”) e deformações verticais iguais (“equal strain”). Para o caso de deformações verticais livres, foi reproduzida uma solução idêntica à de Silveira (1953) (equação (68)).

Já para o caso de deformações verticais iguais, Scott (1963) resolveu a equação (43) incluindo a influência do amolgamento junto à periferia do corpo de prova. A porcentagem média de adensamento  $\overline{U}_r$  obtida por Scott (1963) foi:

$$\overline{U}_r(t) = 1 - \exp\left(-\frac{32T_r}{\Pi}\right) \quad (69)$$

Onde:

$$\Pi = 1 + 4 \frac{1}{K} \frac{k_r}{r_e} \quad (70)$$

Sendo  $1/K$  um parâmetro denominado “resistência hidráulica superficial de contato” (“surface hydraulic contact resistance”), que é uma resistência que o corpo de prova apresenta devido à redução da permeabilidade na superfície. O autor desta tese não conseguiu compreender completamente o significado físico deste parâmetro.

De acordo com Scott (1963), se não houver “smear” na periferia,  $\Pi = 1$ .

### 1.3.6.2 Adensamento com drenagem radial interna e externa

Santa Maria (1977) apresentou a solução teórica para interpretação de ensaios de adensamento com drenagem radial interna e externa.

Além das condições impostas pelas características do ensaio, foi considerada também a influência do amolgamento do solo decorrente da preparação do corpo de prova. Como ilustrado na Figura 54, a amostra foi subdividida em três regiões:

- Região I: região de solo amolgado, circunvizinho ao dreno interno (trecho amolgado interno), de coeficiente de permeabilidade  $k_s$  e raio  $r_w \leq r \leq r_s$ ;
- Região II: região de solo não amolgado (trecho indeformado), de coeficiente de permeabilidade  $k_r$  e raio  $r_s < r < r_a$ ;
- Região III: região de solo amolgado, circunvizinho ao dreno externo (trecho amolgado externo), de coeficiente de permeabilidade  $k_a$  e raio  $r_a \leq r \leq r_e$ ;

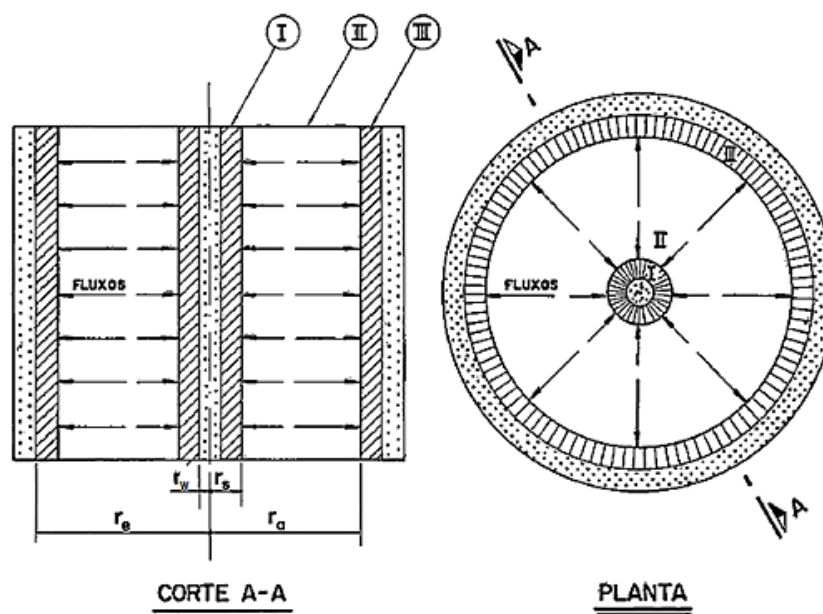


Figura 54 – Regiões I, II e III do corpo de prova em função do amolgamento (Santa Maria, 1977).

Santa Maria (1977) explica que as regiões I e III sofrem perturbações devido à instalação dos drenos ou da própria preparação do corpo de prova.

Para as regiões amolgadas (I e III), foram admitidas as hipóteses de espessura constante em cada uma e de que o adensamento nessas regiões pode ser desconsiderado, por se processar rapidamente – sendo tais espessuras pequenas em comparação com a espessura da região indeformada (II). Já para as regiões I e II, nas quais deve existir continuidade do fluxo, foram admitidas as hipóteses de excesso de poropressão na fronteira igual para ambas e que o volume

de água que sai da região II é igual ao volume que entra na região I para um determinado tempo.

Destaca-se ainda que os drenos foram considerados sem rigidez na direção vertical.

O desenvolvimento teórico foi realizado a partir da hipótese de deformações verticais iguais (“equal strain”), de acordo com a equação (43). A solução obtida pode ser simplificada para diversas situações, como: com ou sem regiões amolgadas, drenagem exclusivamente externa, drenagem exclusivamente interna, etc. Para o caso particular em que as espessuras das regiões amolgadas são nulas, a expressão do excesso de poropressão obtida por Santa Maria para drenagem dupla (1977) é:

$$u(r, t) = \bar{u}_0 \frac{F''(r)}{F_1''} \exp \left[ \frac{-8T_r}{v''} \right] \quad (71)$$

$$v'' = \frac{n^2 + 1}{4n^2} - \frac{n^2 - 1}{4n^2 \ln n}$$

$$F''(r) = (n^2 - 1) \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \left( \frac{r^2}{r_w^2} - 1 \right) \ln n$$

$$F_1'' = \left( \frac{n^2 + 1}{2} \right) \ln n - \left( \frac{n^2 - 1}{2} \right)$$

A Figura 55 mostra uma comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento para drenagem radial externa (caso A), interna (caso B) e dupla (externa e interna) (caso C). É possível perceber que o adensamento ocorre de forma bem mais acelerada no caso A do que no B (algo já comentado por Silveira, 1953) e levemente mais acelerada no caso C do que no A.

Santa Maria (1977) testou a solução teórica na argila do rio Sarapuí, cujas características de adensamento já são bem conhecidas, para determinação do coeficiente de adensamento horizontal. Os dados haviam sido obtidos de Coutinho (1976). Os resultados encontrados (Figura 56) se aproximaram bastante dos valores calculados por Coutinho (1976) para drenagem radial externa.



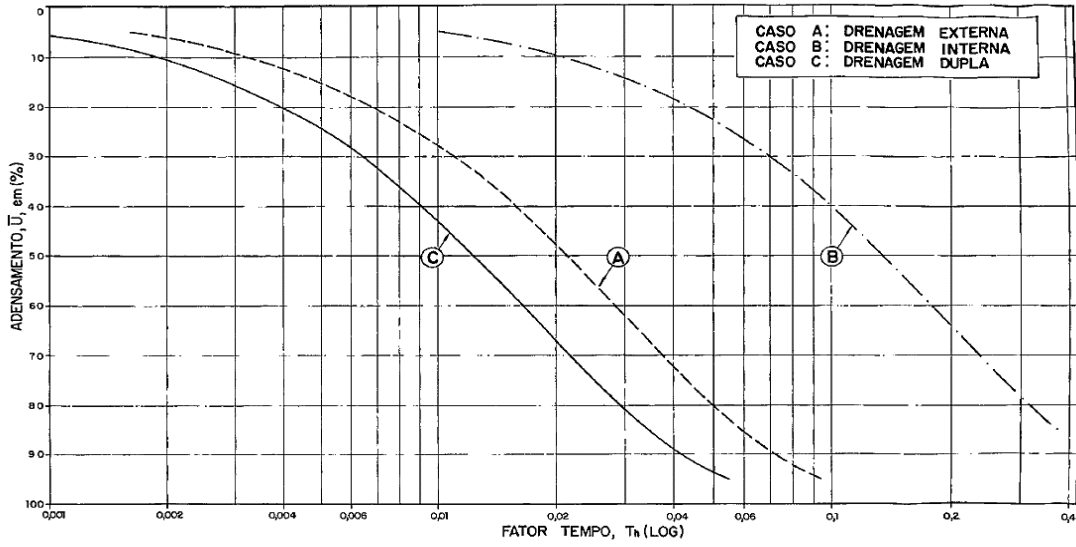


Figura 55 – Curvas de adensamento para diferentes tipos de drenagem radial, com  $d_e = 10$  cm e espessura da região amolgada nula (Santa Maria, 1977).

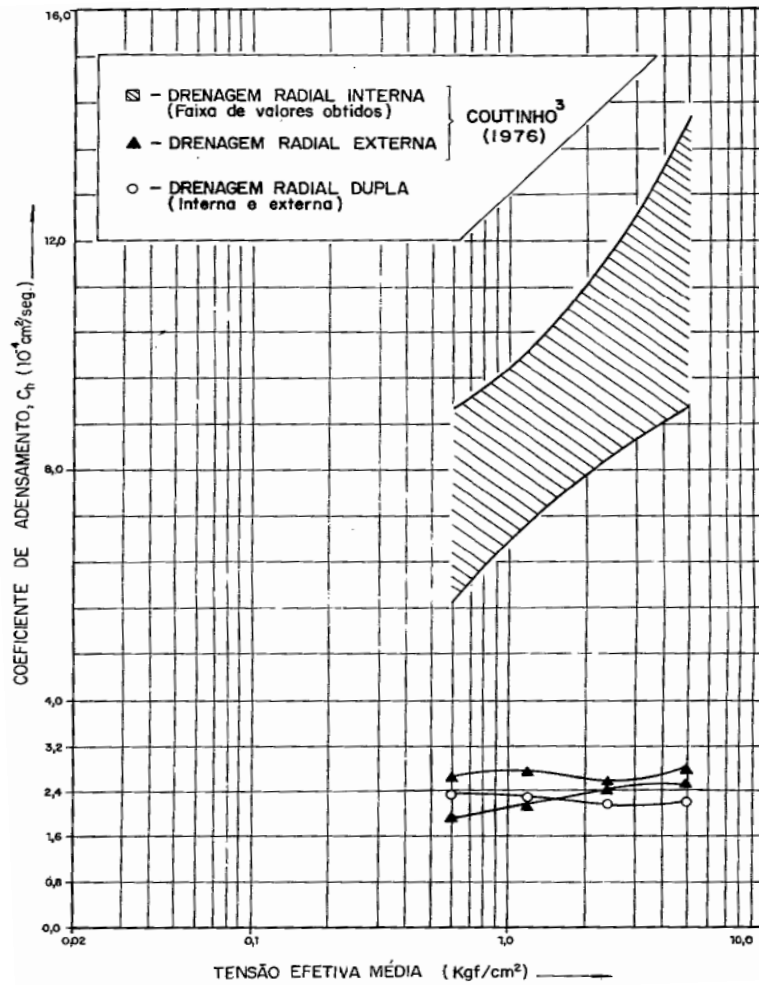


Figura 56 – Coeficiente de adensamento horizontal (Santa Maria, 1977).

Os resultados também confirmaram a influência da drenagem “parasita” – fenômeno que não havia sido considerado na solução teórica. Dentre os trabalhos que estudaram o fenômeno, destacam-se Coutinho (1976), Lacerda et al. (1977), Ziolkowski (1978), Coelho (1997), Almeida et al. (2000) e d’Oliveira (2003).

### 1.3.7 Viscosidade e compressão secundária no adensamento com fluxo radial

A compressão secundária também se faz presente nos casos de adensamento com fluxo radial, como mostra a Figura 57. No entanto, estudos sobre esse fenômeno não são tão comuns quanto no caso de fluxo vertical.

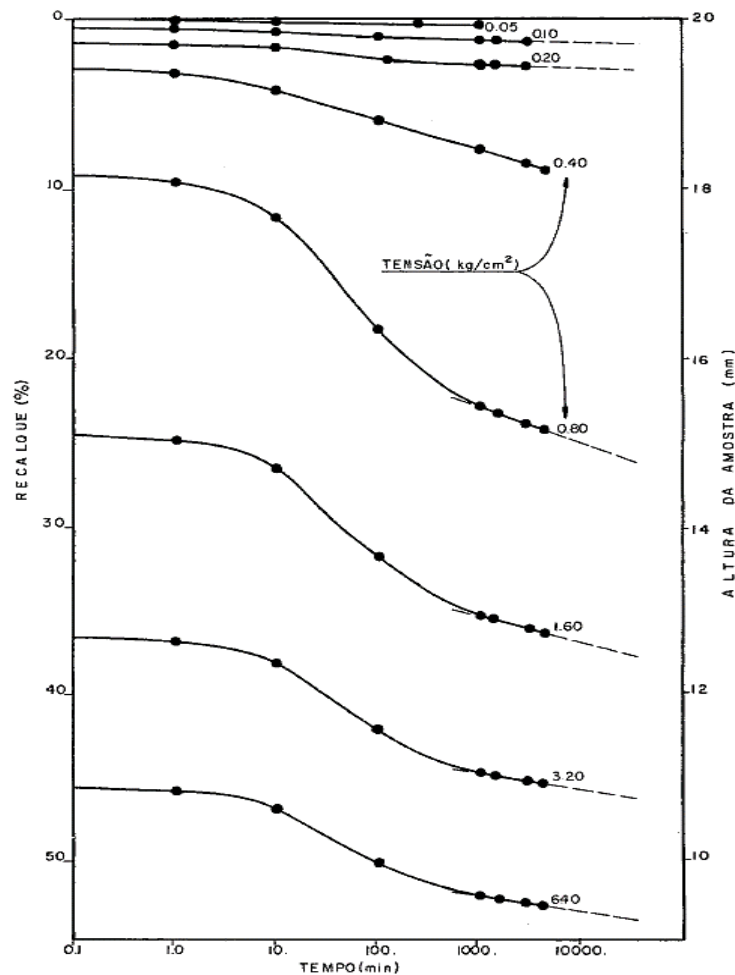


Figura 57 – Curvas recalque vs tempo obtidas em ensaio de adensamento com fluxo radial (Coutinho, 1976).

A partir da Teoria B de Taylor (1942), já comentada no item 1.2.2, Barden (1965) propôs uma solução numérica para o adensamento com fluxo vertical que incorporasse uma lei não-linear para a viscosidade, de modo a abranger tanto o adensamento primário quanto o secundário. Esta proposta culminou no trabalho de Berry e Wilkinson (1969), que fizeram o mesmo para o caso de fluxo radial. A teoria de Berry e Wilkinson (1969) é uma das únicas na literatura, de conhecimento do autor desta tese, que aborda fluxo radial e viscosidade simultaneamente.

Para introduzir o efeito viscoso, Berry e Wilkinson (1969) propuseram o mesmo modelo reológico de Barden (1965). A Figura 58 compara os modelos reológicos equivalentes às teorias de Terzaghi e Fröhlich (1936), Taylor & Merchant (1940) e Taylor (1942) com o modelo reológico de Barden (1965), utilizado por Berry e Wilkinson (1969).

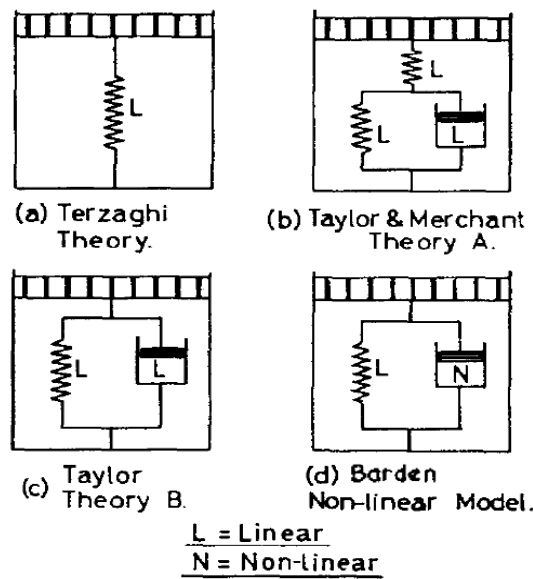


Figura 58 – Comparação entre os modelos reológicos de diversas teorias (adaptado de Barden, 1965).

De acordo com os modelos reológicos, na teoria clássica (Figura 58a) todo o carregamento é suportado por uma única mola e ela é responsável por toda a deformação. Na Teoria A (Figura 58b) a mola superior representa o adensamento primário e o conjunto mola+amortecedor em paralelo abaixo representa o adensamento secundário, no qual o amortecedor atrasa a sua manifestação. Na Teoria B (Figura 58c) o conjunto mola+amortecedor em paralelo é responsável por

toda a compressibilidade e o amortecedor consegue atrasar todo o mecanismo. O modelo de Barden (1965) (Figura 58d) é similar ao da Teoria B, mas o amortecedor age sob uma lei não-linear e, portanto, mais complexa.

Berry e Wilkinson (1969) adotaram as mesmas hipóteses simplificadoras de Barron (1948), modificando apenas a relação tensão vs deformação de acordo com o modelo reológico da Figura 58d. O acréscimo de tensão total ao qual está submetido o sistema de molas se subdivide em excesso de poropressão, acréscimo de tensão efetiva na mola e acréscimo de tensão efetiva no amortecedor.

O acréscimo de tensão efetiva no amortecedor foi denominado resistência viscosa  $\tau$ . A resistência viscosa de Berry e Wilkinson (1969) é uma lei de potência em função da velocidade de deformação (equação (72)). Essa equação gera curvas  $\tau$  vs  $\frac{\partial e}{\partial t}$  que modificam a curva de compressão, conforme a Figura 59.

$$\tau = b_1(e) \left( -\frac{\partial e}{\partial t} \right)^{1/m} \quad (72)$$

Em que  $b_1$  e  $m$  são parâmetros de ajuste. Berry e Wilkinson (1969) adotaram  $b_1$  médio (constante), por ser uma teoria de pequenas deformações, e  $m = 5$ , por acreditarem ser um valor relevante para grande parte dos solos argilosos.

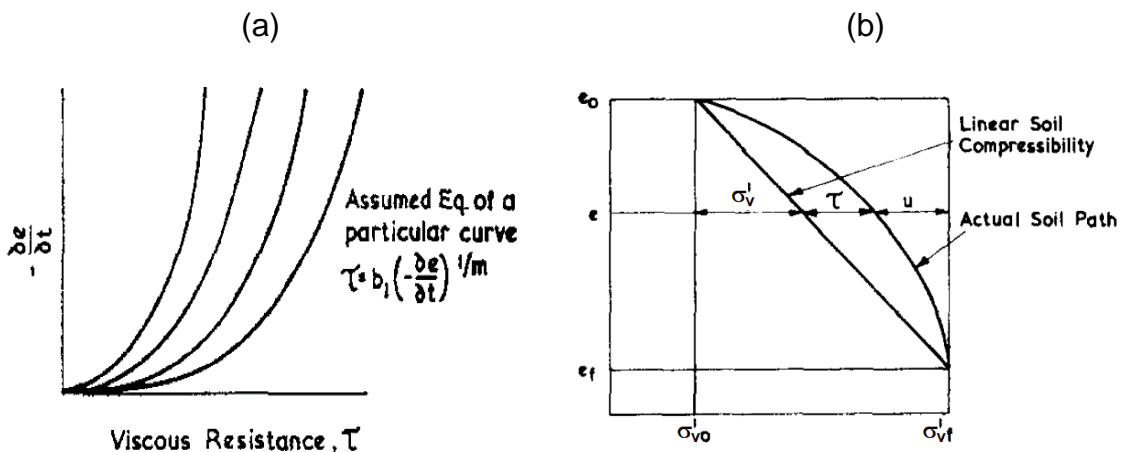


Figura 59 – Resistência viscosa na teoria de Berry e Wilkinson (1969). (a) Curvas de resistência viscosa vs velocidade de deformação. (b) Comparação entre a curva de compressão simplificada (sem viscosidade) e a real (com viscosidade).

Chama a atenção o fato de o modelo da curva de compressão real ilustrado por Berry e Wilkinson (1969) na Figura 59b sugerir  $\tau = 0$  em  $t = 0$ , o que contradiz a equação (72) e a Figura 59a. O autor desta tese julga que isso não esteja correto.

Berry e Wilkinson (1969) definiram o parâmetro adimensional M relacionado à viscosidade estrutural do solo como sendo:

$$M = \frac{k_r(1+e)b_1^m}{\gamma_w r_e^2 \Delta\sigma^{m-1}} \quad (73)$$

O parâmetro M representa uma medida da resistência viscosa à deformação e age no sentido de retardar o adensamento. Berry e Wilkinson (1969) argumentaram que, como  $b_1$  é tão maior quanto maiores forem as tensões efetivas, a expressão de M (equação (73)) é indiretamente função da razão incremental de tensão. A solução de Barron (1948) equivale a  $M = 0$ .

Foram obtidas soluções numéricas para o caso de deformações verticais livres. As curvas de distribuição inicial de poropressão para  $n = 20$ ,  $m = 5$  e diferentes valores de M estão ilustradas na Figura 60. Nota-se que a razão  $\frac{u(t)}{\Delta\sigma_v}$  é diferente de 1 em  $t = 0$ , devido à presença da viscosidade. A redução é mais acentuada próximo ao dreno, onde a velocidade de deformação é maior.

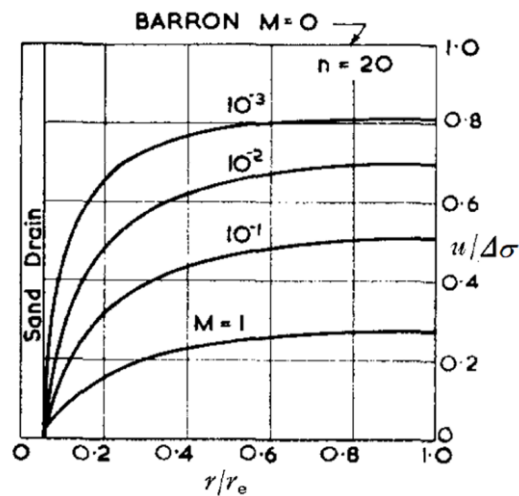


Figura 60 – Excesso de poropressão inicial normalizado vs raio normalizado para a teoria de Berry e Wilkinson (1969), com  $n = 20$ ,  $m = 5$  e diferentes valores de M.

As curvas de porcentagem média de adensamento para  $n = 20$ ,  $m = 5$  e diferentes valores de  $M$  estão plotadas na Figura 61. Estão indicados por setas verticais os instantes em que o excesso de poropressão é “sensivelmente zero” no limite do raio de influência do dreno e, a partir de então, o adensamento passaria a ser regido apenas por fluência. É possível notar que as curvas apresentam uma inclinação diferente de zero no trecho de fluência, mas não apresentam o efeito de “dupla onda” característico dos ensaios de adensamento de longa duração.

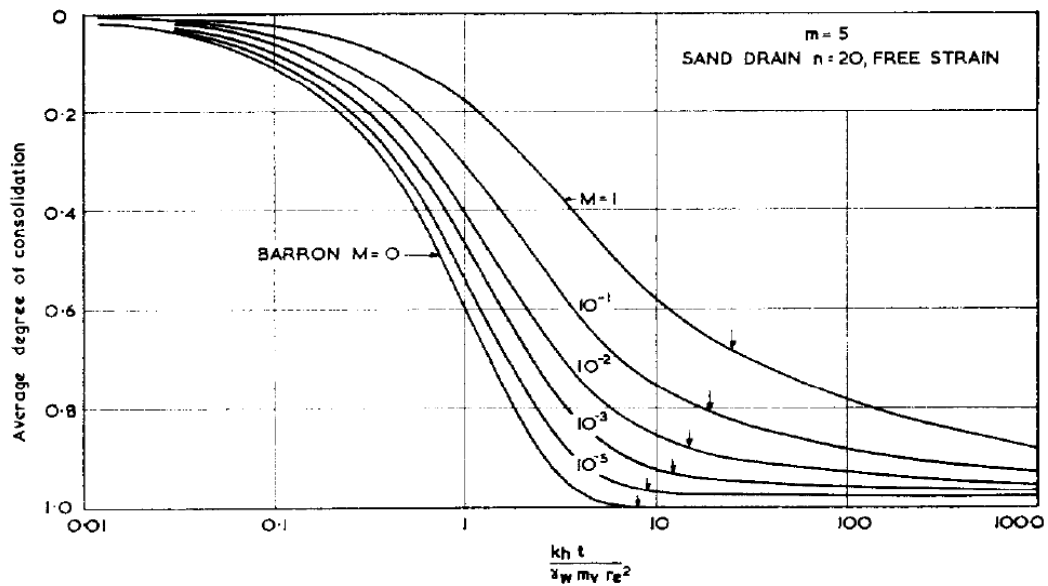


Figura 61 – Curvas de porcentagem média de adensamento vs Fator Tempo para a teoria de Berry e Wilkinson (1969), com  $n = 20$ ,  $m = 5$  e diferentes valores de  $M$ .

Berry e Wilkinson (1969) ainda alertam que os efeitos da viscosidade estrutural são muito mais significativos no caso de drenagem externa do que interna, pois a velocidade do adensamento na drenagem externa é muito maior. Este fato já foi ilustrado na Figura 55.

Seah e Juirnarongrit (2003) realizaram ensaios de adensamento com fluxo radial na argila de Bangkok, em amostras retiradas de diferentes profundidades, utilizando tanto equipamento edométrico quanto CRS. O ensaio em CRS foi realizado fazendo-se um furo no centro do corpo de prova e inserindo uma pedra porosa cilíndrica, que foi usada como única fronteira drenante.

A Figura 62a mostra as curvas de compressão obtidas para diferentes velocidades de deformação. Assim como os ensaios de Leroueil et al. (1985), mostrados no item 1.2.3, as curvas obtidas por Seah e Juirnarongrit (2003) apresentam certo paralelismo. Como consequência, foi constatado que a tensão de sobreadensamento é influenciada pela velocidade de deformação, como ilustra a Figura 62b.

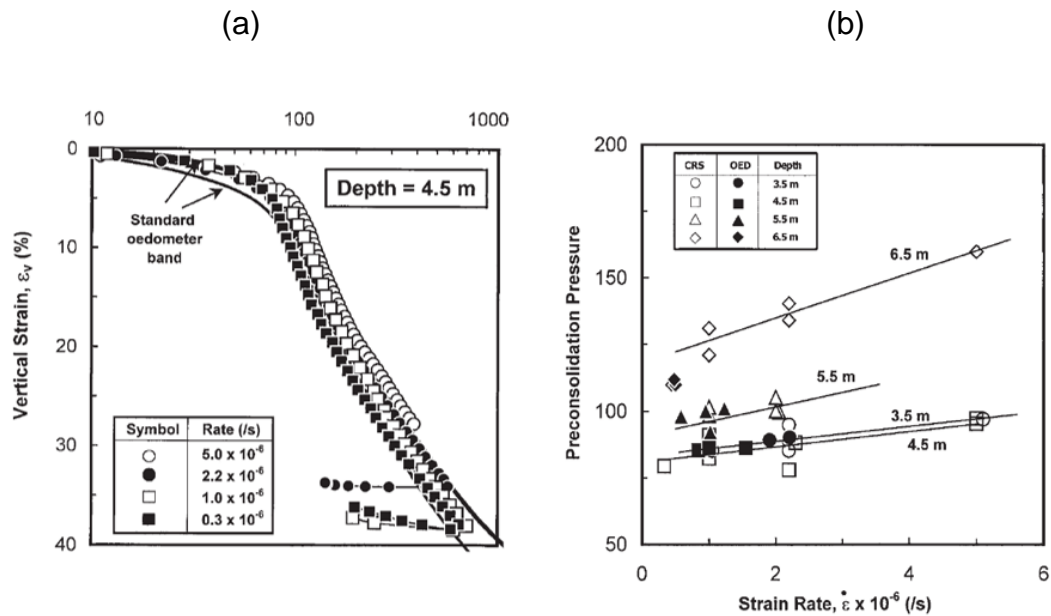


Figura 62 – Ensaios CRS com fluxo radial para diferentes velocidades de deformação (Seah e Juirnarongrit, 2003). (a) Curvas de compressão. (b) Relação entre a tensão de sobreadensamento e a velocidade de deformação.

Seah e Juirnarongrit (2003) citaram a conjectura de Leroueil et al. (1985), que preconiza que, se diferentes curvas de compressão forem obtidas em diferentes taxas de deformação, então a tensão de sobreadensamento aumenta com o aumento da taxa de deformação e a deformação resultante da viscosidade estrutural ocorre durante a dissipação da poropressão. Com os resultados da Figura 62, Seah e Juirnarongrit (2003) concluíram que o adensamento secundário para a argila de Bangkok ocorre simultaneamente ao adensamento primário.

## 2 TEORIA DO ADENSAMENTO PARA DRENAGEM RADIAL CONSIDERANDO A VISCOSIDADE

As teorias a seguir partiram do trabalho da teoria do adensamento de Andrade (2014), que considerou que a tensão efetiva possa ser dividida em duas parcelas: uma que se estabelece nos contatos sólido-sólido e outra que se estabelece nos contatos viscosos. Entretanto, é apenas a parcela sólido-sólido da tensão efetiva a responsável pelas deformações.

A teoria de Andrade (2014) diz respeito ao adensamento unidimensional com drenagem vertical levando em conta a viscosidade através das duas parcelas da tensão efetiva. Nesta tese, usam-se os mesmos conceitos para desenvolver uma teoria do adensamento unidimensional com drenagem radial.

Como já mencionado no item 1.2.5, a teoria de Andrade (2014) não foi capaz de reproduzir o efeito de “dupla onda” observado nas curvas recalque vs tempo (log) experimentais obtidas em ensaio de adensamento unidimensional com drenagem vertical de longa duração. Numa discussão apresentada por Andrade (2014), a ausência de “dupla onda” em suas curvas recalque vs tempo (log) teóricas se deve ao fato de a tensão viscosa ter sido considerada como função linear da velocidade de deformação ( $\dot{\epsilon}$ ). Uma vez que o coeficiente de viscosidade cresce com a redução do índice de vazios, espera-se que ele aumente durante o adensamento. Neste trabalho esta questão também será abordada. Entretanto, não serão abordados os efeitos de “smear” e da resistência hidráulica dos drenos.

Comparando-se estas soluções com as soluções clássicas, uma diferença fundamental na resolução se encontra no cálculo da porcentagem média de adensamento. Ela deve ser calculada a partir do índice de vazios e não do excesso de poropressão remanescente. Isto ocorre porque se admite que a variação do índice de vazios é função apenas da variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva e não da tensão efetiva como um todo. Em outras palavras, é uma porcentagem de recalque somente e não mais de dissipação do excesso de poropressão médio. Esta hipótese será discutida detalhadamente mais adiante.



## 2.1 Hipóteses simplificadoras

Várias hipóteses simplificadoras utilizadas no desenvolvimento desta teoria são as mesmas das teorias de Barron (1948) – mais precisamente, as sete primeiras hipóteses listadas no item 1.3.2. Elas podem ser agrupadas em dois conjuntos, sendo um de natureza física e outro de natureza matemática:

- Hipóteses de natureza física

- (1) Solo homogêneo

Esta hipótese admite que o depósito argiloso seja constituído dos mesmos materiais em toda sua extensão. Não apenas isso; considera-se que o índice de vazios do depósito seja constante com a profundidade, uma hipótese que se afasta da realidade quanto maior for a espessura do depósito. Este afastamento é consequência do aumento das tensões verticais efetivas com a profundidade devido ao peso próprio do solo. No laboratório, o fenômeno é representado com maior fidelidade, uma vez que os corpos de prova têm espessura da ordem de 2 centímetros.

- (2) Solo saturado

Para a maioria dos casos esta hipótese é atendida, tanto no laboratório quanto no campo. Isto ocorre porque, na prática da geotecnia, o adensamento está ligado aos solos moles, formados em ambientes fluviais, lagunares, etc., o que faz com que eles estejam saturados.

- (3) Compressibilidade dos grãos e da água desprezíveis quando comparada com a compressibilidade do esqueleto sólido

Esta também é uma hipótese muito próxima da realidade. Quando comparada com a compressibilidade do esqueleto sólido, a compressibilidade dos grãos e da

água pode chegar a ser da ordem de 100.000 vezes menor (Andrade, 2014). Vale lembrar, no entanto, que a compressibilidade da água um fator importante para explicar certos fenômenos associados aos excessos de poropressão, como já discutido no item 1.2.4.

#### (4) Validade da Lei de Darcy

Esta hipótese apenas não seria válida em alguns casos específicos de gradiente hidráulico elevado, que ocorrem junto às fronteiras drenantes dos corpos de prova logo após o carregamento no ensaio de laboratório. No campo, como a velocidade do adensamento é muito baixa, a validade da Lei de Darcy é atendida.

- Hipóteses de natureza matemática

#### (5) Fluxo da água ocorrendo num plano horizontal/radial (em direção ao dreno)

Esta é a mesma hipótese admitida por Barron (1948). A presença dos drenos faz com que a direção do fluxo de água no interior do solo passe de vertical para radial. Isso acelera bastante o processo de adensamento, principalmente por diminuir o comprimento do caminho de drenagem (que aparece elevado ao quadrado nas equações), mas também porque o coeficiente de adensamento horizontal é geralmente maior do que o vertical.

#### (6) Compressão unidimensional

Esta hipótese diz que a deformação ocorre apenas em um sentido (no caso, vertical). Ela é válida para o eixo de simetria ou na região central de grandes áreas carregadas. Se o carregamento for uniformemente distribuído em uma área suficientemente extensa, que é o caso mais comum, os elementos do solo estarão todos sob tensões geostáticas e na situação de repouso (à exceção daqueles que se situam junto às extremidades). Isso garante a validade da hipótese, que deixa de ser

uma hipótese e passa a ser uma consequência das condições de contorno. No laboratório, como as deformações laterais são impedidas, esta é uma condição imposta e não uma hipótese.

#### (7) Constância de alguns parâmetros físicos ao longo do tempo

Alguns parâmetros do adensamento são dependentes do índice de vazios, como a permeabilidade e a compressibilidade. O índice de vazios, por sua vez, diminui com o aumento da tensão efetiva, que cresce durante o adensamento. No entanto, tais parâmetros serão admitidos como constantes ao longo de todo o processo. Segundo Taylor (1942), os erros causados por essa hipótese não são tão relevantes ao serem utilizados valores médios desses parâmetros.

Considerando que o fluxo ocorre apenas na direção radial, a hipótese de deformações infinitesimais não se faz necessária. Afinal, a máxima distância de drenagem a qual as partículas de água percorrem durante o adensamento é uma constante (diferentemente do que acontece no caso de fluxo vertical). Admite-se a presença desta hipótese na teoria de Barron (1948) (como visto no item 1.3.2) porque ela foi desenvolvida como uma extensão da teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936) e posteriormente utilizada por Barron (1948) para o cálculo do fluxo combinado, através da solução de Carrillo (1942).

As hipóteses restantes, todas de natureza física, são as que fazem com que esta teoria difira das demais. Elas naturalmente se assemelham às hipóteses utilizadas por Andrade (2014), uma vez que o presente trabalho, que estuda o adensamento unidimensional com fluxo radial, se ampara nos mesmos conceitos considerados por Andrade (2014) no desenvolvimento de sua teoria do adensamento unidimensional com fluxo vertical.

As hipóteses (8) e (9) substituem àquela que determina a validade do Princípio das Tensões Efetivas, sendo cada uma correspondente a uma parte do PTE. Como já discutido anteriormente, a validade do PTE é questionável quando se deseja estudar certos fenômenos da Mecânica dos Solos – em especial a

compressão secundária e o efeito da velocidade das deformações. O adensamento primário é usualmente explicado a partir da relação entre excesso de poropressão e acréscimo de tensão efetiva, o que obriga a consideração de que o adensamento secundário ocorra sob um estado de tensões efetivas constante. Isto fere frontalmente o Princípio das Tensões Efetivas.

(8) A tensão vertical efetiva é composta por duas parcelas: uma parcela sólido-sólido e uma parcela viscosa

De acordo com a primeira parte do PTE, a relação entre tensões verticais efetivas, tensões verticais totais e poropressão é descrita pela seguinte equação:

$$\sigma'_v = \sigma_v - u \quad (74)$$

Esta relação continua valendo para a teoria proposta. A diferença é que a tensão efetiva  $\sigma'_v$  agora é subdividida em duas parcelas: uma parcela sólido-sólido  $\sigma'_{vs}$ , que varia em função do índice de vazios  $e$ , e outra parcela viscosa  $\sigma'_{v\eta}$ , que varia tanto em função do índice de vazios quanto da velocidade de deformação  $\dot{\epsilon}$ :

$$\sigma'_v = \sigma'_{vs}(e) + \sigma'_{v\eta}(e, \dot{\epsilon}) \quad (75)$$

Conforme discutido no item 1.2.4, tanto a compressão secundária quanto a relaxação de tensões, sob estado hidrostático de tensões, são decorrências naturais do Princípio das Tensões Efetivas modificado pela equação (75).

A mudança mais imediatamente observável em relação às teorias clássicas é a magnitude do excesso de poropressão inicial. No instante  $t = 0^+$ , quando o carregamento é aplicado, a variação do índice de vazios é zero, o que faz com que a parcela sólido-sólido da tensão efetiva  $\sigma'_{vs}$  seja nula. No entanto, como o carregamento é aplicado instantaneamente, neste momento já existe uma velocidade de deformação diferente de zero. Esta velocidade mobiliza a parcela viscosa da tensão efetiva  $\sigma'_{v\eta}$ , especialmente junto às fronteiras drenantes, onde a

velocidade é maior. Isto faz com que a tensão efetiva (parcela viscosa + parcela sólido-sólido) não seja nula e, conseqüentemente, o excesso de poropressão inicial seja menor do que o incremento de tensão vertical aplicado.

- (9) A variação de volume é devida exclusivamente à variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva

A Figura 63 ilustra a adoção desta hipótese. O segmento ADGJ é a linha de final do adensamento (incluindo o secundário), correspondente à velocidade de deformação nula, e representa a relação entre o índice de vazios e a parcela sólido-sólido da tensão efetiva. A curva BEHJ é a curva de compressão. No instante  $t = 0$ , se o solo partir do ponto A, AB é o valor da parcela viscosa da tensão efetiva (não-nula, pois já existe velocidade de deformação) e BC é o excesso de poropressão inicial. O “salto” instantâneo do ponto A para o ponto B é uma variação no estado de tensões efetivas, mas não há qualquer deformação – o índice de vazios é o mesmo em A e em B. Isto se dá porque apenas a parcela viscosa da tensão efetiva variou, enquanto a parcela sólido-sólido se manteve nula (conforme explicado na hipótese (8)). A compressão só ocorre se houver variação da parcela sólido-sólido.

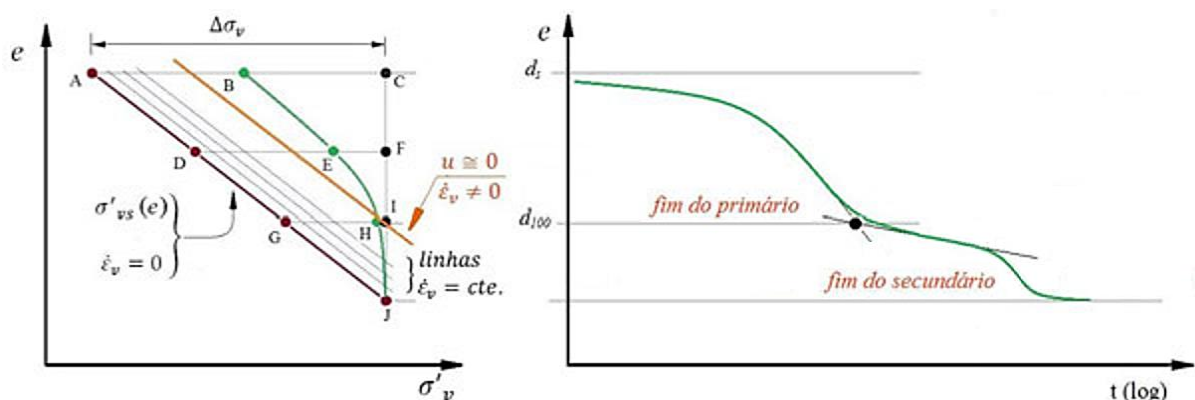


Figura 63 – Adensamento primário e secundário de acordo com o modelo (adaptado de Andrade, 2014).

Durante o adensamento, as magnitudes das parcelas da tensão efetiva e do excesso de poropressão variam. Em um dado momento, a parcela viscosa é representada pelo segmento DE e o excesso de poropressão pelo segmento EF.

Após certo tempo, a parcela viscosa corresponde ao segmento GH e o segmento HI é o excesso de poropressão, tão pequeno que seu registro é imperceptível – e é por isso que se considera final do adensamento primário nesse instante. O caminho HJ, praticamente coincidente com IJ, foi convencionado na prática da engenharia como “compressão secundária”.

Se as deformações são interrompidas no ponto H, não há variação do índice de vazios, a velocidade de deformação cai para zero e a parcela viscosa  $\sigma'_{v\eta}$  também deve se anular. O ponto H deve “caminhar” em direção ao ponto G, seguindo a horizontal HG, chamado de relaxação de tensões drenada (Garcia, 1996; Aguiar, 2008 e Andrade, 2009). Se for possível fechar a drenagem no ponto H, a parcela viscosa será transferida ao longo do tempo para a poropressão. Este é o processo da relaxação de tensões não drenada (Lima 1993; Thomasi, 2000 e Dos Santos, 2006). Por outro lado, se for permitido normalmente que o solo se deforme, o caminho será HJ e, sob tensão efetiva praticamente constante, a parcela viscosa ( $\sigma'_{v\eta}$ ) será gradualmente transferida para a parcela sólido-sólido ( $\sigma'_{vs}$ ). Este processo configura o adensamento secundário (Garcia, 1996; Thomasi, 2000; Santa Maria, 2002; Aguiar, 2008 e Andrade, 2009). Assim, no adensamento secundário, há deformação volumétrica e aumento da parcela sólido-sólido da tensão efetiva com o tempo. A deformação volumétrica está, portanto, intimamente associada à variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva, o que novamente justifica a hipótese (9).

As hipóteses (10) e (11) dizem respeito a como as parcelas da tensão efetiva variam.

- (10) Relação de proporcionalidade entre as variações do índice de vazios e da parcela sólido-sólido da tensão efetiva

Nas teorias clássicas, a hipótese utilizada é a de que existe uma relação de proporcionalidade entre a variação dos índices de vazios e a variação das tensões verticais efetivas, representada pelo coeficiente de compressibilidade  $a_v$ . Ao se admitir que a variação de volume decorre da variação apenas da parcela sólido-sólido da tensão efetiva (hipótese (9)), e não da tensão efetiva como um todo, é



se fazem presentes unicamente para facilitação dos cálculos nos desenvolvimentos matemáticos.

- (11) A parcela viscosa da tensão efetiva é função do produto entre a velocidade de deformação específica e um coeficiente de viscosidade  $\eta$  que depende do índice de vazios

Uma vez definido que a parcela viscosa da tensão efetiva é função tanto do índice de vazios quanto da velocidade de deformação, é conveniente determiná-la através de um produto de funções. Mais precisamente, a parcela viscosa é obtida através da seguinte equação:

$$\sigma'_{v\eta} = -\eta(e)f\left(\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}\right) \quad (76)$$

O sinal negativo na equação (76) se deve ao fato de que, quando  $\varepsilon_v$  diminui com o tempo (compressão), a parcela  $\sigma'_{v\eta}$  também é de compressão, ou seja, positiva.

Para o coeficiente de viscosidade  $\eta(e)$ , que depende do índice de vazios, deve ser atribuída uma função que seja coerente com a natureza física do processo e/ou que facilite o desenvolvimento matemático. Andrade (2014) admitiu que o parâmetro fosse constante ao longo do adensamento, representado pelo seu valor médio  $\bar{\eta}$ , e também que  $f\left(\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}\right) = \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}$ . Com isso, a equação passou a ser:

$$\sigma'_{v\eta} = -\bar{\eta}\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (77)$$

Como já mencionado, Andrade (2014) concluiu que o coeficiente de viscosidade não deve ser considerado constante e sim crescente com a redução do índice de vazios. A Figura 65 compara o caminho obtido pela teoria de Andrade (2014) (Figura 65a) e o caminho que deve ser o mais próximo da realidade (Figura 65b).



A equação (77) expressa que, para se obter  $\sigma'_{v\eta} \neq 0$ , é preciso  $\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \neq 0$ . No entanto, de acordo com a Lei de Darcy no caso de fluxo vertical, pode-se dizer que:

$$\frac{k_v}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (78)$$

Que é a equação (2) mostrada anteriormente.

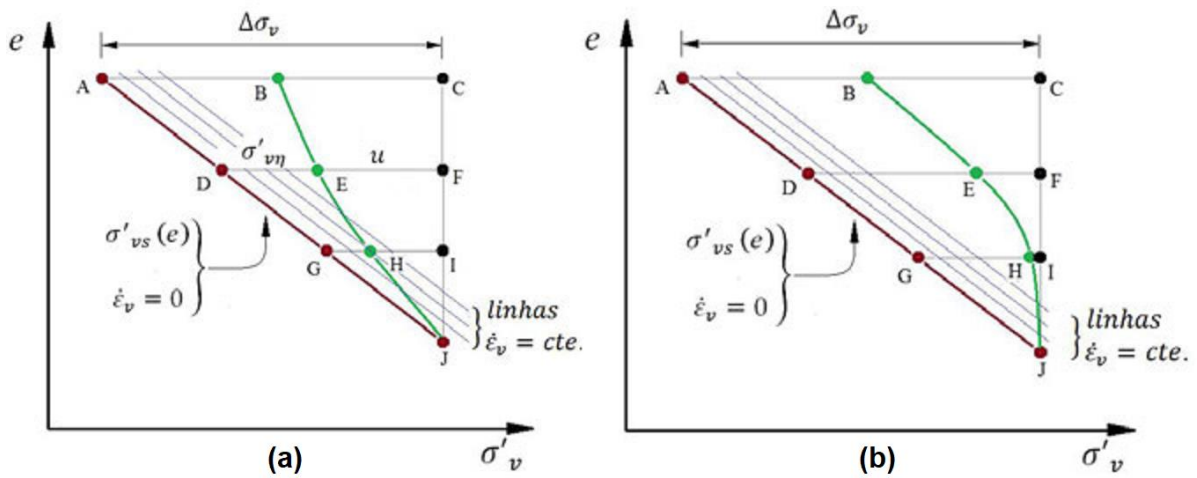


Figura 65 – Caminho seguido durante o adensamento (Andrade, 2014). (a) Caminho obtido através da consideração de  $\eta$  constante. (b) Caminho que mais se aproxima da realidade.

Segundo a equação (78), quando  $u$  está próximo de zero, a velocidade de deformação  $\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$  é muito reduzida. Conseqüentemente, se o coeficiente de viscosidade  $\eta$  for considerado constante, o valor de  $\sigma'_{v\eta}$  tende a ser muito baixo, também próximo de zero. Na teoria de Andrade (2014), que utiliza  $\eta$  constante, para que haja  $\sigma'_{v\eta} \neq 0$  é necessário, portanto,  $u \neq 0$  (segmento HI da Figura 65a). Porém, as evidências experimentais de laboratório indicam que, quando  $u \cong 0$  (segmento HI da Figura 65b),  $\sigma'_{v\eta}$  não é desprezível, sendo sua transferência para a parcela sólido-sólido  $\sigma'_{vs}$  a responsável pela compressão secundária. Para que se possa obter um valor significativo de  $\sigma'_{v\eta}$  com  $u \cong 0$ , é preciso que  $\eta(e)$  cresça com a deformação.

Ocorre que a determinação de uma função crescente para  $\eta(e)$  é uma tarefa bastante difícil, dada a enorme diversidade de funções que poderiam, de alguma forma, atender o problema. Além disso, qualquer que seja a função escolhida, o desenvolvimento matemático deve se complicar substancialmente e até mesmo impossibilitar a obtenção de uma solução analítica, visto que a solução de Andrade (2014) já foi trabalhosa mesmo com  $\eta$  constante. Neste trabalho serão feitas soluções para as condições de deformações verticais iguais e deformações verticais livres com  $\eta$  constante e uma solução para a condição de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável (crescente), todas elas para  $f\left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}\right) = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$ .

Vale notar que, se fosse adotado  $\eta = 0$  durante todo o processo, a parcela viscosa seria sempre nula. Assim, a tensão efetiva seria sempre igual à sua parcela sólido-sólido. Como as duas hipóteses relacionadas à parcela sólido-sólido (hipóteses (9) e (10)) são as mesmas que eram atribuídas à tensão efetiva nas teorias clássicas, a solução obtida seria a mesma de Barron (1948).

## **2.2 Dedução da equação do adensamento para drenagem radial interna considerando a viscosidade**

Inicialmente será desenvolvida a equação que relaciona a variação de volume ao longo do tempo de um elemento por unidade de volume, em termos de coordenadas cilíndricas. Esta equação é comum para as condições de deformações verticais livres e deformações verticais iguais e independe da função utilizada para o coeficiente de viscosidade.

O problema a ser estudado está esquematizado na Figura 66, na qual  $r_w$  é o raio do dreno e  $r_e$  é o seu raio de influência. No caso geral, chamado de drenagem combinada, o fluxo se dá em planos verticais que se interceptam no eixo vertical (eixo  $z$ ) do dreno, devido à existência das camadas drenantes sobrejacente e subjacente à camada mole. Como o problema é de axissimetria, independe do ângulo  $\theta$ .

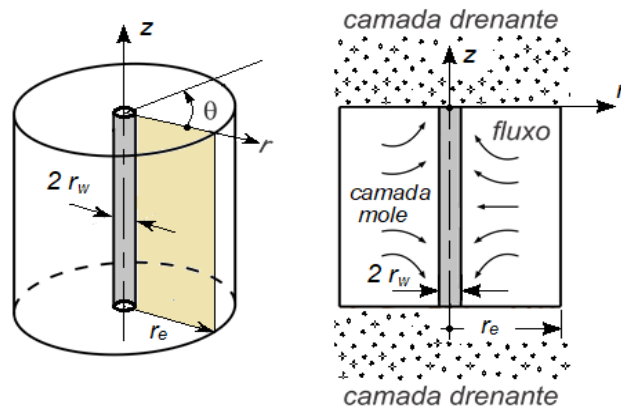


Figura 66 – Representação esquemática de um dreno atuando em um volume cilíndrico de solo.

A partir da Figura 66 e das hipóteses simplificadoras apresentadas no item 2.1, pode-se deduzir a equação do adensamento tomando-se como base um elemento de volume de solo em coordenadas cilíndricas (Figura 67).

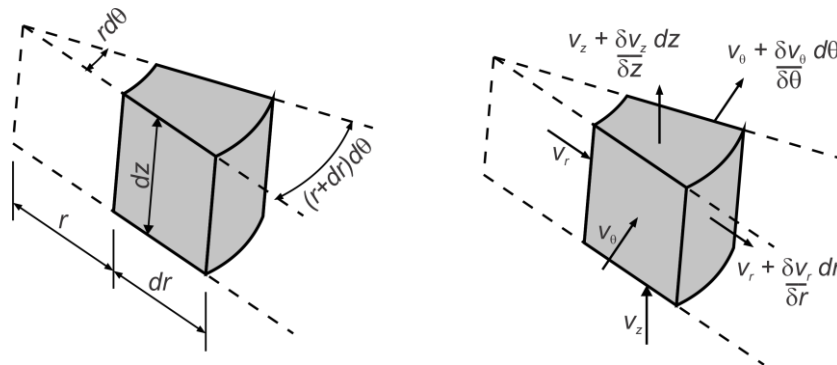


Figura 67 – Representação de fluxo através de elemento de solo.

Sejam  $v_z$  e  $v_r$  as velocidades de fluxo nas direções  $z$  (vertical) e  $r$  (radial), respectivamente. Seja  $\theta$  o arco do elemento de solo e  $v_\theta$  a velocidade transversal. Pela hipótese (5) e pela condição de axissimetria, tanto  $v_z$  quanto  $v_\theta$  são nulos.

O volume de água que entra no elemento de volume de solo na unidade de tempo ( $Q_{entra}$ ) é dado por:

$$Q_{entra} = v_r r d\theta dz \quad (79)$$

Similarmente, o volume de água que sai do elemento de volume de solo na unidade de tempo ( $Q_{sai}$ ) é dado por:

$$Q_{sai} = \left( v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz \quad (80)$$

Pelas hipóteses (2) e (3), a variação de volume de um elemento de solo de volume total  $V_t$  em um tempo  $t$  pode ser definida por:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = Q_{sai} - Q_{entra} \quad (81)$$

Pelas equações (79) e (80), tem-se:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \left( v_r + \frac{\partial v_r}{\partial r} r \right) dr d\theta dz \quad (82)$$

Mas o volume total  $V_t$  é dado por:

$$V_t = r dr d\theta dz \quad (83)$$

Substituindo na equação (82), vem:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \left( \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) V_t \quad (84)$$

A variação da deformação volumétrica específica ao longo do tempo pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{V_t} \frac{\partial V_t}{\partial t} \quad (85)$$

Pela hipótese (6) (compressão unidimensional), a deformação volumétrica específica é igual a deformação volumétrica vertical.

Com a equação (84), se escreve:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (86)$$

Pela hipótese (4), o fluxo obedece a lei de Darcy. Assim, definem-se:

$$v_r = k_r i_r \quad (87)$$

$$i_r = \frac{\partial h}{\partial r} \quad (88)$$

Onde:

- $k_r$  = coeficiente de permeabilidade na direção  $r$
- $i_r$  = gradiente hidráulico na direção  $r$
- $h$  = carga hidráulica

A carga hidráulica  $h$  a uma determinada profundidade  $z$  é dada por:

$$h = z + \frac{u_h}{\gamma_w} + \frac{u}{\gamma_w} \quad (89)$$

Onde  $\gamma_w$  é o peso específico da água,  $u_h$  é a poropressão hidrostática na profundidade considerada e  $u$  é o excesso de poropressão.

A parcela  $z + \frac{u_h}{\gamma_w}$  corresponde à carga hidráulica hidrostática, que não varia com o tempo. Portanto,  $z + \frac{u_h}{\gamma_w}$  é uma constante.

Derivando-se a equação (89) em relação ao raio, encontra-se:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{\gamma_w} \right) \quad (90)$$

Considerando a água incompressível (hipótese (3)),  $\gamma_w$  se torna uma constante. Assim:

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (91)$$

Substituindo as equações (91) e (88) na equação (87), vem:

$$v_r = \frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (92)$$

Derivando a equação (92) em  $r$ , tem-se que:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (93)$$

Uma vez que a hipótese (1) admite solo homogêneo, o coeficiente de permeabilidade  $k_r$  não varia espacialmente. Desse modo:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (94)$$

Substituindo as equações (92) e (94) na equação (86), encontra-se:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (95)$$

Sendo  $V_t$  o volume total,  $V_s$  o volume de sólidos e  $V_v$  o volume de vazios:

$$V_t = V_s + V_v \quad (96)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{\partial V_v}{\partial t} \quad (97)$$

Pela hipótese (3), os grãos sólidos são incompressíveis, ou seja,  $\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$ . Com isso:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = \frac{\partial V_v}{\partial t} \quad (98)$$

Por definição, o índice de vazios é:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (99)$$

Substituindo o valor de  $V_v$ , dado pela equação (99), na equação (98):

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = V_s \frac{\partial e}{\partial t} \quad (100)$$

Substituindo a equação (100) na equação (85), vem:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{V_s}{V_t} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (101)$$

Através das equações (96) e (99), reescreve-se a equação (101) em termos do índice de vazios da seguinte forma:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (102)$$

Lembrando que o termo  $1+e$  da equação (102) é constante e igual a  $1+e_0$ .

Substituindo-se o valor de  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$  dado por (102) na equação (95), obtém-se:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (103)$$

Que é igual à equação (29) mostrada anteriormente, ao se apresentar a teoria de Barron (1948). A equação (103) será a base das soluções para as condições de deformações verticais livres e deformações verticais iguais a seguir.

De fato, o desenvolvimento até aqui utilizou apenas as hipóteses em comum com as da teoria de Barron (1948). O cálculo realizado até o momento diz respeito ao fluxo (condição de continuidade), que é governado pela Lei de Darcy, e as hipóteses associadas a esse fenômeno são as mesmas tanto nas soluções de Barron (1948) quanto na presente tese. O que difere os desenvolvimentos é a relação tensão-deformação, ou ainda, como o termo  $\frac{\partial e}{\partial t}$  está relacionado às variações das tensões efetivas. A consideração da viscosidade, que é onde reside a diferença fundamental entre as teorias aqui desenvolvidas e as apresentadas por Barron (1948), ainda será introduzida.

### 2.2.1 Deformações verticais livres (“free strain”) com coeficiente de viscosidade constante

Como já comentado, na condição de deformações verticais livres os recalques diferenciais não causam redistribuição de tensões pelo arqueamento do aterro. As deformações são resultado de um carregamento uniforme na superfície.

Pela hipótese (8), sabe-se que:

$$\sigma_v = \sigma'_{vs} + \sigma'_{v\eta} + u \quad (104)$$

Onde  $\sigma_v$  é o acréscimo de tensão total,  $u$  é o excesso de poropressão,  $\sigma'_{vs}$  é a parcela sólido-sólido da tensão efetiva e  $\sigma'_{v\eta}$  é a parcela viscosa da tensão efetiva.

Como o caso analisado é de deformações verticais livres, pode se considerar  $\sigma_v$  constante ao longo do raio. Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\sigma_v}{dt} = \frac{d\sigma'_{vs}}{dt} + \frac{d\sigma'_{v\eta}}{dt} + \frac{du}{dt} \quad (105)$$



Como o carregamento é constante ao longo do tempo,  $\frac{d\sigma_v}{dt} = 0$  e a equação se reduz a:

$$-\frac{d\sigma'_{vs}}{dt} = \frac{d\sigma'_{v\eta}}{dt} + \frac{du}{dt} \quad (106)$$

De modo a se trabalhar apenas com o excesso de poropressão, é preciso encontrar  $\frac{d\sigma'_{vs}}{dt}$  e  $\frac{d\sigma'_{v\eta}}{dt}$  em função de  $u$ .

Pela hipótese (9), admite-se que a variação do índice de vazios  $e$  é função exclusiva da variação de  $\sigma'_{vs}$ . Com isso:

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{d\sigma'_{vs}} \frac{d\sigma'_{vs}}{dt} \quad (107)$$

Pela hipótese (10), existe uma função relacionando o índice de vazios e a parcela sólido-sólido da tensão efetiva que pode ser representada por uma reta. A constante que define a proporcionalidade entre a variação do índice de vazios e a variação da parcela sólido-sólido da tensão vertical efetiva será representada por  $a_{vs}$ . Assim:

$$a_{vs} = -\frac{\partial e}{\partial \sigma'_{vs}} \quad (108)$$

O parâmetro  $a_{vs}$  equivale a  $\frac{1+e}{M'}$  na teoria de Andrade (2014).

Substituindo  $a_{vs}$ , dado pela equação (108), na equação (107), encontra-se:

$$\frac{de}{dt} = -a_{vs} \frac{d\sigma'_{vs}}{dt} \quad (109)$$

Substituindo agora o valor de  $\frac{d\sigma'_{vs}}{dt}$ , dado pela equação (106), na equação (109):

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left( \frac{d\sigma'_{v\eta}}{dt} + \frac{du}{dt} \right) \quad (110)$$

Segundo a hipótese (11), a parcela viscosa  $\sigma'_{v\eta}$  é o produto entre uma função da velocidade de deformação específica e o coeficiente de viscosidade  $\eta$ . Com isso:

$$\sigma'_{v\eta} = -\eta(e) f \left( \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right) = -\eta(e) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (111)$$

Sendo o parâmetro  $\eta$  função do índice de vazios, é de se esperar que ele varie durante o adensamento. Entretanto, nesta solução será admitido que o parâmetro  $\eta(e)$  é constante ao longo do tempo e também do raio (a constância em relação ao raio está de acordo com a hipótese (1)). Assim,  $\eta(e)$  será representado pelo seu valor médio  $\bar{\eta}$  e a parcela viscosa da tensão vertical efetiva  $\sigma'_{v\eta}$  se escreve:

$$\sigma'_{v\eta} = -\bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (112)$$

Em termos de índice de vazios, a partir da equação (102), faz-se:

$$\sigma'_{v\eta} = -\frac{\bar{\eta}}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (113)$$

Derivando a equação (113) em relação ao tempo:

$$\frac{d\sigma'_{v\eta}}{dt} = -\frac{\bar{\eta}}{1+e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (114)$$

Substituindo na equação (110), vem:

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left[ \frac{du}{dt} - \left( \frac{\bar{\eta}}{1+e} \right) \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right] \quad (115)$$

Derivando a equação (103) em relação ao tempo:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{1+e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (116)$$

Substituindo o valor de  $\frac{de}{dt}$ , dado por (103), e  $\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$ , dado por (116), na equação (115), obtém-se:

$$\left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = a_{vs} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{\bar{\eta}}{1+e} \right) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \right\} \quad (117)$$

Simplificando e rearranjando os termos:

$$\left[ \frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} \right] \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (118)$$

Define-se então o coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$ , dado por:

$$\frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} = c_{rs} \quad (119)$$

Observa-se aqui uma diferença fundamental entre o coeficiente de adensamento radial desta teoria e o da teoria apresentada por Barron (1948). Embora sejam similares,  $c_{rs}$  foi definido a partir de  $a_{vs}$  e não de  $a_v$ . Como já explicitado na equação (108), o coeficiente de compressibilidade  $a_{vs}$  relaciona a variação do índice de vazios com a variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva e não da tensão efetiva por inteiro.

A equação diferencial fica:

$$c_{rs} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (120)$$

A equação (120) é o problema de valor de contorno a ser resolvido. Admitese, para sua solução, que  $c_{rs}$  seja constante. Esta hipótese, que está incluída na hipótese (7), se torna razoável caso se observe que, quando o adensamento evolui, tanto o numerador quanto o denominador diminuam.

Comparando a equação para condição de deformações verticais iguais desta tese (equação (120)) com a equação para condição de deformações verticais livres de Barron (1948) (equação (33)), a única diferença é a parcela  $\left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)$ , que representa a influência da viscosidade no fenômeno. Fazendo  $\bar{\eta} = 0$ , as duas equações se tornam a mesma.

Diferentemente da solução para condição de deformações verticais livres de Barron (1948), neste caso não se pode mais afirmar que o excesso de poropressão inicial  $u(r, 0)$  é igual ao acréscimo de tensão total  $\Delta\sigma$ , nem mesmo que seja constante ao longo do raio. Como já existe velocidade de deformação em  $t = 0$ , já existe parcela viscosa  $\sigma'_{v\eta}$  mobilizada e ela varia ao longo do raio, pois as velocidades de deformação também variam. O que é constante é a soma entre  $u(r, 0)$  e  $\sigma'_{v\eta}(r, 0)$ , pois  $\Delta\sigma$  é constante e a parcela sólido-sólido  $\sigma'_{vs}(r, 0)$  é nula.

Portanto, as condições de contorno necessárias para a resolução do problema a partir de  $u(r, t)$  são:

- 1) Para qualquer  $t > 0$ ,  $u(r_w, t) = 0$
- 2) Para qualquer  $t > 0$ ,  $\left.\frac{\partial u(r, t)}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0$

E a condição inicial é:

- 3) Para o tempo  $t = 0$ ,  $u(r, 0) = u_0(r)$  (função a ser determinada, tal que  $0 \leq u_0 \leq \Delta\sigma$ )

### 2.2.1.1 Resolução do problema de valor de contorno

Deve-se verificar se as variáveis (raio e tempo) são separáveis. Admite-se primeiramente que a função do excesso de poropressão  $u(r, t)$  seja dada pelo produto:

$$u(r, t) = F(r)G(t) \quad (121)$$

Substituindo na equação (120), vem:

$$c_{rs} \left[ \frac{1}{r} F'(r)G(t) + F''(r)G(t) \right] + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \left[ \frac{1}{r} F'(r)G'(t) + F''(r)G'(t) \right] - F(r)G'(t) = 0 \quad (122)$$

Rearranjando os termos:

$$\left[ \frac{1}{r} F'(r) + F''(r) \right] \left[ c_{rs}G(t) + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) G'(t) \right] - F(r)G'(t) = 0 \quad (123)$$

E finalmente:

$$c_{rs} \frac{G(t)}{G'(t)} + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) = \frac{F(r)}{\frac{1}{r} F'(r) + F''(r)} \quad (124)$$

O membro esquerdo da equação (124) é função apenas do tempo ( $t$ ) ao passo que o membro direito é função apenas do raio ( $r$ ). Como ambas as variáveis são variáveis independentes, a única forma pela qual uma função do tempo pode ser igual a uma função do raio é quando ambas forem iguais a uma constante. Diz-se então que na equação (124) as variáveis são separáveis. Por conveniência, esta constante será chamada de  $-\frac{1}{\Omega^2}$ .

O problema se resume então a encontrar as soluções de duas equações diferenciais ordinárias: uma de variável  $r$  (raio) e outra de variável  $t$  (tempo).

Começando-se pela equação relacionada ao tempo e lembrando que a constante será chamada de  $-\frac{1}{\Omega^2}$ , escreve-se:

$$c_{rs} \frac{G(t)}{G'(t)} + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) = -\frac{1}{\Omega^2} \quad (125)$$

Simplificando:

$$c_{rs}G(t) = - \left[ \frac{1}{\Omega^2} + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \right] G'(t) \quad (126)$$

Donde se obtém a seguinte equação diferencial:

$$G'(t) + \left( \frac{c_{rs}}{\frac{1}{\Omega^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} \right) G(t) = 0 \quad (127)$$

Definindo:

$$\frac{c_{rs}}{\frac{1}{\Omega^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} = \Lambda \quad (128)$$

A solução da equação é:

$$G(t) = c_1 e^{-\Lambda t} \quad (129)$$

Onde  $c_1$  é uma constante.

A equação relacionada ao raio é:

$$\frac{F(r)}{\frac{1}{r}F'(r) + F''(r)} = -\frac{1}{\Omega^2} \quad (130)$$

Que é uma equação idêntica à da solução clássica, não sendo influenciada pela viscosidade. Rearranjando as funções e multiplicando-as por  $r^2$ :

$$r^2 \frac{d^2 F(r)}{dr^2} + r \frac{dF(r)}{dr} + r^2 \Omega^2 F(r) = 0 \quad (131)$$

Fazendo  $r = \frac{x}{\Omega}$  e  $F(r) = F\left(\frac{x}{\Omega}\right) = \Phi(x)$ :

$$x^2 \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + x \frac{d\Phi(x)}{dx} + (x^2 - \omega^2) \Phi(x) = 0 \quad (132)$$

Em que  $\omega = 0$ .

A equação (132) é uma equação de Bessel de ordem zero ( $\omega = 0$ ). A solução para esse tipo de equação é:

$$\Phi(x) = c_2 J_0(x) + c_3 Y_0(x) \quad (133)$$

Onde  $J_0(x)$  é a função de Bessel de 1ª espécie e ordem zero:

$$J_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^i}{(i!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \right] = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 \dots \quad (134)$$

E  $Y_0(x)$  é a função de Bessel de 2ª espécie e ordem zero:

$$Y_0(x) = J_0 \ln x + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{i+1}}{(i!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right] \quad (135)$$

Com isso, e lembrando que  $x = r\Omega$ , pode-se dizer que:

$$u(r, t) = F(r)G(t) = [c_2 J_0(r\Omega) + c_3 Y_0(r\Omega)] c_1 e^{-\Lambda t} \quad (136)$$

Pela 1ª condição de contorno, tem-se que  $u(r_w, t) = 0$ , em que  $r_w$  é o raio do dreno. A equação (136) fornece:

$$c_2 J_0(r_w \Omega) + c_3 Y_0(r_w \Omega) = 0 \quad (137)$$

Seja  $\alpha = r_w \Omega$  um valor que satisfaz à equação (137). Com isso, se obtém:

$$\Omega = \frac{\alpha}{r_w} \quad (138)$$

E a equação (128) se torna:

$$\Lambda = \frac{c_{rs}}{\left(\frac{r_w}{\alpha}\right)^2 + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} \quad (139)$$

De acordo com a 2ª condição de contorno,  $\left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0$ . Aplicando-se na equação (136):

$$\left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_e} = -\frac{\alpha}{r_w} \left[ c_2 J_1\left(\frac{\alpha}{r_w} r_e\right) + c_3 Y_1\left(\frac{\alpha}{r_w} r_e\right) \right] c_1 e^{-\Lambda t} = 0 \quad (140)$$

Definindo:

$$n = \frac{r_e}{r_w} \quad (141)$$

Levando-se em consideração que o termo  $c_1 e^{-\Lambda t} \neq 0$ , a equação (140) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$c_2 J_1(\alpha n) + c_3 Y_1(\alpha n) = 0 \quad (142)$$

Donde vem:

$$c_3 = -c_2 \frac{J_1(\alpha n)}{Y_1(\alpha n)} \quad (143)$$

Substituindo na equação (136):



$$u(r, t) = c_4 \left[ J_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) - \frac{J_1(\alpha n)}{Y_1(\alpha n)} Y_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] e^{-\Lambda t} \quad (144)$$

Onde  $c_4 = c_1 c_2$  é uma constante. Denotando:

$$J_k \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) - \frac{J_1(\alpha n)}{Y_1(\alpha n)} Y_k \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) = B_k \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \quad (145)$$

Em que o índice  $k$  pode assumir os valores 0 ou 1 (ver expressões mais adiante neste desenvolvimento).

A equação (144) pode ser reescrita:

$$u = c_4 \left[ B_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] e^{-\Lambda t} \quad (146)$$

Algumas relações importantes podem ser expressas em função de  $u(r, t)$ . Multiplicando a equação (131) por  $\frac{1}{r^2} \left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) G(t)$  e lembrando que  $u(r, t) = F(r)G(t)$ :

$$\left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\Omega^2 \left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) u \quad (147)$$

Comparando com a equação (103), tem-se que:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\Omega^2 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] u = -\left( \frac{\alpha}{r_w} \right)^2 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] u \quad (148)$$

E a parcela viscosa da tensão efetiva, expressa na equação (113), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma'_{v\eta} = \left( \frac{\alpha}{r_w} \right)^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) u \quad (149)$$

Pela condição inicial,  $u(r, 0) = u_0(r)$ . No instante  $t = 0$ , pela equação (104), tem-se:

$$\sigma_v(r, 0) = \sigma'_{vs}(r, 0) + \sigma'_{v\eta}(r, 0) + u(r, 0) \quad (150)$$

Seja  $\Delta\sigma_v$  a magnitude do acréscimo de tensão total aplicado. O valor de  $u(r, 0)$  pode ser determinado a partir de  $\sigma'_{v\eta}$ , expresso pela equação (149), isto é:

$$\Delta\sigma_v = 0 + \left(\frac{\alpha}{r_w}\right)^2 \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}\right) u(r, 0) + u(r, 0) \quad (151)$$

O diâmetro de influência  $d_e$  dos drenos é definido por:

$$d_e = 2r_e = 2nr_w \quad (152)$$

Substituindo  $r_w$ , dado pela equação (152), na equação (151) e simplificando:

$$\Delta\sigma_v = 4\alpha^2 n^2 \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2}\right) u(r, 0) + u(r, 0) = \left[1 + 4\alpha^2 n^2 \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2}\right)\right] u(r, 0) \quad (153)$$

Fazendo-se  $t = 0$  na equação (146), reescreve-se:

$$u(r, 0) = c_4 \left[ B_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] \quad (154)$$

Multiplicando ambos os lados por  $\left[1 + 4\alpha^2 n^2 \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2}\right)\right]$  e observando a igualdade da equação (153):

$$\Delta\sigma_v = \left\{ c_4 \left[ 1 + 4\alpha^2 n^2 \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2}\right) \right] \right\} \left[ B_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] \quad (155)$$

A equação (155) é uma série de Fourier-Bessel. Para encontrar  $c_4$ , multiplica-se ambos os lados da igualdade por  $B_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) r dr$ :

$$\int_{r_w}^{r_e} \Delta\sigma_v B_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) r dr = \int_{r_w}^{r_e} \left\{ c_4 \left[ 1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right) \right] \right\} \left[ B_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) \right]^2 r dr \quad (156)$$

O valor de  $c_4$  é determinado por:

$$c_4 = \frac{\Delta\sigma_v \int_{r_w}^{r_e} B_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) r dr}{\left[ 1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right) \right] \int_{r_w}^{r_e} B_0^2\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) r dr} \quad (157)$$

Conforme descreve Glover (1930, pág. 57), as resoluções das integrais fornecem:

$$c_4 = \frac{\Delta\sigma_v \left[ r \frac{r_w}{\alpha} B_1\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) \right]_{r_w}^{r_e}}{\left[ 1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right) \right] \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ B_0^2\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) + B_1^2\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) \right] \right\}_{r_w}^{r_e}} \quad (158)$$

Desenvolvendo a integral do numerador da equação (158), vem:

$$\left[ r \frac{r_w}{\alpha} B_1\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) \right]_{r_w}^{r_e} = \frac{r_e r_w}{\alpha} B_1\left(\alpha \frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{r_w^2}{\alpha} B_1\left(\alpha \frac{r_w}{r_w}\right) \quad (159)$$

Pela equação (140),  $B_1(\alpha n) = 0$ . Simplificando:

$$\left[ r \frac{r_w}{\alpha} B_1\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) \right]_{r_w}^{r_e} = -\frac{r_w^2}{\alpha} B_1(\alpha) \quad (160)$$

Agora desenvolvendo a integral do denominador da equação (158), vem:

$$\begin{aligned} & \left. \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ B_0^2 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) + B_1^2 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] \right\} \right|_{r_w}^{r_e} \quad (161) \\ & = \frac{r_e^2}{2} B_0^2 \left( \alpha \frac{r_e}{r_w} \right) + \frac{r_e^2}{2} B_1^2 \left( \alpha \frac{r_e}{r_w} \right) - \frac{r_w^2}{2} B_0^2 \left( \alpha \frac{r_w}{r_w} \right) - \frac{r_w^2}{2} B_1^2 \left( \alpha \frac{r_w}{r_w} \right) \end{aligned}$$

Pelas equações (137) e (140),  $B_0(\alpha) = 0$  e  $B_1(\alpha n) = 0$ . Simplificando:

$$\left. \left\{ \frac{r^2}{2} \left[ B_0^2 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) + B_1^2 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] \right\} \right|_{r_w}^{r_e} = \frac{r_e^2}{2} B_0^2(\alpha n) - \frac{r_w^2}{2} B_1^2(\alpha) \quad (162)$$

A equação (158) é então reescrita:

$$c_4 = \left[ \frac{\Delta\sigma_v}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \frac{-\frac{r_w^2}{\alpha} B_1(\alpha)}{\frac{r_e^2}{2} B_0^2(\alpha n) - \frac{r_w^2}{2} B_1^2(\alpha)} \quad (163)$$

Substituindo em  $u(r, t)$  (equação (146)):

$$u = \left[ \frac{\Delta\sigma_v}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \left[ \frac{-\frac{r_w^2}{\alpha} B_1(\alpha)}{\frac{r_e^2}{2} B_0^2(\alpha n) - \frac{r_w^2}{2} B_1^2(\alpha)} \right] \left[ B_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \right] e^{-\Lambda t} \quad (164)$$

Multiplicando e dividindo por  $Y_1^2(\alpha n)$  e simplificando:

$$u = \left[ \frac{\Delta\sigma_v}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \left[ \frac{-2B_1(\alpha) Y_1(\alpha n) B_0 \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) Y_1(\alpha n)}{\alpha [n^2 B_0^2(\alpha n) Y_1^2(\alpha n) - B_1^2(\alpha) Y_1^2(\alpha n)]} \right] e^{-\Lambda t} \quad (165)$$

Definindo:

$$B_i \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) Y_1(\alpha n) = J_i \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) Y_1(\alpha n) - Y_i \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) J_1(\alpha n) = A_i \left( \alpha \frac{r}{r_w} \right) \quad (166)$$

Encontra-se:

$$u = \left[ \frac{\Delta\sigma_v}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)}{\alpha[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp\left(-\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t\right) \quad (167)$$

Finalmente, uma vez que existem infinitos valores de  $\alpha$ , a solução é o somatório:

$$u = \Delta\sigma_v \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)}{\alpha[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \left[ \frac{1}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \exp\left(-\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t\right) \quad (168)$$

Fazendo-se  $t = 0$ , verifica-se que:

$$u_0 = \Delta\sigma_v \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)}{\alpha[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \left[ \frac{1}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \quad (169)$$

A equação (168) permite que se obtenha o valor do excesso de poropressão médio  $\bar{u}$ . Calculando-se o excesso de poropressão médio  $\bar{u}$  em um tempo  $t$ :

$$\bar{u} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} 2\pi r u dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (170)$$

O único termo de  $u$  que varia em  $r$  é  $A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)$ . Todos os outros termos são constantes em  $r$ . Como  $A_1(\alpha n) = 0$ , a equação se torna:

$$\bar{u} = \Delta\sigma_v \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots}^{\alpha_\infty} \frac{4A_1(\alpha)^2}{\alpha^2(n^2 - 1)[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \left[ \frac{1}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \exp\left(-\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t\right) \quad (171)$$

Fazendo-se  $t = 0$ , o excesso de poropressão inicial médio é:

$$\bar{u}_0 = \Delta\sigma_v \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{4A_1(\alpha)^2}{\alpha^2(n^2 - 1)[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \left[ \frac{1}{1 + 4\alpha^2 n^2 \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right)} \right] \quad (172)$$

A equação (168) pode ainda ser escrita em termos adimensionais. Definindo o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ :

$$T_{rs} = \frac{c_{rs} t}{d_e^2} \quad (173)$$

E definindo o Fator Viscosidade Radial  $V_r$ :

$$V_r = \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \quad (174)$$

Expressa-se a razão  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  a partir da variável adimensional  $\frac{r}{r_e}$  da seguinte forma:

$$\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha n \frac{r}{r_e}\right)}{\alpha[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \left[ \frac{1}{1 + 4\alpha^2 n^2 V_r} \right] \exp\left(-\frac{4\alpha^2 n^2 T_{rs}}{1 + 4\alpha^2 n^2 V_r}\right) \quad (175)$$

### 2.2.1.2 Porcentagem média de adensamento

O valor de  $\frac{de}{dt}$  já havia sido obtido pela equação (148). Integrando em relação ao tempo:

$$e = \frac{\Omega^2}{\Lambda} \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] u + c_0 \quad (176)$$

Onde  $c_0$  é uma função do raio  $r$ .

Substituindo na equação (176) os valores de  $\Omega$  e  $\Lambda$ :

$$e = \frac{\left(\frac{\alpha}{r_w}\right)^2}{\frac{c_{rs}}{\left(\frac{r_w}{\alpha}\right)^2 + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}}} \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] u + c_0 = \left( 1 + 4\alpha^2 n^2 \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \right) a_{vs} u + c_0 \quad (177)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $u \rightarrow 0$  e o índice de vazios apresenta seu valor final  $e_f$ :. Logo:

$$c_0 = e_f \quad (178)$$

A expressão de  $e$  pode ser reescrita então:

$$e = a_{vs} \Delta \sigma_v \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)}{\alpha \left[ n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha) \right]} \exp\left( -\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t \right) + e_f \quad (179)$$

Mas, por definição:

$$a_{vs} \Delta \sigma_v = e_0 - e_f \quad (180)$$

Substituindo:

$$e = (e_0 - e_f) \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)}{\alpha \left[ n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha) \right]} \exp\left( -\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t \right) + e_f \quad (181)$$

Entretanto, a expressão obtida para  $e$  varia ao longo do raio. Para se realizar o cálculo da porcentagem média de adensamento, deve-se encontrar primeiro o índice de vazios médio  $\bar{e}$  ao longo da superfície.

A expressão para  $\bar{e}$  é encontrada integrando  $e$  ao longo do raio do cilindro de solo e dividindo pela área:

$$\bar{e} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} 2\pi r e dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (182)$$

O único termo de  $e$  que varia em  $r$  é  $A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)$ . Todos os outros termos são constantes em  $r$ . Com isso, a integral é:

$$\bar{e} = \frac{(e_0 - e_f) \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-4A_1(\alpha)}{\alpha[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp\left(-\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t\right) \int_{r_w}^{r_e} r A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) dr}{(r_e^2 - r_w^2)} + e_f \quad (183)$$

Como  $A_1(\alpha n) = 0$ , a equação se torna:

$$\bar{e} = (e_0 - e_f) \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{4A_1(\alpha)^2}{\alpha^2(n^2 - 1)[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp\left(-\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t\right) + e_f \quad (184)$$

A porcentagem média de adensamento é definida a partir do índice de vazios médio pela seguinte relação:

$$\bar{U}_r = \frac{e_0 - \bar{e}}{e_0 - e_f} = 1 - \frac{\bar{e} - e_f}{e_0 - e_f} \quad (185)$$

Substituindo a equação (184) na equação (185):

$$\bar{U}_r = 1 - \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{4A_1(\alpha)^2}{\alpha^2(n^2 - 1)[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp\left(-\frac{c_{rs}}{\frac{d_e^2}{4\alpha^2 n^2} + \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}} t\right) \quad (186)$$

A partir do Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  e do Fator Viscosidade Radial  $V_r$ , definidos nas equações (173) e (174), respectivamente, a expressão pode ser reescrita da seguinte forma:



$$\bar{U}_r = 1 - \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots}^{\alpha_\infty} \frac{4A_1(\alpha)^2}{\alpha^2(n^2 - 1)[n^2 A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp\left(-\frac{4\alpha^2 n^2 T_{rs}}{1 + 4\alpha^2 n^2 V_r}\right) \quad (187)$$

### 2.2.1.3 Soluções gráficas

Nas páginas a seguir são apresentadas as isócronas relacionando o excesso de poropressão normalizado  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e o raio adimensional  $\frac{r}{r_e}$ , bem como as curvas relacionando a porcentagem média de adensamento  $\bar{U}_r$  e o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ . Cada figura corresponde a um valor de  $V_r$  diferente, de  $V_r = 0,001$  a  $V_r = 0,1$ , e todas foram calculadas para  $n = 20$ . A equação (175) fornece a expressão de  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e a equação (187) fornece a expressão de  $\bar{U}_r$ .

A título de comparação, também estão plotadas tracejadas as curvas sem viscosidade (Barron, 1948).

Atenta-se para o fato de as curvas de Barron (1948) estarem relacionadas ao Fator Tempo Radial  $T_r$  e não  $T_{rs}$ . No entanto, a solução de Barron (1948) é um caso particular da presente teoria quando  $\eta = 0$  e, neste caso de ausência de viscosidade, tem-se necessariamente que  $a_{vs} = a_v$  (como já discutido no item 2.1). Portanto, os valores de  $T_r$  devem coincidir com os de  $T_{rs}$  para os mesmos tempos  $t$ . Esta consideração também será válida para as isócronas e curvas de porcentagem média de adensamento das teorias a serem desenvolvidas nos itens 2.2.2 e 2.2.3.

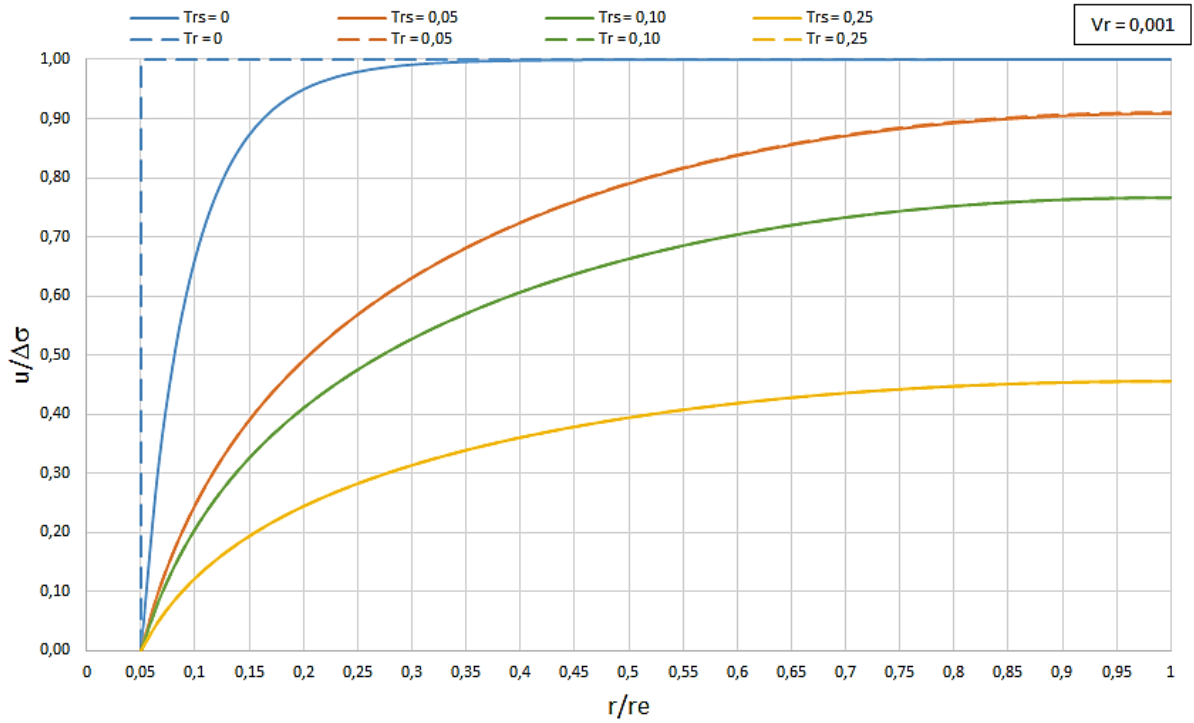


Figura 68 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,001$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

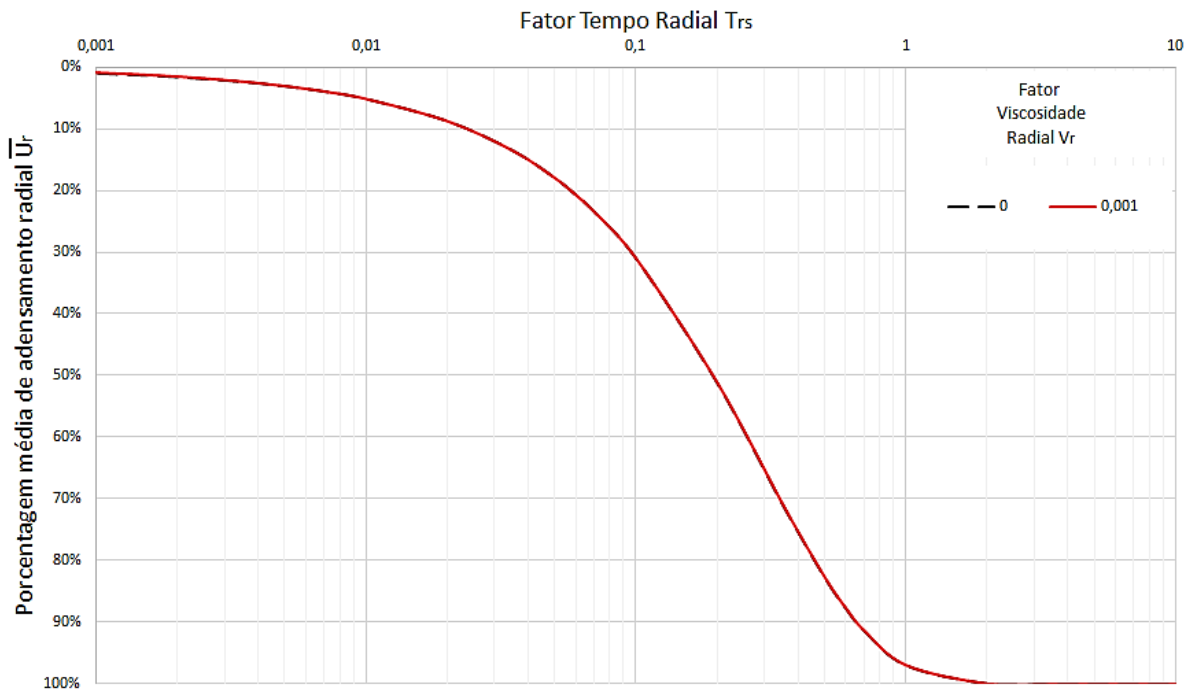


Figura 69 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,001$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

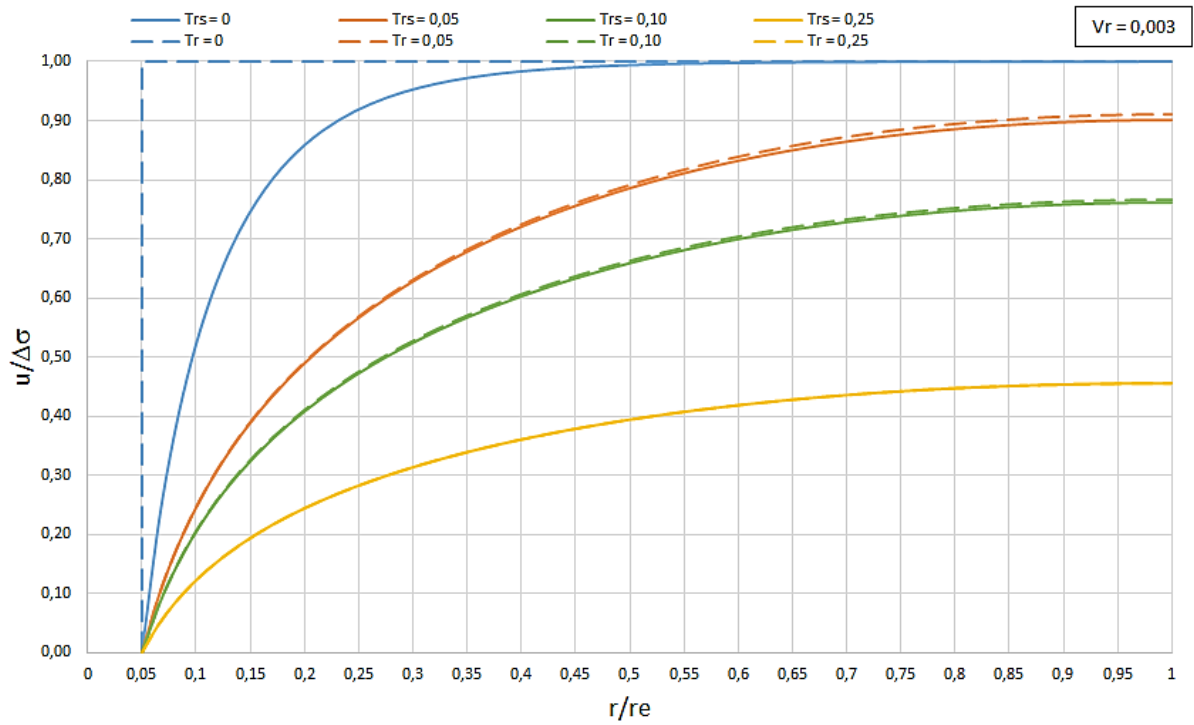


Figura 70 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,003$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

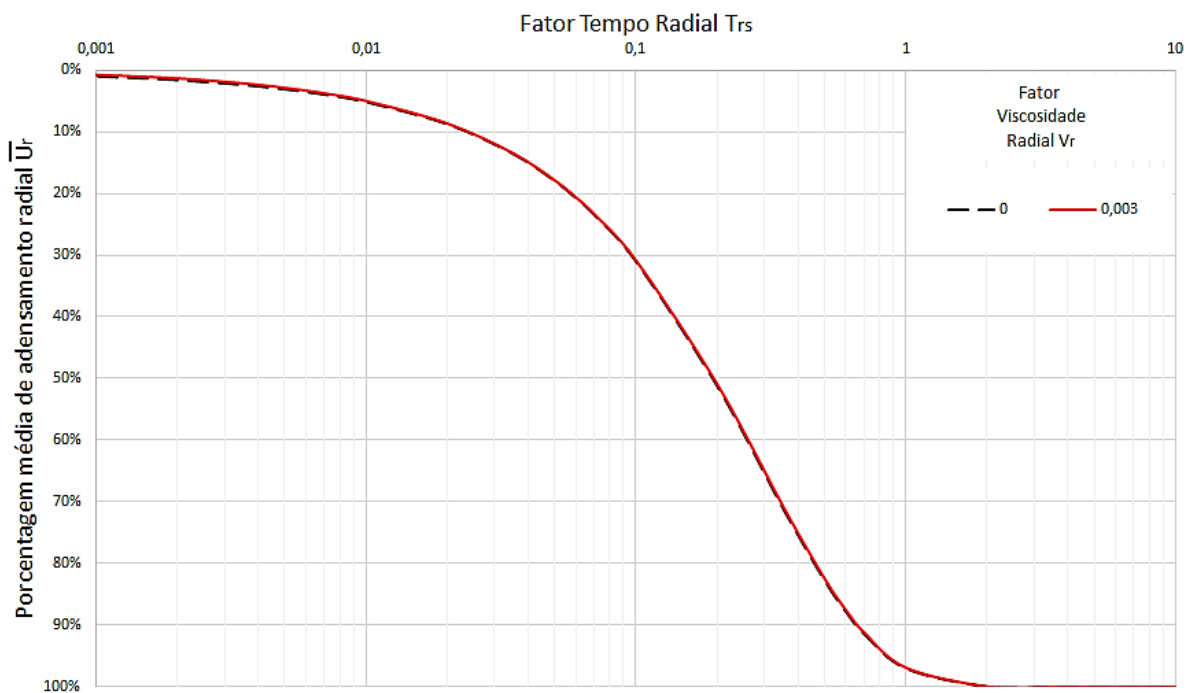


Figura 71 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,003$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

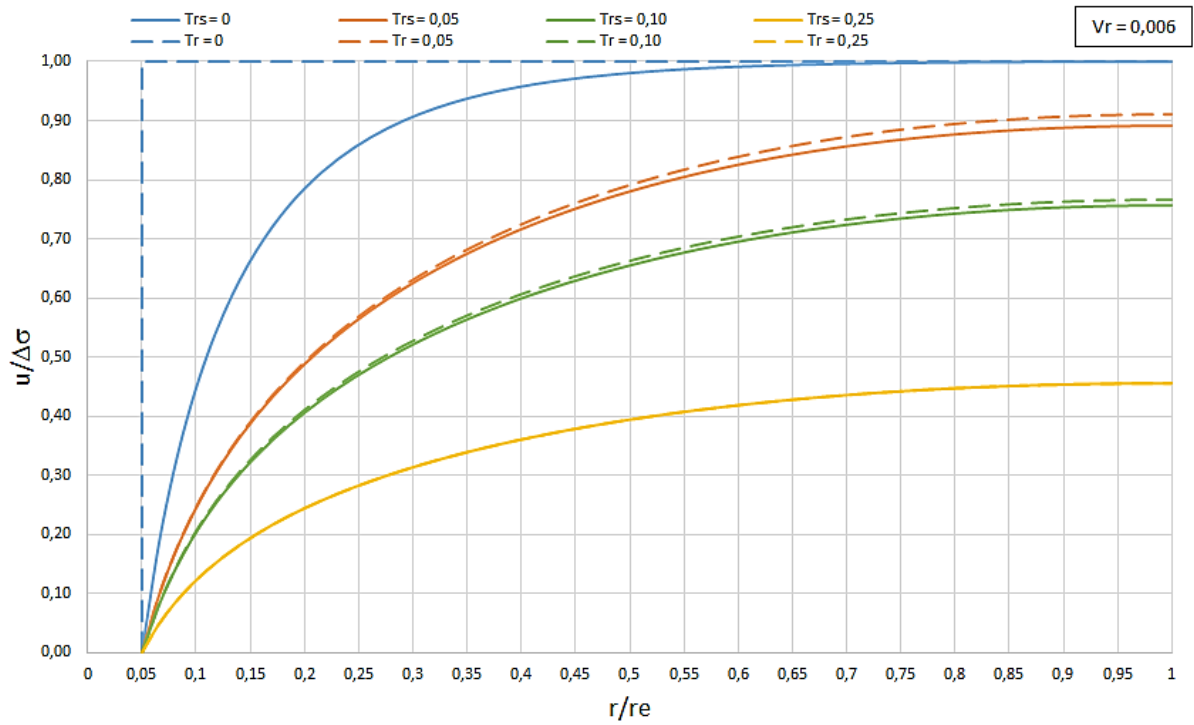


Figura 72 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,006$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

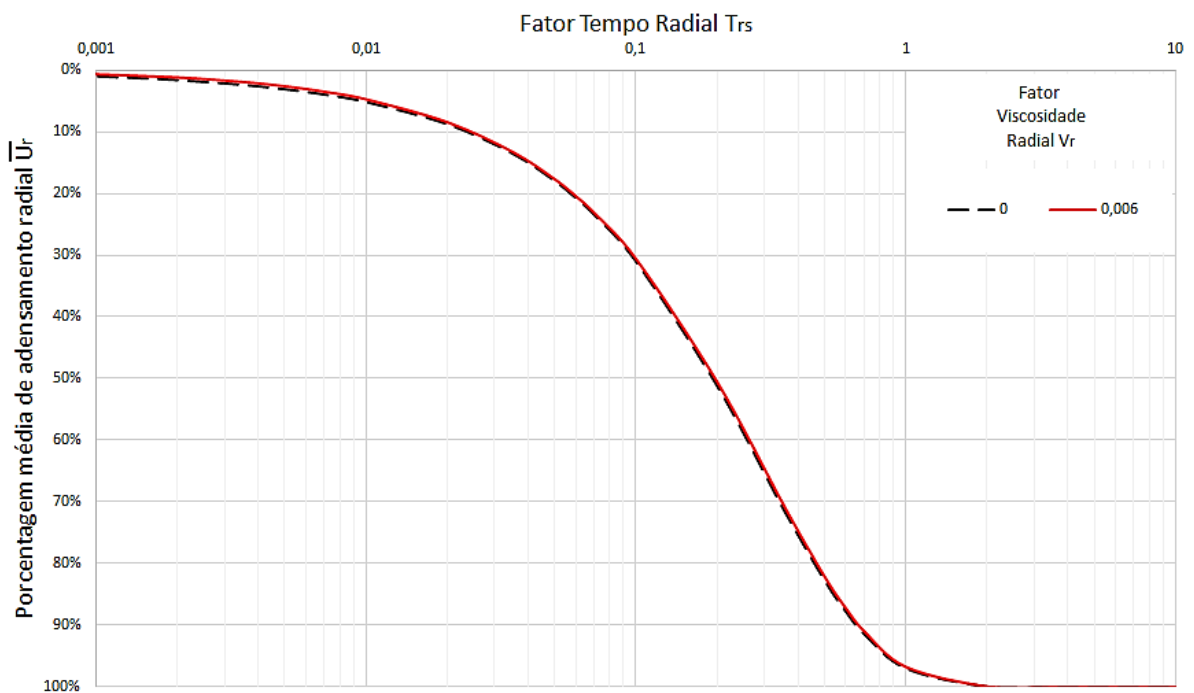


Figura 73 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,006$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

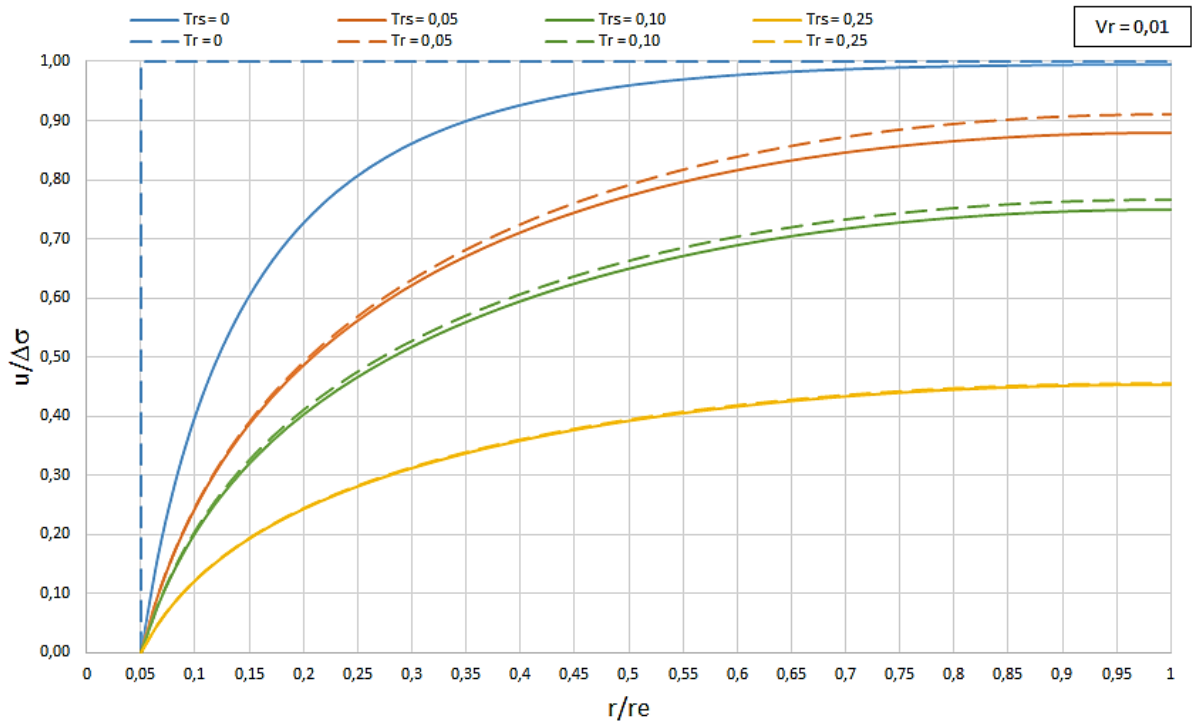


Figura 74 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,01$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

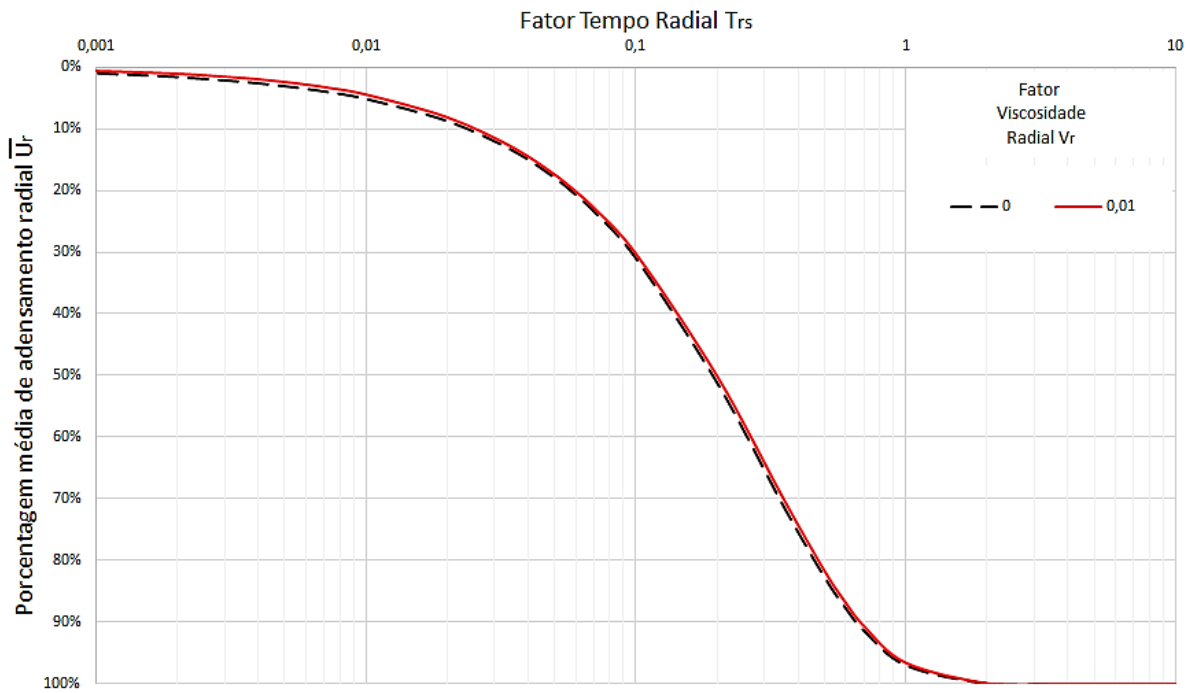


Figura 75 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,01$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

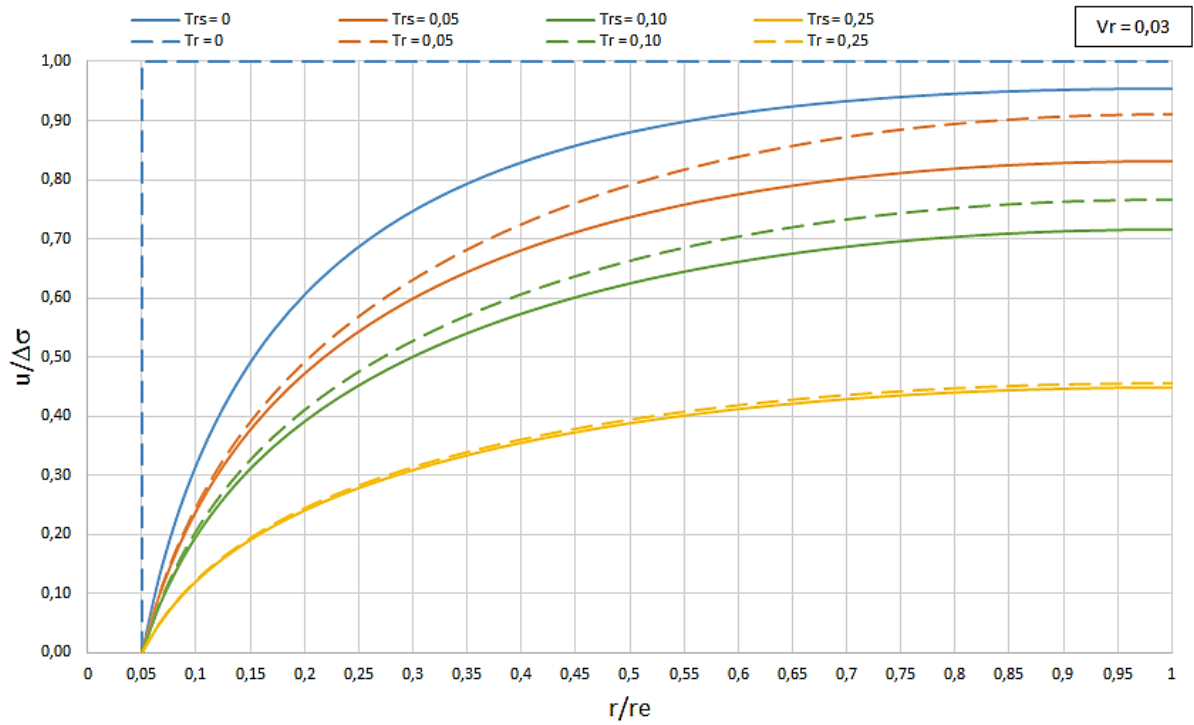


Figura 76 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,03$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

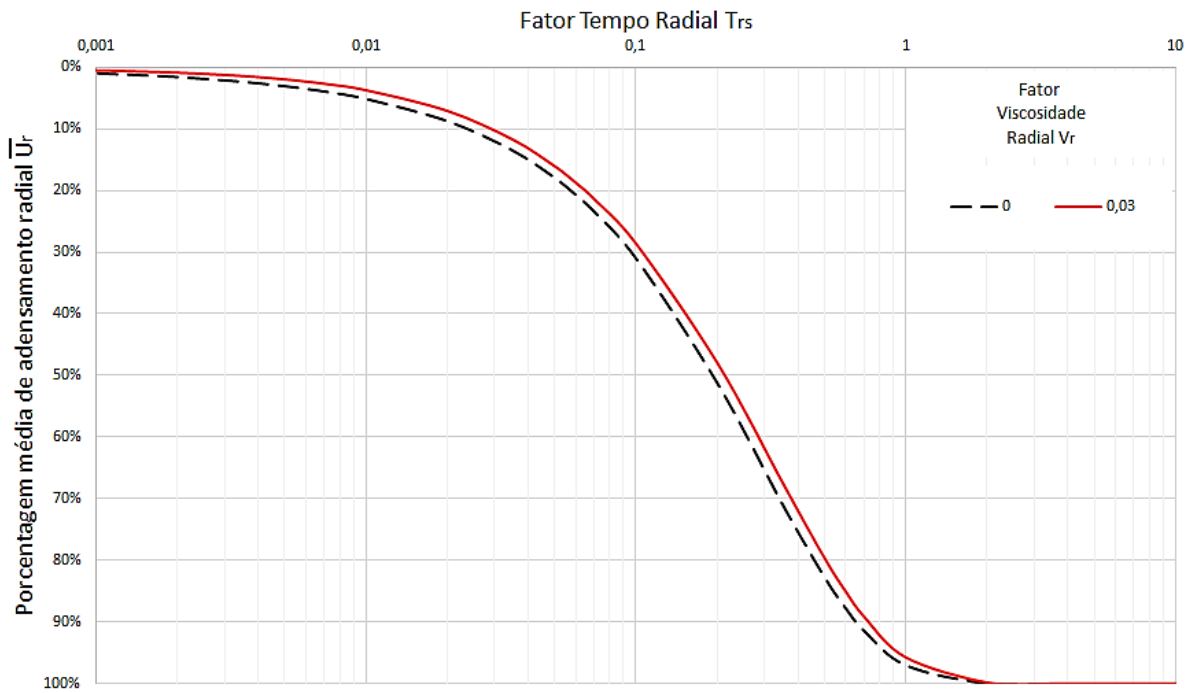


Figura 77 – Percentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,03$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

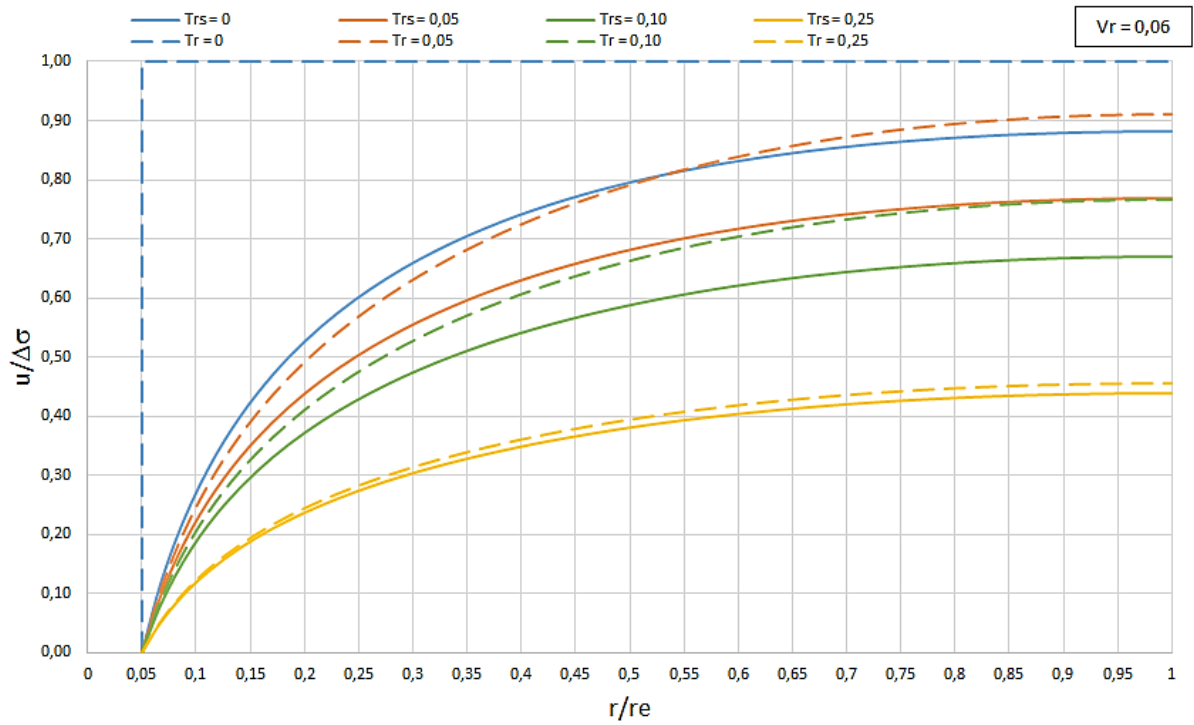


Figura 78 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,06$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

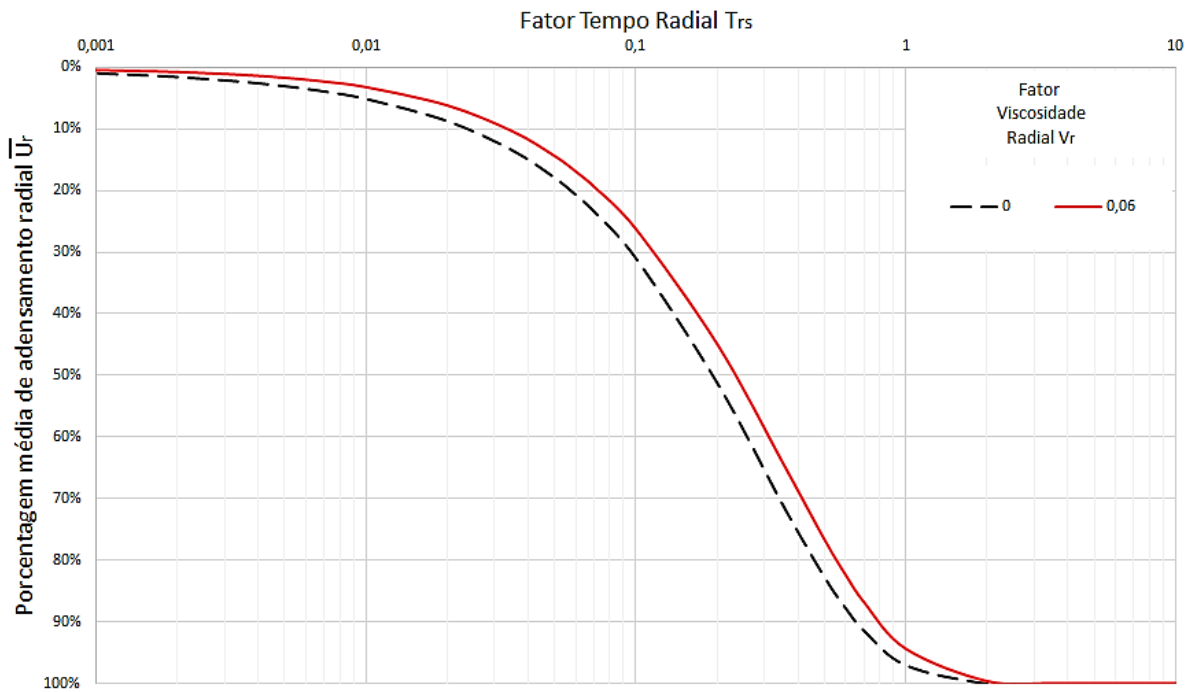


Figura 79 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,06$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

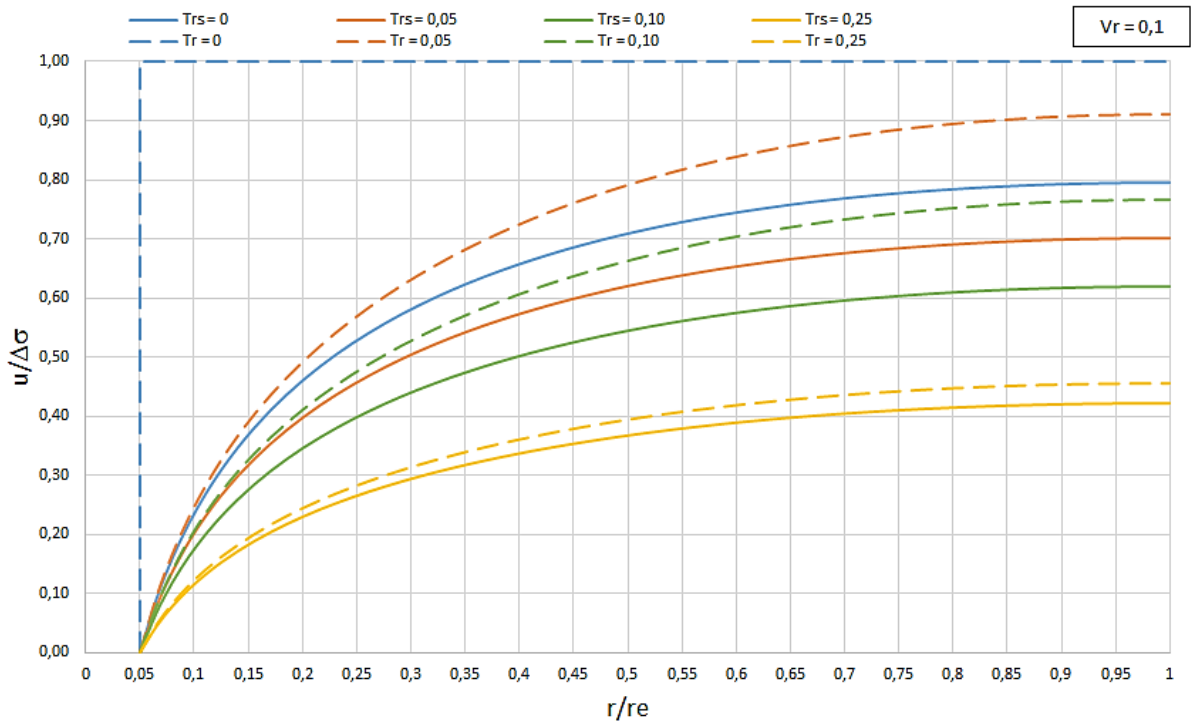


Figura 80 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,1$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

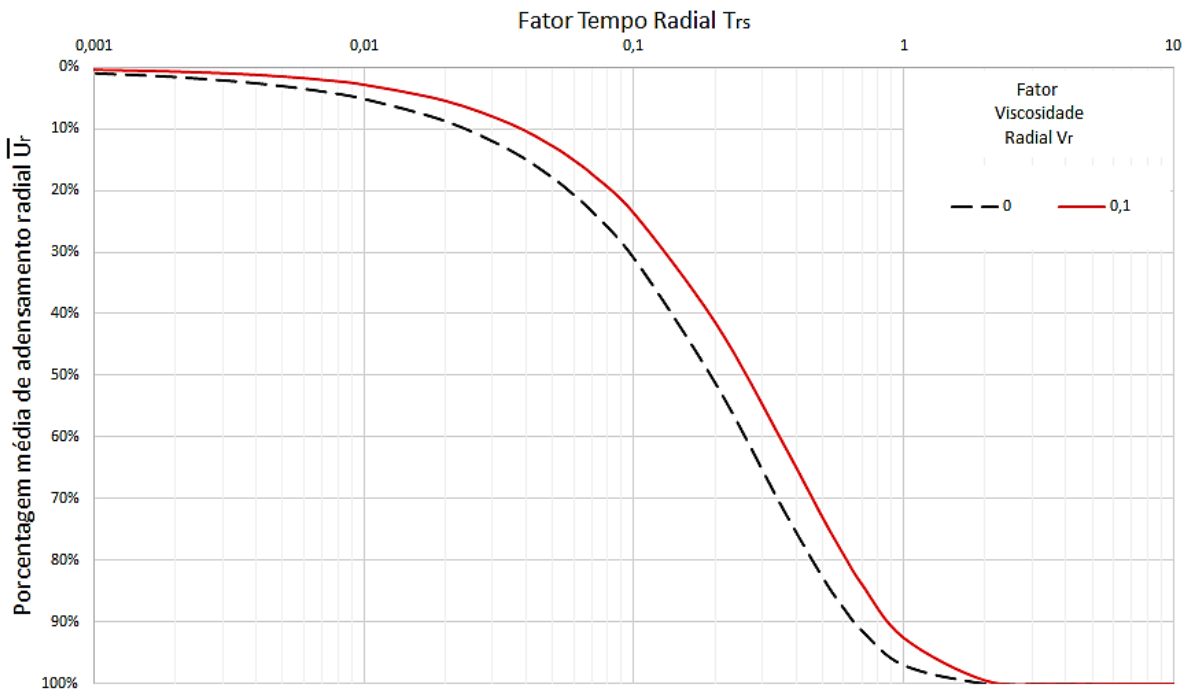


Figura 81 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “free strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,1$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).



### 2.2.2 Deformações verticais iguais (“equal strain”) com coeficiente de viscosidade constante

O processo de arqueamento na condição de deformações verticais iguais redistribui as tensões. Dessa forma, os deslocamentos verticais em todos os pontos da superfície são iguais e, conseqüentemente, não há recalques diferenciais.

Pela hipótese (8), pode-se escrever que:

$$\sigma_v = \sigma'_{vs} + \sigma'_{v\eta} + u \quad (188)$$

Onde  $\sigma_v$  é o acréscimo de tensão total,  $u$  é o excesso de poropressão,  $\sigma'_{vs}$  é a parcela sólido-sólido da tensão efetiva e  $\sigma'_{v\eta}$  é a parcela viscosa da tensão efetiva.

Uma vez que está sendo admitida a condição de deformações verticais iguais, não se pode considerar  $\sigma_v$  constante ao longo do raio. Neste caso, deve se considerar que a resultante do carregamento é constante. Para uma superfície de área  $S$ , pode-se escrever que:

$$\overline{\sigma_v} = \frac{\int_S \sigma_v dS}{S} \quad (189)$$

Pelas equações (188) e (189), escreve-se:

$$\frac{\int_S \sigma_v dS}{S} = \frac{\int_S (\sigma'_{vs} + \sigma'_{v\eta} + u) dS}{S} \quad (190)$$

Que leva a:

$$\overline{\sigma_v} = \overline{\sigma'_{vs}} + \overline{\sigma'_{v\eta}} + \bar{u} \quad (191)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\bar{\sigma}_v}{dt} = \frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} + \frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (192)$$

Como o carregamento é constante ao longo do tempo,  $\frac{d\bar{\sigma}_v}{dt} = 0$  e a equação se reduz a:

$$-\frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} = \frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (193)$$

É necessário encontrar as funções que expressem  $\frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt}$  e  $\frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt}$  para manter o problema apenas com a função do excesso de poropressão.

Pela hipótese (9), admite-se que  $e$  é função de  $\bar{\sigma}'_{vs}$ . Com isso, escreve-se:

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial \bar{\sigma}'_{vs}} \frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} \quad (194)$$

Pela hipótese (10), admite-se uma função relacionando o índice de vazios e a parcela sólido-sólido da tensão efetiva que possa ser representada por uma reta. A constante de proporcionalidade será novamente representada pelo parâmetro  $a_{vs}$ , embora se esteja trabalhando com as médias neste caso. Assim:

$$a_{vs} = -\frac{\partial e}{\partial \bar{\sigma}'_{vs}} \quad (195)$$

Substituindo na equação (194):

$$\frac{de}{dt} = -a_{vs} \frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} \quad (196)$$

Através da equação (193), encontra-se:

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left( \frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right) \quad (197)$$

De acordo com a hipótese (11), a parcela viscosa da tensão efetiva é o produto entre uma função da velocidade de deformação específica e o coeficiente de viscosidade  $\eta$ . Com isso, define-se:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\eta(e) f \left( \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right) = -\eta(e) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (198)$$

Nesta solução será admitido mais uma vez que o parâmetro  $\eta(e)$  é constante ao longo do tempo, representado pelo seu valor médio  $\bar{\eta}$ . Reescrevendo:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\bar{\eta} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (199)$$

Ou, em termos de índice de vazios (conforme a equação (102)):

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\frac{\bar{\eta}}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (200)$$

Derivando a equação (200) no tempo:

$$\frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} = -\frac{\bar{\eta}}{1+e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (201)$$

Substituindo na equação (197), vem:

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left[ \frac{d\bar{u}}{dt} - \left( \frac{\bar{\eta}}{1+e} \right) \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right] \quad (202)$$

Derivando a equação (103) em relação ao tempo:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{1+e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (203)$$

Substituindo as equações (103) e (203) na equação (202), obtém-se:

$$\left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = a_{vs} \left\{ \frac{d\bar{u}}{dt} - \left( \frac{\bar{\eta}}{1+e} \right) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \right\} \quad (204)$$

Simplificando e rearranjando os termos:

$$\left[ \frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} \right] \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (205)$$

Definindo-se o coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$ , admitido constante ao longo do tempo de acordo com a hipótese (7):

$$\frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} = c_{rs} \quad (206)$$

A equação diferencial fica:

$$c_{rs} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (207)$$

A equação (207) é o problema de valor de contorno a ser resolvido.

Comparando a equação para deformações verticais iguais desta tese (equação (207)) com a equação para deformações verticais iguais de Barron (1948) (equação (43)), a única diferença é a parcela  $\left( \frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$ , que representa a influência da viscosidade no fenômeno. É a mesma parcela encontrada na solução para condição de deformações verticais livres (item 2.2.1). Fazendo  $\bar{\eta} = 0$ , as duas equações para deformações verticais iguais ((207) e (43)) se tornam a mesma.

Similarmente à teoria para condição de deformações verticais livres apresentada nesta tese, ao se considerar o efeito viscoso não se pode afirmar que o excesso de poropressão inicial médio  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$  é igual ao acréscimo de tensão total  $\Delta\sigma$ . Como já existe velocidade de deformação em  $t = 0$ , já existe parcela viscosa mobilizada e, conseqüentemente,  $\bar{u}(0) < \Delta\sigma$ .

As condições de contorno necessárias para a resolução do problema são:

- 1) Para qualquer  $t > 0$ ,  $u(r_w, t) = 0$
- 2) Para qualquer  $t > 0$ ,  $\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0$

E a condição inicial é:

- 3) Para o tempo  $t = 0$ ,  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$  (a ser determinado)

### 2.2.2.1 Resolução do problema de valor de contorno

Será utilizada a abordagem da separação de variáveis para resolver o problema. Admitindo que a função excesso de poropressão  $u(r, t)$  seja dada pelo produto:

$$u(r, t) = F(r)G(t) \quad (208)$$

E substituindo na equação (207), vem:

$$c_{rs} \left[ \frac{1}{r} F'(r)G(t) + F''(r)G(t) \right] + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \left[ \frac{1}{r} F'(r)G'(t) + F''(r)G'(t) \right] - \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (209)$$

Rearranjando os termos:

$$\left[ \frac{1}{r} F'(r) + F''(r) \right] \left[ c_{rs}G(t) + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) G'(t) \right] - \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (210)$$

E finalmente:

$$\frac{1}{r} F'(r) + F''(r) = \frac{\frac{d\bar{u}}{dt}}{c_{rs}G(t) + \left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right) G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (211)$$

Onde  $\Omega$  é uma constante. Como as variáveis  $r$  e  $t$  são independentes, a equação (211) mostra que elas se separam.

O problema se resume a encontrar uma solução para uma equação diferencial de variável  $r$  (raio) e outra equação diferencial de variável  $t$  (tempo). Inicialmente será resolvida a equação relacionada ao raio, que é:

$$\frac{1}{r} F'(r) + F''(r) = -\frac{1}{\Omega} \quad (212)$$

Multiplicando-se todos os termos por  $r$ :

$$F'(r) + rF''(r) = -\frac{1}{\Omega} r \quad (213)$$

O lado esquerdo da igualdade pode ser transformado na derivada de um produto, da seguinte forma:

$$[rF'(r)]' = -\frac{1}{\Omega} r \quad (214)$$

Integrando ambos os membros da equação:

$$rF'(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r^2}{2} + c_1 \quad (215)$$

Onde  $c_1$  é uma constante.

Dividindo todos os membros por  $r$ , vem:

$$F'(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r} \quad (216)$$

Integrando novamente ambos os lados da equação:

$$F(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2 \quad (217)$$

Onde  $c_2$  é outra constante.

Pela 1ª condição de contorno, tem-se que  $u(r_w, t) = 0$ . Pela equação (208), conclui-se que  $F(r_w)$  deve ser nulo. Sendo assim:

$$F(r_w) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r_w^2}{4} + c_1 \ln r_w + c_2 = 0 \quad (218)$$

Donde:

$$c_2 = -\left(-\frac{1}{\Omega} \frac{r_w^2}{4} + c_1 \ln r_w\right) \quad (219)$$

Substituindo na equação (217):

$$F(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} + c_1 \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) \quad (220)$$

De acordo com a 2ª condição de contorno, tem-se que  $\left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right|_{r=r_e} = 0$ . Pela equação (208), conclui-se que  $F'(r_e)$  deve ser nulo. A partir da equação (216), escreve-se:

$$F'(r_e) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r_e}{2} + \frac{c_1}{r_e} = 0 \quad (221)$$

Com isso, obtém-se:

$$c_1 = \frac{1}{\Omega} \frac{r_e^2}{2} \quad (222)$$

Finalmente, substituindo na equação (220):

$$F(r) = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \quad (223)$$

Com a resolução de  $F(r)$ , agora se busca a função  $G(t)$ .

Sendo  $\bar{u}(t)$  o excesso de poropressão médio em uma superfície, escreve-se:

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_{r_w}^{r_e} u(r, t) 2\pi r dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (224)$$

Através da equação (208), escreve-se:

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_{r_w}^{r_e} F(r) G(t) 2\pi r dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (225)$$

Como  $G(t)$  depende apenas do tempo, ele se torna uma constante perante a integral no raio. Simplificando:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t) \int_{r_w}^{r_e} F(r) r dr}{\Omega (r_e^2 - r_w^2)} \quad (226)$$

Substituindo a função  $F(r)$  obtida na equação (223):

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t) \int_{r_w}^{r_e} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] r dr}{\Omega (r_e^2 - r_w^2)} \quad (227)$$



A equação (227) pode ser reescrita desenvolvendo-se os termos da integral da seguinte forma:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \frac{\int_{r_w}^{r_e} \left[ \frac{r_e^2}{2} r \ln(r) - \frac{r_e^2}{2} \ln(r_w) r - \frac{r^3}{4} + \frac{r_w^2}{4} r \right] dr}{r_e^2 - r_w^2} \quad (228)$$

Sabendo-se que:

$$\int r \ln(r) dr = r^2 \left[ \frac{\ln(r)}{2} - \frac{1}{4} \right] \quad (229)$$

Resolve-se a equação (228), obtendo-se:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \frac{\left\{ \frac{r_e^2}{2} r^2 \left[ \frac{\ln(r)}{2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{r_e^2}{4} \ln(r_w) r^2 - \frac{r^4}{16} + \frac{r_w^2}{8} r^2 \right\}_{r_w}^{r_e}}{r_e^2 - r_w^2} \quad (230)$$

Que resulta em:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega(r_e^2 - r_w^2)} \left\{ \frac{r_e^4}{2} \left[ \frac{\ln(r_e)}{2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{r_e^2 r_w^2}{2} \left[ \frac{\ln(r_w)}{2} - \frac{1}{4} \right] - \frac{r_e^4}{4} \ln(r_w) \right. \\ \left. + \frac{r_e^2 r_w^2}{2} \ln(r_w) - \frac{r_e^4}{16} + \frac{r_w^4}{16} + \frac{r_e^2 r_w^2}{8} - \frac{r_w^4}{8} \right\} \quad (231)$$

Desenvolvendo:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega(r_e^2 - r_w^2)} \left\{ \frac{r_e^4}{4} \ln(r_e) - \frac{r_e^4}{8} - \frac{r_e^2 r_w^2}{4} \ln(r_w) + \frac{r_e^2 r_w^2}{8} - \frac{r_e^4}{4} \ln(r_w) \right. \\ \left. + \frac{r_e^2 r_w^2}{4} \ln(r_w) - \frac{r_e^4}{16} + \frac{r_w^4}{16} + \frac{r_e^2 r_w^2}{8} - \frac{r_w^4}{8} \right\} \quad (232)$$

Simplificando:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \left\{ \frac{\frac{r_e^4}{4} \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) + \frac{r_e^2 r_w^2}{4} - \frac{3r_e^4}{16} - \frac{r_w^4}{16}}{r_e^2 - r_w^2} \right\} \quad (233)$$

Definindo:

$$n = \frac{r_e}{r_w} \quad (234)$$

A equação (233) se torna:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t) r_w^2}{\Omega} \left\{ \frac{n^4 \ln(n) + n^2 - \frac{3n^4}{4} - \frac{1}{4}}{n^2 - 1} \right\} \quad (235)$$

Separando o termo logaritmo do polinômio, a expressão pode ser simplificada ainda mais:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t) r_w^2}{\Omega} \left\{ \frac{n^4 \ln(n)}{n^2 - 1} - \frac{3n^2 - 1}{4} \right\} \quad (236)$$

Se o diâmetro de influência  $d_e$  dos drenos é definido por:

$$d_e = 2r_e = 2nr_w \quad (237)$$

A equação (237) se transforma em:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t) d_e^2}{\Omega} \left\{ \frac{n^2 \ln(n)}{n^2 - 1} - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \right\} \quad (238)$$

Definindo:

$$f(n) = \frac{n^2 \ln(n)}{n^2 - 1} - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (239)$$

Obtém-se:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n) d_e^2}{8} G(t) \quad (240)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n) d_e^2}{8} G'(t) \quad (241)$$

De acordo com a equação (211):

$$\frac{\frac{d\bar{u}}{dt}}{c_{rs}G(t) + \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}\right) G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (242)$$

Substituindo o valor de  $\frac{d\bar{u}}{dt}$  obtido na equação (241):

$$\frac{\frac{1}{\Omega} \frac{f(n) d_e^2}{8} G'(t)}{c_{rs}G(t) + \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}\right) G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (243)$$

Simplificando:

$$c_{rs}G(t) + \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}\right) G'(t) = -\frac{f(n) d_e^2}{8} G'(t) \quad (244)$$

Donde se obtém a seguinte equação diferencial:

$$G'(t) - \left[ \frac{-c_{rs}}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right)} \right] G(t) = 0 \quad (245)$$

Definindo:

$$\gamma = \frac{-c_{rs}}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right)} \quad (246)$$

A solução da equação é:

$$G(t) = c_3 e^{\gamma t} \quad (247)$$

Onde  $c_3$  é uma constante.

Substituindo na expressão de  $\bar{u}(t)$  (equação (240)):

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n)d_e^2}{8} c_3 e^{\gamma t} \quad (248)$$

Pela condição inicial, tem-se que  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$ . Assim:

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n)d_e^2}{8} c_3 = \bar{u}_0 \quad (249)$$

Donde:

$$c_3 = \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} \quad (250)$$

A expressão de  $\bar{u}(t)$  se torna:

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 e^{\gamma t} \quad (251)$$

E o valor de  $G(t)$  é obtido pela equação (247):

$$G(t) = \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \quad (252)$$

Finalmente, a expressão de  $u(r, t)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$u(r, t) = F(r)G(t) = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \quad (253)$$

Ou, simplificando:

$$u(r, t) = \frac{4\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \left[ r_e^2 \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{2} \right] \quad (254)$$

O valor de  $\bar{u}_0$  pode ser determinado a partir de  $\overline{\sigma'_{v\eta}}$ . Derivando-se a equação (254) em relação ao raio para se obter  $\frac{\partial u}{\partial r}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \left( \frac{r_e^2 - r^2}{r} \right) \quad (255)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{4\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \left( \frac{-r_e^2 - r^2}{r^2} \right) \quad (256)$$

Substituindo as equações (255) e (256) na equação (103):

$$\left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) \frac{1}{r} \frac{4\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \left( \frac{r_e^2 - r^2}{r} \right) + \left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) \frac{4\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \left( \frac{-r_e^2 - r^2}{r^2} \right) = \frac{1}{1 + e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (257)$$

Simplificando:

$$\frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = - \left( \frac{k_r}{\gamma_w} \right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \quad (258)$$

Substituindo a equação (258) na equação (200):

$$\overline{\sigma'_{v\eta}}(t) = \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} e^{\gamma t} \quad (259)$$

No instante  $t = 0$ , tem-se:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}}(0) = \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \quad (260)$$

Pela equação (191), faz-se:

$$\overline{\sigma}_v(0) = \overline{\sigma'_{vs}}(0) + \overline{\sigma'_{v\eta}}(0) + \bar{u}(0) \quad (261)$$

Seja  $\Delta\sigma_v$  a magnitude do acréscimo de tensão total aplicado. Sendo  $u_0$  o valor de  $\bar{u}$  no instante inicial e sabendo-se que não existe parcela sólido-sólido em  $t = 0$ , pois ainda não há deformação, escreve-se:

$$\Delta\sigma_v = 0 + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} + \bar{u}_0 \quad (262)$$

Donde se encontra:

$$\bar{u}_0 = \frac{\frac{f(n)d_e^2}{8}}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right)} \Delta\sigma_v \quad (263)$$

E, finalmente, substituindo na equação (254):

$$u(r, t) = \frac{4\Delta\sigma_v}{f(n)d_e^2 + 8\left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right)} e^{\gamma t} \left[ r_e^2 \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{2} \right] \quad (264)$$

Definindo o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ :

$$T_{rs} = \frac{c_{rs}t}{d_e^2} \quad (265)$$

E definindo o Fator Viscosidade Radial  $V_r$ :

$$V_r = \frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \quad (266)$$

A razão  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  é expressa a partir da variável adimensional  $\frac{r}{r_e}$ :

$$\frac{u(r, t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_r} \left[ \ln\left(n \frac{r}{r_e}\right) - \frac{\left(\frac{r}{r_e}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{2} \right] \exp\left(\frac{-T_{rs}}{\frac{f(n)}{8} + V_r}\right) \quad (267)$$

### 2.2.2.2 Porcentagem média de adensamento

Substituindo a equação (263) na equação (258), obtém-se:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{\Delta\sigma_v}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right)} e^{\gamma t} \quad (268)$$

Integrando em relação ao tempo:

$$e = - \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{\Delta\sigma_v}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right)} e^{\gamma t} + c_0 \quad (269)$$

Onde  $c_0$  é uma constante.

Substituindo na equação (269) o valor de  $Y$  definido na equação (246):

$$e = \frac{1}{c_{rs}} \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \Delta\sigma_v e^{\gamma t} + c_0 \quad (270)$$

Substituindo agora o valor de  $c_{rs}$  definido na equação (206):

$$e = a_{vs} \Delta\sigma_v e^{\gamma t} + c_0 \quad (271)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , o índice de vazios apresenta seu valor final  $e_f$ . Sendo  $Y$  negativo, a exponencial cai a zero. Logo:

$$c_0 = e_f \quad (272)$$

Mas, por definição:

$$a_{vs} \Delta\sigma_v = e_0 - e_f \quad (273)$$

Substituindo as equações (273) e (272) na equação (271):

$$e = (e_0 - e_f) e^{\gamma t} + e_f \quad (274)$$

A porcentagem média de adensamento no caso de deformações verticais iguais é definida a partir do índice de vazios pela seguinte relação:

$$\bar{U}_r = \frac{e_0 - e}{e_0 - e_f} \quad (275)$$

Substituindo a equação (274) na equação (275):



$$\bar{U}_r = \frac{(e_0 - e_f)(1 - e^{Yt})}{e_0 - e_f} = 1 - \exp \left[ \frac{-c_{rs}t}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w}\right)} \right] \quad (276)$$

Utilizando-se o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  e do Fator Viscosidade Radial  $V_r$ , definidos nas equações (265) e (266), respectivamente, a expressão de pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\bar{U}_r = 1 - \exp \left[ \frac{-8T_{rs}}{f(n) + 8V_r} \right] \quad (277)$$

### 2.2.2.3 Soluções gráficas

Nas páginas a seguir são apresentadas as isócronas relacionando o excesso de poropressão normalizado  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e o raio adimensional  $\frac{r}{r_e}$ , assim como as curvas relacionando a porcentagem média de adensamento  $\bar{U}_r$  e o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ . Cada figura corresponde a um valor de  $V_r$  diferente, de  $V_r = 0,001$  a  $V_r = 0,1$ , e todas foram calculadas para  $n = 20$ . A equação (267) fornece a expressão de  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e a equação (277) fornece a expressão de  $\bar{U}_r$ .

A título de comparação, também estão plotadas tracejadas as curvas sem viscosidade (Barron, 1948).

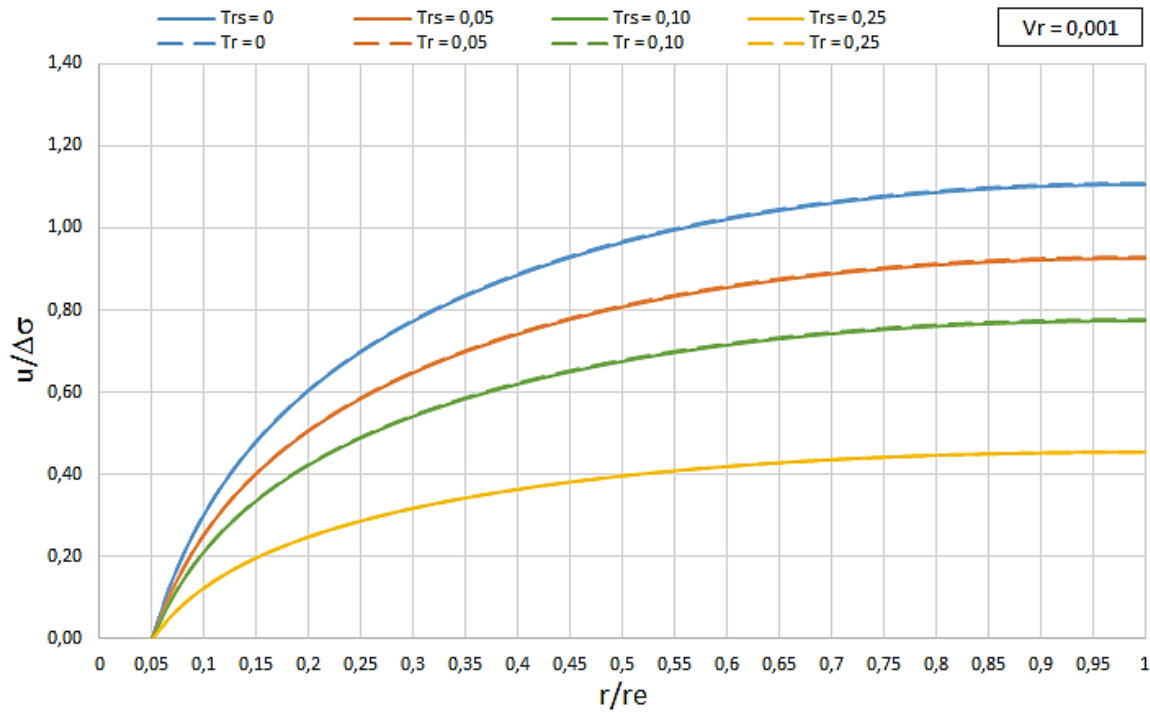


Figura 82 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,001$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

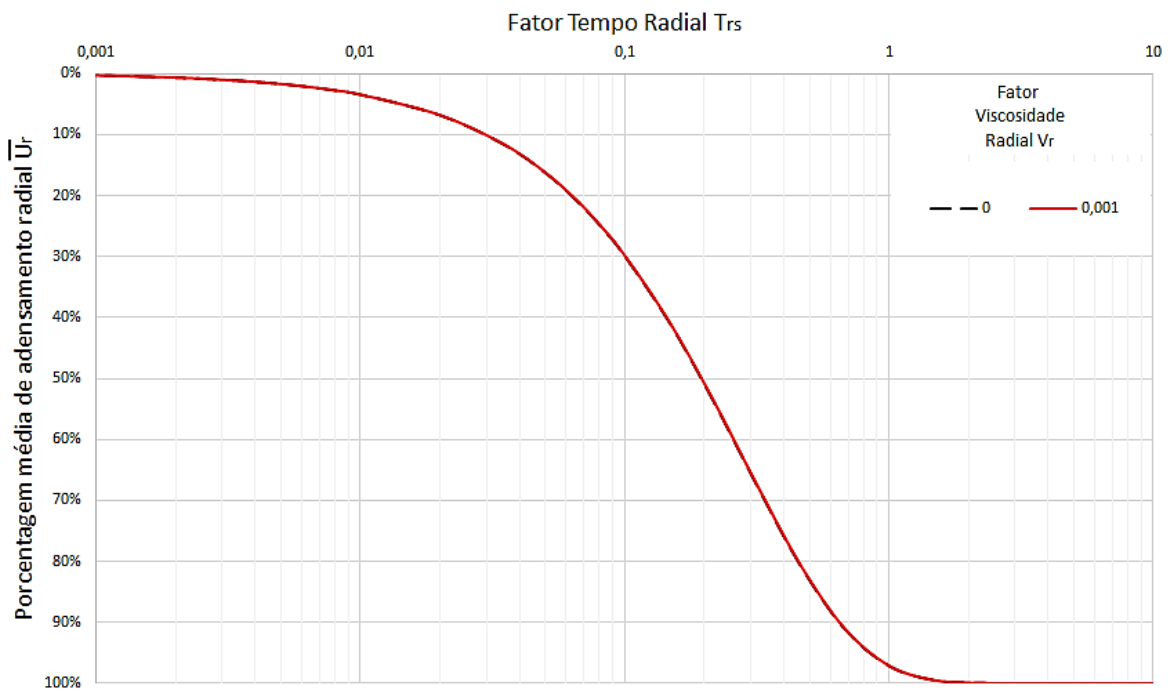


Figura 83 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,001$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

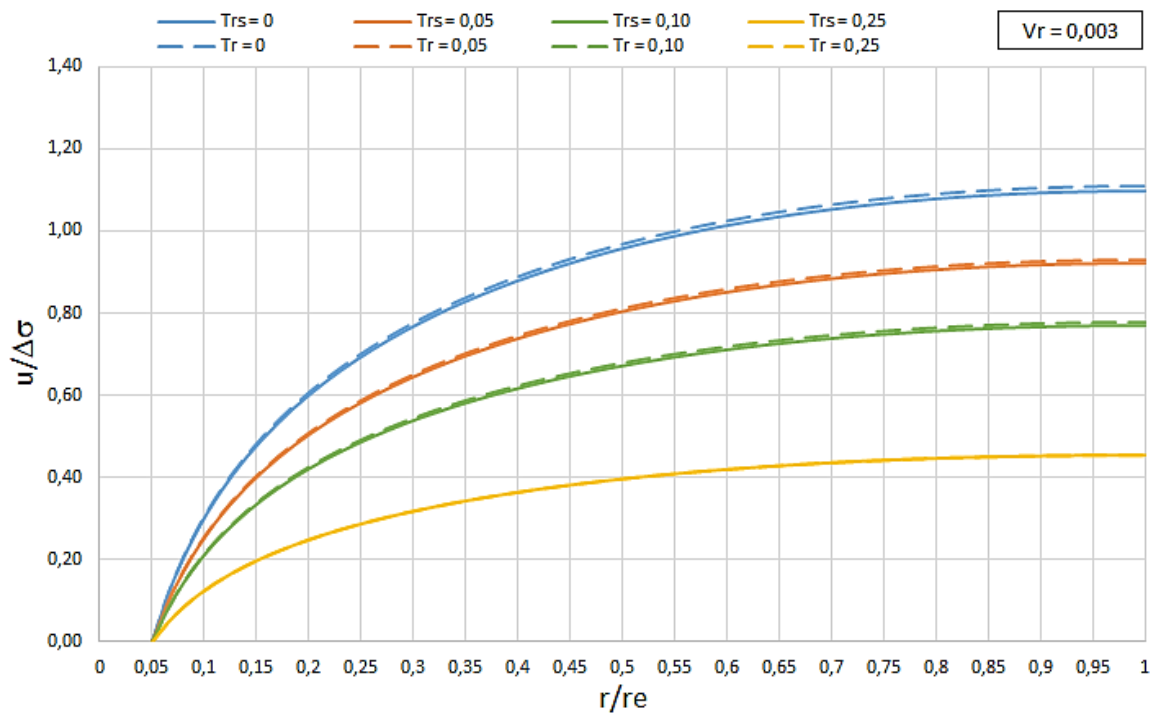


Figura 84 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,003$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

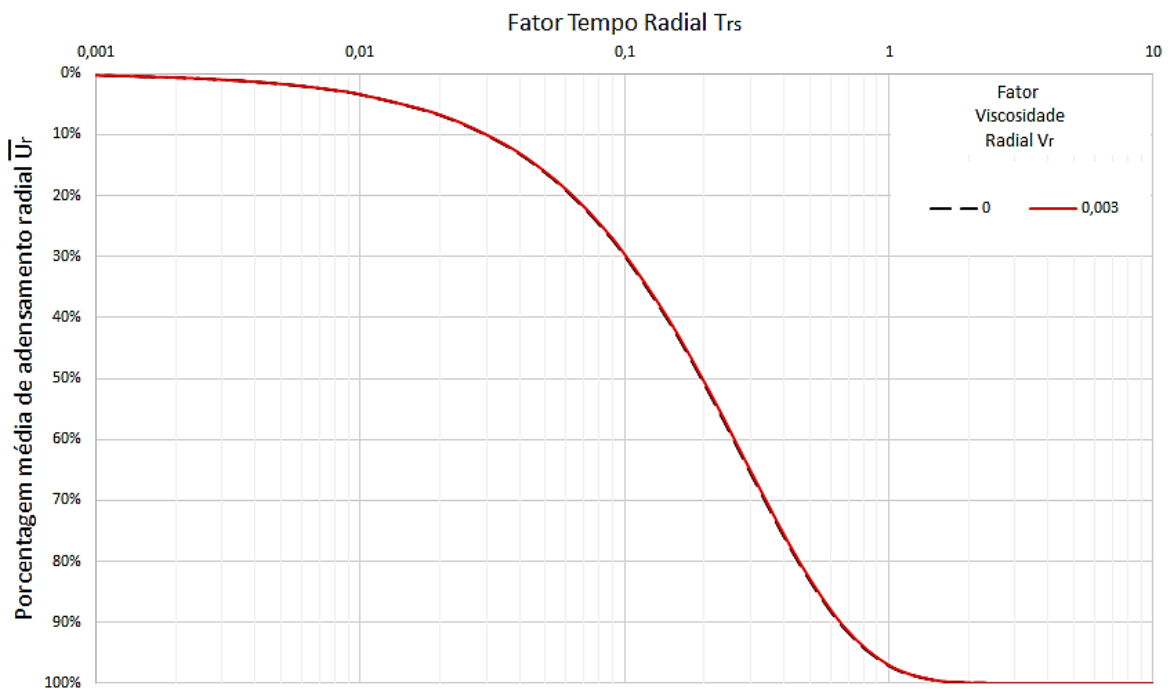


Figura 85 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,003$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

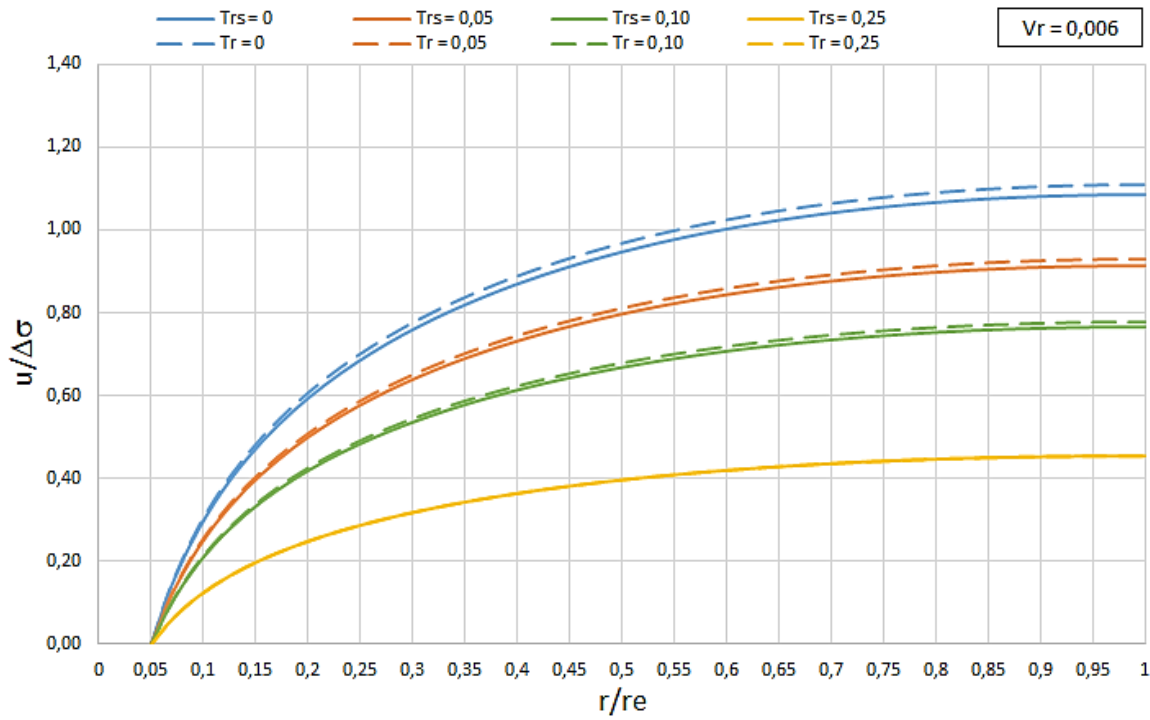


Figura 86 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,006$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

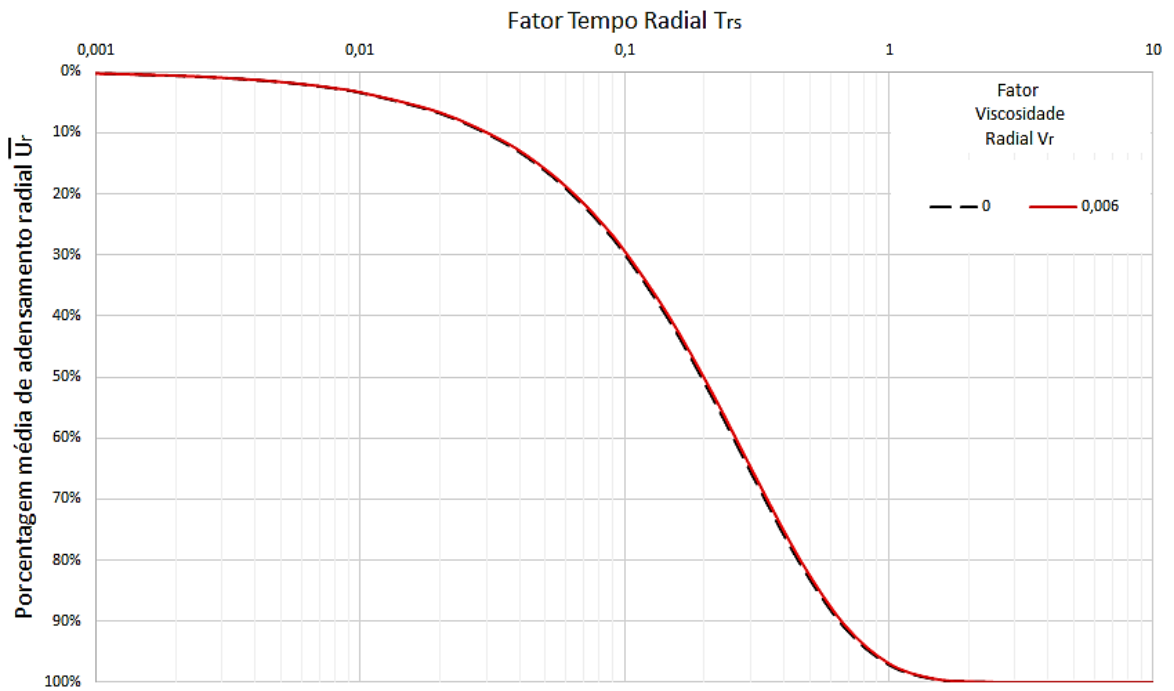


Figura 87 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,006$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

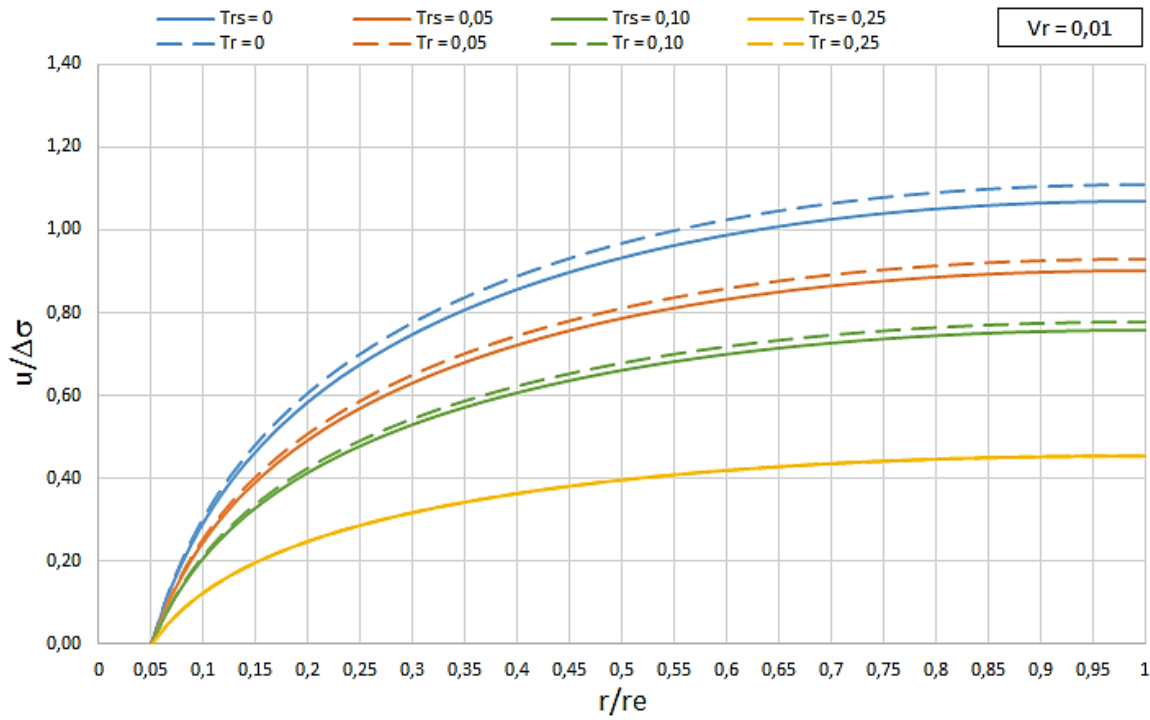


Figura 88 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,01$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

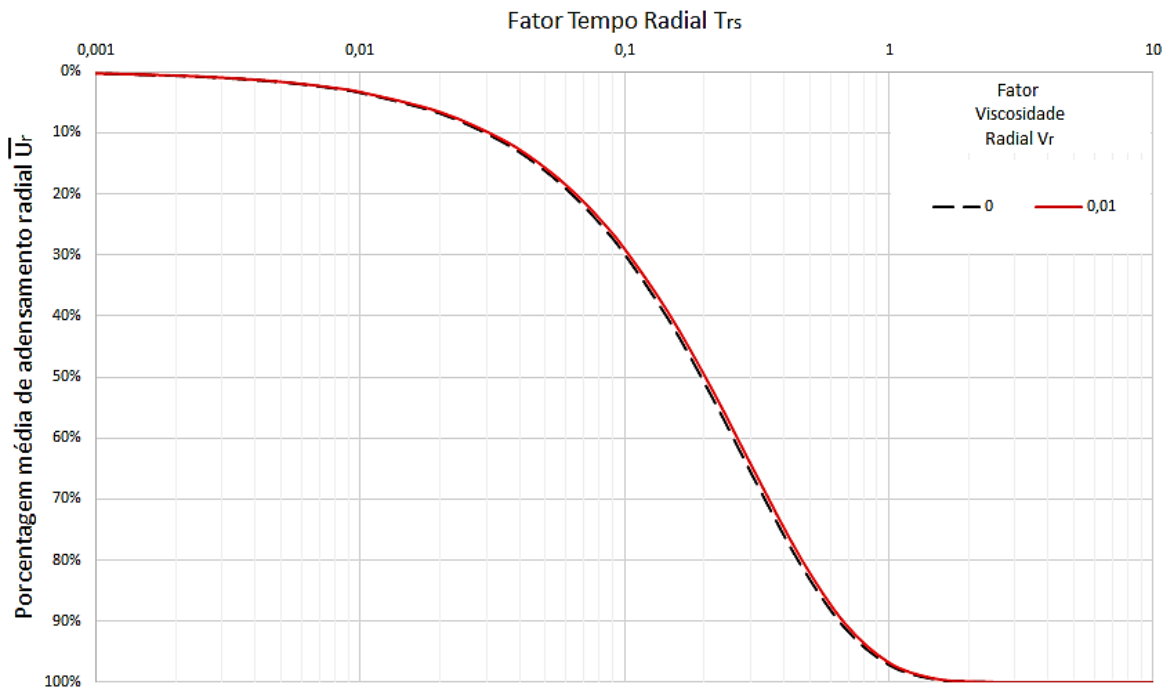


Figura 89 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,01$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

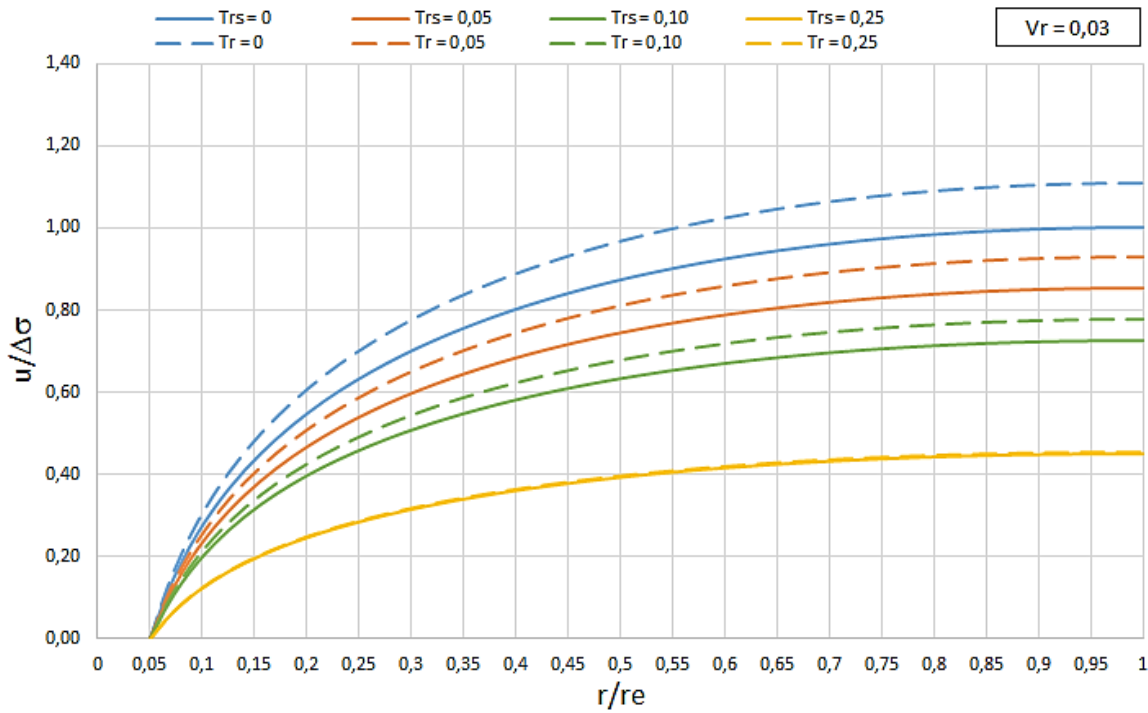


Figura 90 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,03$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

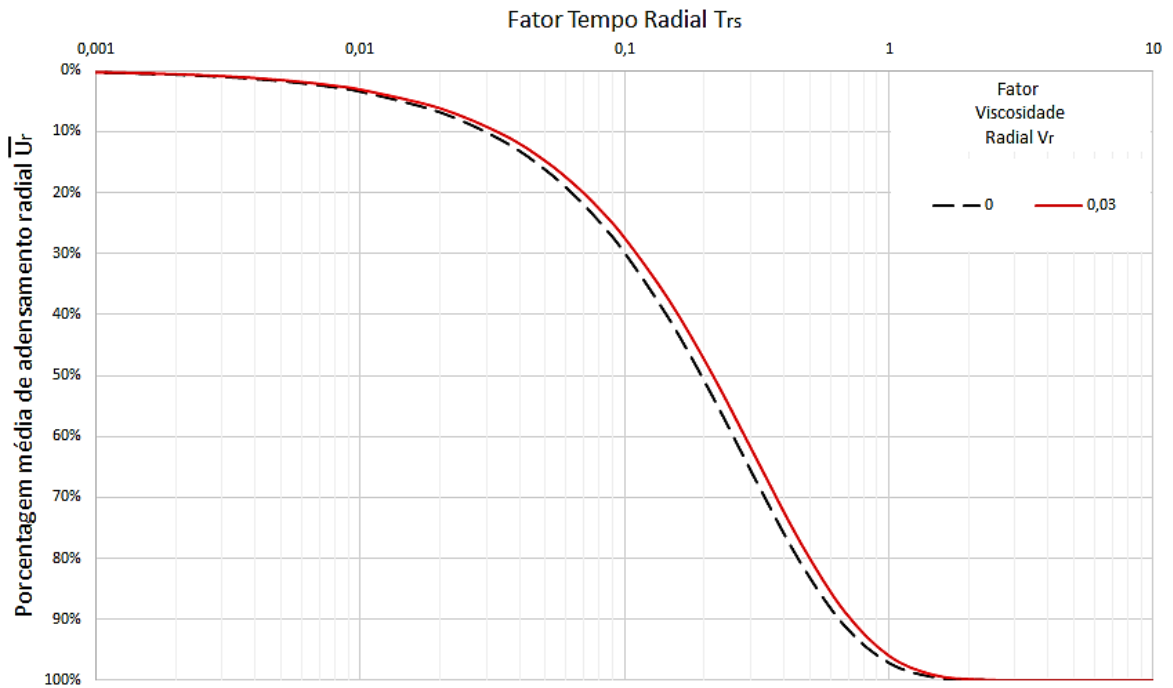


Figura 91 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,03$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

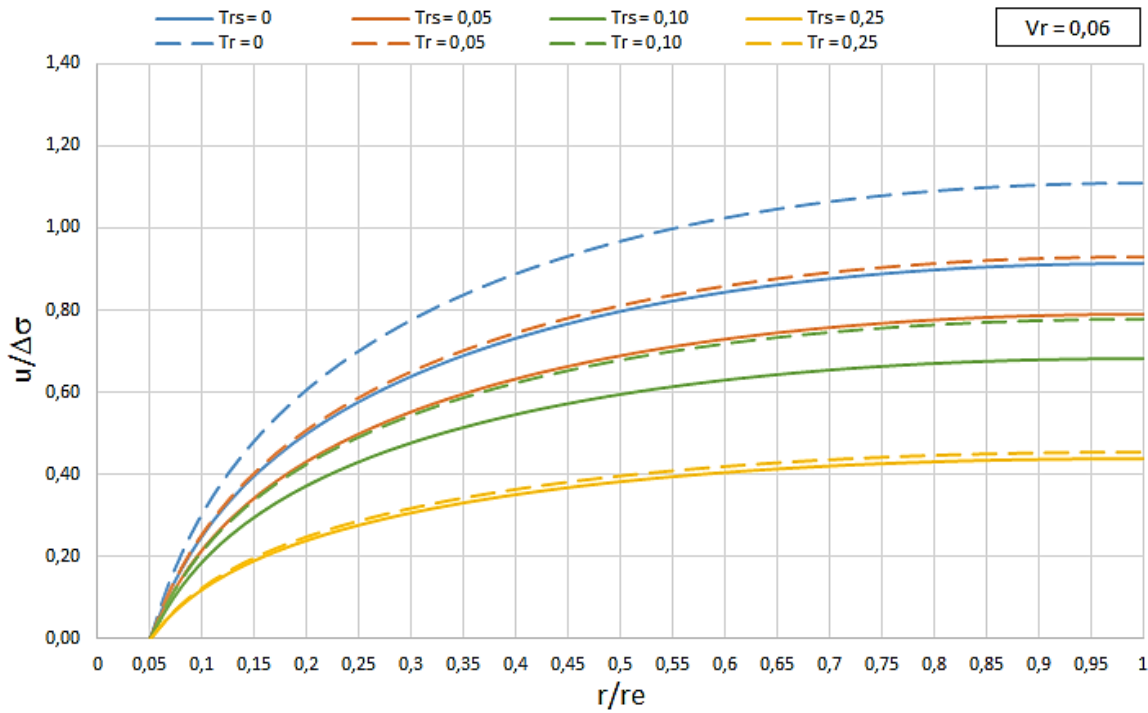


Figura 92 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,06$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

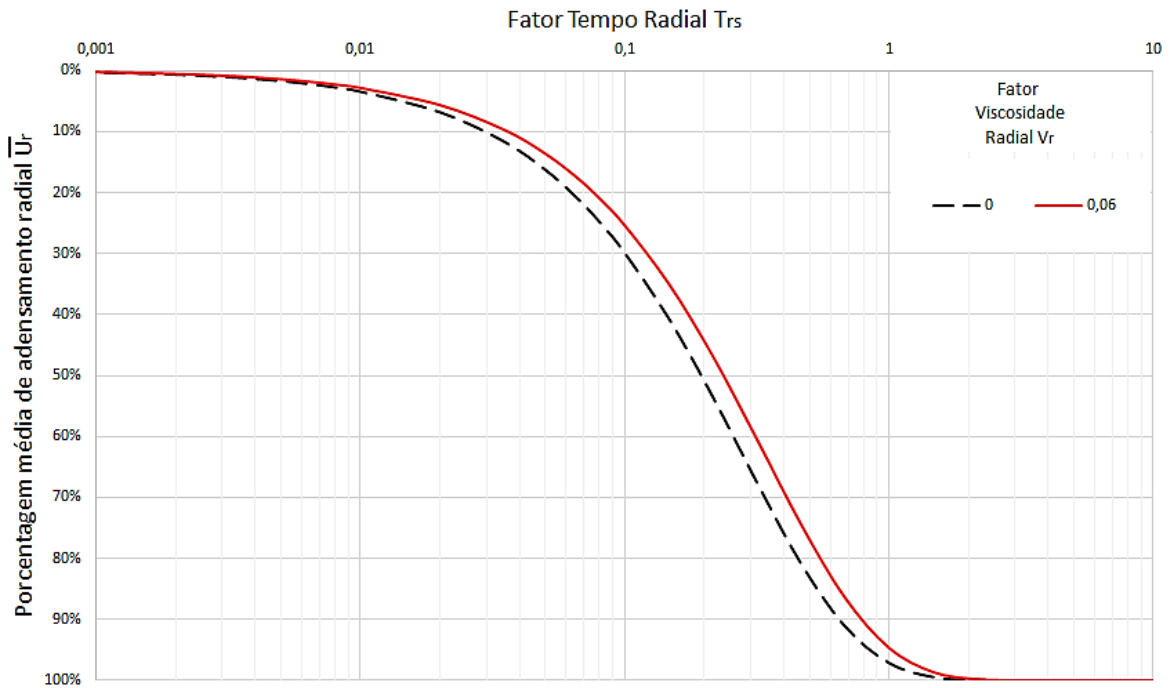


Figura 93 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,06$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

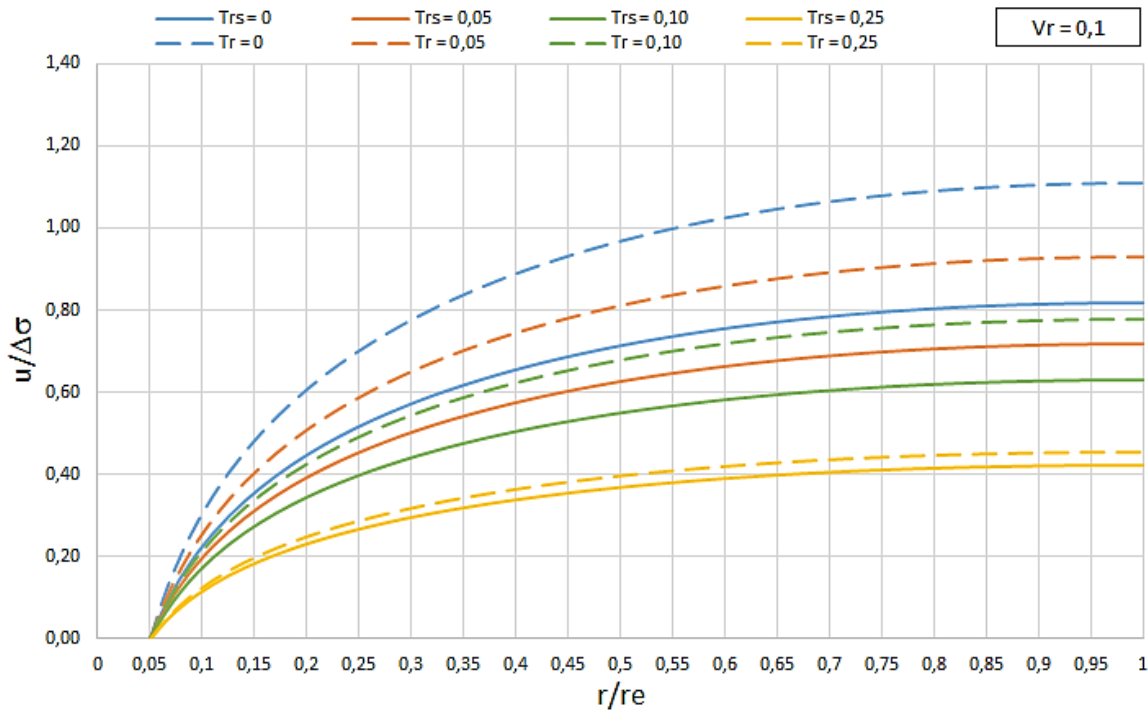


Figura 94 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,1$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

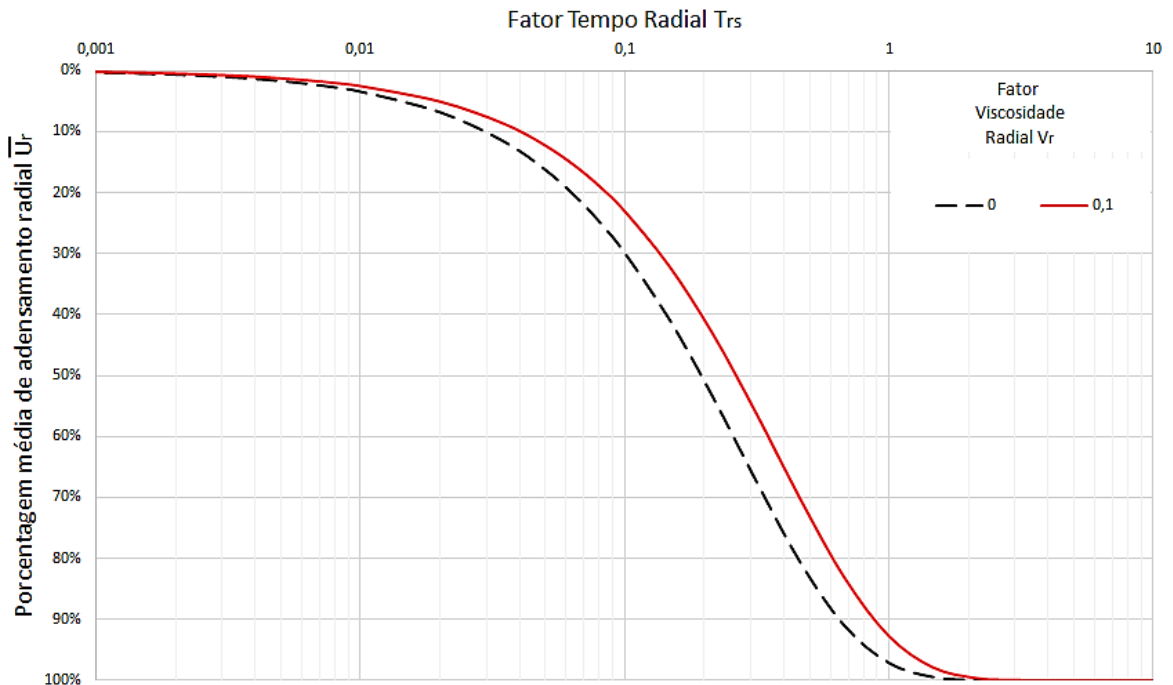


Figura 95 – Porcentagem média de adensamento radial do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_r = 0,1$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).



### 2.2.3 Deformações verticais iguais (“equal strain”) com coeficiente de viscosidade variável

Como esta solução também aborda a condição de deformações verticais iguais, mudando apenas a função do coeficiente de viscosidade e suas consequências, vários trechos do desenvolvimento serão iguais aos da solução anterior. Porém, para fins didáticos e por maior facilidade para acompanhar os cálculos, o autor decidiu reproduzir o desenvolvimento praticamente na íntegra.

A hipótese (8) define que:

$$\sigma_v = \sigma'_{vs} + \sigma'_{v\eta} + u \quad (278)$$

Onde  $\sigma_v$  é o acréscimo de tensão total,  $u$  é o excesso de poropressão,  $\sigma'_{vs}$  é a parcela sólido-sólido da tensão efetiva e  $\sigma'_{v\eta}$  é a parcela viscosa da tensão efetiva.

A resultante do carregamento em uma superfície de área  $S$  é tal que:

$$\bar{\sigma}_v = \frac{\int_S \sigma_v dS}{S} \quad (279)$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{\int_S \sigma_v dS}{S} = \frac{\int_S (\sigma'_{vs} + \sigma'_{v\eta} + u) dS}{S} \quad (280)$$

E, conseqüentemente:

$$\bar{\sigma}_v = \bar{\sigma}'_{vs} + \bar{\sigma}'_{v\eta} + \bar{u} \quad (281)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\bar{\sigma}_v}{dt} = \frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} + \frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (282)$$

O carregamento não varia com o tempo, ou seja,  $\frac{d\bar{\sigma}_v}{dt} = 0$ . Desse modo:

$$-\frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} = \frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (283)$$

A hipótese (9) admite que o índice de vazios  $e$  é função exclusiva de  $\bar{\sigma}'_{vs}$ .  
Reescrevendo:

$$\frac{de}{dt} = \frac{de}{d\bar{\sigma}'_{vs}} \frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} \quad (284)$$

A hipótese (10) admite uma relação de proporcionalidade entre a variação do índice de vazios e a variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva. Sendo a constante de proporcionalidade  $a_{vs}$ , faz-se:

$$a_{vs} = -\frac{de}{d\bar{\sigma}'_{vs}} \quad (285)$$

Substituindo:

$$\frac{de}{dt} = -a_{vs} \frac{d\bar{\sigma}'_{vs}}{dt} \quad (286)$$

Utilizando a equação (283), encontra-se:

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left( \frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right) \quad (287)$$

Segundo a hipótese (11), a parcela viscosa da tensão efetiva é função da velocidade de deformação específica e do coeficiente de viscosidade  $\eta$ , ou seja:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\eta(e)f\left(\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}\right) = -\eta(e)\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (288)$$

Desta vez se utilizará uma função  $\eta(e)$  crescente com o tempo. Conforme discutido por Andrade (2014) e ilustrado na Figura 65,  $\eta(e)$  deve crescer ao longo do tempo, pois o índice de vazios decresce com o tempo e, quanto menor o índice de vazios, maior o valor de  $\eta$ . Isto permite que ainda ocorra deformação após  $\frac{du}{dt}$  ser praticamente nulo – instante este que caracteriza o chamado fim do adensamento primário.

Deseja-se, nesta tese, obter uma solução analítica para o problema. Portanto, não será adotada para  $\sigma'_{v\eta}$  uma função de potência ou uma hipérbole, como sugeriram Alexandre (2000, 2006), Santa Maria (2002) e Santa Maria e Santa Maria (2018). Admitindo que  $\eta(e)$  possa ser considerado constante a partir do fim do adensamento primário no caso de deformações verticais iguais, ou seja, até  $\bar{u} \cong 0$ , uma expressão que satisfaz é:

$$\eta(e) = \eta_f - (\eta_f - \eta_0)a_u \frac{\partial\bar{u}}{\partial e} \quad (289)$$

Onde  $\eta_0$  e  $\eta_f$  são os valores inicial e final do coeficiente de viscosidade, respectivamente, e  $a_u$  é o valor, no instante  $t = 0$ , da derivada:

$$a_u = \left.\frac{\partial e}{\partial\bar{u}}\right|_{t=0} \therefore \frac{1}{a_u} = \left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial e}\right|_{t=0} \quad (290)$$

O valor de  $\frac{\partial\bar{u}}{\partial e}$ , positivo, é máximo para  $t = 0$ , pois a maior parte da deformação inicial é causada pela transferência do excesso de poropressão para a parcela sólido-sólido. Nota-se que, em  $t = 0$ , a equação (289) fornece  $\eta(e) = \eta_0$ . Perto do fim do adensamento primário, a relação  $\frac{\partial\bar{u}}{\partial e}$  tende a 0, pois praticamente

todo o excesso de poropressão já se dissipou e o recalque restante (chamado recalque secundário) é causado pelo excesso remanescente de parcela viscosa que é transferida para a parcela sólido-sólido. Com isso, a equação (289) mostra que  $\eta(e)$  tende ao seu valor final  $\eta_f$ . Portanto, o valor de  $\eta(e)$  é menor no início e cresce conforme o adensamento ocorre.

Pela equação (283), se a parcela viscosa da tensão efetiva não apresentar tendência de crescimento em  $t = 0$  (ou seja,  $\frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} \leq 0$ ), verifica-se que  $\left| \frac{d\bar{u}}{dt} \right| \leq \left| \frac{d\overline{\sigma'_{vs}}}{dt} \right|$ . Com isso,  $\left| \frac{\partial e}{\partial \bar{u}} \right| \geq \left| \frac{de}{d\overline{\sigma'_{vs}}} \right|$  e, conseqüentemente,  $a_u \geq a_{vs}$ .

Denota-se:

$$\frac{\eta_f - \eta_0}{\eta_f} = \lambda \quad (291)$$

Que varia entre 0 e 1. Se  $\lambda = 0$ , o coeficiente de viscosidade final  $\eta_f$  é igual ao inicial  $\eta_0$ , ou seja, é o caso de coeficiente de viscosidade constante.

Reescreve-se a equação (289) da seguinte forma:

$$\eta(e) = \eta_f - \lambda a_u \eta_f \frac{\partial \bar{u}}{\partial e} \quad (292)$$

A partir da equação (288), a parcela viscosa pode ser escrita:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = - \left( \eta_f - \lambda a_u \eta_f \frac{\partial \bar{u}}{\partial e} \right) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = - \left( \eta_f - \lambda a_u \eta_f \frac{\partial \bar{u}}{\partial e} \right) \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (293)$$

Desenvolvendo:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = - \frac{\eta_f}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} + \lambda a_u \frac{\eta_f}{1+e} \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (294)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} = -\left(\frac{\eta_f}{1+e}\right)\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \lambda a_u \left(\frac{\eta_f}{1+e}\right)\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} \quad (295)$$

Substituindo na equação (287):

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left[ -\left(\frac{\eta_f}{1+e}\right)\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \lambda a_u \left(\frac{\eta_f}{1+e}\right)\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right] \quad (296)$$

Derivando a equação (103) em relação ao tempo:

$$\frac{k_r}{\gamma_w} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{1+e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (297)$$

Substituindo as equações (297) e (103) na equação (296):

$$\begin{aligned} & \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \quad (298) \\ = a_{vs} & \left[ -\left(\frac{k_r \eta_f}{\gamma_w}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \lambda a_u \left(\frac{\eta_f}{1+e}\right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right] \end{aligned}$$

Rearrmando os termos:

$$\frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{k_r \eta_f}{\gamma_w}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \lambda a_u \left(\frac{\eta_f}{1+e}\right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} - \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (299)$$

Mais uma vez definindo-se o coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$ , constante ao longo do tempo com base na hipótese (7):

$$\frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} = c_{rs} \quad (300)$$

A equação diferencial passa a ser:

$$c_{rs} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \lambda a_u \left( \frac{\eta_f}{1+e} \right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} - \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (301)$$

A equação (301) é o problema de valor de contorno a ser resolvido.

Ao se comparar a equação (301) (deformações verticais iguais com  $\eta$  variável) e (207) (deformações verticais iguais com  $\eta$  constante), nota-se que a única diferença é a parcela  $-\lambda a_u \left( \frac{\eta_f}{1+e} \right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2}$ , que varia exclusivamente com o tempo. A consideração de  $\eta$  constante equivale a  $\lambda = 0$ , o que faria as equações serem idênticas.

Essa parcela também é a única em que aparece o termo  $\frac{d^2 \bar{u}}{dt^2}$ , o que requer duas condições iniciais. Desse modo, o número total de condições são quatro, sendo duas de contorno e duas iniciais. As três primeiras condições são as mesmas da teoria para deformações verticais iguais com  $\eta$  constante, restando a determinação da quarta.

Na Figura 64, observa-se que a curva de compressão real é praticamente coincidente com a curva idealizada nos instantes iniciais da compressão. Se a curva idealizada for admitida paralela à linha de velocidade de deformação nula, a curva real também o será em  $t = 0$ . Em termos físicos, isso significa que a variação inicial do índice de vazios está relacionada apenas à variação do excesso de poropressão inicial médio, sem influência da parcela viscosa inicial. Desse modo, a equação que rege o fenômeno em  $t = 0$  seria idêntica à solução de Barron (1948) (equação (43)) para a condição de deformações verticais iguais (com  $c_r = c_{rs}$ ), pois a teoria clássica se baseia justamente na relação entre a variação do índice de vazios e a variação do excesso de poropressão médio. Essa será a nova condição inicial.

Portanto, as condições de contorno para resolução do problema são:

- 1) Para qualquer  $t > 0$ ,  $u(r_w, t) = 0$
- 2) Para qualquer  $t > 0$ ,  $\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_e}$

E as condições iniciais são:

- 3) Para o tempo  $t = 0$ ,  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$  (a ser determinado)
- 4) Para o tempo  $t = 0$ ,  $\frac{d\bar{u}}{dt} = c_{rs} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$

### 2.2.3.1 Resolução do problema de valor de contorno

A separação de variáveis será novamente utilizada.

Sendo a função excesso de poropressão  $u(r, t)$  dada pelo produto:

$$u(r, t) = F(r)G(t) \quad (302)$$

A equação (301) fica:

$$c_{rs} \left[ \frac{1}{r} F'(r)G(t) + F''(r)G(t) \right] + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \left[ \frac{1}{r} F'(r)G'(t) + F''(r)G'(t) \right] - \frac{d\bar{u}}{dt} \quad (303)$$

$$- \left[ \frac{\lambda}{c_{rs}} \frac{a_u}{a_{vs}} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right] \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = 0$$

Rearranjando:

$$\left[ \frac{1}{r} F'(r) + F''(r) \right] \left[ c_{rs} G(t) + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) G'(t) \right] - \frac{d\bar{u}}{dt} - \left[ \lambda a_u \left( \frac{\eta_f}{1+e} \right) \right] \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} = 0 \quad (304)$$

Donde vem:

$$\frac{1}{r} F'(r) + F''(r) = \frac{\frac{d\bar{u}}{dt} + \left[ \lambda a_u \left( \frac{\eta_f}{1+e} \right) \right] \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2}}{c_{rs} G(t) + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (305)$$

Onde  $\Omega$  é uma constante.

A equação mostra que as variáveis se separam. Portanto, deve-se encontrar uma solução para uma equação diferencial de variável  $r$  (raio) e outra equação diferencial de variável  $t$  (tempo).

A equação do raio é a mesma obtida no caso de coeficiente de viscosidade constante (equação (212)):

$$\frac{1}{r} F'(r) + F''(r) = -\frac{1}{\Omega} \quad (306)$$

Como já visto, a solução é:

$$F'(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r} \quad (307)$$

E integrando obtém-se:

$$F(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r^2}{4} + c_1 \ln r + c_2 \quad (308)$$

Onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

Pela 1ª condição de contorno,  $u(r_w, t) = 0$ . Assim,  $F(r_w)$  deve ser nulo, isto é:

$$F(r_w) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r_w^2}{4} + c_1 \ln r_w + c_2 = 0 \quad (309)$$

Donde se encontra:

$$c_2 = -\left(-\frac{1}{\Omega} \frac{r_w^2}{4} + c_1 \ln r_w\right) \quad (310)$$

Substituindo:

$$F(r) = -\frac{1}{\Omega} \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} + c_1 \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) \quad (311)$$



Pela 2ª condição de contorno,  $\left. \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0$ . Desse modo,  $F'(r_e) = 0$ .

Aplicando na equação (307):

$$F'(r_e) = -\frac{1}{\Omega} \frac{r_e}{2} + \frac{c_1}{r_e} = 0 \quad (312)$$

Com isso:

$$c_1 = \frac{1}{\Omega} \frac{r_e^2}{2} \quad (313)$$

Substituindo na equação (311):

$$F(r) = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \quad (314)$$

Que é naturalmente igual à equação (223).

Agora se busca a função  $G(t)$ . Neste caso, como já visto, ela é diferente da solução de deformações verticais iguais com coeficiente de viscosidade constante.

Sendo  $\bar{u}(t)$  o excesso de poropressão médio em uma superfície, escreve-se:

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_{r_w}^{r_e} u(r,t) 2\pi r dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (315)$$

Ou, em termos de  $F(r)$  e  $G(t)$ :

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_{r_w}^{r_e} F(r)G(t) 2\pi r dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (316)$$

Colocando as constantes para fora da integral:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \frac{\int_{r_w}^{r_e} F(r) r dr}{r_e^2 - r_w^2} \quad (317)$$

Substituindo  $F(r)$ :

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \frac{\int_{r_w}^{r_e} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] r dr}{r_e^2 - r_w^2} \quad (318)$$

Como já visto no caso de deformações verticais iguais com coeficiente de viscosidade constante, a solução dessa equação é:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \left\{ \frac{\frac{r_e^4}{4} \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) + \frac{r_e^2 r_w^2}{4} - \frac{3r_e^4}{16} - \frac{r_w^4}{16}}{r_e^2 - r_w^2} \right\} \quad (319)$$

Definindo:

$$n = \frac{r_e}{r_w} \quad (320)$$

A equação se torna:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t)}{\Omega} \frac{r_w^2}{4} \left\{ \frac{n^4 \ln(n)}{n^2 - 1} - \frac{3n^2 - 1}{4} \right\} \quad (321)$$

Se o diâmetro de influência  $d_e$  dos drenos é definido por:

$$d_e = 2r_e = 2nr_w \quad (322)$$

A equação se transforma em:

$$\bar{u}(t) = \frac{2G(t) d_e^2}{\Omega} \left\{ \frac{n^2 \ln(n)}{n^2 - 1} - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \right\} \quad (323)$$

Definindo:

$$f(n) = \frac{n^2 \ln(n)}{n^2 - 1} - \frac{3n^2 - 1}{4n^2} \quad (324)$$

Obtém-se:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n) d_e^2}{8} G(t) \quad (325)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n) d_e^2}{8} G'(t) \quad (326)$$

Derivando novamente:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dt^2} = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n) d_e^2}{8} G''(t) \quad (327)$$

A equação relativa à variável do tempo (equação (305)) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\frac{d\bar{u}}{dt} + \left[ \frac{\lambda}{c_{rs}} \frac{a_u}{a_{vs}} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right] \frac{d^2\bar{u}}{dt^2}}{c_{rs} G(t) + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (328)$$

Substituindo as equações (326) e (327) na equação (328):

$$\frac{\frac{1}{\Omega} \frac{f(n)d_e^2}{8} G'(t) + \left[ \frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right] \frac{1}{\Omega} \frac{f(n)d_e^2}{8} G''(t)}{c_{rs} G(t) + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (329)$$

Simplificando:

$$\left[ \frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right] \frac{f(n)d_e^2}{8} G''(t) + \left[ \frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right] G'(t) + c_{rs} G(t) = 0 \quad (330)$$

Donde se encontra a equação diferencial:

$$G''(t) + \left[ \frac{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)}{\frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \right] G'(t) + \left[ \frac{c_{rs}}{\frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \right] G(t) = 0 \quad (331)$$

Em termos do polinômio característico, em que  $D$  é o operador linear da derivada, a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left\{ D^2 + \left[ \frac{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)}{\frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \right] D + \left[ \frac{c_{rs}}{\frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \right] \right\} G(t) = 0 \quad (332)$$

O polinômio característico recai em uma equação do segundo grau, cujas raízes  $x_1$  e  $x_2$  são:

$$x_1 = \frac{- \left[ \frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right] + \sqrt{\left[ \frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \right]^2 - 4 \frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)}}{2 \frac{\lambda}{c_{rs} a_{vs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \quad (333)$$

E:

$$x_2 = \frac{-\left[\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}\right)\right] - \sqrt{\left[\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}\right)\right]^2 - 4\lambda\frac{a_u}{a_{vs}}\frac{f(n)d_e^2}{8}\left(\frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}\right)}}{2\frac{\lambda}{c_{rs}}\frac{a_u}{a_{vs}}\frac{f(n)d_e^2}{8}\left(\frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}\right)} \quad (334)$$

A solução da equação diferencial é:

$$G(t) = c_3 \exp(x_1 t) + c_4 \exp(x_2 t) \quad (335)$$

Onde  $c_3$  e  $c_4$  são constantes.

Pela 1ª condição inicial,  $\bar{u}(0) = u_0$ . A partir da equação (325), faz-se:

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{\Omega} \frac{f(n)d_e^2}{8} (c_3 + c_4) = \bar{u}_0 \quad (336)$$

Logo, o valor de  $c_3$  pode ser obtido em função de  $c_4$ :

$$c_3 = \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} - c_4 \quad (337)$$

E a equação (335) pode ser reescrita:

$$G(t) = \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) + c_4 [\exp(x_2 t) - \exp(x_1 t)] \quad (338)$$

Outras expressões também podem ser reescritas em função de  $c_4$ . Substituindo as equações (338) e (314) na equação (302):

$$u(r, t) = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \left\{ \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) + c_4 [\exp(x_2 t) - \exp(x_1 t)] \right\} \quad (339)$$

Derivando em relação ao raio:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{r_e^2 - r^2}{2r} \right) \left\{ \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) + c_4 [\exp(x_2 t) - \exp(x_1 t)] \right\} \quad (340)$$

E a segunda derivada é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{-r_e^2 - r^2}{2r^2} \right) \left\{ \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) + c_4 [\exp(x_2 t) - \exp(x_1 t)] \right\} \quad (341)$$

Substituindo as equações (341) e (340) na equação (103):

$$\frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{k_r}{\gamma_w} \left\{ \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) + \frac{c_4}{\Omega} [\exp(x_2 t) - \exp(x_1 t)] \right\} \quad (342)$$

A derivada da equação (338) em relação ao tempo é:

$$G'(t) = \bar{u}_0 \frac{8\Omega}{f(n)d_e^2} x_1 \exp(x_1 t) + c_4 [x_2 \exp(x_2 t) - x_1 \exp(x_1 t)] \quad (343)$$

A partir da equação (326), escreve-se:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{f(n)d_e^2}{8} \left\{ \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} x_1 \exp(x_1 t) + \frac{c_4}{\Omega} [x_2 \exp(x_2 t) - x_1 \exp(x_1 t)] \right\} \quad (344)$$

E substituindo as equações (344) e (342) na equação (294):

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'_{v\eta}}{\gamma_w} &= \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \left\{ \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) + \frac{c_4}{\Omega} [\exp(x_2 t) - \exp(x_1 t)] \right\} \\ &+ \lambda a_u \frac{\eta_f}{1+e} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left\{ \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} x_1 \exp(x_1 t) \right. \\ &\left. + \frac{c_4}{\Omega} [x_2 \exp(x_2 t) - x_1 \exp(x_1 t)] \right\} \end{aligned} \quad (345)$$

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma'_{v\eta}}(t) = & \frac{\eta_f}{1+e} \left\{ \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_u \right] \right. \\ & + \frac{c_4}{\Omega} \exp(x_2 t) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda a_u \right] \\ & \left. - \frac{c_4}{\Omega} \exp(x_1 t) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_u \right] \right\} \end{aligned} \quad (346)$$

De acordo com a 2ª condição inicial,  $\left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{t=0} = c_{rs} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$ . Através da equação (103), verifica-se que essa expressão equivale a dizer que:

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{t=0} = a_{vs} \left. \frac{d\bar{u}}{dt} \right|_{t=0} \quad (347)$$

Que indica que a variação inicial do índice de vazios está diretamente relacionada à variação do excesso de poropressão inicial médio através do coeficiente de compressibilidade  $a_{vs}$ , o que está de acordo com a Figura 64. Comparando-se a equação (347) com a equação (287), nota-se que essa condição inicial implica em  $\left. \frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , o que também está de acordo com a Figura 64. Sendo  $\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\eta(e) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$ , de  $t = 0$  a  $t = 0^+$  o valor de  $\eta$  cresce e o valor de  $\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}$  diminui, de tal forma que o produto se mantém constante e, assim, a derivada no instante inicial é nula.

Fisicamente, se o recalque secundário é uma consequência da transferência da parcela viscosa para a parcela sólido-sólido, essa condição significa que a variação do índice de vazios no instante inicial se deve exclusivamente ao chamado recalque primário. Na equação de Taylor e Merchant (1940) (equação (9)), o mesmo comportamento já poderia ser observado fazendo-se  $\sigma'_v = \sigma'_{v0}$  e  $e = e_0$ .

Além disso,  $\frac{de}{dt} = \frac{de}{d\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{dt}$  e  $\frac{\partial e}{\partial \bar{u}} = a_u$  no instante  $t = 0$  (equação (290)).

Comparando-se novamente com a equação (347), conclui-se que  $a_u = a_{vs}$ .

Derivando a equação (346) em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}(t)}{dt} = \frac{\eta_f}{1+e} \left\{ x_1 \frac{8\overline{u_0}}{f(n)d_e^2} \exp(x_1 t) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_u \right] \right. \\ \left. + \frac{c_4}{\Omega} x_2 \exp(x_2 t) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda a_u \right] \right. \\ \left. - \frac{c_4}{\Omega} x_1 \exp(x_1 t) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_u \right] \right\} \end{aligned} \quad (348)$$

Fazendo  $t = 0$  e  $a_u = a_{vs}$  na equação (348):

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}(0)}{dt} = \frac{\eta_f}{1+e} \left\{ x_1 \frac{8\overline{u_0}}{f(n)d_e^2} \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_{vs} \right] \right. \\ \left. + \frac{c_4}{\Omega} x_2 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda a_{vs} \right] \right. \\ \left. - \frac{c_4}{\Omega} x_1 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_{vs} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (349)$$

Resolvendo para  $c_4$ :

$$c_4 = \Omega \frac{x_1 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_{vs} \right] \frac{8\overline{u_0}}{f(n)d_e^2}}{x_1 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_{vs} \right] - x_2 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda a_{vs} \right]} \quad (350)$$

O valor de  $c_3$  pode ser obtido através da equação (337):

$$c_3 = \Omega \frac{-x_2 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda a_{vs} \right] \frac{8\overline{u_0}}{f(n)d_e^2}}{x_1 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda a_{vs} \right] - x_2 \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda a_{vs} \right]} \quad (351)$$

Dividindo  $c_3$  e  $c_4$  por  $a_{vs}$  no numerador e no denominador e lembrando que

$$\frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w} = c_{rs} \text{ (equação (300)):$$

$$c_3 = \Omega \frac{-x_2 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda \right] \frac{8\overline{u_0}}{f(n)d_e^2}}{x_1 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda \right] - x_2 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda \right]} \quad (352)$$

E:



$$c_4 = \Omega \frac{x_1 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda \right] \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2}}{x_1 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda \right] - x_2 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda \right]} \quad (353)$$

Para reduzir o tamanho das expressões, denota-se:

$$c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_i \lambda = C(x_i) \quad (354)$$

Onde  $x_i$  é qualquer uma das duas raízes  $x_1$  e  $x_2$  do polinômio característico.

Reescrevendo-se a equação (339), a expressão para  $u(r, t)$  é:

$$u(r, t) = \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \left\{ \frac{x_1 C(x_1) \exp(x_2 t) - x_2 C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \left[ \frac{r^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \quad (355)$$

Substituindo o valor de  $c_4$  na expressão de  $\overline{\sigma'_{v\eta}}$  (equação (346)), encontra-se:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}}(t) = \frac{a_{vs}\eta_f}{1+e} \left\{ \frac{-x_2 [C(x_2)] \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2}}{x_1 [C(x_1)] - x_2 [C(x_2)]} \exp(x_1 t) C(x_1) + \frac{x_1 [C(x_1)] \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2}}{x_1 [C(x_1)] - x_2 [C(x_2)]} \exp(x_2 t) C(x_2) \right\} \quad (356)$$

Simplificando:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}}(t) = \left( \frac{a_{vs}\eta_f}{1+e} \right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} [C(x_1)C(x_2)] \left\{ \frac{x_1 \exp(x_2 t) - x_2 \exp(x_1 t)}{x_1 [C(x_1)] - x_2 [C(x_2)]} \right\} \quad (357)$$

No instante  $t = 0$ , tem-se:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}}(0) = \left( \frac{a_{vs}\eta_f}{1+e} \right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} [C(x_1)C(x_2)] \left\{ \frac{x_1 - x_2}{x_1 [C(x_1)] - x_2 [C(x_2)]} \right\} \quad (358)$$

Pela equação (281), faz-se:

$$\bar{\sigma}_v(0) = \bar{\sigma}'_{vs}(0) + \bar{\sigma}'_{v\eta}(0) + \bar{u}(0) \quad (359)$$

Chamando de  $\Delta\sigma_v$  a magnitude do acréscimo de tensão total aplicado e de  $\bar{u}_0$  o valor de  $\bar{u}$  no instante inicial, e lembrando que a parcela sólido-sólido em  $t = 0$ , é nula, faz-se:

$$\Delta\sigma_v = 0 + \left(\frac{a_{vs}\eta_f}{1+e}\right) \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} [C(x_1)C(x_2)] \left\{ \frac{x_1 - x_2}{x_1[C(x_1)] - x_2[C(x_2)]} \right\} + \bar{u}_0 \quad (360)$$

Donde se encontra:

$$\bar{u}_0 = \Delta\sigma_v \left\{ \frac{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)}{\left(\frac{a_{vs}\eta_f}{1+e}\right) \frac{8}{f(n)d_e^2} [C(x_1)C(x_2)](x_1 - x_2) + [x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)]} \right\} \quad (361)$$

Essa expressão ainda pode ser bastante simplificada. O termo  $x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)$  corresponde a:

$$x_1 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda \right] - x_2 \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda \right] \quad (362)$$

Desenvolvendo:

$$x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2) = c_{rs}(x_1 - x_2) + \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda (x_1^2 - x_2^2) \quad (363)$$

Ou ainda:

$$x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2) = (x_1 - x_2) \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda (x_1 + x_2) \right] \quad (364)$$

E o produto  $C(x_1)C(x_2)$  é igual a:

$$C(x_1)C(x_2) = \left( c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_1 \lambda \right) \left( c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} x_2 \lambda \right) \quad (365)$$

Que pode ser desenvolvido para:

$$C(x_1)C(x_2) = c_{rs}^2 + c_{rs} \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda (x_1 + x_2) + \left[ \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda \right]^2 x_1 x_2 \quad (366)$$

Substituindo as equações (364) e (366) na equação (361) e dividindo todos os termos por  $(x_1 - x_2)$ :

$$\bar{u}_0 = \Delta \sigma_v \left\{ \frac{\left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda (x_1 + x_2) \right]}{\left( \frac{a_{vs} \eta_f}{1+e} \right) \frac{8}{f(n)d_e^2} \left[ c_{rs}^2 + c_{rs} \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda (x_1 + x_2) + \left( \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda \right)^2 x_1 x_2 \right] + \left[ c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda (x_1 + x_2) \right]} \right\} \quad (367)$$

Observando o polinômio característico (equação (332)), a soma e o produto das raízes são:

$$x_1 + x_2 = - \frac{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)}{\frac{\lambda}{c_{rs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \quad (368)$$

E:

$$x_1 x_2 = \frac{c_{rs}}{\frac{\lambda}{c_{rs}} \frac{f(n)d_e^2}{8} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right)} \quad (369)$$

Substituindo na equação (367):

$$\bar{u}_0 = \Delta\sigma_v \left\{ \frac{\left[ C_{rs} - C_{rs} \left( \frac{f(n)d_e^2 + k_r\eta_f}{8 \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}} \right) \right]}{\left( \frac{a_{vs}\eta_f}{1+e} \right) \frac{8}{f(n)d_e^2} \left[ C_{rs}^2 - C_{rs}^2 \left( \frac{f(n)d_e^2 + k_r\eta_f}{8 \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}} \right) + \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda \frac{C_{rs}^2}{\left( \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w} \right)} \right] + \left[ C_{rs} - C_{rs} \left( \frac{f(n)d_e^2 + k_r\eta_f}{8 \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}} \right) \right]} \right\} \quad (370)$$

Multiplicando todos os termos por  $\left(-\frac{1}{C_{rs}} \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}\right)$ :

$$\bar{u}_0 = \Delta\sigma_v \left\{ \frac{\frac{f(n)d_e^2}{8}}{\left( \frac{a_{vs}\eta_f}{1+e} \right) \frac{8}{f(n)d_e^2} \left[ \frac{f(n)d_e^2}{8} C_{rs} - \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda C_{rs} \right] + \frac{f(n)d_e^2}{8}} \right\} \quad (371)$$

E, finalmente:

$$\bar{u}_0 = \Delta\sigma_v \left[ \frac{\frac{f(n)d_e^2}{8}}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w} \right) (1 - \lambda)} \right] \quad (372)$$

Assim, a função  $u(r, t)$  é obtida utilizando-se a equação (355), em que  $\bar{u}_0$  é determinado pela equação (372). Combinando as equações (355) e (372):

$$u(r, t) = \frac{\Delta\sigma_v}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w} \right) (1 - \lambda)} \left\{ \frac{x_1 C(x_1) \exp(x_2 t) - x_2 C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \left[ \frac{r^2}{2} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \quad (373)$$

Em que  $C(x_1)$  e  $C(x_2)$  estão representados na equação (354) e  $x_1$  e  $x_2$  são encontrados, respectivamente, nas equações (333) e (334).

Para reescrever a solução em termos adimensionais, define-se o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ :

$$T_{rs} = \frac{C_{rs} t}{d_e^2} \quad (374)$$

E o Fator Viscosidade Radial final  $V_{rf}$ , relacionado ao coeficiente de viscosidade final  $\eta_f$ , é definido por:

$$V_{rf} = \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w d_e^2} \quad (375)$$

A partir de  $T_{rs}$ , o produto  $x_i t$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$x_i t = \left\{ \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2 - 4\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \right\} T_{rs} = X_i T_{rs} \quad (376)$$

Em que  $X_i$  também é adimensional.

Sendo  $0 < \lambda < 1$ , os parâmetros  $X_1$  e  $X_2$  são sempre reais, negativos e diferentes. A demonstração pode ser vista no Apêndice A.

O parâmetro  $C(x_i)$  se transforma em:

$$C(x_i) = c_{rs} + \frac{f(n)d_e^2}{8} \lambda x_i = \frac{d^2}{t} T_{rs} \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_i \right] \quad (377)$$

E a razão  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  pode ser expressa a partir da variável adimensional  $\frac{r}{r_e}$ :

$$\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} \left\{ \frac{X_1 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_1 \lambda\right) \exp(X_2 T_{rs}) - X_2 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_2 \lambda\right) \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_1 \lambda\right) - X_2 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_2 \lambda\right)} \right\} \left[ \ln\left(n \frac{r}{r_e}\right) - \frac{\left(\frac{r}{r_e}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{2} \right] \quad (378)$$

### 2.2.3.2 Porcentagem média de adensamento

O valor de  $\frac{de}{dt}$  pode ser obtido através de  $u(r,t)$ . Utilizando-se as equações (355) e (103), vem:

$$\frac{de}{dt} = - \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \left\{ \frac{x_1 C(x_1) \exp(x_2 t) - x_2 C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \quad (379)$$

Integrando em relação ao tempo:

$$e = - \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{8\bar{u}_0}{f(n)d_e^2} \left\{ \frac{\frac{x_1}{x_2} C(x_1) \exp(x_2 t) - \frac{x_2}{x_1} C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} + c_0 \quad (380)$$

Onde  $c_0$  é uma constante.

Quando  $t \rightarrow \infty$ , o índice de vazios tende para seu valor final  $e_f$ . Como  $x_1$  e  $x_2$  são negativos, ambas as exponenciais caem a zero. Desse modo:

$$c_0 = e_f \quad (381)$$

Substituindo o valor de  $\bar{u}_0$  dado pela equação (372):

$$e = e_f - \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \left[ \frac{\Delta\sigma_v}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w} \right) (1-\lambda)} \right] \left\{ \frac{\frac{x_1}{x_2} C(x_1) \exp(x_2 t) - \frac{x_2}{x_1} C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \quad (382)$$

Multiplicando e dividindo por  $a_{vs}$ :

$$e = e_f - c_{rs} \left[ \frac{a_{vs}\Delta\sigma_v}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left( \frac{k_r\eta_f}{\gamma_w} \right) (1-\lambda)} \right] \left\{ \frac{\frac{x_1}{x_2} C(x_1) \exp(x_2 t) - \frac{x_2}{x_1} C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \quad (383)$$

Por definição:

$$a_{vs}\Delta\sigma_v = e_0 - e_f \quad (384)$$

Substituindo:

$$e = e_f - c_{rs} \left[ \frac{e_0 - e_f}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r \eta_f}{\gamma_w}\right) (1 - \lambda)} \right] \left\{ \frac{\frac{x_1}{x_2} C(x_1) \exp(x_2 t) - \frac{x_2}{x_1} C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \quad (385)$$

A porcentagem média de adensamento a partir do índice de vazios é definida, no caso de deformações verticais iguais, pela relação:

$$\bar{U}_r = \frac{e_0 - e}{e_0 - e_f} \quad (386)$$

Substituindo a equação (385) na equação (386):

$$\bar{U}_r = 1 + \left[ \frac{c_{rs}}{\frac{f(n)d_e^2}{8} + \left(\frac{k_r \eta_f}{\gamma_w}\right) (1 - \lambda)} \right] \left\{ \frac{\frac{x_1}{x_2} C(x_1) \exp(x_2 t) - \frac{x_2}{x_1} C(x_2) \exp(x_1 t)}{x_1 C(x_1) - x_2 C(x_2)} \right\} \quad (387)$$

A partir do Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ , do Fator Viscosidade Radial final  $V_{rf}$  e do parâmetro  $X_i$  definidos nas equações (374), (375) e (376), respectivamente, a porcentagem média de adensamento pode então ser expressa por:

$$\bar{U}_r = 1 + \frac{1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs}) - \frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] - X_2 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right]} \right\} \quad (388)$$

O denominador da equação (388) ainda pode ser simplificado da seguinte forma:

$$X_1 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] - X_2 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] = X_1 - X_2 + \frac{f(n)}{8} \lambda (X_1^2 - X_2^2) \quad (389)$$

Desenvolvendo:

$$X_1 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] - X_2 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2 \right] = (X_1 - X_2) \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda (X_1 + X_2) \right] \quad (390)$$

Substituindo a soma  $X_1 + X_2$  pelo seu valor obtido através da equação (376):

$$X_1 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] - X_2 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2 \right] = (X_1 - X_2) \left[ 1 - \frac{f(n)}{8} \lambda \left( \frac{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}}{\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \right) \right] \quad (391)$$

E simplificando:

$$X_1 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] - X_2 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2 \right] = -(X_1 - X_2) \left[ \frac{\frac{f(n)}{8}}{V_{rf}} \right] \quad (392)$$

E a equação (388) é reescrita da seguinte forma:

$$\bar{U}_r = 1 - \frac{V_{rf}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] \exp(X_2 T_{rs}) - \frac{X_2}{X_1} \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2 \right] \exp(X_1 T_{rs})}{(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8}} \right\} \quad (393)$$

### 2.2.3.3 Relação entre recalque primário e recalque total

A porcentagem média de adensamento encontrada na equação (393) apresenta duas exponenciais, de forma similar à teoria de Taylor e Merchant (1940). Deve-se esperar, portanto, que apareça o efeito da “dupla onda” observada nos ensaios de laboratório. Se o Fator Viscosidade Final  $V_{rf}$  for suficientemente elevado, surge o “patamar” que caracteriza a transição entre os chamados fim do primário e início do secundário, que usualmente se manifesta nos ensaios de laboratório.

Seja  $R = \frac{\rho_p}{\rho_t}$  a razão entre o recalque primário  $\rho_p$  e o recalque total  $\rho_t$ .

Analisando-se a equação (393), como o módulo de  $X_1$  é menor do que o módulo de  $X_2$ , a exponencial  $\exp(X_1 T_{rs})$  demora mais para se desenvolver do que  $\exp(X_2 T_{rs})$ . Portanto, havendo a “dupla onda”,  $\exp(X_2 T_{rs})$  se relaciona ao adensamento primário



e  $\exp(X_1 T_{rs})$  ao secundário. A parcela de primário deve variar de 0 a  $R$  e a de secundário de 0 a  $1 - R$ , quando  $t$  varia de 0 a  $\infty$ . Descartando a parcela de secundário da equação (393), é possível encontrar uma equação correspondente apenas ao adensamento primário:

$$\bar{U}_r = R - \frac{V_{rf}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] \exp(X_2 T_{rs})}{(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8}} \right\} \quad (394)$$

Se  $V_{rf}$  tender ao infinito, chega-se a:

$$\lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} \bar{U}_r = R - \frac{\frac{f(n)}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \exp\left(-\frac{8T_{rs}}{f(n)}\right) \quad (395)$$

Para maiores detalhes sobre o desenvolvimento acima, ver o Apêndice B.

Se  $T_{rs} = 0$ ,  $\bar{U}_r = 0$ . Logo:

$$R = \frac{\frac{f(n)}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \quad (396)$$

Observando a equação que fornece  $\lambda$  (equação (291)), não é difícil notar que  $(1 - \lambda)$  corresponde a  $\frac{\eta_0}{\eta_f}$ . Define-se o Fator Viscosidade Radial inicial,  $V_{r0}$ , dado por:

$$V_{r0} = V_{rf}(1 - \lambda) = \frac{k_r \eta_0}{\gamma_w d_e^2} \quad (397)$$

Assim, a equação (396) é reescrita da seguinte forma:

$$R = \frac{\frac{f(n)}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{r0}} \quad (398)$$

Isolando  $V_{r0}$ , chega-se a:

$$V_{r0} = \frac{f(n)}{8} \left( \frac{1-R}{R} \right) \quad (399)$$

O que mostra que  $V_{r0}$  possui uma relação direta com  $R$ , sendo esta relação independente de  $V_{rf}$ .

Substituindo a equação (396) na equação (395):

$$\lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} \overline{U}_r = R \left[ 1 - \exp \left( -\frac{8T_{rs}}{f(n)} \right) \right] \quad (400)$$

Nota-se que a equação (400) é quase igual à porcentagem média de adensamento de Barron (1948) para a condição de deformações verticais iguais (equação (45)), diferindo apenas pelo parâmetro  $T_{rs}$  no lugar de  $T_r$ , e pela razão  $R$  que multiplica toda a equação. Como já discutido nos itens 2.1 e 2.2.1.3, pode-se dizer que  $T_{rs} = T_r$ . A única diferença, portanto, é a razão  $R$ .

Isto significa que o trecho de adensamento primário da presente teoria pode ser analisado pela solução clássica de Barron (1948), sem qualquer necessidade de correção de  $c_{rs}$  ( $c_r$ ). Nesse caso, a porcentagem média de adensamento relativa apenas ao adensamento primário corresponde a  $\overline{U}_r/R$ .

O parâmetro  $R$  ainda apresenta relação direta com o excesso de poropressão inicial médio  $\overline{u}_0$ . Basta reescrever a equação (372) em termos adimensionais:

$$\frac{\overline{u}_0}{\Delta\sigma_v} = \frac{\frac{f(n)}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} = R \quad (401)$$

Ou seja, a razão  $R$  entre o recalque primário e o recalque total é a mesma razão entre o excesso de poropressão inicial médio  $\overline{u}_0$  e o acréscimo de tensão total  $\Delta\sigma_v$ .

### 2.2.3.4 Soluções gráficas

Nas páginas a seguir são apresentadas as isócronas relacionando o excesso de poropressão normalizado  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e o raio adimensional  $\frac{r}{r_e}$  e também as curvas relacionando a porcentagem média de adensamento  $\overline{U}_r$  e o Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ . Todas foram calculadas para  $n = 20$ . A equação (378) fornece a expressão de  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e a equação (393) fornece a expressão de  $\overline{U}_r$ , ambas dependentes do parâmetro  $\lambda$  e ainda de  $X_1$  e  $X_2$ , obtidos a partir da equação (376).

No caso das isócronas, cada figura corresponde a um valor de  $V_{r0}$  diferente, de  $V_{r0} = 0,001$  a  $V_{r0} = 0,1$ , e todas foram traçadas para  $V_{rf} = 10.000$  – um valor muito maior do que qualquer  $V_{r0}$ . Isto foi feito para se afastar ao máximo da solução para  $\eta$  constante, pois as soluções para  $\eta$  variável e para  $\eta$  constante devem se equivaler desde que  $V_{r0} = V_{rf}$ . A demonstração disso pode ser vista no Apêndice C.

Já para as curvas de porcentagem média de adensamento, em cada figura foram traçadas curvas de mesmo  $V_{r0}$  (os mesmos das isócronas) e diferentes valores de  $V_{rf}$ . Em todos os gráficos existe uma curva apresentando  $V_{rf} = V_{r0}$ . Como discutido no item anterior, as curvas de mesmo  $V_{r0}$  apresentam o “patamar” de transição entre primário e secundário na mesma porcentagem média de adensamento  $R$ .

A título de comparação, também estão plotadas tracejadas as curvas sem viscosidade (Barron, 1948).

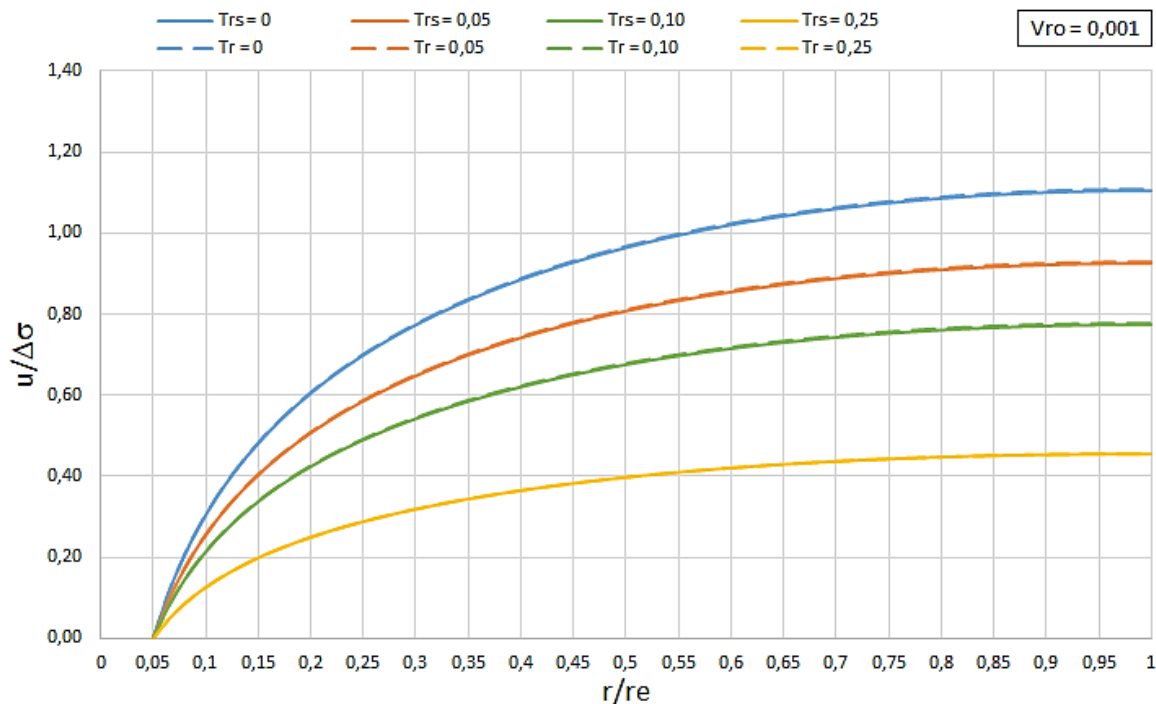


Figura 96 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,001$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

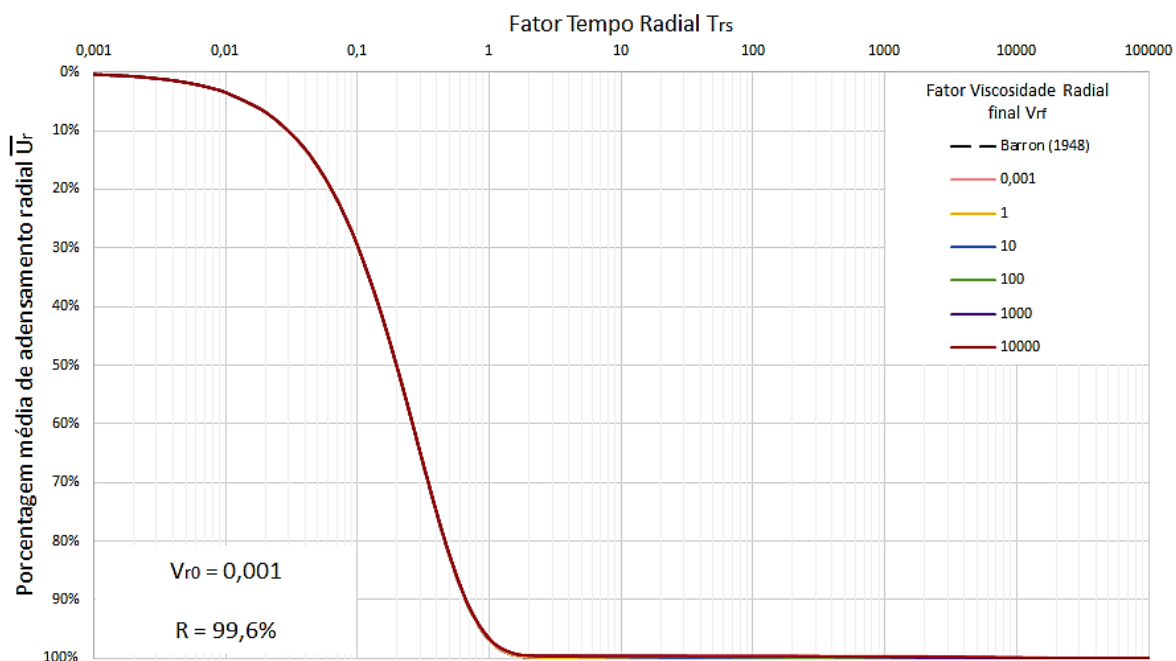


Figura 97 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,001$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .

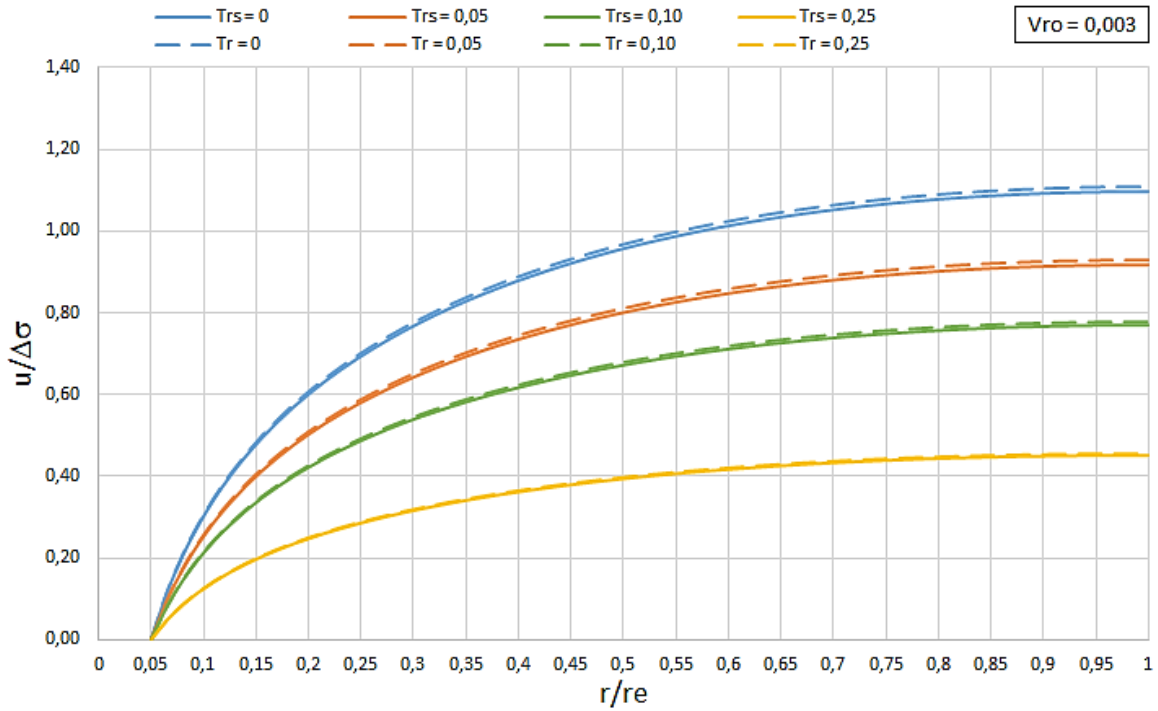


Figura 98 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,003$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

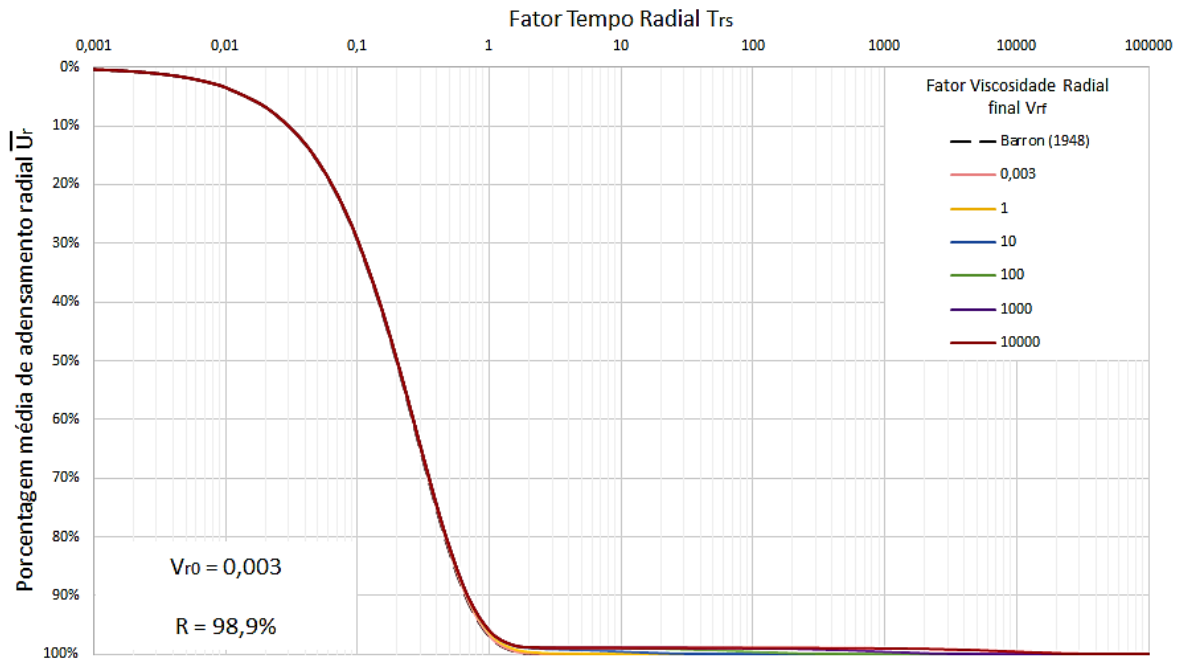


Figura 99 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,003$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .

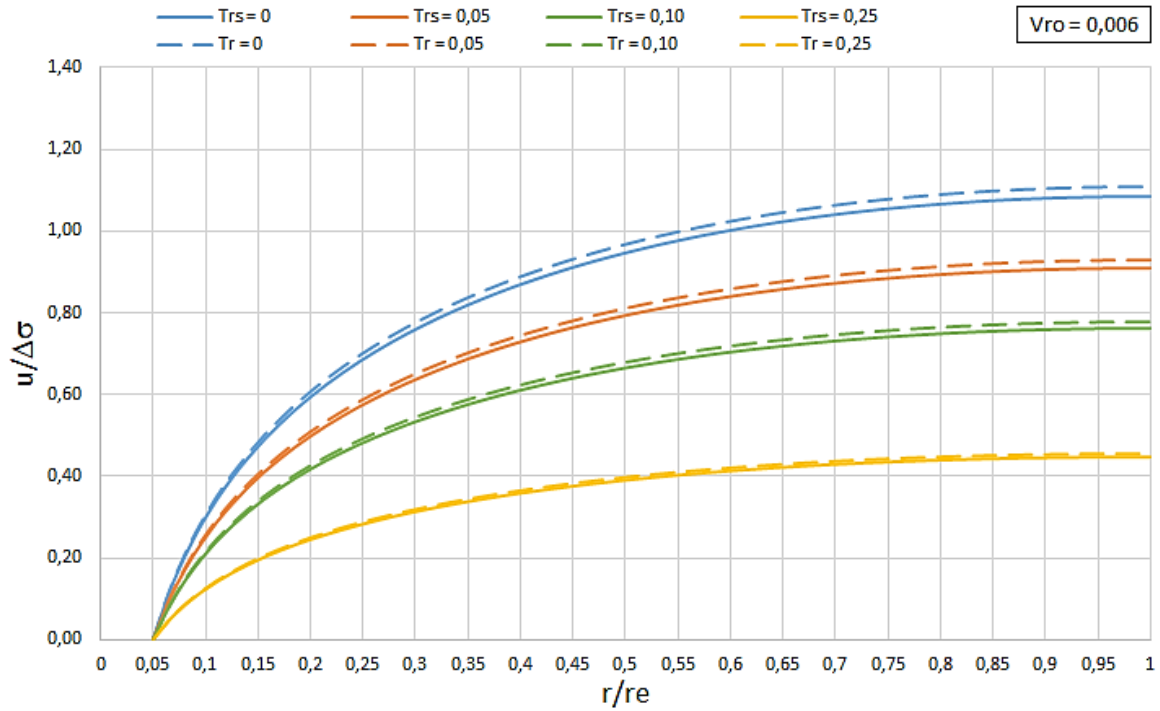


Figura 100 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,006$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

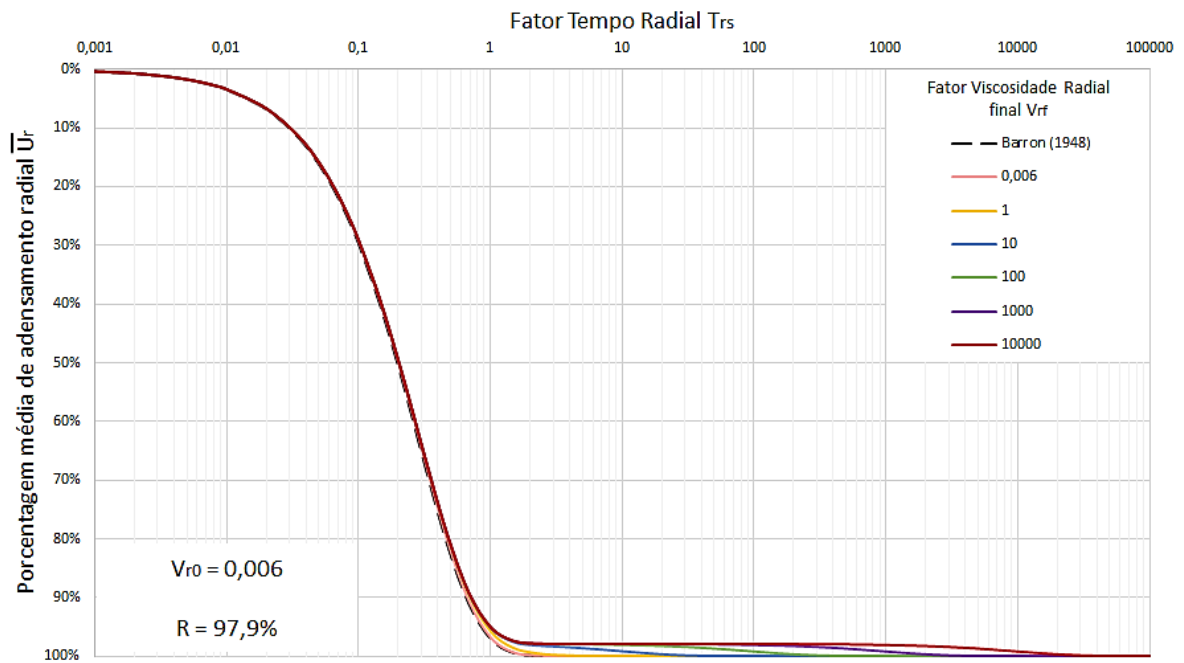


Figura 101 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,006$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .

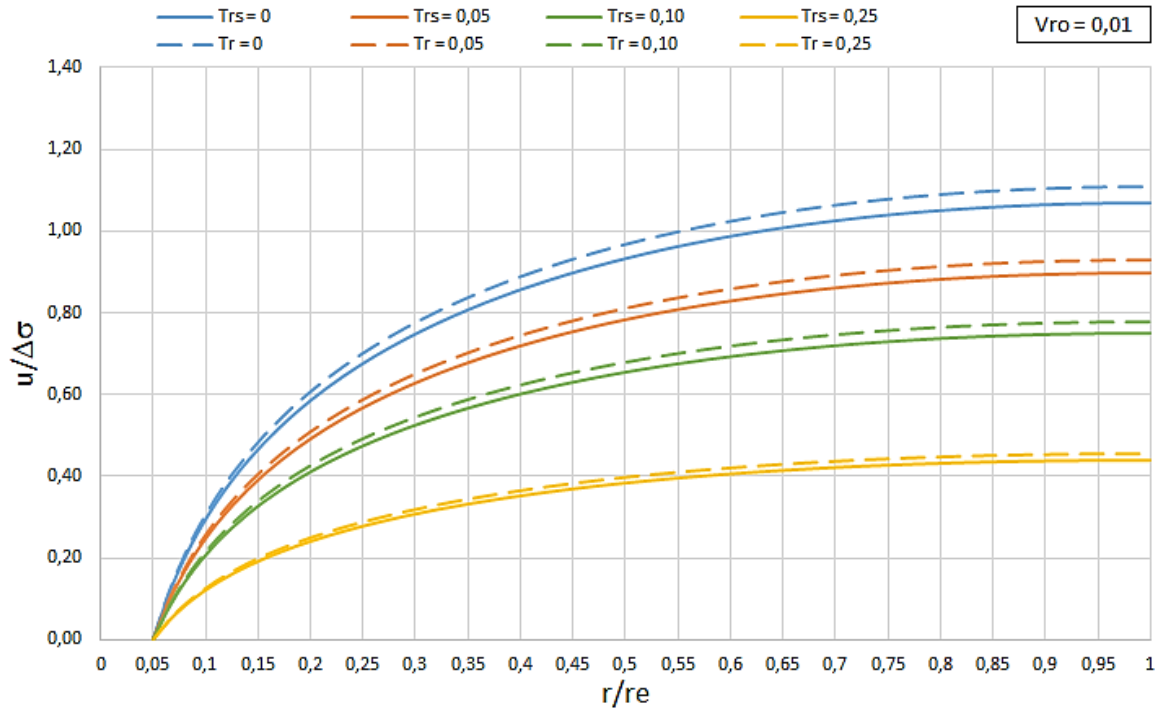


Figura 102 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,01$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

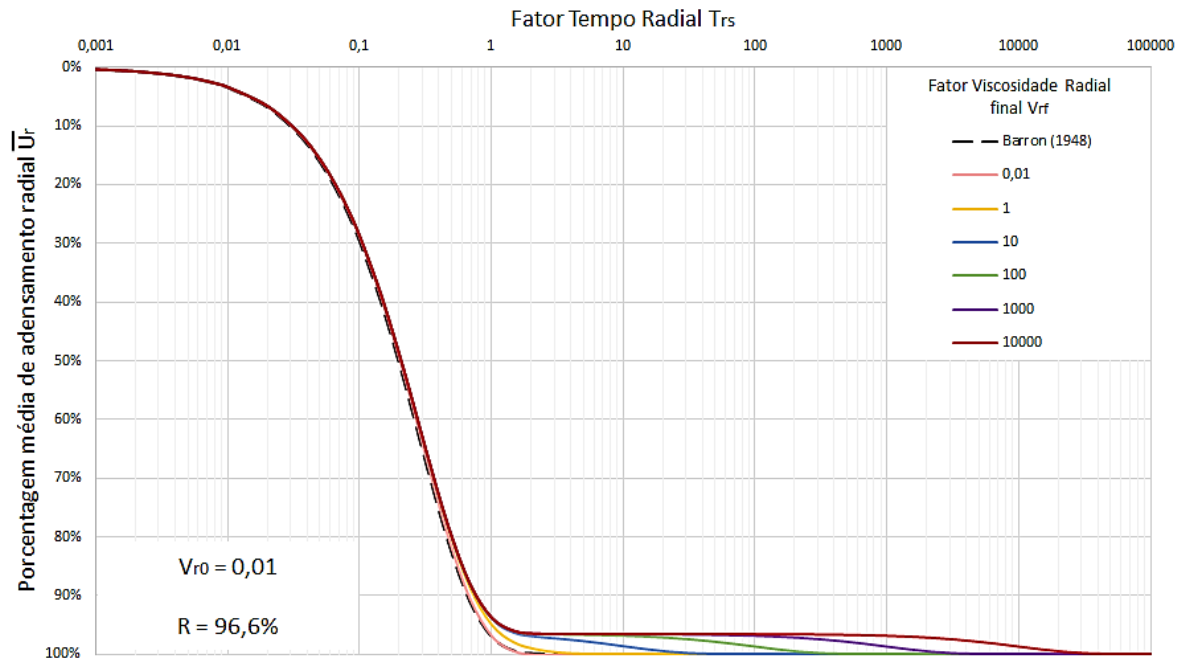


Figura 103 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,01$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .

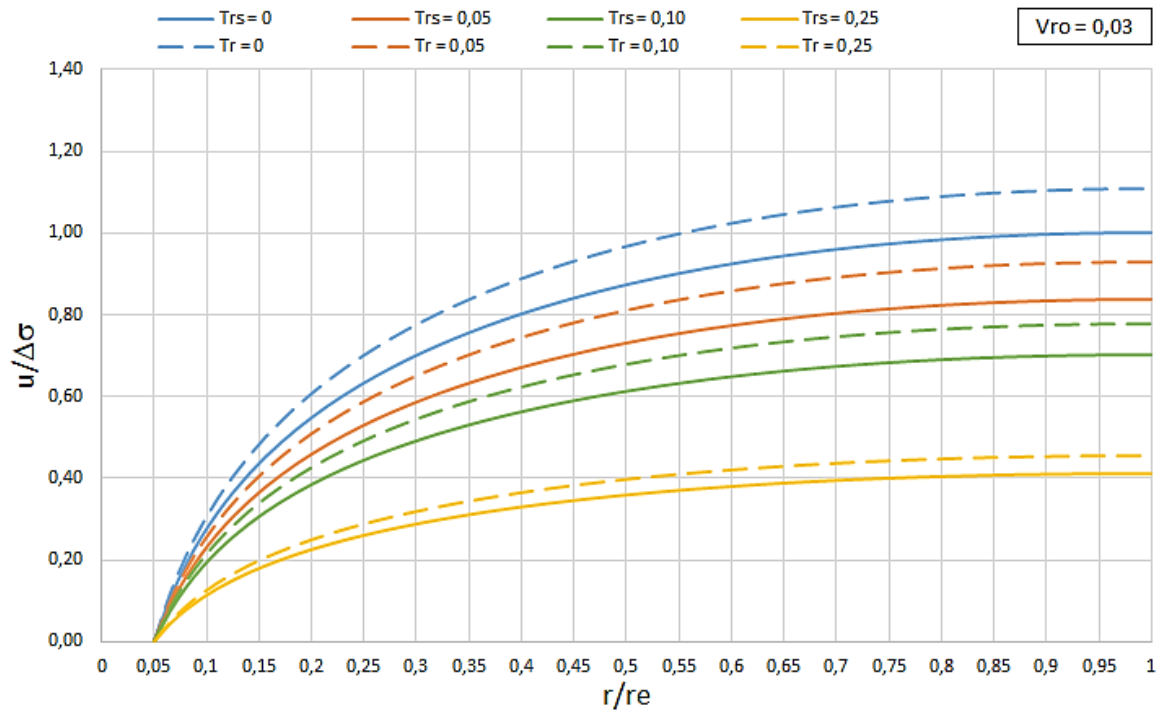


Figura 104 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,03$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

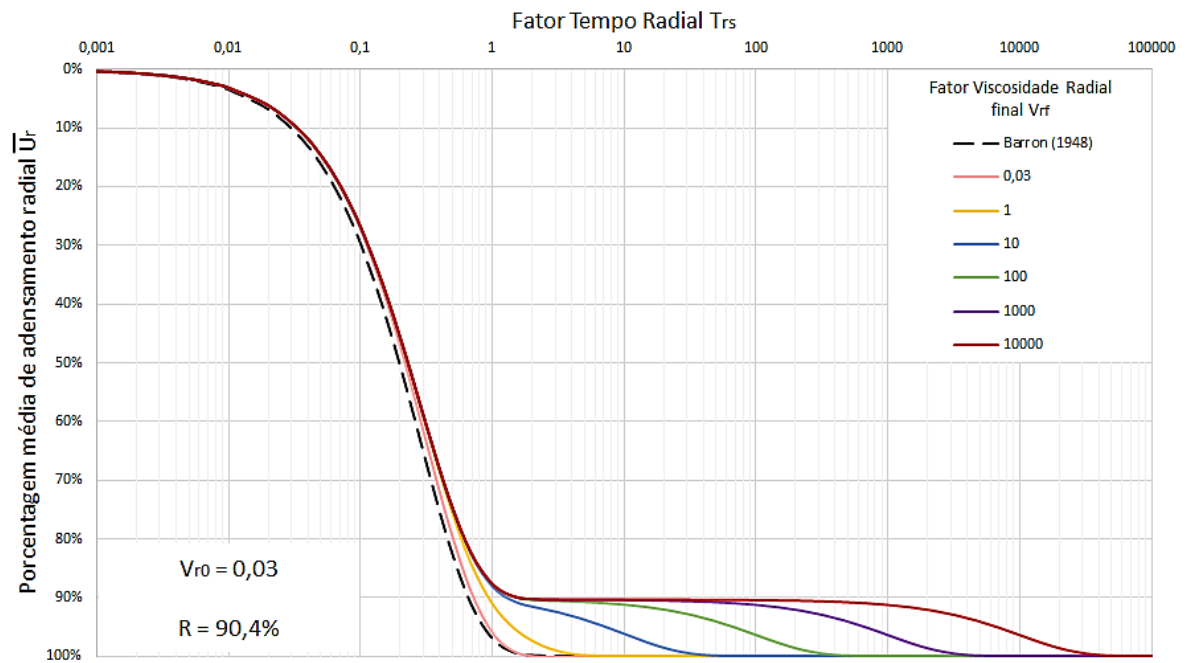


Figura 105 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,03$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .



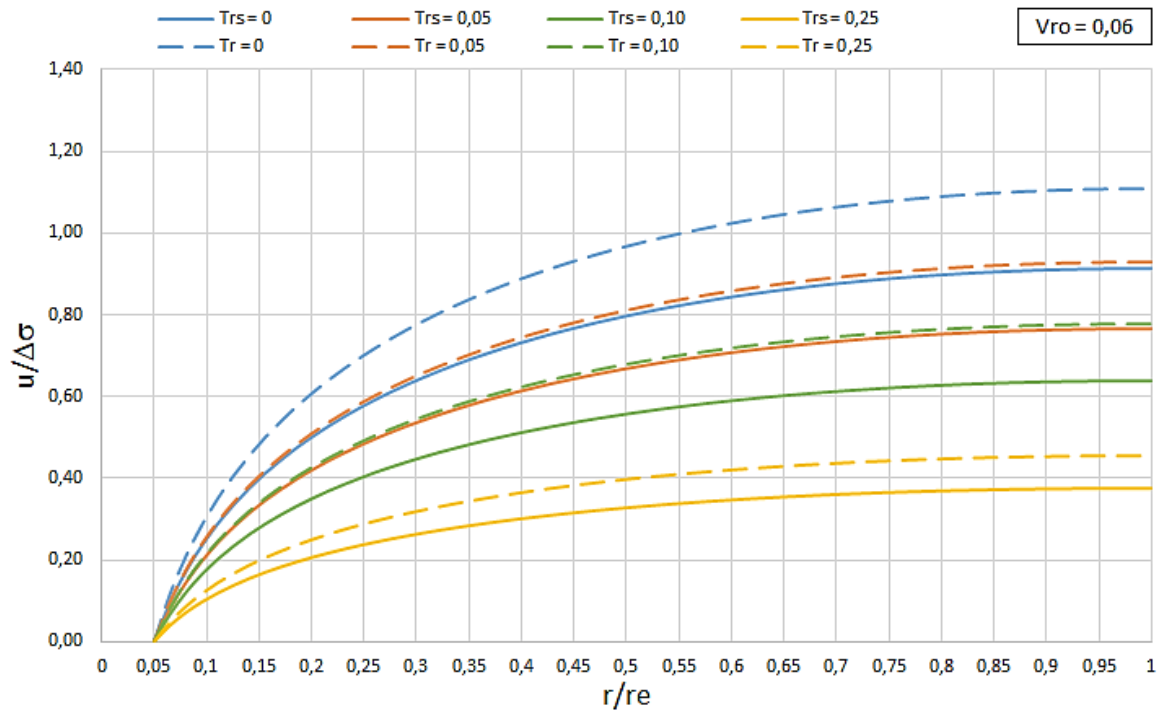


Figura 106 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,06$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

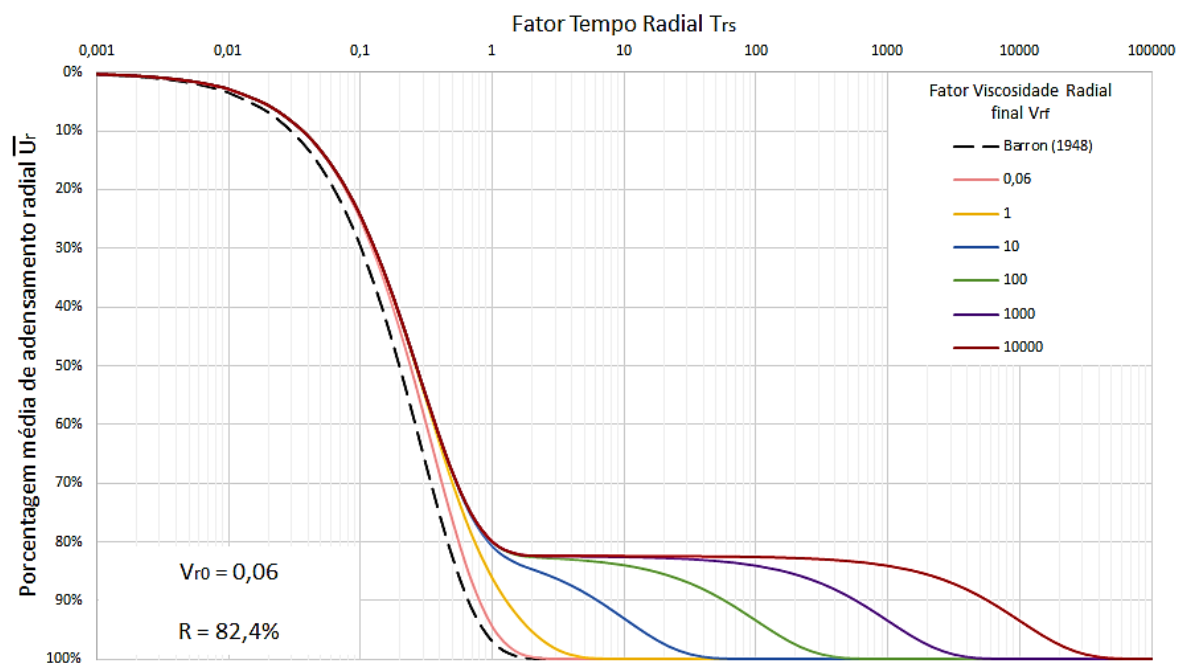


Figura 107 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,06$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .

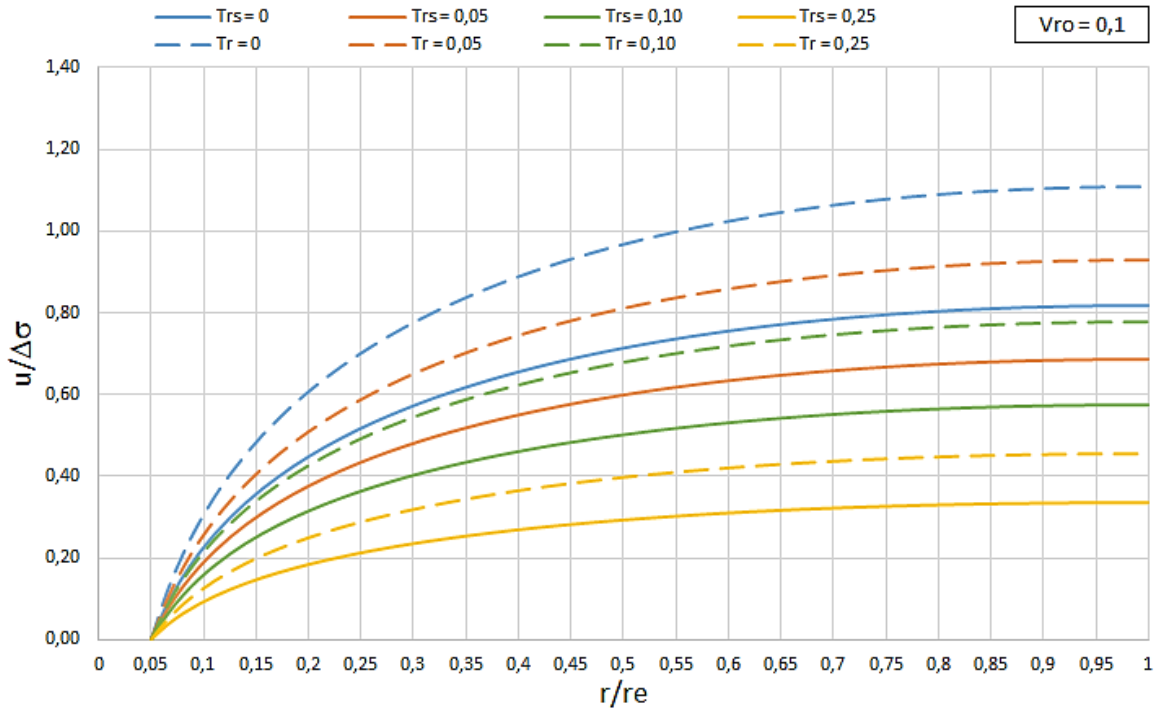


Figura 108 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,1$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com Barron (1948) (tracejado).

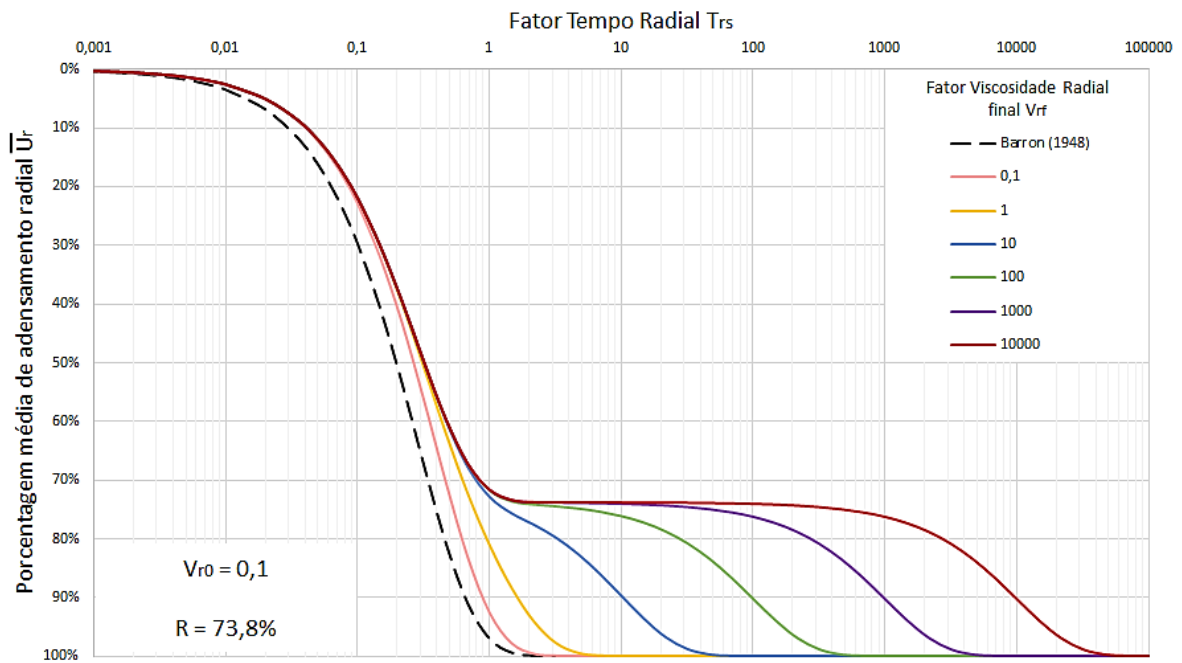


Figura 109 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,1$  e diversos valores de  $V_{rf}$ .

### 3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

#### 3.1 Soluções teóricas obtidas

As razões  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e as porcentagens médias de adensamento  $\overline{U}_r$  para as condições de deformações verticais livres e deformações verticais iguais com coeficiente de viscosidade  $\eta$  constante, obtidas no capítulo anterior desta tese, estão reproduzidas abaixo. Elas são expressas por meio dos parâmetros adimensionais  $T_{rs}$  e  $V_r$ , denominados Fator Tempo Radial e Fator Viscosidade Radial.

Para a condição de deformações verticais livres:

$$\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{-2A_1(\alpha)A_0\left(\alpha n \frac{r}{r_e}\right)}{\alpha[n^2A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \left[ \frac{1}{1 + 4\alpha^2 n^2 V_r} \right] \exp\left(-\frac{4\alpha^2 n^2 T_{rs}}{1 + 4\alpha^2 n^2 V_r}\right) \quad (402)$$

E:

$$\overline{U}_r = 1 - \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots}^{\alpha_\infty} \frac{4A_1(\alpha)^2}{\alpha^2(n^2 - 1)[n^2A_0^2(\alpha n) - A_1^2(\alpha)]} \exp\left(-\frac{4\alpha^2 n^2 T_{rs}}{1 + 4\alpha^2 n^2 V_r}\right) \quad (403)$$

$$A_1(\alpha) = J_1(\alpha)Y_1(\alpha n) - Y_1(\alpha)J_1(\alpha n)$$

$$A_0(\alpha n) = J_0(\alpha n)Y_1(\alpha n) - Y_0(\alpha n)J_1(\alpha n)$$

$$A_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right) = J_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)Y_1(\alpha n) - Y_0\left(\alpha \frac{r}{r_w}\right)J_1(\alpha n)$$

Onde:

$J_0, J_1$  – funções de Bessel de 1ª espécie, de ordem 0 e 1, respectivamente;

$Y_0, Y_1$  – funções de Bessel de 2ª espécie, de ordem 0 e 1, respectivamente;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  – raízes que satisfazem  $J_1(\alpha n)Y_0(\alpha) - Y_1(\alpha n)J_0(\alpha) = 0$ ;

Para a condição de deformações verticais iguais:

$$\frac{u(r, t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_r} \left[ \ln\left(n \frac{r}{r_e}\right) - \frac{\left(\frac{r}{r_e}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{2} \right] \exp\left(\frac{-T_{rs}}{\frac{f(n)}{8} + V_r}\right) \quad (404)$$

E:

$$\bar{U}_r = 1 - \exp\left[\frac{-8T_{rs}}{f(n) + 8V_r}\right] \quad (405)$$

O Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  e o Fator Viscosidade Radial  $V_r$  são os mesmos para as equações (402), (403), (404) e (405):

$$T_{rs} = \frac{c_{rs}t}{d_e^2} \quad (406)$$

E:

$$V_r = \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w d_e^2} \quad (407)$$

O coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$  tem dimensão igual e formulação similar à do coeficiente de adensamento radial  $c_r$  da teoria de Barron (1948). A diferença está no parâmetro de compressibilidade, que no presente caso é  $a_{vs}$  e não  $a_v$ .

$$c_{rs} = \frac{k_r(1 + e)}{a_{vs}\gamma_w} \quad (408)$$

Onde  $a_{vs}$  é dado por  $a_{vs} = -\frac{\partial e}{\partial \sigma'_{vs}}$ . A variação de índice de vazios compreende tanto recalque primário quanto recalque secundário e o termo  $\sigma'_{vs}$  é a parcela sólido-sólido da tensão efetiva.

O Fator Tempo Radial foi identificado por  $T_{rs}$  justamente para se diferenciar do Fator Tempo Radial  $T_r$  da teoria de Barron (1948).

A razão  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  e a porcentagem média de adensamento  $\bar{U}_r$  para a condição de deformações verticais iguais com coeficiente de viscosidade  $\eta$  variável também estão reproduzidas abaixo. Elas dependem do mesmo Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  dos casos com  $\eta$  constante (com o mesmo coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$ ).

$$\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} \left\{ \frac{X_1 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_1 \lambda\right) \exp(X_2 T_{rs}) - X_2 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_2 \lambda\right) \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_1 \lambda\right) - X_2 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_2 \lambda\right)} \right\} \left[ \ln \left( n \frac{r}{r_e} \right) - \frac{\left(\frac{r}{r_e}\right)^2 - \frac{1}{n^2}}{2} \right] \quad (409)$$

E:

$$\bar{U}_r = 1 + \frac{1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs}) - \frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] - X_2 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right]} \right\} \quad (410)$$

Ou ainda:

$$\bar{U}_r = 1 - \frac{V_{rf}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs}) - \frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})}{(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8}} \right\} \quad (411)$$

O Fator Viscosidade Radial desta solução é relativo ao valor final de  $\eta$  (ou seja,  $\eta_f$ ), sendo denominado Fator Viscosidade Radial final  $V_{rf}$ . Esse parâmetro é definido por:

$$V_{rf} = \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w d_e^2} \quad (412)$$

Os parâmetros  $X_1$  e  $X_2$  também são adimensionais, descritos pela seguinte equação:

$$X_i = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2 - 4\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (413)$$

O parâmetro  $\lambda$  que aparece nas equações de  $X_1$  e  $X_2$  e também em  $\overline{U_r}$  é uma relação entre os coeficientes de viscosidade final e inicial, tal que  $\lambda = \frac{\eta_f - \eta_0}{\eta_f}$ . Isto significa que está embutido o Fator Viscosidade Radial inicial  $V_{r0}$ , expresso pela relação  $V_{r0} = V_{rf}(1 - \lambda)$ . Com isso, a solução depende de dois Fatores Viscosidade Radiais  $V_r$ , sendo um inicial ( $V_{r0}$ ) e outro final ( $V_{rf}$ ), tal que  $V_{rf} \geq V_{r0}$ .

A simplificação apresentada por Coelho (1997) para o caso de deformações verticais iguais de Barron (1948) (item 1.3.3) pode ser aplicada mesmo considerando a viscosidade. A solução simplificada das duas teorias de deformações verticais iguais desenvolvidas nesta tese está no Apêndice D.

### 3.2 Influência da viscosidade

A diferença imediata entre as teorias propostas nesta tese e as teorias de Barron (1948) é a influência da viscosidade no processo do adensamento. Assim como ocorre na teoria de Andrade (2014) em comparação com a de Terzaghi e Fröhlich (1936), a presença da viscosidade retarda o adensamento. Desse modo, as soluções apresentadas nesta tese fornecem uma evolução dos recalques no tempo mais lenta do que as teorias de Barron (1948) e o agente causador desse “atraso” é a viscosidade, regida pelos Fatores Viscosidade Radiais ( $V_{r0}$ ,  $V_{rf}$  e  $V_r$ ).

Por outro lado, os Fatores Viscosidade Radiais são inversamente proporcionais ao quadrado de  $d_e$ . Isto significa que a influência da viscosidade se faz mais marcante no laboratório do que no campo. Se o valor de  $d_e$  no campo for cerca de 100 vezes maior do que no laboratório, os Fatores Viscosidade Radiais no campo seriam 10.000 vezes menores do que no laboratório. Isso faz as curvas tenderem à solução clássica de Barron (1948), que não leva em conta a viscosidade.

### 3.2.1 Coeficiente de viscosidade constante

As soluções que consideram  $\eta$  constante são bastante similares às soluções de Barron (1948) (equações (35), (38), (44) e (45)). Conseqüentemente, o formato das curvas também é bastante similar, como pode ser observado nas figuras do item 2.2.1.3 e 2.2.2.3 e também na Figura 110.

Quando  $V_r = 0$  (ou seja, quando  $\bar{\eta} = 0$ ), as expressões para excesso de poropressão e para porcentagem média de adensamento se transformam naquelas de Barron (1948). Para  $V_r \leq 0,01$ , as curvas de porcentagem média de adensamento já são praticamente coincidentes com a solução de Barron (1948). O efeito da viscosidade acaba sendo irrelevante.

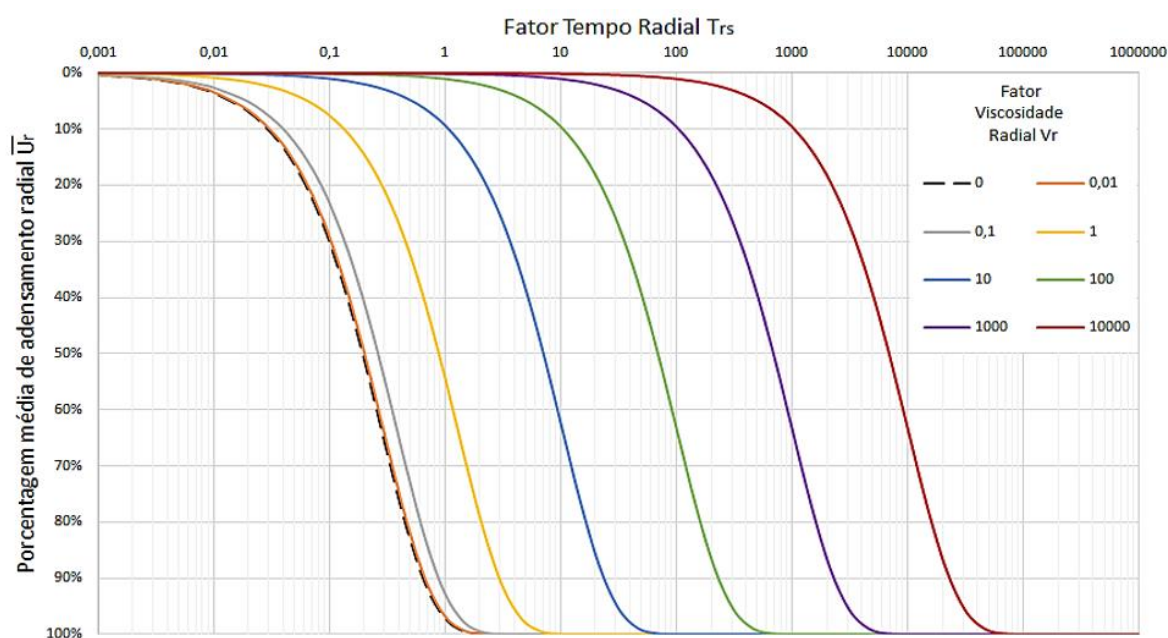


Figura 110 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial para a condição “equal strain” com  $\eta$  constante e diversos valores de  $V_r$ .

Na condição de deformações verticais livres, a presença da viscosidade faz com que o excesso de poropressão inicial não seja igual ao acréscimo de tensão total ao longo do raio de influência do dreno. Este efeito é mais notável próximo à fronteira drenante, devido à velocidade de deformação ser maior nessa região. Por outro lado, no limite da influência do dreno ( $r = r_e$ ), o excesso de poropressão inicial é praticamente igual ao acréscimo de tensão total desde que  $V_r \leq 0,01$ . Tanto na condição de deformações verticais livres quanto na de deformações verticais iguais

o excesso de poropressão inicial médio é menor do que o acréscimo de tensão total médio.

Um detalhe interessante é que tanto a teoria de Andrade (2014) quanto as teorias de deformações verticais livres e deformações verticais iguais com  $\eta$  constante apresentadas nesta tese possuem as mesmas diferenças em relação às teorias clássicas de Terzaghi e Fröhlich (1936) e Barron (1948). A expressão do excesso de poropressão é dividida por um termo que é função da viscosidade, reduzindo assim o valor do excesso de poropressão inicial, e a variável tempo presente na exponencial é dividida pelo mesmo termo. A saber:  $1 + VM^2$  na teoria de Andrade (2014) (equações (19) e (21)),  $1 + 4\alpha^2 n^2 V_r$  na solução para deformações verticais livres (equações (168) e (187)) e  $1 + \frac{8}{f(n)} V_r$  na solução para deformações verticais iguais (equações (264) e (277)). O efeito viscoso, que é dependente da velocidade de deformação, reduz o excesso de poropressão inicial e causa um “atraso” nas curvas em comparação com as soluções clássicas. Quanto maior a distância de drenagem (que reduz os Fatores Viscosidade), menores são as velocidades de deformação e, conseqüentemente, menor a influência viscosa e maior o excesso de poropressão inicial. Nota-se ainda que todos esses termos se reduzem à unidade se a viscosidade for nula.

Devido a isso, a porcentagem de adensamento do caso de deformações verticais iguais com  $\eta$  constante (equação (405)) pode ser convertida na equação para deformações verticais iguais de Barron (1948), fazendo-se uma simples adaptação no coeficiente de adensamento radial:

$$c_r^* = c_r \left[ \frac{f(n)}{f(n) + 8V_r} \right] \quad (414)$$

Assim, basta calcular o coeficiente de adensamento radial corrigido  $c_r^*$  e aplicá-lo na solução clássica de Barron (1948). Essa propriedade pode ser observada na Figura 110, em que curvas com diferentes valores de  $V_r$  parecem “deslocadas” entre si. Para qualquer porcentagem  $\bar{U}_r$ , a distância entre uma determinada curva e a curva sem viscosidade é sempre a mesma, pois os Fatores Tempo Radiais  $T_{rs}$  estão relacionados pelo mesmo fator que relaciona os



coeficientes de adensamento radiais na equação (414) – lembrando que a escala horizontal é logarítmica. Consequentemente, a distância entre quaisquer duas curvas também é sempre a mesma para qualquer porcentagem.

Apesar de agora existirem teorias considerando a viscosidade tanto para adensamento com fluxo vertical (Andrade, 2014) quanto para fluxo radial (presente tese), não é possível aplicar a solução de Carrillo (1942) para fluxo combinado. A presença de derivadas mistas (em  $r$  e  $t$  ou em  $z$  e  $t$ ) nas equações diferenciais que regem o fenômeno impede que o simples produto de soluções seja solução.

### 3.2.2 Coeficiente de viscosidade variável

A função de variação do coeficiente de viscosidade  $\eta$  foi criada de tal forma que ele crescesse ao longo do tempo (conforme defendido por Andrade, 2014), a partir de um valor inicial  $\eta(e) = \eta_0$ , até permanecer aproximadamente constante durante o secundário, quando  $\eta(e) = \eta_f$ .

Isso causou o aumento da ordem da equação diferencial, que exigiu mais uma condição inicial. Admitiu-se que a deformação inicial seja causada apenas pela dissipação dos excessos de poropressão médio, conforme sugere a Figura 64. Isso é o mesmo que dizer que não há variação da parcela viscosa no instante  $t = 0$ , ou seja,  $\left. \frac{d\sigma_{v\eta}}{dt} \right|_{t=0} = 0$ . Devido a essa nova condição, as equações de excesso de poropressão e de porcentagem média de adensamento ficaram muito mais complexas do que aquelas para  $\eta$  constante – basta comparar as equações (410) e (405), por exemplo. No entanto, caso se admita que  $\eta_f = \eta_0$  (ou seja, caso não exista variação de  $\eta$ ), as soluções se tornam coincidentes.

As curvas de porcentagem média de adensamento com coeficiente de viscosidade  $\eta$  variável apresentaram o efeito da “dupla onda” quando  $T_{rs}$  é plotado em escala logarítmica na abcissa. Sua existência de fato só foi possível graças à condição de  $\eta$  variável. A teoria de Andrade (2014) para fluxo vertical (que utiliza  $\eta$  constante) e as teorias para fluxo radial para as condições de deformações verticais livres e deformações verticais iguais com  $\eta$  constante apresentadas nesta tese não foram capazes de reproduzir o efeito.

A equação para cálculo da porcentagem média de adensamento é composta de duas exponenciais. São elas as responsáveis pelo efeito de “dupla onda”: uma exponencial tende a zero bem mais rapidamente do que a outra, o que faz a curva apresentar uma falsa estabilização precoce (fim do adensamento primário), até que a segunda exponencial se desenvolva e complete o restante da compressão (adensamento secundário). A “onda” do primário para altos valores de  $V_{rf}$  equivale à solução clássica de Barron (1948), desde que se divida  $\bar{U}_r$  na presente teoria por  $R$ .

A transição entre as “ondas” de primário e secundário se mostrou como um “patamar” praticamente horizontal, sem a característica inclinação conhecida pelo parâmetro  $C_\alpha$  da curva  $e$  vs  $t$  (log). Uma função diferente para a parcela viscosa da tensão vertical efetiva talvez fosse capaz de reproduzir essa inclinação.

A razão  $R$  corresponde à porcentagem média de adensamento na qual ocorre o referido “patamar”. Essa razão tem relação direta com Fator Viscosidade Radial inicial  $V_{r0}$ , de modo que  $V_{r0} = \frac{f(n)}{8} \left( \frac{1-R}{R} \right)$ . Na prática, isto significa dizer que a parcela de primário (e secundário) em relação ao total é definida apenas pelo valor inicial do coeficiente de viscosidade, enquanto o valor final interfere somente no tempo necessário para o secundário se manifestar após o “fim” do primário.

Desse modo, para um mesmo valor de  $V_{r0}$ , as curvas apresentam o mesmo  $R$  e apenas diferem no tempo de “fim” do adensamento – que depende de  $V_{rf}$ . Curvas com mesmo  $V_{rf}$  apresentam o mesmo tempo de “fim” do adensamento, mas com valores de  $R$  diferentes – dependentes de  $V_{r0}$ . No entanto, quando  $V_{rf}$  é pequeno não há como identificar graficamente a transição do adensamento primário para o secundário – para  $V_{r0} \leq 0,1$ , a “dupla onda” só aparece para valores de  $V_{rf}$  superiores a 10. Lembrando que, teoricamente, o fim dos adensamentos primário e total é em um tempo infinito e que o adensamento secundário ocorre simultaneamente ao primário.

Essas características podem ser observadas nas soluções gráficas do item 2.2.3.4 e nas curvas da Figura 111 e Figura 112 abaixo, traçadas para valores pré-determinados de  $R$ . Na Figura 111 também está incluída a curva de adensamento primário segundo a equação (400). Interessante notar como as curvas da Figura 112 se assemelham aos tipos I, II e III de Leonards e Girault (1961) (Figura 21).

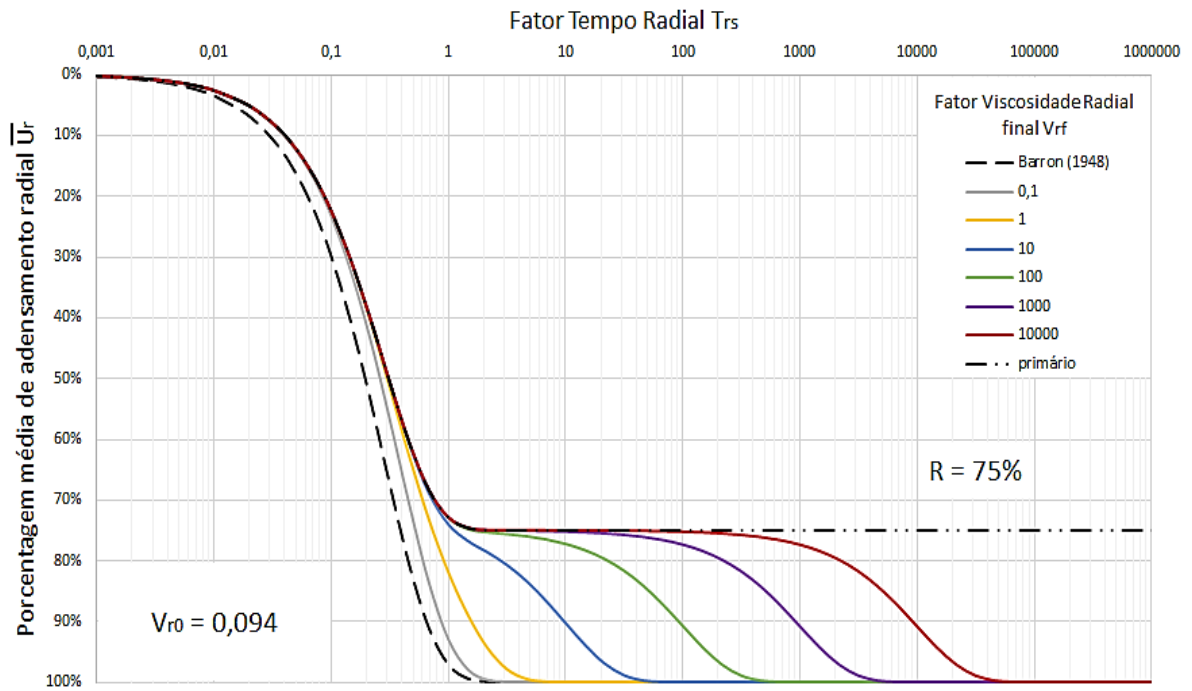


Figura 111 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,094$  ( $R = 0,75$ ) e diversos valores de  $V_{rf}$ .

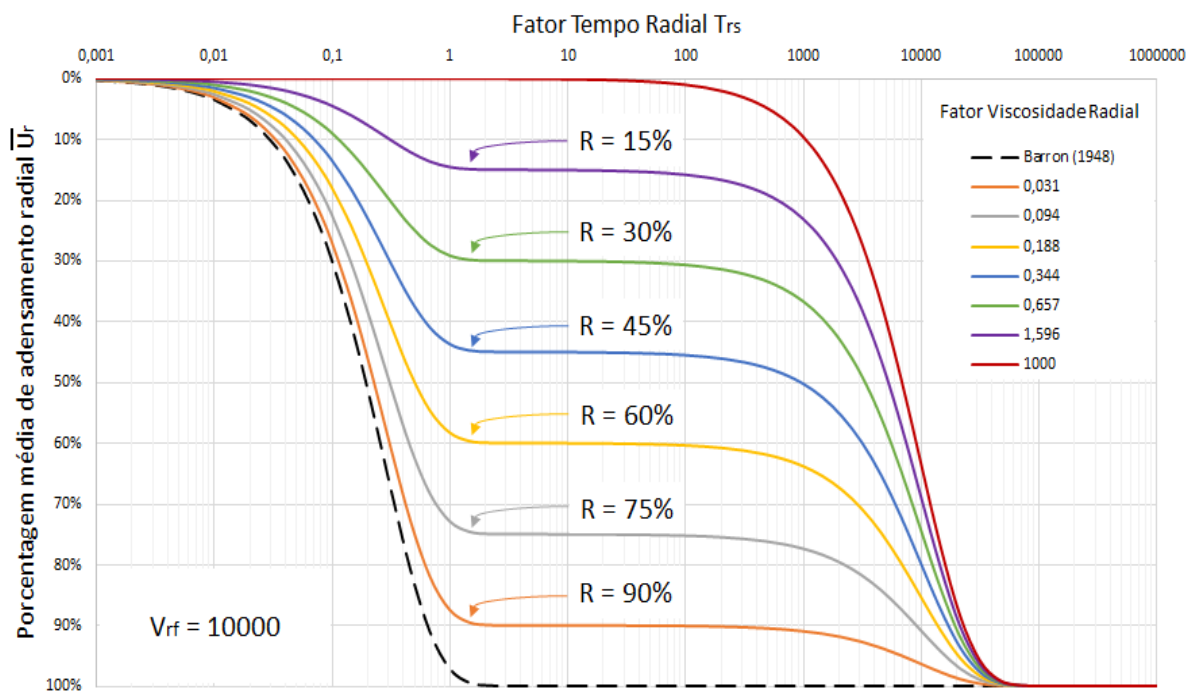


Figura 112 – Comparação entre as curvas de porcentagem média de adensamento radial “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{rf} = 10.000$  e diversos valores de  $V_{r0}$ .

As curvas com  $V_{r0} \leq 0,01$  também são muito próximas às da solução de Barron (1948), assim como no caso de  $\eta$  constante, pois o adensamento secundário tende a ser reduzido ( $R$  é próximo de 1). Por outro lado, para curvas com  $V_{r0} > 0,1$  a compressão secundária começa a atingir magnitudes muito elevadas.

A relação entre  $V_{r0}$  e  $R$  revela que o valor de  $R$  obtido em um ensaio de laboratório é diferente do verificado em campo, mesmo que  $n$  e  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$  sejam iguais. Isto se dá porque  $R$  é função do diâmetro de influência  $d_e$ , presente na expressão de  $V_{r0}$ . Como as distâncias de drenagem no campo são muito maiores do que no laboratório,  $V_{r0}$  se aproxima de zero e, conseqüentemente,  $R$  tende a 1. Uma discussão mais aprofundada sobre isso será feita no item 3.5.

Foi possível verificar ainda que a razão  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$ , que é a relação entre o excesso de poropressão inicial médio e o acréscimo de tensão total aplicado, é igual a  $R$ . Esse resultado já podia ser vislumbrado na Figura 64, utilizada para explicar o coeficiente de compressibilidade  $a_{vs}$  (item 2.1). Se os segmentos AJ e BI são paralelos, então os triângulos ACJ e BCI são semelhantes. Uma vez que a razão entre os segmentos CI (compressão primária) e CJ (compressão total) corresponde a  $R$ , a razão entre os segmentos BC e AC também deve valer  $R$ . Sendo BC a medida do excesso de poropressão inicial médio e AC o acréscimo de tensão total, tem-se  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v} = R$ .

Em termos numéricos, um caso em que o recalque primário medido em laboratório fosse 75% do recalque total, o excesso de poropressão inicial médio seria 75% do acréscimo de tensão total. Esse valor contraria o senso comum, pois se espera que o excesso de poropressão inicial seja igual (ou praticamente igual) ao acréscimo de tensão total aplicado. Em primeiro lugar, deve-se ter em mente que este resultado é analítico e, portanto, fruto das hipóteses simplificadoras e das condições impostas para resolução do problema. Logo, hipóteses e condições diferentes proporcionariam resultados diferentes. Como exemplo, no instante do carregamento o solo se encontra em uma linha de velocidade de deformação nula, diferentemente dos estágios de carga nos ensaios de adensamento. Em segundo lugar, as medições de excesso de poropressão não costumam ser realizadas ao longo de toda a distância de drenagem, para que se calcule a média, e sim apenas

em um único ponto – em geral, no ponto onde o adensamento transcorre de forma mais lenta (ver item 1.2.5). Ao contrário das teorias clássicas, quando se considera a viscosidade o excesso de poropressão inicial varia espacialmente.

Em todo caso, essa discussão diz respeito apenas aos ensaios de laboratório. Como já mencionado,  $R$  tende a 1 no campo e, conseqüentemente, a razão  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$  no campo também tende à unidade.

Vale ainda comentar que o excesso de poropressão inicial das duas soluções para deformações verticais iguais é o mesmo desde que se faça  $V_r = V_{r0}$  (ou seja,  $\eta_0 = \eta_f = \bar{\eta}$ ), como era de se esperar. É possível observar essa característica fazendo-se  $t = 0$  e  $\lambda = 0$  nas equações (404) e (409).

Em relação à dissipação do excesso de poropressão ao longo do tempo, o valor de  $V_{rf}$  tem pouca influência se comparado com  $V_{r0}$ , como mostra a Figura 113.

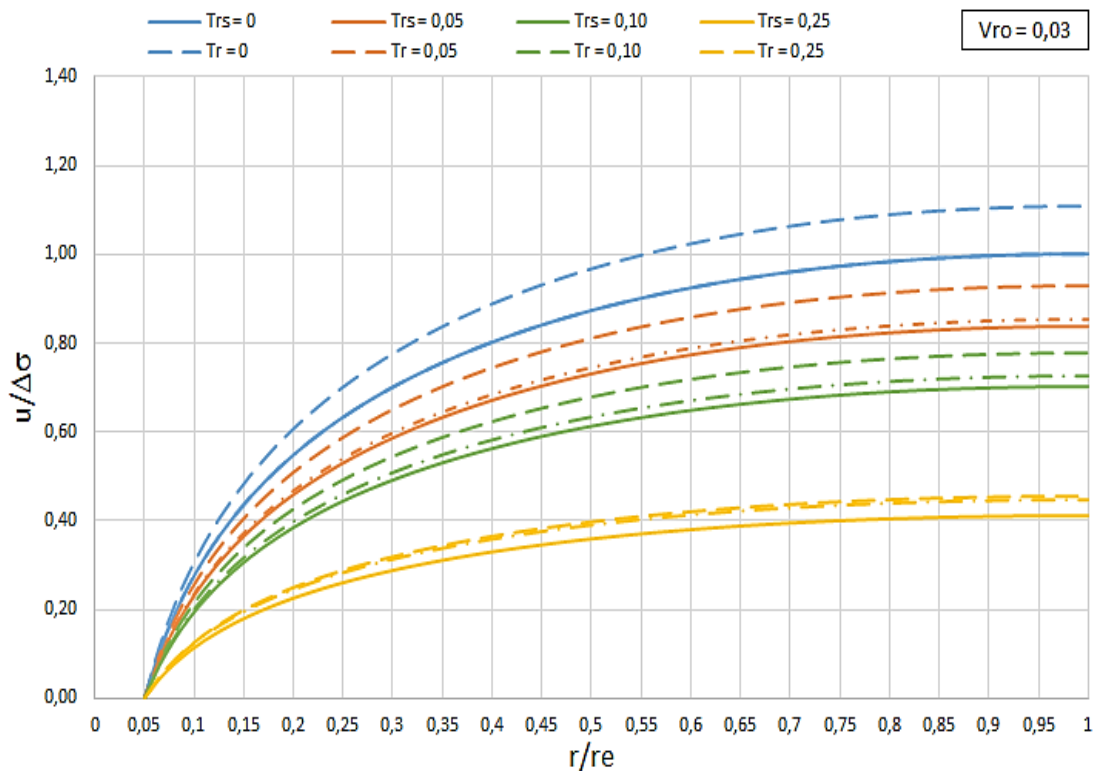


Figura 113 – Isócronas  $u/\Delta\sigma$  vs  $r/r_e$  do caso “equal strain” para  $n = 20$ ;  $V_{r0} = 0,03$  e  $V_{rf} = 10.000$  (linha cheia) em comparação com  $V_{r0} = V_{rf} = 0,03$  (traço-e-ponto) e com Barron (1948) (tracejado).

### 3.3 Comparação entre as soluções encontradas

A Figura 114 compara as porcentagens de adensamento das soluções para os casos de deformações verticais livres (linha cheia) e deformações verticais iguais (linha tracejada) com coeficiente de viscosidade  $\eta$  constante. Todas foram calculadas para  $n = 20$ . A comparação entre as curvas mostra que, mesmo com a consideração da viscosidade, os resultados continuam bastante similares. É recomendável, portanto, a utilização da equação de deformações verticais iguais, dada a sua enorme simplicidade em comparação com a de deformações verticais livres.

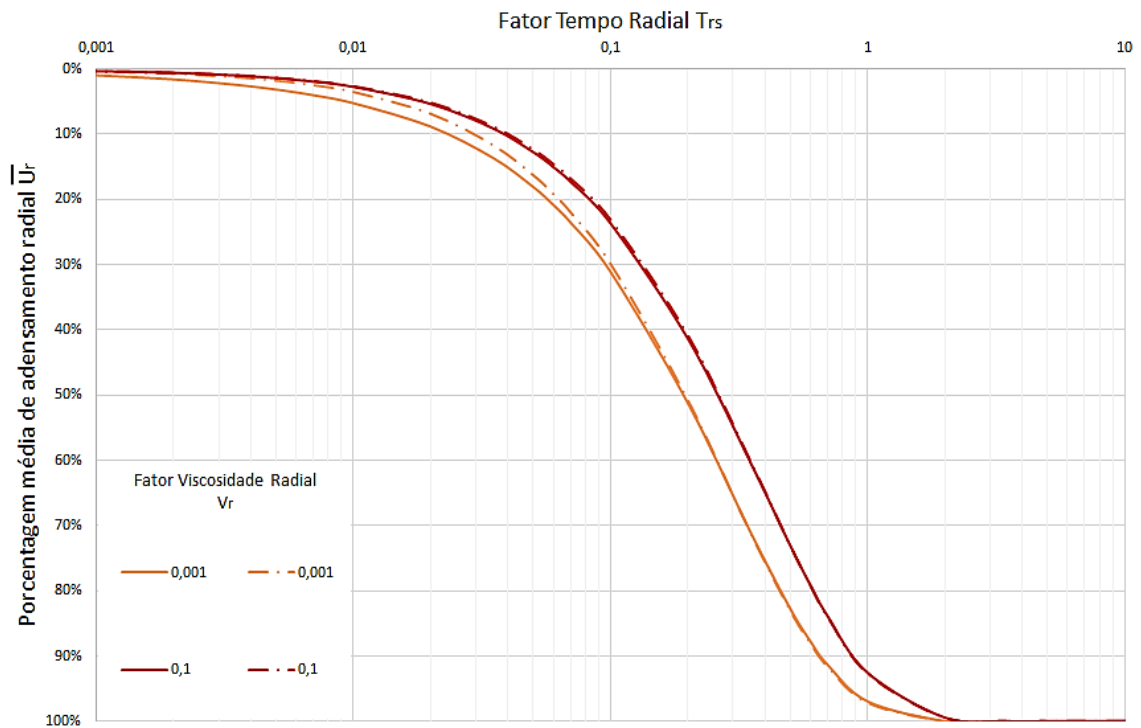


Figura 114 – Comparação entre as curvas “free strain” (linha cheia) e “equal strain” (linha tracejada) com  $\eta$  constante e  $n = 20$ .

As curvas são coincidentes a partir de determinadas porcentagens, assim como na teoria de Barron (1948). Quanto mais alto o valor de  $V_r$ , menores são as porcentagens  $\bar{U}_r$  a partir das quais ocorre a convergência entre as soluções.

Esse efeito é mais facilmente explicado através da equação do caso de deformações verticais iguais (equação (405)). Desde as soluções clássicas de Barron (1948) já se sabe que o aumento de  $n$  faz as soluções para deformações verticais iguais e deformações verticais livres convergirem entre si (Figura 51). O aumento de  $n$  na equação (405) causa a diminuição da fração que multiplica o Fator Tempo no expoente da função exponencial, ou seja, quanto menor essa fração, maior é a proximidade entre as duas soluções. E como o Fator Viscosidade Radial está no denominador da fração, seu aumento também reduz o expoente. Por consequência, seu aumento também causa a convergência entre as soluções.

Um detalhe interessante diz respeito ao excesso de poropressão inicial médio  $\bar{u}_0$ . Nas teorias clássicas (Barron, 1948), o excesso de poropressão médio era igual nas teorias de deformações verticais livres e deformações verticais iguais apenas para  $t = 0$  (em que  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v} = 100\%$ ) e  $t \rightarrow \infty$  (em que  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v} = 0$ ), embora os valores nas duas teorias fossem bastante próximos nos demais tempos. Com a consideração da viscosidade, nem mesmo em  $t = 0$  os valores coincidem, ainda que permaneçam muito próximos. A Tabela 1 compara o excesso de poropressão inicial médio obtido nas teorias de deformações verticais livres (equação (402)) e deformações verticais iguais (equação (404)), para diferentes valores de  $V_r$  e  $n = 20$ .

Tabela 1 – Excesso de poropressão inicial médio nas soluções “free strain” e “equal strain” para diferentes valores de  $V_r$ .

$V_r$	$\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$ (“free strain”)	$\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$ (“equal strain”)
0,001	99,0%	99,6%
0,003	98,0%	98,9%
0,006	96,7%	97,9%
0,010	95,1%	96,6%
0,030	88,7%	90,4%
0,060	81,0%	82,4%
0,100	72,6%	73,8%

Como já visto, na condição de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável o valor de  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$  equivale a  $R$ , que é a razão entre as magnitudes das compressões primária e total. O autor acredita que o mesmo valha para a condição de

deformações verticais livres com  $\eta$  variável, ainda que não tenha sido desenvolvida nesta tese uma solução para essa condição para que se comprove.

A Figura 115 compara as porcentagens de adensamento das soluções para deformações verticais iguais. Todas as curvas foram calculadas para  $n = 20$ .

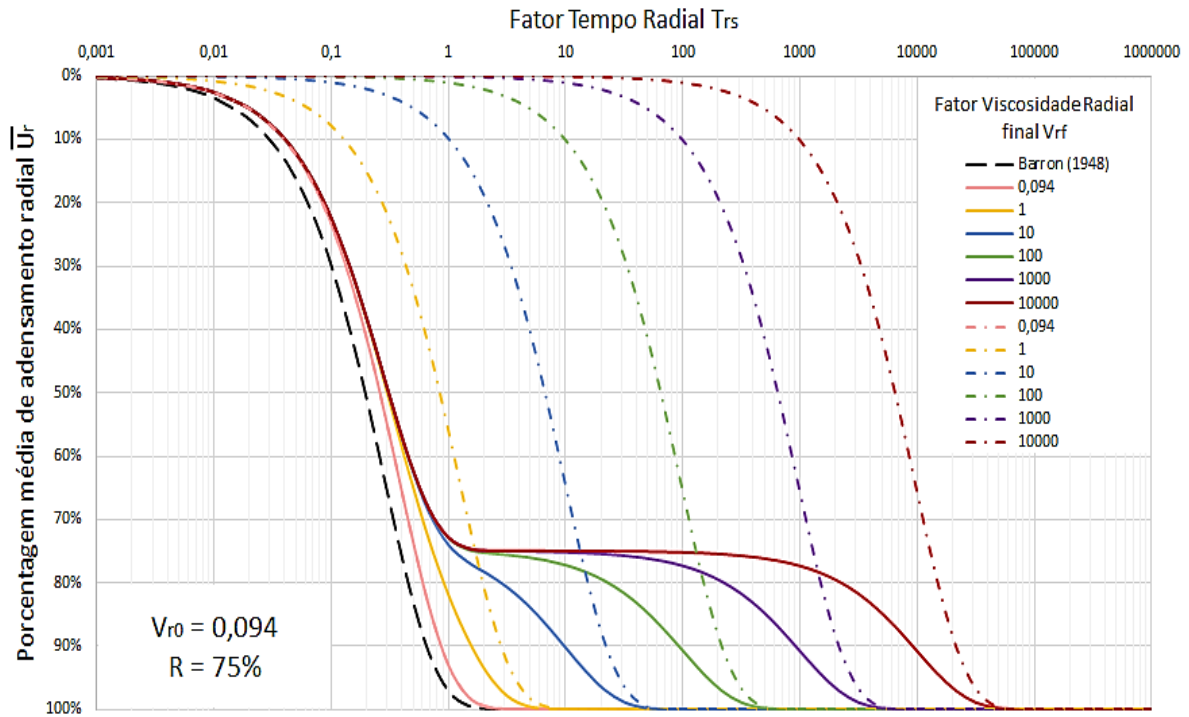


Figura 115 – Comparação entre curvas “equal strain” para  $n = 20$  e diferentes valores de  $V_{rf}$ ,  $V_{r0} = 0,094$  (linha cheia) em comparação com  $V_{r0} = V_{rf}$  (traço-e-ponto).

As curvas com  $\eta$  variável foram calculadas para  $V_{r0} = 0,094$  ( $R = 75\%$ ) e diferentes valores de  $V_{rf}$ . As curvas com  $\eta$  constante foram calculadas para diferentes valores de  $V_r$ , mas sendo iguais aos valores de  $V_{rf}$  das curvas com  $\eta$  variável. Os pares de curvas sempre “terminam” o processo de adensamento ao mesmo tempo, mas a evolução no tempo é nitidamente diferente. As curvas com  $\eta$  constante apresentam deformação quase nula durante um elevado período de tempo, antes de se mobilizarem. Apenas para  $V_{rf} \leq 0,1$ , que são valores muito próximos de  $V_{r0}$ , as curvas coincidem.

Esse comportamento é explicado pela relação entre  $V_{rf}$  e  $V_{r0}$ . Enquanto  $V_{rf}$  é responsável pelo tempo necessário para que o adensamento secundário se



manifeste,  $V_{r0}$  é responsável pela magnitude da compressão secundária em relação ao recalque total. No entanto, deve-se lembrar que as curvas com  $\eta$  constante equivalem às curvas com  $\eta$  variável quando  $V_{rf} = V_{r0}$ . Assim, se  $V_{rf}$  cresce,  $V_{r0}$  também cresce e, como  $V_{r0} = \frac{f(n)}{8} \left( \frac{1-R}{R} \right)$ ,  $R$  diminui significativamente. Desse modo, o recalque primário tende a zero e as curvas se mantêm praticamente horizontais por um tempo considerável. Para  $V_{r0} = 10$ , por exemplo, se  $n = 20$ ,  $R \cong 2,7\%$ .

### 3.4 Comparação com outras teorias

Dada a importância que as teorias de Taylor e Merchant (1940), de Andrade (2014) e de Berry e Wilkinson (1969) têm para a presente tese, particularmente em relação à solução para condição de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável, é válido discutir um pouco mais sobre elas.

Segundo Andrade (2009), a consideração da compressão secundária como fenômeno viscoso aparece de forma implícita no trabalho de Taylor e Merchant (1940). E as curvas obtidas nesta tese para fluxo radial, no caso de  $\eta$  variável, se mostraram similares às de Taylor e Merchant (1940), mesmo estas sendo relativas a fluxo vertical. Mais especificamente, ambas as teorias foram capazes de reproduzir o efeito da “dupla onda” observadas em ensaios de adensamento de longa duração feitos em laboratório (Figura 19, Figura 25, Figura 26 e Figura 27). Uma investigação mais detalhada pode ser feita para entender como as duas abordagens do efeito viscoso se comparam.

A equação diferencial da teoria de Taylor e Merchant (1940) (equação (8)) é:

$$-\frac{de}{dt} = a_v \frac{\partial \sigma_v'}{\partial t} + \mu [a(\sigma_v' - \sigma_{v0}') - (e_0 - e)] \quad (415)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$-\frac{d^2e}{dt^2} = a_v \frac{\partial^2 \sigma_v'}{\partial t^2} + \mu \left( a \frac{\partial \sigma_v'}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (416)$$

De acordo com o Princípio das Tensões Efetivas, e admitindo-se que a tensão total não varia ( $\frac{\partial \sigma_v}{\partial t} = 0$ ):

$$-\frac{d^2e}{dt^2} = -a_v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \left( -a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (417)$$

Rearrmando os termos:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a_v}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu} \frac{d^2e}{dt^2} \quad (418)$$

Colocando  $a$  em evidência:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a_v}{\mu a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\mu a} \frac{\partial e}{\partial t} \right) \right] \quad (419)$$

Na teoria desenvolvida nesta tese, a variação do índice de vazios ao longo do tempo foi descrita por:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_{vs} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma'_{v\eta}}{\partial t} \right) \quad (420)$$

O coeficiente  $a_v$  relaciona o recalque primário à variação da tensão efetiva, enquanto  $a$  relaciona o recalque total (primário + secundário) à variação da tensão efetiva. Já o coeficiente  $a_{vs}$  aqui utilizado relaciona o recalque total (primário + secundário) à variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva. Na presente teoria, se as curvas de compressão são paralelas entre si, o valor de  $a_{vs}$  deve ser igual ao de  $a_v$  – algo que pôde ser observado na Figura 64. Na teoria de Taylor e Merchant (1940), por outro lado,  $a$  não é igual a  $a_v$  (Figura 29). Porém, tanto  $a$  quanto  $a_{vs}$  são inclinações da reta que liga os pontos  $(e_0; \sigma'_{v0})$  e  $(e_f; \sigma'_{vf})$ .

Aproximando-se  $a = a_{vs}$  e igualando-se as equações (420) e (419), tem-se:

$$\frac{\partial \sigma'_{v\eta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a_v}{\mu a_{vs}} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\mu a_{vs}} \frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (421)$$

Ou ainda:

$$\sigma'_{v\eta} = - \left[ \frac{1+e}{\mu a_{vs}} - \frac{a_v(1+e)}{\mu a_{vs}} \frac{\partial u}{\partial e} \right] \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (422)$$

Sendo a parcela viscosa da tensão efetiva o produto entre a velocidade de deformação específica e um coeficiente de viscosidade  $\eta$ , obtém-se:

$$\eta(e) = \frac{1+e}{\mu a_{vs}} - \frac{a_v(1+e)}{\mu a_{vs}} \frac{\partial u}{\partial e} \quad (423)$$

A estrutura da equação (423) é extremamente semelhante à função  $\eta(e)$  proposta nesta tese (equação (292)). O termo  $\frac{1+e}{\mu a_{vs}}$  corresponde a  $\eta_f$ , enquanto o termo  $\frac{a_v(1+e)}{\mu a_{vs}}$  corresponde a  $\lambda a_u \eta_f$ .

O Fator  $F$  de Taylor e Merchant foi definido como:

$$F = \frac{\mu H_d^2}{R c_v} \quad (424)$$

Desenvolvendo  $c_v$ :

$$F = \frac{\mu a_{vs} \gamma_w H_d^2}{R k_v (1+e)} \quad (425)$$

Mas  $\frac{1+e}{\mu a_{vs}}$  corresponde a  $\eta_f$ , conforme sugere a equação (423). No caso de Andrade (2014), como  $\eta$  não varia, pode-se dizer que  $\eta_f = \bar{\eta}$ . Sabendo-se que o Fator Viscosidade  $V$  de Andrade (2014) foi definido como  $V = \frac{k_v \bar{\eta}}{\gamma_w H_d^2}$ , tem-se:

$$F = \frac{\gamma_w H_d^2}{R k_v \bar{\eta}} = \frac{1}{RV} \quad (426)$$

Chama a atenção que, de acordo com essa comparação, o Fator  $F$  é inversamente proporcional ao Fator Viscosidade  $V$  de Andrade (2014). Evidentemente, a comparação ideal seria entre  $F$  e o valor final de  $V$ , caso  $\eta$  variasse. Vale lembrar que  $V$  é similar ao Fator Viscosidade Radial  $V_r$  desta tese.

A “dupla onda” de Taylor e Merchant (1940) só aparece a partir de  $F = 0,1$ , de forma discreta, e  $F = 0,01$ , de forma nítida. Como  $R$  é relativamente próximo da unidade, o Fator Viscosidade (final) necessário para que a “dupla onda” apareça é no mínimo 10, ou até mesmo 100. Isto foi verificado nas curvas de porcentagem de adensamento com viscosidade variável apresentadas nesta tese. No caso do trabalho de Andrade (2014), foram plotadas curvas apenas até  $V = 1$ , possivelmente pelo fato de os excessos de poropressão se tornarem muito reduzidos com o aumento da influência da viscosidade quando se adota  $\eta$  constante. A teoria de Andrade (2014) naturalmente não é capaz de reproduzir o efeito de “dupla onda” (por não fazer variar o coeficiente de viscosidade  $\eta$ ), mas, caso fosse, o efeito talvez não fosse notado se os valores finais do Fator Viscosidade continuassem baixos. Vale lembrar que Martins (2005) descreve que o valor de  $F$  para ensaios de laboratório convencionais é da ordem de  $10^{-4}$ , o que corresponderia a  $V \cong 10.000$ .

Deve-se mencionar ainda que o ajuste da curva teórica de Andrade (2014) à curva experimental (mostrado na Figura 48) é tal que cada valor de  $V$  está associado a um coeficiente de adensamento diferente. Isso decorre da adoção de coeficiente de viscosidade constante, que “atrasa” a curva de porcentagem média de adensamento por inteiro. Na presente tese, a variação do coeficiente de viscosidade praticamente não interferiu nas curvas de porcentagem média de adensamento primário, que se mostraram quase coincidentes no caso de ensaios de laboratório e equivalentes à solução clássica de Barron (1948) – isto é, mesmos valores de coeficiente de adensamento radial, independentemente do coeficiente de viscosidade. O autor acredita que essa mesma propriedade deve ser observada em uma teoria de adensamento com drenagem vertical e  $\eta$  variável.

Comparando-se agora as parcelas viscosas não-lineares da presente tese (equação (293)) e da teoria de Berry e Wilkinson (1969) (equação (72)), nota-se que a não-linearidade foi trabalhada de formas opostas. Berry e Wilkinson (1969) adotaram uma função de potência para  $\frac{de}{dt}$  e mantiveram o coeficiente  $b_1$  constante devido à hipótese de pequenas deformações. Nesta tese, é o coeficiente  $\eta(e)$  que varia, multiplicando  $\frac{de}{dt}$  diretamente. Na prática, a porcentagem média de adensamento de Berry e Wilkinson (1969) não apresenta “dupla onda”, mas apresenta  $C_\alpha$ ; já a porcentagem média de adensamento da presente teoria não apresenta  $C_\alpha$ , mas apresenta “dupla onda”.

A Figura 116 compara as curvas de excesso de poropressão inicial da teoria para deformações verticais livres proposta nesta tese (linha cheia) com as de Berry e Wilkinson (1969), que também se baseia na condição de deformações verticais livres (linha tracejada). Os valores de  $V_r$  adotados são os que fornecem o mesmo excesso de poropressão inicial médio  $\bar{u}_0$  das curvas de Berry e Wilkinson (1969).

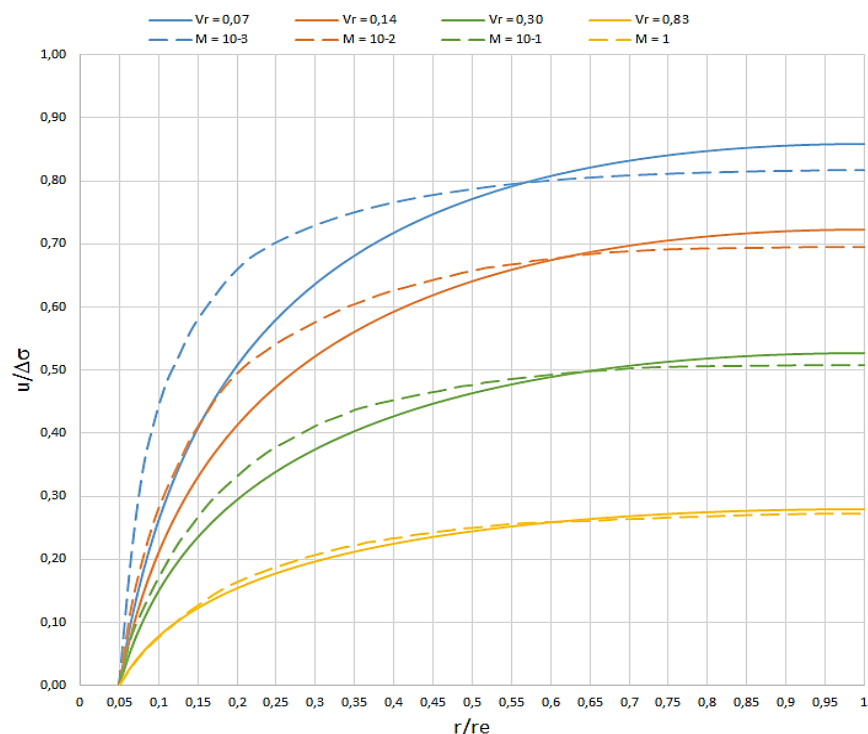


Figura 116 – Comparação entre o excesso de poropressão inicial da teoria “free strain” proposta nesta tese (linha cheia) com as da teoria de Berry e Wilkinson (1969) (linha tracejada).

Embora as curvas não sejam coincidentes, nota-se o mesmo comportamento geral. Próximo ao dreno, onde as velocidades de deformação são muito maiores, o excesso de poropressão é muito menor do que o acréscimo de tensão total (sendo nulo junto ao dreno), pois é nesta região que a parcela viscosa da tensão efetiva é maior. Nas regiões mais afastadas do dreno, o excesso de poropressão cresce e se aproxima do acréscimo de tensão total quanto menor for a influência da viscosidade.

Berry e Wilkinson (1969) indicaram por setas nas curvas de porcentagem média de adensamento (Figura 61) os instantes em que o excesso de poropressão é praticamente nulo no limite do raio de influência do dreno – e, a partir de então, o adensamento seria regido apenas por fluência. Entretanto, esses instantes não correspondem ao tempo  $t_p$  de fim “prático” do adensamento primário. Os pontos indicados por Berry e Wilkinson (1969) foram determinados em função do adensamento em  $r = r_e$ , enquanto  $t_p$  é encontrado na curva de porcentagem média de adensamento, que leva em conta os valores médios de deformação. O limite do raio de influência do dreno é a região onde o adensamento transcorre de forma mais lenta, ou seja, o excesso de poropressão nessa região atinge um valor “praticamente zero” muito tempo depois do excesso de poropressão médio atingir o mesmo valor.

No entanto, é possível estimar a razão  $R$  entre os recalques primário e total na teoria de Berry e Wilkinson (1969) a partir das teorias propostas nesta tese. Supondo que as porcentagens médias de adensamento das condições de deformações verticais iguais e deformações verticais livres sejam aproximadamente iguais durante o adensamento primário, consideram-se duas hipóteses distintas:

- I) O valor de  $R$  é igual a  $\frac{\bar{u}}{\Delta\sigma_v}$  em  $t = 0$ , assim como ocorre na solução de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável;
- II) O valor de  $R$  é igual ao  $R$  da solução de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável que se ajustar da melhor forma possível durante o adensamento primário das curvas de Berry e Wilkinson (1969).

A Figura 117 compara os resultados obtidos por cada hipótese. Todas as curvas foram traçadas para  $n = 20$ . Estão indicados por pontos os instantes de início do “creep” de acordo Berry e Wilkinson (1969). A Tabela 2 lista os valores encontrados.

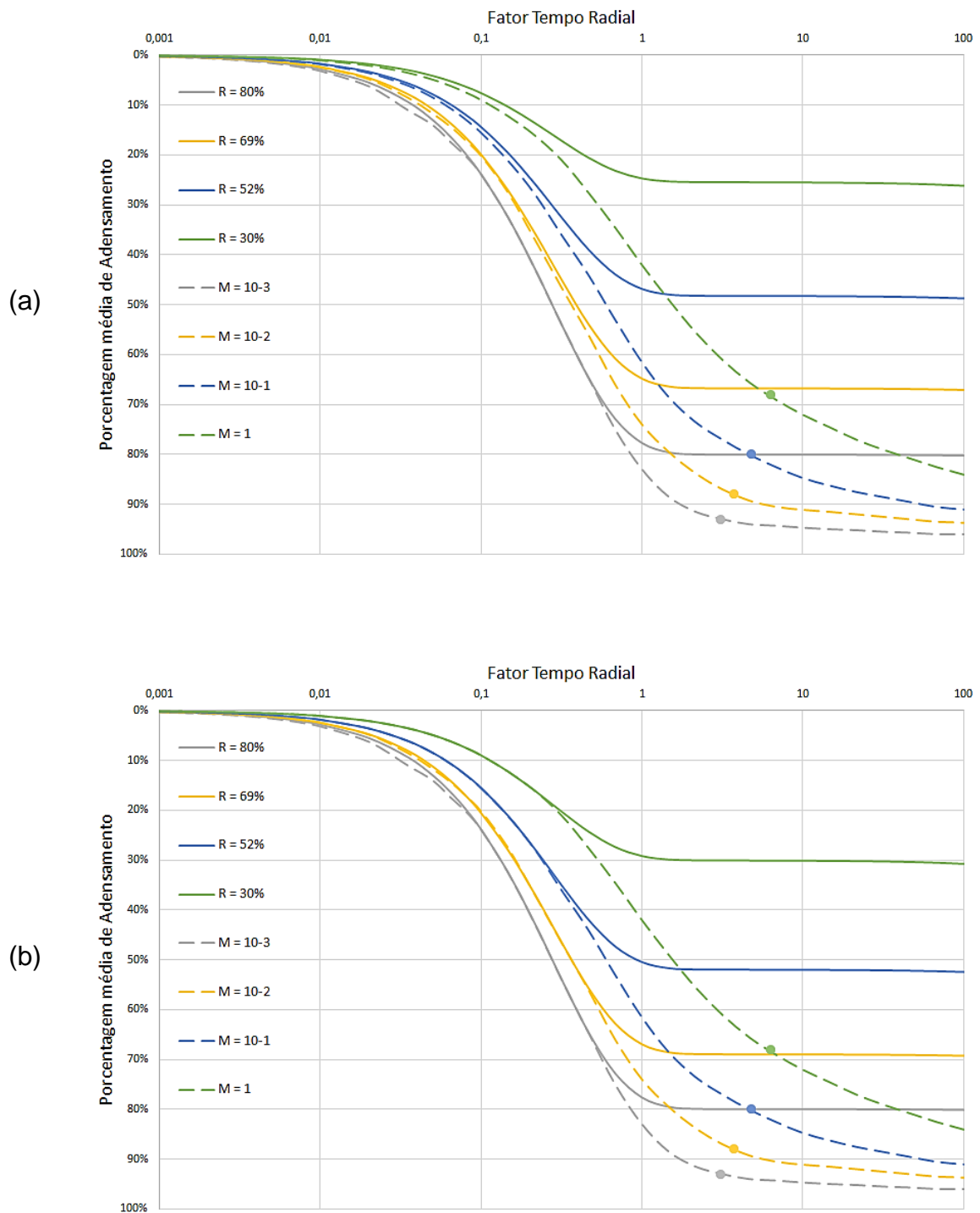


Figura 117 – Comparação entre a teoria “equal strain” para  $\eta$  variável (linha cheia) com a teoria de Berry e Wilkinson (1969) (linha tracejada) para  $n = 20$ . (a) Hipótese I. (b) Hipótese II.

Tabela 2 – Valores de  $V_{r0}$  e  $R$  encontrados de acordo com as duas hipóteses.

M	Hipótese I			Hipótese II	
	$R = \frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$ ("free strain")	$V_r = V_{r0}$	$R$ ("equal strain")	$V_{r0}$	$R$ ("equal strain")
$10^{-3}$	78,7%	0,07	80,1%	0,07	80,0%
$10^{-2}$	65,8%	0,14	66,8%	0,13	69,0%
$10^{-1}$	47,7%	0,30	48,3%	0,26	52,0%
1	25,2%	0,83	25,4%	0,66	30,0%

A análise da Figura 117 e da Tabela 2 mostra que os valores de  $R$  encontrados nas duas hipóteses são muito próximos e são tão mais próximos quanto menor for  $V_{r0}$ . Isto sugere que a igualdade  $R = \frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$  é aproximadamente válida mesmo na teoria de Berry e Wilkinson (1969) – ao menos para baixos valores da parcela viscosa inicial – e esta deve ser, portanto, uma propriedade de quando se considera o efeito viscoso no processo de adensamento.

As pequenas diferenças observadas entre os resultados das hipóteses I e II podem ser explicadas através da equação (287), reproduzida novamente abaixo (equação (427)).

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left( \frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right) \quad (427)$$

Na teoria com  $\eta$  variável apresentada nesta tese, a igualdade  $R = \frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$  sugere que as porcentagens médias de adensamento durante o adensamento primário foram inteiramente devidas à variação do excesso de poropressão. Em outras palavras,  $\frac{d\bar{\sigma}'_{v\eta}}{dt} \cong 0$  durante todo o primário, o que significa que a parcela viscosa se manteve aproximadamente constante. Já na teoria de Berry e Wilkinson (1969) a parcela viscosa sofreu variação suficiente para influenciar  $\frac{de}{dt}$  e fazer com que se obtenha  $R > \frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v}$ .



Por outro lado, analisando-se a equação (427) e admitindo que  $\frac{d\bar{u}}{dt}$  seja nulo durante o adensamento secundário (a partir do tempo  $t_p$ ),  $\frac{de}{dt}$  depende apenas de  $\frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt}$ :

$$\frac{de}{dt} \cong a_{vs} \frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} \quad (428)$$

Fazendo-se  $\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\frac{\eta}{1+e} \frac{de}{dt}$  (equação (288)):

$$\frac{de}{dt} = -\frac{a_{vs}}{1+e} \left( \frac{d\eta}{dt} \frac{de}{dt} + \eta \frac{d^2e}{dt^2} \right) \quad (429)$$

Donde vem:

$$\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{1}{\eta} \left( \frac{d\eta}{dt} + \frac{1+e}{a_{vs}} \right) \frac{de}{dt} = 0 \quad (430)$$

Se  $\eta$  é constante, a solução da equação (430) para  $e$  em função de  $t$  é uma exponencial simples – similarmente à solução para condição de deformações verticais iguais (ver Figura 110). Assim, é como se um novo adensamento estivesse se iniciando a partir de  $t_p$ . Desse modo, surge a “onda” do secundário e a inclinação  $C_\alpha$  logo após  $t_p$  na escala logarítmica é horizontal (nula). Para que se tenha  $C_\alpha \neq 0$ , é preciso que  $\eta$  varie durante o adensamento secundário. Entretanto, deve haver um tempo finito  $t > t_p$  tal que  $\eta$  passe a ser aproximadamente constante, para que a “onda” do secundário apareça. A relação hiperbólica sugerida por Santa Maria e Santa Maria (2018) (item 1.2.4) parece atender a esses critérios. Na teoria de Berry e Wilkinson (1969), que não apresenta “dupla onda”, a relação entre  $\tau$  vs  $\frac{\partial e}{\partial t}$  é uma função de potência e, por isso, a tangente da curva (que equivale a  $\eta$ ) sempre varia até o fim do adensamento e tende ao infinito quando  $t \rightarrow \infty$ .

Vale ainda comentar que, assim como o parâmetro  $b_1$  de Berry e Wilkinson (1969) é dependente da razão incremental de tensão, o coeficiente de viscosidade

inicial  $\eta_0$  da presente tese também o é. Afinal, é  $V_{r0}$  quem determina a razão  $R$  que, por sua vez, é função de  $\Delta\sigma/\sigma'$ , como já discutido no item 1.1.6.

### 3.5 Campo vs laboratório

A teoria proposta para a condição de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável parece reproduzir com maior fidelidade o que ocorre no laboratório. A pergunta que surge é: como interpretar um resultado de ensaio de laboratório a partir dessa teoria e extrapolar para o campo?

O ajuste da teoria a um resultado de ensaio de laboratório depende dos parâmetros  $T_{rs}$ ,  $V_{r0}$  e  $V_{rf}$ . O Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  depende dos tempos (conhecidos), do diâmetro de influência  $d_e$  (conhecido) e do coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$ . Conforme comentado no item 2.2.3.3, o trecho relativo ao adensamento primário pode ser expresso pela teoria clássica de Barron (1948) sem qualquer necessidade de correção do coeficiente de adensamento radial. Uma vez obtido  $c_r$  pela teoria clássica, tem-se  $c_{rs} = c_r$  e, conseqüentemente,  $T_{rs}$ .

Já os Fatores Viscosidade  $V_{r0}$  e  $V_{rf}$  são consideravelmente mais complicados de serem obtidos. Para  $V_{r0}$ , é preciso encontrar o valor de  $R$  (que depende da magnitude da compressão secundária). Para  $V_{rf}$ , é preciso que se saiba o tempo (ou Fator Tempo Radial) de início da “onda” de adensamento secundário. Portanto, seria necessário que o ensaio de adensamento durasse até o “fim” do adensamento secundário, o que deve levar alguns anos. Seria inviável do ponto de vista prático.

No entanto, os Fatores Viscosidade  $V_{r0}$  e  $V_{rf}$  são inversamente proporcionais ao quadrado de  $d_e$ . Como já discutido no item 3.2, as distâncias de drenagem no campo são da ordem de 100 vezes maiores que no laboratório, o que faria  $V_{r0}$  tender a zero e  $R$  tender à unidade. Neste caso, a curva de porcentagem média de adensamento tende à solução clássica de Barron (1948).

Desse modo, não é necessária a realização de um ensaio de adensamento de longa duração para que se faça uma boa estimativa da curva recalque vs tempo no campo. A evolução dos recalques no tempo pode ser determinada a partir da

teoria clássica de Barron (1948), desde que a magnitude dos recalques inclua tanto primário quanto secundário.

O autor acredita que uma teoria de adensamento com fluxo vertical que incorporasse a mesma lei de variação de  $\eta$  adotada nesta tese apresentaria as mesmas características. Assim, no campo a curva de porcentagem média de adensamento deve tender à teoria clássica de Terzaghi e Fröhlich (1936). Para a situação de fluxo combinado, portanto, seria possível desprezar o efeito viscoso e aplicar a solução de Carrillo (1942), desde que seja incluída a deformação associada ao adensamento secundário (o que não é feito nas teorias clássicas, seja a de Terzaghi e Fröhlich, 1936, seja a de Barron, 1948).

É preciso, portanto, entender o que se denomina primário e secundário de acordo com a presente teoria. Afinal, se  $R$  é a razão entre os recalques primário e total e no campo  $R \rightarrow 100\%$ , não haveria adensamento secundário no campo. No entanto, a interpretação mais adequada é a de que os denominados “adensamento primário” e “adensamento secundário” são partes do mesmo fenômeno do adensamento e sua separação na prática da engenharia se dá apenas por uma consequência da espessura reduzida dos corpos de prova.

A Figura 118a ilustra o conceito. A curva  $e$  vs  $\sigma'_v$  no ensaio de laboratório apresenta a compressão secundária de forma nítida, a partir de um índice de vazios  $e_p$  que representa o fim da compressão primária. O recalque secundário se dá por uma reta quase vertical até que se atinja o índice de vazios  $e_f$  de fim do adensamento. No campo, como as velocidades de deformação são muito menores, não há essa divisão – matematicamente, tem-se que  $R \cong 100\%$  neste caso. A curva de compressão no campo é praticamente coincidente com a linha de velocidade de deformação nula ( $\dot{\epsilon} = 0$ ). Entretanto, a variação total do índice de vazios  $\Delta e = e_f - e_0$  é a mesma nos dois casos.

Assim, ao se estimar o recalque primário a partir da curva de compressão obtida em laboratório, basta acrescentar o recalque secundário para que se obtenha o recalque total que deverá ocorrer no campo. Então, com as teorias clássicas de Terzaghi e Fröhlich (1936) e/ou de Barron (1948), calcula-se a evolução dos recalques no tempo.

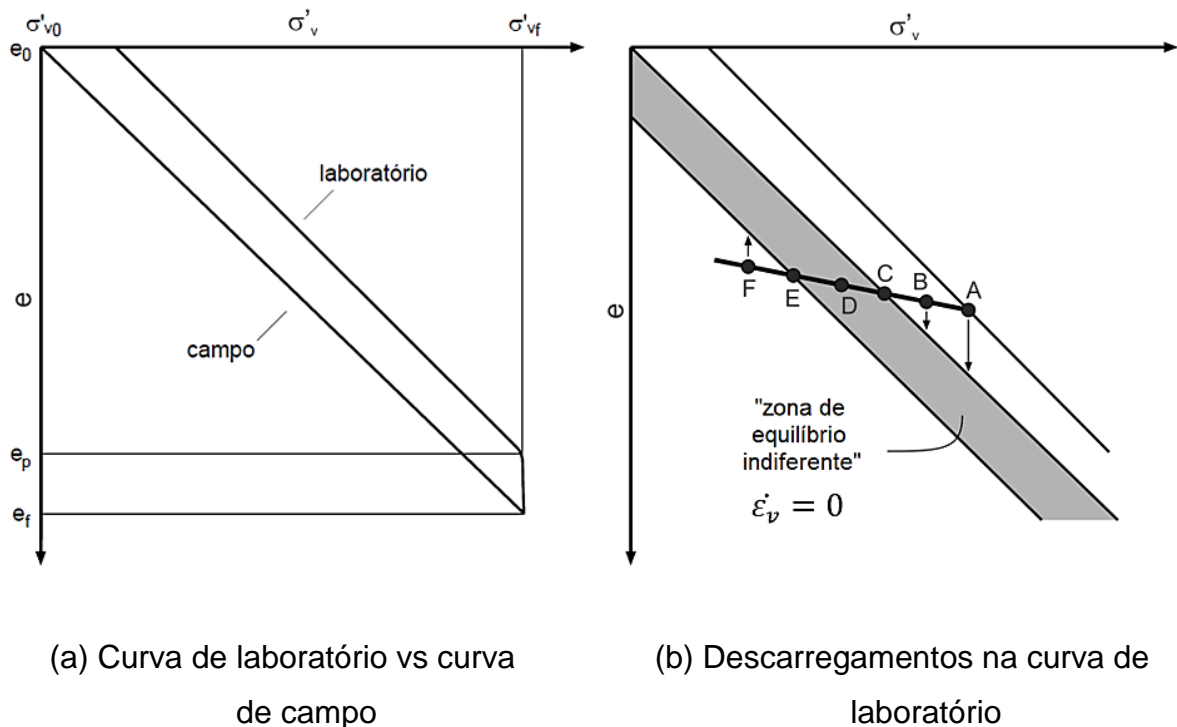


Figura 118 – Esquema das curvas de compressão.

A dificuldade, portanto, reside em se estimar a magnitude da compressão secundária em um ensaio de laboratório, considerando que não sejam feitos ensaios de longa duração. O método mais usual, que utiliza o parâmetro  $C_\alpha$  ou a relação  $C_\alpha/C_c$ , é de acurácia questionável, pois se baseia no tempo de vida útil da construção (que não é uma característica do solo) em vez do tempo de “fim” do secundário que seria observado em ensaio de laboratório de longa duração.

Se a linha de fim do adensamento ( $\dot{\epsilon} = 0$ ) é aproximadamente paralela à curva de compressão na escala logarítmica, ela está associada a um determinado OCR (aqui chamado de  $OCR_{sec}$ ) que relaciona as tensões de mesmo índice de vazios das duas curvas. Sugere-se então que sejam feitos descarregamentos com diferentes valores de OCR no ensaio de adensamento, como mostra a Figura 118b.

Em um estágio de carga correspondente ao ponto A, após o “fim do primário” há a tendência de compressão secundária até a linha de  $\dot{\epsilon} = 0$ . Se o corpo de prova sofrer um descarregamento que gere um OCR menor do que  $OCR_{sec}$  (ponto B), ainda haverá alguma compressão secundária, em menor magnitude. Se for gerado um

OCR igual a  $OCR_{sec}$  (ponto C), não haverá compressão secundária, pois o solo já terá atingido a linha de  $\varepsilon = 0$ . Quanto mais próximo o valor de OCR estiver de  $OCR_{sec}$ , mais lento se dará o adensamento secundário, pois as velocidades de deformação são cada vez menores quanto mais se aproxima do fim do adensamento.

Por outro lado, se for gerado um OCR pouco maior que  $OCR_{sec}$  (ponto D), é possível que também não haja deformação secundária alguma, pois existe a possibilidade de se ter atingido uma “região de equilíbrio indiferente”, conforme os estudos de Feijó (1991) já comentados no item 1.1.4. O limite dessa região está indicado pelo ponto E, isto é, toda a faixa compreendida do ponto C ao ponto E está associada a  $\varepsilon = 0$ . Para valores de OCR muito maiores que  $OCR_{sec}$  (ponto F), a “região de equilíbrio indiferente” seria ultrapassada e o solo sofreria expansão secundária. Portanto, o  $OCR_{sec}$  é o menor valor de OCR que não gera deformação secundária.

O processo para determinação do  $OCR_{sec}$  seria similar ao realizado por Feijó (1991), mas não seriam necessários tantos descarregamentos diferentes. Uma vez que Feijó (1991) já demonstrou que o  $OCR_{sec}$  para a argila do Sarapuí é da ordem de 2,0 em relação à linha de fim do primário, acredita-se que essa seja uma boa estimativa preliminar para as argilas moles. Realizando-se descarregamentos com  $OCR = 1,5$  e  $OCR = 2,0$ , por exemplo, já seria possível saber se o valor de  $OCR_{sec}$  é superior a 2,0 (caso ocorra compressão secundária para  $OCR = 2,0$ ), inferior a 1,5 (caso não ocorra compressão secundária para  $OCR = 1,5$ ) ou se superior a 1,5 e inferior a 2,0 (caso ocorra compressão secundária para  $OCR = 1,5$  e não ocorra para  $OCR = 2,0$ ). A partir daí, um terceiro e último carregamento seria feito, com um valor de OCR adequado ao resultado obtido (por exemplo,  $OCR = 1,25$  ou  $OCR = 1,75$  ou  $OCR = 2,25$ ) e então se adotaria um  $OCR_{sec}$  que representasse o comportamento observado no terceiro descarregamento. Exemplificando: se  $1,5 < OCR_{sec} < 2,0$  e ainda houver compressão secundária para  $OCR = 1,75$ , então  $1,75 < OCR_{sec} < 2,0$  e poder-se-ia adotar  $OCR_{sec} = 1,875$  para fins práticos.

Evidentemente, os descarregamentos também incorreriam em uma expansão primária, o que interfere levemente no valor de  $OCR_{sec}$ . Entretanto, o autor julga que essa expansão possa ser negligenciada, visto que o procedimento busca um valor apenas aproximado de  $OCR_{sec}$ .

A Figura 118 é apenas um modelo. As curvas de compressão que de fato decorrem da teoria proposta podem ser obtidas em função do valor do excesso de poropressão médio normalizado  $\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v}$ . A partir de  $\frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v}$  (equação (378)), escreve-se:

$$\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{\int_{r_w}^{r_e} \frac{u(r,t)}{\Delta\sigma_v} 2\pi r dr}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} \quad (431)$$

Que resulta em:

$$\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} = \frac{\frac{f(n)}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{X_1 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_1 \lambda\right) \exp(X_2 T_{rs}) - X_2 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_2 \lambda\right) \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_1 \lambda\right) - X_2 \left(1 + \frac{f(n)}{8} X_2 \lambda\right)} \right\} \quad (432)$$

Utilizando-se das expressões para  $\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v}$  (equação (432)) e  $\bar{U}_r$  (equação (393)), é possível traçar as curvas da Figura 119, que são equivalentes às curvas de compressão  $e$  vs  $\sigma'_v$  normalizadas. Na Figura 119a as curvas foram traçadas para  $V_{r0} = 0,05$  e diferentes valores de  $V_{rf}$ . Na Figura 119b, todos os Fatores Viscosidade Radiais ( $V_{r0}$  e  $V_{rf}$ ) são 10.000 vezes menores do que os da Figura 119a, para ilustrar a comparação entre laboratório e campo. Foi adotado  $n = 20$ .

Como já discutido no item 2.2.3.3, a relação  $\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v}$  em  $t = 0$  é igual ao próprio  $R$  que relaciona as compressões primária e total. Para  $V_{r0} = 0,05$  e  $n = 20$ , obtém-se  $R = 85\%$ . Portanto, todas as curvas de compressão partem de  $\frac{\bar{u}_0}{\Delta\sigma_v} = 85\%$  na Figura 119a e se dirigem até coincidirem com a linha de velocidade de deformação nula em  $\bar{U}_r = 100\%$ . Quanto maior o valor de  $V_{rf}$ , mais a curva de compressão relativa ao recalque primário se aproxima de uma paralela à linha  $\dot{\epsilon} = 0$ , de modo que a compressão secundária seja praticamente uma reta vertical.

No caso de adensamento no campo (Figura 119b), como já mencionado, os Fatores Viscosidade Radiais seriam cerca de 10.000 vezes menores do que no laboratório. Assim, se  $V_{r0} = 0,05$  no laboratório, no campo se obteria  $V_{r0} = 0,000005$ , o que corresponderia a  $R = 99,998\%$ . Isto faria as curvas de compressão se

tornarem praticamente coincidentes entre si e com a linha  $\dot{\epsilon} = 0$ , o que é coerente, pois as velocidades de deformação no campo são muito menores do que no laboratório. Para o caso de  $V_{r0} = 0$ , ter-se-ia  $R = 100\%$  e todas as curvas de compressão seriam perfeitamente coincidentes com a linha  $\dot{\epsilon} = 0$ .

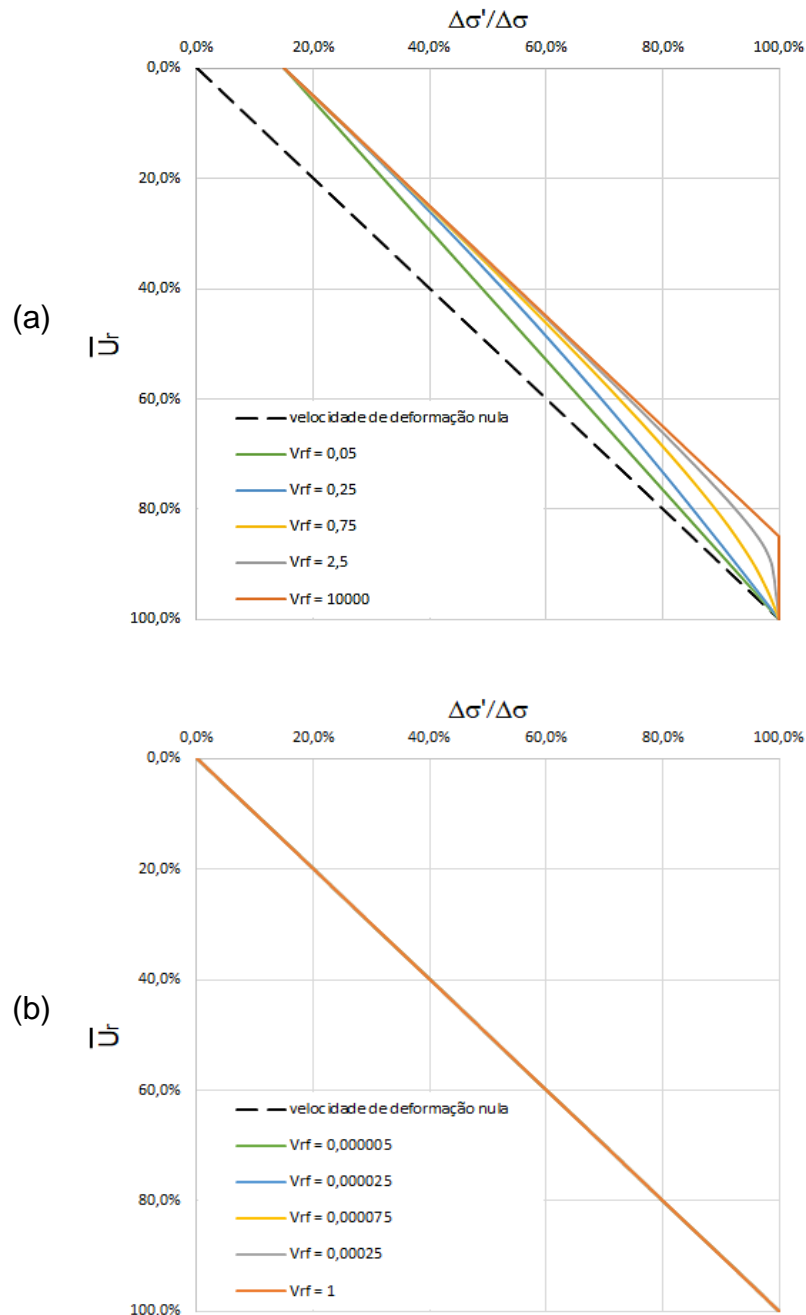


Figura 119 – Curvas de compressão normalizadas, para  $n = 20$  e diferentes valores de  $V_{rf}$ . (a) Curvas de laboratório:  $V_{r0} = 0,05$  ( $R = 85\%$ ). (b) Curvas de campo:  $V_{r0} = 0,000005$  ( $R = 99,998\%$ ).

Vale comentar ainda que a Figura 119a demonstra que a parcela viscosa é quase constante durante o adensamento primário para valores elevados de  $V_{rf}$ . Isto já havia sido especulado no item anterior deste trabalho.

À primeira vista pode parecer contraditório que uma curva de compressão seja aproximadamente paralela à linha  $\dot{\varepsilon} = 0$ . Afinal, espera-se que as linhas de mesma velocidade de deformação (isótacas) sejam todas paralelas entre si e a compressão não poderia se dar inteiramente sobre qualquer uma delas, já que a velocidade de deformação deve diminuir ao longo do tempo. Entretanto, nenhuma das hipóteses listadas no item 2.1 admite que tais linhas sejam de fato paralelas.

O seguinte procedimento pode ser feito para determinação das isótacas. Derivando-se a equação (388) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{d\bar{U}_r}{dt} = \frac{c_{rs}/d_e^2}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} \left\{ \frac{X_1 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] \exp(X_2 T_{rs}) - X_2 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2 \right] \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1 \right] - X_2 \left[ 1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2 \right]} \right\} \quad (433)$$

Em que  $\frac{d\bar{U}_r}{dt}$  é proporcional a  $\dot{\varepsilon}$ . Comparando-se com a equação (378), pode-se escrever:

$$\frac{d\bar{U}_r}{dt} = \frac{1}{8} \frac{c_{rs}}{d_e^2} \frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} \quad (434)$$

Rearranjando os termos:

$$\frac{d\bar{U}_r}{dt} = \left( \frac{1+e}{a_{vs}\eta_0} \right) \left[ \frac{V_{r0}}{\frac{f(n)}{8}} \right] \frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} \quad (435)$$

Apartir da relação entre  $\frac{V_{r0}}{\frac{f(n)}{8}}$  e  $R$ , dada pela equação (399), reescreve-se a equação (435) da seguinte forma:



$$\frac{d\bar{U}_r}{dt} = \left( \frac{1+e}{a_{vs}\eta_0} \right) \left( \frac{1}{R} - 1 \right) \frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} \quad (436)$$

Se uma isotaca parte de  $\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} = R$  em  $t = 0$ , ela deve se situar sempre à direita de uma reta tal que:

$$\bar{U}_r + \frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} = R \quad (437)$$

Que também representa a curva de compressão primária mais à direita possível.

Para entender isso, basta observar a curva de compressão correspondente a  $V_{rf} = 10.000$  da Figura 119a, que é praticamente uma reta durante o primário. Se uma isotaca partir de  $\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} = 85\%$  em  $t = 0$ , a curva de compressão apresentará esta velocidade no início do adensamento – e ela é máxima. Como a velocidade de deformação terá de diminuir com o transcorrer do adensamento, a isotaca não poderá tocar a curva de compressão novamente. E ela também não poderá se desviar para a esquerda, porque quanto mais à esquerda menores são as velocidades de deformação. Logo, essa linha deverá se desviar para a direita.

Se a isotaca se desvia para a direita e não pode mais tocar a curva de compressão novamente, então ela sempre passa por porcentagens de adensamento relativas apenas à compressão primária, isto é, ela nunca ultrapassa  $\bar{U}_r = R$ . Isto significa que a relação entre  $\bar{U}_r$  e  $\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v}$  mostrada na equação (437) é válida para todas as linhas. Substituindo o valor de  $R$  da equação (437) na equação (436) e desenvolvendo:

$$\bar{U}_r = \frac{\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v}}{\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} + \left( \frac{a_{vs}\eta_0}{1+e} \right) \frac{d\bar{U}_r}{dt}} - \frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v} \quad (438)$$

Para cada valor de  $\left(\frac{a_{vs}\eta_0}{1+e}\right)\frac{d\bar{U}_r}{dt}$ , que é proporcional a  $\dot{\epsilon}$ , há infinitos pares  $\left(\frac{\bar{u}(t)}{\Delta\sigma_v}; \bar{U}_r\right)$  que satisfazem a igualdade. A Figura 120 mostra os resultados. As isótacas não são paralelas, mas tendem a um paralelismo durante a compressão secundária. Cada linha está associada a uma razão  $\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0}$ , em que  $\dot{\epsilon}_0$  é a velocidade de deformação inicial no laboratório. É possível perceber que a curva de compressão correspondente a  $V_{rf} = 10.000$ , mostrada anteriormente na Figura 119a, corta linhas correspondentes a velocidades de deformação cada vez menores.

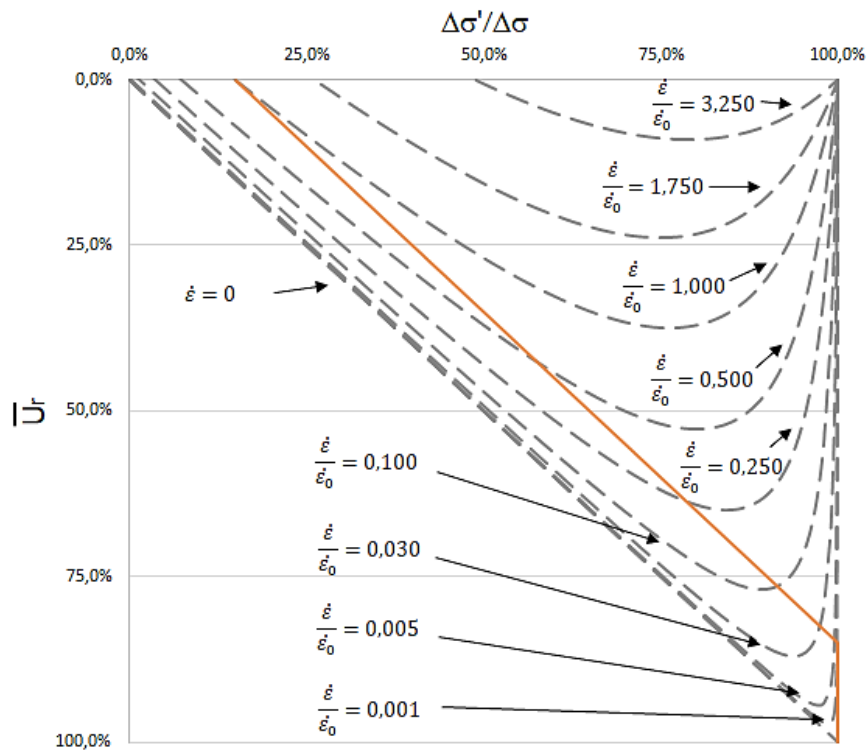


Figura 120 – Isótacas obtidas na presente teoria.

Na Figura 120 a isótaca  $\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} = 0,001$  corta a curva de compressão aproximadamente no ponto de transição entre “fim do primário” e “início do secundário”. De acordo com a equação (436), essa relação corresponde ao momento em que o excesso de poropressão médio atinge 0,1% do seu valor inicial; instante esse que, na prática, poderia de fato ser considerado “fim do primário”.

## 4 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

O objetivo desta tese foi propor teorias de adensamento para fluxo radial levando em conta o efeito viscoso.

Para isso, admitiu-se que a tensão efetiva possa ser dividida em duas parcelas, sendo uma relativa aos contatos sólidos e a outra relativa aos contatos viscosos. Admitiu-se também que a variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva – e não de toda a tensão efetiva – é a responsável pelas deformações.

No caso da parcela sólido-sólido, sua variação foi expressa por uma relação de proporcionalidade com a variação do índice de vazios. Já a parcela viscosa foi expressa pelo produto entre um coeficiente de viscosidade  $\eta$  e a velocidade de deformação volumétrica.

Foram desenvolvidas três teorias, a saber: deformações verticais livres com  $\eta$  constante, deformações verticais iguais com  $\eta$  constante e deformações verticais iguais com  $\eta$  variável. Foi possível montar e resolver analiticamente as três equações diferenciais encontradas, sem a necessidade de tratamento numérico. Para o coeficiente de viscosidade  $\eta$  variável, se estabeleceu que ele cresce com o tempo, até se manter aproximadamente constante após o “fim” do adensamento primário. A função adotada se mostrou similar à que aparece indiretamente na teoria de Taylor e Merchant (1940).

### 4.1 Conclusões

Diferentemente das teorias clássicas, em  $t = 0^+$  nem todo o acréscimo de tensão total aplicado se transforma em excesso de poropressão. A presença de uma parcela viscosa da tensão efetiva, dependente da velocidade de deformação, gera uma mudança de paradigma. A velocidade de deformação inicial próximo às fronteiras drenantes é bastante elevada e, conseqüentemente, já existe parcela viscosa da tensão efetiva mobilizada.

As soluções fornecem as equações analíticas para a dissipação do excesso de poropressão e para a porcentagem média de adensamento radial em função do

Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  e do Fator Viscosidade Radial  $V_r$ . O Fator Tempo Radial  $T_{rs}$  é função, dentre outros parâmetros, do coeficiente de adensamento radial  $c_{rs}$ , o qual depende do parâmetro de compressibilidade  $a_{vs}$ . Este último relaciona a variação do índice de vazios com a variação da parcela sólido-sólido da tensão efetiva – sendo, portanto, conceitualmente diferente do parâmetro  $a_v$  das teorias clássicas.

O Fator Viscosidade Radial  $V_r$  depende do coeficiente de viscosidade  $\eta$  e é inversamente proporcional ao quadrado do diâmetro de influência  $d_e$  dos drenos. Na prática, a influência da viscosidade é mais perceptível no laboratório do que no campo. Os diâmetros de influência  $d_e$  dos drenos no campo, da ordem de metros, chegam a ser 100 vezes superiores aos de laboratório.

Como as distâncias de drenagem no laboratório são muito inferiores, as velocidades de deformação  $\dot{\epsilon}$  são muito maiores do que no campo. Isso significa que o ensaio de laboratório não reproduz fielmente as condições de campo, já que os valores do Fator Viscosidade Radial  $V_r$  no laboratório são muito superiores aos do campo. Para a reprodução ideal do fenômeno, tanto o Fator Tempo Radial quanto o Fator Viscosidade Radial devem necessariamente ser atendidos.

Por outro lado, todas as expressões para porcentagem média de adensamento encontradas fornecem curvas praticamente coincidentes com suas respectivas teorias clássicas quando o Fator Viscosidade Radial é menor do que 0,01 – que é o caso do campo.

No caso da solução com  $\eta$  variável, na verdade existem dois Fatores Viscosidade Radiais; um correspondente ao valor inicial de  $\eta$ , denominado  $V_{r0}$ , e outro relativo ao valor final de  $\eta$ , denominado  $V_{rf}$ . Tanto  $V_{r0}$  quanto  $V_{rf}$  influenciam no processo de adensamento, simultaneamente.

Destacam-se as seguintes conclusões adicionais relativas às soluções para as condições de deformações verticais livres e deformações verticais iguais com  $\eta$  constante:

- i) Independentemente da condição de deformação (deformações verticais livres ou deformações verticais iguais), as soluções recaem

nas soluções clássicas de Barron (1948) quando o Fator Viscosidade Radial  $V_r$  é nulo (ou seja, quando o coeficiente de viscosidade é nulo);

- ii) A solução para condição de deformações verticais iguais se torna idêntica à solução de Barron (1948) caso o valor do coeficiente de adensamento radial  $c_r$  seja corrigido por uma constante que é função do Fator Viscosidade Radial  $V_r$  e da relação  $n$  entre os raios de influencia e do dreno;
- iii) As soluções para deformações verticais livres e deformações verticais iguais são muito próximas entre si, para qualquer valor de  $\eta$ ;

Destacam-se as seguintes conclusões adicionais relativas à solução para a condição de deformações verticais iguais com  $\eta$  variável:

- iv) Quando  $V_{r0} = V_{rf}$  (ou seja, quando o coeficiente de viscosidade inicial é igual ao final), a solução recai na condição de deformações verticais iguais com  $\eta$  constante;
- v) Devido à variabilidade do coeficiente de viscosidade  $\eta$ , esta solução foi a única capaz de reproduzir o efeito de “dupla onda” dos resultados experimentais de laboratório, no qual a primeira “onda” representa a parcela primária e a segunda está associada à compressão secundária. Mesmo que este efeito tenha sido obtido para ensaios convencionais (com drenagem apenas na vertical), espera-se que o efeito seja também obtido nos ensaios com drenagem radial em laboratório;
- vi) Para  $V_{r0} \leq 0,1$ , a “dupla onda” só aparece para valores de  $V_{rf}$  superiores a 10;
- vii) O valor de  $V_{r0}$  tem relação direta com a razão  $R$  entre as magnitudes do recalque primário e do recalque total;
- viii) O valor de  $V_{rf}$  tem relação direta com o tempo necessário para o fim do adensamento – no sentido prático, não teórico. Ressalta-se que, assim

como a teoria clássica, a porcentagem média de adensamento de 100% ocorre num tempo infinito;

- ix) A curva de porcentagem média de adensamento primário para valores elevados de  $V_{rf}$  equivale à solução clássica de Barron (1948), desde que se divida  $\overline{U}_r$  na presente teoria por  $R$ ;
- x) A solução não apresentou a inclinação  $C_\alpha$  da curva  $e$  vs  $t$  (log). A transição entre as ondas foi praticamente horizontal ( $C_\alpha = 0$ );
- xi) A razão  $\frac{\overline{u}_0}{\Delta\sigma_v}$  entre o excesso de poropressão inicial médio e o acréscimo de tensão total aplicado também corresponde a  $R$ ;
- xii) O valor de  $V_{rf}$  exerce pouca influência na dissipação do excesso de poropressão, se comparado com  $V_{r0}$ ;

## 4.2 Sugestões para pesquisas futuras

- i) Realizar ensaios de adensamento de longa duração com drenagem radial para comparar com as teorias propostas. O ideal seria preparar corpo de prova com dreno interno, embora esta alternativa seja a mais demorada e sujeita à drenagem parasita. Semelhante aos ensaios de adensamento convencionais, tais ensaios sofreriam influência da razão incremental da tensão. A razão  $R$  entre as magnitudes dos recalques primário e total varia com  $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$  e tem uma relação direta com o Fator Viscosidade Radial inicial  $V_{r0}$ .
- ii) Desenvolver uma teoria de adensamento com fluxo radial para a condição de deformações verticais livres (situação mais próxima da realidade no campo) com coeficiente de viscosidade variável. As diferenças entre as curvas de porcentagem média de adensamento para as condições de deformações verticais iguais e deformações verticais livres devem permanecer pequenas, assim como observado nas soluções clássicas (sem consideração de viscosidade) e nas

soluções obtidas nesta pesquisa, para coeficiente de viscosidade constante;

- iii) Desenvolver uma teoria de adensamento com fluxo vertical com coeficiente de viscosidade variável. Uma proposta seria usar a mesma função adotada nesta pesquisa, em que  $\eta$  é crescente com o tempo até se manter aproximadamente constante durante o adensamento secundário. Se  $\eta$  for mantido constante, a solução deve coincidir com a teoria de Andrade (2014);
- iv) Pesquisar novas funções para a lei de variação do coeficiente de viscosidade  $\eta$  (ou mesmo da parcela viscosa em si), principalmente uma lei que reproduza o efeito  $C_\alpha$  na transição entre o fim do primário e o início do secundário. Acredita-se que uma função para  $\eta(e)$  que forneça o efeito de “dupla onda” e  $C_\alpha \neq 0$  deve ser tal que  $\eta$  cresça durante os adensamentos primário e secundário até passar a ser aproximadamente constante antes do fim do adensamento. Uma relação hiperbólica entre a parcela viscosa e a velocidade de deformação, conforme proposto por Santa Maria e Santa Maria (2018), pode atender;
- v) Procurar alternativas para gerar uma solução para fluxo combinado (vertical e radial) considerando o efeito viscoso. A proposta de Carrillo (1942), que consiste em um simples produto das soluções individualizadas, não pode ser aplicada.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, V. N. (2008). *Características de Adensamento da Argila do Canal do Porto de Santos na Região da Ilha Barnabé*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- AGUIAR, V. N. (2014). *Contribuição Ao Estudo Das Relações Tensão-Deformação-resistência-Tempo Das Argilas Moles*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ALEXANDRE, G. F. (2000). *A Fluência Não-Drenada Segundo o Modelo de Martins (1992)*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ALEXANDRE, G.F. (2006). *Contribuição ao Entendimento da Fluência Não-Drenada*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ALMEIDA, M. S. S. e MARQUES, M. E. S. (2010). *Aterros sobre solos moles – Projeto e Desempenho*. São Paulo, Ed. Oficina De Textos.
- ALMEIDA, M. S. S., DANZIGER, F. A. B., ALMEIDA, M. C. F., CARVALHO, S. R. L. e MARTINS, I. S. M. (1993). *Performance of an embankment built on a soft disturbed clay*. Proc. 3rd Int. Conf. Case Histories in Geotechnical Engineering, Missouri, 351-356.
- ALMEIDA, M. S. S.; SANTA MARIA, P. E. L.; MARTINS, I. S. M.; SPOTTI, A. P. e COELHO, L. B. M. (2000). *Consolidation of a very soft clay with vertical drains*. Geotechnique, v. 50:6, p. 633-643.
- ANDERSLAND, O. B. e DOUGLAS, A. G. (1970). *Soil Deformation Rates and Activation Energies*, Géotechnique 20, No.1, pp. 1-16.
- ANDRADE, M. E. S. (2009). *Contribuição ao Estudo das Argilas Moles da Cidade de Santos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- ANDRADE, M. E. S. (2014). *Uma Teoria de Adensamento Unidimensional Considerando a Resistência Viscosa à Compressão*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.



- ARULANANDAN, K., SHEN, C. K. and YOUNG, R. B. (1971). *Undrained creep behaviour of a coastal organic silty clay*. Geotechnique, Vol. 21, No.4, pp. 359-375.
- ATKINSON, J. H., e BRANSBY, P. L. (1978). *The Mechanics of Soils: An Introduction to Critical State Soil Mechanics*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited. London, 375p.
- BARDEN, L. (1965). *Consolidation of clay with non-linear viscosity*. Geotechnique, Vol. 15, No. 4, pp. 345-362.
- BARDEN, L. (1969). *Time Dependent Deformation of Normally Consolidated Clays And Peats*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, vol. 95, n.2, January, SMS1, pp. 1-31.
- BARRON, R. A. (1948). *Consolidation of fine-grained soils by drains wells*. J. Geotech. Engng Div., ASCE 113, pp. 718-742.
- BERRY, P. L. e WILKINSON, W. B. (1969). *The Radial Consolidation of Clay Soils*. Geotechnique, Vol. 19, No.2, pp. 253-284.
- BIOT, M. A. (1935). *Le Problem de la Consolidation dês Matieres Argileuses sous une Charge*, Annaies de la Società Scientificque de Bruxelles, Series B, vol. 55, pp. 110-113.
- BIOT, M. A. (1941). *General Theory of Three-dimensional Consolidation*, Journal of Applied Physics, vol. 12 , pp 155 – 164.
- BIOT, M. A. (1955). *Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Media*, Journal of Applied Physics, vol. 26 , pp 182 - 185.
- BIOT, M. A. (1956). *Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid*, Journal of Applied Physics, vol. 27 , pp 459 - 467.
- BJERRUM, L. (1972). *Embankments on Soft Ground*, In: ASCE Specialty Conference on Performance of Earth and Earth Supported Structures, Proceedings, West Laffayette, Purdue University, vol 2, pp. 1-54.

- BJERRUM, L., SIMONS, N. e TORBLAA, I. (1958). *The Effect of Time on the Shear Strength of Soft Marine Clay*, Proc., Brussels Conf. on Earth Pressure Problems, Vol. 1, 148-158.
- BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C. (1930). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno – 10ª ed.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA – tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio, Rio de Janeiro, 2015.
- BUISMAN, A. S. K. (1936). *Results of Long Duration Settlement Tests*. In: Proceedings of First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol.1, pp. 103-105, Cambridge, Massachussets.
- CAMPANELLA, R. G. e MITCHELL, J. K., (1968). *Influence of Temperature Variations on Soil Behaviour*, Journal of The Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, vol.94(3), May, pp. 709-734.
- CAMPANELLA, R. G. (1965). *Effect of Temperature and Stress on the Time-Deformation Behaviour of Saturated Clay*, PhD Dissertation, University of California, Berkeley.
- CAVALCANTI, M. C. R. (2002). *Análise por Elementos de Contorno de Meios Poro-Elasticos Saturados pela Teoria de Biot*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CARRILLO, N. (1942). *Simple Two and Three Dimensional Cases in the Theory of Consolidation of Soils*, Journal of Mathematics and Physics, vol. 21, no. 1 Mar, pp. 01-05.
- CARVALHO, S. R. L. (1997). *Uma Teoria de Adensamento com Compressão Secundária*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CHEN, J., TOLOOIYAN, A., XUE, J. e SHI, Z. (2016). *Performance of a geogrid reinforced soil wall on PVD drained multilayer soft soils*. Geotextiles and Geomembranes. 44. 219-229.
- COÊLHO, L. B. M. (1997). *Considerações a Respeito de um Ensaio Alternativo para a Determinação do Coeficiente de Adensamento Horizontal dos Solos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

COUTINHO, R. Q. (1976). *Características de Adensamento com Drenagem Radial de uma Argila Mole da Baixada Fluminense*. Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

D'OLIVEIRA, T. M. C. D. (2003). *Avaliação de Influências Extrínsecas na determinação do Coeficiente de Adensamento horizontal em Laboratório*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

DE JONG, L. e VERRUIJT, A. (1965). *Primary and Secondary Consolidation of a Spherical Clay sample*. In: Proceedings of the 6th ICSMFE, vol.1, pp. 254-258, Montreal.

DOS SANTOS, R. M. (2006). *Estudo Experimental da Parcela Viscosa na Tensão Normal Efetiva de Solo Argiloso*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

FEIJÓ, R. L. (1991). *Relação entre a Compressão Secundária, Razão de Sobreadensamento e Coeficiente de Empuxo no Repouso*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

GARCIA, S. G. F. (1996). *Relação entre o Adensamento Secundário e a Relaxação de Tensões de uma Argila Mole Submetida a Compressão Edométrica*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

GLASSTONE, S., LAIDLER, K. J. e EYRING, H. (1941). *Theory of Rate Processes*. McGraw-Hill, New York.

GLOVER, R. E. (1930). Technical Memorandum N° 158. Bureau of Reclamation, Denver, Colorado.

GOLDSTEIN, M. (1957). *The long-term strength of clays*. Proc. Fifth Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., London, Vol. 2, pp. 311-313.

GRAY, H. (1936). *Progress Report on Research on Consolidation of Fine-Grained Soils*. In: Proceedings of First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol.1, pp. 138-141, Cambridge, Massachusetts.

HANSBO, S. (1979). *Consolidation of clay by band-shaped prefabricated drains*. *Ground Engineering*, Vol. 12, 5, pp. 16–25

HANSBO, S. (1981). *Consolidation of Fine-Grained Soils by Prefabricated Drains*, Proceedings of 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Estocolmo, Vol. 3, 1981, pp. 677-682.

HANSBO, S. (1987). *Fact and fiction in the field of vertical drainage, Prediction and Performance in Geotechnical Engineering*, Calgary, pp 61–72.

HOLTZ, R. D. e JAMIOLKOWSKI, M. B. (1985). *Discussion of time dependence of lateral earth pressure*, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 111 (GT10): 1239-1242.

HOLZER, T. L., HOEG, K. e ARULANANDAN, K. (1973). *Excess Pore Pressures During Undrained Clay Creep*, *Canadian Geotechnical Journal*. 10(1), pp. 12-24.

HVORSLEV, M. J. (1960). *Physical Components of the Shear Strength of Saturated Clays*, Research Conference on Shear Strength of Cohesive Soils, ASCE, June, pp.169-273.

JAMIOLKOWSKI, M. B., LADD, C. C., GERMAINE, J. T. e LANCELOTTA, R. (1985). *New developments in field and laboratory testing of soils*, Proceedings of the 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, San Francisco, California, Vol.1, pp.57-153.

KAVAZANJIAN, E. Jr. e MITCHELL, J.K. (1984). *Time Dependence of Lateral Earth Pressure*, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 110, n. 4, April, pp. 530-533.

LACERDA, W. A. (1976). *Stress Relaxation and Creep Effects on Soil Deformation*. Ph.D. dissertation, University of California at Berkeley, Berkeley, California, USA.

LACERDA, W. A. (1977). *Discussion on the evaluation of  $K_0$  during drained creep in one-dimensional compression tests*, Proceedings, 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Tóquio, v.III, pp. 347-348.

LACERDA, W. A. e MARTINS, I. S. M. (1985). Discussão de *Time Dependence of Lateral Earth Pressure*, por KAVAZANJIAN, E. Jr. e MITCHELL, J. K., *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 111, n. 10, Oct, pp. 1242-1244.

LACERDA, W. A., COSTA FILHO, L. M., COUTINHO, R. Q. e DUARTE, E. R. (1977). *Consolidation characteristics of Rio de Janeiro soft clay*. Proceedings of the conference on geotechnical aspects of soft clays, Bangkok, 231-244.

LADD, C.C. (1973). *Estimating Settlements of Structures Supported on Cohesive Soils*, Massachusetts, ASCE, Foundations and Soil Mechanics.

LEONARDS, G. A. e ALTSCHAEFFL, A. G. (1964). *Compressibility of a Clay*, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, vol. 90, n. SMS5, September, pp. 163-185.

LEONARDS, G. A. e GIRAULT, P. (1961). *A Study of the One-dimensional Consolidation Test*. Proceedings of V International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol.1, pp. 213-218, Paris.

LEROUEIL, S., KABAJJ, M. e TAVENAS, F. e BOUCHARD, R. (1985). *Stress-Strain-Strain Rate Relation for the Compressibility of Sensitive Natural Clays*, *Géotechnique*, vol. 35, n.2, pp. 159-180.

LIMA, G. P. (1993). *Estudo de uma Teoria Não-Linear para o Adensamento Unidimensional*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MARQUES, M. E. S. (1997). *Influência da Velocidade de Deformação e Temperatura no Adensamento de Argilas Naturais*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MARTINS, I. S. M. (1990). Relatório de Pesquisa, Rio de Janeiro (não publicado).

MARTINS, I. S. M. (1992). *Fundamentos de um Modelo de Comportamento de Solos Argilosos Saturados*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

MARTINS, I. S. M. (2005). *Algumas Considerações Sobre Adensamento Secundário*, Palestra dada no Clube de Engenharia do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ. (não publicado).

MARTINS, I. S. M. (2019). Comunicação pessoal.

MARTINS, I. S. M. e LACERDA, W. A. (1985). *A Theory of Consolidation with Secondary Compression*. Proceedings of XI International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol.1, pp. 567-570, San Francisco.

MARTINS, I. S. M. e LACERDA, W. A. (1989). Discussão de *C $\alpha$ /C $c$  Concept and K $_0$  during Secondary Compression*, por MESRI, G. e CASTRO, A., Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, vol. 115, n.2, February, pp. 264-267.

MARTINS, I. S. M., SANTA MARIA, P. E. L. e LACERDA, W. A. (1997). *A Brief Review About The Most Significant results of COPPE Research on Rheological Behaviour of Saturated Clays Subjected to One Dimension Strain*, Almeida, M.S.S. (ed), Recent Developments in Soil Mechanics, Balkema, Rotterdam, pp.255-264.

MAYNE, P. W. e KULHAWY, F. H. (1982). *K $_0$  – OCR Relationships in Soil*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, vol. 108, n. GT6, June, pp. 851-872.

MESRI, G. e CASTRO, A. (1987). *C $\alpha$ /C $c$  Concept and K $_0$  during Secondary Compression*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, vol. 113, n.3, March, pp. 230-247.

MESRI, G. e CASTRO, A. (1989). Fechamento da discussão de *C $\alpha$ /C $c$  Concept and K $_0$  during Secondary Compression*, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, vol. 115, n.2, February, pp. 273-277.

MESRI, G. e GODLEWSKI, P. M. (1977). *Time and Stress-Compressibility Interrelationship*, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, vol. 103, n. GT5, May, pp. 417-430.

MITCHELL, J. K. (1964). *Shearing Resistance as a Rate Process*, Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering Division, ASCE, vol. 94, n. SM1, pp. 29-61.

MITCHELL, J. K. (1976). *Fundamentals of Soil Behavior*, John Wiley and Sons, New York, NY.

MURAYAMA, S. e SHIBATA. T. (1961). *Rheological properties of clays*. Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Fdn. Eng., Paris, 1:269-273

RENDULIC, L. (1935). *Der hydrodynamische spannungsausgleich in zentral entwässerten entwässerten*. Wasserwirtschaft, 1.

RICE J. R e CLEARY M. P. (1976). *Some basic stress-diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents*. Rev Geophys Space Phys 14(2): 227–241

RICHART, F. E. (1959). *A review of the theories of sand drains*. Trans. ASCE, 124: 709–739

RUJIKIATKAMJORN, C., ARDANA, M., INDRARATNA, B. e LEROUEIL, S. (2013). *Conceptual model describing smear zone caused by mandrel action*. Geotechnique, 63 (16), 1377-1388

SANTA MARIA, P. E. L. (1977). *Ensaio de Adensamento com Drenagem Radial Interna e Externa – Solução Teórica*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SANTA MARIA, F. C. M. (2002). *Estudo Reológico-Experimental do Coeficiente de Empuxo no Repouso,  $K_0$* . Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SANTA MARIA, P. E. L. e SANTA MARIA, F. C. M. (2000). *Analysis of One-Dimensional Consolidation with Intermediate Radial Drainage*. Solos e Rochas, São Paulo, 23, (2): 71-77.

SANTA MARIA, P. E. L. e SANTA MARIA, F. C. M. (2018). *One-Dimensional Consolidation Considering Viscous Soil Behaviour and Water Compressibility – Viscoconsolidation*. Soils and Rocks, São Paulo, 41(1): 33-48.

SCHMERTMANN, J. H. (1983). *A Simple Question About Consolidation, Technical Note, Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 109, n.1, Jan., pp. 119-122.

SCOTT, R. F. (1963). *Principles of Soil Mechanics*. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

SEAH, T. H. e JUIRNARONGRIT, T. (2003). *Constant Rate of Strain Consolidation with Radial Drainage*. Geotechnical Testing Journal. ASTM 26(4): 432–443.

SHEN, S., CHAI, J., HONG, Z., e CAI, F. (2005). *Analysis of field performance of embankments on soft clay deposit with and without PVD-improvement*. Geotextiles and Geomembranes, 23(6), 463–485.

SHIELDS, D. H. e ROWE, P. W. (1965). *Radial Drainage Oedometer for Laminated Clays*. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1965, Vol. 91, n.1, pp. 15-24.

SILVEIRA, I. (1953). *Consolidation of a Cylindrical Clay Sample with External Radial Flow of Water*. In: Proceedings of the 3th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. 1, pp. 55-56, Suíça.

ŠUKLJE, L. (1957). *The analysis of the consolidation process by the isotaches method*. In: Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, vol. 1, pp. 200–206, London.

TAYLOR, D. W. e MERCHANT, W. (1940). *A Theory of Clay Consolidation Accounting for Secondary Compression*, Journal of Mathematics and Physics, vol.19, n.3, pp. 167-185.

TAYLOR, D. W. (1942). *Research on Consolidation of Clays*, Pub Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil and Sanitary Engineering, Serial n. 82, 147 pp.

TAYLOR, D. W. (1948). *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley e Sons., New York, 700p.

TERZAGHI, K. (1936). *The Shearing Resistance of Saturated Soils and The Angle between the Planes of Shear*, In: Proceedings of 1st ICSMFE, Cambridge.

TERZAGHI, K. (1941). *Undisturbed Clay Samples and Undisturbed Clays*, Journal of Boston Society of Civil Engineers, vol. XXVIII, July, n.3. Republicado in Contributions to Soil Mechanics 1941-1959, Boston Society of Civil Engineers, Boston, pp. 45-65.



TERZAGHI, K e FRÖHLICH, O. K. (1936). *Theorie der setzung von tonschichten*, Franz Deuticke. Vienna. (tradução para o francês - *Théorie des tassements des couches argileuses*. Dunod – 1939. Paris).

THOMASI, L. (2000). *Sobre a Existência de uma Parcela Viscosa na Tensão Normal Efetiva*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VERRUIJT, A. (1969). *Elastic storage of aquifers, in Flow through Porous Media*, R.J.M. DeWeist, Ed., Academic Press, San Diego, pp. 331–376

VIEIRA, L. O. M. (1988). *Contribuição ao Estudo do Adensamento Secundário*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

XIAO, D. (2002). *Consolidation of Soft Clay Using Vertical Drains*. PhD Thesis, Nanyang Technological University, Singapore.

WALKER, L. K. (1969). *Secondary Settlement in Sensitive Clays*, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 6, No2, pp.219-222.

WALKER, R. e INDRARATNA, B. (2007). *Vertical drain consolidation with overlapping smear zones*. *Geotechnique*, 57(5), 463–467.

WANG, Y. H. e XU, D. (2007). *Dual Porosity and Secondary Consolidation*, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE vol.133, No.7, July, pp. 793 - 801.

ZIOLKOWSKI, J. C. (1978). *Adensamento uni-dimensional de solos saturados heterogêneos e drenagem parasita em ensaios de adensamento analisados pelo Método dos Elementos Finitos (Programa Consol)*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

## APÊNDICE A – ANÁLISE DE $X_1$ E $X_2$

Seja  $X_i$  igual a:

$$X_i = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2 - 4\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (439)$$

Denotando:

$$\Delta = \left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2 - 4\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf} \quad (440)$$

Em que  $\Delta$  é o discriminante da equação (439), 3 situações podem ocorrer:

- Se  $\Delta > 0$ ,  $X_1$  e  $X_2$  são reais e diferentes;
- Se  $\Delta = 0$ ,  $X_1$  e  $X_2$  são reais e iguais;
- Se  $\Delta < 0$ ,  $X_1$  e  $X_2$  são números complexos, ou seja, parte imaginária não-nula.

A expressão de  $\Delta$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta = \left[\frac{f(n)}{8} - V_{rf}\right]^2 + 4(1 - \lambda) \frac{f(n)}{8} V_{rf} \quad (441)$$

O Fator Viscosidade Radial  $V_{rf} = \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w d_e^2}$  é sempre positivo, pois todos os parâmetros que o compõem também o são. O parâmetro  $f(n)$  é o mesmo da teoria de Barron (1948) e também é sempre positivo para todo  $n > 1$ . Como todos os parâmetros da equação (441) são positivos e necessariamente  $0 \leq \lambda \leq 1$ , conclui-se que  $\Delta$  jamais poderá ser negativo e, desse modo, as soluções  $X_1$  e  $X_2$  são reais.

A única forma de se obter  $\Delta = 0$  é fazendo  $V_{rf} = \frac{f(n)}{8}$  e  $\lambda = 1$ . Porém,  $\lambda = 1$  é uma situação limite em que  $\eta_0 = 0$ , o que faz com que a parcela viscosa média da

tensão efetiva  $\overline{\sigma'_{v\eta}}$  seja nula em  $t = 0$ . Isso contradiz a ideia de que já existe  $\overline{\sigma'_{v\eta}}$  mobilizado desde o início do adensamento devido à velocidade de deformação inicial não-nula. Portanto, não parece possível que  $\lambda$  seja igual à unidade na natureza. Matematicamente,  $\eta_0 = 0$  corresponde a  $V_{r0} = 0$  e, conseqüentemente,  $R = 1$ . A curva de porcentagem média de adensamento coincidiria com a solução clássica de Barron (1948), independentemente do valor de  $V_{rf}$ .

Desse modo,  $\Delta > 0$  e  $X_1$  e  $X_2$  são reais e diferentes.

Pela equação (440), pode-se afirmar que  $\sqrt{\Delta} \leq \frac{f(n)}{8} + V_{rf}$ . A possibilidade de  $\sqrt{\Delta} = \frac{f(n)}{8} + V_{rf}$  decorre da condição  $\lambda = 0$ , que é uma outra situação limite, na qual  $\eta_f = \eta_0$  (e  $V_{rf} = V_{r0}$ ). Neste caso, a equação para porcentagem média de adensamento coincide com a condição “equal strain” com  $\eta$  constante solucionada no item 2.2.2 – ver Apêndice C. Uma vez que  $\eta$  deve crescer com o tempo na natureza, tem-se que  $\lambda > 0$  e  $\sqrt{\Delta} < \frac{f(n)}{8} + V_{rf}$ . Verificando a equação (439), vê-se que  $X_i$  sempre será um valor negativo.

Esta conclusão era esperada. Se  $X_i$  fosse positivo, as exponenciais  $\exp(X_i T_{rs})$  da equação para porcentagem média de adensamento (equação (411)) cresceriam com o passar do tempo, ao invés de diminuírem, e tenderiam ao infinito quando  $T_{rs} \rightarrow \infty$ . E se  $X_i = 0$ , as exponenciais seriam nulas para qualquer tempo e não haveria evolução dos recalques. Por outro lado, se  $X_1 = X_2$ , ainda que ambos negativos, as exponenciais seriam idênticas e não haveria como aparecer o efeito da “dupla onda”. Por fim, se  $X_i$  fosse um número complexo, as exponenciais poderiam ser reescritas em termos de funções trigonométricas (seno e cosseno), o que faria com que as curvas de porcentagem média de adensamento exibissem oscilações, não observadas na natureza.

Destaca-se, no entanto, que a equação (439) não apresenta a razão  $\frac{a_u}{a_{vs}}$ , presente na solução original da equação diferencial relativa ao tempo (o desenvolvimento levou a  $\frac{a_u}{a_{vs}} = 1$ ). Para  $a_u > a_{vs}$ , a análise se tornaria mais complicada e seria possível obter  $\Delta < 0$  ou  $\Delta = 0$ .

## APÊNDICE B – LIMITE QUANDO $V_{rf}$ TENDE AO INFINITO

Seja  $X_i$  igual a:

$$X_i = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2 - 4\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (442)$$

Se  $V_{rf} \rightarrow \infty$ , certamente  $V_{rf} \gg \frac{f(n)}{8}$ , pois  $\frac{f(n)}{8}$  é um valor finito. Para calcular o limite, reescreve-se a equação (442) da seguinte forma:

$$\lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} X_i = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \sqrt{\left[V_{rf} - \frac{f(n)}{8}(2\lambda - 1)\right]^2 - (4\lambda^2 - 4\lambda) \frac{f(n)}{8}}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (443)$$

Como  $\left[V_{rf} - \frac{f(n)}{8}(2\lambda - 1)\right]^2$  tende ao infinito,  $(4\lambda^2 - 4\lambda) \frac{f(n)}{8}$  é desprezível.

Simplificando:

$$\lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} X_i = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \left[V_{rf} - \frac{f(n)}{8}(2\lambda - 1)\right]}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (444)$$

O limite de  $X_1$  é:

$$\lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} X_1 = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] + \left[V_{rf} - \frac{f(n)}{8}(2\lambda - 1)\right]}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} = \frac{-2\lambda \frac{f(n)}{8}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} = -\frac{1}{V_{rf}} = 0 \quad (445)$$

O limite de  $X_2$  é:

$$\begin{aligned} \lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} X_2 &= \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] - \left[V_{rf} - \frac{f(n)}{8}(2\lambda - 1)\right]}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} = \frac{-2V_{rf} + \frac{f(n)}{8}(2\lambda - 2)}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (446) \\ &= -\frac{1}{\lambda \frac{f(n)}{8}} + \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right) \frac{1}{V_{rf}} = -\frac{1}{\frac{f(n)}{8}} \end{aligned}$$

Seja  $\bar{U}_r$  descrito por:

$$\bar{U}_r = 1 - \frac{V_{rf}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs}) - \frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})}{(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8}} \right\} \quad (447)$$

Para um determinado Fator Tempo Radial  $T_{rs}$ , a exponencial  $\exp(X_2 T_{rs})$  é praticamente nula, mas  $\exp(X_1 T_{rs})$  não. Esse instante caracteriza o patamar de “fim” do adensamento primário, em que  $\bar{U}_r = R$ . Portanto, a parcela de secundário é:

$$\bar{U}_r = 1 - R - \frac{V_{rf}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{-\frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})}{(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8}} \right\} \quad (448)$$

A parcela de primário deve corresponder a:

$$\bar{U}_r = R - \frac{V_{rf}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs})}{(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8}} \right\} \quad (449)$$

De modo que a soma entre as equações (449) e (448) resulte na (447).

Calculando-se o limite da equação (449) quando  $V_{rf} \rightarrow \infty$ , tem-se que  $(X_1 - X_2) \frac{f(n)}{8} = 1$ ,  $\left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] = 1$  e  $V_{rf} \frac{X_1}{X_2} = \frac{f(n)}{8}$ . Assim, escreve-se:

$$\lim_{V_{rf} \rightarrow \infty} \bar{U}_r = R - \frac{\frac{f(n)}{8}}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1 - \lambda)} \exp\left(-\frac{8T_{rs}}{f(n)}\right) \quad (450)$$

### APÊNDICE C – LIMITE QUANDO $V_{rf}$ TENDE A $V_{r0}$

A igualdade  $V_{r0} = V_{rf}$  corresponde a  $\lambda = 0$ , pela definição de  $\lambda$  na equação (291). Seja  $X_i$  igual a:

$$X_i = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] \pm \sqrt{\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2 - 4\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}}}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} \quad (451)$$

O limite de  $X_2$  é:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} X_2 = \frac{-\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right] - \left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]}{2\lambda \frac{f(n)}{8} V_{rf}} = -\infty \quad (452)$$

Aplicando a regra de L'Hôpital, o limite de  $X_1$  é:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} X_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{-4\frac{f(n)}{8} V_{rf}}{\left[\frac{f(n)}{8} + V_{rf}\right]^2}}{2 \frac{f(n)}{8} V_{rf}} = \frac{-1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}} \quad (453)$$

Seja  $\bar{U}_r$  descrito por:

$$\bar{U}_r = 1 + \frac{1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}(1-\lambda)} \left\{ \frac{\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs}) - \frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})}{X_1 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] - X_2 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right]} \right\} \quad (454)$$

De acordo com as equações (452) e (453), o termo  $\frac{X_1}{X_2} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right] \exp(X_2 T_{rs})$  cai para zero quando  $\lambda \rightarrow 0$ . No denominador, o termo  $X_1 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_1\right]$  se torna desprezível diante de  $X_2 \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right]$ . Este, por sua vez, pode ser simplificado com o termo  $\frac{X_2}{X_1} \left[1 + \frac{f(n)}{8} \lambda X_2\right] \exp(X_1 T_{rs})$  do numerador. Assim:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{U}_r = 1 + \frac{1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}} \left\{ \frac{1}{X_1} \exp(X_1 T_{rs}) \right\} \quad (455)$$

Substituindo o valor limite de  $X_1$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{U}_r = 1 + \frac{1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}} \left\{ \frac{1}{\frac{-1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}}} \exp \left( \frac{-1}{\frac{f(n)}{8} + V_{rf}} T_{rs} \right) \right\} \quad (456)$$

E, simplificando:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{U}_r = 1 - \exp \left( \frac{-8T_{rs}}{f(n) + 8V_{rf}} \right) \quad (457)$$

Que é igual à equação (277) do caso de deformações verticais iguais com coeficiente de viscosidade constante.

## APÊNDICE D – EQUAÇÕES “EQUAL STRAIN” SIMPLIFICADAS

Conforme mostrado por Coelho (1997) (item 1.3.3), o fluxo no caso de deformações verticais iguais pode ser descrito de forma simplificada por:

$$-\frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial r} = \left( \frac{r_e^2}{2r} - \frac{r}{2} \right) \frac{\partial e}{\partial t} \quad (458)$$

Cuja derivada em relação ao tempo é:

$$-\frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} = \left( \frac{r_e^2}{2r} - \frac{r}{2} \right) \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (459)$$

A partir do modelo de viscosidade, já foi demonstrado que:

$$\frac{de}{dt} = a_{vs} \left( \frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right) \quad (460)$$

E a parcela viscosa é expressa por:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\frac{\eta(e)}{1+e} f \left( \frac{\partial e}{\partial t} \right) = -\frac{\eta(e)}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (461)$$

Considerando primeiramente o caso em que  $\eta(e)$  é constante, escreve-se:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\frac{\bar{\eta}}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (462)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} = -\frac{\bar{\eta}}{1+e} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (463)$$



A partir das equações (458), (459), (460) e (463), escreve-se:

$$-\left[\frac{k_r(1+e)}{\gamma_w}\right]\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{r_e^2 - r^2}{2r}\right)a_{vs}\frac{d\bar{u}}{dt} + \left(\frac{a_{vs}\bar{\eta}}{1+e}\right)\left[\frac{k_r(1+e)}{\gamma_w}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} \quad (464)$$

Ou:

$$c_{rs}\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{k_r\bar{\eta}}{\gamma_w}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \left(\frac{r_e^2 - r^2}{2r}\right)\frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (465)$$

Em que  $c_{rs} = \frac{k_r(1+e)}{a_{vs}\gamma_w}$ .

As condições inicial e de contorno necessárias para a resolução do problema são:

- 1)  $u(r_w, t) = 0$
- 2)  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$  (a ser determinado)

A condição  $\frac{\partial u(r_e)}{\partial r} = 0$  está automaticamente satisfeita na equação (465).

Se o coeficiente de viscosidade for variável, ele é expresso da seguinte forma:

$$\eta(e) = \eta_f - \lambda a_u \eta_f \frac{\partial \bar{u}}{\partial e} \quad (466)$$

A equação (461) passa a ser:

$$\overline{\sigma'_{v\eta}} = -\frac{\eta_f}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t} + \lambda a_u \frac{\eta_f}{1+e}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (467)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{d\overline{\sigma'_{v\eta}}}{dt} = -\left(\frac{\eta_f}{1+e}\right)\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \lambda a_u \left(\frac{\eta_f}{1+e}\right)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (468)$$

A partir das equações (458), (459), (460) e (468), escreve-se:

$$= a_{vs} \left[ \left( \frac{\eta_f}{1+e} \right) \left( \frac{2r}{r_e^2 - r^2} \right) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \lambda a_u \left( \frac{\eta_f}{1+e} \right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt} \right] - \left( \frac{2r}{r_e^2 - r^2} \right) \left[ \frac{k_r(1+e)}{\gamma_w} \right] \frac{\partial u}{\partial r} \quad (469)$$

Ou:

$$c_{rs} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \left( \frac{r_e^2 - r}{2r} \right) \frac{\lambda a_u}{c_{rs} a_{vs}} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \left( \frac{r_e^2 - r}{2r} \right) \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (470)$$

Com as seguintes condições iniciais e de contorno:

- 1)  $u(r_w, t) = 0$
- 2)  $\bar{u}(0) = \bar{u}_0$  (a ser determinado)
- 3)  $\frac{d\bar{u}(0)}{dt} = 0$

Novamente a condição  $\frac{\partial u(r_e)}{\partial r} = 0$  está automaticamente satisfeita.

Admitindo que a função  $u(r, t)$  seja dada pelo produto:

$$u(r, t) = F(r)G(t) \quad (471)$$

As equações (465) e (470) se tornam, respectivamente:

$$c_{rs} F'(r)G(t) + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) F'(r)G'(t) + \left( \frac{r_e^2 - r^2}{2r} \right) \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (472)$$

E:

$$\left( \frac{2r}{r_e^2 - r^2} \right) c_{rs} F'(r)G(t) + \left( \frac{k_r \bar{\eta}}{\gamma_w} \right) \left( \frac{2r}{r_e^2 - r^2} \right) F'(r)G'(t) + \frac{\lambda a_u}{c_{rs} a_{vs}} \left( \frac{k_r \eta_f}{\gamma_w} \right) \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt} = 0 \quad (473)$$

Separando as funções em  $r$  de um lado e as funções em  $t$  do outro:

$$-\left(\frac{2r}{r_e^2 - r^2}\right)F'(r) = \frac{\frac{d\bar{u}}{dt}}{c_{rs}G(t) + \left(\frac{k_r\eta}{\gamma_w}\right)G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (474)$$

E:

$$-\left(\frac{2r}{r_e^2 - r^2}\right)F'(r) = \frac{\frac{\lambda}{c_{rs}} \frac{a_u}{a_{vs}} \left(\frac{k_r\eta_f}{\gamma_w}\right) \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \frac{d\bar{u}}{dt}}{c_{rs}G(t) + \left(\frac{k_r\eta}{\gamma_w}\right)G'(t)} = -\frac{1}{\Omega} \quad (475)$$

Onde  $\Omega$  é uma constante.

As equações relacionadas ao tempo são as mesmas obtidas anteriormente (equações (211) e (305)). Evidentemente, as expressões para  $G(t)$  também serão. Resta descobrir a função  $F(r)$ , tal que:

$$-\left(\frac{2r}{r_e^2 - r^2}\right)F'(r) = -\frac{1}{\Omega} \quad (476)$$

Para ambos os casos.

Integrando:

$$F(r) = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{r_e^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} + c_1 \right) \quad (477)$$

Onde  $c_1$  é uma constante.

De acordo com a condição de contorno:  $u(r_w, t) = 0$ . Assim:

$$F(r_w) = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{r_e^2}{2} \ln r_w - \frac{r_w^2}{4} + c_1 \right) = 0 \quad (478)$$

Donde:

$$c_1 = -\frac{1}{\Omega} \left( \frac{r_e^2}{2} \ln r_w - \frac{r_w^2}{4} \right) \quad (479)$$

Substituindo:

$$F(r) = \frac{1}{\Omega} \left[ \frac{r_e^2}{2} \ln \left( \frac{r}{r_w} \right) - \frac{(r^2 - r_w^2)}{4} \right] \quad (480)$$

Que é a mesma função  $F(r)$  obtida anteriormente (equações (223) e (314)). Portanto, os valores de  $u(r, t) = F(r)G(t)$  nas soluções simplificadas são os mesmos das soluções completas.