

## INTRODUÇÃO

Escoamentos através de meios porosos estão presentes em uma infinidade de situações como, por exemplo, quando um solo arenoso é atingido por uma chuva ou por uma certa quantidade de líquido proveniente de algum reservatório (por exemplo, um caminhão tanque acidentado) rompido.

As linhas de trajetória (e as linhas de corrente) nesses escoamentos são curvas extremamente complexas e, na maioria dos casos, impossíveis de serem determinadas com o ferramental usual. Em outras palavras, a descrição do movimento de um líquido no interior de um meio poroso, sob o ponto de vista da mecânica dos fluidos clássica, é impraticável. Mesmo que fossem conhecidas as fronteiras entre a região sólida (chamada de matriz porosa) e o líquido, sua complexidade geométrica impediria qualquer descrição local à luz da Mecânica dos Meios Contínuos. Mais especificamente, não haveria como aplicar condições de contorno do tipo “não deslizamento” por não se saber sequer onde estaria o contorno.

Devido aos aspectos acima mencionados e à necessidade de se construir descrições locais, com alguma precisão, uma das opções para estudar um escoamento através de um meio poroso é empregar a Teoria Contínua de Misturas [5], que consiste numa generalização da Mecânica dos Meios Contínuos, onde os materiais originalmente tratados como corpos contínuos passam a ser vistos como constituintes de uma mistura, coexistindo superpostos numa mesma região espacial.

Basicamente, na Teoria Contínua de Misturas, cada meio contínuo (líquido, sólido, ...) é representado por um constituinte contínuo que ocupa toda a região da mistura. Os constituintes são dotados de cinemática independente, de tal forma que a um dado ponto não podemos mais associar uma única velocidade, e sim uma velocidade para cada constituinte. Especificamente falando, há várias configurações de referência (uma para cada constituinte) e apenas uma configuração atual.

No caso de escoamentos através de meios porosos, sob o ponto de vista da Teoria de Misturas, trabalharemos com três constituintes: o sólido – representando a

matriz porosa, o líquido – representando o objeto principal de estudo e um gás inerte – considerado para prover alguma compressibilidade ao sistema.

O fenômeno em foco neste trabalho é o escoamento de um líquido através de um meio poroso, com transição saturado/insaturado.

Mais especificamente, consideraremos uma matriz porosa rígida, homogênea, isotrópica e em repouso através da qual escoar um líquido cuja densidade, enquanto contínuo, é constante.

Enquanto o escoamento se processar sem que o líquido preencha todos os poros (poros ativos – aqueles que se interconectam e pelos quais há escoamento) ele é dito um escoamento insaturado. Quando o líquido (visto como contínuo) ocupar todo o volume dos poros, teremos um escoamento saturado.

Levando em conta a incompressibilidade do líquido (contínuo clássico) e do meio poroso, há um limite físico/geométrico para a quantidade de líquido admissível em cada parte da matriz porosa. Em outras palavras, este é um problema sujeito a uma restrição que, até os dias de hoje, jamais foi matematicamente considerado em descrições locais na literatura clássica.

Em geral, ao simular problemas desse tipo, os autores ajustam as condições iniciais de forma a jamais violar os limites físicos inerentes ao fenômeno. Desta forma, se isentam da necessidade de trabalhar com restrições sobre as incógnitas.

Nesta Tese a contribuição principal é a apresentação de um modelo matemático que permite a simulação de um escoamento em meio poroso, com transição saturado/insaturado, independente de condição inicial. Em outras palavras, é apresentado um modelo realista sob quaisquer condições iniciais.

Além da metodologia a ser proposta, há também uma análise de resultados onde se vê o quanto a velocidade de propagação é incrementada com a saturação. Quando não se impõem limites para a quantidade de líquido nos poros, se observa situações envolvendo apenas baixas velocidades de propagação associadas a contextos onde a quantidade de líquido é maior do que o volume do poro que conteria esse líquido..

Neste trabalho nos restringimos a um contexto unidimensional onde os campos de velocidade  $v$  e de fração de fluido  $\phi$ , incógnitas do problema, serão

funções de uma variável espacial (cartesiana retangular) e do tempo. Além destes, teremos um campo de pressões  $p$  que, nos escoamentos saturados, é uma função de  $\varphi$ . Aqui a pressão será suposta uma função linear de  $\varphi$ , enquanto não houver saturação.

Quando, por alguma razão, a fração de fluido  $\varphi$  iguala a porosidade  $\varepsilon$ , não se pode mais representar a pressão  $p$  a partir de uma relação constitutiva, uma vez que a restrição geométrica imposta pela rigidez da matriz porosa associada à incompressibilidade do líquido impõe a desigualdade  $\varphi \leq \varepsilon$  em toda parte.

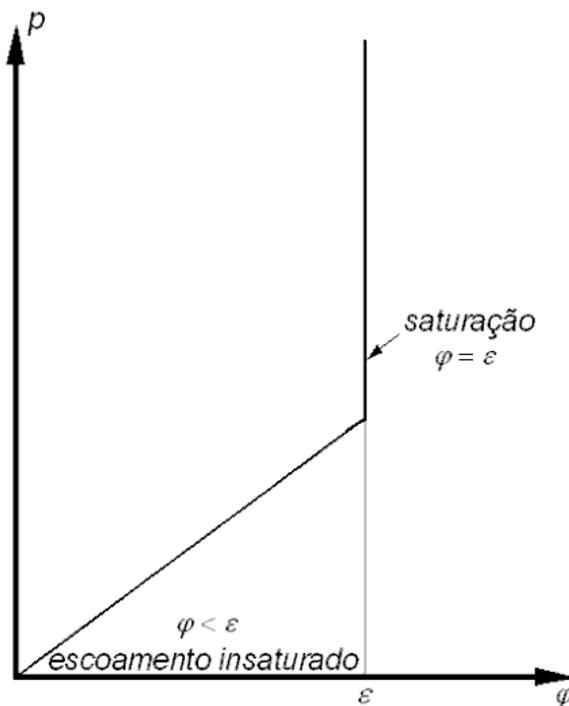


Gráfico do comportamento da fração de fluido com relação a pressão

Assim, será necessário trabalhar com um sistema de equações diferenciais parciais (hiperbólico e não linear) com uma incógnita limitada -  $\varphi \leq \varepsilon$ . Quando a saturação  $\varphi = \varepsilon$  é atingida (e o modelo aqui proposto permite a descrição matemática da transição insaturado/saturado) a pressão  $p$  passa a ser uma incógnita independente no sistema de equações diferenciais, sendo obtida de forma independente da fração de fluido.

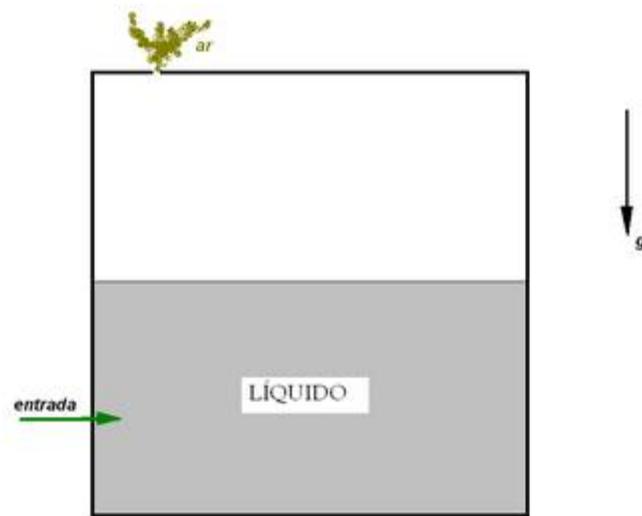
O que se encontra na literatura usual é esse sistema sem a restrição. Dessa forma, se não forem impostas condições iniciais especiais, teremos situações onde

$\varphi > \varepsilon$  que além de fisicamente absurdas dão origem a conclusões perigosas como, por exemplo, velocidades de propagação muito inferiores (em módulo) às reais e pressões bem menores que as reais. A consequência disso é uma simulação (meramente matemática) que pode sugerir um tempo muito grande para que uma certa região seja atingida por uma frente de choque e/ou uma pressão bem aquém daquela que seria suficiente para fraturar a matriz porosa.

Nos limitamos neste trabalho a simular problemas sujeitos a condições iniciais que permitam soluções analíticas. No entanto, podemos considerar condições iniciais quaisquer e empregar o esquema de Glimm para efetuar simulações.

É preciso chamar a atenção que, dos três constituintes envolvidos no processo, apenas o fluido (líquido) será objeto de análise específica. Em outras palavras, não serão abordadas equações de conservação para a matriz porosa e nem para o gás inerte. A matriz porosa, suposta rígida e em repouso, atende à equação da continuidade e, com uma escolha adequada para o tensor parcial de tensões, atende também à equação da quantidade de movimento linear. O gás inerte é considerado apenas para prover alguma compressibilidade para a mistura nos poros. Assim, supondo que sua densidade seja muitíssimo pequena, não é necessário se considerar equações de conservação para ele.

Antes de passar ao detalhamento teórico deste trabalho, levando em conta que temos também um compromisso didático, vamos considerar um problema clássico, e bastante simples, para ilustrar a contribuição deste texto. Consideremos um tanque (cubo) de volume  $V = L^3$  (invariante no tempo) no qual é injetado um líquido com densidade  $\rho$  constante (notem a válvula de saída de ar no topo do tanque – só sai ar...).



Tanque com líquido de densidade constante

A pressão no fundo do tanque é dada por  $p = p_0 + \rho gH$  onde  $H$  é a altura da coluna de líquido, enquanto  $H < L$ . Quando  $H = L$  a pressão pode ter qualquer valor maior ou igual a  $p_0 + \rho gL$  (visto que o tanque é rígido e por mais que se aumente a pressão não haverá um volume de líquido maior que o volume do tanque).

Esta idéia é generalizada neste trabalho. Aqui não temos uma restrição sobre uma variável, temos uma restrição sobre um campo que deve satisfazer (no sentido generalizado) um sistema de equações diferenciais parciais, hiperbólico e não linear.

## Revisão Bibliográfica

O estudo de fenômenos de transporte em meios porosos data da década de 1920, de acordo com uma revisão de Alazmi e Vafai [1], comparando diferentes modelos para problemas complexos. No entanto, uma descrição adequada da transição de escoamentos saturados para insaturados através de meios porosos continua a ser um assunto em aberto.

Sistemas hiperbólicos com restrições podem estar presentes em diferentes aplicações, tais como escoamentos bifásicos, plasticidade compressível com choques e descrição de tráfego de veículos ou de multidões, incluindo os engarrafamentos, a presença de praças de pedágio e de previsão de acidentes de trânsito nas estradas. Bouchut et al. [2] discutem modelos de escoamentos bifásicos de gases e líquidos, para líquidos incompressíveis, com o objetivo de modelar a dinâmica de escoamentos em tubulações, um modelo de ordem zero proposto, que consiste em um sistema de duas leis de conservação ao qual é imposta uma restrição na fração volumétrica, que deve ser menor que a unidade. A metodologia proposta por Bouchut et al. [2] capta as fortes diferenças entre a dinâmica das regiões congestionadas e regiões livres, e permite determinar a sua transição. A restrição considerada por Bouchut et al. [2] é análoga à utilizada nesta tese. Comparando estes dois trabalhos, embora a abordagem apresentada por Bouchut et al. [2], pareça ser mais geral do que aquela utilizada nesta tese, é importante notar que, no teste trabalho um resultado original é apresentado: a solução exata para um Problema de Riemann não-linear com restrição. Rossmanith [3], emprega um método de volumes finitos de alta resolução, com base num método de propagação da ondas, para aproximar um sistema de equações magnetohidrodinâmicas hiperbólicas não lineares, satisfazendo uma restrição de divergência livre no campo magnético, sujeitas a ondas de choque e outras discontinuidades.

Modelos de fluxo de tráfego são normalmente inspirados por três categorias principais de modelos de mecânica dos fluidos: modelos de partículas, modelos cinéticos e modelos dinâmicos de fluidos. Esta última categoria é baseada em

equações de balanço de um certo número de características do escoamento, sendo geralmente descrita por modelos de primeira ou de segunda ordem.

Os modelos de primeira ordem supõem apenas a conservação do número de veículos, permitindo prever densidade; enquanto os modelos de segunda ordem, também levam em conta uma equação relacionada com a conservação do momentum, sendo capazes de prever também a velocidade de propagação - geralmente a velocidade média do escoamento, e originando modelos como as equações de Euler para a dinâmica dos gases. No entanto, estes modelos podem levar a um comportamento absurdo como veículos movendo-se para trás, apontado por Daganzo [4]. Aw e Rascle [5] propuseram um modelo - denominado modelo Aw-Rascle - a fim de corrigir esses problemas e garantir que a densidade e a velocidade permaneçam não negativas. Berthelin et al. [6] propuseram um modelo de fluxo de tráfego que descreve a formação e a dinâmica de engarrafamentos, constituídos por um sistema de dinâmica de gases (sem pressão) sob uma restrição máxima na densidade, em outras palavras, a restrição de densidade é preservada a qualquer momento. A dinâmica dos engarrafamentos - derivada usando um problema de Riemann associado ao modelo de Aw-Rascle, corresponde a regiões onde a restrição de densidade é atingida. A teoria matemática - prova de estabilidade fraca e existência de solução - é baseada nas equações isentrópicas da dinâmica dos gases com restrição unilateral sobre a densidade e a perda de massa desenvolvidas por Berthelin e Bouchut (ver [7] e referências nele contidos), que propõem uma formulação fraca incorporando os multiplicadores de Lagrange, que garantem a conservação do momentum.

O modelo de Berthelin et al. [6] consiste, essencialmente, na combinação com do sistema de de Euler com uma restrição de densidade máxima, assumindo que esta restrição é independente da velocidade. Posteriormente, Berthelin et al. [8] levaram em conta essa dependência, propondo um modelo de segunda ordem, também com base no modelo de Aw-Rascle [5]. Herty e Schleper [9], com o objetivo de prever os acidentes de trânsito, discutiram modelos matemáticos de previsão baseados numa descrição macroscópica do fluxo de trânsito. Essencialmente eles consideram propriedades matemáticas de um modelo macroscópico de tráfego de

segunda ordem juntamente com diferentes leis de pressão nas estradas conectadas.

Com o objetivo de modelar um pedágio em uma estrada, Colombo e Goatin [10] consideram uma única equação hiperbólica (problema de Cauchy) submetido a uma restrição unilateral local variável no fluxo, enquanto que nesta Tese um sistema de duas equações diferenciais parciais é considerado. O número total de veículos é conservado e a velocidade do tráfego é suposta uma função da densidade de tráfego. Empregando um procedimento matemático sofisticado, os autores provam que o problema está bem colocado e resolvem empregando uma solução de entropia com base em choques não clássicos. As soluções obtidas são coincidentes com os limites das soluções clássicas para leis de conservação adequadas, com funções de fluxos descontínuas que aproximam o problema restrito. É importante notar que o trabalho de Colombo e Goatin [10] considera uma restrição unilateral variável, que ocorre apenas no limite; enquanto nesta Tese, a restrição ocorre em todo o domínio e durante todo o tempo. Colombo et al. [11] além de estudar modelos de tráfego, também descrevem a dinâmica de fuga para multidões, com base em dois princípios: a conservação do número total de veículos e o fato da velocidade num dado ponto ser uma função da densidade nesse ponto; apresentando uma descrição rigorosa das restrições unilaterais sobre o escoamento observável.

Després et al. [12] observam que a importância de compreender as restrições na física matemática e desenvolver uma abordagem de equações diferenciais parciais não-lineares permanece um grande desafio até hoje. Estes autores apresentam uma estrutura matemática para soluções fracas com restrição de equações hiperbólicas, para modelar plasticidade compressível com choques, que dão origem a soluções descontínuas, baseadas em sistemas de Friedrichs com um convexo de restrição não-linear geral, provando que estas soluções fracas são únicas. O formalismo fraco desenvolvido permite representar tanto os critérios de plasticidade Tresca quanto aqueles de Von Mises.

Este trabalho apresenta um modelo matemático fisicamente realista para representar o enchimento de uma matriz porosa rígida não saturada por um fluido incompressível, identificando a transição de escoamento insaturado para saturado. O modelo mecânico usa uma abordagem da teoria de misturas [13, 14] - um método

conveniente para modelar sistemas multi-componentes – baseado numa teoria local termodinamicamente consistente que generaliza a Mecânica do Contínuo clássica [15]. O meio poroso insaturado é modelado como uma mistura de três componentes contínuos superpostos: um sólido (uma matriz porosa rígida, homogênea e isotrópica), um líquido (um fluido incompressível), e um gás inerte, suposto com densidade mássica muito baixa de massa, incluído para levar em conta a compressibilidade do sistema como um todo.

Saldanha da Gama [16] propôs uma relação constitutiva levando em conta um limite geométrico, que surge devido à da rigidez da matriz porosa e à incompressibilidade do fluido, evitando as soluções sem significado físico. Estas soluções corresponderiam a um valor infinito para a pressão em escoamentos saturados – quando a fracção de fluido tende à porosidade. No trabalho de Saldanha da Gama [16] a equação proposta impõe um comportamento físico que impede que o fluido sature a matriz porosa, enquanto nesta Tese o meio poroso pode efetivamente ser saturado pelo fluido. Martins-Costa e Saldanha da Gama [17] propuseram uma melhoria na relação constitutiva na pressão parcial de [16], na qual a restrição geométrica unilateral para a fracção de fluido, em vez de ser assumida em todo o domínio, é considerada apenas só numa vizinhança conveniente da porosidade (desde que a fracção de fluido seja menor do que a porosidade). Além disso, a relação [17] assegura a continuidade da pressão e de sua primeira derivada, permitindo assim o cálculo analítico das invariantes Riemann associados ao problema.

É importante observar que, nesta Tese, a restrição unilateral geométrica foi matematicamente imposta, assegurando que o valor máximo que a fracção de fluido pode alcançar é o valor de porosidade. Isso impõe um estado intermediário decorrente de uma restrição geométrica.

## 1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE TEORIA DE MISTURAS

A ferramenta que empregaremos para modelar o escoamento em meio poroso, será a Teoria Contínua de Misturas, que consiste em uma generalização da mecânica do contínuo. É recomendável o conhecimento de algumas noções de mecânica do contínuo, como em Spencer[22] e Chadwick[9], assim como um conhecimento básico de mecânica Newtoniana ([14], [12], [15]).

O emprego da mecânica dos fluidos clássica é inviável para resolução de nosso problema, pois ela consiste no cálculo em toda geometria dos poros, do movimento do fluido. Na teoria de Misturas, iremos adotar a hipótese do contínuo, e analisaremos a mecânica tanto da mistura quanto de cada constituinte isoladamente.

Neste capítulo, discutiremos os conceitos físicos e as equações de balanço que usaremos para modelar o problema associado ao escoamento em meio poroso. Não iremos tratar das equações de energia ou entropia. É importante ressaltar que faremos o desenvolvimento teórico apenas para o caso de uma mistura ideal, ou seja, em que os constituintes da mistura ocupam simultaneamente toda região da mistura. No meio poroso real e em algumas outras aplicações, esta hipótese não se aplica, pois se o meio poroso ocupasse todo espaço, não haveria poros, e o fluido se encontraria apenas nos poros, e não em toda região, no entanto o modelo ideal serve como uma aproximação dos casos reais.

## 1.1 CONCEITOS BÁSICOS

Uma mistura consiste de  $N \geq 2$  constituintes contínuos em uma mesma região. Denotaremos o  $k$ -ésimo constituinte/componente da mistura por  $\mathcal{C}_k$ , e iremos nos referir a ele como componente- $k$ . Adotaremos o modelo do contínuo para cada componente, isto é, cada constituinte pode ser dividido indefinidamente, mantendo suas propriedades. Iremos ainda supor que na mistura, pode haver uma superposição de constituintes em uma mesma posição.

A Física moderna nos diz que em escala microscópica, a matéria é descontínua, composta de partículas menores e freqüentemente de vazios. O modelo do contínuo pode ser interpretado como o caso limite em que se admite o tamanho das partículas “infinitamente pequeno”, que é uma boa aproximação para as aplicações em escala macroscópica.

Analisando a hipótese da superposição dos constituintes a luz da física moderna, o resultado seria que em uma determinada posição, recairíamos em um vazio, ou em uma partícula subatômica, que não possui propriedades de nenhum dos constituintes, portanto esta hipótese só fará sentido, admitindo-se o modelo do contínuo. Neste caso teremos que definir o que significa haver um constituinte  $\mathcal{C}_k$  em um determinado ponto. Um ponto não possui volume, portanto não podemos associar uma quantidade de matéria a ele. Porém, a idéia de haver um constituinte no ponto, corresponde a ele estar “rodeado” pelo constituinte. Diremos então que haverá o constituinte  $\mathcal{C}_k$  em um ponto, sempre que  $\rho_k > 0$  com

$$\rho_k = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{m_k(\mathcal{A})}{V} \quad (1.1)$$

onde  $V$  é o volume de uma região  $\mathcal{A}$ , contendo o ponto, e  $m_k$  corresponde a massa de constituinte- $k$  na região. Chamaremos  $\rho_k$  de densidade parcial do constituinte- $k$  no ponto. Repare que (1.1) não corresponde a um limite na definição matemática, pois  $V$  não é variável da função  $m_k$ . Voltaremos a discutir a definição de densidade.

A superposição de constituintes, corresponde a em um dado ponto, haver vários constituintes distintos com seus respectivos  $\rho_i > 0$ . Em uma mistura de gases ou numa solução homogênea de líquidos, é natural aceitar que em cada ponto haverá uma densidade não nula para cada componente da mistura. Sabemos que esta aproximação só fará sentido no modelo do contínuo. Para meios porosos, esse modelo subentende os poros como sendo uma rede de “canais infinitesimais”, e cada vez menor os poros, melhor o modelo irá funcionar.

Cada constituinte terá movimento próprio:

$$\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\chi}_k(\bar{\mathbf{X}}^k, t) \quad (1.2)$$

O movimento da mistura consistirá nas equações correspondentes ao movimento de cada constituinte:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\chi}_1(\bar{\mathbf{X}}^1, t) \\ \bar{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\chi}_2(\bar{\mathbf{X}}^2, t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dada uma região em torno de um ponto, a massa total contida na região será igual a soma das massas de cada constituinte.

$$M = \sum_K m_K \quad (1.3)$$

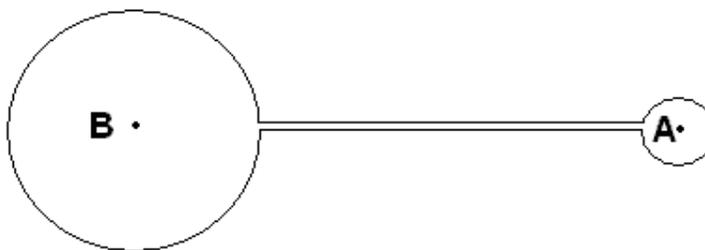
logo

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_K \boldsymbol{\rho}_K \quad (1.4)$$

A densidade possui a definição básica:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(\mathcal{A})}{V} \text{ ou } \rho = \frac{dM}{dV} \quad (1.5)$$

onde  $M(\mathcal{A})$  corresponde a massa total (de mistura) contida na região  $\mathcal{A}$ . Uma inconsistência dessa definição é o fato que podemos ter o volume de uma região tendendo para zero, e a densidade tendendo para um valor distinto da densidade do ponto. (ver figura abaixo)



Região aberta contendo 2 pontos distantes

Se os 2 raios tenderem para zero (o raio em torno de  $A$  mais rapidamente), teremos uma região em torno de  $A$ , com volume tendendo para zero e densidade tendendo para o seu valor em  $B$ . (observe que o baricentro da figura tende para  $B$ ).

Diremos então que a densidade em um ponto  $P$  vale  $\rho$ , sempre que: dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } A \subset B(P, \delta) \Rightarrow \left| \frac{M(A)}{V(A)} - \rho \right| < \varepsilon$$

onde  $B(P, \delta)$  corresponde a bola de centro  $P$  e raio  $\delta$ , e  $A$ , uma região Jordan-mensurável (Apostol[2]). Usaremos esta definição ao longo do texto, portanto quando escrevermos  $dM/dV$ , subentende-se em uma bola suficientemente pequena. A partir desta definição, podemos concluir que se  $\rho$  é definido em um aberto  $B$ , então  $\rho$  é contínuo em  $B$  (apêndice A).

Uma relação que se observa, é:

$$\iiint_{\Omega} \rho dV = M(\Omega) \quad (1.6)$$

onde  $M(\Omega)$  corresponde a massa limitada pela região  $\Omega$ . Adotando-se a identidade (1.6) como definição alternativa de densidade, observamos que:

- 1- Não existe apenas uma função  $\rho$  satisfazendo (1.6), visto que alterando-se o valor de  $\rho$  em um número finito de pontos (na verdade poderia ser um número infinito de pontos, como por exemplo, uma superfície que corta  $\Omega$ ) a identidade continuaria válida, e os novos valores não teriam significado físico nenhum.
- 2- Se quisermos uma função contínua que satisfaça (1.6), então teríamos apenas uma solução e ela coincidiria com a definição de densidade. No entanto, nem sempre haverá a tal função contínua (caso de uma interface entre 2 materiais distintos).

Vale notar que se existe a integral  $\iiint_{\Omega} \rho dV$ , pelo critério de integrabilidade de

Lebesgue, o conjunto dos pontos de descontinuidade da função possui medida nula ([4] e [2]), portando as 2 definições coincidirão quase sempre. O procedimento mais abstrato para se definir densidade, é considerar o volume como sendo a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^3$ , e a massa como sendo uma medida qualquer. A densidade seria definida como sendo a derivada de Radon-Nikodym (Asplund[4]) da massa pelo volume (limite da razão entre as medidas), e mais uma vez  $\rho = \frac{dM}{dV}$ .

Associamos a cada constituinte uma velocidade  $\bar{v}^k$  em cada ponto,

$$\bar{v}^k = \frac{\partial \mathcal{X}_k}{\partial t} = \frac{D_k \bar{x}^k}{Dt} \quad (1.7)$$

dada pela derivada material da posição  $\bar{x}^k$ . Adotando como sistema todos os componentes contidos em uma “região infinitesimal”  $dA$ , teremos para velocidade do centro de massa do sistema:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\sum \bar{v}^k dm_k}{dM} \Rightarrow \bar{v} \frac{dM}{dV} = \sum \bar{v}^k \frac{dm_k}{dV} \Rightarrow \\ \bar{v} &= \frac{\sum \bar{v}^k \rho_k}{\rho} \end{aligned} \quad (1.8)$$

que chamaremos de velocidade baricêntrica<sup>1</sup>. A velocidade baricêntrica é portanto um limite da velocidade do centro de massa, à medida que a região vai ficando cada vez menor. Vale observar que o momento linear de uma mistura contida em uma região  $\Omega$  está associado à velocidade baricêntrica.

$$\bar{P} = \sum_k \iiint_{\Omega} \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{\Omega} \sum_k \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{\Omega} \bar{v} \rho dV$$

<sup>1</sup> O procedimento mais formal para se definir velocidade baricêntrica, seria usar uma região esférica e tomar o limite do seu raio tendendo para zero.

Para uma região infinitamente pequena teríamos:

$$d\bar{P} = \sum_k \bar{v}^k dm_k = \bar{v} dM$$

Chamaremos de velocidade de difusão ( $\mu_k$ ) de um componente  $C_k$ :

$$\bar{\mu}^k = \bar{v}^k - \bar{v} \quad (1.9)$$

ou seja,  $\mu_k$  corresponde a velocidade do componente-k em relação ao centro de massa.

**Proposição 1.1**  $\sum \rho_k \bar{\mu}^k = \bar{0}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum \rho_k \bar{\mu}^k &= \sum \rho_k \bar{v}^k - \bar{v} \sum \rho_k = \\ &= \rho \bar{v} - \rho \bar{v} = \bar{0} \end{aligned}$$

que é uma relação intuitiva: o momento linear em relação ao centro de massa é zero.

Relembraremos agora algumas propriedades das derivadas materiais. Para um campo escalar  $f(\bar{x}, t)$ , a taxa de variação de  $f$  na direção de  $\bar{v}^k$ , ou seja, a medida que se acompanha o movimento do componente-k, será denotada por  $\frac{D^k f}{Dt}$ . Usando a regra da cadeia:

$$\frac{D^k f}{Dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{D^k x_i}{Dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \nabla f \cdot \bar{v}^k + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.10)$$

Para um campo vetorial  $\vec{f}(\bar{x}, t) = (f_1, f_2, f_3)$ , vale a relação (1.9), para cada componente  $f_i$  logo:

$$\frac{D^k \vec{f}}{Dt} = \nabla \vec{f} \cdot \bar{v}^k + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$$

onde  $\nabla \vec{f}$  é o diferencial / derivada de Frechet do campo  $\vec{f}$  ([2]).

Em uma mistura, iremos definir  $\frac{Df}{Dt}$  como a taxa de variação do campo, ao se deslocar com a velocidade baricêntrica. Ela não é uma derivada material

convencional, já que não se trata de uma taxa de variação que acompanha o movimento de algum constituinte ou corpo material. Pela regra da cadeia:

$$\frac{Df}{Dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \frac{dt}{dt} \right)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \nabla f \cdot \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.11)$$

analogamente, para campos vectoriais:

$$\frac{D\vec{f}}{Dt} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \quad (1.12)$$

substituindo a eq. (1.9) em (1.10) obtemos

$$\frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot (\vec{v} + \vec{\mu}^k) + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \vec{\mu}^k + \frac{Df}{Dt}$$

analogamente, para campos vectoriais:

$$\Rightarrow \frac{D^k \vec{f}}{Dt} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{\mu}^k + \frac{D\vec{f}}{Dt}$$

Multiplicando a eq. (1.10) por  $\rho_k$ , e substituindo (1.4) e (1.8) teremos:

$$\rho_k \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \rho_k \vec{v}^k + \rho_k \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\sum \rho_k \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \sum \rho_k \vec{v}^k + \frac{\partial f}{\partial t} \sum \rho_k \Rightarrow$$

$$\sum \rho_k \frac{D^k f}{Dt} = \nabla f \cdot \rho \vec{v} + \frac{\partial f}{\partial t} \rho = \rho \frac{Df}{Dt} \quad (1.13)$$

e no caso vetorial

$$\sum \rho_k \frac{D^k \vec{f}}{Dt} = \rho \frac{D\vec{f}}{Dt}$$

## 1.2 CONSERVAÇÃO DE MASSA

Não podemos falar de região material da mistura, pois cada constituinte possui sua própria velocidade, mas podemos tratar da região material de cada componente. Denotaremos por  $R_k$  a região material (região composta por um conjunto fixo de partículas) dos elementos do componente-k. Como estamos tratando apenas de misturas quimicamente inertes, não teremos componentes se combinando ou se transformando em outros. Neste caso, a massa total  $m_k$  de componente-k contida na região material  $R_k$  se mantém constante e sua derivada pelo tempo é nula.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \rho_k dV = 0$$

**Proposição 1.2** (*equação da continuidade / conservação de massa*)

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \bar{v}^k) = 0 \quad (1.14)$$

pelo teorema do transporte de Reynolds [3] teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} dV + \iint_{\partial R_k} \rho_k \bar{v}^k \cdot d\bar{A} = \\ &\iiint_{R_k} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \text{div}(\rho_k \bar{v}^k) \right) dV = 0 \end{aligned}$$

válido para qualquer região material, logo seu integrando tem que ser identicamente nulo.

somando (1.14) em k obtemos:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \sum \text{div}(\rho_k \bar{v}^k) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \sum \rho_k + \text{div} \sum (\rho_k \bar{v}^k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

que é a equação da continuidade para mistura.

Efetuando o divergente do produto na eq. (1.14), obtemos:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \bar{v}^k \cdot \nabla \rho_k + \rho_k \operatorname{div} \bar{v}^k = 0$$

portanto

$$\frac{D^k \rho_k}{Dt} + \rho_k \operatorname{div} \bar{v}^k = 0 \quad (1.16)$$

e para mistura

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0 \quad (1.17)$$

Observe que as relações (1.15) e (1.17), valem também para misturas que reagem quimicamente, visto que a taxa total de criação de massa é nula, teremos apenas que os componentes se transformam uns nos outros.

**Proposição 1.3** Para cada constituinte  $\mathcal{C}_k$ , vale:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f(\bar{x}, t) \rho_k dV = \iiint_{R_k} \frac{D^k f}{Dt} \rho_k dV \quad (1.18)$$

Pelo teorema do transporte de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f(\bar{x}, t) \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \rho_k + f \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} (f \rho_k \bar{v}^k) \right) dV = \\ &= \iiint_{R_k} \left( \rho_k \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + f \operatorname{div} (\rho_k \bar{v}^k) + \rho_k \bar{v}^k \cdot \nabla f \right) dV = \end{aligned}$$

aplicando (1.14) teremos

$$= \iiint_{R_k} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}^k \cdot \nabla f \right) \rho_k dV = \iiint_{R_k} \frac{D^k f}{Dt} \rho_k dV$$

A Proposição 1.3, possui a interpretação intuitiva informal:

$$\frac{d}{dt} \int_{R_k} f dm_k, \text{ que obviamente vale } \int_{R_k} \frac{Df}{Dt} dm_k$$

### 1.3 EQUAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Para uma partícula<sup>2</sup>, a força resultante vale a taxa de variação de seu momento linear. Como estamos tratando da força e do momento linear da partícula, e não de um ponto fixo no espaço, trata-se de uma derivada material, ou seja:

$$\frac{D\bar{P}^k}{Dt} = \bar{F}$$

onde  $\bar{F}$  é a força resultante na partícula, e  $\bar{P}^k = \bar{v}^k \rho_k dV$  seu momento linear.

Mais uma vez, estamos tratando do caso em que os componentes da mistura são quimicamente inertes.

A força resultante será a soma de 3 componentes:

- Força de corpo (externa) ([22] e [9])
- Força de interação entre os constituintes
- Força de superfície (associada ao tensor de tensões de Cauchy) ([22] e [9])

A força externa de corpo, possui como principal exemplo o Peso que tem a forma  $\bar{g} dm$  ou  $\bar{g} \rho dV$ . Generalizando, denotaremos por :

$$\bar{G}^k \rho_k dV$$

a força de corpo agindo sobre o componente  $C_k$ .

Para regiões infinitesimais em torno do mesmo ponto, a força de interação entre os constituintes, é proporcional ao  $dV$ , portanto, no ponto, a razão  $\bar{F} / dV$  é constante. A força de interação do componente-i sobre o componente-k será denotada então por :

$$\bar{H}_i^k dV$$

definindo:  $\bar{H}^k = \sum_{i \neq k} \bar{H}_i^k$  teremos que a soma das forças de todos os demais

constituintes sobre o componente-k será:

---

<sup>2</sup> Entendendo como partícula, um corpo cuja posição pode ser descrita por um único ponto (Desloge[12]). Aqui a partícula vai consistir em uma região material infinitesimal  $dA$ , de volume  $dV$ .

$$\sum_{i \neq k} \overline{H}_i^k dV = \overline{H}^k dV$$

Aplicando a 3ª lei de Newton obtemos:

$$\overline{H}_i^k = -\overline{H}_k^i \quad (1.19)$$

A força gerada por  $\overline{H}_i^k$ , terá a direção da diferença de velocidades  $\overline{v}_i - \overline{v}_k$ , pois ela é uma espécie de força de arrasto. Se  $\overline{v}_i \neq \overline{v}_k$ , não podemos associar um tensor a esta força (já que ela possui direção e sentido fixos, não variando conforme a escolha de  $d\overline{A}$ ). So iremos tratar o caso em que  $\overline{v}_i = \overline{v}_k$ , pois se as velocidades forem iguais em uma região, podemos tratar  $\mathcal{C}_k$  e  $\mathcal{C}_i$  como um constituinte só.

Quanto a força de superfície associada a  $\mathcal{C}_k$ , no caso  $\overline{v}_i = \overline{v}_k$ , esta força será ação do componente-k sobre ele mesmo (já que a força dos outros constituintes sobre  $\mathcal{C}_k$  está descrita por  $\overline{H}^k$ ). Definiremos um tensor parcial de tensões  $\mathbf{T}^k$ , de forma que a tensão em um elemento de área  $d\overline{A} = \hat{n} dA$  seria:

$$\mathbf{T}^k \cdot d\overline{A} \text{ ou } \mathbf{T}^k \cdot \hat{n} dA$$

Assim, a taxa de variação do momento linear de  $\mathcal{C}_k$  em uma região material vale:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \overline{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} (\overline{H}^k + \rho_k \overline{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \mathbf{T}^k \cdot d\overline{A} \quad (1.20)$$

que é uma aplicação da 2ª lei de Newton para o sistema de partículas [12]

**Proposição 1.4** (equação do momento linear para  $\mathcal{C}_k$ ) Seja  $\overline{a}^k = \frac{D\overline{v}^k}{Dt}$  e  $\text{div } \mathbf{T}^k$  o divergente do tensor parcial de tensões<sup>3</sup>,

$$\Rightarrow \rho_k \overline{a}^k = \overline{H}^k + \rho_k \overline{G}^k + \text{div } \mathbf{T}^k \quad (1.21)$$

<sup>3</sup> O divergente de um tensor é definido como sendo o vetor em que as componentes correspondem ao divergente de cada linha do tensor

Aplicando a eq. (1.18) e o teorema da divergência em (1.19), obtemos:

$$\iiint_{R_k} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV = \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iiint_{R_k} \text{div } \mathbf{T}^k dV$$

que vale para qualquer região material  $R_k$ , portanto

$$\rho_k \frac{D\bar{v}^k}{Dt} = \bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k + \text{div } \mathbf{T}^k$$

Multiplicando a eq. (1.20) por  $dV$ , teremos uma interpretação intuitiva para a proposição 1.4:

$$\begin{aligned} \bar{a}^k \rho_k dV &= \bar{H}^k dV + \bar{G}^k \rho_k dV + \text{div } \mathbf{T}^k dV \Rightarrow \\ \bar{a}^k dm_k &= \bar{H}^k dV + \bar{G}^k dm_k + \text{div } \mathbf{T}^k dV \end{aligned}$$

que é a 2ª lei de Newton para a partícula de  $\mathcal{C}_k$  com volume  $dV$  (massa  $\times$  aceleração = soma das forças).

Somando (1.21) para todos os constituintes, obtemos:

$$\sum \rho_k \bar{a}^k = \sum \bar{H}^k + \sum \rho_k \bar{G}^k + \text{div } \sum \mathbf{T}^k \quad (1.22)$$

Analisando cada termo desta equação:

- $\sum \bar{H}^k = \sum_k \sum_{i \neq k} \bar{H}_i^k$  e por (1.19) teremos  $\sum \bar{H}^k = \bar{0}$
- $\sum \bar{a}^k \rho_k dV$  é o limite  $Vol \rightarrow 0$  do produto da massa pela aceleração do centro de massa da mistura (todos componentes), contida em uma região  $A$ .

A aceleração do centro de massa é dada por  $\bar{a}^c = \sum \bar{a} dm / M_{total}$  ou seja

$$\bar{a}^c \iiint_A \rho dV = \sum \iiint_A \bar{a}^k \rho_k dV$$

tomando o limite:

$$\lim \bar{a}^c = \left( \sum \bar{a}^k \rho_k \right) / \rho$$

Chamaremos  $\bar{\mathbf{a}} = \left( \sum \bar{\mathbf{a}}^k \rho_k \right) / \rho$  de aceleração baricêntrica. Infelizmente, ela não coincide com a derivada material da velocidade baricêntrica.

- $\sum \rho_k \bar{\mathbf{G}}^k dV$  corresponde a soma de todas as forças de corpo (todos os componentes) em  $dV$ . Se todos os constituintes estiverem submetidos ao “mesmo  $\bar{\mathbf{G}}^k$ ” (que é o caso campo gravitacional), teremos:

$$\bar{\mathbf{G}}^1 = \bar{\mathbf{G}}^2 = \dots = \bar{\mathbf{G}} \Rightarrow \sum \rho_k \bar{\mathbf{G}}^k = \bar{\mathbf{G}} \sum \rho_k = \bar{\mathbf{G}} \rho$$

- $\sum \mathbf{T}^k$  possui a interpretação mais simples. A soma de todas as tensões em todos os constituintes, atuando em uma superfície  $d\bar{\mathbf{A}}$ , vale:

$$\left( \sum \mathbf{T}^k \right) \cdot d\bar{\mathbf{A}}$$

Chamaremos  $\sum \mathbf{T}^k = \mathbf{T}$  tensor de tensões da mistura.

Podemos reescrever a eq. (1.22) como

**Proposição 1.5** (*equação do momento linear da mistura*):

$$\rho \bar{\mathbf{a}} = \sum_k \rho_k \bar{\mathbf{G}}^k + \text{div } \mathbf{T}$$

e no caso a única força de corpo ser o peso:

$$\rho \bar{\mathbf{a}} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \text{div } \mathbf{T}$$

## 1.4 EQUAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Sabemos pelo princípio do momento angular de Euler ([12] e [15]) que:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\bar{L}^k}{dt}$$

onde  $\tau$  e  $L$  são respectivamente a torque e momento angular em uma partícula de constituinte  $\mathcal{C}_k$ . O momento angular de uma região material  $R_k$  em relação à origem é dado por:

$$\bar{L}^k = \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{v}^k \rho_k dV \quad (1.23)$$

Na soma dos torques, temos que somar os torques gerados por todas as forças externas atuando sobre o constituinte em  $R_k$ . Teremos então que:

$$\sum \vec{\tau} = \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \quad (1.24)$$

Observe que apesar das tensões serem forças do constituinte sobre ele mesmo, elas não são forças internas na superfície  $\partial R_k$  pois serão as forças que o exterior à  $R_k$  exerce sobre o interior à  $R_k$ .

A partir do princípio do momento angular, podemos concluir a proposição:

**Proposição 1.6** (*equação do momento angular*): *O tensor parcial de tensões é simétrico.*

$$T_{i,j}^k = T_{j,i}^k$$

Iremos recorrer à base canônica para desenvolver os cálculos.

Usando a eq. 1.18 para calcular a derivada do momento angular:

$$\frac{d\bar{L}^k}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} \frac{D^k}{Dt} (\bar{x} \times \bar{v}^k) \rho_k dV = \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{a}^k \rho_k dV \quad (1.25)$$

usando a equação do momento linear (1.21) para substituir  $\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k$  em (1.24) obtemos:

$$\iiint_{R_k} \bar{x} \times (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV = \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\rho_k \bar{a}^k - \text{div } \mathbf{T}^k) dV$$

igualando a soma dos torques (1.24) à derivada do momento angular (1.25) temos:

$$\begin{aligned} \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{a}^k \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \Rightarrow \\ \iiint_{R_k} \bar{x} \times \bar{a}^k \rho_k dV &= \iiint_{R_k} \bar{x} \times (\rho_k \bar{a}^k - \text{div } \mathbf{T}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \end{aligned}$$

portanto,

$$\iiint_{R_k} \bar{x} \times \text{div } \mathbf{T}^k dV = \iint_{\partial R_k} \bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A}) \quad (1.26)$$

Analisaremos apenas a componente em  $x_1$  da igualdade acima (resultado para as demais componentes, é análogo) . Efetuando os cálculos da integral dupla:

$$\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A} = \left( \sum T_{1,i}^k dA_i, \sum T_{2,i}^k dA_i, \sum T_{3,i}^k dA_i \right)$$

e a 1ª componente do produto vetorial  $\bar{x} \times (\mathbf{T}^k \cdot d\bar{A})$  :

$$x_2 \sum T_{3,i}^k dA_i - x_3 \sum T_{2,i}^k dA_i = (x_2 T_{3,1}^k - x_3 T_{2,1}^k, x_2 T_{3,2}^k - x_3 T_{2,2}^k, x_2 T_{3,3}^k - x_3 T_{2,3}^k) \cdot d\bar{A}$$

tomando o divergente

$$\begin{aligned} \left( x_2 \frac{\partial T_{3,1}^k}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial T_{2,1}^k}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial T_{3,2}^k}{\partial x_2} + T_{3,2}^k - x_3 \frac{\partial T_{2,2}^k}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial T_{3,3}^k}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T_{2,3}^k}{\partial x_3} - T_{2,3}^k \right) = \\ = T_{3,2}^k - T_{2,3}^k + x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Calculando o divergente do tensor de tensões:

$$\text{div } \mathbf{T}^k = \left( \sum \frac{\partial T_{1,i}^k}{\partial x_i}, \sum \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i}, \sum \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} \right)$$

e a 1ª componente de  $\bar{x} \times \text{div } \mathbf{T}^k$  :

$$x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i}$$

substituindo em (1.26) e tomando a 1ª componente encontramos:

$$\iiint_{R_k} \left( x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i} \right) dV = \iiint_{R_k} \left( T_{3,2}^k - T_{2,3}^k + x_2 \sum_i \frac{\partial T_{3,i}^k}{\partial x_i} - x_3 \sum_i \frac{\partial T_{2,i}^k}{\partial x_i} \right) dV$$

donde se conclui que :

$$\iiint_{R_k} (T_{3,2}^k - T_{2,3}^k) dV = 0$$

para qualquer região  $R_k$  logo  $T_{3,2}^k - T_{2,3}^k = 0$ . Efetuando a mesma conta para as demais componentes, concluímos que:  $T_{1,2}^k - T_{2,1}^k = 0$  e  $T_{3,1}^k - T_{1,3}^k = 0$  provando a simetria de.

Como corolário temos:

**Proposição 1.7** : *O tensor de tensões  $\mathbf{T}$  é simétrico,*

$$T_{i,j} = T_{j,i}$$

pois  $\mathbf{T} = \sum \mathbf{T}^k$  é a soma de tensores simétricos.

A proposição 1.6, apesar de válida para o modelo ideal de mistura (onde todos os constituintes ocupam toda região da mistura), nem sempre será válida para aplicações reais, como por exemplo se tivermos pequenos sólidos misturados a um líquido. O movimento do líquido pode gerar uma rotação nos sólidos (spin) , comportamento que não seria previsto no modelo ideal.

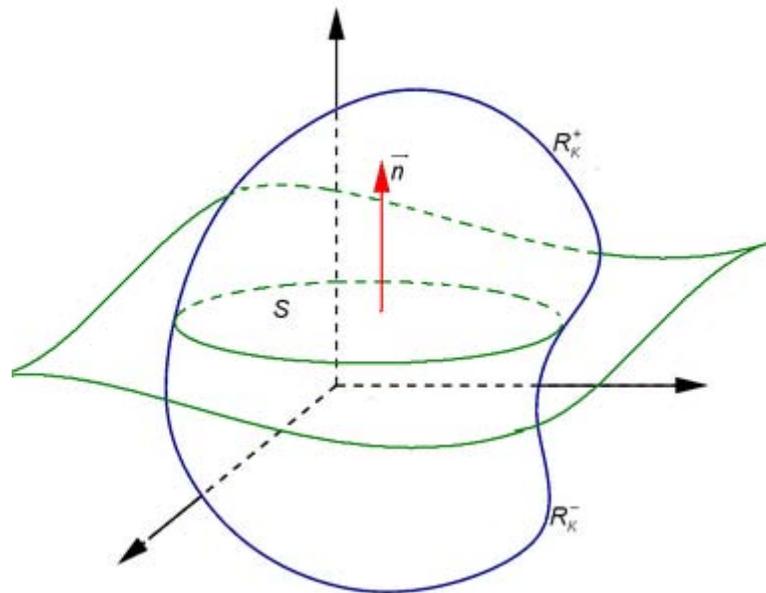
## 1.5 CONDIÇÕES DE SALTO

Iremos definir uma superfície de interface  $S$  como sendo o conjunto dos pontos de descontinuidade de algumas grandezas físicas (densidade, velocidade, pressão, tensor de tensões, etc...). Ela divide o espaço em duas regiões  $R^+$  e  $R^-$ , onde as grandezas são contínuas. Em geral a superfície de interface não é uma superfície material.

Seja  $S$  uma superfície orientada e  $f$  uma função definida no espaço, definimos a variação de  $f$  em  $S$  como:

$$[f] \equiv \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( f(\bar{x} + h\bar{n}) - f(\bar{x} - h\bar{n}) \right)$$

onde  $\bar{n}$  é o vetor normal a  $S$ . A variação de  $f$  corresponde à diferença entre os valores da função dos 2 lados da superfície.



Região cortada por superfície  $S$

Se  $\varphi$  é uma função contínua em  $S$ , temos as seguintes propriedades:

- i -  $[\varphi] = 0$
- ii -  $[\varphi f] = \varphi [f]$
- iii -  $[f + g] = [f] + [g]$

**Proposição 1.7** ( Teorema do transporte de Reynolds para regiões contendo uma superfície de interface) Seja  $R_k$  região material do componente- $k$  e  $S$  interseção da superfície de interface com a região  $R_k$ . Então

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f dV = \iiint_{R_k} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \bar{v}^k) \right) dV + \iint_S \left[ f \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot d\bar{A}$$

onde  $\bar{u}$  é a velocidades de cada ponto da superfície  $S$ .

A superfície  $S$  divide a região  $R_k$  em 2 regiões ;  $R_k^+$  na na direção do vetor normal  $\bar{n}$  , e  $R_k^-$  na direção oposta a  $\bar{n}$  . Chamaremos ainda  $S_k^+$  a borda de  $R_k$  no lado de  $R_k^+$  e  $S_k^-$  no lado de  $R_k^-$  , portanto :

$$\partial R_k^+ = S + S_k^+ \text{ e } \partial R_k^- = S + S_k^-$$

Tanto  $R_k^+$  como  $R_k^-$  não são regiões materiais, pois  $S$  não é uma superfície material, porém não há descontinuidade no interior delas, pois a descontinuidade está em  $S$  que não tem interseção com o interior de  $R_k^+$  ou  $R_k^-$ .

Denotaremos  $f^+$  , a função  $f$  restrita a  $R_k^+$  e  $f^-$  restrita a  $R_k^-$  . Podemos então aplicar o teorema do transporte de Reynolds a cada uma das regiões ( $R_k^+$  e  $R_k^-$ ). Teremos então:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f dV = \frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV + \frac{d}{dt} \iiint_{R_k^-} f dV \quad (1.27)$$

aplicando o teorema do transporte nas integrais em  $R_k^+$  e  $R_k^-$  teremos:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV = \iiint_{R_k^+} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S_k^+} f \bar{v}^k \cdot d\bar{A} - \iint_S f^+ \bar{u} \cdot \hat{n} dA$$

observando que  $d\bar{A}$  é orientado de dentro para fora de  $R_k^+$  e  $\hat{n}$  mantém a orientação da superfície  $S$ . Somando e subtraindo a integral de  $f^+ \bar{v}^{k+}$  para obter uma integral de superfície fechada:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV = \iiint_{R_k^+} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \iint_{S+S_k^+} f^+ \bar{v}^{k+} \cdot d\bar{A} - \iint_S f^+ \cdot (\bar{u} - \bar{v}^{k+}) \cdot \hat{n} dA \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^+} f dV = \iiint_{R_k^+} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) dV + \iint_S f^+ \cdot (\vec{v}^{k+} - \vec{u}) \cdot \hat{n} dA$$

analogamente, para  $R_k^-$  teremos:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k^-} f dV = \iiint_{R_k^-} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) dV + \iint_S f^- \cdot (\vec{v}^{k-} - \vec{u}) \cdot \hat{n} dA$$

A diferença de sinal nas integrais de superfície, deve-se ao fato que  $\hat{n}$  está orientado de fora para dentro em  $\partial R_k^+$  e de dentro para fora em  $\partial R_k^-$ .

Somando as 2 integrais obtemos a integral em toda região  $R_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} f dV &= \iiint_{R_k} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) \right) dV + \iint_S \left( f^+ \cdot (\vec{v}^{k+} - \vec{u}) - f^- \cdot (\vec{v}^{k-} - \vec{u}) \right) \cdot \hat{n} dA = \\ &= \iiint_{R_k} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}^k) \right) dV + \iint_S \left[ f \cdot (\vec{v}^k - \vec{u}) \right] \cdot \hat{n} dA \end{aligned}$$

**Proposição 1.8** (*condições de salto para conservação de massa*)

$$\left[ \rho_k (\vec{v}^k - \vec{u}) \cdot \hat{n} \right] = 0 \quad (1.28)$$

$R_k$  é uma região material, portanto a massa total de componente-k não se altera independente da presença da superfície de interface, ou seja:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \rho_k dV = 0$$

Usando a proposição 1.7 :

$$\iiint_{R_k} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{v}^k) \right) dV + \iint_S \left[ \rho_k \cdot (\vec{v}^k - \vec{u}) \right] \cdot \hat{n} dA = 0$$

pela equação da continuidade (proposição 1.2) teremos:

$$\iiint_{R_k} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \vec{v}^k) \right) dV = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_S \left[ \rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot \hat{n} dA = 0$$

valida para qualquer “pedaço” de superfície contida em  $S$ , portanto:

$$\left[ \rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot \hat{n} = 0$$

Somando a equação da continuidade (1.28) em  $k$ , iremos obter uma equação da continuidade para a mistura:

$$0 = \sum_k \left( \left[ \rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) \right] \cdot \hat{n} \right) = \hat{n} \cdot \sum_k \rho_k \cdot (\bar{v}^k - \bar{u}) = \hat{n} \cdot \left[ \sum_k \rho_k \bar{v}^k - \bar{u} \sum_k \rho_k \right]$$

substituindo as equações (1.4) e (1.8), teremos:

$$\left[ \rho (\bar{v} - \bar{u}) \cdot \hat{n} \right] = 0$$

A relação acima é válida mesmo que não haja descontinuidade na superfície para todos os componentes, pois se  $\rho_i$  e  $\bar{v}^i$  forem contínuos em  $S$ , teremos que

$$\left[ \rho_i \cdot (\bar{v}^i - \bar{u}) \right] = 0$$

**Proposição 1.9** (*condição de salto para o momento linear*)

$$\left[ \rho_k \bar{v}^k \left( (\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n} \right) - T^k \cdot \hat{n} \right] = \bar{0} \quad \text{ou} \quad \left[ \rho_k \bar{v}^k \otimes (\bar{v}^k - \bar{u}) \hat{n} - T^k \cdot \hat{n} \right] = \bar{0} \quad (1.29)$$

Reescrevendo a equação (1.20), que é a 2ª lei de Newton em  $R_k$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} T^k \cdot d\bar{A}$$

Pela proposição 1.7, a 1ª integral pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{v}^k \rho_k dV = \iiint_{R_k} \left( \frac{\partial \bar{v}^k \rho_k}{\partial t} + \text{div} \left( \rho_k \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k \right) \right) dV + \iint_S \left[ \rho_k \bar{v}^k \left( (\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n} \right) \right] dA$$

Podemos ainda, usando a equação da continuidade (1.14), desenvolver:

$$\iiint_{R_k} \left( \frac{\partial \bar{v}^k \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_k \bar{v}^k \otimes \bar{v}^k) \right) dV = \iiint_{R_k} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV = \iiint_{R_k^+} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV + \iiint_{R_k^-} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV$$

As regiões  $R_k^+$  e  $R_k^-$  não possuem descontinuidades em seu interior, portanto correspondem à soma das forças nas respectivas regiões:

$$\iiint_{R_k^+} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV = \iiint_{R_k^+} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{(-S)^+ S_k^+} \mathbf{T}^{k+} \cdot d\bar{A}$$

A relação para  $R_k^-$  é análoga. Repare que apesar de  $R_k^+$  não ser região material, a identidade continua válida, pois não há nenhuma derivada de integral. Substituindo as integrais acima, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{R_k} \bar{v}^k \rho_k dV &= \iiint_{R_k^+} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV + \iiint_{R_k^-} \frac{D\bar{v}^k}{Dt} \rho_k dV + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA = \\ &= \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{(-S)^+ S_k^+} \mathbf{T}^{k+} \cdot d\bar{A} + \iint_{S+S_k^-} \mathbf{T}^{k-} \cdot d\bar{A} + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA = \\ &= \iiint_{R_k} (\bar{H}^k + \rho_k \bar{G}^k) dV + \iint_{\partial R_k} \mathbf{T}^k \cdot d\bar{A} - \iint_S [\mathbf{T}^k \cdot \hat{n}] dA + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA \end{aligned}$$

igualando a relação acima às forças em (1.20) teremos:

$$-\iint_S [\mathbf{T}^k \cdot \hat{n}] dA + \iint_S [\rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n})] dA = 0$$

para qualquer pedaço da superfície  $S$ , portanto

$$\left[ \rho_k \bar{v}^k ((\bar{v}^k - \bar{u}) \cdot \hat{n}) - \mathbf{T}^k \cdot \hat{n} \right] = \bar{0}.$$