

## 2 MODELO MECÂNICO

Neste capítulo aplicaremos a teoria de mistura para modelar o escoamento de um líquido por um meio poroso rígido, homogêneo, isotrópico e em repouso. A mistura será formada por 3 constituintes: um líquido incompressível, o meio poroso e um gás inerte com baixíssima densidade. Assumiremos também que a mistura é isotérmica e que os componentes são quimicamente inertes, ou seja, não haverá reação química entre eles. Iremos nos referir ao constituinte líquido por  $\mathcal{C}_F$  (componente-F), e as grandezas associadas a ele por  $\rho_F, \bar{V}^F, T^F, \dots$  etc, e ao constituinte gasoso por  $\mathcal{C}_G$ .

Alguns conceitos associados ao meio poroso são descritos a seguir:

- POROSIDADE ( $\varepsilon$ ): corresponde à razão entre o volume máximo de líquido que pode ser colocado em um meio poroso e o volume total da região contendo o meio poroso. Intuitivamente,  $\varepsilon$  é uma medida da quantidade de vazios ativos no meio poroso, e seus valores variam de  $0 < \varepsilon < 1$ .
- FRAÇÃO DE FLUIDO ( $\varphi$ ): corresponde a razão entre o volume de líquido em um meio poroso  $dV_F$  (volume do líquido tratado como contínuo isolado fora da mistura) e o volume total da região contendo o meio poroso  $dV$ . Analisando um fluido contido em um volume infinitesimal, temos:

$$\rho_F = \frac{dm_F}{dV}$$

onde  $\rho_F$  corresponde a densidade parcial do fluido em  $dV$ . Sabemos que

$$\rho_0 = \frac{dm_F}{dV_F}$$

onde  $\rho_0$  corresponde a densidade usual do fluido. Logo a fração de fluido vale

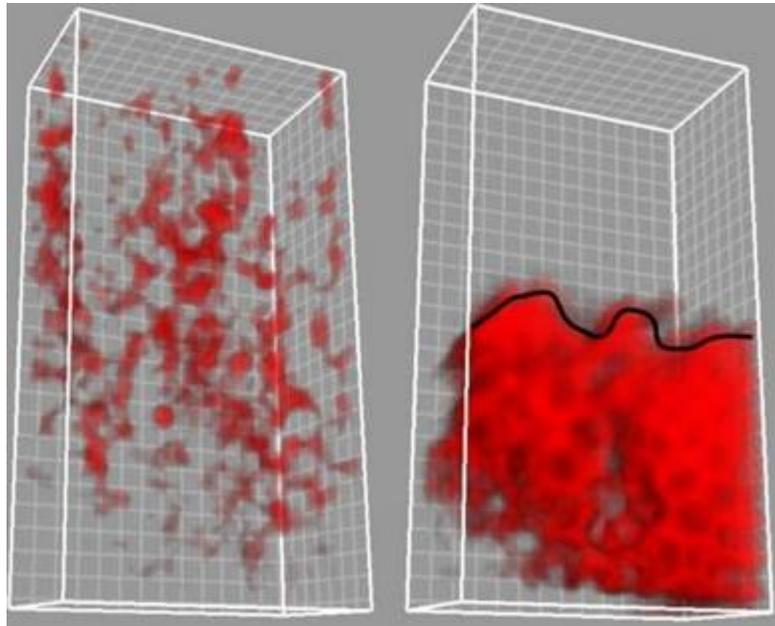
$$\varphi = \frac{dV_F}{dV} = \frac{dm_F/\rho_0}{dm_F/\rho_F} = \frac{\rho_F}{\rho_0} \quad (2.1)$$

- SATURAÇÃO ( $\psi$ ) : corresponde a quanto do meio poroso está preenchido com fluido, ou seja, a razão entre o volume de fluido em um meio poroso e o volume máximo de fluido que pode ser colocado no meio poroso, portanto seus valores podem variar de  $0 < \psi \leq 1$  . Em um  $dV$  teremos:

$$\psi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dV_F}{dV} \quad (2.2)$$

substituindo  $\rho_0$  e  $\rho_F$  temos:

$$\psi = \frac{\rho_F}{\varepsilon \rho_0} = \frac{\varphi}{\varepsilon} \quad (2.3)$$



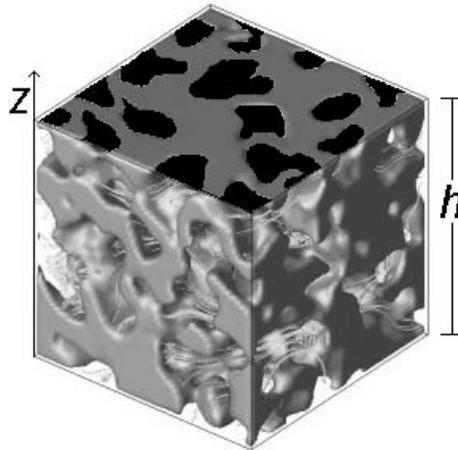
Variações de saturação e fração de fluido

Na mistura em foco neste trabalho só trabalharemos com as equações que governam o movimento do líquido, pois o meio poroso é rígido e está em repouso e o gás inerte serve apenas para dotar a mistura de uma certa compressibilidade ao preencher os espaços não preenchidos pelo fluido, portanto a saturação  $\psi$  nos indicará quanto de fluido e quanto de gás teremos no meio poroso. Vamos então simplificar a notação, denotando:

$$\vec{v}^F = \vec{v}$$

Observe que neste capítulo,  $v$  não está representando a velocidade baricêntrica, como no capítulo anterior.

Analisando um paralelepípedo de um meio poroso uniforme, chamaremos de  $A_\varepsilon$ , a soma das áreas dos poros em uma face (em preto) e  $A$  a área da face.



Matriz porosa em forma de paralelepípedo

Teremos então :

$$\int A_\varepsilon dz = A_\varepsilon h = \text{volume dos poros}$$

portanto:

$$A_\varepsilon h = \varepsilon Ah \Rightarrow A_\varepsilon = \varepsilon A$$

observe que esta relação serve para cortes em qualquer direção, para um meio poroso natural, independente dele ser isotrópico.

A pressão de gás-líquido dentro dos poros, será denotada por  $p_0$ , e pode ser calculada por:

$$p_0 = \frac{dF}{dA_\varepsilon} = \frac{dF}{\varepsilon dA}$$

A pressão parcial da mistura gás-líquido, que é a soma das pressões parciais  $p_F + p_G$ , vale:

$$p_F + p_G = \frac{dF}{dA} = \varepsilon p_0 \quad (2.4)$$

O valor de  $F$  é o mesmo nas 2 equações, pois no cálculo das pressões parciais, só haverá gás-fluido, nos poros.

A relação entre  $p_F$  e  $p_G$ , depende de quanto gás e quanto líquido há nos poros, ou seja, elas serão proporcionais aos respectivos volumes. Teremos então:

$$\psi = \frac{dV_F}{dV_F + dV_G} = \frac{\rho_F}{\rho_F + \rho_G}$$

substituindo as eqs. (2.4) e (2.3) :

$$\rho_F = \psi \varepsilon \rho_0 \Rightarrow$$

$$\rho_F = \varphi \rho_0$$

Quanto às relações constitutivas para o tensor parcial de tensões  $\mathbf{T}^F$ , o meio poroso não permite a formação das lâminas do fluxo laminar. A direção em que o fluido se desloca, não é regida pela viscosidade, pois o fluido segue o caminho dos poros, portanto seu movimento é dominado pela ação da pressão. Descartaremos então as componentes de cisalhamento do tensor de tensões e a força de superfície na interface. O tensor de tensões consistirá apenas das tensões normais do fluido, ou seja:

$$\mathbf{T}^F = -\rho_F \mathbf{I} = -\rho_0 \varphi \mathbf{I} \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\rho_0$  será assumida constante enquanto não houver saturação.

Reescrevendo a equação da continuidade (1.14), para  $\mathcal{C}_F$  teremos:

$$\frac{\partial \rho_F}{\partial t} + \text{div}(\rho_F \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

substituindo a eq. (2.1) obtemos:

$$\frac{\partial (\varphi \rho_0)}{\partial t} + \text{div}(\varphi \rho_0 \bar{\mathbf{v}}) = 0$$

Como  $\rho_0$  é constante:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}(\varphi \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2.6)$$

que no caso unidimensional se reduz a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (\varphi v)}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

A equação do momento linear para o componente-F, é da forma:

$$\rho_F \bar{\mathbf{a}}^F = \bar{\mathbf{H}}^F + \rho_F \bar{\mathbf{G}}^F + \text{div} \mathbf{T}^F$$

como  $\overline{a^F} = \frac{D\overline{v}}{Dt} = \nabla\overline{v} \cdot \overline{v} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t}$  e por (2.5)  $\mathbf{T}^F = -\rho_0 \varphi \mathbf{I}$  teremos:

$$\begin{aligned} \rho_F \left( \nabla\overline{v} \cdot \overline{v} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} \right) &= \overline{H^F} + \rho_F \overline{G^F} - \text{div}(\rho_0 \varphi \mathbf{I}) = \\ &= \rho_F \left( \nabla\overline{v} \cdot \overline{v} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} \right) = \overline{H^F} + \rho_F \overline{G^F} - \nabla(\rho_0 \varphi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

A força de corpo  $\rho_F \overline{G^F}$ , será desconsiderada, pois seu efeito é desprezível, comparado às outras forças. Assumiremos também que  $\overline{H^F}$  está relacionado ao gradiente de saturação [18]:

$$\overline{H^F} = -\frac{\mu D}{K} \nabla \varphi \quad (2.9)$$

onde:  $\left\{ \begin{array}{l} \mu \text{ - representa a viscosidade do fluido} \\ D \text{ - é o coeficiente de difusão} \\ K \text{ - permeabilidade específica do meio poroso} \end{array} \right.$

substituindo as eqs. (2.1) e (2.9) na equação de momento linear, teremos:

$$\varphi \left( \nabla\overline{v} \cdot \overline{v} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} \right) = -\nabla \left( \frac{\mu D}{K \rho_0} + \frac{\rho_0 \varphi}{\rho_0} \right)$$

podemos reescrever a equação acima de forma mais conveniente definindo pressão:

$$p = \frac{\mu D}{K \rho_0} + \frac{\rho_0 \varphi}{\rho_0} \quad (2.10)$$

observando que  $p$  é função apenas de  $\varphi$ . A pressão  $p$  não é uma pressão usual ou parcial, sua definição serve apenas para normalizar a equação. Substituindo  $p$  teremos:

$$\varphi \left( \nabla\overline{v} \cdot \overline{v} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} \right) + \nabla p = 0 \quad (2.11)$$

que pode ainda ser reescrita somando-se  $\overline{v}$  vezes a equação (2.6)

$$\begin{aligned} \overline{v} \text{div}(\varphi \overline{v}) + \overline{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \varphi \nabla\overline{v} \cdot \overline{v} + \nabla p = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial(\varphi \overline{v})}{\partial t} + \nabla(\varphi \overline{v}) \cdot \overline{v} + \varphi \overline{v} \text{div} \overline{v} + \nabla p = 0 \quad \text{ou} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\varphi \bar{v})}{\partial t} + \nabla(\varphi \bar{v}) \cdot \bar{v} + \operatorname{div}(\varphi \bar{v} \otimes \bar{v}) + \nabla p = 0$$

No caso unidimensional, faremos as substituições:

$$\nabla p \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{e} \quad \nabla \bar{v} \cdot \bar{v} \rightarrow v \frac{\partial v}{\partial x}$$

na eq. (2.11) e teremos

$$\varphi v \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

somando  $v$  vezes a eq. (2.7) :

$$\underbrace{v \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x}}_{\frac{\partial(\varphi v^2)}{\partial x}} + \underbrace{\varphi v \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\frac{\partial(\varphi v)}{\partial t}} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

obtendo a seguinte equação do momento linear no caso unidimensional

$$\frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v^2 + p)}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

Nosso modelo matemático para o escoamento unidimensional em meio poroso, consiste nas equações (2.7) e (2.12). Teremos ainda que  $t > 0$  e a fração de fluido  $\varphi$ , pode variar no máximo até os poros estarem totalmente preenchidos pelo fluido, ou seja quando houver saturação:

$$\varphi_{\max} = \varepsilon$$

resultando no sistema hiperbólico não linear de equações diferenciais parciais,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v^2 + p)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

para  $x \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ , sujeito a restrição geométrica  $0 < \varphi \leq \varepsilon$ .

A seguir, iremos desenvolver as condições de salto para o caso unidimensional. Substituindo  $\rho = \rho_0 \varphi$  na equação da continuidade (1.28), teremos:

$$[\varphi \rho_0 (v - u) i \cdot \hat{n}] = 0$$

observe que  $\hat{n}$  só pode assumir os valores  $\pm i$ , que implica

$$[\varphi \rho_0 (v - u)] = 0 \Rightarrow \rho_0 [\varphi v] = \rho_0 u [\varphi] \Rightarrow$$

$$[\varphi v] = u[\varphi] \quad (2.14)$$

que é a condição de salto da equação da continuidade no caso unidimensional.

Na equação do momento linear (1.29), iremos substituir também  $\mathbf{T}^F = -\rho_0 \varphi \mathbf{I}$ , obtendo:

$$\begin{aligned} [\rho_0 \varphi v i((v-u)i \cdot \hat{n}) + \varphi \rho_0 \hat{n}] &= \vec{0} \Rightarrow \\ [\rho_0 \varphi v^2 - \rho_0 \varphi v u + \varphi \rho_0] &= 0 \end{aligned}$$

dividindo por  $\rho_0$ :

$$\left[ \varphi v^2 + \varphi \frac{\rho_0}{\rho_0} \right] = [\varphi v] u$$

pela equação (2.10), sabemos que  $\left[ \varphi \frac{\rho_0}{\rho_0} \right] = [\rho]$ , portanto:

$$[\varphi v^2 + \rho] = [\varphi v] u$$

que é a condição de salto para o momento linear no caso unidimensional.

As duas condições de salto podem ser reescritas da forma:

$$\frac{[\varphi v]}{[\varphi]} = \frac{[\varphi v^2 + \rho]}{[\varphi v]} = u \quad (2.15)$$

### 3 O PROBLEMA DE RIEMANN ASSOCIADO AO ESCOAMENTO EM MEIO POROSO

O sistema de equações diferenciais parciais (2.12)

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho + \varphi v^2) = 0 \end{cases}$$

discutido no capítulo 2, juntamente com as condições iniciais

$$(\varphi, v) = \begin{cases} (\varphi_L, v_L) \text{ para } x < 0 \\ (\varphi_R, v_R) \text{ para } x > 0 \end{cases} \text{ em } t=0$$

torna-se um problema de Riemann clássico, que possui a mesma estrutura em problemas de elasticidade e dinâmica de gases.

Na nossa análise inicial, adotaremos  $\rho$  como função de  $\varphi$  ( não necessariamente  $\rho_0\varphi$  ). Teremos ainda que  $\rho' > 0$  nos dará um problema hiperbólico e  $\rho'' > 0$  um sistema não linear.

Definindo  $\xi = x/t$  (ver Apêndice B) teremos que tanto  $\varphi$ ,  $v$  e  $\rho$  serão funções de  $\xi$ , e fazendo a mudança de variável de  $(x, t)$  para  $\xi$ , nosso sistema de equações diferenciais parciais se transforma num sistema de equações diferenciais ordinárias. Aplicando a regra da cadeia

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{x}{t^2} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{dw}{d\xi} \end{cases} \text{ obtemos}$$

$$\begin{cases} -\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = 0 \\ -\xi \frac{d(\varphi v)}{d\xi} + \rho' \frac{d\varphi}{d\xi} + v \frac{d(\varphi v)}{d\xi} + \varphi v \frac{dv}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

usando a derivada do produto  $v \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = v \left( v \frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi \frac{dv}{d\xi} \right)$  para substituir  $\frac{dv}{d\xi}$

obtemos:

$$\begin{cases} -\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = 0 \\ (p' - v^2) \frac{d\varphi}{d\xi} + (2v - \xi) \frac{d(\varphi v)}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

que escrito na forma matricial

$$\begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ (p' - v^2) & (2v - \xi) \end{bmatrix} \frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

O sistema possui a solução trivial:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi \text{ e } v \text{ constantes}$$

Não haverá solução contínua em todo domínio ( $t \geq 0$ ) satisfazendo a solução acima, pois  $\varphi_R \neq \varphi_L$  e  $v_R \neq v_L$ . O sistema terá também solução se:

$$\det \begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ (p' - v^2) & (2v - \xi) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

e as soluções estariam no núcleo da transformação. Resolvendo a equação (3.2) obtemos:

$$\lambda_1 = v - \sqrt{p'} \text{ e } \lambda_2 = v + \sqrt{p'}$$

Podemos observar que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (p' - v^2) & 2v \end{bmatrix}$$

Substituindo o valor  $\lambda_1 = v - \sqrt{p'}$  e efetuando a primeira linha do produto matricial (3.1) (observe que uma linha do produto matricial já é suficiente), obtemos:

$$\begin{aligned} (\sqrt{p'} - v) d\varphi + d(\varphi v) &= 0 \Rightarrow \\ \sqrt{p'} d\varphi + \varphi dv &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Integrando os dois lados, obtemos o primeiro invariante de Riemann:

$$R_1 \equiv v + \int \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi$$

Analogamente, substituindo o valor  $\lambda_2 = v + \sqrt{p'}$ , obtemos o segundo invariante de Riemann :

$$R_2 \equiv v - \int \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi$$

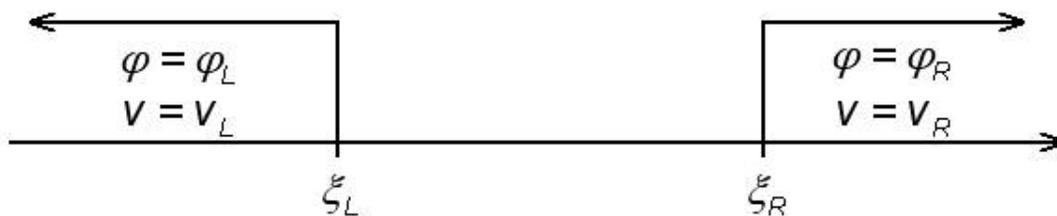
Tanto  $\lambda_1 = v - \sqrt{p'}$  como  $\lambda_2 = v + \sqrt{p'}$  não geram solução contínua em todo domínio ( $\xi \in \mathbb{R}$ ), pois a condição inicial  $(\varphi_L, v_L)$  para  $x < 0$  e  $t = 0$  implicaria que  $\xi \rightarrow v_L \pm \sqrt{p'(\varphi_L)}$  que possui um valor finito, enquanto sabemos que  $\xi \rightarrow -\infty$ . O mesmo ocorre para  $(\varphi_R, v_R)$  para  $x > 0$  e  $t = 0$ . Iremos nos referir aos 3 tipos de solução por:

- $S_0$  quando  $\varphi$  e  $v$  constantes
- $S_1$  quando  $\xi = \frac{x}{t} = v - \sqrt{p'}$
- $S_2$  quando  $\xi = \frac{x}{t} = v + \sqrt{p'}$

Como nenhuma das 3 gera uma solução contínua em toda reta  $\xi \in \mathbb{R}$ , para obter tal solução teremos de combinar os 3 tipos de solução em subintervalos da reta. Como em  $\xi \rightarrow \pm \infty$ , não há solução do tipo  $S_1$  ou  $S_2$ , teremos que  $\varphi$  e  $v$  serão constantes nos intervalos:

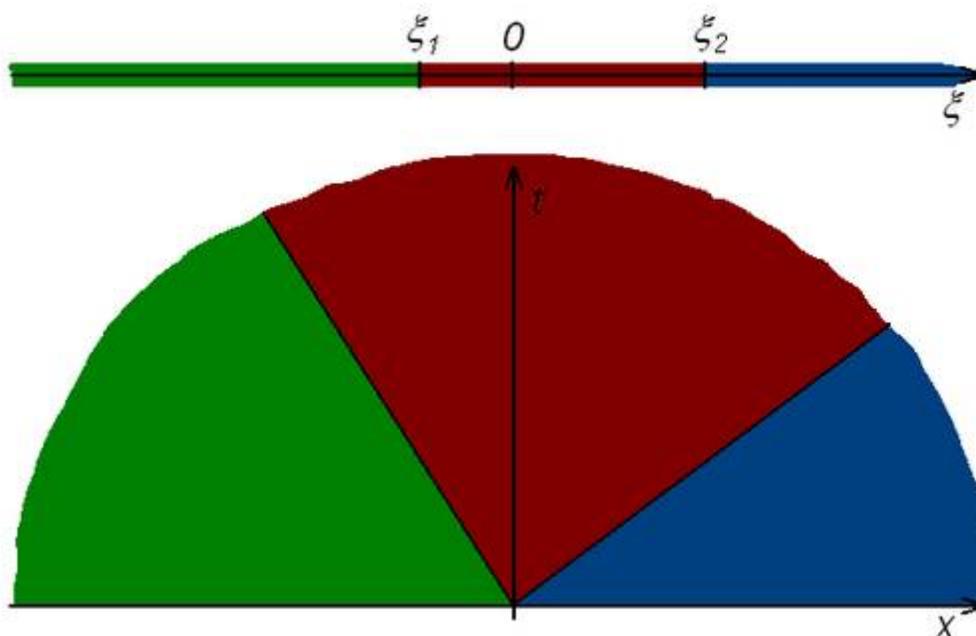
$$\begin{cases} \varphi = \varphi_L \\ v = v_L \end{cases} \text{ para } \xi \in (-\infty, \xi_L] \text{ e } \begin{cases} \varphi = \varphi_R \\ v = v_R \end{cases} \text{ para } \xi \in [\xi_R, +\infty)$$

para algum  $\xi_L$  e  $\xi_R$ .



Fração de fluido e velocidade em  $\pm \infty$

Vale observar que intervalos na reta  $\xi$ , correspondem a leques no plano  $x \times t$ .  
(ver figura abaixo)



Correlação entre intervalos no eixo  $\xi$  e leques no plano  $x \times t$

Um intervalo com solução  $S_1$  não pode encostar em outro com solução  $S_2$ , ou seja; não existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tal que em  $[a, b]$  há solução  $S_1$  e em  $[b, c]$  solução  $S_2$  (ou vice versa), pois teríamos que :

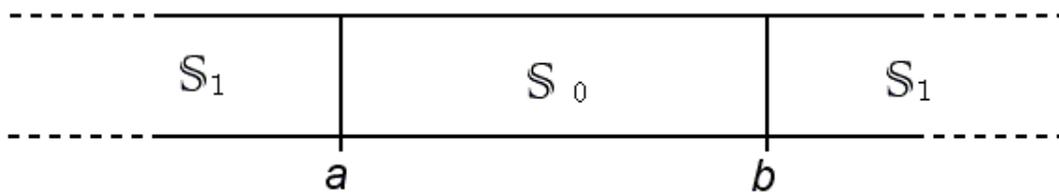
$$b \text{ pertence ao primeiro intervalo} \Rightarrow b = v - \sqrt{p'}$$

$$b \text{ pertence ao segundo intervalo} \Rightarrow b = v + \sqrt{p'}, \text{ logo}$$

$$v - \sqrt{p'} = v + \sqrt{p'} \Rightarrow \sqrt{p'} = 0 \Rightarrow p' = 0$$

que é falso pois por hipótese,  $p' > 0$ .

Não poderemos ter também um intervalo satisfazendo  $S_0$  entre dois intervalos satisfazendo  $S_1$  (ou  $S_2$ )



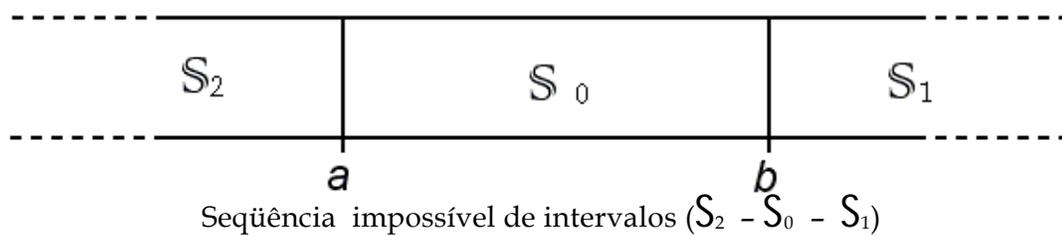
Situação impossível -  $S_0$  entre dois intervalos do mesmo tipo

No intervalo do meio (inclusive em  $a$  e  $b$ ),  $\varphi_0$  e  $v_0$  são constantes. Como  $a$  está no primeiro intervalo, vale :  $a = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)}$ . Idem para  $b$  no segundo intervalo  $b = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)}$ . Portanto:

$$a = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)} = b$$

ou seja, não há intervalo nenhum no meio.

Também não ocorrerá a situação em que teremos os intervalos na ordem (esquerda para direita) :  $S_2 - S_0 - S_1$ .



Como  $a$  e  $b \in [a, b]$ , satisfazem  $S_0$ . Teremos para ambos  $\varphi = \varphi_0$  e  $v = v_0$ . Como  $a$  satisfaz  $S_2$  e  $b$  satisfaz  $S_1$ , teremos ainda:

$$a = v_0 + \sqrt{p'(\varphi_0)}$$

$$b = v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)}$$

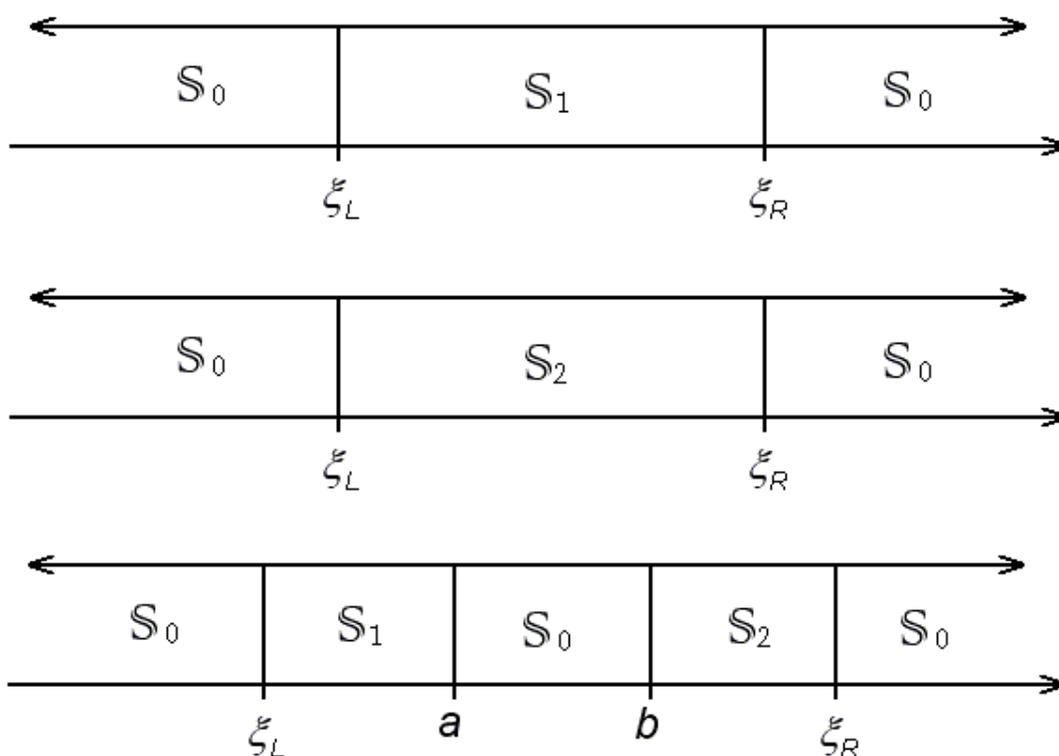
como  $a < b$

$$a = v_0 + \sqrt{p'(\varphi_0)} < v_0 - \sqrt{p'(\varphi_0)} = b \Rightarrow \sqrt{p'(\varphi_0)} < 0$$

que é falso.

Construindo as únicas seqüências possíveis de intervalos, para que tenhamos solução contínua, teremos:

- 1-  $S_0 - S_1 - S_0 - S_2 - S_0$
- 2-  $S_0 - S_1 - S_0$
- 3-  $S_0 - S_2 - S_0$



Todas as seqüências possíveis de intervalos

Os valores de  $\varphi$  e  $v$  são constantes quando a solução é do tipo  $S_0$ . Para  $S_1$  e  $S_2$ , eles tem que satisfazer as equações diferenciais ordinárias (3.3), e conseqüentemente os respectivos invariantes de Riemann.

Analisando a seqüência  $(S_0 - S_1 - S_0)$  podemos facilmente calcular  $\xi_L$  e  $\xi_R$ , pois :

$$\xi_L = v_L - \sqrt{p'(\varphi_L)} \quad \text{e} \quad \xi_R = v_R - \sqrt{p'(\varphi_R)}$$

Podemos ainda determinar  $\varphi$  e  $v$  entre  $\xi_L$  e  $\xi_R$  resolvendo a equação diferencial ordinária (3.3), com a condição inicial  $\varphi = \varphi_L$  e  $v = v_L$  em  $\xi_L$ . Este problema já terá solução bem definida independente dos valores  $\varphi = \varphi_R$  e  $v = v_R$  em  $\xi_R$ , e tais valores só serão satisfeitos por coincidência. O mesmo ocorre para seqüência  $(S_0 - S_2 - S_0)$ .

Tais casos dificilmente ocorrerão, e na prática teremos apenas a solução do tipo  $(S_0 - S_1 - S_0 - S_2 - S_0)$ . Para esta seqüência de intervalos, podemos encontrar  $\xi_L$  e  $\xi_R$  pois:

$$\xi_L = v_L - \sqrt{p'(\varphi_L)} \quad \text{e} \quad \xi_R = v_R + \sqrt{p'(\varphi_R)}$$

Entre  $\xi_1$  e  $\xi_2$ ,  $\varphi = \varphi_*$  e  $v = v_*$  são constantes, e seus valores estão relacionados por :

$$\xi_1 = v_* - \sqrt{p'(\varphi_*)} \quad \text{e} \quad \xi_2 = v_* + \sqrt{p'(\varphi_*)}$$

Para resolvermos o problema de Riemann, temos ainda de encontrar  $\varphi_*$  e  $v_*$ . Como  $\xi_1$  e  $\xi_2$  estão no segundo ( $S_1$ ) e no quarto ( $S_2$ ) intervalos ambos estarão sujeitos às equações diferenciais / invariantes de Riemann correspondentes aos seus intervalos:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_L}^{\varphi_*} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi &= v_L - v_* \quad \text{e} \\ \int_{\varphi_*}^{\varphi_R} \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi &= v_R - v_* \end{aligned} \quad (3.4)$$

que resolvendo as integrais vira um sistema de equações algébricas em  $\varphi_*$  e  $v_*$  com uma única solução. Assim teremos uma solução contínua para o problema de Riemann no eixo  $\xi$ . Para que esta solução seja coerente, precisamos ainda que:

$$\xi_L < \xi_1 < \xi_2 < \xi_R$$

Sabemos que:

$$\xi_1 = v_* - \sqrt{p'(\varphi_*)} < v_* + \sqrt{p'(\varphi_*)} = \xi_2$$

portanto basta conferir as desigualdades :

$$\xi_L < \xi_1 \quad \text{e} \quad \xi_2 < \xi_R \quad (3.5)$$

Caso alguma das desigualdades (3.5) não seja satisfeita, teremos de encontrar uma solução descontínua para o problema de Riemann. Tal solução terá de satisfazer os princípios físicos da equação do momento linear e da conservação de massa, ou seja, as condições de salto (2.14).

Iremos tratar de agora em diante, do caso  $p = c^2 \varphi$ , discutido no nosso modelo mecânico do capítulo anterior. Teremos que:

$$p' = c^2 \quad \text{e} \quad \int \frac{\sqrt{p'}}{\varphi} d\varphi = c \ln \varphi + cte$$

No caso contínuo, teremos que as integrais (3.4) viram:

$$\begin{aligned} v_L - v_* &= c \ln \left( \frac{\varphi_*}{\varphi_L} \right) \quad \text{e} \\ v_R - v_* &= c \ln \left( \frac{\varphi_R}{\varphi_*} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Resolvendo o sistema, encontraremos:

$$\begin{aligned} \varphi_* &= \sqrt{\varphi_L \varphi_R} e^{\left( \frac{v_L - v_R}{2c} \right)} \\ v_* &= \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Podemos agora verificar as condições para existência de uma solução contínua através das desigualdades (3.5):

$$\begin{cases} \xi_L < \xi_1 \Rightarrow v_L - c < v_* - c \Rightarrow v_L < v_* \\ \xi_2 < \xi_R \Rightarrow v_* + c < v_R + c \Rightarrow v_* < v_R \end{cases} \quad (3.8)$$

substituindo o valor de  $v_*$  da equação (3.7)

$$\begin{aligned} v_L < \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) < v_R \Rightarrow \\ \frac{v_L - v_R}{2} < \frac{c}{2} \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) < \frac{v_R - v_L}{2} \end{aligned}$$

que implica:

$$c \left| \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) \right| < v_R - v_L \quad (3.9)$$

que é a desigualdade que deve ser atendida para se garantir a existência de solução contínua.

Teremos também desigualdades para a fração de fluido  $\varphi$  :

$$v_L < v_* \Rightarrow v_L - v_* = c \ln \left( \frac{\varphi_*}{\varphi_L} \right) < 0 \Rightarrow \frac{\varphi_*}{\varphi_L} < 1$$

analogamente para  $\varphi_R$  teremos então:

$$\varphi_L > \varphi_* \quad \text{e} \quad \varphi_R > \varphi_* \quad (3.10)$$

Na Literatura clássica estas soluções que encontramos associadas a  $S_1$  e  $S_2$ , são chamadas de **rarefações**, nome que surgiu na dinâmica de gases. O nome também tem justificativa física no nosso problema, visto que a fração de fluido

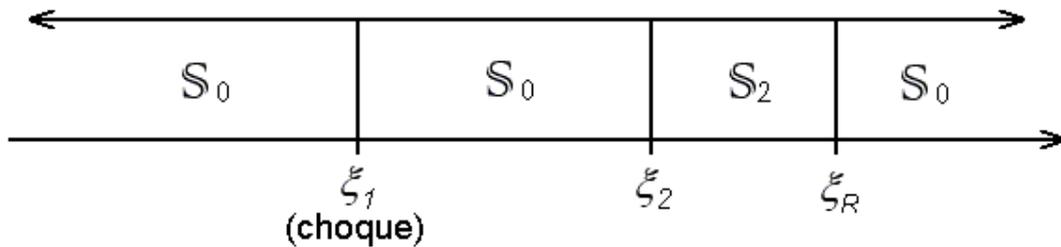
encontrada ( $\varphi_*$ ) é menor que as frações de fluido iniciais ( $\varphi_L$  e  $\varphi_R$ ). Na solução contínua, iremos nos referir as rarefações associadas à  $S_1$  e  $S_2$ , por rarefação-1 e rarefação-2.

Supondo que alguma ou ambas as desigualdades em (3.10) não sejam satisfeitas, teremos que buscar uma solução descontínua para o problema de Riemann.

Analisando inicialmente o caso

$$\varphi_* > \varphi_L \quad \text{e} \quad \varphi_R > \varphi_* \quad (3.11)$$

encontraríamos que o segundo intervalo não existe, visto que o ponto final do intervalo seria menor que o inicial ( $\xi_L > \xi_1$  e  $\xi_2 < \xi_R$ ). Não há problema em relação ao quarto intervalo; continua valendo  $S_2$ . Buscaremos uma solução sem o segundo intervalo, e teremos uma descontinuidade/choque entre o primeiro e o “terceiro” intervalo, no ponto que chamaremos de  $\xi_1$ . Iremos nos referir a este caso como choque-1 rarefação-2, e teremos de usar as condições de salto (2.14) em  $\xi_1$ .



Seqüência de intervalos para choque-1 / rarefação-2

Recalculando os pontos da reta  $\xi$ , através de um novo sistema constituído por (2.14) e (3.6):

$$\begin{cases} \xi_1 = s_1 = \frac{\varphi_* v_* - \varphi_L v_L}{\varphi_* - \varphi_L} = \frac{c^2 \varphi_* + \varphi_* v_*^2 - c^2 \varphi_L - \varphi_L v_L^2}{\varphi_* v_* - \varphi_L v_L} \\ v_R - v_* = c \ln \left( \frac{\varphi_R}{\varphi_*} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

Apesar da descontinuidade ser em  $\xi_1$ , o valor de  $\xi_2$  terá de ser recalculado, porém as desigualdades (3.11) se mantém, visto que as curvas de choque e de rarefação tem contato  $C^2$  no espaço de estados  $(\varphi, v)$ .

Simplificando a primeira equação do sistema (3.12), obtemos:

$$v_* = v_L \pm c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}}$$

A solução  $v_* = v_L + c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}}$  nos conduz a resultados que satisfaz a desigualdade

(3.9) (cálculo consiste em substituir  $v_*$  da solução acima, em (3.6)), portanto a solução seria do tipo rarefação-1/rarefação-2, e não haveria descontinuidade, que é falso. A única solução válida seria :

$$\begin{aligned} v_* &= v_L - c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}} \\ v_* &= v_R - c \ln \left( \frac{\varphi_R}{\varphi_*} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde concluímos que :

$$v_* < v_R \quad \text{e} \quad v_* < v_L \quad (3.14)$$

O sistema (3.13) pode ser resolvido, determinando os valores de  $v_*$  e  $\varphi_*$ . Manipulando algebricamente as inequações (3.11) e as relações (3.13), chegaremos em uma condição suficiente para a existência de uma solução do tipo choque-1/rarefação-2 :

$$c \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right) < v_L - v_R < c \frac{(\varphi_R - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} \quad (3.15)$$

Uma análise análoga para os casos  $\varphi_L > \varphi_*$  e  $\varphi_* > \varphi_R$  (rarefação-1/choque-2) e  $\varphi_* > \varphi_L$  e  $\varphi_* > \varphi_R$  (choque-1/choque-2) nos fornecerão:

- Rarefação-1/choque-2

$$\begin{aligned} v_* &= v_L + c \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_*} \right) \\ v_* &= v_R + c \frac{(\varphi_* - \varphi_R)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_R}} \\ v_* &> v_R \quad \text{e} \quad v_* > v_L \end{aligned}$$

condições suficientes para existência de solução:

$$c \frac{(\varphi_R - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} < v_R - v_L < c \ln \left( \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right)$$

- Choque-1/choque-2

$$v_* = v_L - c \frac{(\varphi_* - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_L}}$$

$$v_* = v_R + c \frac{(\varphi_* - \varphi_R)}{\sqrt{\varphi_* \varphi_R}}$$

$$v_R < v_* < v_L$$

condição suficiente:

$$c \left| \frac{(\varphi_R - \varphi_L)}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} \right| < v_L - v_R$$

Condições para as 4 possibilidades de solução para o problema de Riemann

se	então a solução é do tipo
$v_R - v_L > c \left  \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right $	Rarefação-1/rarefação-2
$-c \left[ \sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right] > v_R - v_L$	Choque-1/choque-2
$c \left[ \sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right] < v_R - v_L < c \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R}$	Rarefação-1/choque-2
$-c \left[ \sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right] < v_R - v_L < -c \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R}$	Choque-1/rarefação-2

## 4 A TRANSIÇÃO INSATURADO - SATURADO

Devido à incompressibilidade do líquido e à rigidez da matriz porosa, o problema resolvido no capítulo anterior:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\varphi v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \varphi v^2) = 0 \end{cases}$$

juntamente com a condição inicial:

$$(\varphi, v) = \begin{cases} (\varphi_L, v_L) & \text{para } x < 0 \\ (\varphi_R, v_R) & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad \text{em } t=0$$

só tem sentido físico se a restrição  $\varphi \leq \varepsilon$  for satisfeita em toda parte, para qualquer instante de tempo. Seu significado é que o poro não pode comportar mais líquido do que cabe nele. Dos quatro tipos de solução possíveis para o problema hiperbólico sob investigação, 3 satisfazem essa restrição físico/geométrica, lembrando que as condições iniciais sobre a fração de fluido ( $\varphi_L$  e  $\varphi_R$ ) serão sempre menores que a porosidade  $\varepsilon$ , isto é:

$$\varphi_L < \varepsilon \quad \text{e} \quad \varphi_R < \varepsilon$$

Quando a solução for do tipo:

- Rarefação-1/Rarefação-2, o estado intermediário será tal que

$$\varphi_* < \varphi_L < \varepsilon \quad \text{e} \quad \varphi_* < \varphi_R < \varepsilon \quad (\text{solução contínua}).$$

- Choque-1/Rarefação-2, o estado intermediário será tal que

$$\varphi_L < \varphi_* < \varphi_R < \varepsilon.$$

- Rarefação-1/Choque-2, o estado intermediário será tal que

$$\varphi_R < \varphi_* < \varphi_L < \varepsilon.$$

Em todos os casos citados acima, fica assegurada a desigualdade  $\varphi < \varepsilon$  em toda parte. O único caso em que não podemos garantir que  $\varphi < \varepsilon$ , é o caso Choque-1/Choque-2, pois teremos:

$$\varphi_L < \varphi_* \quad \text{e} \quad \varphi_R < \varphi_*$$

que não limita  $\varphi_*$  superiormente. Uma solução em que  $\varphi_* > \varepsilon$ , não é fisicamente aceitável. Além disso, quando a fração de fluido tiver o mesmo valor da porosidade, a pressão não será mais uma função da fração de fluido.

O modelo mecânico tratado no capítulo anterior, não se aplica a partir do instante que houver saturação ( $\varphi_* = \varepsilon$ ). Apesar disto, mesmo num contexto onde há descontinuidade, as equações do momento linear e da conservação de massa, continuam válidas, em outras palavras, valem as condições de salto (2.14), porém, não poderemos usar a relação constitutiva para pressão ( $p = c^2 \varphi_*$ ), já que a partir da saturação, a fração de fluido irá se manter constante. Substituindo  $\varphi_* = \varepsilon$  nas condições de salto (2.14), obtemos:

$$\xi_1 = \frac{\varepsilon v_* - \varphi_L v_L}{\varepsilon - \varphi_L} = \frac{\varepsilon v_*^2 - \varphi_L v_L^2 + p_* - c^2 \varphi_L}{\varepsilon v_* - \varphi_L v_L}$$

$$\xi_2 = \frac{\varphi_R v_R - \varepsilon v_*}{\varphi_R - \varepsilon} = \frac{\varphi_R v_R^2 - \varepsilon v_*^2 + c^2 \varphi_R - p_*}{\varphi_R v_R - \varepsilon v_*}$$

que é um sistema de 2 equações em 2 incógnitas:  $v_*$  e  $p_*$ . Efetuando algumas simplificações, ficamos com:

$$(v_* - v_L)^2 = (p_* - c^2 \varphi_L) \left( \frac{1}{\varphi_L} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

$$(v_* - v_R)^2 = (p_* - c^2 \varphi_R) \left( \frac{1}{\varphi_R} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Apesar de cada equação do sistema fornecer 2 valores para  $v_*$ , somente um será admitido, por motivos já discutidos no capítulo anterior (condições de entropia), portanto

$$v_* = v_L - \sqrt{(p_* - c^2 \varphi_L) \left( \frac{1}{\varphi_L} - \frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

$$v_* = v_R + \sqrt{(p_* - c^2 \varphi_R) \left( \frac{1}{\varphi_R} - \frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

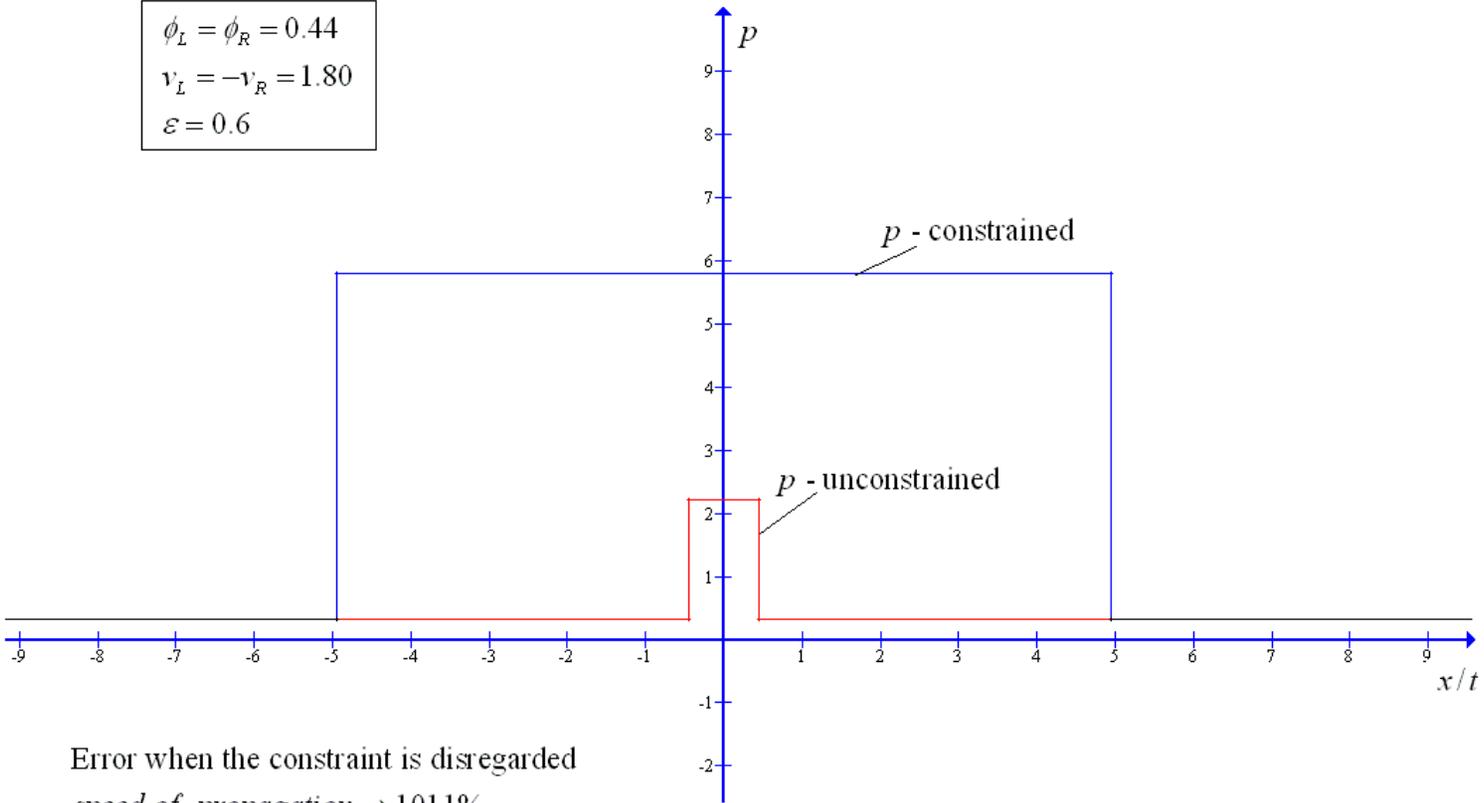
A seguir, mostraremos algumas simulações onde podemos comparar a solução obtida com e sem a restrição geométrica  $\varphi \leq \varepsilon$ . Estaremos simulando o caso choque-1/choque-2 com a fração de fluido à esquerda igual à direita ( $\varphi_L = \varphi_R$ ) e com

velocidades de aproximação simétricas ( $v_L = -v_R$ ). Teremos resultados para fração de fluido ( $\varphi_*$ ), pressão ( $p_*$ ) e velocidade de propagação ( $s$ ). Observe que  $s$  não é a velocidade do componente líquido após o choque, e sim a velocidade da onda de choque. Mostraremos também a discrepância percentual entre os resultados com e sem restrição  $\left( \frac{(\text{com}) - (\text{sem})}{(\text{sem})} \right)$ , chamando a atenção que os resultados onde  $\varphi > \varepsilon$  não tem sentido físico.

Em outras palavras “com restrição” e “sem restrição” não são apenas uma questão de opção de simulação. São dois contextos: o primeiro sempre tem sentido físico, enquanto o segundo representa um problema meramente matemático (e bem mais simples).

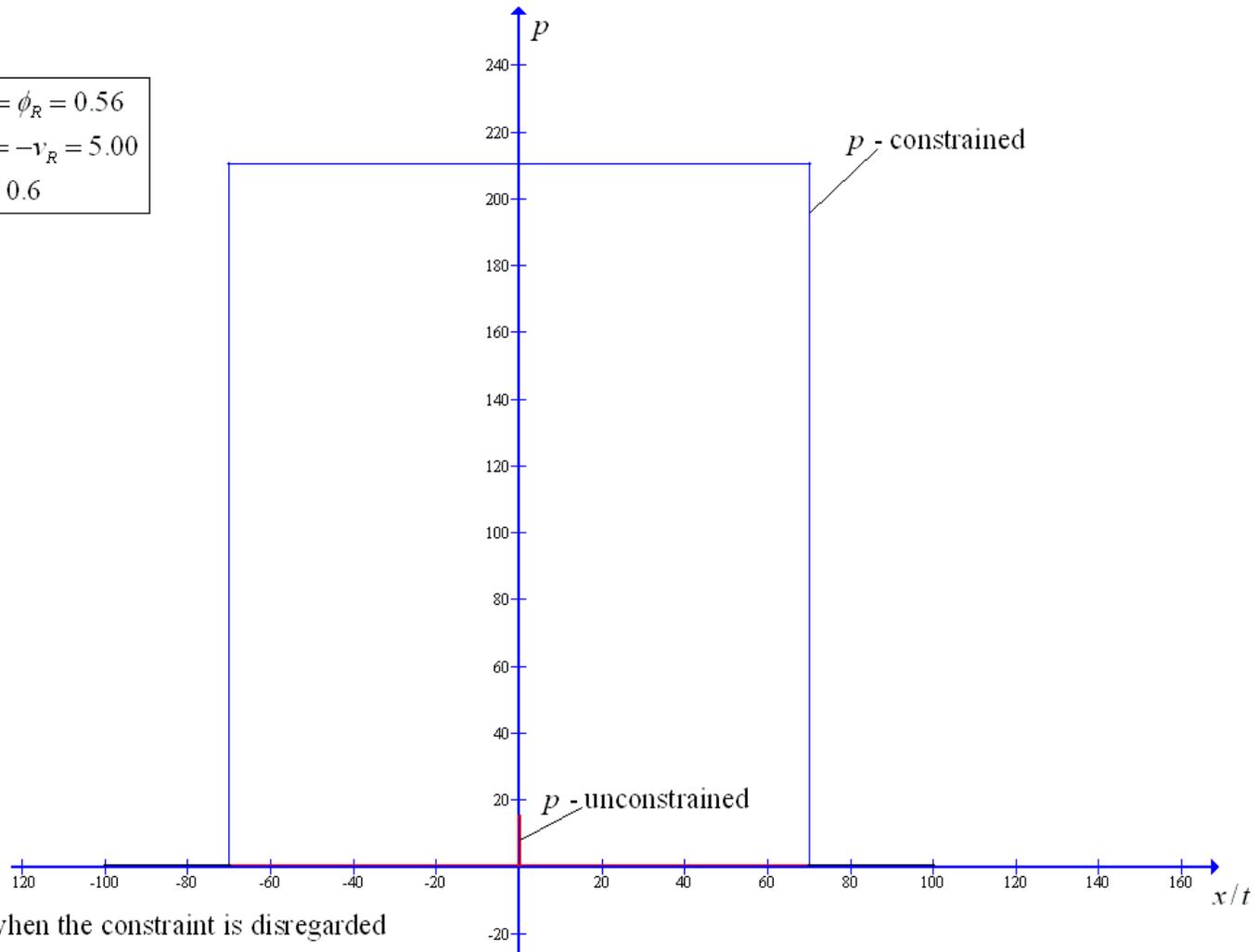
DADOS INICIAIS		SEM RESTRIÇÃO			COM RESTRIÇÃO			DISCREPÂNCIAS	
$\varphi_L = \varphi_R$	$v_L = -v_R$	$\varphi_*$	s	$\rho_*$	$\varphi_*$	s	$\rho_*$	Pressão	Velocidade propagação
0,20	0,05	0,21	0,975	0,21	0,21	0,975	0,21	0,00%	0,00%
0,20	0,20	0,244	0,905	0,244	0,244	0,905	0,244	0,00%	0,00%
0,32	0,45	0,50	0,80	0,50	0,50	0,80	0,50	0,00%	0,00%
0,32	0,80	0,698	0,677	0,698	0,60	0,914	0,759	8,70%	35,04%
0,32	1,25	1,042	0,554	1,042	0,60	1,429	1,391	33,57%	157,75%
0,44	1,80	2,218	0,445	2,218	0,60	4,95	5,786	160,83%	1011,45%
0,44	3,20	5,349	0,287	5,349	0,60	8,80	17,336	224,07%	2968,38%
0,56	4,05	10,275	0,233	10,275	0,60	56,70	138,341	1246,40%	24187,18%
0,56	5,00	15,099	0,193	15,099	0,60	70,00	210,560	1294,51%	36248,05%
0,56	6,05	21,603	0,161	21,603	0,60	84,70	308,021	1325,83%	52507,17%

$$\begin{aligned} \phi_L = \phi_R &= 0.44 \\ v_L = -v_R &= 1.80 \\ \varepsilon &= 0.6 \end{aligned}$$



Error when the constraint is disregarded  
*speed of propagation*  $\rightarrow$  1011%  
*pressure*  $\rightarrow$  161%

$$\begin{aligned} \phi_L = \phi_R &= 0.56 \\ v_L = -v_R &= 5.00 \\ \varepsilon &= 0.6 \end{aligned}$$



Error when the constraint is disregarded

*speed of propagation*  $\rightarrow 36248\%$

*pressure*  $\rightarrow 1294\%$

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A contribuição principal deste trabalho foi a descrição do processo de saturação num meio porosos rígido, levando em conta as restrições geométricas impostas pela incompressibilidade do líquido e pela rigidez do meio poroso.

Tais restrições, oriundas da realidade física, vinham sendo sistematicamente desconsiderada em trabalhos anteriores onde, muitas vezes, a quantidade de líquido presente numa região superava o máximo admissível.

As consequências da não imposição de limites para a quantidade de líquido nos poros era, além da aberração física, a obtenção de pressões muito abaixo das reais e de velocidades de propagação muito menores do que as fisicamente realistas. Dessa forma, diversos processos eram simulados longe da sua realidade física. Por exemplo, sem o uso da restrição, dificilmente poderíamos prever a fratura de um meio poroso.

O uso da restrição deu origem a uma nova classe de problemas de Riemann, cuja solução era desconhecida. Uma das contribuições desse trabalho foi apresentar a solução exata para um problema de Riemann com uma variável sujeita a uma restrição (um limite) físico. Certamente outros surgirão...

De maneira nenhuma esse trabalho é considerado uma solução definitiva para o processo de transição insaturado-saturado. Ele é um ponto de partida. Mas, antes de tudo, é uma prova de que podemos nos aproximar muito mais da realidade física e um bom motivo para que não aceitemos resultados provenientes de situações virtuais, convenientemente manipuladas.

Este trabalho tem várias continuações naturais como, por exemplo, a simulação de problemas com condições iniciais quaisquer e/ou o emprego de novas relações constitutivas para a pressão.

Além disso, levando em conta os efeitos da transição insaturado-saturado aqui descritos, é intenção do autor simular o processo de propagação de poluentes e/ou contaminantes em contextos onde haja transição insaturado-saturado.

O uso de aproximantes de Riemann também faz parte do espectro de trabalhos futuros pretendidos pelo autor.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALAZMI, B.; VAFAI, K. *Analysis of variants within the porous models*. J. Heat Transfer 122. 303-326, 2000.
- [2] APOSTOL, T.M. *Mathematical Analysis* 2ª ed. Massachusetts: Addison-Wesley, 1974.
- [3] ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. New Jersey: Prentice-Hall, 1962.
- [4] ASPLUND, E. ; BUNGART, L. *A first course in integration*. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1966.
- [5] ATKIN, R.J. ; CRAINE, R.E. *Continuum theories of mixtures. Basic theory and historical development*. Q.J. Mech. Appl. Math. 29. 209-244, 1976.
- [6] AW, A. ; RASCLE, M. *Resurrection of "second order" models of traffic flow*. SIAM J. Appl. Math. 60. 916-938, 2000.
- [7] BERTHELIN, F. ; DEGOND T. ; DELITALA, M. ; RASCLE, M. *A model for the formation and evolution of traffic jams*. Arch. Ration. Mech. Anal. 187. 185-220, 2008.
- [8] BISHOP, R.L. ; GOLDBERG, S.I. *Tensor analysis on manifold*. New York: Dover publications, 1968.
- [9] CHADWICK, P. *Continuum Mechanics*. London: George Allen & Unwin, 1976.
- [10] COLOMBO, R.M. ; GOATIN, P. *A well posed conservation law with a variable unilateral constraint*. J. Differ. Equ. 234. 654-675, 2007.
- [11] DAGANZO, C. *Requiem for second order fluid approximations of traffic flow*. Transp. Res. B 29. 277-286, 1995.
- [12] DESLOGE, E. A. *Classical Mechanics vol.1*. Florida: Krieger publishing co., 1989.
- [13] DESPRÉS, B. ; LAGOUTIÈRE, F. ; SEGUIN, N. *Weak solutions to Friedrichs systems with convex constraints*. Nonlinearity 24. 3055-3081, 2011.
- [14] FEYNMAN, R.P. ; LEIGHTON, R.B. ; SANDS, M. *The Feynman lectures on Physics vol.1*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1964.

- [15] FRENCH, A.D. *Newtonian Mechanics*. London: W.W. Norton & Co., 1970.
- [16] GAMA, R.M.S. ; PEDROSA F., J.J. ; MARTINS COSTA, M.L. *Modeling the saturation process of flows through rigid porous media by the solution of a nonlinear hyperbolic system with one constraint unknown*. J. Appl. Math. Mech. 92. 921-936, 2012.
- [17] GARABEDIAN, P.R. *Partial differential equations*. New York: John Wiley & Sons, 1964.
- [18] MARTINS COSTA, M.L. ; GAMA, R.M.S. *Numerical simulation of one-dimensional flows through porous media with shock waves*. Int. J. Numer. Methods Eng. 52. 1047-1067, 2001.
- [19] ROSSMANITH, J.A. *A high-resolution constrained transport method with adaptive mesh refinement for ideal MHD*. Comput. Phys. Commun. 164. 128-133, 2004.
- [20] SLATTERY, C. *Advanced transport phenomena*. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [21] SMOLLER, J. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [22] SPENCER, A.J.M. *Continuum Mechanics*. London: Longman, 1980.

## APÊNDICE A – Continuidade da Densidade

Diremos que a densidade em um ponto  $P$  vale  $\rho$ , sempre que:  
 dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{se } A \subset B(P, \delta) \Rightarrow \left| \frac{M(A)}{V(A)} - \rho \right| < \varepsilon$$

onde  $B(P, \delta)$  corresponde a bola de centro  $P$  e raio  $\delta$ ,  $M(A)$  massa e  $V(A)$  volume limitados por  $A$ , uma região Jordan-mensurável. Vale então :

**Proposição :**

*Se  $\rho$  está definida em um aberto  $A$  em  $\mathbb{R}^3$ , então  $\rho$  é contínua em  $A$*

Seja  $x \in A$ ; dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  com  $B(x, \delta) \subset A$ , tal que se  $R \subset B(x, \delta)$  então

$$\left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(x) \right| < \varepsilon / 2$$

se  $y \in B(x, \delta)$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $R \subset B(y, \delta_1) \subset A \Rightarrow \left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(y) \right| < \varepsilon / 2$

se tomarmos  $R = B(x, \delta) \cap B(y, \delta_1)$ , sabemos que  $R$  é aberto (interseção de abertos) e não vazia pois  $y$  pertence à  $R$  e como  $R$  está contido em  $B(x, \delta)$  e  $B(y, \delta_1)$  temos :

$$\left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(x) \right| + \left| \frac{M(R)}{V(R)} - \rho(y) \right| < \varepsilon \Rightarrow |\rho(x) - \rho(y)| < \varepsilon$$

que vale para qualquer  $y \in B(x, \delta)$ , portanto  $\rho$  é contínuo em qualquer  $x \in A$ , ou seja,  $\rho$  é contínuo em  $A$ .

## APÊNDICE B – A Substituição $\xi = x/t$ em Leis de Conservação

As equações diferenciais parciais do tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(f(u))}{\partial x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

são chamadas de leis de conservação em analogia a alguns sistemas físicos. A substituição  $\xi = x/t$  surge quando buscamos uma solução contínua para (B.1) com  $t \geq 0$  e condição inicial :

$$u(x,0) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{com } U_L \neq U_R$$

A condição inicial possui uma descontinuidade em  $(0, 0)$ . Iremos procurar uma solução contínua em :

$$\mathcal{R} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0 \text{ e } (x,t) \neq (0,0)\}$$

ou seja, a única descontinuidade estará na origem. Reescrevendo (B.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = (f'(u), 1) \cdot \nabla u = 0 \quad (\text{B.2})$$

Analisando as curvas de nível  $u = \text{cte}$ , teremos que  $f'(u) = C$  também será constante, e por (B.2):

$$\nabla u \cdot (C, 1) = 0$$

Como a curva de nível é sempre perpendicular a  $\nabla u$ , o vetor  $(C, 1)$  será sempre paralelo a sua reta tangente, ou seja; **a curva de nível será uma reta**. Sabemos que curvas de nível para diferentes valores de  $u$ , não podem se interceptar, nem interceptar os semi-eixos  $x > 0$  e  $x < 0$ , pois  $u$  vale  $U_L$  e  $U_R$  (respectivamente) nos semi-eixos. Uma forma de não ocorrer esta intercessão, seria tomar retas paralelas ao eixo  $x$ , porém tal solução não seria contínua em  $t = 0$ , pois  $u$  não pode tender simultaneamente para  $U_L$  e  $U_R$ . A única forma de não haver descontinuidade em  $\mathcal{R}$  seria se todas as curvas de nível (retas) se interceptarem na origem, já que a origem  $(0,0)$  não pertence a  $\mathcal{R}$ . Sendo assim, as curvas de nível serão as retas da forma :

$$x = \xi t$$

portanto os pontos onde  $u$  é constante correspondem aos pontos em que  $\xi = x/t$  logo  $u$  é função de  $\xi = x/t$ .

## APÊNDICE C - O Esquema de Glimm

James Glimm introduziu o Método de Escolha Aleatória como uma prova construtiva da existência de soluções para uma classe de sistemas de leis de conservação hiperbólicos não lineares. A teoria deste método tem como base o estudo das iterações de ondas elementares na solução do problema de Riemann, cuja formulação matemática apresenta uma forte base termodinâmica – representada pela condição de entropia.

O Método de Glimm é uma técnica semianalítica para tratar soluções descontínuas de sistemas hiperbólicos de leis de conservação, no qual soluções aproximadas são representadas por funções constantes por partes.

Chorin modificou o método original e o transformou em uma ferramenta computacional para a solução numérica de leis de conservação hiperbólicas homogêneas. Colella propôs um procedimento mais preciso e investigou uma extensão do esquema de Glimm a sistemas bidimensionais usando o método de partição do operador.

Entre as principais características do método de Glimm estão a sua capacidade de não dissipar o choque, preservando assim, a sua magnitude e posição, além do baixo custo computacional se comparado a outros métodos de aproximação de problemas não lineares como o método de elementos finitos associado a uma técnica de captura de choques, por exemplo. Além disto, quando o comprimento dos passos tomados em relação à variável espacial tende a zero, a aproximação obtida tende a solução exata do problema, considerando, neste caso, a sua solução fraca.

No entanto, tal método apresenta uma inconveniente desvantagem uma vez que sua implementação, na simulação de problemas de valor inicial, requer o conhecimento prévio da solução completa do problema de Riemann associado a sistemas hiperbólicos.

Em essência, o método consiste em um procedimento numérico que utiliza a solução do problema de Riemann associado na geração de soluções aproximadas de equações hiperbólicas, sujeitas a condições iniciais arbitrárias. Os problemas de

Riemann são problemas de valor inicial cuja condição inicial é, necessariamente, uma função degrau. Como o esquema de Glimm constrói a solução para um problema de valor inicial a partir da solução de um certo número pré-determinado de problemas de Riemann associados, para marchar no tempo de um instante  $t = t_n$  a um instante  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , a condição inicial arbitrária deve ser aproximada por funções constantes por partes.

A fim de evitar uma interação direta entre choques referentes a dois problemas de Riemann consecutivos, o avanço de tempo  $\Delta t$  deve ser escolhido de tal forma a satisfazer a condição de Courant-Friedrichs-Lewy, assegurando, desta forma, a unicidade da solução, ou seja,

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \leq \frac{\Delta x}{2|\lambda|_{\max}} \quad (\text{C.1})$$

onde  $|\lambda|_{\max}$  é a velocidade máxima de propagação, em valor absoluto, da descontinuidade considerando todos os problemas de Riemann no tempo  $t_n$ , ou seja, a norma do valor máximo dos autovalores do sistema.

O método de Glimm permite, assim, a construção de uma solução para problemas de valor inicial - conhecidos como sistemas hiperbólicos não lineares sujeitos a valores iniciais arbitrários - através da solução de um certo número de problemas de Riemann associados. A condição inicial arbitrária, dada por uma função da posição  $x$  é aproximada por funções constantes por partes, conhecidas como funções degrau. Em seguida, um problema de Riemann - um problema de valor inicial cuja condição inicial é necessariamente uma função degrau - deve ser resolvido para cada dois passos consecutivos.

Desta forma, o objetivo deste método é unir de forma apropriada a solução de tantos problemas de Riemann quantos forem necessários para evoluir de forma sucessiva de um tempo  $t = t_n$  para um tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .

Este procedimento pode ser facilmente compreendido através da ilustração de um degrau genérico em um plano  $x \times t$ , mostrado na Figura abaixo.

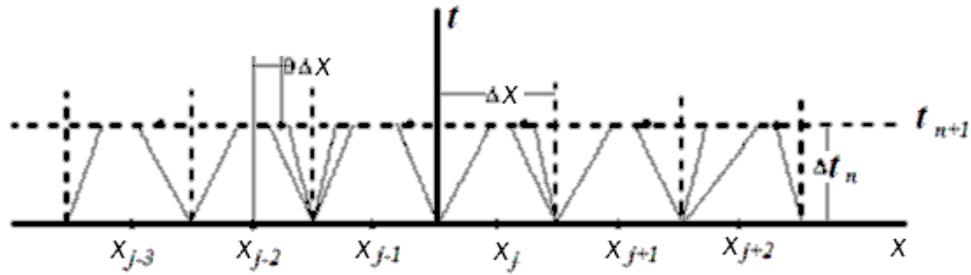


Ilustração de um passo genérico no esquema de Glimm.

A Figura acima ilustra a evolução de um instante de tempo  $t_n$  para um instante subsequente  $t_{n+1}$ , mostrando que a solução obtida no tempo  $t_{n+1}$  não é mais uma função degrau e, assim, uma nova escolha aleatória de  $\theta_n$ , após cada passo de tempo, é requerida, a fim de construir a condição inicial para o próximo instante que deve ser constante por partes. Aqui  $\theta_n$  é um número escolhido aleatoriamente no intervalo  $\left] -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right[$  e  $\Delta x$  é o tamanho de cada passo ( $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ).

Uma aproximação inicial para os campos  $F$ ,  $G$  e  $H$  no tempo  $t_{n+1}$ , denotada como  $\tilde{F}_{n+1}$ ,  $\tilde{G}_{n+1}$  e  $\tilde{H}_{i_{n+1}}$ , é obtida pela aplicação do método de Glimm ao problema homogêneo associado, definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G^2}{F} + \tilde{p}(F) \right) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GH_i}{F} \right) = 0, \quad i = 1, m \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

com

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}_n(x) \quad \text{em } t = t_n \\ G &= \hat{G}_n(x) \quad \text{em } t = t_n \\ H &= \hat{H}_i(x) \quad \text{em } t = t_n \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Como o sistema homogêneo associado às equações (C.2) pode estar sujeito a um conjunto qualquer de dados arbitrários, é construída uma solução para este

problema de valor inicial, aproximando os dados iniciais por funções constantes por partes - as funções degrau, com degraus de mesma largura.

Antes de empregar o esquema de Glimm para a resolução das equações (C.2)-(C.3), a solução (ou aproximação) do problema de Riemann associado deve ser conhecida.

Como (C.2) pode estar sujeita a quaisquer dados iniciais arbitrários é conveniente representá-los como:

$$\begin{aligned} F(x,0) &= F_0(x) \\ G(x,0) &= G_0(x) \\ H_i(x,0) &= H_{i_0}(x) \end{aligned} \quad (C.4)$$

Assim, (C.2) e (C.4) caracterizam um problema de valor inicial. A implementação do esquema de Glimm requer a aproximação das condições iniciais (C.4) por funções degrau que, para o problema considerado neste trabalho, serão consideradas funções com larguras iguais a dos passos.

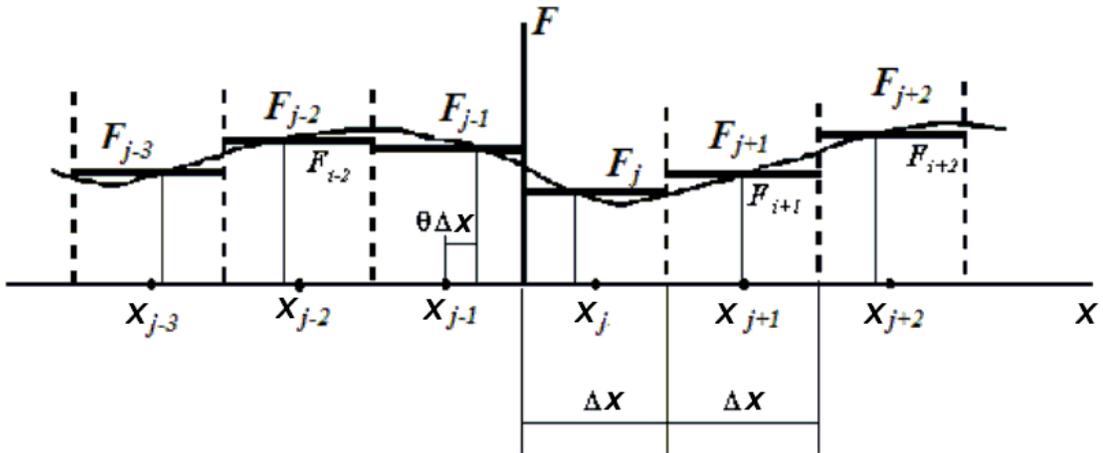
O primeiro procedimento para empregar este esquema é aproximar os dados iniciais (no tempo  $t_n$ ) pelas funções constantes por partes apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}_n(x) \approx F_{n_j} = \hat{F}_n(x_j + \theta_n \Delta x) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ G &= \hat{G}_n(x) \approx G_{n_j} = \hat{G}_n(x_j + \theta_n \Delta x) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ H &= \hat{H}_{i_n}(x) \approx H_{i_{n_j}} = \hat{H}_{i_n}(x_j + \theta_n \Delta x) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \end{aligned} \quad (C.5)$$

onde, como mencionado anteriormente,  $\theta_n$  é um número escolhido aleatoriamente

no intervalo  $\left] -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right[$  e  $\Delta x$  é o tamanho de cada passo ( $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ). Tal

procedimento é ilustrado pela aproximação mostrada na Figura:



Construção de uma distribuição constante por partes para uma função  $F$

As aproximações mostradas na equação (C.5) para os dados iniciais geram, para cada dois degraus consecutivos, um problema de valor inicial conhecido como problema de Riemann, associado às equações (C.2)-(C.3) desde que algumas condições sejam verificadas. Primeiro, o sistema deve ser hiperbólico e genuinamente não linear. A fim de garantir essa hipótese, a primeira derivada da pressão em relação a massa específica,  $p'$ , deve ser positiva. Além disto, o problema de Riemann representa um tipo especial de problema de valor inicial definido, neste caso, como:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G^2}{F} + p(F) \right) = 0 \\ \frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GH_i}{F} \right) = 0 \quad i = 1, m \end{cases} \quad (C.6)$$

com

$$\begin{aligned} (F, G, H) &= (F_{n_j}, G_{n_j}, H_{i_{n_j}}) \quad \text{para } t = t_n, \quad -\infty < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\ (F, G, H) &= (F_{n_{j+1}}, G_{n_{j+1}}, H_{i_{n_{j+1}}}) \quad \text{para } t = t_n, \quad x_j + \frac{\Delta x}{2} < x < \infty \end{aligned} \quad (C.7)$$

Seja  $\bar{F}_{n_j}, \bar{G}_{n_j}$  e  $\bar{H}_{i_{n_j}}$  a solução generalizada das equações (C.6) - (C.7). Então, a aproximação para a solução das equações (C.2) - (C.3) no tempo  $t_{n+1}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
F &= \hat{F}_{n+1}(x) \approx \bar{F}_{n_j}(x, t_{n+1}) & \text{para } x_j < x < x_{j+1} \\
G &= \hat{G}_{n+1}(x) \approx \bar{G}_{n_j}(x, t_{n+1}) & \text{para } x_j < x < x_{j+1} \\
H &= \hat{H}_{i_{n+1}}(x) \approx \bar{H}_{i_{n_j}}(x, t_{n+1}) & \text{para } x_j < x < x_{j+1}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Após cada avanço no tempo, a solução obtida não mais representa uma função degrau. Assim sendo, uma nova escolha aleatória é necessária que permita construir a condição inicial na forma de uma função degrau para realizar a evolução no tempo de um dado instante  $t_n$  para o próximo instante  $t_{n+1}$ , empregando o método de Glimm.

Se a solução para um dado instante de tempo  $t_n$  for conhecida, os dados iniciais para o próximo degrau,  $t_{n+1}$ , são aproximados por:

$$\begin{aligned}
F_{j_n} &= F(x_j + \theta_n \Delta x, t_n) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\
G_{j_n} &= G(x_j + \theta_n \Delta x, t_n) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2} \\
H_{i_{j_n}} &= H_i(x_j + \theta_n \Delta x, t_n) & \text{para } x_j - \frac{\Delta x}{2} < x < x_j + \frac{\Delta x}{2}
\end{aligned} \tag{C.9}$$