



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Leonardo Paiva Ferreira da Costa

**Dedução de uma transformada integral não linear baseada em
princípios interferométricos**

Relação do espectro de ondas oceânico e o espectro de fase AT-INSAR

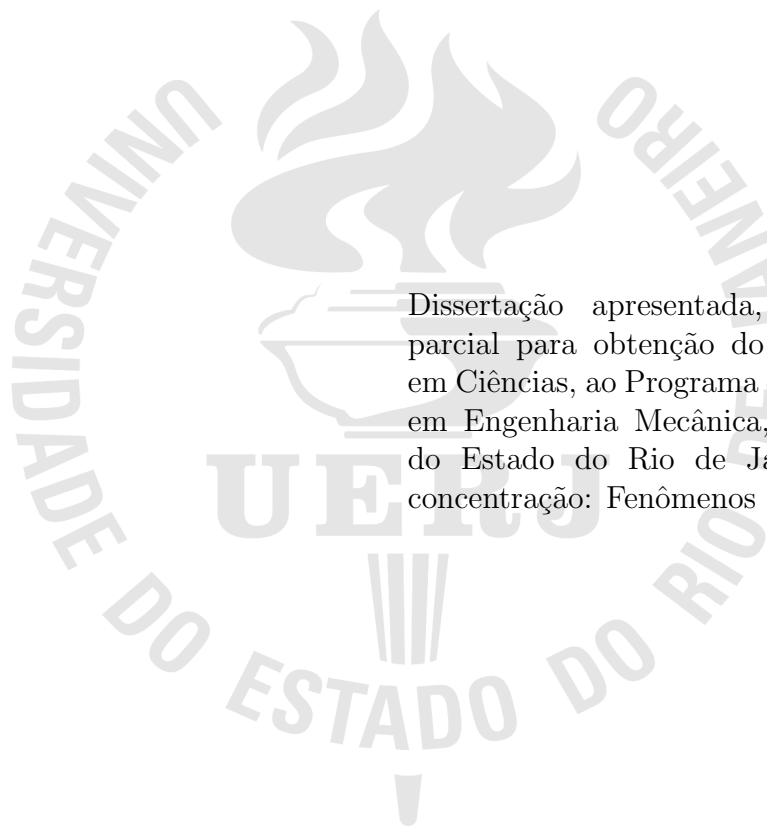
Rio de Janeiro

2019

Leonardo Paiva Ferreira da Costa

**Dedução de uma transformada integral não linear baseada em princípios
interferométricos**

Relação do espectro de ondas oceânico e o espectro de fase AT-INSAR



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientador: Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

C837 Costa, Leonardo Paiva Ferreira da.
Dedução de uma transformada integral não linear baseada em princípios interferométricos: relação do espectro de ondas oceânico e espectro de fase AT-INSAR / Leonardo Paiva Ferreira da Costa. – 2019.
107f.

Orientador: Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Análise espectral - Teses. 3. Transformadas integrais - Teses. 4. Interferometria - Teses. I. Carvalho Filho, Luiz Mariano Paes de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 531.715

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Leonardo Paiva Ferreira da Costa

**Dedução de uma transformada integral não linear baseada em princípios
interferométricos**

Relação do espectro de ondas oceânico e espectro de fase AT-INSAR

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovado em: 06 de setembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística da UERJ

Prof. Nelson Violante de Carvalho
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - COPPE

Dr. Felipe Marques dos Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - COPPE

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus familiares pelo apoio incondicional em todos os momentos difíceis da minha trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTO

A Deus por me proporcionar perseverança e saúde durante toda a minha trajetória.

A minha família, especialmente minha mãe e meu avô pelo apoio, inspiração e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações.

Ao meu professor e orientador Prof. Luiz Mariano Paes De Carvalho Filho, pelas valiosas contribuições e ensinamentos dados durante todo o processo acadêmico e que certamente levarei para toda a vida.

Aos meus amigos Lívia Correa, Leandro Marques e Gabriel Oliveira por todos os desafios, conhecimentos e risadas que compartilhamos.

Também quero agradecer à Universidade do Estado do Rio de Janeiro por ter me acolhido uma vez mais, e seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

Gostaria de agradecer a CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

PAIVA, Leonardo. *Dedução de uma transformada integral não linear baseada em princípios interferométricos*. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Em 1991 foi demonstrado por Hasselmann e Hasselmann [1] uma transformada integral não linear para relacionar o espectro de ondas oceânico e o espectro de imagem SAR. Esta abordagem se mostrou revolucionário para estudos de monitoramento de regiões marítimas. Apesar disso, ela conta com uma série de limitações teóricas e práticas que dificultam a evolução da teoria. Pensando nisso, neste trabalho foi demonstrada uma nova transformada integral não linear baseada em He e Alpers [2], que tem o potencial de resolver algumas das limitações da transformada de Hasselmann e abrir novos horizontes.

Palavras-chave: Espectro de onda; Interferometria; Transformada de fase AT-INSAR; SAR.

ABSTRACT

PAIVA, Leonardo. *Deduction of a nonlinear integral transformation established on interferometric principles*. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

In 1991, Hasselmann and Hasselmann [1] demonstrated a nonlinear integral transform to relate the oceanic wave spectrum and the SAR image spectrum. This approach has proved revolutionary for maritime monitoring studies. Furthermore, it has some theoretical and practical limitations that hinder the evolution of theory. Therefore, this work has demonstrated a new nonlinear integral transform based on He and Alpers [2], which has the potential to solve some of the limitations of the Hasselmann transform and open new paths.

Keywords: Interferometry; SAR; Nonlinear Integral Transform for the AT-INSAR Phase Spectrum; Wave Spectrum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Tipos movimentos da onda sobre um determinado meio	18
Figura 2	Ondas capilares e desenvolvimento para ondas de gravidade	19
Figura 3	Ondas do tipo swell	20
Figura 4	Representação gráfica da região onde ocorrem ondas internas.	23
Figura 5	Coluna vertical de água.....	39
Figura 6	Decomposição de um estado de mar numa soma de planos de ondas regulares	43
Figura 7	Espectro de frequência melhorado pelo fator γ	49
Figura 8	Espectro de frequência melhorado pelo fator γ e suas características com pico original do espectro de Pierson-Moskowitz E_{MAX}^{PM} e espectro aprimorado E_{MAX}	50
Figura 9	Espectro de frequência para o parâmetro fetch variável	50
Figura 10	Representação do terço do grupo das ondas maiores, assim como a altura significativa H_s ($H_{1/3}$).....	58
Figura 11	Na imagem, a vegetação é mostrada em tons escuros (coerência pobre) e construções em tons claros (alta coerência)	63
Figura 12	Trens de pulsos transmitidos e recebidos	65
Figura 13	Imagem ilustrativa do processo que origina ambiguidade dos pulsos	66
Figura 14	Fluxograma do sistema do Radar	67
Figura 15	Reflexão do radar.....	68
Figura 16	Propagação de ondas radiadas.....	70
Figura 17	Geometria de imageamento SAR.....	71
Figura 18	Modos de operação SAR.....	72
Figura 19	Modos de operação SAR.....	74
Figura 20	Sistema linear invariante.....	77
Figura 21	A seção transversal do radar depende do ângulo de incidência do campo eletromagnético do radar (E) e a normal (n) a uma faceta retroespalha- dora. O módulo do vetor (e portanto a energia que retorna ao sensor) é maior na inclinação da onda que está na direção do satélite, e menor na direção oposta – caracterizando a modulação por inclinação	77

Figura 22	Processo de modulação hidrodinâmico na superfície oceânica e as zonas de divergência e convergência criadas por interferência destrutiva ou construtiva, respectivamente.	78
Figura 23	Geometria simplificada da aplicação interferométrica de duas etapas para radares com uma antena.	85
Figura 24	Geometria simplificada da aplicação da interferometria para radares com duas antenas.	86
Figura 25	Geometria simplificada da aplicação da interferometria para radares com duas antenas.	87
Figura 26	Comparação entre sistemas completamente ativos e semi-ativos.	88
Figura 27	Comparação entre interferograma de uma região e sua respectiva ilustração dada em	92

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	TÓPICOS BÁSICOS DE OCEANOGRAFIA	15
1.1	Introdução	15
1.2	Conceitos Básicos de Oceanografia física	15
1.2.1	Ondas	17
1.2.1.1	Movimento das ondas	17
1.2.1.2	Ondas capilares e Ondas de gravidade e Mar	18
1.2.1.3	Swell	19
1.2.1.4	Seiche	20
1.2.1.5	Maremoto	20
1.2.1.6	Marés	21
1.2.1.7	Interferência	21
1.2.1.8	Ondas internas	22
1.3	Modelo determinístico	23
1.3.1	Modelo linearizado	28
1.3.2	Solução do modelo linearizado	31
1.3.3	Observações sobre águas rasas e águas profundas	33
1.4	Discussões sobre outros fatores importantes	33
1.4.1	Aprofundamento sobre os mecanismos de vorticidade e efeitos viscosos	34
1.4.2	Aproximação de Boussinesq	36
1.4.3	Dedução da movimento orbital das ondas	37
1.4.4	Energia das ondas	38
2	TEORIA ELEMENTAR DO ESPECTRO DE ONDAS	40
2.1	Introdução	40
2.2	Modelo fase/amplitude aleatório	41
2.3	Espectro de onda	43
2.3.1	Definição do espectro de ondas por Transformada de Fourier	45
2.3.2	Propriedades do espectro e suas relações com fenômenos naturais	46

2.3.3	JONSWAP (Joint North Sea Wave Project)	48
2.3.4	Espectro de frequência-direcional de ondas	51
2.3.5	Direção média e Espalhamento direcional	53
2.4	Parâmetros do estado de mar e espectro de onda	55
2.4.1	Momentos de uma função	55
2.4.2	Período da onda	56
2.4.3	Altura significativa de onda	57
2.5	Espectro cruzado	58
3	INTRODUÇÃO À TEORIA DE RADAR	61
3.1	Prefácio	61
3.2	Coerência	62
3.3	Interação da superfície com o campo eletromagnético de ondas ...	62
3.4	Princípios operacionais de Radar	64
3.4.1	Equação de Range do Radar	67
3.4.2	Seção cruzada do radar	68
3.4.3	Efeito Doppler	69
3.4.4	Radar de abertura sintética	69
3.4.5	Modos de operação SAR	71
3.4.6	Ângulo de incidência	72
3.4.7	Modelo de Bragg	73
3.4.8	Distorções geométricas	74
3.4.9	Speckle	75
3.4.10	Resolução de imagem do Radar	75
3.5	Funções de transferência	75
3.5.1	Função de transferência Tilt	77
3.5.2	Função de transferência Hidrodinâmica	78
3.5.3	Função de transferência velocity bunching	79
3.6	Funções de covariância	80
3.6.1	Auto-variância da imagem RAR	80
3.6.2	Covariância entre a imagem RAR e velocidade orbital	80
3.6.3	Autocovariância da imagem orbital	80
3.7	Transformada de Hasselmann	80

4	DEDUÇÃO DE UMA TRANSFORMADA INTEGRAL NÃO LINEAR APLICADA A MÉTODOS INTERFEROMÉTRICOS ..	83
4.1	Introdução	83
4.2	Interferometric SAR.....	83
4.2.1	Técnica de passadas repetidas.....	84
4.2.2	Técnica de única passada.....	86
4.2.3	Formação de satélites semi-ativos e completamente ativos	87
4.2.4	Conhecimentos básicos sobre toolbox Sentinel-1	88
4.3	Método das funções características	89
4.4	Dedução da transformada do espectro de fase AT-INSAR	91
	CONCLUSÃO	102
	REFERÊNCIAS.....	103

INTRODUÇÃO

Satélites equipados com radares de abertura sintética revolucionaram a teoria de sensoriamento, desde que é possível registrar uma grande quantidade de informações sobre a superfície da Terra. Logo, é possível utilizar esta ferramenta para obter informações sobre superfícies oceânicas, derretimento de calotas polares e correntes de gelo, identificar padrões em áreas urbanas e rurais com potencial de registrar áreas desmatadas e até estudar a possibilidade de ocorrência de um terremoto. Com isso, fica claro a importância deste assunto para o desenvolvimento do conhecimento científico e militar.

Em Hasselmann e Hasselmann [3], foi apresentada uma transformada integral não linear capaz de relacionar o espectro de imagens SAR com o espectro de ondas oceânico. Este trabalho se mostrou um marco na teoria de sensoriamento, e também se mostrou um grande desafio entender a teoria por trás deste artigo. Uma das suposições dessa teoria é que a modulação SAR é um processo linear, ou seja, pode ser representado por funções de transferência. Isso implica que para a transformada estar bem definida, é necessário ter completo domínio de todas as funções de transferência. No entanto, os conhecimentos sobre a função de transferência hidrodinâmica são limitados, pois não é conhecida completamente como funciona a mecânica deste fenômeno. Diante de todas as barreiras que a teoria proposta por Hasselmann possui, uma alternativa interessante surgiu em He e Alpers [2]. Esta nova transformada integral não linear é baseada na interferometria e relaciona o espectro de fase de uma imagem AT-INSAR com o espectro de ondas da superfície oceânica. Esta nova transformada possui algumas vantagens como a não dependência da função de transferência hidrodinâmica e os autores ponderam que esta transformada de fase AT-INSAR tem menor grau de dependência da seção cruzada normalizada do radar que a transformada de Hasselmann ¹.

No primeiro capítulo foram apresentados conceitos básicos sobre oceanografia, tendo como foco o estudo das ondas e suas respectivas classificações. Posteriormente é feito um estudo matemático da superfície oceânica com a finalidade de obter a relação de dispersão e também uma equação hipotética do campo de velocidades na superfície. As Seções posteriores tratam de efeitos físicos que não foram implementados diretamente no modelo matemático anterior, porém impactam de forma significativa a mecânica da superfície. Entre estes fatores, está uma discussão detalhada e alinhada com a matemática

¹Os autores afirmam que a seção cruzada normalizada do radar e a velocidade radial do alvo são linearmente relacionados com a amplitude da onda

dos mecanismos de vorticidade e efeitos viscosos. Posteriormente é falado no modelo de Boussinesq, com o intuito de que futuramente este pode ser um caminho para aprimorar o modelo determinístico citado anteriormente. Por fim, é feita uma dedução matemática do movimento orbital das ondas e da energia total das ondas.

No segundo capítulo, o intuito é primeiramente construir o conceito de espectro de ondas de forma intuitiva, baseado apenas em conceitos estatísticos como média e variância. Posteriormente o conceito de espectro é definido de forma alternativa utilizando análise de Fourier. Em seguida, o espectro de Pierson Moskowitz é deduzido, e na sequência é feita uma revisão na literatura sobre o fator de aprimoramento JONSWAP. O passo seguinte consiste na definição do espectro direcional de ondas, e novamente é feita uma revisão na literatura com relação ao parâmetro de distribuição direcional e suas implicações, como a definição do espalhamento direcional e direção média. Além disso, são definidos de forma sucinta alguns parâmetros do estado de mar como período da onda e altura significativa da onda. Por fim, é introduzida a definição de espectro cruzado e o parâmetro de coerência do espectro.

No terceiro capítulo foi necessário introduzir a teoria básica de radar para fundamentar o uso do SAR. Para isso, foi necessário discutir alguns assuntos centrais como: o efeito Doppler e sintetização da antena, estrutura básica de funcionamento do radar, interação da superfície e campo eletromagnético de ondas, seção cruzada do radar, ângulo de incidência, distorções geométricas, modos de operação SAR e modelo de Bragg. Além disso, a modelagem feita por Hasselmann e Hasselmann [3] faz a suposição de que os processos que ocorrem no oceano são lineares, e por isso podem ser modeladas por funções de transferência. Dessa forma, a teoria básica de funções de transferência é apresentada, e posteriormente são relacionadas as três principais funções de transferência: tilt, hidrodinâmica e velocity bunching. Após definir estes conceitos, é possível definir a transformada de Hasselmann, que é a principal ferramenta matemática utilizada para relacionar espectro de ondas oceânico com espectro de imagens SAR.

No quarto capítulo, é abordado um modo específico do SAR chamado INTERFEROMETRIC SAR (INSAR). Este modo é baseado numa área da física chamada interferometria e basicamente é capaz de recolher informações sobre a superfície a partir da diferença de fases das ondas emitidas e recebidas pelo radar. Para calcular a diferença de fase, é necessário recolher informação de um alvo em duas ocasiões, e por isso foi definido

o conceito de técnica de passadas repetidas para radares monoestáticos e técnica de única passada para radares biestáticos. Estas informações são complementadas pelo toolbox oferecido pela ESA. Em seguida é definido o método das funções características, utilizado para demonstrar a transformada integral não linear do espectro de fase AT-INSAR e conseqüentemente a sua respectiva transformada quasi-linear.

Sintetizando todas essas informações, temos instalado todos os alicerces teóricos necessários para aplicação dos conceitos matemáticos e recuperar o espectro de ondas. No trabalho de He e Alpers [2], a maioria dos passos para a obtenção da transformada integral do espectro de fase AT-INSAR é omitida, tornando o entendimento da teoria excessivamente abstrato. Por isso, a contribuição desta dissertação está em demonstrar e simplificar todos os passos envolvidos para a obtenção da transformada de fase AT-INSAR, assim como sua transformada quasi-linear. Além disso, cabe ressaltar que à partir da função imagem de amplitude AT-INSAR, e fazendo algumas simplificações, é possível obter uma equação equivalente à transformada de Hasselmann.

1 TÓPICOS BÁSICOS DE OCEANOGRAFIA

1.1 Introdução

Representar matematicamente as elevações da superfície oceânica em águas profundas é um grande desafio. Para isto, foram definidos conceitos, e a partir deles construído a modelagem. Esta modelagem se ajusta razoavelmente bem para os propósitos do estudo sobre retorno do espectro direcional de ondas e é largamente utilizada. Além disso, oferece margem para implementar novos parâmetros. Estas informações estão de acordo com o que se conhece através da experiência, e mostra que a modelagem está consonante com a realidade.

No Capítulo 1, serão apresentados conceitos básicos de oceanografia e fenômenos marítimos. Inicialmente, se faz uma breve resumo dos principais fenômenos, que por sua própria natureza, podem influenciar os resultados de imageamento. Além disso, cada tipo de onda terá sua respectiva representação no espectro de ondas. A regularidade é perceptível no espectro de ondas, assim como a irregularidade, e portanto, foram destacadas alguns tipos de ondas como swell, ondas capilares, maremotos etc. Na Seção 1.2 são apresentados alguns conceitos sobre oceanografia, como fatores que influenciam a mecânica do oceano, assim como a formação de ondas. Posteriormente, será comentado sobre alguns tipos de ondas, e além disso é explicado o movimento orbital característico das ondas.

Na Seção 1.3, foi construído um modelo determinístico, que tem como base a equação de Navier-Stokes. Para resolver o modelo determinístico oceano-atmosfera, foram utilizadas soluções harmônicas. Devido à complexidade do modelo, ficou clara a necessidade de simplificar o modelo, e o método utilizado foi de linearização através de análise dimensional. A partir desta nova resolução, foi possível obter informações importantes.

1.2 Conceitos Básicos de Oceanografia física

Baseado nos Capítulos 8, 9 e 10 de Trujillo e Thurman [4], foram reunidas informações suficientes para servir de corpo para esta Seção. O mar tem grande capacidade de estocar calor, liberando a energia acumulada durante o dia, ao longo do anoitecer. O mesmo processo ocorre entre o verão e inverno. Este fato tem a importante característica

de amenizar variações bruscas de energia ao longo do tempo.

As propriedades térmicas da água, são fortemente influenciadas pelas pontes de hidrogênio. Uma das propriedades das pontes de hidrogênio é a forte ligação entre as moléculas, implicando maior dificuldade em aumentar a agitação molecular, e portanto aumentar a temperatura. Isso significa que o mar é capaz de trocar grandes quantidades de energia ao longo do dia, enquanto evita variações bruscas de temperatura.

Grande parte desta energia acumulada, é transportada através de correntes marinhas e através do processo de evaporação seguido de condensação (formando nuvens) e conseqüentemente distribui o calor ao longo do planeta.

Grande parte da mecânica no oceano é dependente da densidade, e esta por sua vez, tem relação com a salinidade e a temperatura. Existem três zonas de densidade, a **camada superior da superfície** (cerca de 0,02 de água do oceano). Nesta região, conforme a profundidade aumenta, a temperatura e a densidade variam pouco. **Pycnocycle**, é uma camada intermediária, que abriga cerca de 0,18 de água do oceano. Nesta região, conforme a profundidade aumenta, a densidade cresce de forma significativa e a temperatura varia de forma expressiva. Na **zona profunda**, que é a camada inferior, representando cerca de 0,80 de água oceânica, há uma diminuição gradativa na variação da densidade e temperatura, quando comparada com a região intermediária. Além disso, é importante observar que estas zonas dependem da latitude de referência. Entre a região da superfície e a Pycnocycle, ocorrem as correntes marinhas. Elas são formadas basicamente pela fricção entre o vento e o oceano. A disposição física e geométrica dos continentes, afeta o caminho dessas correntes. De fato, Trujillo e Thurman [4] afirmam que caso não houvesse continentes, as correntes seguiriam os principais cinturões de ventos. Também existem outros fatores que podem afetar as correntes como, por exemplo, o efeito de Coriolis.

O efeito das correntes marinhas no clima também é evidente. De fato, correntes marítimas aquecidas, tendem a esquentar o ar próximo à superfície e conseqüentemente, este ar consegue carregar uma quantidade maior de vapor d'água, fazendo o clima se tornar úmido e com maior nível de precipitação (o processo inverso também se aplica). Em regiões do mundo onde passam correntes marítimas frias, o ar próximo tende a esfriar, e portanto tornar o clima mais seco.

Ainda sobre correntes, cabe ressaltar um fenômeno em particular, chamado **upwelling**, que causa uma mistura vertical de água refrigerada e rica em nutrientes, entre a zona

da superfície marinha e zona de águas profundas. Essa mistura, por sua vez, alimenta todo um ciclo de vida marinha. Na ausência de Pycnocycle, uma maior eficiência deste efeito é permitida, e pode ser ampliado em regiões de alta latitude. Existe por outro lado, o efeito **downwelling**, que apesar de afetar de forma menos significativa o ciclo marinho, leva oxigênio dissolvido para as partes mais profundas do oceano.

É clara no entanto, a diferença entre correntes marinhas e ondas. Correntes são os deslocamentos de massas de água de um ponto a outro, e ondas são apenas o deslocamento de energia, causado por alguma perturbação. Este deslocamento de energia, não significa que o meio, neste caso, o mar, irá se movimentar. De fato, o que se movimenta são as partículas do meio que oscilam num certo tipo de trajetória, de acordo com cada meio.

Alguns conceitos que serão utilizados na descrição dos métodos de localização precisam ser previamente definidos.

1.2.1 Ondas

1.2.1.1 Movimento das ondas

O movimento das ondas pode ser longitudinal, transversal, ou uma combinação de ambos, o movimento orbital (ver Figura 1). Ondas longitudinais se movimentam como se empurrassem e puxassem as partículas na direção em que a energia está se movendo, como por exemplo o som de uma batida na mesa. Ondas transversais, deslocam a energia apenas ao movimentar verticalmente cada ponto, como por exemplo uma corda presa à parede. O movimento orbital (ondas de interface), é pensado como um pouco dos dois métodos. Estas órbitas se aproximam mais de uma circunferência em águas profundas e tendem a um formato elíptico em águas rasas. No mar, o movimento orbital é máximo próximo à superfície e vai se amenizando conforme aumenta a profundidade, até chegar na profundidade relativa à metade do comprimento de onda, onde por fim, pára de exercer influência. De fato, submarinos podem evitar impactos com grandes ondas, apenas submergindo à certa profundidade. Esta região em que o movimento orbital deixa de ser influente se chama onda base.

O vento pode originar tanto correntes como ondas (na superfície). Porém há outras formas de perturbação que originam ondas, como por exemplo através do efeitos da gravitação, ou de deslocamento de placas tectônicas. Existe também as chamadas ondas

internas, que são ondas que ocorrem no Pycnocycle, sendo resultado do movimento da água de diferentes densidades.

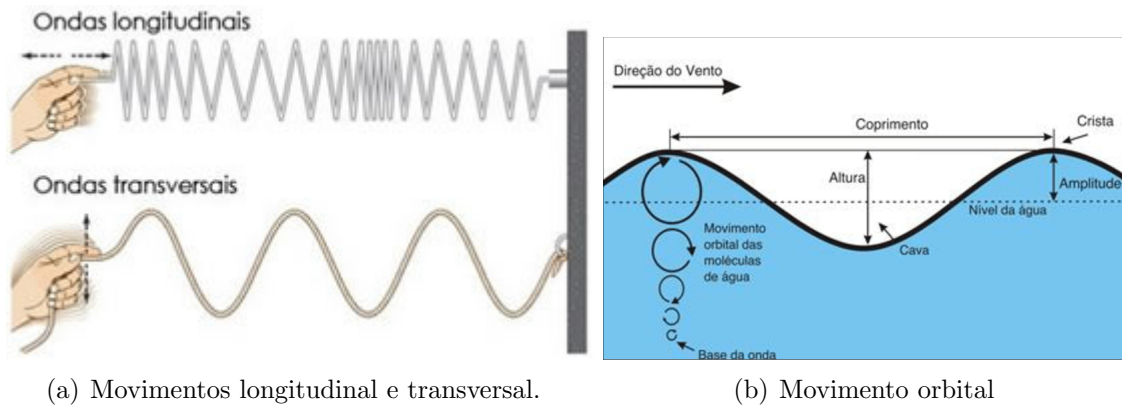


Figura 1 Tipos movimentos da onda sobre um determinado meio

Fonte: Figura 1-(a) retirada de [5]; Figura 1-(b) retirada de [4]

1.2.1.2 Ondas capilares e Ondas de gravidade e Mar

Ondas capilares se formam quando a fricção do vento atua sobre a superfície marinha, isso cria pressão e tensão, deformando a superfície. O comprimento de onda dessas ondas capilares é menor do que 1,74 cm. Conforme o vento aumenta sua influencia, o comprimento de onda aumenta. Dessa forma, quando as ondas superam 1,74 cm de comprimento de onda, elas começam a se chamar ondas de gravidade. Toda a região de fricção onde o vento interfere no surgimento e modificação de ondas se chama de mar ("sea"). A partir do momento em que o vento para de interferir na modelagem dessa onda, e as ondas param de crescer, obtém-se uma condição de equilíbrio chamada estado de mar completo("fully developed sea").

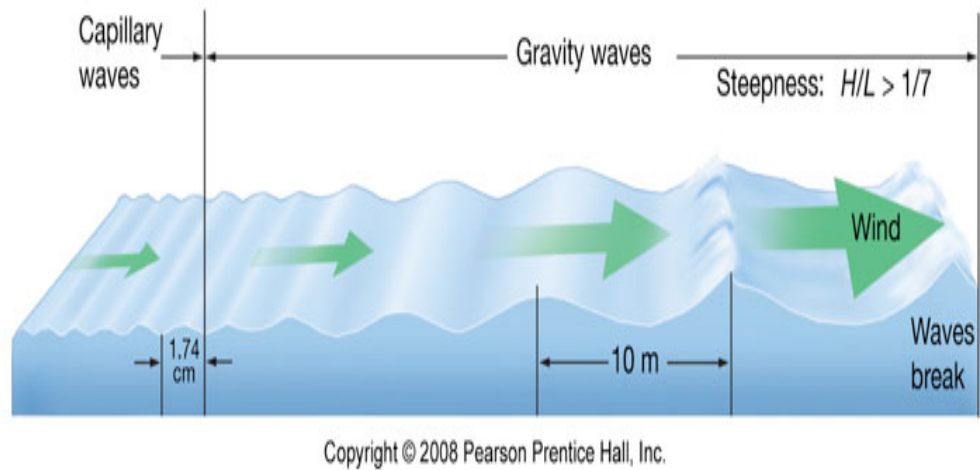


Figura 2 Ondas capilares e desenvolvimento para ondas de gravidade

Fonte: Retirado de [4].

1.2.1.3 Swell

As ondas geradas em tempestades, após se distanciarem da região de atuação dos ventos (Fetch), ou seja, atingem o estado de mar completamente desenvolvido, ganham o nome de swell. Este tipo de onda tem como características o comprimento de onda de algumas dezenas de metro, período entre 10 e 30 segundos. Este tipo de onda também é utilizado amplamente para obter imagens SAR, pois elas apresentam regularidades que se adequam facilmente a propósitos práticos e de modelagem. Elas viajam longas distâncias mantendo grande quantidade de energia e com pouca dissipação (devido ao estado de mar completamente desenvolvido) até atingir a costa de algum continente.



Figura 3 Ondas do tipo swell

Fonte: Retirado de [6].

1.2.1.4 Seiche

A condição para a formação deste tipo de onda é que a massa de água esteja pelo menos parcialmente dentro de um contorno. Um exemplo da ocorrência desse fenômeno é em lagos e bacias. Com a ação dos ventos numa direção, a tendência é parte da água se deslocar para onde o vento está apontando. Conseqüentemente, um extremo do lago ou bacia perde massa e o outro ganha. Portanto, a profundidade de ambos lados é influenciada. Um exemplo claro deste fenômeno ocorre em um dos maiores lagos da América do Norte, o Lago Erie, mais informações podem ser obtidas em [7]

1.2.1.5 Maremoto

As ondas podem também ser formadas por movimentos da crosta terrestre, tal como maremotos, deslizamentos, ou ainda por quedas de blocos de geleiras. Ondas geradas desse modo são denominadas maremotos ou ondas sísmicas. Estas geralmente apresentam grande comprimento de onda e pequena altura. Tipicamente, essas ondas têm 200 Km de comprimento e 1 metro de altura. Em águas profundas, sua altura não atinge mais que um metro, não sendo portanto, percebidas devido ao seu grande comprimento. Como qualquer onda, quando entram em águas rasas têm sua velocidade e comprimento reduzidos e altura aumentada, podendo alcançar então 30 metros. Os maremotos ocorrem principalmente em certas costas, próximas às áreas de atividades tectônicas, como a região perimétrica

do Oceano Pacífico. Ocorrem em média uma vez por ano em escala mundial, não havendo menção de ocorrência no Brasil.

1.2.1.6 Marés

As marés são as maiores ondas conhecidas, sendo o fenômeno mais evidente na costa, onde o nível do mar sobe e desce regularmente duas vezes ao dia. A diferença entre esses níveis pode ser de menos de 1m, como ocorre no Mediterrâneo e Caribe ou de até 15 m como na Baía de Fundy no Canadá. No Brasil, essa variação é de um pouco mais de 1 m em quase toda a região sul e sudeste, podendo ultrapassar os 5 m no Maranhão. As marés são ondas produzidas pela forças gravitacionais da Lua e do Sol. As marés podem ser definidas como movimentos verticais periódicos ou regulares das massas de água causados pela força gravitacional, que é inversamente proporcional à distância e diretamente proporcional à massa. A força gravitacional (FG) entre dois corpos pode ser expressa matematicamente através da lei da gravitação: $FG = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$), sendo: G a constante gravitacional universal, m1 e m2 massas dos corpos envolvidos, e r2 distância entre as massas, a partir do centro dos corpos. Quando a lua e o sol encontram-se alinhados (lua nova), a força gravitacional do sol e da lua são adicionados e a massa de água atraída é máxima. Essa maré é definida como maré alta (Sizigia). Quando a lua e o sol encontram-se opostos (lua cheia), a força gravitacional é mínima e é definida como maré baixa. Quando nós temos a Lua em Quarto Crescente ou Quarto Minguante (também são chamadas de primeira quadratura e quadratura respectivamente), as marés não serão muito elevadas pois os efeitos do Sol não contribuem na mesma direção em que se encontra a Terra com a Lua. O fenômeno das marés também é observado na parte sólida do planeta, mas com menor intensidade. O solo terrestre pode elevar-se até 45 centímetros nas fases de Lua Cheia ou Nova. Mas nós não percebemos, pois tudo a nossa volta levanta junto e não temos assim uma referência.

1.2.1.7 Interferência

Swells causados por diferentes tempestades podem se chocar, e neste caso essas ondas podem adicionar a amplitude (interferência construtiva), ou as amplitudes podem se subtrair (interferência destrutiva). Existe também o caso de interferência mista, onde ocorre ambas as situações anteriores, porém sem um padrão claro. Interferências mistas

explicam por exemplo o padrão irregular da sequência intercalada entre ondas grandes e ondas pequenas. Um caso particular de interferência construtiva é chamado de "Freak Wave" e ocorre nas proximidades de regiões de tempestade. Neste caso particular, onde muitas ondas de diferentes frequências e diferentes amplitudes se chocam num dado ponto, pode ocorrer uma onda de amplitude gigantesca e com poder destrutivo enorme. Além disso, tem uma particularidade de conseguir ter até 4 vezes o tamanho máximo possível num estado de mar totalmente desenvolvido.

1.2.1.8 Ondas internas

Algumas ondas ocorrem e viajam ao longo da interface entre dois fluidos, esse fato ocorre claramente entre o ar e a superfície oceânica, e entre a fronteira entre dois oceanos de densidades diferentes. Essas ondas que são criadas na camada da superfície com maior densidade, é chamada de onda interna. Em comparação com as ondas geradas pelo vento na superfície oceânica, as ondas internas se movem bem mais devagar. Isso ocorre devido às diferenças entre as densidades do ar e água, serem muito maior do que o par entre as duas camadas do fluido oceânico. A importância de ondas internas é que a mistura entre as camadas oceânicas podem misturar nutrientes e favorecer o crescimento do plânctons, que estão na base da cadeia alimentar no oceano. Além disso, submarinos podem ser afundados de forma imprevisível e já houve casos até de plataformas de petróleo sofrerem rotação por causa de ondas internas. Uma curiosidade interessante é que ondas internas são percebidas pelos satélites, e isso é possível pois as cristas das ondas internas alteram a refletividade da superfície oceânica.

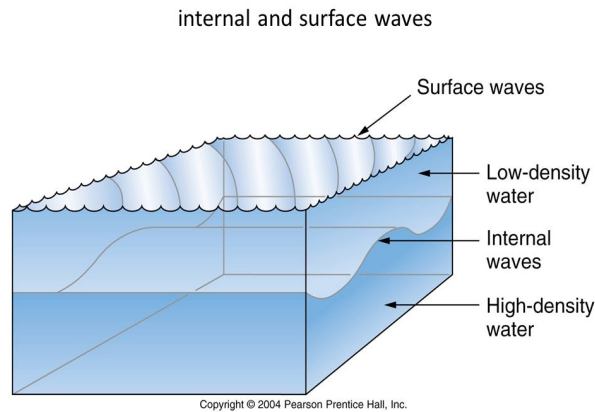


Figura 4 Representação gráfica da região onde ocorrem ondas internas.

Fonte: Retirado de [4]

1.3 Modelo determinístico

A viscosidade da água é bem menor que a viscosidade do ar, chegando a valores próximos a $\nu = 0,01\text{cm}^2/\text{s}$. Segundo Masse [8], a densidade da água do mar e sua distribuição na coluna de água, determina a estabilidade hidrostática das massas de água e tem influência em fenômenos como turbulência, ondas internas e propagação de ondas sonoras. No entanto, a influência da densidade para ondas de superfície é irrelevante, exceto para ondas jovens em formação pelo vento. Cabe ressaltar, que por construção, o campo de velocidades vetorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}(t))^2$ possui divergente nulo³ e vorticidade nula⁴. Portanto, pela identidade

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

é possível notar que que o laplaciano da velocidade será próximo de zero, sempre que o rotacional e o divergente forem próximos de zero, e isso implica, que nestas condições na equação de Navier-Stokes, como a viscosidade é proporcional ao laplaciano da velocidade, a viscosidade será irrelevante.

Precisamos agora, falar um pouco sobre circulação. O fluxo Γ do campo vetorial

²Seja D um conjunto em \mathbb{R}^3 . Um campo vetorial \mathbf{v} em \mathbb{R}^3 é uma função \mathbf{v} que associa cada ponto (x, y, z) do domínio D , a um vetor $\mathbf{v} = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$.

³ $\nabla \cdot \mathbf{v} = v_{i,i}$.

⁴ $\nabla \times \mathbf{v} = \epsilon_{i,j,k} v_{k,j} \mathbf{e}_i$.

$(\nabla \times \mathbf{v})$, orientado sobre uma superfície A com vetor unitário \mathbf{n} , é definido como:

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA .$$

Segundo Pontes e Mangiavacchi [9], o Teorema de Kelvin⁵ garante que, na ausência de efeitos viscosos e de variações de entropia, temos $\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$ e portanto, Γ é constante. Sem perda de generalidade, ao considerar $\Gamma = 0$ temos que isto significará que $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, pois o campo vetorial é contínuo por hipótese.

Segundo Stewart [10], ao consideramos que \mathbf{v} é um campo vetorial contínuo cujas funções componentes possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, se o campo \mathbf{v} for irrotacional, ele será dito conservativo e, conseqüentemente, sabe-se que um campo vetorial conservativo é da forma $\nabla \phi$, onde ϕ é uma função potencial com o mesmo domínio e neste caso receberá o nome de velocidade potencial. Foi considerado que o divergente do campo de velocidades é nulo, ou seja $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Esta última hipótese está diretamente relacionada com o comportamento do fluido.

De acordo com Stewart [10], considere um ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ do fluido e B_a é uma bola aberta com centro em P_0 e raio $r = a$, suficientemente pequeno. Nessas circunstâncias, $\nabla \cdot \mathbf{v} \approx \nabla \cdot \mathbf{v}(P_0)$ para todo ponto pertencente à bola, uma vez que supõe-se $\nabla \cdot \mathbf{v}$ é contínuo. Ao aproximar o fluxo sobre a fronteira esférica da bola S_a e aplicando o Teorema da Divergência,

$$\iint_{S_a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \nabla \cdot \mathbf{v} dV \approx \iiint_{B_a} \nabla \cdot \mathbf{v}(P_0) dV = \nabla \cdot \mathbf{v}(P_0)V(B_a).$$

Como consequência, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(P_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S}.$$

Esta última equação implica que o divergente pode ser interpretado como o fluxo por unidade de volume. Logo, se o fluxo for negativo, então o fluido está contraindo (também neste caso, chamado de **sumidouro**) e portanto, como a massa do fluido nesta bola está aumentando, sem alterar o volume, significa que a densidade está aumentando, e de forma análoga, se o fluxo é positivo, o fluido está se expandindo (também neste caso é chamado de **fonte**) e como o volume se mantém, e a massa do fluido está diminuindo,

⁵Este resultado será melhor abordado na subseção 1.4.1.

significa que a densidade está diminuindo. No caso do divergente ser nulo, com raciocínio análogo, conclui-se que a densidade será constante e portanto, o fluido será chamado de incompressível. Este raciocínio é embasado na equação da continuidade de massa, que denota a relação entre a taxa de acumulação de massa dentro do volume de controle, e o fluxo líquido⁶ de massa do volume de controle. De fato,

$$- \iint \mathbf{v}\rho \cdot \mathbf{n} dA = \iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho dV , \quad (1.2)$$

onde \mathbf{v} significa velocidade, ρ é a densidade e dV é o elemento de volume. Assumindo que não há variação na quantidade de massa do sistema, então, aplicando o Teorema da Divergência⁷:

$$0 = \iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \iiint \nabla \cdot \mathbf{v}\rho dV , \quad (1.3)$$

e portanto, obtemos a forma diferencial da equação da continuidade

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}\rho . \quad (1.4)$$

Suponha ρ é constante não nula por hipótese, logo $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ e conseqüentemente, temos que divergente do campo de velocidades é nulo (incompressível) se e somente se a densidade for constante.

Recapitulando, como o rotacional do campo de velocidades é nulo, o campo é conservativo. Logo, temos que existe uma função potencial ϕ tal que $\nabla\phi(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$ e como o divergente do campo de velocidades é nulo, temos

$$\nabla \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}(t)) = 0 . \quad (1.5)$$

Ou seja, obtemos que laplaciano da velocidade potencial é nulo. Agora iremos definir um conjunto de condições de fronteira, que regem conjuntamente com a equação (1.5), o modelo de superfícies oceânicas. O domínio considerado é uma fronteira superior, chamada de superfície oceânica, uma fronteira inferior representando o fundo oceânico, e considera-

⁶Aqui neste caso, fluxo líquido tem o sentido de "saldo" entre o fluxo que entra e sai numa determinada região.

⁷O Teorema a Divergência diz que se E for uma região sólida simples, S a superfície fronteira de E , orientada positivamente, \mathbf{F} um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas em uma região aberta que contenha E , então, nestas condições, vale $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F} dV$.

se que o oceano é ilimitado horizontalmente. As condições 1.3.1 e 1.3.3 foram baseadas em Farina [11], e a condição 1.3.2 foi desenvolvida baseando-se em Pontes e Mangiavacchi [9] e Farina [11].

Condição 1.3.1 *Condição cinemática da superfície*

A cinemática dos fluidos trata do estudo do movimento dos fluidos sem considerar as forças que estão atuando. Seja $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ ⁸ a equação que define a superfície do oceano. Desta forma temos que a derivada material⁹

$$\frac{D(z - \eta(x, y, t))}{Dt} = 0. \quad (1.6)$$

Com isso, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\eta = 0 \quad em \quad z = \eta(x, y, t). \quad (1.7)$$

Condição 1.3.2 *Equação de Bernoulli*

É possível deduzir a equação de Bernoulli à partir da equação de Navier-Stokes:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (1.8)$$

onde ν é a viscosidade, p é um escalar representando a pressão, \mathbf{v} é o vetor velocidade, e \mathbf{g} é o vetor aceleração da gravidade. No entanto, se seguirmos a linha de pensamento da seção 1.3, e considerarmos o fluido invíscido, a equação se reduz à equação de Euler:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}, \quad (1.9)$$

considere também, a seguinte identidade:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}), \quad (1.10)$$

⁸ $\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\eta(\mathbf{x}, t) = a\sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ onde ω é a frequência angular e $\mathbf{k} = (\frac{2\pi}{\lambda_1}, \frac{2\pi}{\lambda_2})$ é o vetor número de onda, λ é o comprimento de onda e a é uma constante.

⁹Conforme pode ser encontrado em [9], o operador derivada material, quando aplicado sobre uma propriedade (calor, momento, etc) de uma partícula de um meio se movendo com velocidade \mathbf{v} , fornece como resultado a derivada total em relação ao tempo da propriedade daquela partícula em movimento. O operador derivada material é definido como $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

e como o campo de velocidades é irrotacional, o segundo termo da parte direita da equação acima se anula. Dessa forma, na equação (1.9), ao substituir (1.10), obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (1.11)$$

e como $\nabla \phi = \mathbf{v}$,

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \frac{|\nabla \phi|^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla gz \quad \text{onde} \quad \nabla z = (0, 0, 1), \quad (1.12)$$

podemos então botar o operador ∇ , em evidência

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right), \quad (1.13)$$

ao integrar a equação acima, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + gz = -\frac{p}{\rho} + A(t), \quad (1.14)$$

e tomando $A(t) = \frac{P_{atm}}{\rho}$ e tomando (1.14) na superfície, isto é, $z = \eta(x, y, t)$, temos que $p = p_{atm}$ e portanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + g\eta = 0. \quad (1.15)$$

É válido ressaltar que de eliminar a pressão da equação, é dada segundo análise de [12], e segundo análise de [11], por uma abordagem distinta. Além disso, nota-se que $\eta(x, y, t)$ é uma incógnita, e faz parte do que se quer descobrir.

Condição 1.3.3 *Condição do fundo*

Anteriormente, no nível da superfície oceânica, foi definida a função $z = \eta(\mathbf{x}, t)$. De maneira análoga, $z = \epsilon(\mathbf{x}, t)$ é definido como uma função que representa o fundo do oceano. A condição de fronteira cinemática, implica que a derivada material seja nula, isto é, esta condição requer que a superfície se mova junto com o fluido, de modo à sempre manter as mesmas partículas do fluido, ou seja,

$$\frac{D(z - \epsilon(\mathbf{x}, t))}{Dt} = 0 \quad \text{em} \quad z = \epsilon. \quad (1.16)$$

Desenvolvendo, obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \epsilon = 0 \quad \text{em } z = \epsilon. \quad (1.17)$$

Para fundos estacionários e horizontais(fixo) $\epsilon = h$, temos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -h. \quad (1.18)$$

Nota-se aqui, que o fundo ser considerado constante e fixado, é suficiente pois estamos procurando especificamente ondas do tipo swell. Porém, para estudar fenômenos que sejam altamente dependentes do tipo de fundo, como Maremotos, esta abordagem corre sério risco de se tornar ineficaz. Resumindo as condições de fronteira de $\nabla^2 \phi = 0$ temos:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \nabla \eta \cdot \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t), \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{||\nabla \phi||^2}{2} + g\eta = 0 \quad \text{em } z = \eta(x, y, t), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = -h. \quad (1.21)$$

Retomando, a primeira condição de fronteira a equação (1.19) refere-se a condição cinemática, que revela algumas informações sobre o deslocamento da superfície. A segunda condição de fronteira, (1.20) é uma versão modificada da equação de Bernoulli, e a última condição de fronteira (1.21), significa que o fundo oceânico considerado é plano, impermeável e a velocidade vertical é nula para qualquer instante e além disso, o domínio horizontal é considerado infinito.

1.3.1 Modelo linearizado

A linearização, assim como em Krogstad [12], será dada por meio de análise dimensional¹⁰, dos termos que estiverem relacionados com a esbeltez da onda, $e = \frac{A}{\lambda}$, onde A significa a amplitude e λ significa o comprimento da onda. Quando o comprimento de

¹⁰A Análise dimensional é a área da física que se interessa pelas unidades de medida das grandezas físicas e o objetivo deste assunto é relacionar as dimensões de uma grandeza física qualquer em função da dimensão das grandezas físicas elementares. Definimos da seguinte forma: G é uma grandeza física qualquer e sua unidade dimensional é $[G]$. Tomando a mecânica como exemplo, as grandezas físicas elementares são massa (M), comprimento (λ) e tempo (T), e podemos relacionar uma grandeza física qualquer como a velocidade $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e fazer sua análise dimensional, $[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{\lambda}{T}$

onda é muito maior que sua amplitude, temos que a esbeltez naturalmente tende a zero. Portanto, nesses casos, todos os termos múltiplos da esbeltez nas condições de fronteira serão eliminados. Ao fazer esse tipo de modelagem, significa que estamos reduzindo o modelo às ondas de gravidade com amplitudes pequenas. A análise dimensional da velocidade da onda aquática é dependente da amplitude A e do tempo T , e lembrando que $\mathbf{v} = (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z})$ podemos obter

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \right] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{A}{T} \quad (1.22)$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial y} \right] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{A}{T} \quad (1.23)$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial z} \right] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = \frac{A}{T} \quad (1.24)$$

Portanto, como os termos das equações (1.22), (1.23), (1.24) são independentes da esbeltez, eles não serão alterados. Sabendo que a escala da elevação da superfície é dependente da amplitude A , e do comprimento de onda λ , temos que os produtos $\frac{A}{T} \frac{A}{\lambda} = 0$, pois estamos considerando $\frac{A}{\lambda} \rightarrow 0$, logo

$$\left[\frac{\partial\eta}{\partial x} \right] = \frac{A}{\lambda} \quad (1.25)$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} \right] = \frac{A}{T} \frac{A}{\lambda} \rightarrow \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.26)$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} \right] = \frac{A}{T} \frac{A}{\lambda} \rightarrow \left[\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} \right] = 0 \quad (1.27)$$

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial\eta}{\partial z} \right] = \frac{A}{T} \frac{A}{\lambda} \rightarrow \left[\frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial\eta}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.28)$$

Portanto, pelas análises (1.26), (1.27), (1.28), na equação (1.19) o termo $\nabla\eta \cdot \nabla\phi$ é anulado e resumimos a equação como

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \text{em } z = \eta(x, y, t), \quad (1.29)$$

Da mesma forma, para linearizar (1.20), devemos fazer a análise dimensional para

o potencial de velocidades¹¹,

$$[\phi] = \frac{A\lambda}{T} \quad (1.30)$$

Logo,

$$\frac{[\partial\phi]}{[\partial t]} = \frac{A\lambda}{T.T} \quad (1.31)$$

$$\left(\frac{[\partial\phi]}{[\partial x]}\right)^2 = \frac{A^2}{T^2} = \frac{\lambda A^2}{\lambda T^2} = \frac{A\lambda}{T} \frac{1}{T} \frac{A}{\lambda} \rightarrow \left(\frac{[\partial\phi]}{[\partial x]}\right)^2 = 0 \quad (1.32)$$

$$\left(\frac{[\partial\phi]}{[\partial y]}\right)^2 = \frac{A^2}{T^2} = \frac{\lambda A^2}{\lambda T^2} = \frac{A\lambda}{T} \frac{1}{T} \frac{A}{\lambda} \rightarrow \left(\frac{[\partial\phi]}{[\partial y]}\right)^2 = 0 \quad (1.33)$$

$$\left(\frac{[\partial\phi]}{[\partial z]}\right)^2 = \frac{A^2}{T^2} = \frac{\lambda A^2}{\lambda T^2} = \frac{A\lambda}{T} \frac{1}{T} \frac{A}{\lambda} \rightarrow \left(\frac{[\partial\phi]}{[\partial z]}\right)^2 = 0 \quad (1.34)$$

Dessa forma, utilizando (1.32), (1.33), (1.34), temos que o termo $\frac{\|\nabla\phi\|^2}{2}$ será desprezado e (1.20) fica resumida como

$$\frac{\partial\phi(x, y, \eta, t)}{\partial t} + \eta g = 0 \quad (1.35)$$

Ainda, para as equação (1.20) ainda existe o empecilho de que as velocidades potenciais devem ser tomadas na superfície, e não dispomos dessa informação à priori, pois η é uma incógnita. No entanto, utilizando o Teorema de Taylor e truncando no termo de primeira ordem, obtemos para a velocidade potencial de z

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, \eta, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0, t) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(x, y, 0, t)\eta + O(\eta^2) \quad (1.36)$$

Mas

$$\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(x, y, 0, t)\eta\right] = \frac{\frac{A}{T} A}{\lambda} \rightarrow \left[\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(x, y, 0, t)\eta\right] = 0 \quad (1.37)$$

Concluindo, temos $\frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, \eta, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, 0, t)$ e isso significa ser possível remover a dependência de $z = \eta$. Da mesma forma é possível remover a dependência de η de (1.19). Finalmente, ao concluir a independência η em (1.19) (1.20), obtemos o seguinte problema linearizado:

$$\nabla^2\phi = 0 \quad -h \leq z \leq 0 \quad (1.38)$$

¹¹De fato, sabendo que $[\frac{\partial\phi}{\partial x}] = [\frac{A}{T}]$ temos que $[\int \frac{\partial\phi}{\partial x} dx] = [\phi]$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi(x, y, 0, t)}{\partial z} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, 0, t)}{\partial t} + \eta g = 0 \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y, -h, t)}{\partial z} = 0 \quad (1.41)$$

1.3.2 Solução do modelo linearizado

Supondo que uma solução para o modelo seja da forma sugerida por Farina [11] e Krogstad [12]

$$\phi = a(z) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta), \quad (1.42)$$

onde $\frac{2\pi}{T} = \omega$ é a frequência angular, e $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ representa a componente do vetor número de onda, $a(z)$ representa as amplitudes, e o ângulo de fase está representado por θ . Aplicando em (1.38) temos

$$[-k^2 a(z) + a''(z)] \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta) = 0. \quad (1.43)$$

Portanto,

$$a(z) = p e^{kz} + q e^{-kz}, \quad (1.44)$$

e tomando

$$p = \frac{e^D c}{2} \quad q = \frac{e^D c}{2}, \quad (1.45)$$

obtemos

$$a(z) = c \frac{e^{kz+D} + e^{-kz-D}}{2} = c \cosh(kz + D). \quad (1.46)$$

Aplicando em (1.41) temos

$$\frac{\partial \phi(x, y, -h, t)}{\partial z} = 0 = a'(-h) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta), \quad (1.47)$$

e conseqüentemente

$$a'(z) = 0 \rightarrow kc \sinh(kz + D) = 0 \quad \text{em } z=-h \rightarrow D = -hk. \quad (1.48)$$

Portanto, conseguimos determinar o valor de D. Temos então,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = c[\cosh(kz - hk) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta)]. \quad (1.49)$$

Da equação (1.40) encontramos uma equação para η

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \omega c \cosh(kz - hk) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta_0) = -g\eta. \quad (1.50)$$

Agora, obtemos para $z = 0$

$$\eta(\mathbf{x}, t) = -\frac{\omega}{g} c \cosh(-hk) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta), \quad (1.51)$$

ou seja, se aplicarmos as equações obtidas (1.49), (1.51) em (1.39)

$$c \frac{\omega^2}{g} \cosh(hk) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta) = kc \sinh(kz) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta). \quad (1.52)$$

Ao fazermos algumas simplificações, obtemos a famosa relação de dispersão

$$\omega^2 = gk \tanh kz. \quad (1.53)$$

A importância desta relação é que ela expressa que ω é dependente de k . Ou mais especificamente, a frequência angular, está atrelada ao número de onda.

Sabemos de (1.40) que

$$\eta(\mathbf{x}, t) = -\frac{c\omega}{g} \cosh(hk) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta), \quad (1.54)$$

tomando $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e $l = -\frac{c\omega}{g} \cosh(hk)$ temos

$$\eta(\mathbf{x}, t) = l(\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \sin(-\frac{\pi}{2})). \quad (1.55)$$

Ou seja

$$\eta(\mathbf{x}, t) = -\frac{c\omega}{g} \cosh(hk) \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.56)$$

e como

$$\eta(\mathbf{x}, t) = a \sinh(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.57)$$

temos que $a = a(0) = -\frac{c\omega}{g} \cosh hk$

$$c = -\frac{ag}{\omega \cosh(hk)}.$$

Substituindo, obtemos finalmente que

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{ag}{\omega \cosh(hk)} \cosh(k(z + h)) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta), \quad (1.58)$$

e assim removemos a variável desconhecida c da equação. Resumindo, conseguimos definir ϕ (e por consequência, o campo vetorial de velocidades), η , e a relação de dispersão.

1.3.3 Observações sobre águas rasas e águas profundas

A relação de dispersão (1.53) sofre influência significativa dependendo da profundidade estudada, isso ocorre devido à tangente hiperbólica. Seja h uma constante representando a profundidade do oceano e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Podemos escrever então, $kh = \frac{2\pi h}{\lambda}$. Se kh é pequeno, então $h \ll \lambda$ ou seja, o comprimento da onda é bem maior que a profundidade e isso corresponde à águas rasas. Aplicando a relação de dispersão, e notando que $\tanh kh \rightarrow kh$ temos

$$\omega^2 = g h k^2 \quad (1.59)$$

Esta relação acima geralmente é utilizada quando $h < \frac{\lambda}{20}$. Se kh for grande, a mesma análise pode ser aplicada para concluir que este contexto representará águas profundas. Ainda, para valores altos de kh , $\tanh kh \rightarrow 1$ a relação de dispersão fica resumida abaixo, e é utilizada quando $h > \frac{\lambda}{2}$

$$\omega^2 = g k \quad (1.60)$$

1.4 Discussões sobre outros fatores importantes

O objetivo principal desta Seção, é trazer num grau mínimo de detalhes, alguns mecanismos que não foram tratados imediatamente nas Seções anteriores. Entre estes mecanismos está o mecanismo físico da criação de vorticidade e dissipação de energia na Seção 1.4.1. Na subseção seguinte, trata-se de iniciar abordagem alternativa em que não se considera-se a densidade constante, em contraposição com a Seção 1.3. Posteriormente, é discutido com maior detalhes o movimento das ondas, contido na Subseção 1.4.3. Por fim, é descrito matematicamente em 1.4.4 como se obtém a equação da energia mecânica média das ondas, e essa relação é particularmente útil para relacionar o espectro de ondas do Capítulo 2.

1.4.1 Aprofundamento sobre os mecanismos de vorticidade e efeitos viscosos

A análise desta Subseção é baseada em Pontes e Mangiavacchi [9], e nesta referência é possível encontrar mais detalhes sobre o assunto, incluindo alguns passos intermediários que foram omitidos nesta seção. O objetivo desta Seção é resumir os mecanismos que dão origem à vorticidade, ou seja, ao movimento de rotação de um fluido. A hipótese de irrotacionalidade está enraizada de forma significativa no modelo determinístico encontrado, portanto, é natural que haja uma aprofundamento do assunto visando entender a consistência desta hipótese. Dado o fluxo Γ do campo vetorial $(\nabla \times \mathbf{v})$ orientado sobre uma superfície A com vetor unitário \mathbf{n} podemos escrever

$$\Gamma(t) = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (1.61)$$

Os extremos dessa superfície A , definem uma curva fronteira C . Supondo que todas as condições matemáticas necessárias são satisfeitas, podemos aplicar o Teorema de Stokes¹² em (1.61), podemos escrever

$$\Gamma(t) = \int_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.62)$$

Esta equação diz que a circulação do vetor velocidade ao longo da fronteira C , é igual ao fluxo do do vetor rotacional. Ou seja, sempre que houver circulação na fronteira, haverá rotacional na região interna da superfície. Derivando esta equação do fluxo de vorticidade, obtemos

$$\frac{D\Gamma(t)}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} dp + \oint_C \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_i$$

onde p representa a pressão, ρ representa a densidade, τ_{ij} representa o tensor das tensões. Na ausência de efeitos viscosos, a segunda integral da equação acima se anula, pois a variação do tensor de cisalhamento é zero. Obtemos então,

$$\frac{D\Gamma(t)}{Dt} = - \oint_C \frac{1}{\rho} dp. \quad (1.63)$$

¹²Seja A uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva fechada C , simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja $(\nabla \times \mathbf{v})$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de \mathbb{R}^3 que contém A . Então, temos $\iint_A (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$, onde $d\mathbf{l}$ é o elemento infinitesimal de comprimento de arco desta curva C

Quando não há variação de entropia¹³, a integral $-\oint_C \frac{1}{\rho} dp$ se anula. A circulação é diferente de zero quando há variação de entropia e pode ocorrer em processos reversíveis como variação de temperatura ou em processos irreversíveis. Estes processos ocorrem por exemplo quando massas de água com salinidades diferentes se misturam e quando os efeitos viscosos e as variações de entropia são desprezíveis obtemos

$$\frac{D\Gamma(t)}{Dt} = 0. \quad (1.64)$$

Esta última Equação mostra que sempre que os efeitos viscosos e de variação de entropia são irrelevantes, teremos que $\Gamma(t) = cte$. Levando em conta (1.62), e ao considerar o campo vetorial \mathbf{v} como contínuo, no caso em que $\oint_C \mathbf{v}(t_0) \cdot d\mathbf{l} = 0$ em algum ponto t_0 , como $\Gamma(t) = cte$, teremos $\Gamma(t) = 0$ para qualquer ponto. Por outro lado, se $\oint_C \mathbf{v}(t_0) \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, então $\Gamma(t) \neq 0$, ou seja, a circulação se conserva quando a massa se desloca. Porém, dado que existe energia livre de um fluido, seja ela cinética, potencial, térmica, ou advinda de diferenças de concentração (salinidades distintas) ou até mesmo de fluidos com composição química diferente, a energia que não for dissipada por caminhos alternativos de dissipação num primeiro momento, irá produzir vórtices por efeitos viscosos ou de variação de entropia do fluido. Estes vórtices por sua vez irão se quebrar em vórtices menores por dissipação de efeitos viscosos, independente dos efeitos não lineares. Finalmente, esta energia livre que passou por este processo se torna energia interna. O mecanismo de quebra em vórtices menores, pode ser representado matematicamente supondo que a vorticidade possa ser decomposta numa base de harmônicos, onde a_r é uma constante qualquer, j é a unidade imaginária, k é o número de onda, \mathbf{e}_r representa um vetor da base canônica de dimensão m .

$$v_i = \sum_{r=1}^m a_r \exp(jrkx_i) \mathbf{e}_r. \quad (1.65)$$

Considere o termo não linear da Equação (1.8)

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

¹³ A entropia, é uma grandeza termodinâmica que mensura o grau de irreversibilidade de um sistema termodinâmico. No livro [9] existe a relação $-\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C T ds$, onde T representa temperatura e ds o elemento infinitesimal de entropia. Portanto, esta equação se anula quando não há variações de entropia (processos isoentrópicos)

este termo, ao ser colocado na base dos harmônicos e aplicados na fórmula acima

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} &= a_1^2 [jk(\exp(jkx_i) \exp(jkx_i))] \mathbf{e}_1 + a_2^2 [jk(\exp(j2kx_i) \exp(j2kx_i))] \mathbf{e}_2 \\ &\dots + a_m^2 [jk \exp(jmkx_i) \exp(jmkx_i)] \mathbf{e}_m, \end{aligned} \quad (1.66)$$

ao somar os expoentes, encontramos

$$v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = a_1^2 [jk \exp(j2kx)] \mathbf{e}_1 + a_2^2 [jk \exp(j4kx)] \mathbf{e}_2 + \dots a_m^2 [jk \exp(j2mkx_i)] \mathbf{e}_m. \quad (1.67)$$

Repare que o lado direito da equação acima pode ser escrito da seguinte forma

$$v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = b_1 [\exp(j2kx_i)] \mathbf{e}_1 + b_2 [\exp(j4kx_i)] \mathbf{e}_2 + \dots b_m [\exp(j2mkx_i)] \mathbf{e}_m. \quad (1.68)$$

que é similar ao lado direito de (1.65). Temos então

$$v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^m b_r \exp(j2rkx_i) \mathbf{e}_r, \quad (1.69)$$

ao repetir o processo sucessivamente, calculando novamente $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, o fator que multiplica no número de onda k , continuará aumentando, e isso significa que o comprimento de onda λ está diminuindo, pois $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Sabe-se que $Re = \frac{v\lambda}{\nu}$, portanto, os efeitos viscosos estão aumentando e $Re \rightarrow 0$.

Conclui-se segundo Pontes e Mangiavacchi [9], que para número de Reynolds baixo os efeitos dissipativos se manifestam e quebram o vórtice por causa dos efeitos viscosos.

1.4.2 Aproximação de Boussinesq

As análises presentes nesta subseção são baseadas em Mc Williams [13]. É razoável supor que a densidade tenha dependência da temperatura, salinidade e pressão, ou seja, $\rho(T, S, p)$. Ao tomar o modelo na superfície oceânica, podemos considerar a pressão $p = p_{atm}$ constante e portanto $\rho(T, S)$. Podemos expandir $\rho(T, S)$ em séries de Taylor, em relação ao ponto de referência $\rho_0(T_0, S_0)$ e truncando na primeira ordem, obtendo

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \left(-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) (T - T_0) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial S} (S - S_0) \right], \quad (1.70)$$

adquirindo assim a equação de Boussinesq. Repare que o termo ρ_0 foi colocado em evidência e o sinal do primeiro termo da equação acima foi invertido para que os termos $-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ e $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial S}$ ganhem significado físico sem alterar o resultado gerado pela série de Taylor. De fato o primeiro, é chamado de coeficiente de expansão térmica e o segundo é chamado de coeficiente de contração de salinidade. Analisaremos agora, segundo Pontes e Mangiavacchi [9], as principais equações dos fluidos, levando em conta essa nova abordagem descrita acima. A ideia agora é utilizar a equação de Boussinesq para acoplar a equação da temperatura à equação de Navier-Stokes. No entanto apenas no termo gravitacional a equação de Boussinesq é relevante e além disso, a equação $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ se mantém. Com isso, temos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T_0) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial S} (S - S_0) \right] \\ \frac{DT}{Dt} &= \alpha \nabla^2 T \\ \frac{DS}{Dt} &= \beta \nabla^2 S\end{aligned}$$

onde α e β são constantes de difusividade.

1.4.3 Dedução da movimento orbital das ondas

Ao derivar a equação dos potenciais (1.58) em relação a ao eixo x e ao eixo z (ondas planas) Farina [11] e Krogstad [12], temos

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh hk} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta) \quad (1.71)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk}{\omega} \frac{\sinh k(z+h)}{\cosh hk} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta) \quad (1.72)$$

$$q1 = \int u dt \quad e \quad q2 = \int w dt \quad (1.73)$$

$$q1 = -\frac{agk}{\omega^2} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh hk} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta) \quad (1.74)$$

$$q2 = \frac{agk}{\omega^2} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh hk} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \theta) \quad (1.75)$$

Definindo

$$p1 = -\frac{agk \cosh k(z+h)}{\omega^2 \cosh hk} \quad e \quad p2 = \frac{agk \cosh k(z+h)}{\omega^2 \cosh hk} \quad (1.76)$$

e considerando apenas os efeitos para águas profundas, isto implicará que $\cosh hk \rightarrow \frac{e^{kz}}{2}$ e $\sinh hk \rightarrow \frac{e^{kz}}{2}$ para valores altos de h . Para calcular os deslocamentos na horizontal e na vertical, devemos obter a equação da circunferência

$$\left(\frac{q1}{p1}\right)^2 + \left(\frac{q2}{p2}\right)^2 = 1. \quad (1.77)$$

A equação da circunferência é um caso particular da equação da elipse. De fato, se quiser se considerar um cenário em águas rasas, temos que $p1 \neq p2$ e a trajetória se aproxima de uma elipse mais achatada.

1.4.4 Energia das ondas

A energia das ondas em uma coluna vertical de água, é expressa pela densidade da energia mecânica. A energia total do sistema de ondas planas em águas profundas nessa coluna é

$$E = \rho \left(\int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} (u^2 + w^2) dz + \int_0^{\eta} g z dz \right) \quad (1.78)$$

Repare que h é um valor grande e suponha que η é um valor bem pequeno (ondas de baixa amplitude). A região de integração é definida como em Farina [11]. O resultado da equação (1.70) é

$$E = \frac{agk\rho}{4\omega} (e^{2k\eta} - e^{2k(-h)}) + \frac{\rho g(\eta^2 - 0^2)}{2} \quad (1.79)$$

Resumindo, e lembrando que $\eta \rightarrow 0$ e $-h \rightarrow -\infty$

$$E = \frac{agk\rho}{4\omega} + \frac{\rho g\eta^2}{2} \quad (1.80)$$

e tomando o valor médio da energia E , segundo Farina [11], obtemos a importante relação

$$\langle E \rangle = \rho g \langle \eta^2 \rangle \quad (1.81)$$

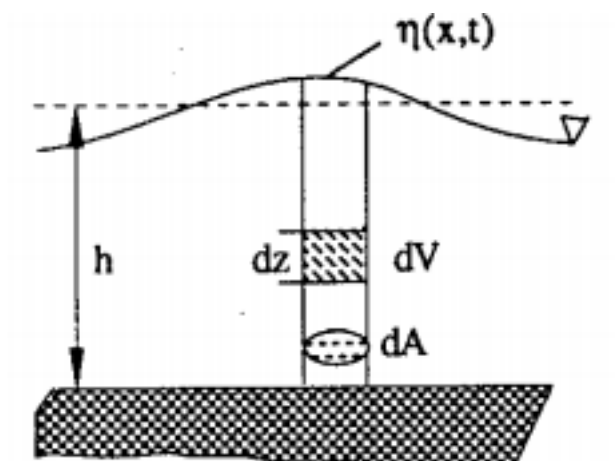


Figura 5 Coluna vertical de água
Fonte: Figura retirada de [11]

2 TEORIA ELEMENTAR DO ESPECTRO DE ONDAS

2.1 Introdução

A modelagem feita no capítulo anterior, é puramente determinística. Para obter uma solução, devido à não linearidade, foi necessário fazer algumas simplificações para ser viável obter uma solução. É possível, que ao fazer estas modificações, haja perda de informação, e portanto, é interessante desenvolver uma nova teoria, baseada nas ideias anteriores. Uma descrição menos enviesada sobre o comportamento das ondas, é dado pelo somatório de um número extenso de ondas regulares independentes, e pode ser ilustrada como na Figura 6. A onda regular é definida como uma onda do tipo seno ou cosseno com amplitude e fase bem definidas. Esta nova descrição, leva naturalmente a uma abordagem estatística, e baseia-se principalmente no conceito de espectro de densidade de variância da superfície oceânica. Este espectro revela como as elevações da superfície podem ser distribuídas sobre as frequências dos componentes da onda que criam as flutuações da superfície. Este desenvolvimento se mostrou um importante avanço para obter informações sobre ondas no oceano.

Na Subseção 2.2, foi introduzida a transição do modelo determinístico para um processo estocástico. Posteriormente, através do conceito de variância foram definidos os espectros, e este conceito foi relacionado com a energia de um sistema. Posteriormente, na Subseção 2.3.1, foi introduzida uma nova abordagem através do espectro da Transformada de Fourier e na 2.3.2 relaciona-se o espectro de ondas com fenômenos naturais. O espectro começa a ser aprimorado em 2.3.3 através do parâmetro de energia espectral. Na Subseção 2.3.4, o conceito de espectro direcional começa a ser delineado, e em 2.3.5, o conceito de direção média do espectro é definido baseado na subseção anterior. Na Seção 2.4.1, através do conceito de momento de uma função, são definidas expressões que são normalmente utilizadas por observadores em navios por exemplo, mas que também são relevantes para obter informações de uma maneira geral. O objetivo da Seção 2.5, é definir o conceito de espectro cruzado, de forma a ser uma generalização do conceito do espectro definido anteriormente. Este novo conceito, é um método mais poderoso que o anterior, e inclusive, é possível fazer maiores relações sobre os coeficientes de Fourier e uma parte do espectro cruzado.

2.2 Modelo fase/amplitude aleatório

Boias são capazes de medir a elevação da superfície oceânica. Ao fazer esta medição, elas guardam um registro de todas estas elevações da superfície ao decorrer do tempo. É possível reproduzir este registro utilizando a superposição de um número enorme de ondas regulares (ondas do tipo seno ou cosseno com fase e amplitude bem definidas) em que a_i representa as amplitudes, ω_i as velocidades angulares e α_i os ângulos de fase. Esta nova modelagem, considera a amplitude e o ângulo de fase como variáveis aleatórias e para definir o processo estocástico, é preciso definir as funções de densidade de probabilidade destas variáveis aleatórias ¹⁴

Definição 2.2.1 *Seja uma variável aleatória X , tal que uma função associada a ela $f_X(x)$ é não negativa para todos os valores x pertencentes a algum domínio. Além disso, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ e para $a \leq X \leq b$, temos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$. Ao cumprir estas condições, f_X será a função densidade de probabilidade da variável aleatória X*

Em Holthuijsen [15], foi utilizado a distribuição de Rayleigh para as amplitudes e distribuição uniforme para os ângulos de fase por razões experimentais, e distribuições similares são usualmente empregadas para definir o processo estocástico. De fato, em Alpers [16], foi utilizado um método de Monte Carlo para obter informações sobre a relação entre ondas oceânicas e o espectro obtido pelo SAR. Neste artigo, foi utilizada uma distribuição normal (é um caso particular da distribuição de Rayleigh) e uma uniforme para os mesmos parâmetros. Dessa forma, é possível estimar que estas distribuições sejam adequadas para descrever tais variáveis aleatórias. Além disso, é feita uma hipótese adicional de que estas variáveis aleatórias são independentes, e portanto a distribuição de probabilidades do processo estocástico é simplesmente o produto destas duas distribuições. Esta hipótese funciona bem para águas profundas, porém, para águas rasas, conforme é constatado em Holthuijsen [15], essa hipótese de independência se torna menos consistente. O registro da boia, pode ser modelado pela seguinte equação, onde $\eta(t)$ representa as elevações da superfície oceânica no instante t , f_i representa as frequências, a_i representa as amplitudes

¹⁴Uma variável aleatória é um mapeamento do espaço amostral no conjunto dos números reais. Outros conceitos estatísticos são definidos em [14]

da superfície oceânica e α_i representa os ângulos de fase

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(2\pi f_i t + \alpha_i). \quad (2.1)$$

Sabendo que $D = \frac{i}{f_i}$ e supondo que a série convirja uniformemente¹⁵ para $\eta(t)$, temos que ao aplicar o cosseno da soma e fazendo algumas simplificações obtemos

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(2\pi f_i t) + B_i \sin(2\pi f_i t), \quad (2.2)$$

onde utilizando de análise de Fourier, para N suficientemente grande, e supondo que todas as hipóteses de convergência e integrabilidade sejam satisfeitas como em Figueiredo [17], obtemos

$$A_i = \frac{2}{D} \int \eta(t) \cos(2\pi f_i t) dt \quad B_i = \frac{2}{D} \int \eta(t) \sin(2\pi f_i t) dt, \quad (2.3)$$

$$A_i^2 + B_i^2 = a_i^2 \quad \tan \alpha_i = -\frac{B_i}{A_i}. \quad (2.4)$$

Portanto, podemos encontrar todos os a_i e α_i , e assim, substituindo na Equação (2.1), obtemos o registro. Repare que para utilizar análise de Fourier não é necessário que o modelo seja randômico. Por outro lado, considerando as distribuições densidade de probabilidade das entrada a_i e α_i , podemos obter por análise de Fourier a função densidade de probabilidade de saída $\eta(t)$ das elevações da superfície oceânica. Expandimos o modelo de fase/amplitude aleatória como Holthuijsen [15], e considerando que devido à hipótese de homogeneidade, qualquer cenário caótico da superfície poderia ser traduzido como uma soma de ondas regulares que se propagam no plano (x, y) , com diferentes amplitudes, fases e frequências, nas mais diversas direções (tomando como referência o eixo x no primeiro quadrante) assim como na Figura 6. Ou seja, agora podemos obter um registro em função da dimensão temporal e das dimensões espaciais do plano de ondas regulares (2.6).

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P a_{m,n,p} \cos(\omega_m t - k_n x \cos \theta_p - k_n y \sin \theta_p + \alpha_{m,n,p}). \quad (2.5)$$

Porém, como ω e k estão relacionados pela relação de dispersão, esta equação pode ser

¹⁵Como a série converge uniformemente e $a_i \cos(2\pi f_i t + \alpha_i)$ é contínuo, temos que $\eta(t)$ é contínuo, conforme pode ser encontrado em [17]

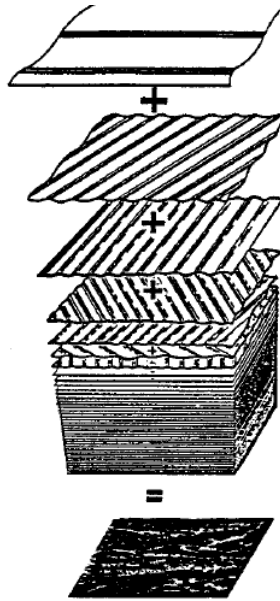


Figura 6 Decomposição de um estado de mar numa soma de planos de ondas regulares

Fonte: Figura retirada de [18]

simplificada reduzindo os índices

$$\eta(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P a_{m,p} \cos(\omega_m t - k_m x \cos \theta_p - k_m y \sin \theta_p + \alpha_{m,p}). \quad (2.6)$$

2.3 Espectro de onda

Através do espectro de onda, é possível separar as informações, como por exemplo de dois tipos com ondas diferentes através da frequência, direção, número de onda, etc. Ondas Swell são ondas "velhas", sem atuação do vento, e podem ser comparadas com ondas regulares, tendo como característica frequências bem mais baixas do que uma onda ainda em formação. Segundo Holthuijsen [15], ondas regulares formam um espectro mais estreito e "afiado", e ondas com maior irregularidade tem o espectro achatado e com maior área, e portanto é possível categorizar os tipos de onda quanto à regularidade das ondas do espectro, num cenário misto com vários tipos de onda atuando. Além disso, o espectro é melhor representado pela variância¹⁶ das amplitudes do que em relação à esperança¹⁷ das amplitudes.

$\text{Var} \{\eta(t)\}$, que é equivalente¹⁸ a $E \left[\frac{a_i^2}{2} \right]$ será distribuído sobre as frequências,

¹⁶A variância de uma variável aleatória X é definida como $\text{Var} \{X\} = E \{X^2\} - E \{X\}^2$

¹⁷A notação $\langle . \rangle$ será usada alternativamente para falar da esperança de uma variável aleatória

¹⁸A afirmação de que $(\text{Var}) = E[\eta^2] = \sum_{i=1}^N E[\frac{1}{2} a_i^2]$, pode ser encontrada em [15] e só é válido quando

visando remover posteriormente a dependência da banda Δf_i em relação ao espectro total. Ao dividir $\text{Var}(\eta_i)$ pela variação da frequência, temos a densidade da variância da elevação da superfície e portanto, o espectro em função da frequência $S^*(f_i)$, é definido como a variação da variância da elevação da superfície em relação à banda Δf_i

$$S^*(f_i) = \frac{1}{\Delta f_i} E \left\{ \frac{a_i^2}{2} \right\}. \quad (2.7)$$

No entanto, considerando o modelo fase/amplitude aleatório apenas na dimensão da frequência, temos que uma onda um estado de mar pode ser modelado como a superposição de ondas regulares, e como a variância da soma é a soma das variâncias, ao somar um número suficientemente grande de frequências N , teríamos a variância total da elevação da superfície, que é o conceito relacionado ao espectro de densidade de frequências $S(f)$.

$$S(f) = \frac{1}{\Delta f_i} \sum_{i=0}^N E \left\{ \frac{a_i^2}{2} \right\} = \frac{1}{\Delta f_i} \sum_{i=0}^N \langle \eta_i(t)^2 \rangle. \quad (2.8)$$

Quando $\Delta f_i \rightarrow 0$ podemos aplicar o conceito de integral e escrever a Equação (2.8) como

$$\int_0^\infty S(f) df = \langle \eta(t)^2 \rangle, \quad (2.9)$$

onde $\langle \eta(t)^2 \rangle = \sum_{i=0}^N \langle \eta_i(t)^2 \rangle$ significa que a soma das variâncias é a variância da soma. A necessidade destes parâmetros estarem bem distribuídos vem da interpretação da integral, pois caso as diferenças Δf_i não seja infinitesimais, para algum índice, significaria que alguma onda estaria predominando sobre as demais, tornando de alguma forma a leitura do espectro enviesada. Ainda, relacionar a definição matemática de espectro com os fenômenos naturais que ocorrem no oceano não é trivial. Contudo, podemos comparar a definição de espectro de frequências com o conceito de energia mecânica média definida em (1.81). Então, segundo Holthuijsen, é dado origem ao conceito de espectro de densidade de energia, onde

$$S_{\text{energia}} = \rho g S(f),$$

e esta definição cria uma ponte entre $S(f)$ e os conceitos físicos. Apenas com a intenção de complementar, é possível expandir essa teoria para mais dimensões, e para o caso (2D),

o o processo é estacionário, homogêneo e $E[\eta] = 0$

considerando frequência e direção, temos

$$\langle \eta^2 \rangle = \iint S(f, \theta) df d\theta. \quad (2.10)$$

Por fim, como ω e k estão relacionados linearmente pela relação de dispersão (1.53), e fazendo um simples cálculo da matriz jacobiana¹⁹, obtemos

$$S(k) = S(\omega) \frac{d\omega}{dk}$$

e como $\omega = 2\pi f$

$$S(\omega) = S(f) \frac{df}{d\omega}$$

2.3.1 Definição do espectro de ondas por Transformada de Fourier

Na subseção anterior, foi feita uma construção mais intuitiva do conceito de espectro densidade de frequência, usando simples conceitos estatísticos. O objetivo agora é tentar definir o espectro através de métodos matemáticos mais poderosos, alinhando o significado teórico de transformada de Fourier com a modelagem. Esta nova abordagem foi inspirada em Gardiner [19], porém, também pode ser encontrada de forma mais clara H. Von Storch e Zwiers [20] e se utiliza da função de autocorrelação²⁰. A definição de autocorrelação é

$$C(t, t + \tau) = \langle [X(t) - \langle X(t) \rangle] [X(t + \tau) - \langle X(t + \tau) \rangle] \rangle \quad (2.11)$$

Para intervalos relativamente curtos de medição, normalmente podemos considerar a região do oceano que está sendo medida como um processo estacionário²¹ e homogêneo. Ao considerar o processo como estacionário, isto implica que a elevação do oceano não

¹⁹neste caso $\frac{d\omega}{dk}$ é a jacobiana ver [15]

²⁰A variância e a média são medidas estatísticas que de forma isolada não são capazes de fornecer informações sobre a dinâmica de um problema. Neste sentido, a função de autocorrelação revela a influência da variável aleatória $\eta(t)$ sobre a outra variável aleatória $\eta(t + \tau)$. A função autocorrelação tem ligação com o espectro da transformada de Fourier. Definindo $S(f) = \mathcal{F}[G(\tau)]$ onde $G(t) = f(-t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t + \tau) d\tau$ é a função de autocorrelação. Fazendo $G(\tau) = \langle \eta(t) \eta(t + \tau) \rangle = E[\eta(t) \eta(t + \tau)]$ e temos $G(0) = \langle \eta^2 \rangle$ [21]

²¹Frequentemente, para intervalos não muito grandes de tempo considera-se o processo estacionário. A definição de processo estacionário é que os parâmetros estatísticos são independentes do instante t , dependendo portanto, apenas das variações no tempo, e além disso, os valores esperados são nulos, a definição de homogêneo é semelhante à de estacionário porém dependente do deslocamento espacial [20]

depende diretamente de t , e sim depende da variação de cada instante. Embasado em Gardiner [19], concluimos que $E\{X(t)\} = 0$ e

$$C(\tau) = E[(X(t)(X(t + \tau))]. \quad (2.12)$$

Ao aplicarmos no nosso problema, podemos definir o espectro como

$$S_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \exp(-i2\pi f \tau) d\tau. \quad (2.13)$$

Ao inverter a transformada de Fourier, e fazendo $\tau = 0$

$$C(0) = E\{\eta^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(f) df = \int_0^{\infty} S(f) df. \quad (2.14)$$

Esta equação pode ser aproveitada para obter o espectro direcional de frequências, definido mais a frente. Além disso, repare que $C(\tau)$ contém todas as covariâncias da função densidade de probabilidade conjunta de $\eta(t)$ e $\eta(t + \tau)$ para todos valores de t . Isso significa que do ponto de vista estatístico o problema está completamente bem posto. Este fato se baseia no fato de que é possível inverter²² a transformada e obter $C(0)$.

2.3.2 Propriedades do espectro e suas relações com fenômenos naturais

Sabe-se que o espectro de frequência de onda atinge seu máximo numa determinada frequência, chamada frequência de pico, e se reduz para frequências maiores e menores que esta. O espectro está associado muitas vezes com o conceito de regularidade definido por Massel [8], e isso se traduz através da lei de potências²³ $S(\omega) \propto \omega^{-n}$ conforme em Holthuijsen [15]. A interação entre o vento e a superfície oceânica transfere energia para o oceano em forma de onda. No entanto, esta transferência não é infinita, ou seja, após uma onda atingir seu ponto de saturação, ela quebra e conseqüentemente dissipa a energia. Outro mecanismo de dissipação natural entre ondas ocorre através da interação de ondas capilares e ondas de maior porte. Neste caso, as ondas capilares roubam a energia das ondas maiores, limitando o tamanho da crista de ondas em formação. Em águas profundas, a dissipação toma a forma de “whitecaps” e ocorrem quando duas cristas das

²²Repare que $S_2(-f) = S_2(f)$ e $C(\tau) = C(-\tau)$ então para valores positivos da frequência temos $2S_2(f) = S(f)$

²³ ∞ significa proporcional

ondas se sobrepõe ou quando ondas menores sobem em cima das cristas das ondas maiores, e uma excelente fonte para este assunto encontra-se em Massel [8]. A quebra das ondas é responsável por boa parte das trocas de energia mecânica e térmica no oceano. Phillips [22] teorizou que o efeito das quebras das ondas no espectro é dominado principalmente pela ação da gravidade (g) e pela frequência angular (ω). Nas palavras do autor, existe uma faixa de saturação em que existe uma situação de equilíbrio entre a energia dissipada pela quebra das ondas e pela energia adquirida pelo vento,

$$S(\omega, g) \propto g^\alpha \omega^\beta. \quad (2.15)$$

Para determinar α e β , Holthuijsen [15] sugere uma simples análise dimensional. De fato, $[S(\omega)] = \frac{m^2}{Hz}$ ou mais especificamente $[S(\omega)] = m^2 s$, $[g^2] = \frac{m}{s^2}$, $[\omega] = \frac{1}{s}$. Portanto, podemos afirmar que $\alpha = 2$ e $\beta = -5$. Logo, temos

$$S(\omega) \propto g^2 \omega^{-5}. \quad (2.16)$$

De forma geral, o formato do espectro de frequência depende de muitos fatores, entre eles, velocidade do vento, a duração da atuação da região de atuação do ventos (fetch wind), profundidade do oceano, presença de swells, fricção com o fundo, mecanismos de dissipação de energia, como quebra de ondas, e a influência do estágio da tempestade. Portanto, em 1964, Pierson-Moskowitz [23] recolocou a questão, inspirado no Artigo de Kitaigorodskii [24], da seguinte forma

$$S(\omega, g, U, X), \quad (2.17)$$

onde X representa o comprimento do fetch wind, U originalmente representa a fricção com o vento, porém, no próprio artigo de Hasselmann [1], ele considera que não é prático fazer este tipo de medição na superfície oceânica. A medição U então é adotada como a medição do vento pelo anemômetro do navio, e teoriza-se que estas medições carregam as propriedades de fricção. No entanto, o artigo ressalta que como esse equipamento se localiza a uma altura considerável da superfície oceânica, isto cria certamente alguma perda de informação. De fato, Hasselmann [1] comenta que a fricção e a velocidade estão

relacionadas pelo coeficiente de Drag²⁴. No famoso artigo de Pierson e Moskowitz [23], afirma-se que $\omega' = \frac{U\omega'}{g}$ e que o espectro deve ser da forma como definido em Bretschneider [25], seguindo a distribuição de Weibull de densidade de probabilidade, onde a , b são m constantes e f representa a frequência,

$$S(f) = af^{(-m-2)}e^{-bf^{(-m-1)}}, \quad (2.18)$$

esta última equação, ao respeitar (1.14), sugere que $m = 3$, pois f é proporcional a ω^{-5} , e lembrando que $\omega = 2\pi f$. Desta forma, ao substituir na equação acima,

$$S(\omega) = \frac{ABe^{-B\frac{\omega_0}{\omega^4}}}{\omega^5}. \quad (2.19)$$

Ainda, no artigo de Pierson-Moskowitz, faz-se claro a importância de ω^5 . Pois caso ω^4 ou $\omega^{4,5}$, as ondas se quebram e conseqüentemente a energia é dissipada. Se ω^6 então ocorre formação de vórtices e dissipação por efeitos viscosos até retornar ao fator f^5 . Por fim, ao buscar otimizar o espectro no sentido de encontrar a melhor função possível, foi encontrado

$$S(\omega) = \left(\frac{ag^2}{\omega^5}\right) e^{-b\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4}, \quad (2.20)$$

onde foi definido $\omega_0 = \frac{g}{U_{19,5}}$ e $B = 0,74$ e $A = 0,0081$. Posteriormente, em Hasselmann 1973 [1], foi feita uma análise do experimento feito por Pierson-Moskowitz, e concluiu que mais da metade dos dados utilizados não estavam num estado de mar completamente desenvolvido. Após retirar estes dados, argumentou que o espectro é melhor definido por ω^{-4} , que teve suporte dos estudos de Toba 1973 [26], e posteriormente confirmado por Phillips com auxílio de outra modelagem [27]. Esta discussão é bem mais aprofundada em Massel [8].

2.3.3 JONSWAP (Joint North Sea Wave Project)

Originalmente, segundo Hasselmann [1], a busca pelo aprimoramento dos espectros de frequência unidimensionais foi investigada através do método dos mínimos quadrados

²⁴O coeficiente de Drag é dado por $u_* = c_h U_h$. A interpretação desta equação é que u_* pode ser interpretado como a tensão de cisalhamento, e a constante de Drag, relaciona esta tensão com o valor obtido pelo anemômetro de altura h . A abordagem original de Kitaigorodiskii não leva em consideração a temperatura, porém, dados de Hasselmann [1] mostram que o coeficiente de Drag é afetado pela temperatura

para ajustamento de curva. No entanto, o propósito desta função de aprimoramento não foi diretamente para melhorar a forma do espectro e sim para reduzir um conjunto de frequências redundantes. Foram testadas diversas formas funcionais, e a que se ajustou bem aos espectros testados durante condições ideais, foi utilizando o fator γ , que representa a taxa da energia espectral máxima, multiplicado pela fórmula do espectro encontrado no artigo do Pierson Moskowitz [23]. Esta fórmula obtida artificialmente, tem como característica ajustar melhor as medições, assim como pode ser visto na Figura 7 e

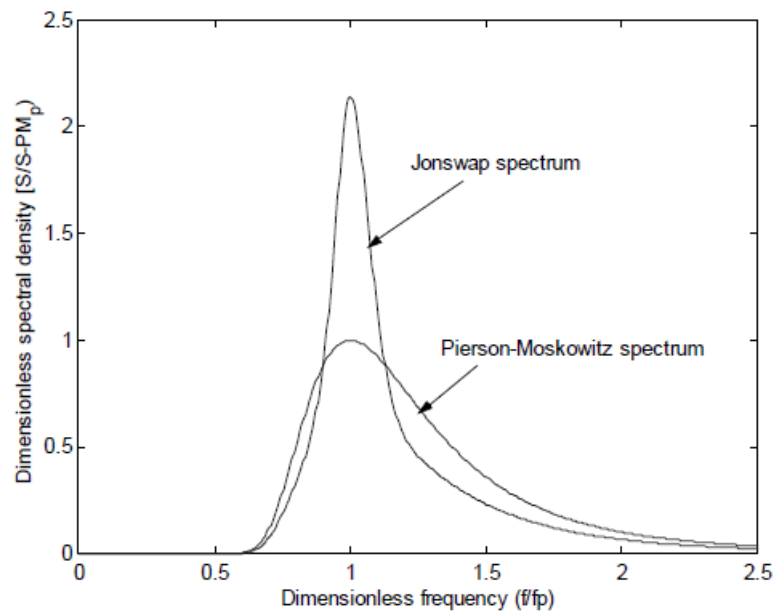


Figura 7 Espectro de frequência melhorado pelo fator γ
Fonte: Figura retirada de [1]

pode ser caracterizado conforme visto nas equações abaixo

$$S(f) = S_{PM} \gamma^q \quad (2.21)$$

$$q = e^{\frac{-(f-f_p)^2}{(2\sigma^2 f_p^2)}} \quad (2.22)$$

onde o fator

$$\sigma = \sigma_a \text{ se } f \leq f_m$$

$$\sigma = \sigma_b \text{ se } f > f_m$$

e σ_a σ_b é a parte esquerda e direita, respectivamente, da largura do espectro em relação ao pico da frequência, conforme pode ser visto na Figura 7. Além disso, o artigo reforça

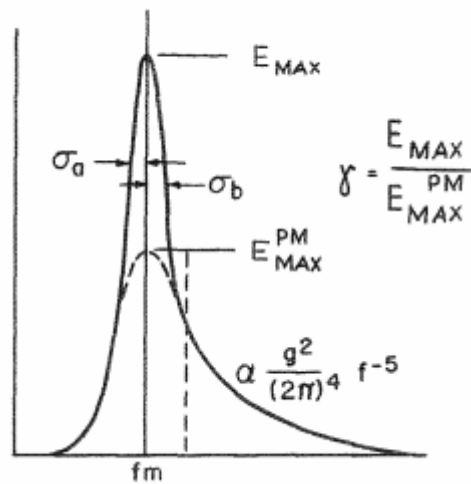


Figura 8 Espectro de frequência melhorado pelo fator γ e suas características com pico original do espectro de Pierson-Moskowitz E_{MAX}^{PM} e espectro aprimorado E_{MAX}

Fonte: Figura retirada de [1]

que o espectro é altamente dependente do parâmetro fetch wind, conforme pode ser visto na Figura 9

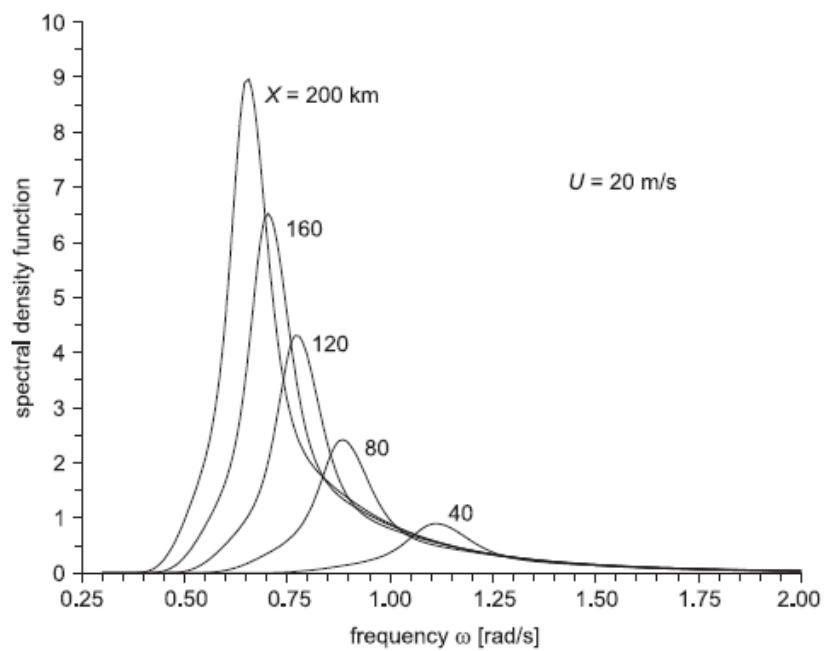


Figura 9 Espectro de frequência para o parâmetro fetch variável

Fonte: Figura retirada de [8]

2.3.4 Espectro de frequência-direcional de ondas

O espectro de frequência-direcional de ondas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{S(f, \theta)}{S(f)} = D(f, \theta). \quad (2.23)$$

O interessante de definir o espectro desta forma, é que além de separar o espectro numa parte que dependa apenas da frequência $S(f)$, o espectro direcional $D(f, \theta)$ é normalizado por definição como em Massel [8] e Holthuijsen [15]. No artigo do Hasselmann [1], ele comenta que não conseguiu investigar a relação do espectro direcional $D(f, \theta)$ e o parâmetro de fetch por falta de dados, e portanto ele desconsiderou da equação. De forma geral, há muitas divergências sobre o formato da distribuição direcional e Hasselmann intuiu que seria da forma

$$D(f, \theta) \propto \cos^2 \theta. \quad (2.24)$$

A distribuição direcional, $D(\theta, f)$, pode ser entendida como a distribuição da energia das ondas para um dada frequência f sobre as direções θ . Note que D é geralmente também uma função de f . Isso reflete o fato de que na maioria das vezes existem vários sistemas de ondas simultaneamente. De forma mais específica [8], podemos afirmar que

$$D(f, \theta) = N(s) \cos^{2s} \left(\frac{\theta - \theta_1}{2} \right), \quad (2.25)$$

onde $N(s)$ é uma função normalizadora

$$N(s) = \frac{1}{\pi} 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)}.$$

No entanto, esta modelagem se baseia na ideia de que a energia da onda se concentra na direção de atuação do vento e decresce na medida que se afasta desta direção. Esta ideia leva à distribuições unimodais. Existem outras formas de espectro, que levam à distribuições bimodais, citado em Holthuijsen [15] e Massel [8], e pode ocorrer em situações que haja frequências maiores do que o pico espectral da frequência, ou em regiões do oceano em que a energia seja comparável a energia transferida por ciclones. Além disso, em Massel [8], é resumido o trabalho de alguns autores, que concluíram que a bimodalidade é uma propriedade invariante do campo de ondas com relação ao tempo de atuação do vento

sobre o campo de ondas, e portanto existe tanto no estágio de onda transiente, quanto no estágio permanente. Foi observado também, que em casos de assimetria do parâmetro fetch e devido à influência de swells de baixa frequência, o espectro bidimensional se torna assimétrico. Nessas condições, é possível supor que $D(\theta, f)$ é uma função periódica de θ , podemos utilizar os conhecimentos de série de Fourier e escrever

$$D(f, \theta) = \frac{a_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos n\theta + b_n(f) \sin n\theta. \quad (2.26)$$

Existe um teorema na teoria de análise de Fourier em Figueiredo [17]²⁵, que afirma sob algumas condições que é possível passar a integral para dentro do somatório. Ao fazer isto, os cálculos ficam bem mais simples, pois toda a parcela do lado direito irá se anular. Sobrando apenas $\int_0^{2\pi} (\frac{1}{2\pi}) = 1$. Logo, temos

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} D(f, \theta) d\theta = 1, \quad (2.27)$$

e isso pode ser comparado, analogamente com uma distribuição de probabilidade, respeitando que a soma de todas as probabilidades é igual a 1. No entanto, note que o que a distribuição direcional mede mais especificamente os coeficientes de Fourier, como função da frequência. Lembramos que, através da teoria de análise de Fourier, podemos obter os coeficientes de Fourier

$$a_n(f) = \int_0^{2\pi} D(f, \theta) \cos n\theta d\theta, \quad (2.28)$$

$$b_n(f) = \int_0^{2\pi} D(f, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad (2.29)$$

onde

$$\cos \theta_1 = \frac{a_1(f)}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}}, \quad (2.30)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{b_1(f)}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}}, \quad (2.31)$$

²⁵Suponha que as funções u_n sejam integráveis em algum intervalo I e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente. Então vale $\int_I \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx$

2.3.5 Direção média e Espalhamento direcional

Utilizando Hasselmann [1], podemos definir a direção média do espectro D como

$$\theta_m \approx \int_{-\pi}^{\pi} S(f, \theta) \theta d\theta. \quad (2.32)$$

Da mesma forma, para a direção de espalhamento (variância direcional), temos inicialmente a seguinte expressão

$$\theta_s \approx \int_{-\pi}^{\pi} D(\theta)(\theta - \theta_m)^2 d\theta. \quad (2.33)$$

No entanto, é possível fazer uma pequena melhora destas equações, segundo Holthuijsen [15], apenas fazendo

$$\theta_s = \int_{-\pi}^{\pi} D(\theta) \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 d\theta. \quad (2.34)$$

Podemos, além disso, tentar obter uma expressão em termos dos coeficientes de Fourier. No entanto, esta expressão não é periódica, então uma opção seria tentar aproximar esta equação de uma periódica. Neste texto, utilizaremos que

$$(\theta - \theta_1)^2 \approx (1 - \cos(\theta - \theta_1)), \quad (2.35)$$

para valores pequenos de $\theta - \theta_1$, obtendo

$$\theta_1 = \int_0^{2\pi} [1 - \cos(\theta - \theta_1)] D(f, \theta) d\theta, \quad (2.36)$$

$$\theta_1 = \int_0^{2\pi} [1 - (\cos(\theta) \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) \sin(\theta))] D(f, \theta) d\theta, \quad (2.37)$$

$$\theta_1 = - \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) \sin(\theta)) D(f, \theta) d\theta + \int_0^{2\pi} D(f, \theta), \quad (2.38)$$

Pelas equações (2.27), (2.28), (2.29) temos

$$\theta_1 = 1 - (\cos(\theta_1)a_1(f) + \sin(\theta_1)b_1(f)), \quad (2.39)$$

pelas equações (2.30) e (2.31),

$$\theta_1 = \left[1 - \frac{(a_1^2(f) + b_1^2(f))}{\sqrt{a_1^2(f) + b_1^2(f)}} \right]. \quad (2.40)$$

Portanto, obtemos uma equação para θ_1 em termos dos primeiros coeficientes da série Fourier. O espalhamento direcional, definido como arco-tangente de da razão entre (2.30) e (2.31) pode ser obtido como

$$\theta_1(f) = \tan^{-1} \left(\frac{b_1(f)}{a_1(f)} \right).$$

Definindo a matriz complexa, conforme Oltman e Guza [28]

$$\mathbf{M}_{mn} = \int_0^{2\pi} S(f, \theta) G_n(\theta) G_m^*(\theta) d\theta \quad m, n \in 1, 2, 3, \quad (2.41)$$

onde $G_1 = 1$, $G_2 = j \cos \theta$, $G_3 = j \sin \theta$ e $\mathbf{M}_{mn} = C_{nm} + jQ_{nm}$. Dessa forma, segue que

$$M_{11} = \int_0^{2\pi} S(f, \theta) d\theta, \quad (2.42)$$

$$M_{12} = -j \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \cos \theta d\theta \quad (2.43)$$

$$M_{13} = -j \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.44)$$

$$M_{21} = j \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \cos \theta d\theta, \quad (2.45)$$

$$M_{22} = - \int_0^{2\pi} E(f, \theta) \cos^2 \theta d\theta, \quad (2.46)$$

$$M_{23} = \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \sin \theta \cos \theta, d\theta \quad (2.47)$$

$$M_{31} = j \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (2.48)$$

$$M_{32} = \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad (2.49)$$

$$M_{33} = \int_0^{2\pi} S(f, \theta) \sin^2 \theta d\theta. \quad (2.50)$$

Estes elementos da matriz M_{mn} tem significado quando comparados com os coeficientes de Fourier. De fato, repare que das Equações (2.28) e (2.29), podemos obter $M_{11} = a_0$, $M_{12} = a_1$, $M_{13} = b_1$ e de forma mais precisa em Earle [29], $\frac{M_{22}-M_{33}}{k^2\pi} = a_2$, $\frac{M_{23}}{k^2\pi} = b_2$, onde k representa o número de onda. A importância destas comparações é que podemos dar um pouco mais de sentido à alguns parâmetros, relacionando os coeficientes de Fourier com um significado físico. Lembre que

$$\tan^{-1} \left(\frac{a_1}{b_1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{M_{12}}{M_{13}} \right),$$

que tem o significado de distribuição de energia ao longo da direção meridional e zonal, e o arco tangente desta razão dá a direção do movimento dessa energia. E mais ainda, estamos relacionando coeficientes de Fourier com os elementos da matriz de espectro cruzado. Da mesma forma, para podemos relacionar para outros coeficientes de Fourier

$$\tan^{-1} \left(\frac{a_2}{b_2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{C_{22} - C_{33}}{2C_{23}} \right).$$

No entanto, o arco tangente desta razão tem um significado físico diferente, estando relacionado com a direção de pico (dominante) da distribuição da energia.

2.4 Parâmetros do estado de mar e espectro de onda

Anteriormente, o estado de mar foi modelado como um processo estocástico, e pode ser caracterizado pelo espectro de onda. Alguns desse parâmetro são constantemente utilizados na prática e oferecem uma interpretação relativamente simples do estado de mar, como a altura significativa da onda e período médio da onda e tem certa capacidade de permitir fazer observações e previsões sobre o estado de mar e relacionar com o espectro de frequência. O objetivo desta seção é citar e delimitar como surgem estes parâmetros, e sua importância.

2.4.1 Momentos de uma função

Para abordar os conceitos posteriores, que são o objetivo desta seção, é necessário introduzir o conceito de momento de uma função. Dada uma função densidade de probabilidade P , de uma variável aleatória y , podemos calcular seus momentos da seguinte forma,

para processos estocásticos gaussianos e estacionários²⁶ (esperança da variável aleatória é zero)

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} y^n P(y) dy \quad n \in Z. \quad (2.51)$$

Repare, que esta definição é bem coerente, pois tratando o espectro de frequência como uma função densidade de probabilidade, podemos obter seus momentos

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n S(f) df. \quad (2.52)$$

De fato, pela definição de momentos, vemos que m_0 é equivalente à variância²⁷ de η

$$E \{ \eta^2 \} = m_0 = \int_0^{\infty} S(f) df. \quad (2.53)$$

Cabe ressaltar que, de forma geral, o primeiro momento da variável aleatória costuma fornecer informações sobre o valor central (esperança), o segundo momento, sobre a dispersão ao redor do valor central (variância) e o terceiro e quarto momentos oferecem informações sobre o formato da função densidade de probabilidades (assimetria e kurtosis).

2.4.2 Período da onda

Definindo uma reta horizontal como referência, para marcar uma determinada altura da superfície oceânica η , temos que em relação a esta reta, ocorrem múltiplos "up-crossings" e "down-crossings" que marcam as subidas e descidas das ondas em relação a esta reta referencial. O período da onda denota a média do intervalo de tempo dessas sucessivas subidas e descidas das ondas sobre a superfície oceânica e que podem ser expressas em termos do espectro como em Holthuisen [15]

$$\langle T_n \rangle = \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \left[\exp \left(\frac{-\eta^2}{2m_0} \right) \right]^{-1}. \quad (2.54)$$

Sabe-se que $f = \frac{1}{T}$, Logo, podemos obter,

$$\langle f_n \rangle = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \exp \left(\frac{-\eta^2}{2m_0} \right). \quad (2.55)$$

²⁶Lembre que para definir um processo estocástico, basta definir as funções densidade de probabilidade do problema. Se o problema não for estacionário, seria necessário definir uma função densidade de probabilidade para cada instante

²⁷É preciso notar que estamos comparando a variância de η com o momento de ordem zero da frequência

No entanto, note que em (2.54) e (2.55) são dependentes do segundo momento m_2 , que por sua vez, depende de f^2 . A importância desta observação é que em regiões de alta frequência, ocorrem mais ruídos, e por estarem elevado a n-ésima potência, acabam causando distorções no espectro segundo Holthuijsen [15]. Portanto, é válida fazer a seguinte troca, visando minimizar os efeitos do ruído

$$\langle T_{m01} \rangle = \langle f_{media}^{-1} \rangle = \frac{m_0}{m_1}. \quad (2.56)$$

2.4.3 Altura significativa de onda

Denotando a variável aleatória H como altura da onda como em Farina [11] e Holthuijsen [15], e suponha $P(H)$ uma função densidade de probabilidade, temos que a probabilidade de H estar entre duas outras alturas, é

$$P[H_1 \leq H \leq h_2] = \int_{H_1}^{H_2} P(H)dH. \quad (2.57)$$

Definindo $P(H)$, segundo a distribuição de Rayleigh,

$$P(H) = \frac{H}{4m_0} e^{-\frac{H^2}{8m_0}}. \quad (2.58)$$

Finamente, podemos explicar o conceito de altura de onda significativa. Considere uma divisão do grupo de todas as ondas em três partes. No primeiro grupo, no primeiro terço da divisão, são alocadas todas as ondas menores, no segundo terço, serão colocadas todas as ondas intermediárias, e no terceiro grupo, o terceiro terço, é onde ficam todas as ondas maiores e onde focaremos a análise. A definição de altura significativa se baseia neste conjunto de todas as ondas mais significantes para a altura, ou seja, as maiores ondas, mais especificamente, a altura significativa é a média das alturas das ondas no terceiro grupo. Podemos definir que a altura significativa de onda é

$$H_s = \frac{\int_{s_{1/3}}^{\infty} HP(H)dH}{\int_{s_{1/3}}^{\infty} P(H)dH} \approx 4\sqrt{m_0}, \quad (2.59)$$

onde $s_{1/3}$ representa o limite esquerdo do grupo das ondas maiores. E pode ser melhor entendido na Figura 10. Além disso, é fácil calcular o valor de $s_{1/3}$, pois sabe-se por construção, a área do terceiro grupo é $1/3$ e denotemos $R = 8m_0$. Portanto, temos que

basta resolver a integral abaixo

$$\int_{s_{1/3}}^{\infty} \frac{2H}{R} e^{-\frac{H^2}{R}} dH = \frac{1}{3}. \quad (2.60)$$

Aplicando o método da substituição ($u = \frac{-H^2}{R}$), obtém-se que $H_{1/3} = \sqrt{R \ln 3}$. Na Figura 10, vemos a representação da altura significativa (H_s)

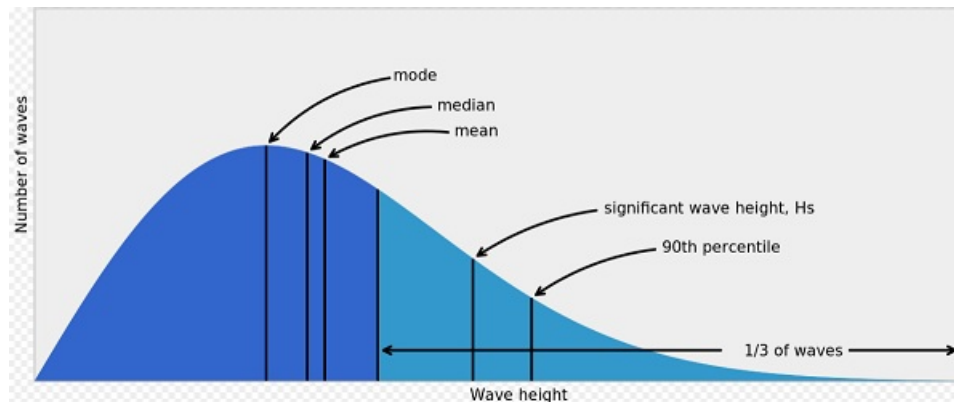


Figura 10 Representação do terço do grupo das ondas maiores, assim como a altura significativa H_s ($H_{1/3}$)

Fonte: Figura retirada de [30]

2.5 Espectro cruzado

O objetivo desta sessão é fazer uma breve ampliação do conceito de espectro utilizado anteriormente, assim como abrir as portas para futuramente estudar este espectro de forma mais aprofundada. O espectro utilizado anteriormente, é um caso particular do espectro cruzado e veremos a seguir por Storch e Zwiers [20]

Definição 2.5.1 *Seja X_t e Y_t duas variáveis aleatórias de um processo estocástico conjuntamente estacionário, A função covariância cruzada ²⁸ é dada pela equação abaixo*

$$\gamma_{xy} = E[(X(t) - E[X(t)])(Y(t + \tau) - E[Y(t)])^*], \quad (2.61)$$

onde $E[X(t)]$, $E[Y(t)]$ são as respectivas esperanças das variáveis aleatórias e o símbolo ”*” representa o conjugado. Repare que se $x = y$, e ao considerar o processo estacionário, a covariância cruzada será a função de autocorrelação definida em (2.11). A seguir, definiremos o espectro cruzado.

²⁸No caso em que os valores esperados são nulos, a covariância e a correlação cruzada são idênticas

Definição 2.5.2 *Seja \mathbf{X}_t e \mathbf{Y}_t duas variáveis aleatórias, com auto-covariâncias γ_{xx} , γ_{xy} e covariância cruzada γ_{xy} . Então, temos que o espectro cruzado é dado pela equação abaixo*

$$\Gamma_{xy}(\omega) = \mathcal{F} \{ \gamma_{xy} \} (\omega) = \int_0^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \quad \omega \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (2.62)$$

Repare que ao inverter a transformada Fourier (2.62), recuperamos do espectro a covariância cruzada. Este espectro tem algumas propriedades interessantes, como por exemplo simetria $\Gamma(\omega) = \Gamma(-\omega)$, continuidade de diferenciabilidade do espectro no intervalo $\omega \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$, e portanto, existe um máximo ou mínimo local, conforme pode ser confirmado em [20]

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_{xy}(\omega) e^{j2\pi\omega\tau} d\omega \quad \omega \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (2.63)$$

Além disso, o espectro cruzado é uma função complexa, portanto, no plano cartesiano

$$\Gamma_{xy}(\omega) = C_{xy}(\omega) + j Q_{xy}(\omega), \quad (2.64)$$

onde C_{xy} é chamado de co-espectro, e Q_{xy} de quadratura espectral, e representam respectivamente as partes reais e imaginárias da função complexa. Esta função, pode ser escrita em coordenadas polares, obtendo

$$\Gamma_{xy}(\omega) = A_{xy}(\omega) e^{j\phi_{xy}(\omega)}, \quad (2.65)$$

onde $A_{xy}(\omega) = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}$ representa o espectro de amplitude e $\phi_{xy}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)} \right)$ o espectro de fase quando $C_{xy} \neq 0$ e $Q_{xy} \neq 0$. No entanto, quando o co-espectro ou a quadratura espectral for zero, temos as seguintes relações: quando $Q_{xy} = 0$,

$$\phi_{xy}(\omega) = \begin{cases} 0, & C_{xy}(\omega) < 0, \\ + - \pi, & C_{xy}(\omega) > 0. \end{cases},$$

quando $C_{xy} = 0$,

$$\phi_{xy}(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & Q_{xy}(\omega) < 0, \\ \frac{-\pi}{2}, & Q_{xy}(\omega) > 0. \end{cases} .$$

O espectro de fase só é uma estimativa relevante para valores significativos do parâmetro chamado coerência, para mais referências ver Mandel e Wolf [31]. A coerência do espectro é definida como

$$\text{Coh} = \frac{\Gamma_{xy}^2}{\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}}, \quad (2.66)$$

além disso, a coerência mede uma espécie de grau de relação linear entre as variáveis aleatórias x, y . Pois de fato, a coerência é uma medida de quanto que os valores estão concentrados ao redor do valor médio do espectro de fase. Neste sentido, se os valores estiverem muito dispersos em relação ao valor esperado, isto significaria que o espectro de fase não teria significado relevante. Quando a Equação (2.66) se aproxima de 1, dizemos que x e y são perfeitamente coerentes e nesse caso. É possível interpretar x e y como os sinais emitidos e recebidos pelo radar. Quando se aproxima de 0 a tendência é ocorrer o fenômeno contrário.

3 INTRODUÇÃO À TEORIA DE RADAR

3.1 Prefácio

Segundo Curlander e McDonough [32], a tecnologia denominada SAR (synthetic aperture radar) foi baseada no fato de um radar de visada lateral ser capaz de melhorar a resolução azimutal, se aproveitando do deslocamento Doppler do sinal retroespalhado. De forma genérica, a maioria dos sensores anteriormente eram baseados em sistemas de câmeras que possuíam a capacidade de detectar radiação solar refletida ou radiação térmica emitida por uma superfície. O SAR representa uma espécie de tecnologia diferente e revolucionária de mapeamento e parte do princípio que o radar emite um pulso de radiação eletromagnética na região de microondas do espectro eletromagnético, e ao atingir a superfície, a amplitude, fase e frequência da onda são modificados por conta das propriedades físicas da superfície. O objetivo portanto, é extrair informações das alterações no sinal emitido quando ele retorna ao radar. O SAR tem iluminação própria, independente de iluminação solar e suas microondas não são afetadas de forma significativa por chuva, fumaça ou nuvens, e por isso, seu desempenho de imageamento não é afetado por estes fenômenos da natureza. Ademais, o SAR consegue obter boa resolução mesmo em grandes alturas, e diferente de outros tipos de sensores, esse ganho de resolução é obtido de forma sintética, sem aumentar o tamanho da antena. O processo de abertura sintética envolve um complexo processamento coerente, que faz uso da fase e magnitude da onda retroespalhada e compila estas informações para sintetizar uma antena bem mais longa, e conseqüentemente obter uma melhora na resolução azimutal. Além disso, o comprimento da onda emitida pelo radar deve ser cuidadosamente escolhido, visando minimizar a absorção atmosférica do sinal. Porém, este não é o único fator que é dependente do comprimento de onda. De fato, a relação entre a superfície imageada e o pulso eletromagnético emitido é altamente dependente do comprimento de onda. Para ondas operando na faixa de frequência $1 - 10\text{GHz}$, as características das ondas retroespalhadas (intensidade, fase e polarização), dependem predominantemente da constante dielétrica e da rugosidade da superfície. O SAR é uma ferramenta muito efetiva para mapeamento de vegetações, movimento de camadas de gelo e do oceano, e portanto, serve de ferramenta para o estudo científico. Na Seção 3.2, é feita uma breve introdução ao conceito de coerência, levando em consideração sua relevância para teoria de imageamento. Na Seção 3.3 é abordada a

relação física entre a interação da superfície e o sinal eletromagnético emitido pelo radar. Na Seção 3.4 serão apresentados conceitos básicos sobre o SAR, tais como princípios de operacionais de radar, sintetização da antena através do efeito Doppler, alguns modos de imageamento e fatores que degradam o imageamento. Na Seção 3.5, são apresentando conceitos básicos de funções de transferência e sua utilização para obter informações sobre o espectro de onda de superfícies, tomando como base os mecanismos básicos de modulação Tilt, hidrodinâmico e velocity bunching e posteriormente na Seção 3.6.1 são apresentadas as funções de covariância. Por fim, na Seção 3.7, é apresentada de forma compacta a Transformada de Hasselmann, que tem a importante função de transformar o espectro de imagens em espectro de ondas.

3.2 Coerência

A coerência foi definida matematicamente no Capítulo 2 em (2.66), e ela exerce um papel fundamental na teoria de imageamento, pois representa o grau relação entre as ondas eletromagnéticas emitidas e recebidas pelo SAR. Duas ondas serão ditas coerentes quando a diferença entre as fases for constante. Quando esta diferença não é constante, a relação entre as ondas de entrada e saída é chamada de processo não coerente, e neste caso a diferença de fase poderá denominada por alguma distribuição de probabilidade. A faixa de coerência mostra quão similar cada pixel entre as imagens mestre e imagens escravas numa escala de 0 à 1. Áreas com alta coerência terão tons claros e áreas com coerência pobre terão tons escurecidos segundo o manual do Sentinel-1 [33] e conforme podem ser vistos na Figura 11. Para um maior fundamento matemático sobre o assunto, verificar Marple e Marino [34].

3.3 Interação da superfície com o campo eletromagnético de ondas

De acordo com Kanevsky [35], as características da onda refletida como amplitude, fase e polarização sofrem influência principalmente da constante dielétrica (permissividade), da rugosidade do oceano e inclinações locais. A permissividade é definida como $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ onde ϵ' representa a habilidade do meio armazenar energia elétrica, $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, e ϵ'' denota as perdas eletromagnéticas ocorridas no meio. De forma geral, a constante dielétrica caracteriza a interação entre as propriedades do campo eletro-



Figura 11 Na imagem, a vegetação é mostrada em tons escuros (coerência pobre) e construções em tons claros (alta coerência)

Fonte: Figura retirada de [33]

magnético com as propriedades elétricas do meio. Já a rugosidade da superfície oceânica deve-se à interação do vento com a superfície, causando o tensionamento da superficial e gerando ondas cujo comprimento de onda é pequeno ("ripples"). Posteriormente, estas pequenas ondas transmitem parte de sua energia para outros tipos de onda e este mecanismo se perpetua até que a situação de equilíbrio entre a energia adquirida pelos ventos e a energia dissipada pela quebra das ondas, turbulência e viscosidade. Para relacionar essas características da onda refletida com as características da onda emitida, é necessário uma modelagem sobre o espalhamento da onda. Segundo Curlander e McDonough [32], num meio isotrópico e não magnético, podemos utilizar a equação de Maxwell da seguinte forma

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{A} \exp \left(j \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} k z - \omega t + \theta \right), \quad (3.1)$$

- $\mathbf{E}(z, t)$ representa o vetor campo elétrico.
- \mathbf{A} representa o vetor de amplitudes.
- $\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} k$ onde k representa o número de onda multiplicado pela razão entre a raiz da permissividade do meio e permissividade do meio livre.
- ω é a frequência angular
- θ representa o ângulo de fase.

- $\left(j\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}kz - \omega t + \theta\right)$ é chamado de fase.
- t é a dimensão temporal
- z é a direção de propagação da onda

A polarização do campo elétrico refere-se à direção do vetor amplitude em algum instante do tempo e o campo é linearmente polarizado quando a direção do vetor amplitude é constante para qualquer instante de tempo. Quando a direção sofre rotação em relação ao eixo de propagação da onda, o campo é elipticamente linearizado ²⁹. Neste caso, o vetor campo elétrico pode ser descrito como

$$\mathbf{E}(z, t) = \left(\mathbf{A}_x \exp\left(j\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}kz - \omega t + \theta_1\right)\right), \mathbf{A}_y \exp\left(j\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}kz - \omega t + \theta_2\right)\right) \right). \quad (3.2)$$

Quando a onda eletromagnética é emitida por uma antena, a fase de \mathbf{E} é considerada constante em qualquer instante. Dependendo da faixa do comprimento de onda, o sinal pode ser ampliado ou até sofrer rotação da polaridade da onda. Devido à interação da onda eletromagnética com a superfície oceânica, ocorre um espalhamento do sinal emitido pela antena. Neste caso, é chamado de espalhamento de superfície, porém há outros tipos de espalhamento, que ocorrem quando em meios não homogêneos, chamado espalhamento de volume.

3.4 Princípios operacionais de Radar

Como já foi dito, o SAR é uma classe especial de radar, e segundo Wang [36] ao transmitir e receber as ondas eletromagnéticas emitidas em intervalos regulares, o radar é capaz de identificar a distância entre o radar e o alvo, assim como a velocidade do alvo. Estas informações, por sua vez, podem ser obtidas através técnicas e cálculos envolvendo intervalos de tempo entre a transmissão e recepção de um sinal de radar ou através da diferença entre suas frequências. A primeira técnica, se utiliza da modulação de amplitude e a segunda, se baseia na modulação da frequência. Na figura 3.4, exemplifica de forma genérica a modulação de um sinal, onde Tx representa o pulso emitido, Rx representa o pulso recebido e τ é a diferença de tempo entre a emissão do pulso e a recepção pela antena. A detecção de range mínima $R_{\min} = \frac{c(T_p + \tau)}{2}$ e a detecção de range

²⁹Caso $\mathbf{A}_x = \mathbf{A}_y$ e $|\theta_1 - \theta_2| = \frac{\pi}{2}$, então dizemos que polarização é circular.

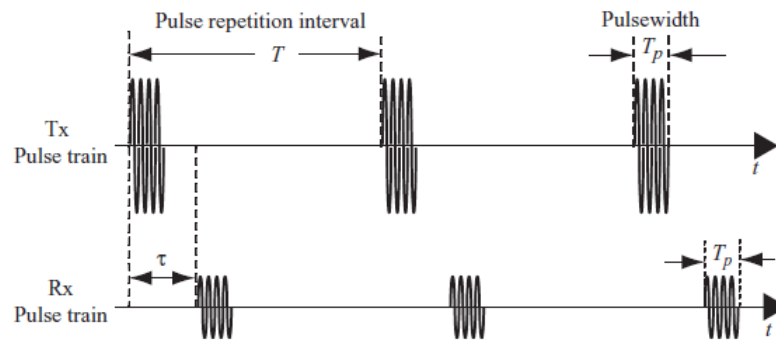


Figura 12 Trens de pulsos transmitidos e recebidos

Fonte: Figura retirada de [36]

máxima $R_{\max} = \frac{cT}{2}$ são dados por estas fórmulas, onde c representa a velocidade da luz, T_p representa o comprimento do pulso da onda eletromagnética e T representa o período da onda eletromagnética.

Existe um problema de ambiguidade na direção de range derivado do registro contínuo da sequência de pulsos emitidos e recebidos. Esta ambiguidade se origina no fato de que todos os pulsos emitidos são idênticos, e por isso, o radar não consegue em alguns casos relacionar corretamente qual sinal recebido corresponde à qual sinal emitido. Na Figura 13, após a emissão do primeiro pulso, podemos perceber que ao atingir os alvos 1 e 2, a reflexão do primeiro alvo é recebida pelo radar antes da emissão do segundo pulso, e que de forma contrária, a reflexão do segundo alvo é registrada apenas a emissão do segundo pulso. Dessa forma, o radar não consegue distinguir sem informação extra qual dos sinais recebidos são derivados da reflexão do primeiro pulso ou do segundo pulso. É importante ressaltar que nas informações que são recebidas antes da emissão do segundo pulso, não há problema de ambiguidade. Segundo Wang [36], este problema pode ser solucionado ao utilizar múltiplas frequências, e além disso ao aplicar esta técnica, a capacidade de detecção de alguns alvos aumenta, pois alguns alvos são indetectáveis em algumas frequências. De forma similar à fórmula da detecção de range máxima e mínima, é definida a resolução de range $R_{\text{res}} = \frac{cT_p}{2}$ e representa a habilidade do radar de distinguir um ou mais alvos para diferentes alcances. Naturalmente, estes pulsos devem ser emitidos com intervalos de tempo maiores que o comprimento da onda do pulso T_p , para que não haja confusão entre os sinais.

A configuração do radar é baseada em 6 etapas principais: gerador do formato de ondas, transmissor, sistema de antenas, receptor, um processador de sinais e um con-

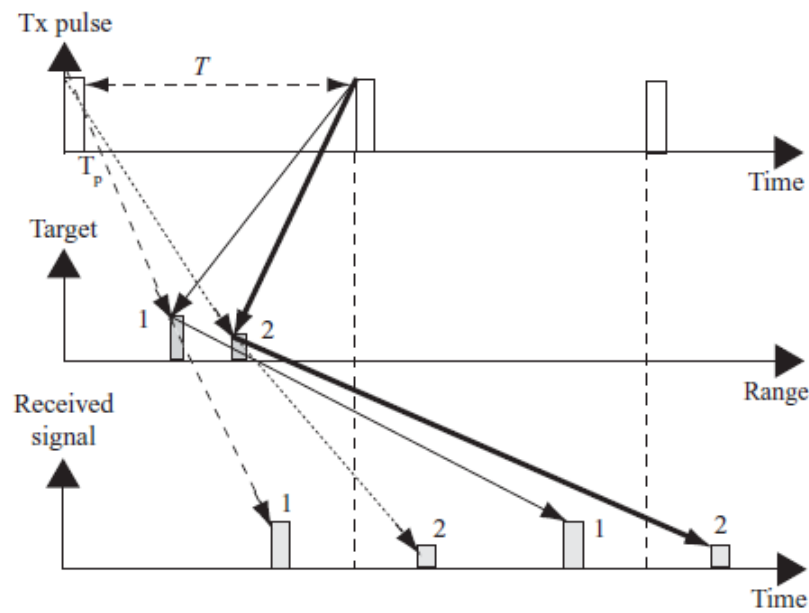


Figura 13 Imagem ilustrativa do processo que origina ambiguidade dos pulsos

Fonte: Figura retirada de [36]

trolador temporal. O gerador de formato³⁰ de ondas é responsável pelos formatos das ondas eletromagnéticas que serão moduladas e transmitidas posteriormente. Essa função de transmissão é dada pelo transmissor³¹, que tem como função gerar pulsos poderosos de ondas eletromagnéticas em algum formato de onda específico e sob algum intervalo de tempo definido, e posteriormente é enviado para a antena. Então, a energia do transmissor é direcionada para o sistema de antenas³², que por sua vez radia esta energia num feixe direcional e também captura o eco do sinal e o direciona para o receptor. O receptor, recebe a energia refletida pelo alvo, e então aplica processos de amplificação, filtração, demodulação e envia o sinal processado para processador de sinais. A função do processador de sinais é basicamente fazer cálculos para obter a velocidade do alvo ou informações na direção de range. O processo de transmissão, recepção e tratamento do sinal é feito em conjunto com controlador temporal, que basicamente tem como função prover informação sobre o tempo, de forma a sincronizar os sinais. Um esquema ilustrativo se encontra na Figura 14

³⁰Exemplos de técnicas de modulação do sinal utilizadas pelo gerador de formato de onda são: modulação de amplitude, modulação da frequência linear e frequência particionada de ondas.

³¹Este aparelho pode utilizar microondas ressonantes para aumentar o poder de transmissão.

³²Quando uma única antena suporta a função de emissão e recepção, ela é chamada de *sistema de radar monostático* e quando existe uma antena para cada uma dessas funções, ela é chamada de *sistema de radar bistático*

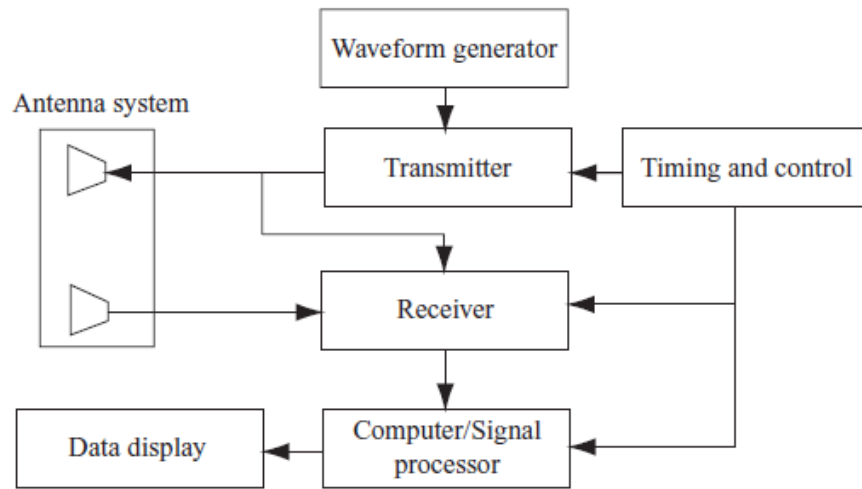


Figura 14 Fluxograma do sistema do Radar

Fonte: Figura retirada de [36]

3.4.1 Equação de Range do Radar

A densidade de potência de range R oriunda do transmissor é definida pela potência transmitida dividida pela área de uma esfera imaginária de raio R . A densidade de potência³³ recebida pelo alvo é definida como,

$$S_I = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2} \quad (3.3)$$

e a densidade de potência recebida pela antena é

$$S_R = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2} \cdot \frac{\sigma}{4\pi R^2}. \quad (3.4)$$

Além disso, a potência total recebida pela antena é então

$$S = \frac{P_T G_T G_R \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4} L, \quad (3.5)$$

onde σ representa a seção cruzada do radar, que é interpretado fisicamente como coeficiente de energia espalhada pelo alvo. P_T é a intensidade da energia emitida pela antena por um radiador isotrópico. G_R é o ganho da antena receptora e G_T é o ganho da antena transmissora, e para radares com sistemas monostático $G_T = G_R$. O termo L é devido

³³A análise dimensional indica que $[S_R] = [S_I] = \frac{W}{m^2}$ e $[S] = W$

a perdas de energia por dissipação dos processos mecânicos do radar, que por sua vez reduz a quantidade de energia receptada.³⁴ Estas afirmações podem ser ilustradas pela Figura 15. A seção cruzada do alvo é definida como a relação entre a potência emitida e

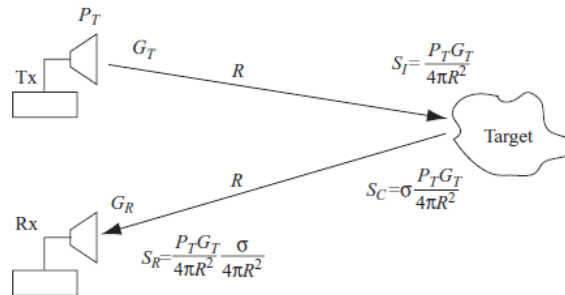


Figura 15 Reflexão do radar

Fonte: Figura retirada de [36]

a potência refletida. Naturalmente, esta relação depende da energia refletida pelo alvo e portanto

$$S_R(4\pi R^2) = \sigma S_I \quad (3.6)$$

e conseqüentemente podemos definir uma fórmula³⁵ para σ

$$\sigma = \frac{S_R(4\pi R^2)}{S_I}. \quad (3.7)$$

3.4.2 Seção cruzada do radar

A seção cruzada do radar (RCS) de um objeto é uma medida de seu tamanho como visto sob particular comprimento de onda do radar e polarização. As características do RCS, ou coeficiente de espalhamento, dependem da polaridade do campo do transmissor e do receptor. Como um receptor de radar detecta alterações no campo elétrico, o RCS é dependente da polaridade dos campos elétricos no transmissor e campo elétrico no receptor E^r e E^t . A relação entre RCS e polaridade do campo elétrico transmissor e receptor pode ser expresso da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_{HH} & \sigma_{VH} \\ \sigma_{HV} & \sigma_{VV} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_H^t \\ E_V^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_H^r \\ E_V^r \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

³⁴Por isso considera-se $L < 1$.

³⁵A unidade dimensional $[\sigma] = m^2$

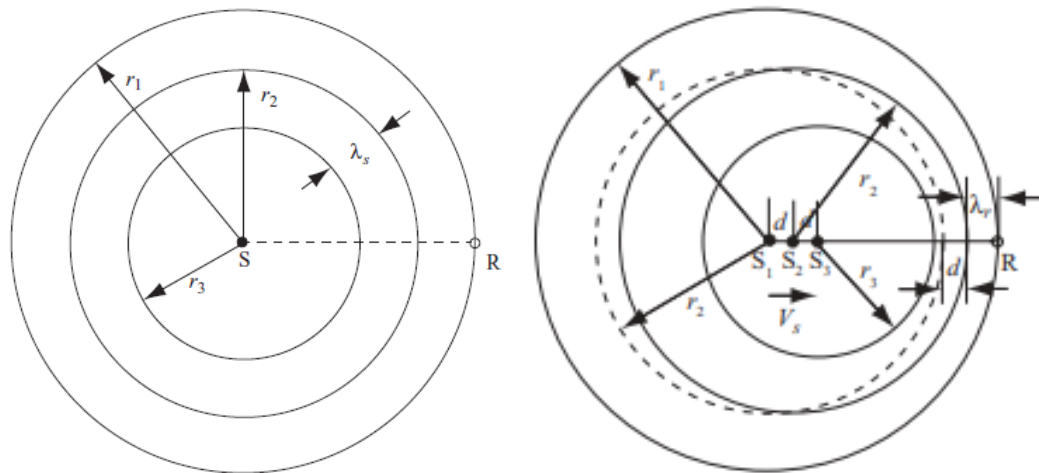
onde os índices inferiores V e H , indicam polarização vertical e horizontal, respectivamente. Já os índices superiores r e t , indicam receptor e transmissor respectivamente.

3.4.3 Efeito Doppler

Segundo Teixeira [37], um radar de abertura sintética simula uma antena virtual longa ao empregar o efeito Doppler através do deslocamento de uma antena fisicamente curta ao longo da direção de voo da plataforma. As posições sucessivas da antena são tratadas pelo processamento do SAR como se fossem elementos de uma única antena longa e assim dando origem ao termo abertura sintética. A informação de frequência Doppler é obtida pela comparação entre o sinal refletido pelo alvo com o sinal de referência do pulso emitido. Por sua vez, a sequência de dados recebidos deve ser coerente, para que a transformada de Fourier possa ser aplicada para obter as frequências Doppler. Para transmissores e receptores de onda estacionários e separados, o comprimento da onda radiada não é alterado e conseqüentemente a frequência também não. Mas quando o receptor ou emissor não é estacionário, ou seja, quando a antena ou o alvo se locomovem, então ocorre o deslocamento da frequência Doppler, de acordo com Wang [36]. Conforme podemos ver na Figura 16 - (a) que ilustra o caso em que o emissor está se deslocando e o alvo está fixado. Repare que o centro da circunferência S_1 e raio r_1 ao se mover com velocidade V_s em um intervalo de tempo Δt , foi deslocado de uma distância d para S_2 e posteriormente com a mesma distância para S_3 . No caso estacionário, ou seja, os centros das circunferências não se movem ($S_1 = S_2 = S_3$), o comprimento de onda emitido λ_s é igual ao comprimento de onda recebido λ_r . Porém, quando o radar se desloca na direção entre o alvo R e o emissor S como em Figura 16 - (b), naturalmente a frequência aumenta nesse sentido e diminui no sentido oposto. Como a frequência está relacionada com o comprimento de onda, seria o mesmo dizer que λ_r já não é da mesma magnitude de λ_s e pode ser interpretado matematicamente por $\lambda_r = \lambda_s - d$. Isto mostra exatamente o deslocamento do comprimento de onda e conseqüentemente o deslocamento da frequência. Na Figura 16, o raciocínio acima é sintetizado.

3.4.4 Radar de abertura sintética

De forma geral, o SAR é uma poderosa ferramenta para monitoramento do meio ambiente. É usualmente utilizado para obter informações sobre vulcões, derretimento de



(a) Ondas ressonantes com emissor (S) e alvo (R) estacionários
 (b) Ondas ressonantes com emissor (S) se locomovendo e alvo (R) estacionário

Figura 16 Propagação de ondas radiadas

Fonte: Figura retirada de [36]

calotas polares e fluxo de gelo, obter informações sobre oceano, desmatamento etc. No entanto, o SAR é baseado em diversos mecanismos físicos e matemáticos muito sofisticados que permitem o ganho dessas informações. Segundo Maître [38], devido à necessidade de melhorar a resolução dos dados obtidos pelos radares de abertura real (RAR), seria necessário aumentar o tamanho da antena. Todavia, isto não é viável, pois seria muito caro de todos os pontos de vista técnicos obter tal façanha. Dessa forma, a ideia original de Carl Wiley de usar o movimento da plataforma e a coerência dos sinais entre dois pulsos emitidos possibilitou a combinação de todas as fases dos sinais retornados (os ecos), e dessa forma, sintetizar uma antena muito maior. Além disso, essa antena é posicionada de forma lateral em relação ao terreno, pois o radar lida com informações na direção de Range. Este fato é importante, pois se a antena for posicionada de forma vertical aconteceria de ter ao menos dois pontos com a mesma distância e aconteceria da imagem se dobrar causando perda de informação. Mais especificamente, conforme Wang relata [36], a técnica utilizada por Wiley consistia no uso das frequências Doppler para fazer um processamento na direção azimutal (direção da trajetória do radar) dos dados do sinal retroespalhado e com isso simulando uma abertura que é mais longa que a antena física e com isso melhorando a resolução. Portanto, radares que se utilizam desta técnica são denominados de radares de abertura sintética (SAR). É dito em Chen [39] que a reconstrução da imagem tem como parâmetro vital o deslocamento da frequência Doppler, e esta por sua vez é profundamente dependente da velocidade radial pois $f_D = -\frac{2u_r}{\lambda}$,

onde $u_r = -\mathbf{u}R$ e R é o vetor unitário de range. Com isso, mudanças na trajetória da plataforma assim como na sua velocidade podem modificar as frequências Doppler e com isso perder resolução na imagem. Além disso, aprimorar a resolução azimutal depende do conhecimento do vetor posição do radar e do alvo. Na Figura 17, podemos ver como é a geometria básica de voo do SAR.

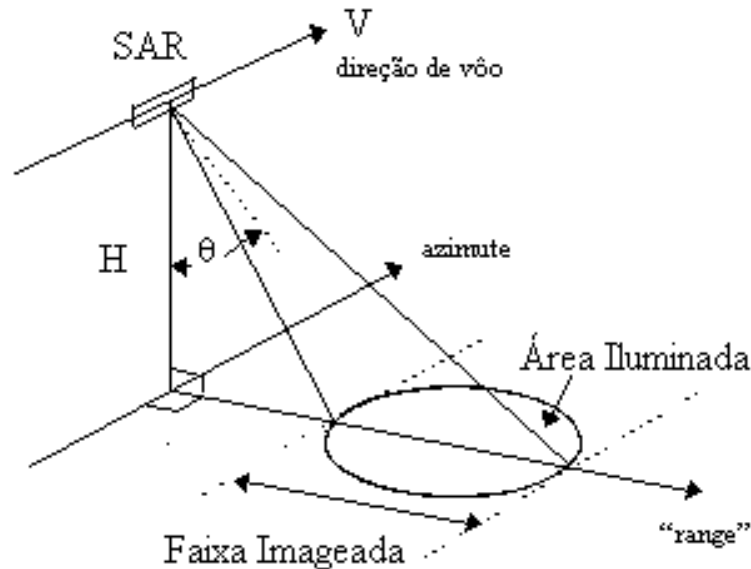


Figura 17 Geometria de imageamento SAR

Fonte: Figura retirada de [40]

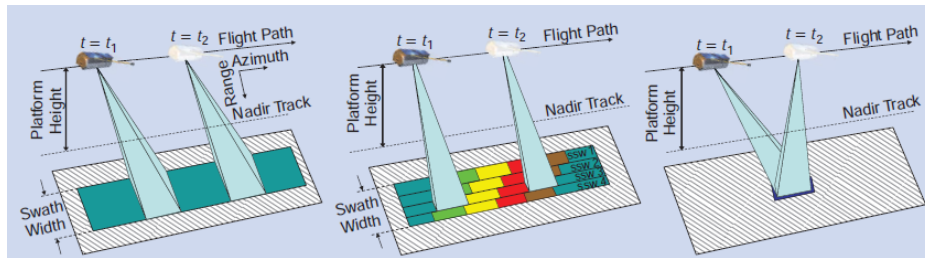
3.4.5 Modos de operação SAR

Existem diversos modos de operação SAR e com diferentes aplicações no sensoriamento de regiões do planeta. Contudo, é possível destacar 4 modos segundo Wang [36] e Moreira, Prats-Iraola, Younis, Krieger, Hajnsek e Papathanass [41]

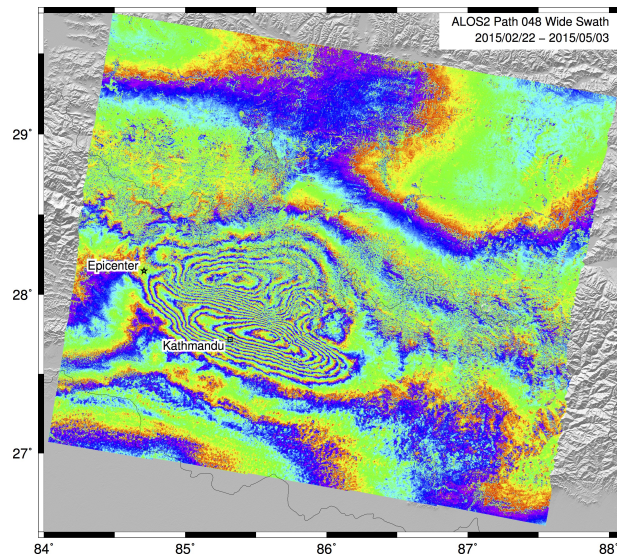
- **Stripmap SAR:** que aplica uma varredura numa longa faixa durante o deslocamento da plataforma.
- **Scan SAR:** efetua uma varredura mais larga do terreno (em relação ao Stripmap), ao variar o ângulo da antena emissora durante a trajetória aérea.
- **Spotlight SAR:** neste modo a varredura se baseia num alvo fixado durante o deslocamento da plataforma.

- **InSAR**, o chamado Interferometric SAR, foi amplamente utilizado ao se aproveitar de múltiplas antenas de um radar ou aquisição de diferentes geometrias (utilizando diferentes rotas de voos pela região).

Na Figura 18 podemos ver alguns exemplos de atuação destes modos de operação.



(a) Na sequência, Stripmap, Scan SAR, Spotlight SAR



(b) InSAR- Avaliação de terremoto no Nepal à partir de ALOS-2 Interferometry

Figura 18 Modos de operação SAR

Fonte: Figura 18 - (a) foi retirada de [41] e Figura 18 - (b) foi retirada de [42]

3.4.6 Ângulo de incidência

De acordo com Lang, Townsend e Kasischke [43], o ângulo de incidência pode afetar a qualidade dos dados obtidos pelo SAR.³⁶ Neste trabalho citado anteriormente, foi medida a sensibilidade deste parâmetro no monitoramento de florestas. No entanto, o ângulo de incidência também é um fator a ser considerado para superfícies oceânicas pois

³⁶O ângulo de incidência é definido como o ângulo entre o sinal do radar e uma linha perpendicular imaginária até a superfície imageada

o sinal retroespalhado é sensível ao ângulo de incidência³⁷, de forma que para ângulos de incidência pequenos geram mais retroespalhamento que ângulos mais abertos conforme relatado por Kuang, Perrie, Xie, Zhang e Chen [44].

3.4.7 Modelo de Bragg

Segundo Curlander e McDonough [32], modelos de Bragg são usualmente utilizados para descrever o espalhamento do sinal em superfícies oceânicas pois são baseados no fenômeno chamado ressonância e se adaptam à estrutura periódica da superfície. Devido ao alto valor da constante dielétrica do oceano, a penetração das ondas emitidas é baixa, e portanto o espalhamento ocorre principalmente na superfície do oceano, em contraposição de como ocorre por exemplo em florestas. Sabe-se que a ressonância de Bragg é mais forte quando as ondas se movem na direção de visada do radar, e considerando um cenário em que a rugosidade do oceano não seja muito elevada, onde $\text{RMS} \leq \frac{\lambda}{8}$ da variação da altura das ondas³⁸, e que o meio seja homogêneo (sem espalhamento de volume), podemos considerar descrever o espalhamento das ondas emitidas pelo SAR através do espalhamento Bragg. No entanto, com essa limitação de RMS apenas ondas de gravidade pequena e ondas capilares exibirão a ressonância de Bragg. O modelo de Bragg determina que dado o espectro espacial da superfície, a parte dominante da energia retroespalhada surgirá dos componentes espectrais da superfície que ressoam com a onda incidente. Nas condições de ângulo de incidência estático e para alguns algumas frequências fixadas, o retroespalhamento do sinal é considerado forte e quando os ângulos de incidência são suficientemente íngremes, o espalhamento da onda incidente será uma combinação do espalhamento de Bragg com espalhamento especular (a onda incidente será refletida). As ondas incidentes tem espalhamento dependente das inclinações locais e rugosidade da superfície do oceano, e portanto o retroespalhamento é uma função do ângulo de incidência, e representa-se principalmente por uma combinação dos modelos de Bragg e especular. Ondas oceânicas são detectadas na imagem SAR como bandas periódicas, e qualquer mudança neste campo de ondas gerado pelo espalhamento do sinal é perceptível pelo SAR devido à variação espacial da interação das ondas longas e ondas curtas, assim

³⁷O retroespalhamento da superfície oceânica para imagens SAR é de forma genérica função da velocidade e direção dos ventos assim como do ângulo de incidência [44]

³⁸RMS vem de "root mean square" sua fórmula é dada por $x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$, onde N representa o conjunto de dados

como o movimento orbital das ondas longas.

3.4.8 Distorções geométricas

Segundo Wang [36], como a imagem do radar é medida de forma inclinada na direção de range, a distância real entre a plataforma e o alvo é distorcida. As distorções geométricas serão ilustradas com base na Figura 19. **Layover** ocorre quando a onda

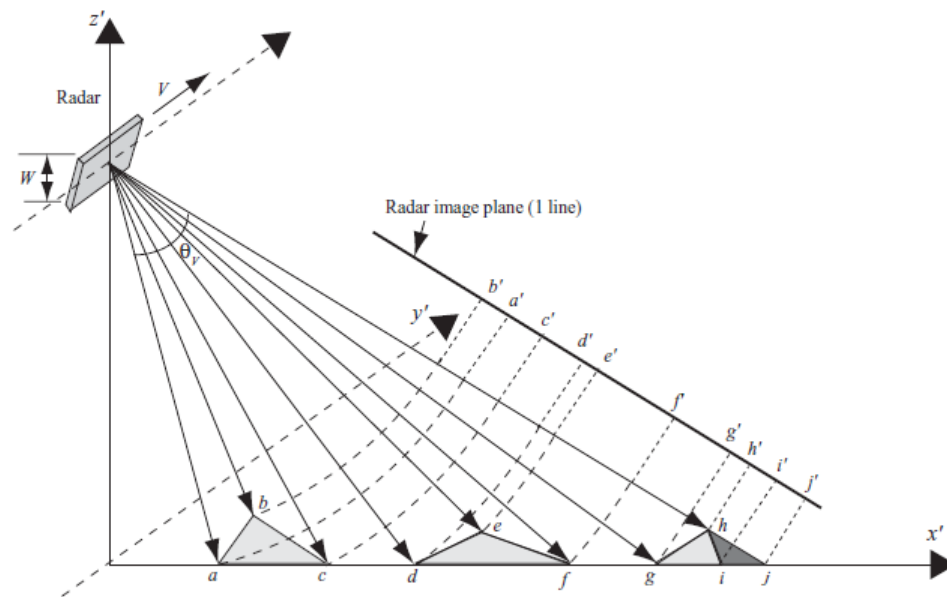


Figura 19 Modos de operação SAR

Fonte: Figura retirada de [36]

emitida pelo radar atinge primeiro o topo de uma elevação, tais como montanhas, edifícios e até cristas de ondas com altura elevada. Nessa situação, o pulso retornao radar relativo ao cume da elevação, retorna primeiro que das partes inferiores, e portanto o topo da superfície é deslocado em direção ao radar à partir de sua verdadeira posição no solo. Repare que neste caso na Figura 19, esta distorção está representado pelo plano de imagem do radar com a projeção b' sendo registrado antes da projeção a' . A distorção chamada de **Foreshortening**, ocorre de forma contrária ao que ocorre no **Layover**, pois se origina em situações que o sinal emitido pelo radar atinge primeiro a base da elevação do que o topo. Dessa forma, tomando como referência a distância das inclinações entre os alvos imageados dois a dois, a inclinação $(d-e)$ aparecerá comprimida no plano de imagem do radar, sendo representada incorretamente por $(d'-e')$. A terceira distorção geométrica é denominada **Shadowing** e ocorre quando o pulso emitido não consegue atingir alguma

região $(i - j)$. Nesses casos, toda a região entre $(i' - j')$ aparecerá escurecida na imagem SAR.

3.4.9 Speckle

Speckle também distorce a imagem SAR, porém sua origem é devido à interferência entre múltiplos sinais retroespalhados. Visualmente, é perceptível na imagem com granações de tons brancos e negros. Existem muitas formas de reduzir este efeito, como filtros espaciais³⁹ ou através da técnica de processamento de múltiplas visadas⁴⁰

3.4.10 Resolução de imagem do Radar

Conforme Wang [36], o termo célula de resolução refere-se a área de uma imagem, enquanto um pixel (elemento de imagem) corresponde à localização de uma amostra digital em uma imagem. Normalmente, pelo menos 2 pixels por resolução de range são necessários. A resolução de range do radar de imagem é determinada pela capacidade do radar distinguir entre dois alvos na superfície na direção da range. Utilizando radares de abertura real, para que dois alvos possam ser distinguidos é necessário que ambos estejam separados por um valor maior que um comprimento de pulso T_p , ver Figura 12⁴¹. Portanto, a resolução na direção de inclinação do radar na direção de range (slant range) R_{sr} é dependente do tempo de duração do pulso emitido pela antena $R_{sr} = \frac{cT_p}{2}$ onde c representa a velocidade da luz. Na direção azimutal, a resolução angular é definida como $R_a = \frac{R_{sr}\lambda}{L}$, onde R_{sr} é tomado no centro da faixa imageada e L é o tamanho da antena e λ o comprimento de onda do sinal. Conseqüentemente, a qualidade do imageamento está relacionado com valores pequenos do comprimento do pulso T_p .

3.5 Funções de transferência

No Capítulo 2, fica clara a possibilidade de entender o espectro de ondas tanto em função da frequência espacial quanto das frequências angulares. Esta mudança de $S(f)$ para $S(\omega)$, conforme já foi dito anteriormente poderia ser feito através de uma matriz

³⁹ É um processo que envolve calcular a média ou mediana dos pixels para reduzir o speckle.

⁴⁰ Esta técnica consiste nas várias medições do retroespalhamento de um alvo (pixels) medidos de diferentes posições no espaciais da plataforma

⁴¹ A resolução também é dependente do angulo de incidência

Jacobiana. No entanto, esta transformação feita pelo Jacobiano ainda está representando a superfície oceânica e segundo Holthuijsen [15], é possível transformar o espectro da elevação da superfície oceânica no espectro de alguma outra variável de interesse que esteja relacionada com a mecânica do oceano, como por exemplo a pressão exercida pelas ondas em algum ponto abaixo da superfície. Tais transformações não são aplicadas por um Jacobiano, mas são com as chamadas funções de transferência. As funções de transferência tem o objetivo de relacionar linearmente duas variáveis, normalmente uma variável representando a entrada $x(t)$ e outra variável representando a saída $y(t)$. Assumindo que todas as condições para a transformada de Fourier⁴² ser aplicável são satisfeitas, temos que a transformada de Fourier dos sinais de entrada e saída são representadas por

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.10)$$

O espectro complexo de entrada $X(\omega)$ e saída $Y(\omega)$ são representados por

$$X(\omega) = X_r(\omega) + jX_i(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}, \quad (3.11)$$

$$Y(\omega) = Y_r(\omega) + jY_i(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}, \quad (3.12)$$

onde $A(\omega)$ representa amplitude e $j\theta(\omega)$ representa a fase. Aplicando a convolução⁴³ $y(t) = (x * h)(t)$, e considerando que seja possível aplicar a transformada de Fourier em h podemos aplicar o teorema da convolução

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \mathcal{F}\{h(t)\} = X(\omega)H(\omega), \quad (3.13)$$

onde $H(\omega)$ é a função de transferência ou função de resposta ao impulso do filtro $h(t)$ ver Figura 20. Segundo Chen [39], um sinal de radar é colocado num ambiente com muitos ruídos e este sinal recebido pelo radar (eco) é interpretado através da soma coerente destes sinais e os ruídos. Surge então uma situação de interesse, que é determinar um filtro $h(t)$

⁴² A transformada de Fourier é uma transformada integral particular com núcleo $K(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-j\omega t}$.

⁴³ Conforme Figueiredo [17], Uma função f é dita de decaimento rápido quando ela for infinitamente diferenciável e $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m D^n f(x) = 0$ onde D é o operador derivada e m, n são inteiros positivos. Supondo x e h sob essas condições, podemos aplicar a convolução $(x * h)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$

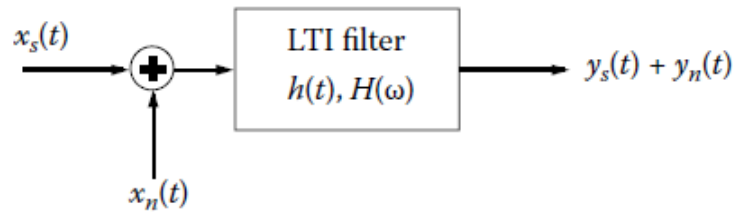


Figura 20 Sistema linear invariante

Fonte: Figura retirada de [39]

que minimize os efeitos do ruído ao final.

O espectro de frequência de resposta $S_X(\omega)$ segundo o estímulo $S_x(\omega)$ é traduzido como $S_X(\omega) = [R(\omega)]^2 S_x(\omega)$, onde segundo [15], o termo $[R(\omega)]$ está elevado ao quadrado para ser medido como o espectro de potência ('power spectra'). As três próximas Subseções retratam três funções de transferência que modulam o sinal eletromagnético e foram baseadas em Young [45], Hasselmann e Hasselmann [3] e Santos [46].

3.5.1 Função de transferência Tilt

Quando a superfície oceânica se inclina, as ondas emitidas pela antena são moduladas ao atingir a superfície inclinada do oceano, aumentando o coeficiente de retroespalhamento σ . Esse efeito modulador altera o comprimento de onda das ondas de Bragg, emitidas pela antena, e conseqüentemente altera a energia retroespalhada. Essa mudança quando interceptada pelo SAR, pode ser transformada em informação. Segundo Hassel-

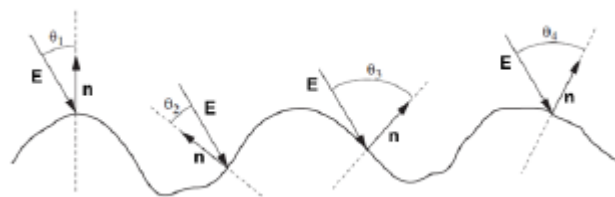


Figura 21 A seção transversal do radar depende do ângulo de incidência do campo eletromagnético do radar (E) e a normal (n) a uma faceta retroespalhadora. O módulo do vetor (e portanto a energia que retorna ao sensor) é maior na inclinação da onda que está na direção do satélite, e menor na direção oposta – caracterizando a modulação por inclinação

Fonte: Figura retirada de [46]

mann e Hasselmann [3], a função de transferência que modula este fenômeno relativo às

inclinações da superfície, sob certas condições pode ser expressada por

$$T_t(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{4j\cot\theta}{(1+\sin^2\theta)^{-1}} & \theta \leq 60^\circ, \\ \frac{8jk_y}{\sin(2\theta)} & \theta > 60^\circ, \end{cases} \quad (3.14)$$

para os tipos de polarização (VV) e (HH), θ representa o ângulo de incidência do radar e k_y é a componente do vetor número de onda na direção de range.

3.5.2 Função de transferência Hidrodinâmica

A deformação periódica da superfície oceânica modula as ondas de Bragg emitidas pela antena, de forma que nas regiões da crista da onda, o sinal é comprimido e nos cavados expandido. Essas regiões em que há compressão, são usualmente chamada de zonas de convergência e as que há expansão são chamados de zonas de divergência. A fórmula descrita em Hasselmann e Hasselmann [3] define a função de transferência hidrodinâmica como

$$T_h(\mathbf{k}) = \frac{\omega - j\mu}{\omega^2 + \mu^2} (4, 5) |\mathbf{k}| \omega \left(\frac{k_y^2}{|\mathbf{k}|} + Y_r + jY_i \right), \quad (3.15)$$

onde μ é um fator de amortecimento, \mathbf{k} é o vetor número de onda, ω é a frequência angular e Y_r e Y_i são coeficientes relacionados à modulação das ondas mais curtas imposta pelas ondas mais longas.



Figura 22 Processo de modulação hidrodinâmico na superfície oceânica e as zonas de divergência e convergência criadas por interferência destrutiva ou construtiva, respectivamente.

Fonte: Figura retirada de [46]

3.5.3 Função de transferência velocity bunching

A função de transferência da velocidade orbital na direção de range é diretamente retirada de Hasselmann [3]

$$T_k^v = -\omega \left(\sin \theta \frac{k_y}{|\mathbf{k}|} + j \cos \theta \right), \quad (3.16)$$

onde \mathbf{k} o vetor número de onda, k_y é a componente na direção de range e ω é a frequência angular. No entanto, como a superfície do oceano está em constante movimento, a frequência Doppler é alterada de forma complexa e essa alteração torna o processo altamente não linear, dando origem ao fenômeno chamado "velocity bunching". Este fenômeno tem origem na modificação da imagem congelada induzido pelo movimento da superfície oceânica. Esta mudança deriva-se de dois efeitos: deslocamento azimutal da posição aparente no plano de imagem ξ e também pelo manchamento azimutal ou ampliamiento da imagem do elemento retroespalhado. O deslocamento azimutal $\xi = \frac{d}{U}v$ onde d é a distância na direção range entre a plataforma do radar e o alvo, U é a velocidade da plataforma e v é a velocidade orbital na direção de range das ondas. Segundo Santos [46], o processo de imageamento SAR é caracteristicamente não linear apesar de ser considerado que as modulações hidrodinâmicas e tilt como processos lineares e conseqüentemente podem ser representados por funções de transferência. A não linearidade é traduzida pelo mecanismo de modulação velocity bunching⁴⁴ e na maioria das vezes é um processo altamente não linear. A não linearidade ocorre usualmente para ondas com comprimento inferior a 100 metros, mas neste caso o deslocamento das facetas é considerado pequeno quando comparado ao comprimento das ondas de interesse, e nessa situação o mecanismo velocity bunching pode ser considerado como processo linear e conseqüentemente pode ser traduzido por uma função de transferência. Para deslocamentos das facetas retroespalhadoras que excedam as ondas de grande comprimento, o padrão das imagem SAR torna-se altamente distorcido e pode ser completamente manchado, perdendo grande parte da resolução na direção azimutal. Sintetizando, a função de transferência do velocity bunching

⁴⁴Este efeito decorre do fato de que para simular uma abertura sintética é empregado o deslocamento Doppler sucessivas vezes de um mesmo alvo em momentos distintos e assim fazendo o registro no plano de imagem do radar. No entanto como a superfície do oceano não é estática, com o aumento da complexidade das mudanças na superfície entre um instante e o outro é suficiente para alterar a frequência do sinal retroespalhado e dependendo da esbeltez das ondas, este processo se torna altamente não linear, dificultando muito as correções no plano de imagem do radar.

é

$$T_{vb} = -j \frac{d}{U} k_x T_k^v. \quad (3.17)$$

3.6 Funções de covariância

As funções de covariâncias à seguir foram apresentadas em Hasselmann e Hasselmann [3], porém, foram elucidadas de forma didática em Santos [46]. A covariância, de forma geral mede o grau de relação entre duas variáveis aleatórias. Este conceito foi aplicado para definir as funções de covariância que serão utilizadas para calcular o espectro de imagem SAR. Uma explicação sucinta desta parte da teoria de estatística pode ser obtida em [47]

3.6.1 Auto-variância da imagem RAR

A função de auto-covariância da imagem RAR é dado por

$$f^R(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int (T_R(\mathbf{k})(T_v(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + T_R(-\mathbf{k})(T_v(\mathbf{k})F(-\mathbf{k}))e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (3.18)$$

onde $T_R = T_t + T_h$, é a soma entre as funções de transferência tilt e hidrodinâmica.

3.6.2 Covariância entre a imagem RAR e velocidade orbital

$$f^{Rv}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int (|T_R(\mathbf{k})|^2 F(\mathbf{k}) + |T_R(-\mathbf{k})|^2 F(-\mathbf{k}))e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (3.19)$$

3.6.3 Autocovariância da imagem orbital

$$f^v(\mathbf{x}) = \int |T_v(\mathbf{k})|^2 F(\mathbf{k})e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad (3.20)$$

3.7 Transformada de Hasselmann

Segundo Young [45], a complexidade dos mecanismos de imageamento dificultou durante muitos anos a validação de medidas quantitativas dos espectros de onda da superfície de imagens SAR. Um problema subsequente a este ocorre quando o objetivo é a inversão dos espectros de imagem SAR para obter espectros de onda geradas pelo vento.

O processo de mapeamento, por ser não linear, admite que um único espectro SAR possa mapear múltiplos espectros de onda geradas pelo vento. Em Hasselmann e Hasselmann [3] foi demonstrado ser possível mediante um processo iterativo envolvendo uma informação adicional obtida por meios externos, uma forma de obter um mapeamento único e consequentemente obter uma relação única entre espectro de imagem de SAR e espectros de onda gerados pelo vento. Essa transformada particular, foi nomeada como Transformada de Hasselmann, denotada pela simbolo \mathcal{H} e será feita uma breve discussão sobre este método baseado em Santos [46] e Hasselmann e Hasselmann [3]. O espectro de ondas oceânica $F(\mathbf{k})$, pode ser obtido por um processo de inversão do espectro de imagem SAR $P^S(\mathbf{k})$. Em outras palavras, podemos associar o espectro de ondas oceânica e o espectro de imagem SAR pela transformação \mathcal{H} , em suma $P^S(\mathbf{k}) = \mathcal{H}(F(\mathbf{k}))$. Ainda podemos escrever

$$\begin{aligned} P^S(\mathbf{k}) = & (2\pi)^{-2} e^{-k_x^2 \xi'^2} \int e^{-ik \cdot r} e^{-k_x^2 \xi'^2 \langle v^2 \rangle^{-1} f^v(\mathbf{r})} [1 + f^R(\mathbf{r}) \\ & + ik_x \beta (f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(-\mathbf{r})) \\ & + (k_x \beta)^2 (f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0}))(f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0}))] d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Expandindo em série de Taylor o termo, $e^{-k_x^2 \xi'^2 \langle v^2 \rangle^{-1} f^v(\mathbf{r})}$ e fazendo algumas operações obtemos a forma

$$P^S(\mathbf{k}) = \exp(-k_x^2 (\xi')^2) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2n-2}^{2n} (k_x \beta)^m P_{nm}(\mathbf{k}), \quad (3.22)$$

as funções P_{nm} são obtidas através das funções de covariância, onde índices n e m , representam a ordem de linearidade em relação ao espectro de ondas de entrada e ao parâmetro β , respectivamente

$$P_{n,2n}(\mathbf{k}) = \Omega_n \left[\frac{(f^v(\mathbf{r}))^n}{n!} \right] \quad (3.23)$$

$$P_{n,2n-1}(\mathbf{k}) = j\Omega_n \left[\frac{(f^{rv}(\mathbf{r}) - f^{rv}(-\mathbf{r}))(f^v(\mathbf{k}))^{n-1}}{(n-1)!} \right] \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} P_{n,2n-2}(\mathbf{k}) = & \Omega_n \left[\frac{(f^R(\mathbf{r}))(f^v(\mathbf{r}))^{n-1}}{(n-1)!} \right. \\ & \left. + \frac{(f^{Rv}(\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0}))(f^{Rv}(-\mathbf{r}) - f^{Rv}(\mathbf{0}))(f^R(\mathbf{r}))^{n-2}}{(n-2)!} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde $\xi'^2 = \langle \xi^2 \rangle$ é a média dos quadrados dos deslocamentos, k_x é a componente do vetor número de onda na direção azimutal, β é a razão entre a distância entre plataforma e o alvo, e a velocidade da plataforma do radar. Ao fixar o índice n e expandindo com relação ao índice m , podemos dizer que

$$P^S(\mathbf{k}) = e^{-k_x^2 \xi'^2} (P_1(\mathbf{k}) + P_2(\mathbf{k}) + \dots P_n(\mathbf{k}) + \dots) \quad (3.26)$$

e ao truncar no primeiro termo, obtemos a transformada quase-linear

$$P_{ql}^S(\mathbf{k}) = \begin{cases} P_1^S(\mathbf{k}) = \Omega_n [f^v(r) + f^R(r) + j(f^{Rv}(r) - f^{Rv}(-r))], \\ \Omega_n = (2\pi)^{-2} \int \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dr, \end{cases} \quad (3.27)$$

e segundo Hasselmann e Hasselmann [3] e Santos [46]

$$P_{ql}^S(\mathbf{k}) = \mathcal{H}_{ql}(F(\mathbf{k})) = \frac{e^{-k_x^2 \xi'^2}}{2} (|T_S(\mathbf{k})|^2 F(\mathbf{k}) + |T_S(-\mathbf{k})|^2 F(-\mathbf{k})), \quad (3.28)$$

onde $T_S = T_t + T_h + T_{vb}$, representa as três funções de transferência representando os três principais mecanismos de modulação.

Sabe-se que (3.22) apresenta ambiguidade direcional, já que o espectro de ondas oceânicas tem comportamento simétrico, $F(-\mathbf{k}) = F(\mathbf{k})$, e devido a perda de informação depois do *cutoff azimutal*, não é possível obter uma inversão única à princípio. Em Hasselmann e Hasselmann [3], é sugerido que, para resolver esse conflito, é necessário introduzir um termo extra de regularização, obtido de um valor inicial sobre o espectro de ondas $F^*(\mathbf{k})$ utilizando um modelo de ondas externo, e aplica-se a transformada quase-linear (3.27) para desenvolver um esquema iterativo para inverter a transformada não linear de forma única (3.21) através da minimização da função custo J ,

$$J = \int [P(\mathbf{k}) - P^*(\mathbf{k})]^2 d\mathbf{k} + \mu \int \left[\frac{[F(\mathbf{k}) - F^*(\mathbf{k})]^2}{[B + F^*(\mathbf{k})]^2} \right] d\mathbf{k}, \quad (3.29)$$

onde B é uma constante arbitrária apenas para evitar que o denominador se anule, $P(k)$ é o espectro de imagem SAR observado e P^* é o espectro de imagem SAR estimado.

4 DEDUÇÃO DE UMA TRANSFORMADA INTEGRAL NÃO LINEAR APLICADA A MÉTODOS INTERFEROMÉTRICOS

4.1 Introdução

Em He e Alpers [2] é obtida uma transformada de amplitude AT-INSAR equivalente à transformada de Hasselmann obtida no Capítulo 3 e uma transformada de fase AT-INSAR, ambas obtidas através de uma imagem interferométrica utilizando um satélite com duas antenas dispostas na direção de voo. A aplicação desta técnica interferométrica depende da diferença de fase do elemento imageado, e portanto é necessário o uso de duas antenas ou que o satélite reúna informações do mesmo alvo em uma segunda órbita.

A obtenção da transformada de amplitude não adiciona mais informações do que a obtida por Hasselmann e Hasselmann em 1991. No entanto, a transformada de fase também é capaz de ser utilizada para sacar informações sobre o campo de correntes, e existem estudos como Goldstein, Barnett e Zebker [48] que relatam, ainda que em fase embrionária quando comparado com o estudo da recuperação do espectro de ondas, a possibilidade de obter informações sobre correntes oceânicas.

Na Seção 4.2, será explicado de forma compacta as técnicas de interferometria aplicadas ao estudo do monitoramento de regiões oceânicas. Na Seção 4.3, temos como objetivo fazer algumas definições como o método das funções características e entre outras questões relevantes para a dedução da transformada de fase AT-INSAR na Seção 4.4.

4.2 Interferometric SAR

Conforme Pellikka e Rees [49] e Hein [50], o processo de imageamento SAR cria uma imagem em duas dimensões utilizando a refletividade do sinal que retorna ao radar. Usualmente apenas a amplitude do sinal é utilizada e as informações contidas nas fases servem apenas para aprimorar a formação da imagem. o INSAR (interferometric synthetic aperture radar) explora a diferença de fases entre duas imagens complexas de radar, tomadas à partir de sensores em diferentes posições, e com isso consegue extrair informações sobre a superfície da Terra. SAR convencional possui algumas limitações, e entre elas está o fato de que quando dois alvos possuem a mesma distância em relação ao sensor causa ambiguidade espacial no plano de imagem do radar, já que ambos ecos

chegam ao mesmo tempo no receptor. Já o INSAR, por utilizar um segundo sensor não possui este problema de ambiguidade, e inclusive possibilita representações espaciais em três dimensões. De fato, técnicas de estereoscopia também utilizam duas imagens e tentam obter informações sobre a profundidade pela diferença na distância na direção range, enquanto a interferometria toma vantagem da coerência dos sinais. O objetivo do INSAR é medir a fase da onda retornada ao radar e comparar com a onda emitida (cuja fase é sempre constante), e assim obter a diferença de fase. No interferograma, as fases são parametrizadas por ciclos de 0 à 2π . As cores do interferograma representam a diferença de fase (por exemplo a cor 1 representa 0° , cor 2 representa 60° , cor 3 representa cor 180° etc.) e basicamente, sabe-se que há uma relação entre a diferença de fase e o deslocamento na direção de range do alvo. Sendo assim, quando a diferença de fase for de 360° , a distância percorrida pela onda do radar (ida e volta) foi acrescentada em 1 comprimento de onda λ , e portanto, se a diferença de fase for de 60° , o deslocamento da superfície será à priori de $\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ}$. No entanto, relacionar o deslocamento do alvo com a diferença de fase não é tão imediato, pois como a fase é medida em ciclos, após atingir 360° o ciclo é reiniciado e portanto a mudança efetiva seria $\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} \pm \frac{\lambda n}{2}$, onde n representa o número de ciclos extras. Para resolver este problema é aplicado uma técnica chamada Phase unwrapping e pode ser bem explicada no material oferecido pela ESA [33] e para adicionais sobre o assunto ver as informações dispostas pela Geospatial Information Authority of Japan [51].

Basicamente, existem dois conceitos sobre o INSAR que devem ser levados em consideração quando escolher o tipo de superfície que será monitorada: modelo de uma passada e modelo de passadas repetidas.

4.2.1 Técnica de passadas repetidas

Este método é o mais convencional pois muitos dos satélites mais utilizados para imageamento são monostáticos. Para calcular a diferença de fases é necessário que o satélite recolha informações do mesmo alvo em mais de uma órbita e conforme o toolbox oferecido pela ESA [33], o SAR registra informações sobre a fase e amplitude da onda que retorna ao satélite. A amplitude representa a força do sinal resposta, e a fase a fração do período em que a onda retorna. A fase da imagem SAR é determinada de forma preponderante pela distância na direção de range entre a antena e o alvo. Esse modo utiliza o fato de que a repetição do ciclo do satélite não é perfeita, resultando num

deslocamento da órbita na direção de range na escala de de algumas centenas de metros. Resumindo, esta recolhe dados em diferentes órbitas com espaçamento temporal muitas vezes na escala de dias, sendo adequada principalmente para estudo de regiões em que o espalhamento do sinal são razoavelmente estáveis durante o período de observação do radar. Segundo Cumming, Rabus e Mercer [52], tomando como exemplo Radarsat-1 leva 24 dias e o Sentinel-1 leva cerca de 12 dias para obter a diferença de fases, tornando o uso destas ferramentas para a recuperação do espectro de ondas por imagens interferométricas. No entanto, para o estudo do fluxo de gelo ártico Canadense, mostrou-se que durante 24 dias boa parte da coerência é mantida razoavelmente estável, como por exemplo deslocamento de superfícies, estudo de derretimento e fluxo de gelo etc. Diversos satélites como: SENTINEL-1, RADARSAT-2, TerraSAR-X, ENVISAT ASAR, ERS 1-2, Cosmo-Skymed, ALOS 1-2 podem aplicar a técnica de passadas repetidas para obter uma imagem interferométrica e seguem o mesmo toolbox da ESA já citado.

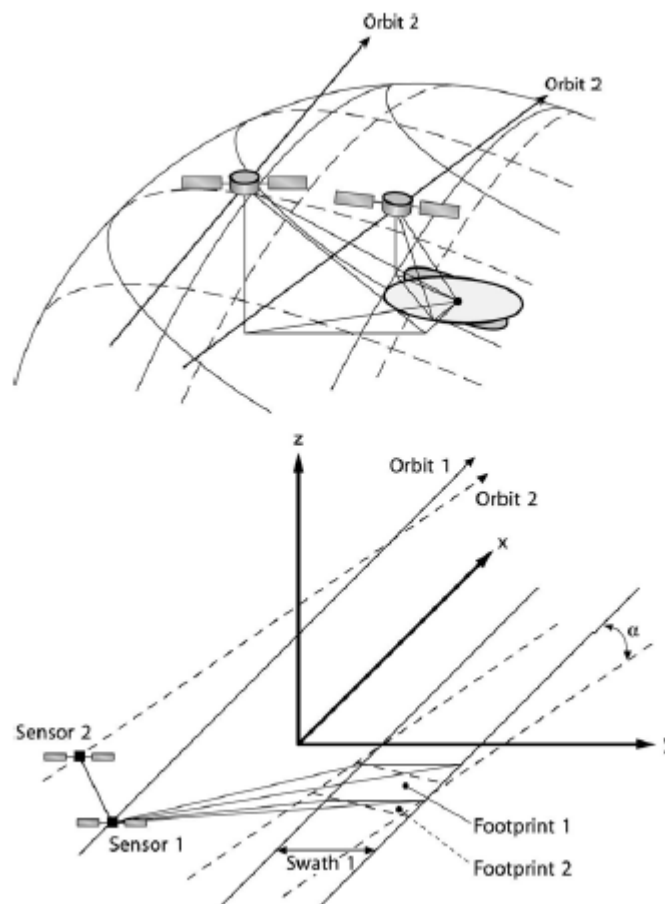


Figura 23 Geometria simplificada da aplicação interferométrica de duas etapas para radares com uma antena.

Fonte: Figura retirada de [50]

4.2.2 Técnica de única passada

Já o segundo mecanismo usualmente utiliza um sistema de radar bistático e faz uso das duas antenas para capturar a diferença de fases numa janela de tempo pequena em apenas uma órbita. Para o estudo da recuperação do espectro direcional de ondas é recomendável utilizar o mecanismo única passada, já que num cenário de mar pouco moderado, a superfície oceânica se modifica drasticamente em alguns dias e portanto, se utilizar o método de múltiplas passadas, devido às mudanças drásticas na atmosfera e na superfície, a coerência do sinal é perdida e a imagem interferométrica aparecerá com muitos ruídos. Atualmente a maioria das plataformas que empregam esse sistema são aeronaves e a forma de aplicação pode ser "along-track", "cross-track" e sistemas híbridos. No entanto, já foi demonstrado que é possível utilizar as técnicas along track e cross-track na espaçonave STRM com bons resultados utilizando duas antenas.

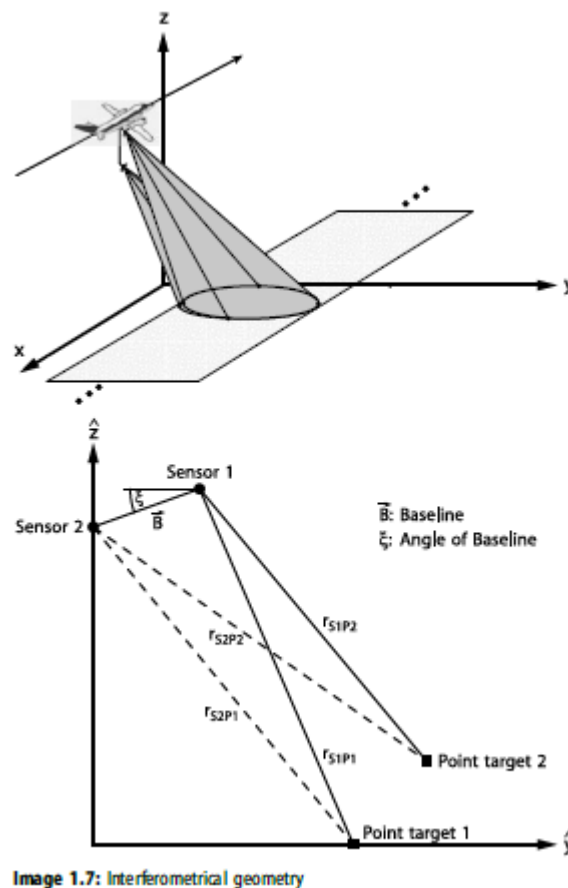


Figura 24 Geometria simplificada da aplicação da interferometria para radares com duas antenas.

Fonte: Figura retirada de [50]

4.2.3 Formação de satélites semi-ativos e completamente ativos

Este método de aquisição de dados usa dois ou mais satélites com órbitas próximas uma da outra, de forma que estes satélites trabalham de forma conjunta como se fossem um só e com isso conseguem aplicar a técnica de única passada para obter a diferença de fases mesmo que os satélites só tenham uma antena. Entre estes sistemas, se dividem os completamente ativos e os semi-ativos.

Sistemas SAR bistáticos podem ser divididos em completamente ativos e semi-ativos. Os sistemas semi-ativos utilizam configurações de uma antena e múltiplos receptores. Isso possibilita o uso de microsatélites receptores de baixo custo e com isso simular o método de única passada com bom custo benefício e segundo Krieger e Moreira [53], Interferometric Cartwheel e Bissat são exemplos bem consistentes da aplicação desta técnica. Além disso, esta abordagem aproveita as múltiplas baselines diferentes para obter informações de estruturas verticais assimétricas e complexas como por exemplo vegetações com diferentes alturas, ver Figura Figura 25. Já em modelos completamente

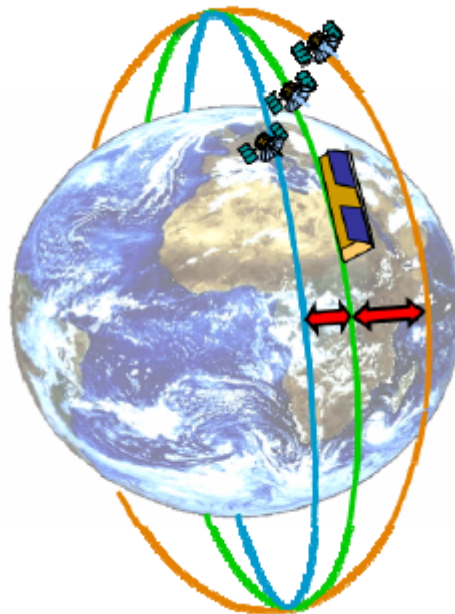


Figura 25 Geometria simplificada da aplicação da interferometria para radares com duas antenas.

Fonte: Figura retirada de [53]

ativos, utiliza múltiplas antenas também com funções receptoras e isso melhora a qualidade dos dados obtidos, conforme dito em Krieger e Moreira [53]. Entre alguns exemplos

que aplicam esta técnica são: ERS-1/2, Radarsat 2/3 e tanDEM-X e este último teve sucesso em obter informações de campos de agricultura, enquanto o primeiro teve sucesso em mapear regiões glaciais. A comparação entre os sistemas semi-ativos e completamente ativos ficam evidenciadas na Figura 26

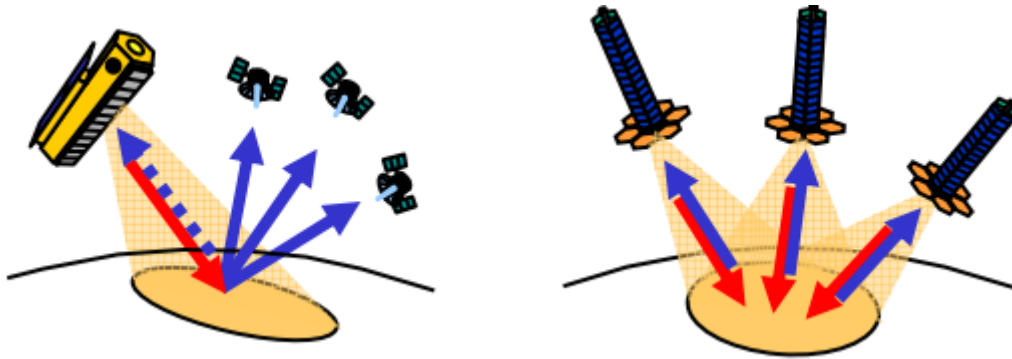


Figura 26 Comparação entre sistemas completamente ativos e semi-ativos.
Fonte: Figura retirada de [53]

4.2.4 Conhecimentos básicos sobre toolbox Sentinel-1

Esta Subseção é baseada principalmente na toolbox da ESA e informações obtidas no site da ESA [33] e complementada com Lu e Dzurisin [54] e pode ser aplicada ao Sentinel-1, ERS-1,2, Radarsat, ALOS-1,2 etc. Ao combinar a fase de duas imagens complexas e após um processo chamado correção é criado um interferograma, e este por sua vez, é altamente relacionado com a topografia da superfície, sendo capaz inclusive de extrair informações sobre padrões de deformação. Durante o processamento interferométrico, duas ou mais imagens devem ser registradas em uma pilha. Uma imagem é selecionada como a mestre e o restante como escravas. As imagens escravas são utilizadas para aumentar a precisão nos subpixels. A formação do interferograma é obtida pela multiplicação da imagem mestre e a conjugada complexa da imagem escrava. A diferença de fase $\Delta\phi = \frac{4\pi R}{\lambda} - \frac{4\pi(R+\Delta R)}{\lambda}$ é proporcional à $\frac{\Delta R}{\lambda}$, onde R representa a distância entre a plataforma e o alvo e λ é o comprimento de onda transmitida pelo radar. A técnica INSAR é capaz de medir os deslocamentos centimétricos com precisão para sensores de banda C, X e L. O INSAR é um sistema que aplica uma técnica chamada interferometria para medir em escala centimétrica a deformação da superfície. O SENTINEL-1 é projetado para permitir a sincronização de dados de repetição, suportando a geração de interferogramas e mapas de coerência. O modo IW geralmente opera com polarização única mas pode ser

utilizado com polarização dual. Além disso, o tempo máximo de operação é 25 minutos por órbita. Um exemplo de modo que utiliza a interferometria é o "Terrain Observation with Progressive Scans SAR (TOPSAR)" que é um sistema presente no Sentinel-1. Esta técnica está presente no modo de aquisição IW (interferometric wide), que por sua vez captura três sub-faixas e adquire dados com resolução espacial de 5m por 20m. Além disso, direciona o feixe em range como no modo ScanSAR, e o feixe também é dirigido eletronicamente de trás para frente na direção de azimute sucessivamente, evitando recortes e resultando em qualidade de imagem homogênea ao longo da faixa. O modo TOPSAR substitui o modo ScanSAR convencional, alcançando a mesma cobertura e resolução que ScanSAR, mas com uma SNR (relação sinal-ruído) e DTAR (Taxa de ambiguidade do alvo distribuído) quase uniforme. Sistemas que necessitam de mais de uma observação em diferentes instantes de determinada área para obter a imagem terão alta correlação se as propriedades de retroespalhamento da superfície não tiverem sido alteradas de forma significativa durante esse intervalo de tempo entre as imagens. Especificamente, para o modo IW, a duração da rajada do radar no modo TOPSAR é entre 0,82 e 0,54 s (pior caso), respectivamente, com um requisito para alcançar uma sincronização de menos de 5 ms entre rajadas correspondentes. O TOPSAR requer alta precisão para o co-registro de imagens. Pequenos erros de co-registro em relação à direção azimutal introduzem erros na frequência Doppler.

4.3 Método das funções características

As definições desta Seção foram baseadas em Florescu e Tudor [55], e nesta referência podem ser obtidas mais informações. O termo função característica deve-se ao cientista Paul Levy, e é uma das principais ferramentas em teoria da probabilidade. De fato, um grupo inteiro de distribuições pode ser introduzido através da função característica.

Definição 4.3.1 *A função característica de um vetor randômico $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, é definida como $\phi = \phi_{\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ com*

$$\phi(\mathbf{w}) = \langle \exp(j\mathbf{w} \cdot \mathbf{Y}) \rangle, \quad (4.1)$$

onde Y_i é uma variável aleatória, $w \in \mathbb{R}^n$.

Existem algumas outras propriedades advindas deste método que são interessantes e algumas delas valem a pena ser mencionadas.

Definição 4.3.2 *Se \mathbf{Y} tem função densidade de probabilidade $f_{\mathbf{Y}}(y)$, então a função característica se reduz à*

$$\phi(\mathbf{w}) = \int_{\mathbb{R}} \exp(j\mathbf{w} \cdot \mathbf{Y}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (4.2)$$

Repare que esta definição é equiparável à definição por transformada de Fourier da função densidade de probabilidade.

$$\tilde{f}(\mathbf{w}) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-j\mathbf{w} \cdot \mathbf{Y}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (4.3)$$

bastando, fazer $\tilde{f}(-\mathbf{w})$. Existem outros resultados que apenas serão mencionados mas podem ser encontrados em [55].

- A função característica é absolutamente contínua.
- Se X, Y são duas variáveis aleatórias independentes então $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.
- $|\phi_X(\mathbf{w})| \leq 1$.
- Se duas variáveis aleatórias tem a mesma função característica então elas tem a mesma função de distribuição acumulada (e conseqüentemente a mesma função densidade de probabilidade).
- Seja Y uma variável aleatória tal que $\langle |Y|^k \rangle$ é finito, então para $i \in [0, k]$, a função característica possui derivada de ordem i , ou seja, $\phi_Y^i(t) = \langle (iY)^j \exp(jtY) \rangle$.

Além disso, um vetor é dito Gaussiano, se e somente se, a sua respectiva função característica é expressa por

$$\phi(\mathbf{w}) = \exp(j\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}), \quad (4.4)$$

onde

$$\boldsymbol{\mu} = \langle \mathbf{Y} \rangle = (\langle Y_1 \rangle, \dots, \langle Y_n \rangle), \quad (4.5)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \langle Y_1 Y_1 \rangle & \dots & \langle Y_1 Y_n \rangle \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \langle Y_n Y_1 \rangle & \dots & \langle Y_n Y_n \rangle \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

onde Σ é a matriz de covariância e μ é o valor esperado do vetor randômico \mathbf{Y} .

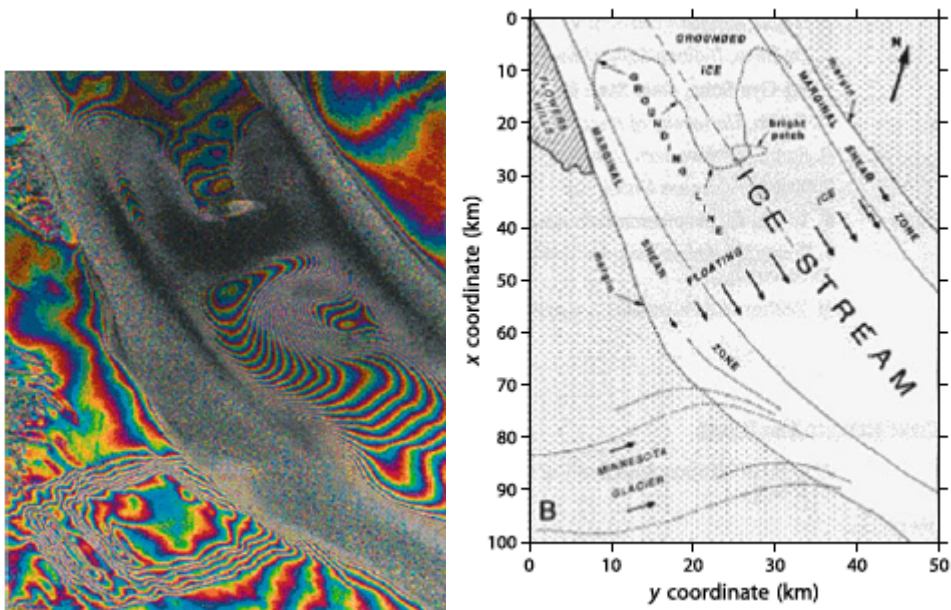
4.4 Dedução da transformada do espectro de fase AT-INSAR

O objetivo desta seção é deduzir a transformada integral não linear que relaciona o espectro de ondas do oceano com o espectro de imagem AT-INSAR (along-track interferometric synthetic aperture radar), onde as antenas do radar são dispostas na direção de vôo, seguindo He e Alpers [2]. Este mecanismo geralmente é utilizado em aeronaves⁴⁵ e foi aplicado com sucesso para obter o campo de correntes oceânicas em Cumming, Rabus e Mercer [52]. No entanto, vale ressaltar que existem propostas de sistemas híbridos Siegmund, Bao, Lehner, Mayerle [56], que além de usar sistemas INSAR ATI (along-track interferometers), utiliza sistemas INSAR XTI (across-track interferometers), e com isso existe a possibilidade de obter tanto informações sobre as correntes como também das elevações do terreno. Apesar de ressaltar o potencial de obter-se informações sobre o campo de correntes oceânicas, não desenvolveremos aqui este assunto, nos atendo apenas a sugerir mais uma referência Goldstein, Barnett e Zebker [48], e a Figura 27 para relacionar o interferograma com as regiões onde há correntes de gelo. Definindo a equação imagem de AT-INSAR complexa $I(\mathbf{x})$ e tomando ela em $x = x_0 + \frac{R}{V}u_r(\mathbf{x}_0)$

$$I(\mathbf{x}) = \int \frac{\sqrt{\pi}}{2} T_0^2 \rho_a \exp\left(\frac{-4B^2}{V^2 T_0^2}\right) \sigma(\mathbf{x}_0) \exp\left(-2jk \frac{B}{V} u_r(\mathbf{x}_0)\right) \exp\left(\frac{4\rho_0^2 B^2}{\rho_a^2(\mathbf{x}_0) T_0^2 V^2}\right) \times \delta\left(x - x_0 - \frac{R}{V} r_r(\mathbf{x}_0)\right) dx_0. \quad (4.7)$$

Onde B representa a distância entre as antenas, $u_r(\mathbf{x}_0)$ representa a componente radial da velocidade do elemento retroespalhado da superfície (e a soma das fases das ondas de Bragg), V é a velocidade da plataforma que carrega o AT-INSAR, σ representa a seção normalizada cruzada do radar, T_0 denota a integração no tempo utilizando método de única passada AT-INSAR e ρ_a é a largura de banda do método de única passada de

⁴⁵ Apesar de ser geralmente utilizado em aeronaves, estes mecanismos along-track e cross-track foram implementados com sucesso utilizando o STRM



(a) Interferograma das geleiras de Minnessota (b) Esquema ilustrativo da região das geleiras de Minnessota

Figura 27 Comparação entre interferograma de uma região e sua respectiva ilustração dada em

Fonte: Figura retirada de [50]

resolução azimutal, $\rho'_a(\mathbf{x}_0)$ é a degradação da resolução azimutal, j é a unidade imaginária e k é o número de onda. Da mesma forma que em He e Alpers [2], a equação (4.7) foi separada na imagem de amplitude $I_A(\mathbf{x})$ e na imagem de fase $I_F(\mathbf{x})$ descritas abaixo

$$I_A(\mathbf{x}) = \int \frac{\pi}{2} T_0^2 \rho_a \exp\left(\frac{-4B^2}{V^2 T_0^2}\right) \sigma(\mathbf{x}_0) \exp\left(\frac{4\rho_0^2 B^2}{\rho_a^2(\mathbf{x}_0) T_0^2 V^2}\right) \times \delta\left(x - x_0 - \frac{R}{V} u_r(\mathbf{x}_0)\right) dx_0, \quad (4.8)$$

$$I_F(\mathbf{x}) = \int \exp\left(-2k \frac{B}{V} u_r(\mathbf{x}_0)\right) \left(1 + \frac{R}{V} u'_r(\mathbf{x}_0)\right) \delta\left(x - x_0 - \frac{R}{V} u_r(\mathbf{x}_0)\right) dx_0. \quad (4.9)$$

Repare que na Equação (4.8), quando $B = 0$, temos uma equação semelhante à obtida em Hasselmann e Hasselmann [3] consequentemente obterá a transformada (3.21) obtida no Capítulo 3 e que a Equação (4.9) foi obtida considerando apenas a parte real da fase da Equação (4.7) relativa à velocidade radial. Além disso, repare que a equação da imagem de fase não é diretamente dependente da seção cruzada normalizada do radar, sendo apenas

relacionada com a velocidade radial⁴⁶. Ao calcular a transformada de Fourier da imagem de fase, obtemos

$$I_F(\mathbf{k}) = \frac{-kB}{2\pi^2V} \int h(\mathbf{x}_0) \exp(-j\mathbf{k}\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0, \quad (4.10)$$

onde

$$h(\mathbf{x}_0) = \left[u_r(\mathbf{x}_0) \left(1 + \frac{R}{V} u'_r(\mathbf{x}_0) \right) \exp\left(\frac{-jkR}{V} u_r(\mathbf{x}_0) \right) \right]. \quad (4.11)$$

O espectro de fase AT-INSAR $P_F(\mathbf{k})$ é definido como

$$\langle I_F(\mathbf{k}) I_F^*(\mathbf{k}') \rangle = P_F(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.12)$$

onde

$$P_F(\mathbf{k}) = \left(\frac{kB}{\pi V} \right)^2 \int \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \langle h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) h^*(\mathbf{x}_0) \rangle d\mathbf{r}, \quad (4.13)$$

Para deduzir a transformada para espectro de fase AT-INSAR, é necessário fazer o cálculo abaixo

$$\langle h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) h^*(\mathbf{x}_0) \rangle. \quad (4.14)$$

Para isso, a metodologia apresentada por Krogstad [57] e aplicada por He e Alpers [2] é de escrever a Equação (4.14) em termos da função característica. Existe um passo intermediário não muito claro presente na Equação (4.12) e para justificar esta questão, foi feita uma pequena modificação em relação à Santos [46]. De fato, por definição

$$P_F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.15)$$

onde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \left\langle I_F(\mathbf{x} + \mathbf{r}) I_F(\mathbf{x}) \exp\left(\frac{-jkR}{V} [u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_r(\mathbf{x})] \right) \right\rangle, \quad (4.16)$$

e aplicando a equação 4.9, no ponto \mathbf{x}_0 ⁴⁷ obtemos

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = \left(\frac{-2kB}{V} \right)^2 \left\langle u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) u_r(\mathbf{x}_0) \left(1 + \frac{R}{V} u'_r(\mathbf{x}_0) \right) \exp\left(\frac{-jkR}{V} [u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_r(\mathbf{x})] \right) \right\rangle, \quad (4.17)$$

⁴⁶Em He e Alpers [2] é dito que a seção normalizada cruzada do radar e a velocidade radial são relacionadas linearmente com a amplitude da onda.

⁴⁷O ponto \mathbf{x}_0 refere-se às coordenadas do oceano, e o ponto \mathbf{x} refere-se às coordenadas no plano de imagem do SAR.

e portanto, temos que

$$\langle I_F(\mathbf{k})I_F^*(\mathbf{k}') \rangle = P_F(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (4.18)$$

Pelo fato do valor esperado ser uma integral, é fácil perceber que podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})h^*(\mathbf{x}_0) \rangle &= \left\langle u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})u_r(\mathbf{x}_0) \exp\left(\frac{-jkR}{V}[u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_r(\mathbf{x})]\right) \right\rangle + \\ &\frac{R}{V} \left\langle u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})u_r(\mathbf{x}_0)(u'_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) + u'_r(\mathbf{x}_0)) \times \exp\left(\frac{-jkR}{V}[u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_r(\mathbf{x})]\right) \right\rangle \\ &+ \left(\frac{R}{V}\right)^2 \left\langle u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})u_r(\mathbf{x}_0)u_r(\mathbf{x}_0)u'_r(\mathbf{x}_0) \exp\left(\frac{-jkR}{V}[u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - u_r(\mathbf{x})]\right) \right\rangle \quad (4.19) \end{aligned}$$

Assumindo as variáveis aleatórias $\xi(\mathbf{x})$ $\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ associadas à variável espacial $u_r(\mathbf{x})$, cuja função densidade de probabilidade conjunta é dita Gaussiana (média zero), e é dada por

$$f[\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})] = \frac{1}{2\pi(c_{11}^2 - c_{12}^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[\frac{\xi^2(-\mathbf{x} + \mathbf{r})\xi^2(\mathbf{x}) - 2\xi(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{2(c_{11}^2 - c_{12}^2)}\right], \quad (4.20)$$

onde $c_{11} = \langle \xi(\mathbf{x})^2 \rangle = \langle \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})^2 \rangle$ e $c_{12} = \langle \xi(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$ são as funções de variância e covariância respectivamente de $\xi(\mathbf{x})$ e $\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})$. Portanto, o problema estocástico é definido seguindo Bao, Alpers e Bruning [58].

Tendo como base a Subseção 4.3, podemos calcular a função característica obtida em He e Alpers [2].

$$T(k_1, k_2) = \langle \exp[jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle \quad (4.21)$$

$$T(k_1, k_2) = \iint d\xi(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \mathbf{r} \exp[jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})] f[\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \quad (4.22)$$

O valor esperado μ é considerado zero, j representa a unidade imaginária, o vetor $t = (k_1, k_2)$, o vetor gaussiano $\mathbf{X} = (\xi(\mathbf{x}), \xi(\mathbf{x}_r))$ e a matriz de covariância é definida como⁴⁸

$$\Sigma = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}$$

⁴⁸Lembre que $c_{11} = \langle \xi(\mathbf{x})^2 \rangle = \langle \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})^2 \rangle$ e este é o motivo do termo da segunda linha segunda coluna ser igual ao c_{11}

Fazendo o calculo da função característica

$$T(\mathbf{t}) = \exp \left(j\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t} \right), \quad (4.23)$$

concluimos

$$T(k_1, k_2) = \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right]. \quad (4.24)$$

Calcularemos separadamente os 3 termos da Equação (4.19) usando a função característica 4.21 e (4.24)

$$\frac{\partial^2 T(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} = \langle j^2 (\xi(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})) \exp(jk_1 \xi(\mathbf{x}) + jk_2 \mathbf{x}) \rangle \quad (4.25)$$

mas também,

$$\frac{\partial^2 T(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} = \frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial k_2} \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right], \quad (4.26)$$

desenvolvendo

$$\frac{\partial T(k_1, k_2)}{\partial k_2} = \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \left(\frac{1}{2} \right) (2k_1 c_{12} + 2k_2 c_{11}) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} &= \left(\frac{\partial}{\partial k_1} \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \right) (2k_1 c_{12} + 2k_2 c_{11}) (-1)(k_1 c_{12} + k_2 c_{11}) \\ &\quad + \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \left(\frac{\partial}{\partial k_1} (k_1 c_{12} + k_2 c_{11}) \right) (-1) \end{aligned} \quad (4.28)$$

com isso obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 T(k_1, k_2)}{\partial k_1 \partial k_2} &= \langle (\xi(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})) \exp(jk_1 \xi(\mathbf{x}) + jk_2 \mathbf{x}) \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] [c_{12} - (k_1 c_{11} + k_2 c_{12})(k_1 c_{12} + k_2 c_{11})] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para calcular o segundo termo de (4.19), temos que realizar alguns passos intermediários.

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \langle (jk_2 \xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r})) \exp(jk_1 \xi(\mathbf{x}) + jk_2 \mathbf{x}) \rangle, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial k_2 \partial r} = \langle (j\xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r})) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle + \langle (j^2 k_2 \xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r})) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial^3 T}{\partial k_1 \partial k_2 \partial r} = \langle (-\xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}))\xi(\mathbf{x}) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle - \langle (jk_2 \xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}))\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})\xi(\mathbf{x}) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle, \quad (4.32)$$

repare que

$$\langle (-\xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}))\xi(\mathbf{x}) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{k_2} \left(\frac{\partial}{\partial k_1} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (4.33)$$

ao colocar os termos relacionados com a função característica para o lado direito da equação, concluímos

$$\langle (\xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}))\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})\xi(\mathbf{x}) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{jk_2} \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{\partial}{\partial k_1} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial k_2} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (4.34)$$

De forma análoga, obtém-se

$$\langle (\xi'(\mathbf{x}))\xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})\xi(\mathbf{x}) \exp(jk_1\xi(\mathbf{x}) + jk_2\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{jk_1} \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial k_2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial k_2 \partial k_1} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (4.35)$$

agora resta fazer os cálculos utilizando a função característica na equação (4.34) e (4.35).

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -(k_1 k_2) \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_2} \frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{\partial c_{12}}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial k_2} \left(\exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] (k_1 k_2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial k_2} (k_1 k_2) \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \right] \\ &= -\frac{\partial c_{12}}{\partial r} [k_1 - k_1 k_2 (k_2 c_{11} + k_1 c_{12})] \exp \left[-\frac{1}{2}(k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_2} \frac{\partial}{\partial k_1} \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \left\{ [k_1^2 k_2 c_{11} + k_1 k_2^2 c_{12} - k_2] \right. \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial k_2} \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \\ &\quad \left. + \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \frac{\partial}{\partial k_2} (k_1^2 k_2 c_{11} + k_1 k_2^2 c_{12} - k_2) \right\} \quad (4.38) \end{aligned}$$

portanto, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{jk_1} \left(\frac{1}{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial k_2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial k_2 \partial 1} \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{jk_1} \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + \right. \\ &\quad \left. 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \{ (k_2^2 c_{11} + k_1 k_2 c_{12}) \\ &\quad + k_2 (k_2 c_{11} + k_1 c_{12}) (k_1^2 c_{11} + k_1 k_2 - 1) - (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12}) \}, \quad (4.39) \end{aligned}$$

fazendo exatamente os mesmos passos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{jk_2} \left(\frac{1}{k_2} \left(\frac{\partial}{\partial k_1} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial 2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{1}{jk_2} \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + \right. \\ &\quad \left. 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \{ (k_1^2 c_{11} + k_1 k_2 c_{12}) \\ &\quad + k_1 (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}) (k_2^2 c_{11} + k_1 k_2 - 1) - (k_2^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12}) \}. \quad (4.40) \end{aligned}$$

Com isso, conseguimos calcular o segundo termo da Equação (4.19). Para calcular o terceiro termo de (4.19) devemos notar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= \langle j k_2 \xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \exp[j k_1 \xi(\mathbf{x}) + j k_2 \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle = \\ &\quad \langle j k_2 \xi'(\mathbf{x}) \exp[j k_1 \xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}) + j k_2 \xi(\mathbf{x})] \rangle, \quad (4.41) \end{aligned}$$

essa suposição é bem posta quando supõe-se que a a distribuição é estacionária.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \langle j^2 k_2 k_1 (-1) \xi'(\mathbf{x}) \xi'(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \exp[j k_1 \xi(\mathbf{x} - \mathbf{r}) + j k_2 \xi(\mathbf{x})] \rangle, \quad (4.42)$$

novamente, pela hipótese estacionária, podemos escrever a equação acima na forma

$$\frac{1}{k_1 k_2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \langle j^2 \xi'(\mathbf{x}) \xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \exp[j k_1 \xi(\mathbf{x}) + j k_2 \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle, \quad (4.43)$$

derivando ambos lados da equação acima, em relação à k_2 e depois em relação à k_1 temos

o terceiro termo da Equação (4.19) em termo da função característica.

$$-\frac{\partial^2}{\partial k_1 \partial k_2} \left(\frac{1}{k_1 k_2} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \langle \xi'(\mathbf{x}) \xi'(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \xi(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \times \exp[jk_1 \xi(\mathbf{x}) + jk_2 \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r})], \quad (4.44)$$

fazendo passo à passo os cálculos do lado esquerdo da equação em relação acima

$$\frac{\partial T}{\partial r} = (-k_1 k_2) \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right], \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] (k_1^2 k_2^2)^2 \left(\frac{\partial c_{12}}{\partial r} \right)^2 - \\ \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] (k_1 k_2) \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{1}{k_1 k_2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) = \left\{ (k_1 k_2) \frac{\partial}{\partial k_1} \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] + \right. \\ \left. \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \frac{\partial}{\partial k_1} (k_1 k_2) \right\} \left(\frac{\partial c_{12}}{\partial r} \right)^2 \\ - \frac{\partial}{\partial k_1} \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \right\} \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

desenvolvendo a equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{1}{k_1 k_2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) = -\exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] [k_2 - (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}) \\ \times (k_1 k_2)] \left(\frac{\partial c_{12}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}), \end{aligned} \quad (4.48)$$

agora só falta derivar em relação à k_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_2} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{1}{k_1 k_2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) = \left\{ \frac{\partial}{\partial k_2} \left[k_2 \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \right] \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial k_2} \left[(k_1^2 k_2 c_{11} + k_1 k_2^2 c_{12}) \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \right] \right\} \quad (4.49) \end{aligned}$$

efetuando o cálculo dessas derivadas, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_2} \frac{\partial}{\partial k_1} \left(\frac{1}{k_1 k_2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) &= \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \left(\frac{\partial c_{12}}{\partial r} \right)^2 \times \\ &\quad \{ 1 - k_2^2 c_{11} - k_1^2 c_{11} - 3k_1 k_2 c_{12} + k_1 k_2 (k_2 c_{11} + k_1 c_{11}) (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}) \} + \\ &\quad \exp \left[-\frac{1}{2} (k_1^2 c_{11} + 2k_1 k_2 c_{12} + k_2^2 c_{11}) \right] \left(\frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2} \right) \{ c_{12} - (k_1 c_{11} + k_2 c_{12}) (k_2 c_{11} + k_1 c_{12}) \} \end{aligned} \quad (4.50)$$

com isso, concluímos o cálculo do terceiro membro da Equação (4.19). Para chegar ao resultado final encontrado em He e Alpers [2], devemos apenas fazer a troca da variável aleatória ξ para a variável espacial u_r , $k_1 := \frac{k_x R}{V}$, $k_2 := \frac{-k_x R}{V}$, e $c_{12} := \langle \xi(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \xi(\mathbf{x}) \rangle := \langle u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_r(\mathbf{x}) \rangle := f^u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})$. Estas alterações aplicadas no primeiro termo, transformam a equação (4.29) e (4.25) em

$$\begin{aligned} \left\langle u_r(\mathbf{x}_0) u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) \exp \left(j \frac{k_x R}{V} u_r(\mathbf{x}_0) - j \frac{k_x R}{V} u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) \right) \right\rangle &= \left[\left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. f^u(\mathbf{r}) + (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))^2 \right] \exp \left[\left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) + f^u(\mathbf{0})) \right], \end{aligned} \quad (4.51)$$

ao calcular estas alterações para o segundo termo, transformando a Equação (4.34) e (4.39) obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle u'_r(\mathbf{x}_0) u_r(\mathbf{x}_0) u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) \exp \left(j \frac{k_x R}{V} u_r(\mathbf{x}_0) - j \frac{k_x R}{V} u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) \right) \right\rangle &= \left(\frac{\partial f^u(\mathbf{r})}{\partial r} \right) \\ &\quad \times \exp \left[\left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) + f^u(\mathbf{0})) \right] \times \\ &\quad \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 \left\{ 2f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}) - j \left(\frac{k_x R^2}{V^2} \right) (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0})) \right\}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

da mesma forma, transformando a equação (4.35) e (4.40) obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle u_r(\mathbf{x}_0)u'_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) \exp(j\frac{k_x R}{V}u_r(\mathbf{x}_0) - j\frac{k_x R}{V}u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})) \right\rangle &= \left(\frac{\partial f^u(\mathbf{r})}{\partial r} \right) \\ &\times \exp \left[\left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) + f^u(\mathbf{0})) \right] \times \\ &j \left(\frac{k_x R^2}{V^2} \right) \left\{ 2f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}) - \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0})) \right\}, \quad (4.53) \end{aligned}$$

falta apenas fazer a troca de variável para o terceiro termo, alterando as Equações (4.35) e (4.40), obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle u'_r(\mathbf{x}_0)u'_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})u_r(\mathbf{x}_0)u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}) \exp(j\frac{k_x R}{V}u_r(\mathbf{x}_0) - j\frac{k_x R}{V}u_r(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r})) \right\rangle &= \\ - \left\{ \left[1 + \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (3f^u(\mathbf{r}) - 2f^u(\mathbf{0})) + \left(\frac{k_x R}{V} \right)^4 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))^2 \right] \right. \\ \times \left. \left[\left(\frac{\partial f^u(\mathbf{r})}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f^u(\mathbf{r})}{\partial r^2} \right) \left[f^u(\mathbf{r}) + \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))^2 \right] \right] \right\} \\ \times \exp \left[\left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) + f^u(\mathbf{0})) \right]. \quad (4.54) \end{aligned}$$

Substituindo agora, as Equações (4.51), (4.52), (4.53), (4.54) em (4.19) e finalmente, substituindo na equação (4.13) obtemos o que queríamos demonstrar

$$\begin{aligned} P_F^S(\mathbf{k}) &= \left(\frac{k_x B}{\pi V} \right)^2 \int d\mathbf{r} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp \left[\left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0})) \right] \\ &\times \left[f^u(\mathbf{r}) + \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))^2 \right] \left(1 - \frac{\partial^2 f^u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}^2} \right) \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 + 2j \left(\frac{k_x R^2}{V^2} \right) \\ &\times \left(\frac{R}{V} \right)^2 \left(\frac{\partial f^u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \left(\frac{\partial f^u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right) \left[2f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}) + \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))^2 \right] \\ &- \left[1 + \left(\frac{k_x R}{V} \right)^2 (3f^u(\mathbf{r}) - 2f^u(\mathbf{0})) + (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))^2 \left(\frac{k_x R}{V} \right)^4 \right], \quad (4.55) \end{aligned}$$

onde

$$f^u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int (|T_k^u|^2 F(\mathbf{k}) + |T_{-k}^u|^2 F(-\mathbf{k})) \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (4.56)$$

Ainda, segundo He e Alpers [2], é possível obter uma transformada quasi-linear como aproximação da transformada de fase original (4.55). A dedução desta transformada

quasi-linear será deduzida baseada em Zhang, Perrie e He [59]. Quando o parâmetro de não linearidade $u'_r(\mathbf{x}_0)$ é pequeno, a Equação (4.9) se torna

$$I_F(\mathbf{x}) = \int \exp\left(-2k\frac{B}{V}u_r(\mathbf{x}_0)\right) \delta\left(x - x_0 - \frac{R}{V}r_r(\mathbf{x}_0)\right) dx_0. \quad (4.57)$$

Refazendo todos os cálculos, aplicando novamente o método das funções características com a Equação acima, obtemos

$$P_F(\mathbf{k}) = \left(\frac{kB}{\pi V}\right)^2 \int d\mathbf{r} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp\left[\left(\frac{k_x R}{V}\right)^2 (f^u(\mathbf{r}) - f^u(\mathbf{0}))\right] \\ \times \left\{ \left(\frac{k_x R}{V}\right)^2 (f^u(\mathbf{0}))^2 + \frac{j}{k_x} \left(\left(\frac{k_x R}{V}\right)^4 f^u(\mathbf{0})^2 - 1\right) \frac{\partial f^u(\mathbf{r})}{\partial r} \right\} \quad (4.58)$$

Podemos escrever a Equação (4.58) da seguinte forma

$$P_F(\mathbf{k}) = \left(\frac{kB}{\pi V}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{k_x R}{V}\right)^2 f^u(\mathbf{0})\right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k_x R}{V}\right)^{2k} \frac{1}{(k+1)!} \\ \times \int f^u(\mathbf{r})^{k+1} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.59)$$

tomando $n = 0$ obtemos a equação e utilizando (4.56)

$$P_{Fql}^S(\mathbf{k}) = \left(\frac{2kB}{V}\right)^2 \frac{\exp(-k_x^2 R^2 V^{-2} f^u(\mathbf{0}))}{2} (|T_k^u(\mathbf{k})|^2 F(\mathbf{k}) + |T_k^u(-\mathbf{k})|^2 F(-\mathbf{k})), \quad (4.60)$$

onde a função de transferência da velocidade de range é

$$T_k^u = \omega \left(\sin \theta \frac{k_l}{|k|} + j \cos \theta \right). \quad (4.61)$$

Esta transformada quase-linear foi aplicada para obter informações sobre ondas na superfície oceânica com sucesso num sistema AT-INSAR implementado em aeronaves em He e Alpers [2] e Zhang, Perrie e He [59].

CONCLUSÃO

A transformada proposta por He e Alpers [2] é muito interessante no sentido de contornar algumas das limitações da transformada proposta por Hasselmann e Hasselmann [3]. O uso de uma única função de transferência chamada função de transferência da velocidade na direção de range sem dúvidas é uma vantagem em relação à transformada de Hasselmann, por não necessitar a função de transferência hidrodinâmica.

A transformada integral não linear demonstrada (4.55) recupera informações do espectro de ondas oceânico através do espectro de fases AT-INSAR de forma eficiente e a sua respectiva transformada quasi-linear também ofereceu resultados satisfatórios, segundo He e Alpers [2]. Contudo, o uso desta técnica é fortemente influenciado pela baseline, e para sistemas com apenas uma antena se torna praticamente inviável a obtenção do espectro de onda oceânica via imagens AT-INSAR, pois durante os cálculos da diferença de fase, uma parte relevante da coerência entre os sinais é perdida e consequentemente o nível de ruído do interferograma aumenta substancialmente em estados de mar elevados. Portanto, o uso de radares com duas antenas é recomendado. Contudo, é importante ressaltar que com exceção do SRTM (Shuttle Radar Topography Mission), a maioria dos satélites como ERS-1,2, Radarsat-1, Sentinel-1 comportam radares monoestáticos e portanto suas baselines são da ordem de centenas de metros, enquanto do STRM é da ordem de 60m. Logo, de todas as opções citadas, a que teoricamente teria mais sucesso para obtenção do espectro de ondas aplicando a interferometria seria o STRM. Ainda é válido salientar que a validação desta técnica para obtenção do espectro de ondas apenas foi demonstrada para aeronaves como CV-580, provavelmente pelo tamanho da baseline ser na ordem de 0,6m como informado em Vachon, Campbell, Gray e Dobson [60]. Para projetos futuros, é primeiramente necessário uma avaliação mais rigorosa do ponto de vista matemático, já que há passos intermediários e definições na literatura que possivelmente devem ser melhor estruturadas. Outra opção interessante seria avaliar se existem transformadas quasi-lineares mais eficientes para obter informações gerais do espectro de ondas, seja por menor custo operacional, seja por melhoria na qualidade das informações. Por fim, apesar da possibilidade de mapeamento de correntes oceânicas através de imagens AT-INSAR já ter sido demonstrada em Cumming, Rabus e Mercer [52], este processo pode ser melhorado do ponto de vista matemático.

REFERÊNCIAS

- [1] HASSELMANN, K. et al. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project (jonswap). *Ergänzungsheft 8-12*, Deutsches Hydrographisches Institut, 1973.
- [2] HE, Y.; ALPERS, W. On the nonlinear integral transform of an ocean wave spectrum into an along-track interferometric synthetic aperture radar image spectrum. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Wiley Online Library, v. 108, n. C6, 2003.
- [3] HASSELMANN, K.; HASSELMANN, S. On the nonlinear mapping of an ocean wave spectrum into a synthetic aperture radar image spectrum and its inversion. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Wiley Online Library, v. 96, n. C6, p. 10713–10729, 1991.
- [4] TRUJILLO, A. P.; THURMAN, H. V. *Essentials of oceanography*. [S.l.]: Upper Saddle River, N.J: Pearson Prentice Hall., 2013.
- [5] . *Ondas transversais e longitudinais*. <http://www.explicatorium.com/cfq-8/caracteristicas-das-ondas.html>. Accessed: 2019-04-1.
- [6] Kahalu'u Bay Surf and Sea. *Swell Waves*. <https://learntosurfkona.com/featured/how-to-read-a-surf-report/>. Accessed: 2019-04-03.
- [7] . *Lakie Erie Water Level Displacement*. <https://weatherology.com/articles/138/What+is+a+Seiche%3F.html>. Accessed: 2019-04-03.
- [8] RYSZARD, M. S. *Ocean surface waves: their physics and prediction*. [S.l.]: World scientific, 1996.
- [9] PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência-Com Aplicações as Ciências Físicas e a Engenharia*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.
- [10] STEWART, J. *Calculus*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.
- [11] FARINA, L. Ondas oceânicas de superfície. *Notas em Matemática Aplicada, SBMAC*, v. 25, 2006.

- [12] KROGSTAD, H. E.; ARNTSEN, O. A. Linear wave theory part a. *Norwegian University of Science and Technology*, p. 5–9, 2000.
- [13] MCWILLIAMS, J. C. et al. *Fundamentals of geophysical fluid dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- [14] WASSERMAN, L. *All of statistics: a concise course in statistical inference*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] HOLTHUIJSEN, L. H. *Waves in oceanic and coastal waters*. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- [16] ALPERS, W. Monte carlo simulations for studying the relationship between ocean wave and synthetic aperture radar image spectra. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Wiley Online Library, v. 88, n. C3, p. 1745–1759, 1983.
- [17] FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.
- [18] KROGSTAD, H. E.; ARNTSEN, O. A. Linear wave theory part b. *Norwegian University of Science and Technology*, p. 5–9, 2000.
- [19] GARDINER, C. *Stochastic methods*. [S.l.]: Springer Berlin, 2009.
- [20] STORCH, H. V.; ZWIERS, F. W. *Statistical analysis in climate research*. [S.l.]: Cambridge university press, 2001.
- [21] . *Mean and Correlation Functions*. <http://mathworld.wolfram.com/Autocorrelation.html>. Accessed: 2019-04-03.
- [22] PHILLIPS, O. M. The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 4, n. 4, p. 426–434, 1958.
- [23] JR, W. J. P.; MOSKOWITZ, L. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of sa kitaigorodskii. *Journal of geophysical research*, Wiley Online Library, v. 69, n. 24, p. 5181–5190, 1964.
- [24] KITAIGORODSKII, S. On the theory of the equilibrium range in the spectrum of wind-generated gravity waves. *Journal of Physical Oceanography*, v. 13, n. 5, p. 816–827, 1983.

- [25] BRETSCHNEIDER, C. L. *Generation of waves by wind. State of the art.* [S.l.], 1965.
- [26] TOBA, Y. Local balance in the air-sea boundary processes. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, Springer, v. 29, n. 5, p. 209–220, 1973.
- [27] PHILLIPS, O. Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 156, p. 505–531, 1985.
- [28] OLTMAN-SHAY, J.; GUZA, R. A data-adaptive ocean wave directional-spectrum estimator for pitch and roll type measurements. *Journal of physical oceanography*, v. 14, n. 11, p. 1800–1810, 1984.
- [29] EARLE, M. D. Nondirectional and directional wave data analysis procedures. *NDBC Tech. Doc*, v. 96, n. 002, 1996.
- [30] . *Significant wave height*. https://en.wikipedia.org/wiki/Significant_wave_height#/media/File:Wavestats.svg. Accessed: 2019-04-1.
- [31] MANDEL, L.; WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995.
- [32] CURLANDER, J. C.; MCDONOUGH, R. N. *Synthetic aperture radar- Systems and signal processing(Book)*. [S.l.]: New York: John Wiley & Sons, Inc, 1991., 1991.
- [33] VECCI, L. *TOPS Interferometry Tutorial*. 2015.
- [34] MARPLE, S. L.; MARINO, C. Coherence in signal processing: a fundamental re-definition. In: IEEE. *Conference Record of the Thirty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, 2004*. [S.l.], 2004. v. 1, p. 1035–1038.
- [35] KANEVSKY, M. B. *Radar imaging of the ocean waves*. [S.l.]: Elsevier, 2008.
- [36] WANG, B.-C. *Digital signal processing techniques and applications in radar image processing*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- [37] TEIXEIRA, S. *Radar de abertura sintética aplicado ao mapeamento e reconhecimento de zonas úmidas costeiras*. Tese (Doutorado) — Insituto de Geociências - UFPA, 2011.

- [38] MAÎTRE, H. *Processing of Synthetic Aperture Radar (SAR) Images*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- [39] CHEN, K.-S. *Principles of Synthetic Aperture Radar Imaging: A System Simulation Approach*. [S.l.]: CRC Press, 2016.
- [40] . *SARgeometry*. <http://www.dpi.inpe.br/spring/teoria/radar/radar.htm>. Accessed: 2019-04-03.
- [41] MOREIRA, A. et al. A tutorial on synthetic aperture radar. *IEEE Geoscience and remote sensing magazine*, IEEE, v. 1, n. 1, p. 6–43, 2013.
- [42] . *InSAR*. <https://topex.ucsd.edu/nepal/>. Accessed: 2019-04-03.
- [43] LANG, M. W.; TOWNSEND, P. A.; KASISCHKE, E. S. Influence of incidence angle on detecting flooded forests using c-hh synthetic aperture radar data. *Remote Sensing of Environment*, Elsevier, v. 112, n. 10, p. 3898–3907, 2008.
- [44] KUANG, H.-l. et al. Retrievals of sea surface temperature fronts from sar imagery. *Geophysical Research Letters*, Wiley Online Library, v. 39, n. 10, 2012.
- [45] YOUNG, I. R. *Wind generated ocean waves*. [S.l.]: Elsevier, 1999.
- [46] SANTOS, A. L. C. dos. *Recuperação do espectro direcional de ondas oceânica com o uso de radar de abertura sintética*. Tese (PhD dissertation) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2015.
- [47] . *Mean and Correlation Functions*. https://www.probabilitycourse.com/chapter10/10_1_2_mean_and_correlation_functions.php. Accessed: 2019-04-03.
- [48] GOLDSTEIN, R.; ZEBKER, H.; BARNETT, T. Remote sensing of ocean currents. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 246, n. 4935, p. 1282–1285, 1989.
- [49] PELLIKKA, P.; REES, W. G. *Remote sensing of glaciers: Techniques for topographic, spatial and thematic mapping of glaciers*. [S.l.]: CRC Press, 2009.
- [50] HEIN, A. *Processing of SAR data*. [S.l.]: Springer, 2003.

- [51] Geospatial Information Authority of Japan. *Ondas transversais e longitudinais*. <https://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/sar/qanda/qanda-e.html#q2-12>. Accessed: 2019-08-21.
- [52] CUMMING, I. G.; RABUS, B.; MERCER, B. Current interferometry results in canada. In: IEEE. *2008 IEEE Radar Conference*. [S.l.], 2008. p. 1–6.
- [53] KRIEGER, G.; MOREIRA, A. Multistatic sar satellite formations: Potentials and challenges. In: IEEE. *Proceedings. 2005 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2005. IGARSS'05*. [S.l.], 2005. v. 4, p. 2680–2684.
- [54] LU, Z.; DZURISIN, D. *InSAR imaging of Aleutian volcanoes*. [S.l.]: Springer, 2014. 87–345 p.
- [55] FLORESCU, I.; TUDOR, C. A. *Handbook of probability*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- [56] SIEGMUND, R. et al. First demonstration of surface currents imaged by hybrid along-and cross-track interferometric sar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, IEEE, v. 42, n. 3, p. 511–519, 2004.
- [57] KROGSTAD, H. A simple derivation of hasselmann’s nonlinear ocean-synthetic aperture radar transform. *J. Geophys. Res.*, v. 97, p. 2,421–2,425, 02 1992.
- [58] BAO, M.; ALPERS, W.; BRUNING, C. A new nonlinear integral transform relating ocean wave spectra to phase image spectra of an along-track interferometric synthetic aperture radar. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, IEEE, v. 37, n. 1, p. 461–466, 1999.
- [59] ZHANG, B.; PERRIE, W.; HE, Y. Remote sensing of ocean waves by along-track interferometric synthetic aperture radar. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, Wiley Online Library, v. 114, n. C10, 2009.
- [60] VACHON, P. W. et al. Validation of along-track interferometric sar measurements of ocean surface waves. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, IEEE, v. 37, n. 1, p. 150–162, 1999.