INTRODUÇÃO

Problemas de controle para sistemas descritos por *equações lineares de evolução* (grosso modo, equações envolvendo derivadas parciais relativas ao tempo e a coordenadas espaciais) tem recebido considerável atenção na literatura recente, ver por exemplo (KOGUT; LEUGERING, 2011; TRÖLTZSCH, 2010; ZUAZUA, 2002) e suas referências).

Em particular, o objetivo básico de atingir aproximadamente um estado final desejado a partir de um dado estado inicial tem dado origem a vários problemas de *controle ótimo* (em *malha aberta*) para equações parabólicas em geral e, em especial, para a *equação do calor*. Tais problemas podem englobar diferentes tipos de *condições de fronteira* (de *Dirichlet*, *Neumann* ou *Robin*) e os casos de controle atuando na fronteira do domínio espacial considerado ou como um termo de fonte no interior do mesmo.

Usualmente, estes problemas visam à obtenção de uma *função de controle* definida (de forma geral) tanto em um intervalo de tempo pré-especificado quanto no domínio espacial no qual a equação é definida, *i.e.*, em cada instante o "sinal" de controle assume como "valor" uma função definida em todo o domínio espacial em questão.

Por outro lado, tendo em vista potenciais aplicações, é interessante considerar o caso de funções de controle dependente apenas do tempo (em cada instante o sinal de controle assume como "valor" um ponto no \mathbb{R}^n , para algum *n* fixado *a priori*), cuja ação espacial é definida pelos "atuadores" utilizados. Neste trabalho, será considerado um *problema de controle ótimo quadrático* para a equação do calor em domínios retangulares com condição de fronteira do tipo Dirichlet e, no qual, a função de controle (dependente apenas no tempo) constitui um termo de fonte.

No Capítulo 1, é apresentada a fundamentação teórica desde a ótica da engenharia do problema de controle ótimo de transmissão térmica. No Capítulo 2, é apresentada a equação do calor na forma clássica e uma solução no sentido das *series de Fourier*. No Capítulo 3, é apresentada a equação do calor na forma clássica e uma representação da solução (no sentido fraco) em termos de sequências definidas pelo *método de Galerkin*. No Capítulo 4, um problema de controle ótimo é formulado e uma caracterização da solução ótima é obtida na forma de uma equação linear em um espaço de funções reais definidas no intervalo de tempo considerado. No Capítulo 5, utiliza-se uma sequência de projeções em subespaços de dimensão finita para obter aproximações para o controle ótimo, cada uma das quais pode ser gerada por um sistema linear de dimensão finita. No Capítulo 6 são apresentados resultados numéricos para domínios espaciais de dimensão 1. Finalmente, no Capítulo 7 apresentam-se algumas considerações finais. As demonstrações das proposições apresentadas ao longo do texto encontram-se em (CORRÊA; LÓPEZ–FLORES; MADUREIRA, 2012b).

1 PROBLEMA DE POSICIONAMENTO APROXIMADO DO ESTADO FINAL

1.1 Descrição Matemática da Condução de Calor em Corpos Rígidos

1.1.1 Introdução

A equação da energia para um corpo contínuo, também conhecida como primeira lei da termodinâmica, consiste em um axioma que estabelece que:

A taxa de variação da quantidade de energia de um corpo (cinética + interna) é igual à taxa de realização de trabalho mecânico sobre este corpo (potência mecânica as forças atuando sobre o corpo) mais a taxa de energia transmitida na forma de calor (calor transmitido por unidade de tempo pela fronteira + a geração interna de calor).

O princípio acima é representado matematicamente por

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_t} \rho \left[u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial \mathcal{U}_t} (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial \mathcal{U}_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial \mathcal{U}_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{U}_t} \dot{q} dV, \quad (1.1.1)$$

onde:

$$\begin{split} &\int_{\partial \mathcal{U}_t} \left(\mathbf{Tn}\right) \cdot \mathbf{v} dS \quad : \quad \text{potência mecânica das forças da superfície (contato);} \\ &\int_{\partial \mathcal{U}_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \quad : \quad \text{potência mecânica das forças do corpo;} \\ &\int_{\partial \mathcal{U}_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad : \quad \text{fluxo de calor cruzando (entrando) a fronteira do corpo;} \\ &\int_{\mathcal{U}_t} \dot{q} dV \quad : \quad \text{taxa de geração interna de calor (energia).} \end{split}$$

A quantidade ρ representa a densidade do corpo \mathcal{U}_t (configuração atual do corpo), a função u representa a energia interna do corpo e \mathbf{v} representa o campo velocidades do corpo. A quantidade \mathbf{q} representa o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e área), enquanto que a quantidade \dot{q} representa a taxa de geração de calor (por unidade de tempo e volume). Por exemplo, quando uma corrente elétrica flui através de um condutor, \dot{q} é positivo e, na média, igual ao produto da diferença de potencial pela corrente, dividido pelo respectivo volume de material condutor. O sinal negativo na penúltima integral da equação acima, aparece para que essa integral represente o fluxo que entra e não o que sai. Reescrevendo (1.1.1) com auxílio do *teorema do transporte de Reynolds* (cf. APÊN-DICE A.1), na seguinte forma,

$$\int_{\mathcal{U}_{t}} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) div \mathbf{v} \right\} dV =$$

$$= \int_{\partial \mathcal{U}_{t}} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial \mathcal{U}_{t}} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial \mathcal{U}_{t}} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{U}_{t}} \dot{q} dV.$$
(1.1.2)

Reescrevendo a parte interna da integral do lado esquerdo de (1.1.2) como

$$\frac{D}{Dt} \left[\rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) div\mathbf{v} =$$

$$= \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) div\mathbf{v}$$

$$= \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\mathbf{v} \right] \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \tag{1.1.3}$$

e considerando que a equação da continuidade estabelece o seguinte

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\mathbf{v} = 0. \tag{1.1.4}$$

Logo obtém-se

$$\int_{\mathcal{U}_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\partial \mathcal{U}_t} (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial \mathcal{U}_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial \mathcal{U}_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\mathcal{U}_t} \dot{q} dV. \quad (1.1.5)$$

A simetria do tensor tensão, ${\bf T},$ e
oteorema da divergência (cf. APÊNDICE A.1) permite escrever

$$\int_{\partial \mathcal{U}_t} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\partial \mathcal{U}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial \mathcal{U}_t} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial \mathcal{U}_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$$
$$= \int_{\mathcal{U}_t} div (\mathbf{T}\mathbf{v}) dV - \int_{\mathcal{U}_t} div \mathbf{q} dV. \quad (1.1.6)$$

Assim, a equação da energia, (1.1.1), fica

$$\int_{\mathcal{U}_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\mathcal{U}_t} div \left(\mathbf{T} \mathbf{v} \right) dV + \int_{\partial \mathcal{U}_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\mathcal{U}_t} div \mathbf{q} dV + \int_{\mathcal{U}_t} \dot{q} dV. \quad (1.1.7)$$

20

Como a região \mathcal{U}_t é arbitrária, pode-se concluir que (a forma local da equação da energia para um corpo contínuo) é dada por

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = div \left(\mathbf{T} \mathbf{v} \right) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - div \mathbf{q} + \dot{q}.$$
(1.1.8)

Uma vez que

$$div\left(\mathbf{T}\mathbf{v}\right) = (div\mathbf{T})\cdot\mathbf{v} + \mathbf{T}\cdot grad\mathbf{v}$$
(1.1.9)

e que

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\cdot\mathbf{v} \tag{1.1.10}$$

a equação (1.1.8) pode-se escrever como

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = (div\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot grad\mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - div\mathbf{q} + \dot{q}.$$
 (1.1.11)

Levando em conta que a equação de movimento linear estabelece que

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = div\mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \tag{1.1.12}$$

a forma local da equação da energia dada por (1.1.8), se reduz a

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T} \cdot grad\mathbf{v} - div\mathbf{q} + \dot{q}. \tag{1.1.13}$$

A simetria do tensor de tensão e a definição de *derivada material* (cf. APÊNDICE A.1) permite reescrever como

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + grad \ u \cdot \mathbf{v}\right) = -div\mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \dot{q},\tag{1.1.14}$$

onde **D** é a parte simétrica do gradiente de velocidades (cf. APÊNDICE A.1). É importante mencionar que para corpos rígidos, $grad\mathbf{v}$ é antissimétrico e então $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = 0$.

1.1.2 <u>A Lei de Fourier</u>

Inicialmente admite-se que o vetor fluxo de calor dependa apenas da distribuição de temperaturas. Em outras palavras, o vetor de fluxo de calor \mathbf{q} deve ser uma função da temperatura θ e do seu gradiente espacial grad θ . Para atender aos princípios de objetividade da Mecânica do Contínuo, tem-se que (SLATTERY, 1999, p. 251–256, 273–275)

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \left(\theta, grad \ \theta \right) grad \ \theta. \tag{1.1.15}$$

A Lei de Fourier é uma caso particular da equação acima onde K depende apenas de θ . No caso de materiais isotrópicos, a Lei de Fourier se reduz a

$$\mathbf{q} = -\kappa\left(\theta\right) grad \ \theta \tag{1.1.16}$$

onde o escalar κ é chamado de *condutividade térmica*. Em engenharia é comum se aproximar a condutividade térmica por um valor médio constante. Em outras palavras, é comum desprezar a dependência da condutividade térmica com a temperatura.

1.1.3 Condução de Calor em Sólidos Rígidos, Isotrópicos e em Repouso

Para um sólido opaco, rígido e em repouso, a equação da energia se reduz a

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -div\mathbf{q} + \dot{q}. \tag{1.1.17}$$

Por ser um corpo rígido, o calor específico a volume constante só depende da temperatura. Denotando este calor específico por c, pode-se escrever

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -div\mathbf{q} + \dot{q} \tag{1.1.18}$$

onde θ representa o campo de temperaturas.

Considerando que $\mathbf{q} = -\kappa \ grad \ \theta$, tem-se então a equação geral da condução de calor num sólido rígido, isotrópico e em repouso dada por

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = div \left(\kappa \ grad \ \theta\right) + \dot{q}. \tag{1.1.19}$$

A equação diferencial acima requer condições iniciais e condições de contorno. No caso de problemas em regime permanente, a derivada com respeito ao tempo será nula. Neste trabalho será analisado o caso unidimensional plano (1-D). Será suposto que a condutividade térmica κ , a densidade do material ρ e o calor específico c são constantes. Logo desde que \dot{q} não dependa da temperatura θ é possível escrever (1.1.19) como

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = f(x, t), \qquad (1.1.20)$$

onde $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c} > 0$ é a difusividade térmica e $f(x,t) = \frac{\dot{q}}{\rho c}$. É importante ressaltar que

a condutividade térmica é estritamente positiva. "O calor flui no sentido oposto ao do gradiente de temperaturas".

1.1.4 Condições de Contorno (C.C.)

Condições de contorno do tipo *Dirichlet* (Temperatura prescrita) e *Neumann* (parede isolada) são as que mais aparecem na literatura clássica de transmissão de calor. No entanto, ambas são pouco realistas. Em última análise, não há como prescrever temperatura e não existe material isolante perfeito (a condição de Neumann pode ser usada com precisão apenas quando descrever simetria). Assim, com o intuito de manter um mínimo de coerência com a realidade, devemos utilizar condições de contorno que correlacionem a temperatura na fronteira com o fluxo normal de calor. Por exemplo, a lei de Newton do resfriamento, dada por

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = h \left(\theta - \theta_{\infty} \right) \text{ sobre } \partial \mathcal{U}. \tag{1.1.21}$$

Contudo, pela simplicidade relativa dos problemas resultantes e do caráter da aproximação (ainda grosseira) em vários casos, condições de contorno Dirichlet são comumente encontradas na literatura, ver por exemplo, (MARUŠIĆ–PALOKA, 1999), (KU-NICH; VEXLER, 2007), (BELGACEM; BERNARDI; FEKIH, 2011).

Assim sendo, o problema de posicionamento aproximado do estado final de um sistema térmico descrito pela equação do calor, neste caso 1-D, será aqui formulado como um problema de controle ótimo de equações diferenciais parciais para tempo final, t_F , com a condição de contorno de Dirichlet. Ainda que não seja uma condição muito realista, ela permite fazer um análise mais rápido e intuitivo dos resultados numéricos. Bem como comparar os resultados aqui obtidos com outros previamente disponíveis.

A formulação aqui apresentada pode-se estender para dimensões maiores do que 1, cf. (CORRÊA; LÓPEZ–FLORES; MADUREIRA, 2012a).

1.2 Problema de Controle Ótimo do Sistema Térmico Descrito pela Equação do Calor

1.2.1 <u>Enunciado do Problema</u>

Um problema de controle ótimo padrão com tempo final livre possui (TRÔLTZSCH, 2010, pg. 2):

- um funcional de custo a ser minimizado,
- um problema de valor inicial para uma equação diferencial,
- $\bullet\,$ uma função de controle \boldsymbol{u} e
- varias restrições que devem ser satisfeitas.

O controle \boldsymbol{u} pode ser escolhido livremente dentro do conjunto das restrições dadas, enquanto o estado do sistema é determinado de forma única pela equação diferencial e as condições iniciais. A escolha de \boldsymbol{u} deve ser de tal maneira que a função de custo seja minimizada. Este tipo de controles são chamados de *ótimos*. A representação matemática do problema de posicionamento do estado final, *i.e.*, levar o sistema para um estado em um tempo final finito t_F preestabelecido, estará dado pelo seguinte problema:

Achar \boldsymbol{u} tal que

$$\min_{\boldsymbol{u}\in L_{2}(0,t_{F})^{m}}\mathcal{J}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_{L_{2}(0,t_{F})^{m}}^{2} + \rho_{F} \|\theta_{o}(t_{F};\boldsymbol{u}) - \underline{\theta}_{r}(x,t_{F})\|_{L_{2}((0,L_{x}))}^{2}, \text{ onde } \rho_{F} \in \mathbb{R}_{+}$$

sujeito a

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f_S(x,t) + \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}^{\mathrm{T}}(x) \boldsymbol{u}(t) \qquad \forall x \in (0, L_x), \ \forall t \in (0, t_F) \\
\theta(x,t) = 0 \qquad \qquad \text{para } x = \{0, L_x\}, \ \forall t \in (0, t_F) \\
\theta(x,0) = g(x) \qquad \qquad \forall x \in (0, L_x).$$

1.2.2 Interpretação do Problema

A escolha deste tipo de problema se deve ao fato que ele fornece muita informação sobre o sistema e como ele se comporta sob a influencia de um ou vários controles. Estes detalhes serão esclarecidos nos capítulos posteriores. O funcional de custo, $\mathcal{J}(\boldsymbol{u})$, é um *funcional convexo, contínuo e coercivo* o que juntamente com o fato de $L_2(0, t_f)^m$ ser convexo e fechado garante a existência de uma \boldsymbol{u} que o minimiza (EKELAND; TÉNEMAM, 1976, p. 35–36). Cada um dos Membros deste funcional contem informação importante.

A "energia" que o controle \boldsymbol{u} utiliza para levar o sistema ao estado final desejado (objetivo) em um intervalo finito de tempo, $(0, t_F)$, podes ser estudada analisando o comportamento de $\|\boldsymbol{u}\|_{L_2(0,t_F)^m}^2$. Consegue-se isto ao variar o parâmetro ρ_F que penaliza a aproximação do sistema sob a atuação do controle, $\theta_o(t_F; \boldsymbol{u})$, ao estado final desejado, $\underline{\theta}_r(x, t_F)$. Esta informação pode ser de utilidade no momento de projetar um controlador real para um sistema representado pela equação do calor. O termo $\|\theta_o(t_F; \boldsymbol{u}) - \underline{\theta}_r(x, t_F)\|_{L_2((0,L_x))}^2$ da informação sobre a proximidade do estado final ótimo do sistema sob a atuação do controle e o estado (objetivo) ao qual espera-se aproximar.

Todo isto sujeito ao sistema descrito pela equação do calor com um termo de fonte, que está em um estado inicial dado por $\theta(x,0) = g(x)$ o qual está sendo controlado no intervalo de tempo finito $(0,t_F)$, com $t_F > 0$. Este termo de fonte consiste em uma termo de pertubação não controlada, $f_S(x,t)$, e um termo $\boldsymbol{\beta}_S(x)^{\mathrm{T}}$ que representa a posição em um domínio espacial unidimensional de uma ou varias fontes de calor, $(0, L_x)$, para $L_x > 0$, com valores na fronteira prescritos (condição de contorno Dirichlet), de diferentes fontes controladas, $\boldsymbol{\beta}_{Si}(x), i = 1, \ldots, m$, por a função de controle $\boldsymbol{u}(t)$. Cabe salientar que esta função de controle pode ser uma função vetorial $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, *i.e.*, $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$, onde cada elemento do vetor representaria controles para cada fonte individual de $\boldsymbol{\beta}_S(x)^{\mathrm{T}}$, *i.e.*, $\boldsymbol{\beta}_{Si}(x)u_i(t), i = 1, \ldots, m$.

Nos capítulos seguintes, desenvolve-se todo um procedimento rigoroso e detalhado para conseguir resolver de forma aproximada o problema de controle ótimo proposto. Assim obtendo-se um procedimento numérico para simular o comportamento dos estados $\theta(x,t)$ do sistema e do controle $\boldsymbol{u}(t)$ para $x \in (0, L_x)$ e $t \in (0, t_F)$ ao variar o parâmetro ρ_F .

2 PROBLEMA CLÁSSICO

2.1 Solução Analítica da Equação do Calor (1-D)

Considere o problema de condição inicial e de *fronteira de Dirichlet* para a equação do calor definido (na forma clássica) (PINCHOVER; RUBINSTEIN, 2005, p. 99–105, 159–161) por:

Dadas as funções f, g e a constante $\alpha \in \mathbb{R}_+$, achar θ tal que

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad \forall x \in \mathcal{U}, \forall t \in (0,\infty) \qquad (2.1.1)$$

$$\theta(x,t) = 0$$
 $\forall x \in \partial \mathcal{U}, \forall t \in (0,\infty)$ (2.1.2)

$$\theta(x,0) = g(x) \qquad \forall x \in \mathcal{U}$$
 (2.1.3)

onde $\mathcal{U} \triangleq \{x : x \in (0, L_x)\}, L_x \in \mathbb{R}_+, \partial \mathcal{U}, \text{ \'e a fronteira de } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}, i.e. \ \partial \mathcal{U} = cl(\mathcal{U}) - \mathcal{U},$ com $cl(\mathcal{U}) \triangleq \{x : x \in [0, L_x]\}, f \in g$ são funções dadas.

Usando o método de separação de variáveis, procura-se uma solução da forma

$$\theta(x,t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t). \tag{2.1.4}$$

Primeiro resolve-se o problema homogêneo. Introduzindo (2.1.4) em (2.1.1) e tomando $f\equiv 0$ obtém-se

$$X(x)T'(t) - \alpha X''(x)T(t) = 0.$$
(2.1.5)

Dividindo ambos os lados por X(x)T(t) obtém-se

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - \alpha \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$
(2.1.6)

Reescreve-se (2.1.6) e obtém-se

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
 (2.1.7)

onde $\lambda = -\frac{1}{\alpha} \frac{\mathrm{T}'(t)}{\mathrm{T}(t)}$. Logo aplicando (2.1.4) a (2.1.2) obtém-se $\mathrm{X}(x)\mathrm{T}(t) = 0 \quad \forall x \in \partial \mathcal{U}$ -*i.e.*

$$X(0) = X(L_x) = 0. (2.1.8)$$

Do anterior obtém-se a equação diferencial ordinária com condições de fronteira dada pelo seguinte problema de auto-valores de Sturm – Liouville

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

 $X(0) = X(L_x) = 0.$ (2.1.9)

É possível mostrar que para que o problema anterior possua solução periódica não trivial é necessário que $\lambda > 0$ (PINCHOVER; RUBINSTEIN, 2005, p. 134–135). Para este caso obtém-se uma solução periódica geral dada por

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x). \qquad (2.1.10)$$

Aplicando (2.1.8) a (2.1.10) obtém-se o conjunto de soluções

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right), \text{ com } B_k = 1 \text{ para } k \in \mathbb{Z}_+.$$
(2.1.11)

Usando o *principio de superposição* (KREYSZIG; KREYSZIG; NORMINGTON, 2011, p. 106) no anterior (2.1.4) reescreve-se como

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right).$$
(2.1.12)

Substituindo em (2.1.1) obtém-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathbf{T}'_k(t) + \alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 \mathbf{T}_k(t) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) = f(x, t).$$
(2.1.13)

Expandindo $f \in g \in series de Fourier$

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right), \qquad (2.1.14)$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right)$$
(2.1.15)

onde

$$f_k(t) = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} f(x,t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx \quad \text{e} \quad g_k = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx, \quad (2.1.16)$$

obtém-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathbf{T}'_k(t) + \alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 \mathbf{T}_k(t) \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right).$$
(2.1.17)

Da unicidade da expansão de Fourier chega-se à família de EDOs

$$\mathbf{T}_{k}'(t) + \alpha \left(\frac{k\pi}{L_{x}}\right)^{2} \mathbf{T}_{k}(t) = f_{k}(t).$$
(2.1.18)

De (2.1.3) tem-se

$$\theta(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_k(0) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) = g(x)$$
(2.1.19)

o que implica

$$\mathbf{T}_k(0) = g_k, \text{ para } k \in \mathbb{Z}_+.$$

$$(2.1.20)$$

O anterior pode ser escrito como

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{k}(t) + \alpha \left(\frac{k\pi}{L_{x}}\right)^{2} \mathbf{T}_{k}(t) = f_{k}(t), \\ \mathbf{T}(0) = g_{k} \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{Z}_{+} \end{cases}$$
(2.1.21)

Usando o método do *fator integrante* (KREYSZIG; KREYSZIG; NORMINGTON, 2011, p. 28–29) para resolver (2.1.21) obtém-se

$$T_k(t) = g_k \exp\left[-\alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 t\right] + \int_0^t \exp\left[-\alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 (t-\tau)\right] f_k(\tau) d\tau.$$
(2.1.22)

$$T_k(t) = g_k \exp(-\nu_k t) + \int_0^t \exp(-\nu_k) f_k(\tau) d\tau, \qquad (2.1.23)$$

onde $\nu_k = \alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2$. Logo escreve-se

De forma equivalente

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g_k \exp\left(-\nu_k t\right) + \int_0^t \exp\left(-\nu_k\right) f_k(\tau) d\tau \right\} \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right), \quad (2.1.24)$$

i.e.,

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{T}_k(t)\phi_k(x)$$
(2.1.25)

 $\operatorname{com} x \in [0, L_x] e t \in (0, \infty).$

3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA APROXIMADO

3.1 Solução "Fraca" da Equação do Calor (1-D)

Considere o problema de condição inicial e de fronteira de *Dirichlet* para a equação do calor definido (na forma clássica) por:

Dadas as funções $f, g \in \alpha \in \mathbb{R}_+$, achar θ tal que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = f(x, t) \qquad \forall x \in \mathcal{U}, \forall t \in (0, \infty) \qquad (3.1.1)$$

$$\theta(x,t) = 0$$
 $\forall x \in \partial \mathcal{U}, \forall t \in (0,\infty)$ (3.1.2)

$$\theta(x,0) = g(x) \qquad \forall x \in \mathcal{U}$$
 (3.1.3)

onde $\mathcal{U} \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} \{x : x \in (0, L_x)\}, L_x \in \mathbb{R}_+, \partial \mathcal{U}, \text{ \'e a fronteira de } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}, i.e. \ \partial \mathcal{U} = cl(\mathcal{U}) - \mathcal{U},$ com $cl(\mathcal{U}) \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} \{x : x \in [0, L_x]\}, f \in g$ são funções dadas.

Para evitar hipóteses excessivamente restritivas sobre o par (f, g) no processo de garantir existência e unicidade de soluções para a equação acima, considera-se uma generalização da mesma envolvendo derivadas parciais definidas no sentido fraco (EVANS, 2010, p. 371–380). A existência de uma única solução (no sentido fraco) para cada para $(f,g) \text{ com } g \in L_2(\mathcal{U}) \text{ e } f(\cdot,t) \in L_2(\text{q.t.p. em } [0,t_F], t_F < \infty)$ pode ser então estabelecida por meio do método de Galerkin (cf. APÊNDICE B) conforme descrito a seguir. Escreve-se (3.1.1)-(3.1.3) como

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t}, \phi \right\rangle - \alpha \left\langle \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = \langle f, \phi \rangle \\ \langle \theta \left(\cdot, 0 \right), \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle \end{cases}$$
(3.1.4)

onde $\langle \theta, \phi \rangle = \int_\Omega \theta \phi dx.$ Usando a primeira identidade de Green (cf. APÊNDICE A.2) tem-se

$$\left\langle \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \phi \right\rangle = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \phi d\mathcal{U} = \underbrace{\int_{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \phi \cdot \mathbf{n} d(\partial \mathcal{U})}_{\text{por }\underline{(\underline{3}^{.1.2})_0}} - \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\mathcal{U} = -\left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle. \quad (3.1.5)$$

Daí (3.1.4) reescreve-se como

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial t}, \phi \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\rangle = \left\langle f, \phi \right\rangle \\ & \cdot \\ \left\langle \theta \left(\cdot, 0 \right), \phi \right\rangle = \left\langle g, \phi \right\rangle \end{cases}$$
(3.1.6)

Para aproximar θ , assuma-se que as funções $\phi_k = \phi_k(x), k = 1, 2, \dots$ são suaves,

$$\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$$
 é uma base ortogonal de $H_0^1(\mathcal{U})$ (3.1.7)

е

$$\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$$
 é uma base ortonormal de $L_2(\mathcal{U})$, (3.1.8)

onde $H_0^1(\mathcal{U})$ é o espaço das funções definidas sobre \mathcal{U} que possuem derivadas parciais de 1^{*a*} ordem no sentido fraco que se anulam na fronteira de \mathcal{U} e $L_2(\mathcal{U})$ é o espaço das funções reais definidas sobre \mathcal{U} que são quadrado integrável.

Escolhendo-se $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ como o conjunto das *auto-funções* apropriadamente normalizadas do operador $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ em $H_0^1(\mathcal{U})$.

Escolhe-se o conjunto

$$\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}.$$
(3.1.9)

O conjunto é ortogonal, pois

$$\langle \phi_l, \phi_k \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right), \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) \right\rangle$$
$$= \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \sin\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx = 0, \quad \text{se} \quad l \neq k.$$
(3.1.10)

Também é *ortonormal*, pois

$$\langle \phi_k, \phi_k \rangle = \left\| \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) \right\|^2 = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx = 1.$$
(3.1.11)

Além disso (3.1.9) satisfaze a propriedade de ter derivadas ortogonais (LEWIS, 1953). Tem-se

$$\langle \phi'_l, \phi'_k \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{2}{L_x}} \frac{l\pi}{L_x} \cos\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right), \sqrt{\frac{2}{L_x}} \frac{k\pi}{L_x} \cos\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) \right\rangle$$

$$= \frac{2lk\pi^2}{L_x^3} \int_0^{L_x} \cos\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx = 0, \quad \text{se} \quad l \neq k.$$
(3.1.12)

е

$$\langle \phi'_k, \phi'_k \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{2}{L_x}} \frac{k\pi}{L_x} \cos\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right), \sqrt{\frac{2}{L_x}} \frac{k\pi}{L_x} \cos\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) \right\rangle$$

$$= \frac{2k^2 \pi^2}{L_x^3} \int_0^{L_x} \cos^2\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx = \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2.$$

$$(3.1.13)$$

Os cálculos completos das integrais anteriores encontram-se no APÊNDICE A.3.

Para um número inteiro positivo K_a , procura-se por uma função θ_{K_a} : $[0, t_F] \to H_0^1(\mathcal{U})$ da forma,

$$\theta_{K_a}(\cdot, t) = \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(t) \phi_l.$$
(3.1.14)

Onde os coeficientes $\{C_l^{K_a}(t)\}_{l=1}^{K_a}$ são tais que $\theta_{K_a}(\cdot, t)$ satisfazem (3.1.6) restritos ao $span(\phi_1, \ldots, \phi_{K_a})$ para t > 0. Logo constrói-se um sistema análogo a (3.1.6)

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial \theta_{K_a}}{\partial t}, \phi_k \right\rangle + \alpha \left\langle \frac{\partial \theta_{K_a}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right\rangle = \langle f, \phi_k \rangle \\ \\ \langle \theta \left(\cdot, 0 \right), \phi_k \rangle = \langle g, \phi_k \rangle \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, K_a \end{cases}$$
(3.1.15)

De (3.1.14) tem-se

$$\frac{\partial \theta_{K_a}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(t) \phi_l \right) = \sum_{l=1}^{K_a} \frac{\partial C_l^{K_a}(t)}{\partial t} \phi_l.$$
(3.1.16)

Logo que

$$\left\langle \frac{\partial \theta_{K_a}}{\partial t}, \phi_k \right\rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{K_a} \frac{\partial C_l^{K_a}(t)}{\partial t} \phi_l, \phi_k \right\rangle$$
$$= \sum_{l=1}^{K_a} \frac{\partial C_l^{K_a}(t)}{\partial t} \left\langle \phi_l, \phi_k \right\rangle$$
$$= \frac{\partial C_k^{K_a}(t)}{\partial t}. \tag{3.1.17}$$

Agora tem-se

$$\frac{\partial \theta_{K_a}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(t) \phi_l \right) = \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(t) \frac{\partial \phi_l}{\partial x}.$$
 (3.1.18)

Logo que

$$\alpha \left\langle \frac{\partial \theta_{K_a}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right\rangle = \alpha \left\langle \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(t) \frac{\partial \phi_l}{\partial x}, \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right\rangle$$
$$= \alpha \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(t) \left\langle \frac{\partial \phi_l}{\partial x}, \frac{\partial \phi_k}{\partial x} \right\rangle$$
$$= \alpha \left(\frac{k\pi}{L_x} \right)^2 C_k^{K_a}(t).$$
(3.1.19)

Daí

$$\theta_{K_a}(\cdot, 0) = \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a}(0) \phi_l$$
(3.1.20)

е

$$\langle \theta_{K_a} (\cdot, 0), \phi_k \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a} (0) \phi_l, \phi_k \right\rangle$$

$$= \sum_{l=1}^{K_a} C_l^{K_a} (0) \langle \phi_l, \phi_k \rangle$$

$$= C_k^{K_a} (0).$$

$$(3.1.21)$$

Usando (3.1.17), (3.1.19) e (3.1.21) escreve-se (3.1.15) como

$$\begin{cases} \frac{\partial C_k^{K_a}(t)}{\partial t} = -\alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 C_k^{K_a}(t) + \langle f(\cdot, t), \phi_k \rangle \\ C_k^{K_a}(0) = \langle g, \phi_k \rangle \quad \text{para} \quad k = 1, \dots, K_a \end{cases}$$
(3.1.22)

Observa-se que (3.1.22) pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_{1}^{K_{a}}(t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial C_{k}^{K_{a}}(t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial C_{K_{a}}^{K_{a}}(t)}{\partial t} \end{bmatrix} = -\alpha \left(\frac{\pi}{L_{x}}\right)^{2} \begin{bmatrix} 1^{2} & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & k^{2} & & \\ 0 & & \ddots & & \\ 0 & & & K^{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{1}^{K_{a}}(t) \\ \vdots \\ C_{k}^{K_{a}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle f(\cdot,t), \phi_{k} \rangle \\ \vdots \\ \langle f(\cdot,t), \phi_{k} \rangle \\ \vdots \\ \langle f(\cdot,t), \phi_{K_{a}} \rangle \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} C_{1}^{K_{a}}(0) \\ \vdots \\ C_{k}^{K_{a}}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g, \phi_{1} \rangle \\ \vdots \\ \langle g, \phi_{k} \rangle \\ \vdots \\ \langle g, \phi_{K_{a}} \rangle \end{bmatrix} .$$
(3.1.23)

Denota-se

$$\dot{\underline{\mathbf{C}}}_{K_{a}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{1}^{K_{a}}(t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial C_{k}^{K_{a}}(t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial C_{K_{a}}^{K_{a}}(t)}{\partial t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K_{a}}, \ \underline{\mathbf{C}}_{K_{a}}(t) = \begin{bmatrix} C_{1}^{K_{a}}(t) \\ \vdots \\ C_{k}^{K_{a}}(t) \\ \vdots \\ C_{K_{a}}^{K_{a}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K_{a}}, \ \underline{\mathbf{C}}_{K_{a}}(0) = \begin{bmatrix} C_{1}^{K_{a}}(0) \\ \vdots \\ C_{k}^{K_{a}}(0) \\ \vdots \\ C_{K_{a}}^{K_{a}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K_{a}}$$

$$(3.1.24)$$

$$\mathbf{\underline{f}}_{K_{a}}(t) = \begin{bmatrix} \langle f(\cdot,t),\phi_{1} \rangle \\ \vdots \\ \langle f(\cdot,t),\phi_{k} \rangle \\ \vdots \\ \langle f(\cdot,t),\phi_{K_{a}} \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K_{a}}, \ \mathbf{\underline{g}}_{K_{a}} = \begin{bmatrix} \langle g,\phi_{1} \rangle \\ \vdots \\ \langle g,\phi_{k} \rangle \\ \vdots \\ \langle g,\phi_{K_{a}} \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K_{a}}$$
(3.1.25)

е

$$\mathbf{A}_{K_{a}} = \begin{bmatrix} -\alpha \left(\frac{(1)\pi}{L_{x}}\right)^{2} & & \\ & \ddots & & \\ & & -\alpha \left(\frac{(k)\pi}{L_{x}}\right)^{2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & -\alpha \left(\frac{(K_{a})\pi}{L_{x}}\right)^{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K_{a} \times K_{a}}. \quad (3.1.26)$$

Escreve-se (3.1.23) na forma

$$\begin{cases} \underline{\dot{\mathbf{C}}}_{K_{a}}(t) &= \mathbf{A}_{K_{a}} \underline{\mathbf{C}}_{K_{a}}(t) + \underline{\mathbf{f}}_{K_{a}}(t) \\ \\ \underline{\mathbf{C}}_{K_{a}}(0) &= \underline{\mathbf{g}}_{K_{a}} \end{cases}$$
(3.1.27)

Assim como em $\left(2.1.21\right)$ a solução de $\left(3.1.27\right)$ está dada por

$$\underline{\mathbf{C}}_{K_{a}}(t) = \underline{\mathbf{g}}_{K_{a}} \exp\left(\mathbf{A}_{Ka}t\right) + \int_{0}^{t} \exp\left[\mathbf{A}_{K_{a}}\left(t-\tau\right)\right] \underline{\mathbf{f}}_{K_{a}}\left(\tau\right) d\tau.$$
(3.1.28)

$$C_k^{K_a}(t) = g_k \exp\left(-\nu_k t\right) + \int_0^t \exp\left[-\nu_k(t-\tau)\right] f_k(\tau) d\tau, \qquad (3.1.29)$$

onde $\nu_k = \alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2$, para $k = 1, \dots, K_a$.

Definindo $\Phi_{K_a}(t) = \exp(\mathbf{A}_{K_a}t)$ reescreve-se o anterior como

$$\underline{\mathbf{C}}_{K_{a}}\left(t\right) = \underline{\mathbf{g}}_{K_{a}} \mathbf{\Phi}_{K_{a}}\left(t\right) + \int_{0}^{t} \mathbf{\Phi}_{K_{a}}\left(t-\tau\right) \underline{\mathbf{f}}_{K_{a}}\left(\tau\right) d\tau.$$
(3.1.30)

Com $\left\{C_{k}^{K_{a}}\left(t\right)\right\}_{k=1}^{K_{a}}$ definida por (3.1.29) a sequência de funções,

$$\left\{\theta_{K_{a}}(x,t) = \sum_{k=1}^{K_{a}} C_{k}^{K_{a}}(t) \phi_{k}(x)\right\},$$
(3.1.31)

converge fracamente em $L_2((0,t); H_0^1(\mathcal{U}))$ e o limite correspondente, denotado por $\underline{\theta}_o$, é a única solução fraca do problema apresentado em (3.1.1)–(3.1.3) para o par (f,g) dado (EVANS, 2010, p. 371–379).

4 POSICIONAMENTO APROXIMADO DO ESTADO FINAL

4.1 Escolha do Sinal de Controle u

Neste capítulo, aborda-se um problema de controle ótimo para a escolha de um sinal de controle $\boldsymbol{u} : [0, t_F] \to \mathbb{R}^m$ que, agindo por meio de um termo de fonte em (2.1.1), leve $\underline{\theta}(t_F) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (*i.e.*, a função $\theta(\cdot, t_F)$ no instante final t_F) até uma função "próxima" de uma função desejada (objetivo) $\underline{\theta}_r$. Neste sentido, considera-se o caso em que f é soma de uma perturbação externa f_S e de um termo que distribui sobre uma região do domínio espacial a ação de \boldsymbol{u} , *i.e.*,

$$f(x,t) = f_S(x,t) + f_u(x,t), \qquad (4.1.1)$$

onde $f_{\boldsymbol{u}}(x,t) = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}(x)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}(t)$ e $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}(x) \in \mathbb{R}^{m}$ é uma função dada (usualmente, com $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}(x)^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}1}(x), \dots, \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}m}(x)]$, cada $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}j}(\cdot)$, é não nula em apenas uma "pequena" região de \mathcal{U}). Como $\underline{\theta}_{o}$ é função linear de (f,g) pode-se então escrever

$$\underline{\theta}_{o}(t; \boldsymbol{u}) = \underline{\theta}_{a}(t) + \underline{\theta}_{b}(t; \boldsymbol{u}), \qquad (4.1.2)$$

onde $\underline{\theta}_{a}(t) \in \underline{\theta}_{b}(t; \boldsymbol{u})$ são respectivamente aproximadas por

$$\underline{\theta}_{\mathrm{a}K}(t) = \sum_{k=1}^{K} c_{\mathrm{a}k}(t) \phi_k, \qquad (4.1.3)$$

$$\underline{\theta}_{\mathrm{b}K}(t;\boldsymbol{u}) = \sum_{k=1}^{K} c_{\mathrm{b}k}(t;\boldsymbol{u}) \phi_{k}$$
(4.1.4)

е

$$c_{ak}(t) \stackrel{\triangle}{=} \exp\left(-\nu_k t\right) g_k + \int_0^t \exp\left[-\nu_k \left(t - \tau\right)\right] f_{Sk}(\tau) \, d\tau, \qquad (4.1.5)$$

$$c_{\mathbf{b}k}(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_{0}^{t} \exp\left[-\nu_{k}\left(t-\tau\right)\right] \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}k} \boldsymbol{u}(\tau) d\tau \qquad (4.1.6)$$

com $f_{Sk}(\tau) = \langle f_S(\cdot, \tau), \phi_k \rangle$ e $\boldsymbol{\beta}_{Sk} = [\langle \boldsymbol{\beta}_{S1}, \phi_k \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{\beta}_{Sm}, \phi_k \rangle]^{\mathrm{T}}.$

O funcional de custo aqui considerado é definido por

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_{L_2(0,t_F)}^2 + \rho_F \|\underline{\theta}_o(t_F; \boldsymbol{u}) - \underline{\theta}_r\|_{L_2(\mathcal{U})}^2, \qquad (4.1.7)$$

onde $\rho_F \in \mathbb{R}_+$, ou equivalentemente,

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_{L_2(0,t_F)^m}^2 + \rho_F \|\mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}] - \underline{\theta}_{ro}(t_F)\|_{L_2(\mathcal{U})}^2, \qquad (4.1.8)$$

onde

$$\rho_F \in \mathbb{R}_+, \|\boldsymbol{u}\|_{L_2(0,t_F)^m}^2 \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} \int_0^{t_F} \boldsymbol{u}\left(t\right)^{\mathbf{T}} \boldsymbol{u}\left(t\right) dt, \qquad (4.1.9)$$

$$\|\xi\|_{L_2(\mathcal{U})}^2 \stackrel{\vartriangle}{=} \langle \xi, \xi \rangle = \int_{\mathcal{U}} \xi^2(x) \, dx, \qquad (4.1.10)$$

$$\mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}] = \underline{\theta}_{\mathrm{b}}\left(t_{F}; \boldsymbol{u}\right) \quad \mathrm{e} \quad \underline{\theta}_{ro}\left(t_{F}\right) = \underline{\theta}_{r} - \underline{\theta}_{\mathrm{a}}\left(t_{F}\right). \tag{4.1.11}$$

4.2 Problema de Otimização

O sinal de controle desejado é escolhido por meio do problema de otimização,

Problema 1

$$\min_{\boldsymbol{u}\in L_2(0,t_F)^m}\mathcal{J}(\boldsymbol{u}),\tag{4.2.1}$$

isto é, deseja-se obter soluções aproximadas e de "dimensão finita" para este problema. Para este fim duas estratégias gerais podem ser usadas, quais sejam

- (*i*) aproximar $\mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}]$ por um modelo de dimensão finita (por exemplo, fixando K e substituindo $\mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}]$ por $\underline{\theta}_{\mathbf{b}K}(\cdot, t_F)$) no funcional de custo e resolver o problema resultante ou
- (ii) resolver o Problema 1 obtendo uma caracterização do *sinal de controle ótimo* u_* , e então aproximar u_* a partir da mesma.

Na derivação a seguir será seguida a estratégia (ii). Neste sentido, a solução ótima do Problema 1 é caracterizada na proposição abaixo.

Proposição 4.1. A única solução u_o do Problema 1 satisfaz a condição de otimalidade

$$\boldsymbol{u}_o + \rho_F \mathcal{T}^*_{\theta} \circ \mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}_o] - \rho_F \mathcal{T}^*_{\theta}[\underline{\theta}_{ro}] = 0 \qquad (4.2.2)$$

onde $\mathcal{T}_{\theta}^{*}: L_{2}(\mathcal{U}) \to L_{2}(0, t_{F})^{m}$ é o adjunto do operador $\mathcal{T}_{\theta}: L_{2}(0, t_{F})^{m} \to L_{2}(\mathcal{U})$ $e \circ$ denota composição de funções. ∇ A equação (4.2.2) é obtida do fato que \boldsymbol{u}_o é ótimo se, somente se para todo $w \in L_2(0, t_F)^m$

$$\langle \boldsymbol{u}_o, w \rangle_t + \rho_F \langle \mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}_o] - \underline{\theta}_{ro}, \mathcal{T}_{\theta}[w] \rangle_x = 0.$$
 (4.2.3)

Isto é equivalente a para todo $w \in L_2(0, t_F)^m$

$$\langle \boldsymbol{u}_o, w \rangle_t + \rho_F \langle \mathcal{T}_{\boldsymbol{\theta}}^* \left[\mathcal{T}_{\boldsymbol{\theta}} \left[\boldsymbol{u}_o \right] - \underline{\theta}_{ro} \right], w \rangle_x = 0,$$
 (4.2.4)

i.e.

$$\boldsymbol{u}_o + \rho_F \mathcal{T}_{\theta}^* \circ \mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}_o] - \rho_F \mathcal{T}_{\theta}^*[\underline{\theta}_{ro}] = 0.$$

5 SOLUÇÕES APROXIMADAS

5.1 Dedução da Função de Controle Aproximado u_K

Uma maneira natural de obter aproximações para \boldsymbol{u}_{o} é introduzir projeções ortogonais, \mathcal{P}_{K} em subespaços $\mathcal{S}_{K} \subset L_{2}(\mathcal{U})$ e substituir \mathcal{T}_{θ} por $\mathcal{P}_{K} \circ \mathcal{T}_{\theta}$ na condição de otimalidade da Proposição 4.1. Assim procedendo, obtém-se uma versão "truncada" de (4.2.2), isto é

$$\boldsymbol{u} + \rho_F \mathcal{T}^*_{\theta} \circ \mathcal{P}_K \circ \mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}] - \rho_F \mathcal{T}^*_{\theta} \circ \mathcal{P}_K[\underline{\theta}_{ro}] = 0$$
(5.1.1)

onde qualquer solução (digamos) \boldsymbol{u}_K satisfaz

$$\boldsymbol{u}_{K} = -\rho_{F} \mathcal{T}_{\theta}^{*} \circ \mathcal{P}_{K} \left\{ \mathcal{T}_{\theta}[\boldsymbol{u}_{K}] - \underline{\theta}_{ro} \right\}$$
(5.1.2)

o que implica que \boldsymbol{u}_K pertence ao subespaço de dimensão finita $\mathcal{T}^*_{\theta}[\mathcal{S}_K]$ e, portanto, sua determinação fica reduzida à resolução de uma equação linear em \mathbb{R}^K , onde K é a dimensão de \mathcal{S}_K . Mais especificamente, seja \mathcal{S}_K o subespaço gerado por $\{\phi_k : k = 1, \ldots, K\}$. Neste caso $\boldsymbol{u} \in \mathcal{T}^*_{\theta}[\mathcal{S}_K]$ se, e somente se existem $\{\hat{\alpha}_k : k = 1, \ldots, K\}$ tais que

$$\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{K} \hat{\alpha}_k \mathcal{T}_{\theta}^* [\phi_k]$$
(5.1.3)

e portanto (5.1.1) pode ser reescrita em termos dos coeficientes $\{\hat{\alpha}_k\}, i.e.,$

$$\mathcal{T}_{\theta}^{*}\left\{\sum_{k=1}^{K}\hat{\alpha}_{k}\phi_{k}+\rho_{F}\sum_{l=1}^{K}\hat{\alpha}_{l}\mathcal{P}_{K}\circ\mathcal{T}_{\theta}\circ\mathcal{T}_{\theta}^{*}[\phi_{l}]-\mathcal{T}_{\theta}^{*}\rho_{F}\mathcal{P}_{K}[\underline{\theta}_{ro}]\right\}=0.$$
(5.1.4)

Como $\{\phi_k : k = 1, ..., K\}$ é uma base ortonormal para $S_K \subset L_2(\mathcal{U})$, o termo entre chaves em (5.1.4) pode ser escrito como

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{\alpha}_k \phi_k + \rho_F \sum_{l=1}^{K} \hat{\alpha}_l \sum_{k=1}^{K} \langle \phi_k, \mathcal{T}_\theta \left[\mathcal{T}_\theta^*[\phi_l] \right] \rangle \phi_k - \rho_F \sum_{k=1}^{K} \hat{\theta}_{rok} \phi_k.$$
(5.1.5)

ou, equivalentemente (trocando a ordem dos somatórios no segundo termo),

$$\sum_{k=1}^{K} \left\{ \hat{\alpha}_{k} + \rho_{F} \sum_{l=1}^{K} \hat{\alpha}_{l} \langle \mathcal{T}_{\theta}^{*}[\phi_{k}], \mathcal{T}_{\theta}^{*}[\phi_{l}] \rangle_{\mathrm{T}} - \rho_{F} \hat{\theta}_{rok} \right\} \phi_{k}$$
(5.1.6)

onde $\hat{\theta}_{rok} \stackrel{\Delta}{=} \langle \underline{\theta}_{ro}, \phi_k \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathrm{T}} \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{t_F} v_1(t)^{\mathrm{T}} v_2(t) dt.$

Segue-se de (5.1.4) e (5.1.6) que se para todo $k=1,\ldots,K$

$$\hat{\alpha}_k + \rho_F \sum_{l=1}^K \hat{\alpha}_l \langle \mathcal{T}^*_{\theta}[\phi_k], \mathcal{T}^*_{\theta}[\phi_l] \rangle_{\mathrm{T}} - \rho_F \hat{\theta}_{rok} = 0, \qquad (5.1.7)$$

então

$$\boldsymbol{u}_{K} \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} \sum_{k=1}^{K} \hat{\alpha}_{k} \mathcal{T}_{\theta}^{*}[\phi_{k}]$$
(5.1.8)

é solução da equação (5.1.1).

Observe-se que, para reescrever, em notação matricial, a equação (5.1.7) relativa aos coeficientes { $\phi_k : k = 1, ..., K$ }. Daí que (5.1.7) é equivalente a para todo p = 1, ..., K

$$\alpha_p + \rho_F \sum_{r=1}^K \alpha_r \langle \mathcal{T}^*_{\theta}[\psi_p^K], \mathcal{T}^*_{\theta}[\psi_r^K] \rangle_{\mathrm{T}} - \rho_F \theta_{rop} = 0$$
(5.1.9)

onde $p = k, r = l, \alpha_p = \hat{\alpha}_k, \alpha_r = \hat{\alpha}_l, \psi_p^K = \phi_k, \psi_p^K = \phi_k e \theta_{rop} = \hat{\theta}_{rok}, i.e., (5.1.7)$ é equivalente a

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{K} + \rho_{F} \mathbf{G}_{K} \overline{\boldsymbol{\alpha}}_{K} = \rho_{F} \overline{\boldsymbol{\theta}}_{K}$$
(5.1.10)

onde $\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{K} \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} [\alpha_{1} \dots \alpha_{K}]^{\mathrm{T}}, \ \overline{\boldsymbol{\theta}}_{K} \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} [\theta_{ro1} \dots \theta_{roK}]^{\mathrm{T}}, \ \{\mathbf{G}_{K}\}_{pr} \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} \langle \mathcal{T}_{\theta}^{*}[\psi_{p}^{K}], \mathcal{T}_{\theta}^{*}[\psi_{r}^{K}]\rangle_{\mathrm{T}}, \ p, r = 1, \dots, K.$

A única solução de (5.1.10) é dada por

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}}_{K} = \left(\mathbf{I} + \rho_{F} \mathbf{G}_{K}\right)^{-1} \rho_{F} \overline{\boldsymbol{\theta}}_{K} \in \mathbb{R}^{K}.$$
(5.1.11)

Segue-se, da construção de \mathbf{G}_K , mostrada em (5.2.12), *i.e.*, de \mathbf{G}_K ser não negativa definida e de $\rho_F \geq 0$, que $\mathbf{I} + \rho_F \mathbf{G}_K$ é sempre invertível. E que a sequência de funções \boldsymbol{u}_K assim obtida aproxima \boldsymbol{u}_o conforme enunciado na proposição a seguir.

Proposição 5.1. Seja
$$\boldsymbol{u}_{K} \stackrel{\scriptscriptstyle \Delta}{=} \sum_{p=1}^{K} \alpha_{p} \mathcal{T}_{\theta}^{*}[\psi_{p}^{K}]$$
. A sequência $\boldsymbol{u}_{K}, K = 1, 2, \ldots$, converge em $L_{2}(0, t_{F})^{m}$ para \boldsymbol{u}_{o} .

Corolário 5.1. O funcional $\mathcal{J}(\boldsymbol{u}_K)$ converge para \mathcal{J}_o , onde $\mathcal{J}_o = \mathcal{J}(\boldsymbol{u}_0)$ é o valor ótimo do Problema 1. ∇