

5.2 Cálculo da Função de Controle Aproximado u_K

Passa-se, a seguir, à obtenção de uma caracterização mais explícita de u_K e da matriz $\mathbf{G}_K \in \mathbb{R}^{K \times K}$. Neste sentido, note, inicialmente, que como para todo $v \in L_2(0, t_F)$, $\psi \in L_2(\mathcal{U})$,

$$\langle \mathcal{T}_\theta^*(\psi), v \rangle_T = \langle \psi, \mathcal{T}_\theta(v) \rangle, \quad (5.2.1)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \psi, \mathcal{T}_\theta(v) \rangle &\stackrel{\text{por (4.1.11)}}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \psi, \underline{\theta}_{bL}(t_F; v) \rangle \\ &\stackrel{\text{por (4.1.4)}}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^L c_{bl}(t_F; v) \langle \psi, \phi_l \rangle \\ &\stackrel{\text{por (4.1.6)}}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^L \langle \psi, \phi_l \rangle \int_0^{t_F} \exp[-\nu_l(t_F - \tau)] \beta_{Sl} v(\tau) d\tau \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \underline{\chi}_L(\psi), v \rangle_T \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

onde

$$\underline{\chi}_L(\psi) \triangleq \sum_{l=1}^L \langle \psi, \phi_l \rangle \exp[-\nu_l(t_F - \tau)] \beta_{Sl}. \quad (5.2.3)$$

Segue-se de (5.2.1) e (5.2.3) que para todo $v \in L_2(0, t_F)$ e para toda $\psi \in L_2(\mathcal{U})$

$$\langle \mathcal{T}_\theta^*(\psi), v \rangle_T = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \underline{\chi}_L(\psi), v \rangle_T. \quad (5.2.4)$$

Em particular, para todo $v \in L_2(0, t_F)$, para $p \leq K$, para toda $L \geq K$, $\underline{\chi}_L(\psi_p^K) = \underline{\chi}_L(\phi_k) = \underline{\chi}_K(\phi_k)$ e $k = r$ e, portanto,

$$\langle \mathcal{T}_\theta^*(\psi_p^K), v \rangle_T = \langle \underline{\chi}_K(\psi_p^K), v \rangle_T. \quad (5.2.5)$$

Segue-se que

$$\mathcal{T}_\theta^*(\psi_p^K) = \underline{\chi}_K(\psi_p^K) \quad (5.2.6)$$

onde

$$\underline{\chi}_L(\psi_p^K)(\tau) = \exp[-\nu_k(t_F - \tau)] \beta_{Sk} \quad \text{e} \quad p = k. \quad (5.2.7)$$

5.2.1 Forma Matricial de $\mathbf{u}_K$

De (5.1.8) e de (5.2.7) a função $\mathbf{u}_K$ pode ser escrita em forma matricial como

$$\mathbf{u}_K(\tau) = \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}K}^T \boldsymbol{\Phi}_K(t_F - \tau) \bar{\boldsymbol{\alpha}}_K \in \mathbb{R}^m \quad \text{para todo } \tau \in [0, t_F], \quad (5.2.8)$$

onde m é número de sinais $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}j}(x)$, $j = 1, \dots, m$ a serem controladas, $K \leq K_a$ é o tamanho do truncamento para calcular o sinal de controle e K_a é o número de coeficientes da função fracamente convergente θ_{K_a} dada em (3.1.31), $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}K}^T = [\langle \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}}, \phi_1 \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}}, \phi_K \rangle] \in \mathbb{R}^{m \times K}$, onde $\langle \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}}, \phi_i \rangle = [\langle \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}1}, \phi_i \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}m}, \phi_i \rangle]^T$ para $i = 1, \dots, K$, $\boldsymbol{\Phi}_K(t_F - \tau) = \exp[\mathbf{A}_K(t_F - \tau)] \in \mathbb{R}^{K \times K}$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_K$ definida em (5.1.11) e

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} -\alpha \left(\frac{(1)\pi}{L_x} \right)^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -\alpha \left(\frac{(k)\pi}{L_x} \right)^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -\alpha \left(\frac{(K)\pi}{L_x} \right)^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K}. \quad (5.2.9)$$

5.2.2 Forma da Matriz $\mathbf{G}_K$

Decorre, então de (5.1.10) e (5.2.7) que para todo $i, j = 1, \dots, K$,

$$\{\mathbf{G}_K\}_{i,j} = \int_0^{t_F} \exp[-\nu_i(t_F - \tau)] \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}i}^T \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}j} \exp[-\nu_j(t_F - \tau)] d\tau \quad (5.2.10)$$

ou equivalentemente,

$$\{\mathbf{G}_K\}_{i,j} = \int_0^{t_F} \exp[-\nu_i t] \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}i}^T \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{S}j} \exp[-\nu_j t] dt \quad (5.2.11)$$

onde $i = 1, \dots, K$ e $j = 1, \dots, K$ e, portanto,

$$\mathbf{G}_K = \int_0^{t_F} \exp(\mathbf{A}_K t) \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}K} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}K}^T \exp(\mathbf{A}_K t) dt \quad (5.2.12)$$

onde $\mathbf{A}_K$ está dada por (5.2.9) e $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK} = [\langle \boldsymbol{\beta}_S, \phi_1 \rangle, \dots, \langle \boldsymbol{\beta}_S, \phi_K \rangle]^T \in \mathbb{R}^{K \times m}$.

Finalmente, para todo $t \in [0, t_F]$ defina-se

$$\mathbf{F}(t) \triangleq \exp(\mathbf{A}_K t) \bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK}^T \exp(\mathbf{A}_K t) \in \mathbb{R}^{K \times K}. \quad (5.2.13)$$

Então (5.2.12) pode ser reescrita como

$$\mathbf{G}_K = \int_0^{t_F} \mathbf{F}(t) dt. \quad (5.2.14)$$

Derivando (5.2.13) com respeito à variável t obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}(t) &= \mathbf{A}_K (\exp[\mathbf{A}_K t] \bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK}) (\bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK}^T \exp[\mathbf{A}_K t]) + (\exp[\mathbf{A}_K t] \bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK}) (\bar{\boldsymbol{\beta}}_{SK}^T \exp[\mathbf{A}_K t]) \mathbf{A}_K \\ &= \mathbf{A}_K \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}(t) \mathbf{A}_K. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Obtém-se assim que para todo $t \in [0, t_F]$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \mathbf{F}(0) + \int_0^t \{\mathbf{A}_K \mathbf{F}(\sigma) + \mathbf{F}(\sigma) \mathbf{A}_K\} d\sigma \\ &= \mathbf{F}(0) + \mathbf{A}_K \int_0^t \mathbf{F}(\sigma) d\sigma + \int_0^t \mathbf{F}(\sigma) d\sigma \mathbf{A}_K. \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

Logo para $t = t_F$ temos

$$\mathbf{F}(t_F) = \mathbf{F}(0) + \mathbf{A}_K \mathbf{G}_K + \mathbf{G}_K \mathbf{A}_K \quad (5.2.17)$$

e portanto $\mathbf{G}_K \in \mathbb{R}^{K \times K}$ pode ser obtido como a única solução da *equação de Lyapunov* (LAUB, 2005, p. 144–148), (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996, p. 71–72)

$$\mathbf{A}_K \mathbf{G}_K + \mathbf{G}_K \mathbf{A}_K = \mathbf{F}(t_F) - \mathbf{F}(0). \quad (5.2.18)$$

Note-se que as matrizes na equação (5.2.18) têm dimensões K e, portanto não dependem do número m de sinais escalares de controle.

5.3 Cálculo da Função Aproximadamente Controlada $\theta_{\text{cont.}}$

Como assume-se que $\mathbf{u}_K(\tau)$ é um controle ótimo aproximado, então é possível definir a função aproximadamente controlada no tempo t_F como $\theta_{\text{cont.}}$. Determina-se, a seguir, a representação explícita desta função. Usando (4.1.1) a expressão em (3.1.30) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{C}}_{K_a}(t) &= \underline{\mathbf{g}}_{K_a} \Phi_{K_a}(t) + \int_0^t \Phi_{K_a}(t-\tau) \underline{\mathbf{f}}_{K_a}(\tau) d\tau \\ &= \underline{\mathbf{g}}_{K_a} \Phi_{K_a}(t) + \int_0^t \Phi_{K_a}(t-\tau) \underline{\mathbf{f}}_{S_{K_a}}(\tau) d\tau + \int_0^t \Phi_{K_a}(t-\tau) \bar{\underline{\beta}}_{S_{K_a}} \mathbf{u}_K(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

onde $\bar{\underline{\beta}}_{S_{K_a}}^T = [\langle \beta_S, \phi_1 \rangle, \dots, \langle \beta_S, \phi_{K_a} \rangle] \in \mathbb{R}^{m \times K_a}$ e $\Phi_{K_a}(t-\tau) = \exp[\mathbf{A}_{K_a}(t-\tau)] \in \mathbb{R}^{K_a \times K_a}$.

Definindo

$$\hat{\underline{\mathbf{C}}}_{S_{K_a}}(t) = \underline{\mathbf{g}}_{K_a} \Phi_{K_a}(t) + \int_0^t \Phi_{K_a}(t-\tau) \underline{\mathbf{f}}_{S_{K_a}}(\tau) d\tau \quad (5.3.2)$$

$$\hat{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{u}_K K_a}(t; \mathbf{u}_K(\tau)) = \int_0^t \Phi_{K_a}(t-\tau) \underline{\beta}_{S_{K_a}} \mathbf{u}_K(\tau) d\tau. \quad (5.3.3)$$

Rescreve-se (5.3.1) como

$$\underline{\mathbf{C}}_{K_a}(t) = \hat{\underline{\mathbf{C}}}_{S_{K_a}}(t) + \hat{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{u}_K K_a}(t; \mathbf{u}_K(\tau)) \in \mathbb{R}^{K_a}. \quad (5.3.4)$$

A seguir define-se explicitamente a função aproximadamente controlada no tempo $t = t_F$,

$$\theta_{\text{cont.}}(x, t_F) = \sum_{k=1}^{K_a} \hat{C}_{\theta k}(t_F) \phi_k(x), \quad (5.3.5)$$

onde os coeficientes estão dados por

$$\hat{C}_{\theta k}(t_F) = \hat{C}_{S k}(t_F) + \hat{C}_{\mathbf{u}_K k}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau)) \quad (5.3.6)$$

com $\hat{C}_{S k}(t_F) \in \hat{\underline{\mathbf{C}}}_{S_{K_a}}(t_F)$ e $\hat{C}_{\mathbf{u}_K k}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau)) \in \hat{\underline{\mathbf{C}}}_{\mathbf{u}_K K_a}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau))$.

Estes coeficientes calculam-se da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{S_k}(t_F) &= g_k \exp[-\nu_k t_F] + \int_0^{t_F} \exp[-\nu_k(t_F - \tau)] f_{S_k}(\tau) d\tau \\ &= g_k \exp\left[-\alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 t_F\right] + \int_0^{t_F} \exp\left[-\alpha \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2 (t_F - \tau)\right] f_{S_k}(\tau) d\tau,\end{aligned}\quad (5.3.7)$$

onde $g_k = \langle g(x), \phi_k \rangle$ e $f_{S_k}(\tau) = \langle f_S(x, \tau), \phi_k \rangle$.

Substituindo (5.2.8) em (5.3.3) obtém-se

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{u}_K K_a}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau)) &= \int_0^{t_F} \mathbf{\Phi}_{K_a}(t_F - \tau) \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_{K_a}} \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_K}^T \mathbf{\Phi}_K(t_F - \tau) \overline{\boldsymbol{\alpha}}_K d\tau \\ &= \left\{ \int_0^{t_F} \mathbf{\Phi}_{K_a}(t_F - \tau) \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_{K_a}} \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_K}^T \mathbf{\Phi}_K(t_F - \tau)^T d\tau \right\} \overline{\boldsymbol{\alpha}}_K \\ &= \left\{ \int_0^{t_F} \exp[\mathbf{A}_{K_a}(t_F - \tau)] \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_{K_a}} \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_K}^T \exp[\mathbf{A}_K(t_F - \tau)] d\tau \right\} \overline{\boldsymbol{\alpha}}_K.\end{aligned}\quad (5.3.8)$$

Fazendo a mudança de variável $\omega = t_F - \tau$ em (5.3.8) define-se

$$\mathbf{G}_{K_a K} = \int_0^{t_F} \exp[\mathbf{A}_{K_a}(\omega)] \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_{K_a}} \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_K}^T \exp[\mathbf{A}_K(\omega)] d\omega. \quad (5.3.9)$$

Definindo para todo $\omega \in [0, t_F]$

$$\mathbf{H}(\omega) \triangleq \exp[\mathbf{A}_{K_a}(\omega)] \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_{K_a}} \overline{\boldsymbol{\beta}}_{S_K}^T \exp[\mathbf{A}_K(\omega)] \in \mathbb{R}^{K_a \times K} \quad (5.3.10)$$

e seguindo o mesmo raciocínio usado para obter (5.2.18) obtém-se a seguinte *equação de Sylvester* (LAUB, 2005, p. 144–148), (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996, p. 71–72)

$$\mathbf{A}_{K_a} \mathbf{G}_{K_a K} + \mathbf{G}_{K_a K} \mathbf{A}_K = \mathbf{H}(t_F) - \mathbf{H}(0). \quad (5.3.11)$$

que tem como única solução a $\mathbf{G}_{K_a K} \in \mathbb{R}^{K_a \times K}$.

Logo (5.3.8) pode ser escrita da forma

$$\widehat{\mathbf{C}}_{\mathbf{u}_K K_a}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau)) = \mathbf{G}_{K_a K} \overline{\boldsymbol{\alpha}}_K \in \mathbb{R}^{K_a}. \quad (5.3.12)$$

Os coeficientes $\widehat{\underline{C}}_{\mathbf{u}_K k}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau))$ serão da forma

$$\widehat{\underline{C}}_{\mathbf{u}_K k}(t_F; \mathbf{u}_K(\tau)) = \sum_{j=1}^K \hat{g}_{kj} \bar{\alpha}_j, \quad (5.3.13)$$

onde $\hat{g}_{kj} \in \mathbf{G}_{K_a K}$ e $\bar{\alpha}_j \in \bar{\alpha}_K$ com $k = 1, \dots, K_a$ e $j = 1, \dots, K$.

5.4 Sequência de Cálculos Necessários para a Obtenção de $\mathbf{u}_K$ e θ_{cont} .

5.4.1 Cálculos para Obter $\mathbf{u}_K$

A sequência de cálculos necessários para a obtenção de $\mathbf{u}_K$ é sumarizada a seguir (para um dado K):

- Obtenção de $\bar{\theta}_K$ (definido após (5.1.10)) a partir dos dados $(f, g, \beta_S, \theta_r, t_F, \rho_F)$, da matriz diagonal $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{K \times K}$ (definida em (5.2.9)) e da matriz $\bar{\beta}_{SK} \in \mathbb{R}^{K \times m}$ (definida após (5.2.12) acima).
- Cálculo de $\mathbf{F}(0) = \bar{\beta}_{SK} \bar{\beta}_{SK}^T$ e $\mathbf{F}(t_F) = \exp(\mathbf{A}_K t_F) \bar{\beta}_{SK} \bar{\beta}_{SK}^T \exp(\mathbf{A}_K t_F)$.
- Resolver (5.2.18) para obter $\mathbf{G}_K$.
- Resolver $(\mathbf{I} + \rho_F \mathbf{G}_K) \bar{\alpha}_K = \rho_F \bar{\theta}_K$ para obter $\bar{\alpha}_K \in \mathbb{R}^K$.
- Obter $\mathbf{u}_K = \bar{\beta}_{SK}^T \exp[\mathbf{A}_K(t_F - \tau)] \bar{\alpha}_K$.

Note-se que $\mathbf{u}_K$ pode ser gerado pelo sistema linear de dimensão finita

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_u(t) &= -\mathbf{A}_K \mathbf{x}_u(t) \\ \mathbf{u}_K(t) &= \bar{\beta}_{SK}^T \mathbf{x}_u(t) \\ \mathbf{x}_u(0) &= \exp(\mathbf{A}_K t_F) \bar{\alpha}_K \end{cases} \quad (5.4.1)$$

5.4.2 Cálculos para Obter $\theta_{\text{cont.}}$

A sequência de cálculos necessários para a obtenção de $\theta_{\text{cont.}}$ é sumarizada a seguir (para um dado K_a):

- Obtenção da matriz diagonal $\mathbf{A}_{K_a} \in \mathbb{R}^{K_a \times K_a}$ (definida em (3.1.26)), da matriz $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}_{K_a}} \in \mathbb{R}^{K_a \times m}$ (definidos após (5.3.1) acima).
- Cálculo de $\mathbf{H}(0) = \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}_{K_a}} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}_K}^T$ e $\mathbf{H}(t_F) = \exp(\mathbf{A}_{K_a} t_F) \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}_{K_a}} \bar{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{S}_K}^T \exp(\mathbf{A}_K t_F)$.
- Resolver (5.3.11) para obter $\mathbf{G}_{K_a K}$.
- Calcular (5.3.2) e (5.3.12) para obter $\hat{C}_{\theta_k}(t_F)$ em (5.3.6).
- Obter $\theta_{\text{cont.}}(x, t_F) = \sum_{k=1}^{K_a} \hat{C}_{\theta_k}(t_F) \phi_k(x)$.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

A seguir, apresentam-se dezesseis exemplos numéricos que mostram a aplicação do método desenvolvido anteriormente para o caso 1-D. Estes exemplos representam uma barra com coeficiente de condutividade térmica, $\alpha = 1$, com um comprimento $L_x = 1$ sem perturbação inicial, isto é $f_S(x, t) = 0$, assim como $g(x) = 0$, mas com uma fonte de calor forçante dada por $\beta_S(x)$, a qual será regulada ou controlada no tempo, num intervalo $[0, 1]$ pela função $\mathbf{u}(t)$. Como objetivo queremos atingir no tempo $t_F = 1$, um perfil de temperatura específico dado por $\underline{\theta}_r(x, 1)$ o qual será aproximado por $\theta_{\text{cont.}}(x, 1)$. Baseado nestas condições podemos formular matematicamente o seguinte problema de controle ótimo.

Problema de Controle Ótimo.

Achar $\mathbf{u}$ tal que

$$\min_{\mathbf{u} \in L_2(0,1)^m} \mathcal{J}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,1)}^2 + \rho_F \|\theta_o(t_F; \mathbf{u}) - \underline{\theta}_r\|_{L^2((0,1))}^2, \quad \text{onde } \rho_F \in \mathbb{R}_+ \quad (6.0.1)$$

sujeito a

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \beta_S(x) \mathbf{u}(t) \quad \forall x \in (0, 1), \forall t \in (0, 1) \quad (6.0.2)$$

$$\theta(x, t) = 0 \quad \text{para } x = \{0, 1\}, \forall t \in (0, 1) \quad (6.0.3)$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in (0, 1). \quad (6.0.4)$$

Para cada exemplo mantêm-se fixos os tamanhos dos truncamentos para as funções aproximadas, $K_a = 20$ para obter $\theta_{\text{cont.}}$ e $K = 10$ para obter $\mathbf{u}_K$.

6.1 Exemplo # 1

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$

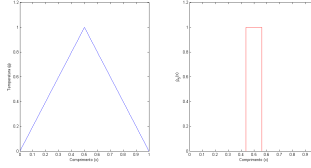


Figura 1: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fonte controlada de forma **individual**.

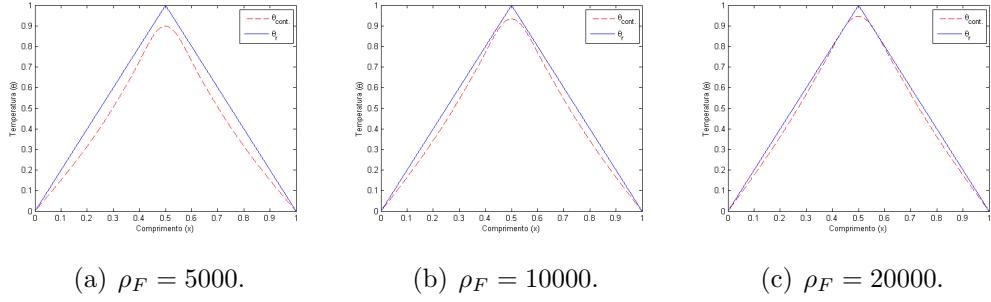


Figura 2: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o caso em que se tem uma fonte com o seu controle.

Tabela 1: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	164.0856	2.2815	0.1016
10000	186.9709	1.3547	0.0665
20000	202.6782	0.8238	0.0531

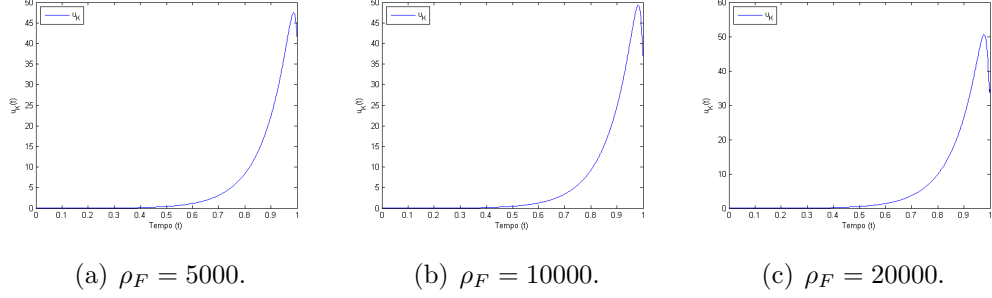


Figura 3: Gráfico de $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o caso em que se tem uma fonte com o seu controle.

Tabela 2: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	49.4989
10000	49.3003
20000	50.5635

Os resultados acima (e das demais tabelas) corroboram a expectativa intuitiva de que à medida que ρ_F aumenta é possível alcançar estados finais mais próximos do desejado à custa de maior “energia” (norma quadrática) dos sinais de controle correspondentes.

O valor de máximo de $\mathbf{u}_K$ é calculado da seguinte forma

$$\|\mathbf{u}_K\|_\infty = \sup \left\{ [\mathbf{u}_K^T(t) \mathbf{u}_K(t)]^{\frac{1}{2}} : t \in [0, 1] \right\}.$$

Observe-se que a função de controle $\mathbf{u}_K$ consegue levar o sistema ao estado final desejado com a peculiaridade de que faz um “esforço maior” nos instantes finais antes de alcançar o tempo $t_F = 1$ prescrito. Nesses instantes finais acontece o pico máximo e consequentemente o controle usa a “energia máxima”, apresentada na tabela anterior, para alcançar o objetivo desejado.

6.2 Exemplo # 2

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{5}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{11}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$.

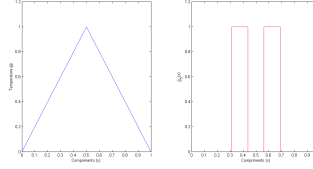


Figura 4: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fontes controladas de forma **individual**.

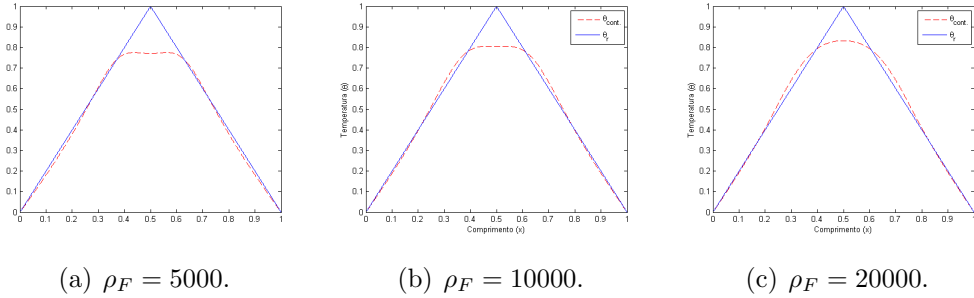


Figura 5: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 3: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	107.4066	2.0242	0.2295
10000	117.0282	1.6378	0.1935
20000	125.5832	1.4368	0.1669

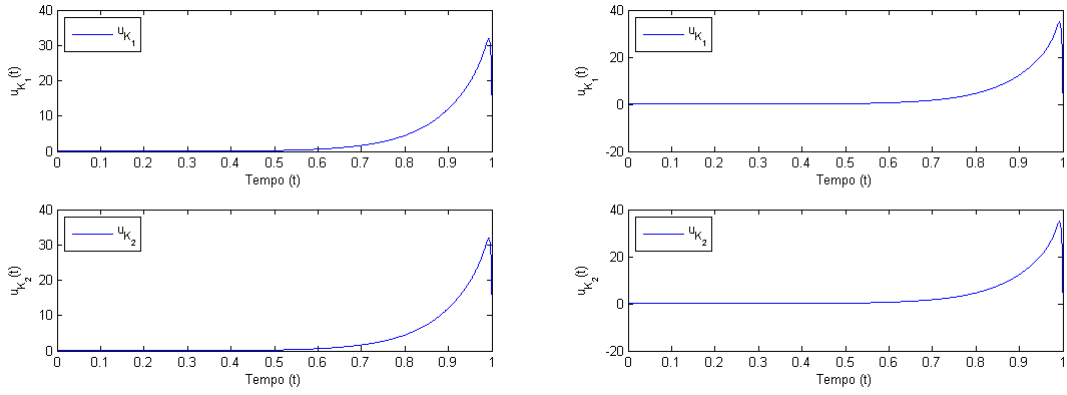
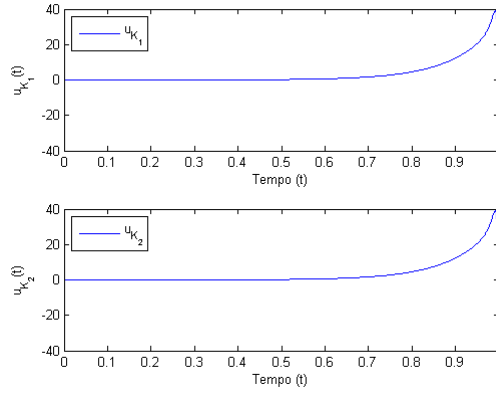
(a) $\rho_F = 5000$.(b) $\rho_F = 10000$.(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 6: Gráficos de $\mathbf{u}_{K_1}$ e $\mathbf{u}_{K_2}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 4: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	45.2938
10000	49.4313
20000	55.6379

6.3 Exemplo # 3

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) =$

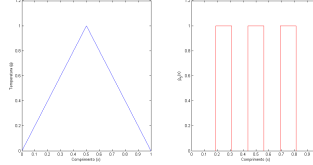
$$\begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{3}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{3}{16} \leq x < \frac{5}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{11}{16} \leq x < \frac{13}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{13}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}.$$


Figura 7: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fontes controladas de forma **individual**.

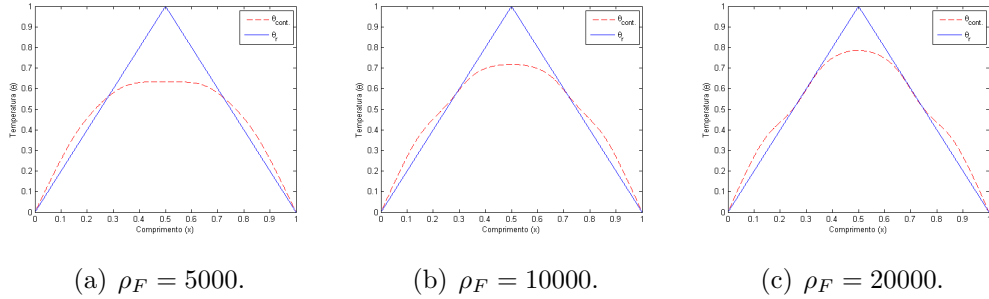


Figura 8: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem uma fonte com o seu controle.

Tabela 5: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	97.9070	1.3474	0.1190
10000	106.1226	0.7729	0.0779
20000	111.2549	0.4652	0.0552

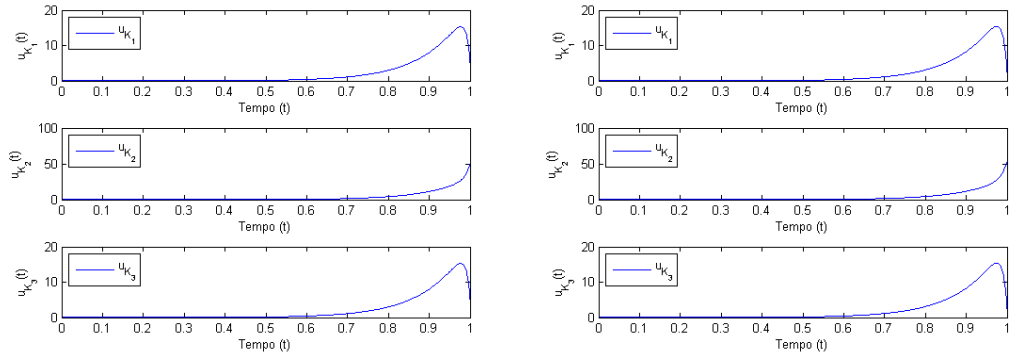
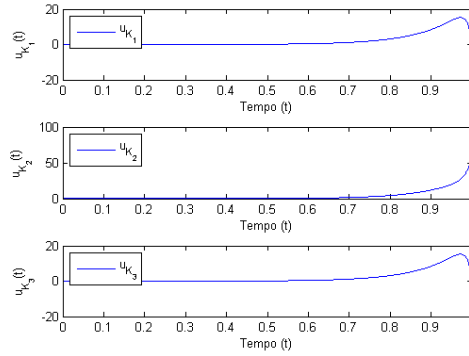
(a) $\rho_F = 5000$.(b) $\rho_F = 10000$.(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 9: Gráficos de $\mathbf{u}_{K_1}$, $\mathbf{u}_{K_2}$ e $\mathbf{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

É possível ver que o comportamento “individual” de cada função de controle satisfazendo-se assim as expectativas intuitivas físicas.

Tabela 6: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	51.1433
10000	53.0475
20000	52.1600

Comparando os exemplos 1 e 3 nota-se que no caso de três controles independentes consegue-se alcançar uma melhor aproximação do estado final desejado (no sentido da norma quadrática) e com menor “energia de controle” do que no caso de um único controle.

6.4 Exemplo # 4

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = -4x(x-1)$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$

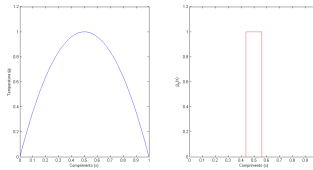


Figura 10: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).
Fontes controladas de forma **individual**.

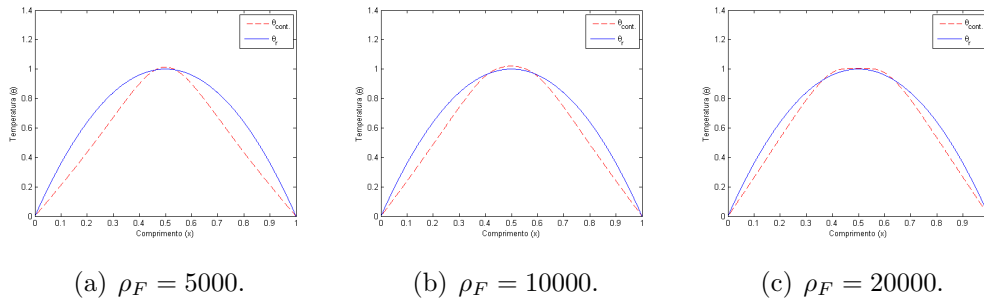


Figura 11: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 7: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	279.9367	4.3797	0.2056
10000	347.2604	3.0774	0.1521
20000	413.5566	2.1631	0.1125

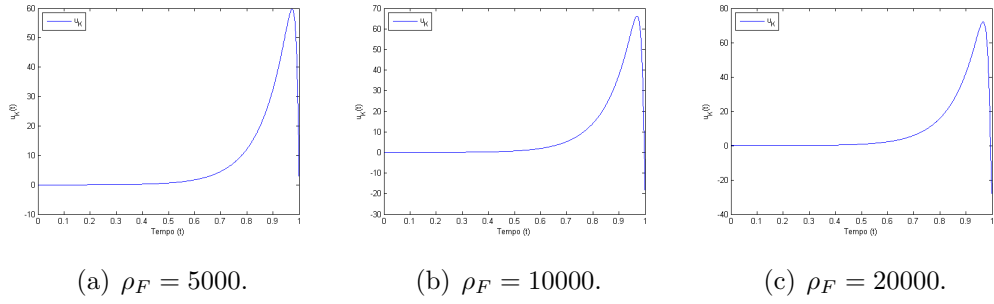


Figura 12: Gráfico de $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 8: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	59.6615
10000	66.2299
20000	72.0370

6.5 Exemplo # 5

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = -4x(x-1)$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{5}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{11}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$.

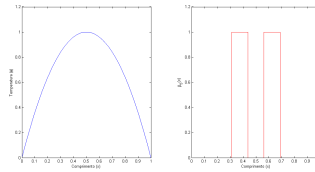


Figura 13: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fontes controladas de forma **individual**.

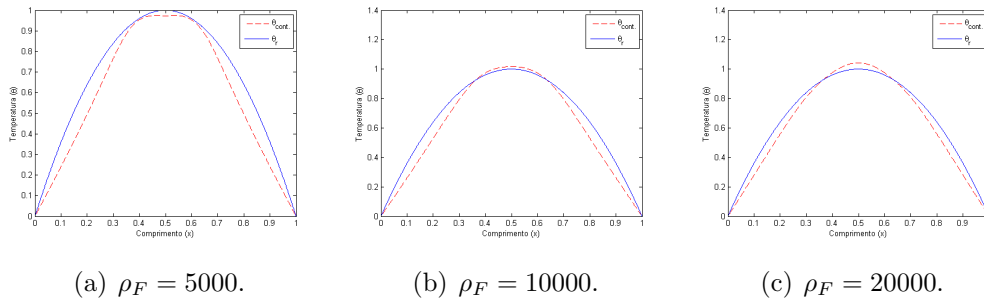


Figura 14: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 9: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	175.1499	2.8539	0.1469
10000	195.6230	2.2154	0.1165
20000	223.9487	1.7427	0.0897

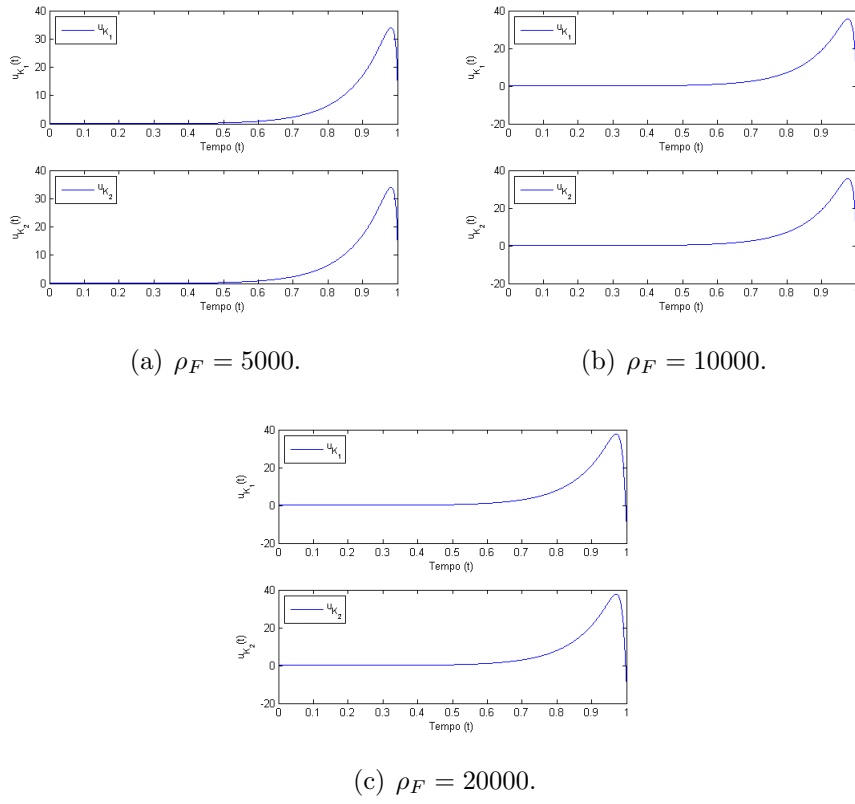


Figura 15: Gráficos de $\mathbf{u}_{K_1}$ e $\mathbf{u}_{K_2}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 10: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	48.0708
10000	50.3654
20000	53.3308

6.6 Exemplo # 6

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = -4x(x-1)$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) =$

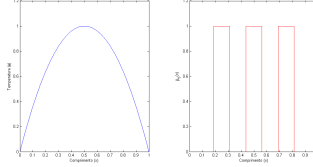
$$\begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{3}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{3}{16} \leq x < \frac{5}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{11}{16} \leq x < \frac{13}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{13}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}.$$


Figura 16: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fontes controladas de forma **individual**.

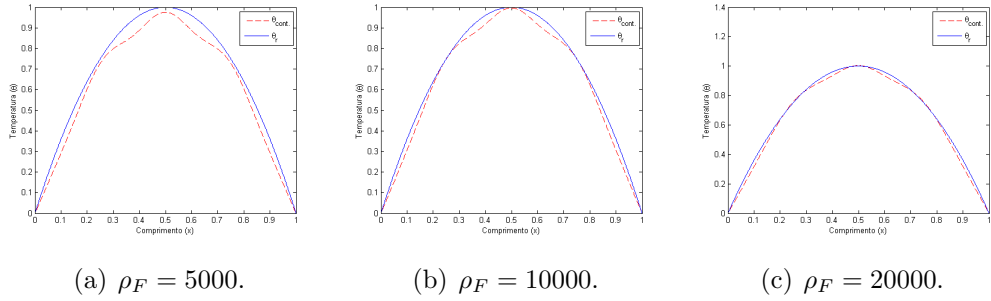


Figura 17: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 11: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	151.2469	1.6336	0.0771
10000	162.0141	1.0375	0.0538
20000	169.7699	0.7147	0.0424

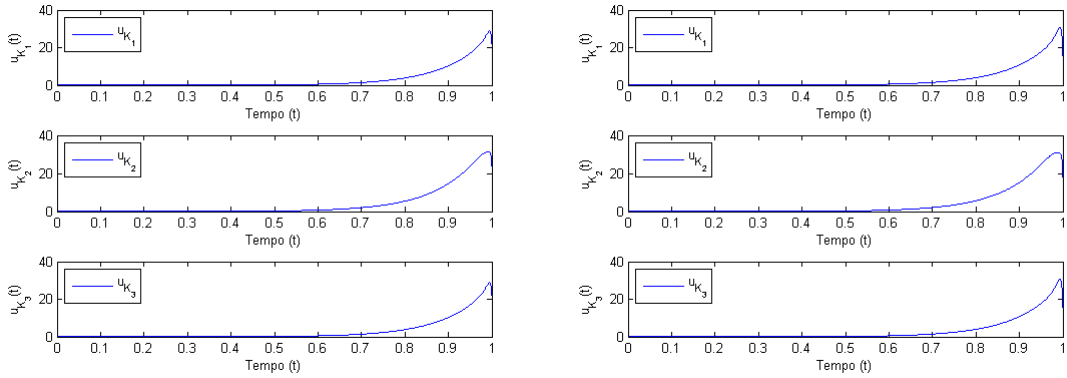
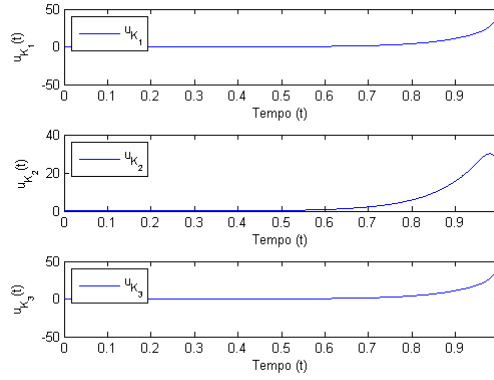
(a) $\rho_F = 5000$.(b) $\rho_F = 10000$.(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 18: Gráficos de $\mathbf{u}_{K_1}$, $\mathbf{u}_{K_2}$ e $\mathbf{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 12: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	51.5650
10000	53.4364
20000	55.0973

Comparando os exemplos 4 e 6 observe-se que novamente consegue-se alcançar um estado final mais próximo do desejado (tanto no sentido da norma quadrática como no caso da norma uniforme) e com menor “energia de controle” do que no caso de um único controle.

6.7 Exemplo # 7

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = x$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$

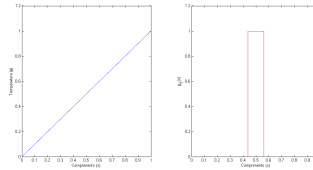


Figura 19: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fontes controladas de forma **individual**.

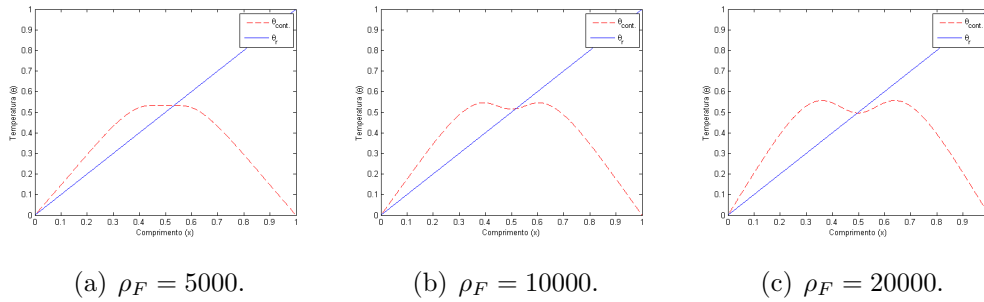


Figura 20: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 13: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	127.4222	11.8709	1
10000	189.5779	11.4942	1
20000	282.4022	11.2077	1

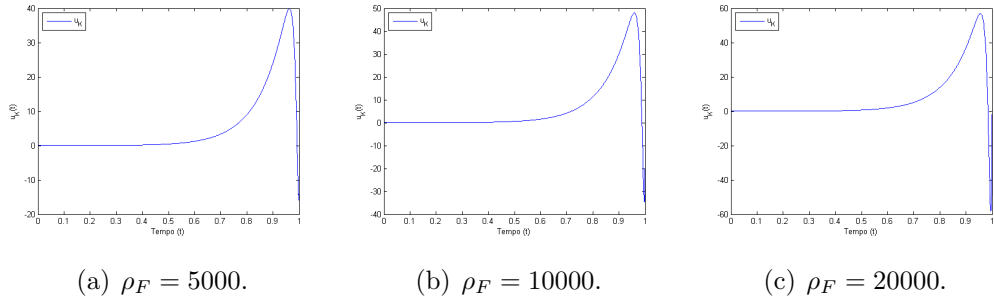


Figura 21: Gráfico de $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 14: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	39.8878
10000	47.9663
20000	58.0119

6.8 Exemplo # 8

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = x$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{5}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{11}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}.$

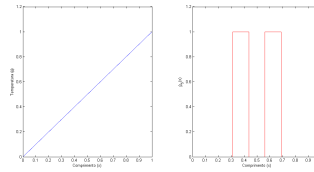


Figura 22: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).
Fontes controladas de forma **individual**.

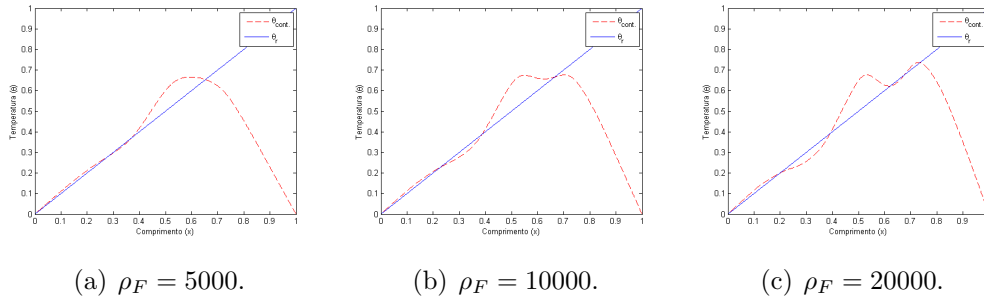


Figura 23: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 15: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	130.9287	10.2141	1
10000	228.7800	9.5362	1
20000	412.2293	8.8489	1

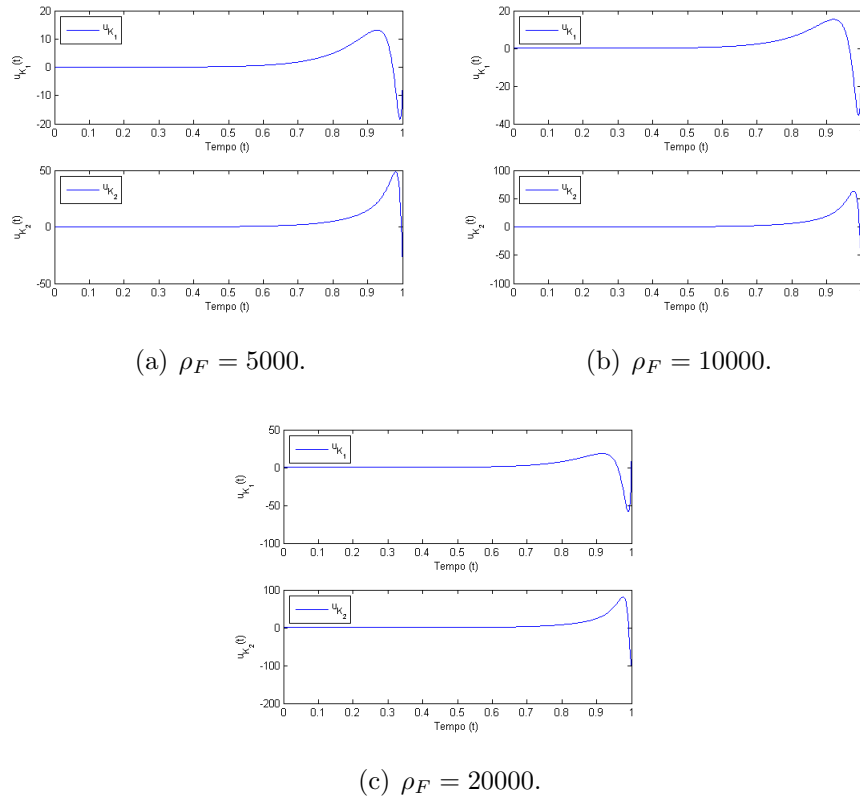


Figura 24: Gráficos de $\mathbf{u}_{K_1}$ e $\mathbf{u}_{K_2}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 16: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	49.4544
10000	76.2146
20000	108.1131

6.9 Exemplo # 9

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = x$ usando a função de distribuição espacial $\beta_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{3}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{3}{16} \leq x < \frac{5}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 1 & \text{se } \frac{11}{16} \leq x < \frac{13}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{13}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}.$

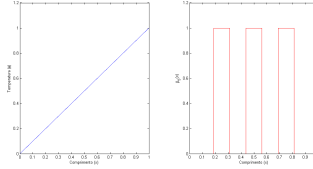


Figura 25: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e β_S (direita).

Fontes controladas de forma **individual**.

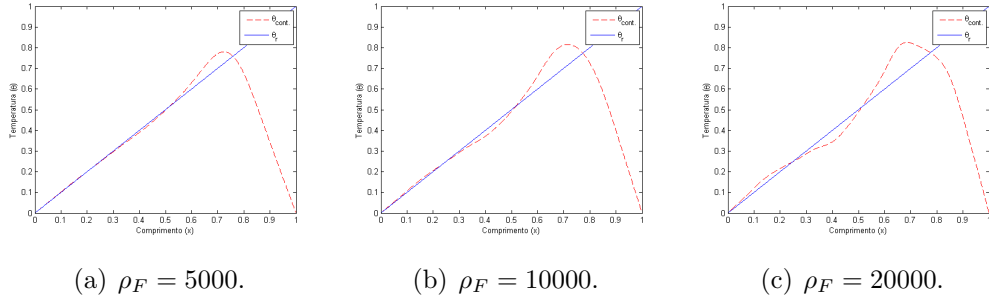


Figura 26: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de ρ_F .

Resultados numéricos obtidos variando ρ_F nas normas do máximo e L_2 para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 17: Energia de $\mathbf{u}_K$ e erro de aproximação.

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _{L_2}^2$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{L_2}$	$\ \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\ _{\infty}$
5000	117.8714	8.7433	1
10000	167.7176	8.3383	1
20000	265.7428	7.9302	1

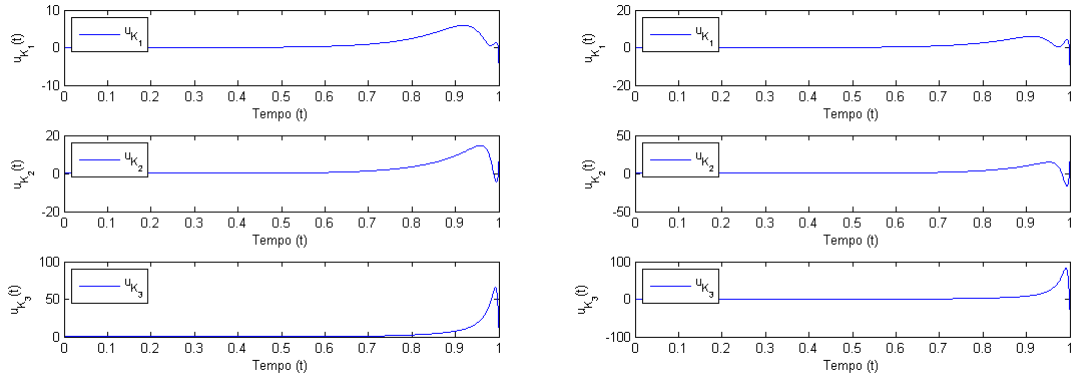
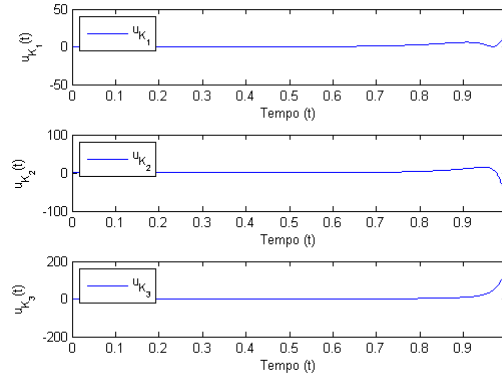
(a) $\rho_F = 5000$.(b) $\rho_F = 10000$.(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 27: Gráficos de $\mathbf{u}_{K_1}$, $\mathbf{u}_{K_2}$ e $\mathbf{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

Tabela 18: Valor máximo atingido por $\mathbf{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de ρ_F .

ρ_F	$\ \mathbf{u}_K\ _\infty$
5000	66.2620
10000	84.7802
20000	133.1046

Comparando os exemplos 7 ao 9 observe-se que ainda que a função objetivo não satisfaz uma das condições de fronteira prescritas (valores na fronteira nulos), o resultado numérico não apresenta oscilações abruptas como acontece com uma aproximação de Fourier não controlada de 10 termos, mostrando assim a estabilidade de método numérico obtido.