### 6.10 Exemplo # 10

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1$ usando a função de distribuição espacial $\boldsymbol{\beta_S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se} \quad \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se} \quad \frac{9}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$ .

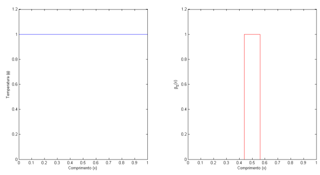
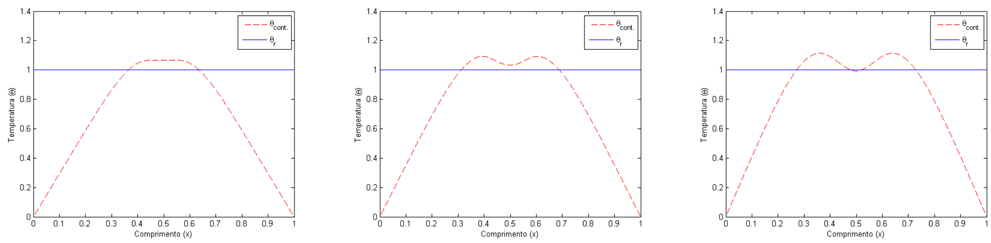


Figura 28: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta_S}$ (direita).

Fontes controladas de forma **individual.**



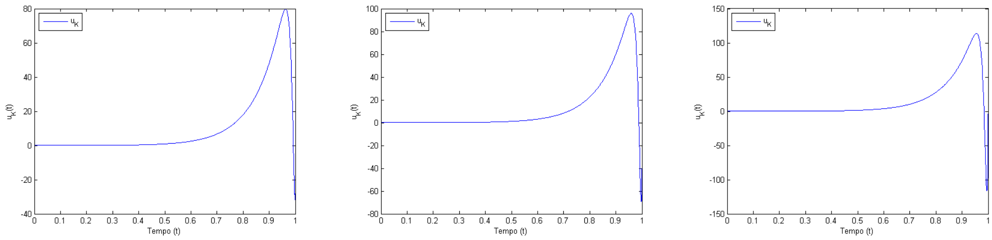

(a) $\rho_F = 5000$. (b) $\rho_F = 10000$. (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 29: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 19: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\lVert\boldsymbol{u}_K\rVert_{L_2}^2$ | $\lVert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\rVert_{L_2}$ | $\lVert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\rVert_\infty$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 509.6887 | 15.1439 | 1 |
| 10000 | 758.3117 | 13.9332 | 1 |
| 20000 | 1129.6321 | 12.9659 | 1 |



(a) $\rho_F = 5000$. (b) $\rho_F = 10000$. (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 30: Gráfico de $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 20: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 79.7757 |
| 10000 | 95.9326 |
| 20000 | 116.0238 |

### 6.11 Exemplo # 11

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1$ usando a função de distribuição espacial $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{5}{16}, \\ 1 & \text{se} \ \frac{5}{16} \leq x < \frac{7}{16}, \\ 0 & \text{se} \ \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 1 & \text{se} \ \frac{9}{16} \leq x < \frac{11}{16}, \\ 0 & \text{se} \ \frac{11}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$ .

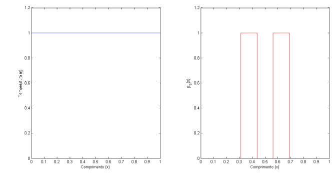
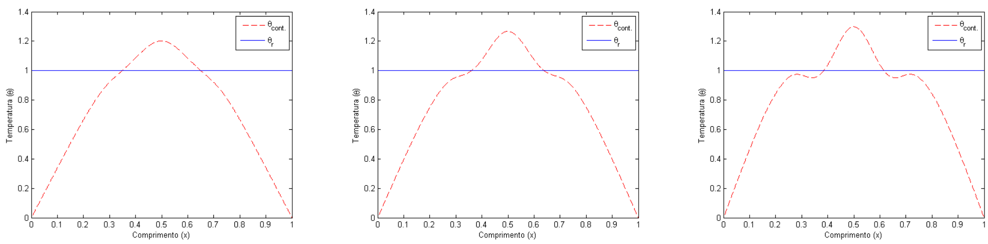


Figura 31: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}$ (direita).

Fontes controladas de forma **individual.**



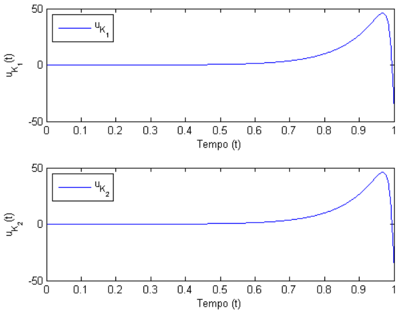

(a) $\rho_F = 5000$. (b) $\rho_F = 10000$. (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 32: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

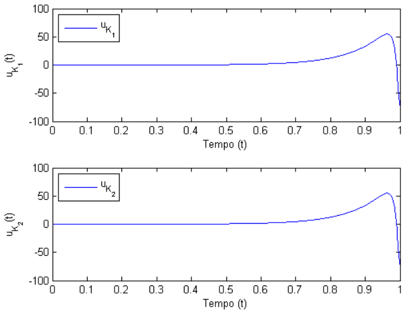
Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 21: Energia de $\boldsymbol{u}_K$ e erro de aproximação.

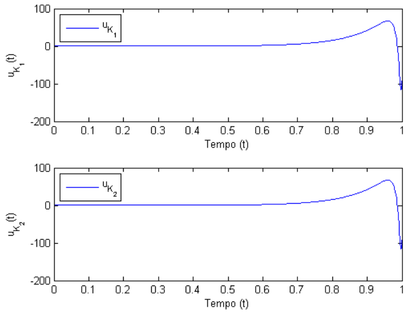
| $\rho_F$ | $\lVert \boldsymbol{u}_K \rVert_{L_2}^2$ | $\lVert \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r \rVert_{L_2}$ | $\lVert \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r \rVert_{\infty}$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 335.5301 | 14.3559 | 1 |
| 10000 | 516.0621 | 13.4691 | 1 |
| 20000 | 876.0623 | 12.5153 | 1 |




(a) $\rho_F = 5000$.




(b) $\rho_F = 10000$.




(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 33: Gráficos de $\boldsymbol{u}_{K_1}, \boldsymbol{u}_{K_2}$ e $\boldsymbol{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 22: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 64.9906 |
| 10000 | 104.4451 |
| 20000 | 163.7960 |

## 6.12 Exemplo # 12

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1$ usando a função de distribuição espacial
$$\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \le x < \frac{3}{16}, \\ 1 & \text{se } \ \frac{3}{16} \le x < \frac{5}{16}, \\ 0 & \text{se } \ \frac{5}{16} \le x < \frac{7}{16}, \\ 1 & \text{se } \ \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \ \frac{9}{16} \le x < \frac{11}{16}, \\ 1 & \text{se } \ \frac{11}{16} \le x < \frac{13}{16}, \\ 0 & \text{se } \ \frac{13}{16} \le x \le 1. \end{cases}.$$

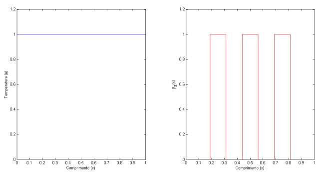
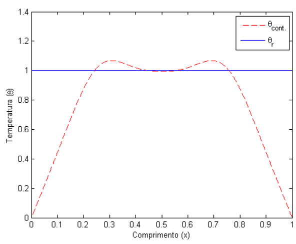
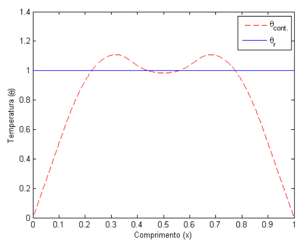


Figura 34: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}$ (direita).

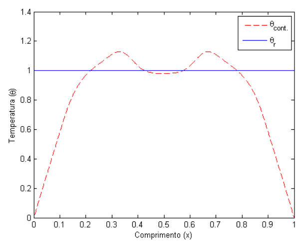
Fontes controladas de forma **individual.**




(a) $\rho_F = 5000$.




(b) $\rho_F = 10000$.



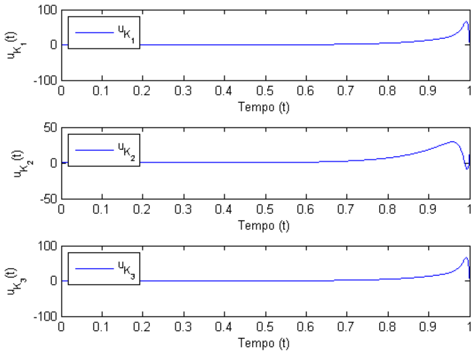

(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 35: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

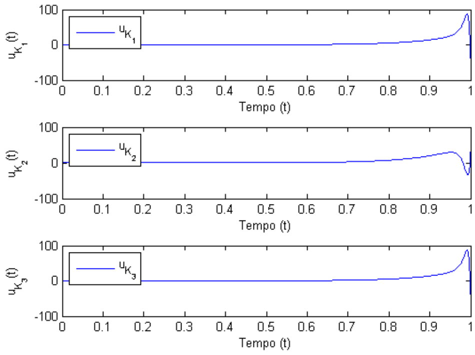
Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 23: Energia de $\boldsymbol{u}_K$ e erro de aproximação.

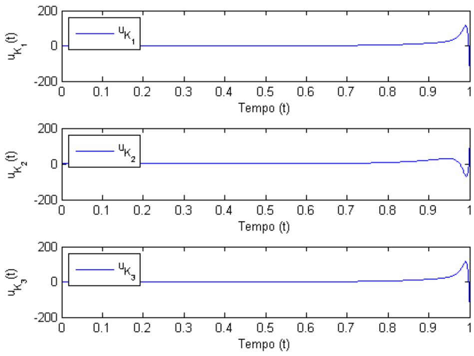
| $\rho_F$ | $\Vert\boldsymbol{u}_K\Vert_{L_2}^2$ | $\Vert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\Vert_{L_2}$ | $\Vert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\Vert_\infty$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 309.9112 | 12.3383 | 1 |
| 10000 | 420.8874 | 11.6664 | 1 |
| 20000 | 686.0625 | 10.8934 | 1 |




(a) $\rho_F = 5000$.




(b) $\rho_F = 10000$.




(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 36: Gráficos de $\boldsymbol{u}_{K_1}, \boldsymbol{u}_{K_2}$ e $\boldsymbol{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 24: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 95.6680 |
| 10000 | 127.7172 |
| 20000 | 247.1365 |

Comparando os exemplos 10 ao 12 observe-se que a função objetivo não satisfaz nenhuma das condições de fronteira prescritas e o resultado numérico não apresenta oscilações abruptas conhecidas como o *fenômeno de Gibbs* como acontece com uma aproximação de Fourier não controlada de 10 termos, mostrando novamente a estabilidade de método numérico obtido.

## 6.13 Exemplo # 13

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$ usando a função de distribuição espacial $\boldsymbol{\beta_S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; 0 \leq x < \frac{7}{16}, \\ -256\left(x^2 - x + \frac{63}{256}\right) & \text{se } \; \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \; \frac{9}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$ .

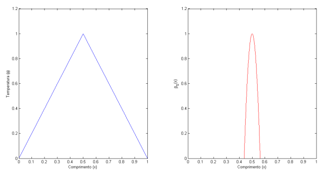
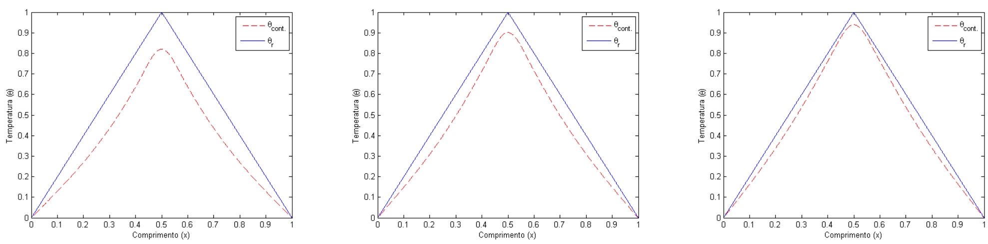


Figura 37: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta_S}$ (direita).

Fontes controladas de forma **individual.**



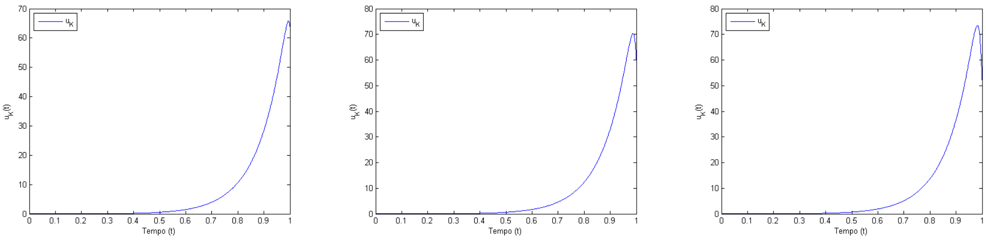
(a) $\rho_F = 5000$.  (b) $\rho_F = 10000$.  (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 38: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 25: Energia de $\boldsymbol{u}_K$ e erro de aproximação.

| $\rho_F$ | $\lVert\boldsymbol{u}_K\rVert^2_{L_2}$ | $\lVert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\rVert_{L_2}$ | $\lVert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\rVert_\infty$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 281.0877 | 4.1694 | 0.1801 |
| 10000 | 357.1539 | 2.4974 | 0.1041 |
| 20000 | 412.2672 | 1.4775 | 0.0648 |



(a) $\rho_F = 5000$. (b) $\rho_F = 10000$. (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 39: Gráfico de $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 26: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 65.7758 |
| 10000 | 70.3506 |
| 20000 | 73.4630 |

## 6.14 Exemplo # 14

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = 1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$ usando a função de distribuição espacial

$$\boldsymbol{\beta_S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \le x < \frac{3}{16}, \\ -256\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{256}\right) & \text{se } \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ & \text{se } \frac{3}{16} \le x < \frac{5}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{5}{16} \le x < \frac{7}{16}, \\ -256\left(x^2 - x + \frac{63}{256}\right) & \text{se } \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ & \text{se } \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \le x < \frac{11}{16}, \\ -256\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{143}{256}\right) & \text{se } \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ & \text{se } \frac{11}{16} \le x < \frac{13}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{13}{16} \le x \le 1. \end{cases}.$$

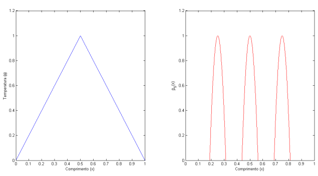
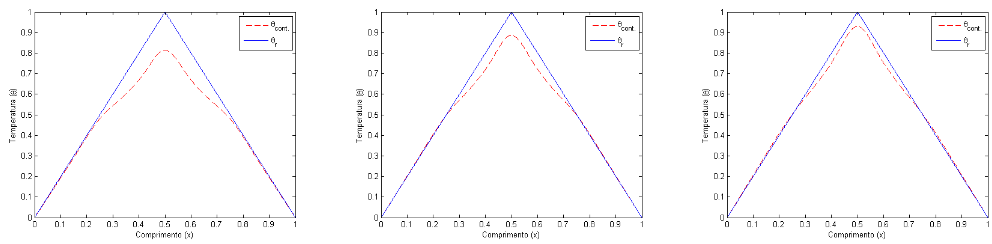


Figura 40: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta_S}$ (direita).

Fontes controladas de forma **individual.**



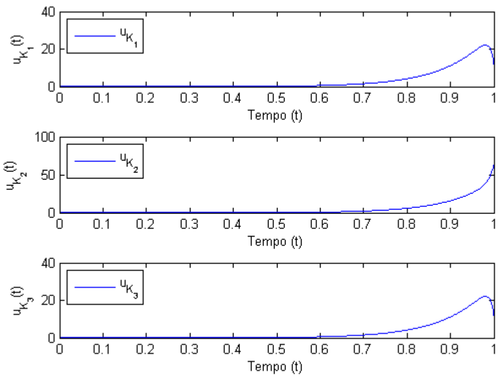

(a) $\rho_F = 5000$.  (b) $\rho_F = 10000$.  (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 41: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

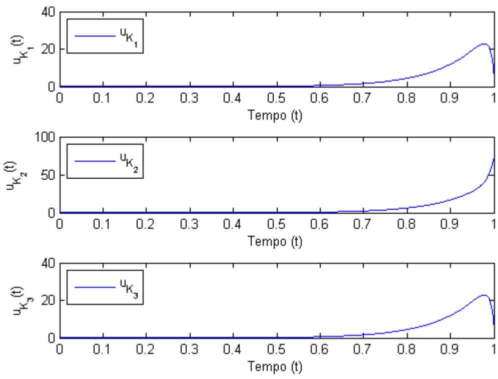
Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 27: Energia de $\boldsymbol{u}_K$ e erro de aproximação.

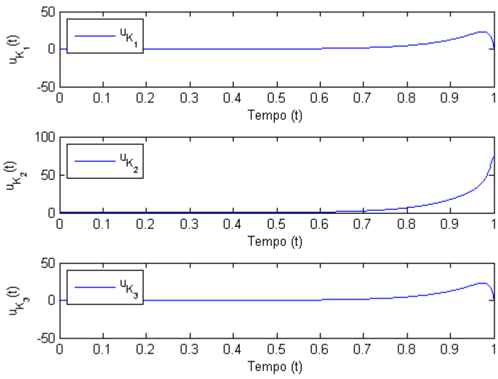
| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_{L_2}^2$ | $\|\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\|_{L_2}$ | $\|\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\|_{\infty}$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 185.5286 | 2.5530 | 0.1856 |
| 10000 | 215.1007 | 1.4677 | 0.1139 |
| 20000 | 234.6635 | 0.8398 | 0.0701 |




(a) $\rho_F = 5000$.




(b) $\rho_F = 10000$.




(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 42: Gráficos de $\boldsymbol{u}_{K_1}, \boldsymbol{u}_{K_2}$ e $\boldsymbol{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 28: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 65.6504 |
| 10000 | 71.3055 |
| 20000 | 73.7362 |

Comparando os exemplos 13 e 14 observe-se que ainda mudando a forma da função espacial $\boldsymbol{\beta_S}$ que novamente consegue-se alcançar um estado final mais próximo do desejado (tanto no sentido da norma quadrática como no caso da norma uniforme) e com menor "energia de controle" do que no caso de um único controle.

### 6.15 Exemplo # 15

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = x$ usando a função de distribuição espacial $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{7}{16}, \\ -256\left(x^2 - x + \frac{63}{256}\right) & \text{se } \frac{7}{16} \leq x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \frac{9}{16} \leq x \leq 1. \end{cases}$ .

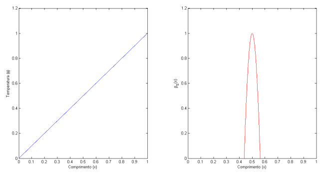
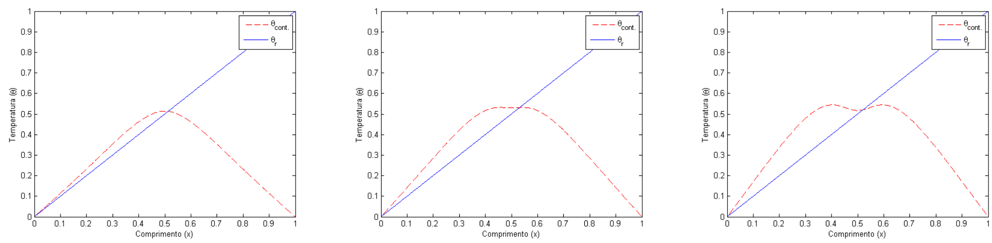


Figura 43: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{S}}$ (direita).

Fontes controladas de forma **individual.**



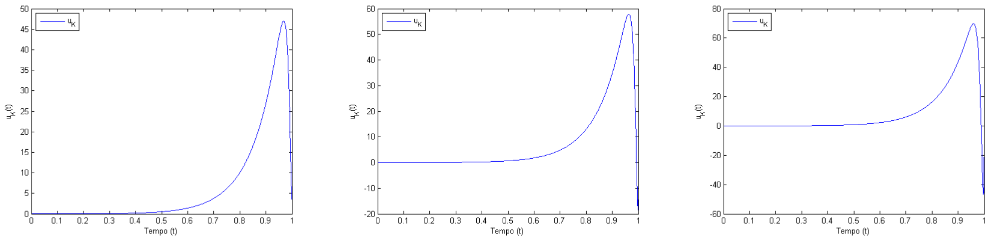

(a) $\rho_F = 5000$.　(b) $\rho_F = 10000$.　(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 44: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 29: Energia de $\boldsymbol{u}_K$ e erro de aproximação.

| $\rho_F$ | $\lVert \boldsymbol{u}_K \rVert_{L_2}^2$ | $\lVert \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r \rVert_{L_2}$ | $\lVert \theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r \rVert_{\infty}$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 176.8242 | 12.4758 | 1 |
| 10000 | 267.8122 | 11.9456 | 1 |
| 20000 | 398.4390 | 11.5517 | 1 |




(a) $\rho_F = 5000$. (b) $\rho_F = 10000$. (c) $\rho_F = 20000$.

Figura 45: Gráfico de $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 30: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 47.0104 |
| 10000 | 57.8896 |
| 20000 | 69.7871 |

## 6.16 Exemplo # 16

Aproximação do estado final desejado $\underline{\theta}_r = x$ usando a função de distribuição espacial

$$\boldsymbol{\beta_S}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; 0 \le x < \frac{3}{16}, \\ -256\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{15}{256}\right) & \text{se } \; \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ & \text{se } \; \frac{3}{16} \le x < \frac{5}{16}, \\ 0 & \text{se } \; \frac{5}{16} \le x < \frac{7}{16}, \\ -256\left(x^2 - x + \frac{63}{256}\right) & \text{se } \; \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ & \text{se } \; \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ 0 & \text{se } \; \frac{9}{16} \le x < \frac{11}{16}, \\ -256\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{143}{256}\right) & \text{se } \; \frac{7}{16} \le x < \frac{9}{16}, \\ & \text{se } \; \frac{11}{16} \le x < \frac{13}{16}, \\ 0 & \text{se } \; \frac{13}{16} \le x \le 1. \end{cases}.$$

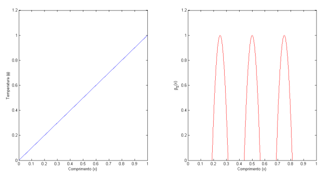
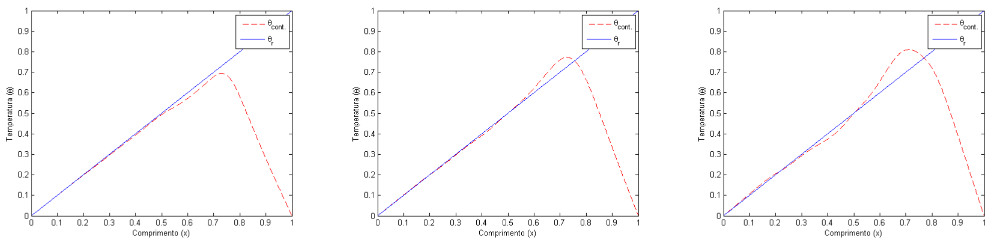


Figura 46: Gráficos das funções $\underline{\theta}_r$ (esquerda) e $\boldsymbol{\beta_S}$ (direita).

Fontes controladas de forma **individual.**



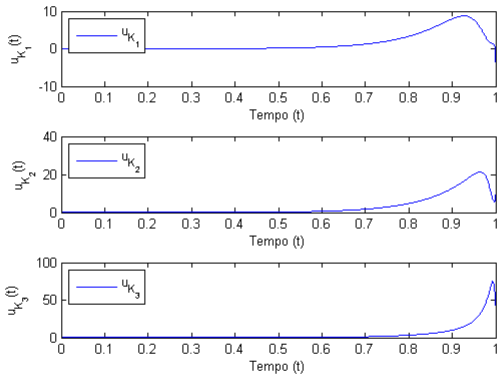

(a) $\rho_F = 5000$.
(b) $\rho_F = 10000$.
(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 47: Gráficos comparativos entre $\theta_{\text{cont.}}$ (tracejada) e $\underline{\theta}_r$ (continua) para diferentes valores de $\rho_F$.

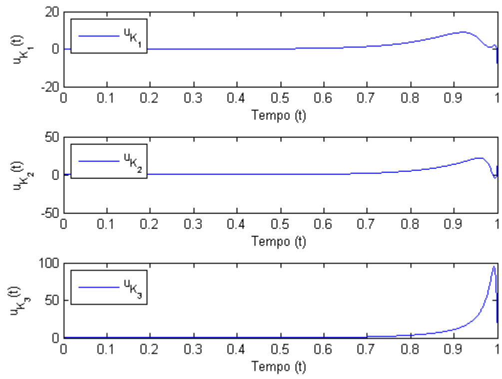
Resultados numéricos obtidos variando $\rho_F$ nas normas do máximo e $L_2$ para o casos em que se tem fontes com controles individuais.

Tabela 31: Energia de $\boldsymbol{u}_K$ e erro de aproximação.

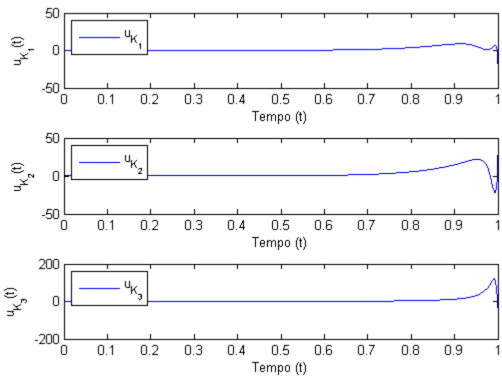
| $\rho_F$ | $\Vert\boldsymbol{u}_K\Vert_{L_2}^2$ | $\Vert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\Vert_{L_2}$ | $\Vert\theta_{\text{cont.}} - \underline{\theta}_r\Vert_\infty$ |
|---|---|---|---|
| 5000 | 179.9926 | 9.3757 | 1 |
| 10000 | 250.7242 | 8.8229 | 1 |
| 20000 | 355.9756 | 8.3992 | 1 |




(a) $\rho_F = 5000$.




(b) $\rho_F = 10000$.




(c) $\rho_F = 20000$.

Figura 48: Gráficos de $\boldsymbol{u}_{K_1}, \boldsymbol{u}_{K_2}$ e $\boldsymbol{u}_{K_3}$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

Tabela 32: Valor máximo atingido por $\boldsymbol{u}_K$ no intervalo de tempo $[0, 1]$ para os diferentes valores de $\rho_F$.

| $\rho_F$ | $\|\boldsymbol{u}_K\|_\infty$ |
|---|---|
| 5000 | 75.0357 |
| 10000 | 95.4455 |
| 20000 | 122.3139 |

Comparando os exemplos 15 e 16 observe-se novamente a função objetivo não satisfaz uma das condições de fronteira prescritas e ainda variando a forma da função de distribuição espacial $\boldsymbol{\beta_S}$, o resultado numérico continua não apresentando oscilações abruptas como acontece com uma aproximação de Fourier não controlada de 10 termos.

# 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, o posicionamento aproximado do estado final de sistemas descritos pela equação do calor foi abordado, no caso específico de condições de fronteira tipo Dirichlet homogêneas e controles "localizados" no espaço (*i.e.*, dependentes apenas do tempo), por meio de um problema de controle ótimo.

A solução deste problema foi caracterizada por uma equação linear em um espaço de funções de controle definidas no intervalo de tempo pré-especificado - esta equação envolve o "operador de controlabilidade" que leva um dado sinal de controle no estado final correspondente (a partir do estado inicial zero). Utilizando projeções em subespaços de dimensão finita da imagem deste operador, uma sequência de sinais de controle é obtida cujos elementos podem ser gerados por sistemas lineares de dimensão finita. Esta sequência converge para a solução do problema de controle ótimo original.

Alguns exemplos relativos a domínios espaciais de dimensão 1 ilustram a possibilidade de alcançar aproximadamente, em um intervalo finito de tempo pré-especificado, uma desejada função do domínio espacial utilizando um pequeno número de sinais escalares de controle (ou até mesmo um único).

**REFERÊNCIAS**


BELGACEM, F.B.; BERNARDI, C.; FEKIH, H.E., *On the Dirichlet Boundary Control of the Heat Equation with Final Observation I:A space–time mixed formulation and penalization*, Asymptotic Analysis **71** (2011), no. 1–2, 101–121.

CORRÊA, G.O.; LÓPEZ-FLORES, M.M.; MADUREIRA, A.L., *Posicionamento Aproximado do Estado Final para Sistemas Descritos pela Equaçáo do Calor.* Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, UFCG, Campina Grande, PB, 2012a.

______, *Relatório Interno 2012*, LNCC, Petrópolis, RJ, 2012b.

EKELAND, I.; TÉMAM, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, 1st. ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.

EVANS, L.C., *Partial Differential Equations*, 2nd. ed., American Mathematical Society, 2010.

GAMA, R.M.S., *Fundamentos de Mecânica dos Fluidos*, 1st. ed., EdUERJ, 2012.

______, *Matemática Básica para Mecânica dos Meios Contínuos*, 1st. ed., EdUERJ, 2011.

GOLNARAGHI, F.; KUO, B.C., *Automatic Control Systems*, 9th. ed., John Wiley & Sons, Inc., 2010.

KOGUT, P.I.; LEUGERING, G.R., *Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis*, Birkhäuser, 2011.

KREYSZIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, 1st. ed., John Wiley & Sons, Inc., 1978.

______; KREYSZIG, H.; NORMINGTON, E.J., *Advanced Engineering Mathematics*, 10th. ed., John Wiley & Sons, Inc., 2011.

KUNICH, K.; VEXLER, B., *Constrained Dirichlet Boundary Control in $L^2$ for a Class of Evolution Equations*, SIAM J. Control Opt. **46** (2007), no. 5, 1726 – 1753.

LAUB, A.J., *Matrix Analysis for Scientists & Engineers*, 1st. ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

LEWIS, D.C., *Orthogonal Functions Whose Derivatives are Also Orthogonal*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 2 (1953), no. 2, 159–168.

MARUŠIĆ–PALOKA, E., *Two Methods for Replacing Dirichlets's Boundary Condition by Robin's Boundary Condition via Penalization*, Mathematical Communications **4** (1999), 27–33.

MIKLAVČIČ, M., *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations*, 1st. ed., World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1998.

PINCHOVER, Y.; RUBINSTEIN, J., *An Introduction to Partial Differential Equations*, 1st. ed., Cambridge University Press, 2005.

SALSA, S., *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, 1st. ed., Springer–Verlag Italia, 2008.

SLATTERY, J.C., *Advanced Transport Phenomena*, 1st. ed., Cambridge University Press, 1999.

TAYLOR, A.E.; MANN, W.R., *Advanced Calculus*, 3rd. ed., John Wiley & Sons, Inc., 1983.

TRÖLTZSCH, F., *Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications*, American Mathematical Society, 2010.

ZHOU, K.; DOYLE, J.C.; GLOVER, K., *Robust and Optimal Control*, 1st. ed., Prentice Hall, 1996.

ZUAZUA, E., *Controllability of Partial Differential Equations and its Semi-discrete Approximations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **8** (2002), no. 2, 469–513.

## GLOSSÁRIO

**Auto-função** (KREYSZIG, 1978, p. 372) Seja $X \neq \varnothing$ um espaço funcional normado e $T : \mathcal{D}(T) \to X$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Se para um $x \in X$ tem-se $(T - \lambda I)\, x = 0$ e $x \neq 0$, então $\lambda$ é um auto-valor de $T$. O vetor $x$ é chamado *auto-função de* $T$ correspondente ao auto-valor $\lambda$.

**Convergência Fraca** (KREYSZIG, 1978, p. 257) A sequência $\{x_n\}$ em um espaço normado $X$ é dita de *fracamente convergente* se existe um $x \in X$ tal que $\forall f \in X'$, onde $X'$ é o espaço dual de $X$, *i.e.*, o espaço de todos os funcionais lineares de $X$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Denota-se $x_n \xrightarrow{w} x$ ou $x_n \rightharpoonup x$. O elemento $x$ dito de *limite fraco* de $\{x_n\}$ e disse-se que $\{x_n\}$ *converge fracamente* para $x$.

**Derivada Parcial Fraca** (MIKLAVČIČ, 1998, p. 127) Seja $\theta \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\boldsymbol{\gamma}$ um multi-índice disse-se que $\theta$ possui a $\gamma-$ ésima *derivada fraca* (ou que $D^\gamma \theta$ existe) se existir $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$(-1)^{|\gamma|} \int_\Omega \theta D^\gamma \phi = \int_\Omega \theta \phi \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

onde $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções que possuem infinitas derivadas e se anulam fora de $\Omega$.

**Malha Aberta** (GOLNARAGHI; KUO, 2010, p. 5) O controle em *malha aberta* consiste em aplicar um sinal de controle pré-determinado que não é calculado a partir de uma medição do sinal de saída, esperando-se que ao final de um determinado tempo $t$ a variável controlada atinja um determinado valor.

**Solução Fraca** MIKLAVČIČ, 1998, p. 62–63) Dadas $f$ e $\theta$ tal que $L\theta = f$. Seja $L^*$ o operador adjunto formal do operador $L$, tal que $\langle L\theta, \phi\rangle = \langle \theta, L^*\phi\rangle$ para $\phi \in \mathscr{D}(L^*)$,(o é o espaço das funções teste) então $\theta$ é dita de *solução fraca* de $L\theta = f$, se $\langle \theta, L^*\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$ para toda $\phi \in \mathscr{D}(L^*)$.

# APÊNDICE A–INFORMAÇÕES E CÁLCULOS AUXILIARES

## APÊNDICE A.1–Elementos de Mecânica dos Meios Contínuos

O material a seguir foi obtido de (GAMA, 2011) e (GAMA, 2012).

**Teorema da Divergência (para campos tensoriais)**

Considere o vetor constante arbitrário, $\mathbf{a}$. Então, para um campo tensorial $\mathbf{S}$ suficientemente regular, vamos escrever que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{Sn}\cdot\mathbf{a}dS = \int_{\Omega} (div\mathbf{S}dS)\cdot\mathbf{a}$$

e que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}dS = \int_{\Omega} div\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\right)dV.$$

Logo, definindo $div\mathbf{S}$ de tal forma que

$$(div\mathbf{S})\cdot\mathbf{a} = div\left(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}\right)$$

pode-se escrever

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{Sn}dS = \int_{\Omega} div\mathbf{S}dV.$$

**Gradiente de Velocidades**

Seja $\mathbf{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$ um campo vetorial. O *gradiente de velocidades* de $\mathbf{v}$ é definido por

$$grad\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Logo tem-se

$$grad\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{D}}_{\substack{\text{Parte}\\ \text{simétrica}}} + \underbrace{\mathbf{W}}_{\substack{\text{Parte}\\ \text{anti-simétrica}}}$$

onde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left[grad\mathbf{v} + (grad\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right] \text{ e } \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left[grad\mathbf{v} - (grad\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right].$$

**Derivada Material**

Seja $\boldsymbol{\omega}$ um campo vetorial. Define-se a *derivada material* como

$$\frac{D\ \boldsymbol{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (grad\boldsymbol{\omega})\,\mathbf{v}.$$

**Teorema do Transporte de Reynolds**

Seja o campo $\Psi$, função da variável $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (representando a posição) com componentes $(x, y, z)$ e do tempo $t$, dado neste caso, por

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t).$$

Seja a variável $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ com componentes $(X, Y, Z)$ definida de tal forma que, dados $\mathbf{X}$ e $t$, $\mathbf{x}$ é determinado de forma única a partir da função regular

$$\chi\,(\mathbf{X}, t) \to (x, y, z) = (\tilde{x}(X, Y, Z), \tilde{y}(X, Y, Z), \tilde{z}(X, Y, Z)).$$

Assim, pode-se escrever que

$$\Psi = \hat{\Psi}\,(\mathbf{X}, t) = \hat{\Psi}(\tilde{x}(X, Y, Z), \tilde{y}(X, Y, Z), \tilde{z}(X, Y, Z)) = \tilde{\Psi}\,(\mathbf{X}, t)\,.$$

O *Teorema do Transporte de Reynolds* estabelece, no caso de campos regulares, que

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\Psi}\,(\mathbf{X}, t)\right) + \left(\tilde{\Psi}\,(\mathbf{X}, t)\right) tr\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\mathbf{F}^{-1}\right)\right] dV = \int_{\Omega_t}\left[\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi div\mathbf{v}\right] dV,$$

onde $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}\,(\mathbf{X}, t)$, $\dfrac{D}{Dt}$ representa a derivada material e $\Omega_t$ é a configuração do corpo no instante $t$ (pode varia no tempo $t$).

**APÊNDICE A.2–Identidades de Green**

Para funções $\theta, \phi$ que são duas vezes diferenciáveis em um domínio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ com fronteira $\partial\mathcal{U}$, tem-se a seguir as identidades de Green (Taylor; Mann, 1983, p. 492–493),

**A Primeira Identidade**

$$\int_{\mathcal{U}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d\mathcal{U} = \int_{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial \theta}{\partial x}\phi \cdot \mathbf{n} d(\partial \mathcal{U}),$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal a $\partial \mathcal{U}$.

**A Segunda Identidade**

$$\int_{\mathcal{U}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\phi - \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) d\mathcal{U} = \int_{\partial \mathcal{U}} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x}\phi - \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d(\partial \mathcal{U}).$$

**APÊNDICE A.3–Integrais Trigonométricas**

Para a integral em (3.1.10) para $l \neq k$

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} \sin\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx &= \frac{1}{L_x}\int_0^{L_x} \left[\cos\left(\frac{(l-k)\pi x}{L_x}\right) - \cos\left(\frac{(l+k)\pi x}{L_x}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(l-k)}\sin\left(\frac{(l-k)\pi x}{L_x}\right) - \frac{1}{(l+k)}\sin\left(\frac{(l+k)\pi x}{L_x}\right)\right]_0^{L_x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para a integral em (3.1.11)

$$\begin{aligned} \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} \sin^2\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx &= \frac{1}{L_x}\int_0^{L_x} \left[1 - \cos\left(\frac{2k\pi x}{L_x}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{L_x}\left[x - \frac{L_x}{2k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi x}{L_x}\right)\right]_0^{L_x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para a integral em (3.1.12) para $l \neq k$

$$\begin{aligned} \frac{2lk\pi^2}{L_x^3}\int_0^{L_x} \cos\left(\frac{l\pi x}{L_x}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right) dx &= \frac{lk\pi^2}{L_x^3}\int_0^{L_x} \left[\cos\left(\frac{(l+k)\pi x}{L_x}\right) + \cos\left(\frac{(l-k)\pi x}{L_x}\right)\right] dx \\ &= \frac{lk\pi}{L_x^2}\left[\frac{1}{(l+k)}\sin\left(\frac{(l+k)\pi x}{L_x}\right) + \frac{1}{(l-k)}\sin\left(\frac{(l-k)\pi x}{L_x}\right)\right]_0^{L_x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para a integral em (3.1.13)

$$\begin{aligned}
\frac{2k^2\pi^2}{L_x^3}\int_0^{L_x}\cos^2\left(\frac{k\pi x}{L_x}\right)dx &= \frac{k^2\pi^2}{L_x^3}\int_0^{L_x}\left[1+\cos\left(\frac{2k\pi x}{L_x}\right)\right]dx \\
&= \frac{k^2\pi^2}{L_x^3}\left[x+\frac{L_x}{2k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi x}{L_x}\right)\right]_0^{L_x} \\
&= \left(\frac{k\pi}{L_x}\right)^2.
\end{aligned}$$

## APÊNDICE B–O MÉTODO DE GALERKIN

### APÊNDICE B.1–Alguns Fatos Preliminares

Apresenta-se a seguir um material explicativo sobre o método de Galerkin, utilizado no enfraquecimento das da equação do calor apresentada em (3.1.1). Para maiores detalhes sobre este material encontram-se em (SALSA, 2008, p. 334-342).

Na formulação variacional de problemas de valor na fronteira aparecem com muita frequência as *formas bilineares*. Dados dois espaços lineares $V_1, V_2$, a **forma bilinear em** $V_1 \times V_2$ é uma função

$$\mathrm{a} : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

i) Para toda $y \in V_2$ a função $x \mapsto \mathrm{a}(x, y)$ é linear em $V_1$.

ii) Para toda $x \in V_1$ a função $y \mapsto \mathrm{a}(x, y)$ é linear em $V_2$.

Quando $V_1 = V_2$, simplesmente é dito que a é uma forma bilinear em $V$.

Seguem alguns exemplos de formas bilineares:

- O produto interno em um espaço de Hilbert.
- Seja $\Omega$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{a}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \int_\Omega (\underline{\alpha} \nabla \mathrm{u} \cdot \nabla \mathrm{v} + \mathrm{u}\mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathrm{v} + a_0(\mathbf{x})\mathrm{uv})\, d\mathbf{x}, \quad (\underline{\alpha} > 0).$$

ou

$$\mathrm{a}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \int_\Omega \underline{\alpha} \nabla \mathrm{u} \cdot \nabla \mathrm{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} h\mathrm{uv}\, dS, \quad (\underline{\alpha} > 0).$$

Vários problemas de valor na fronteira podem ser representados abstratamente pelo problema a seguir:

**<u>Problema A</u>**

Seja $V$ um espaço de Hilbert, a uma forma bilinear em $V$ e $F \in V^*$. Considere o seguinte problema, chamado de *problema variacional abstrato*:

$$\begin{cases} \text{Achar} \;\; \mathrm{u} \in V \\ \text{tal que} \\ \mathrm{a}\,(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \langle F, \mathrm{v} \rangle_* \quad \forall \mathrm{v} \in V \end{cases}. \tag{B.1.1}$$

A seguir será apresentado um teorema, sem demonstração, que será usado como referência dentro do texto. A demonstração deste teorema encontra-se em (SALSA, 2008, p. 336).

**Teorema B.1** (Lax - Milgram)**.** *Seja $V$ um espacio de Hilbert real fornecido com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma $\|\cdot\|$. Seja* $\mathrm{a} = \mathrm{a}\,(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ *uma forma bilinear em $V$. Se:*

*i)* a *é* **contínuo***,* i.e.*, existe uma constante $M$ tal que*

$$|\mathrm{a}\,(\mathrm{u}, \mathrm{v})\,| \le M \|\mathrm{u}\| \|\mathrm{v}\|, \quad \forall \mathrm{u}, \mathrm{v} \in V;$$

*ii)* a *é $V-$* **coercivo***,* i.e.*, existe a constante $\underline{\alpha} > 0$ tal que*

$$\mathrm{a}\,(\mathrm{v}, \mathrm{v}) \ge \underline{\alpha} \|\mathrm{v}\|^2,$$

*então existe uma única solução $\overline{\mathrm{u}} \in V$ para o problema (B.1.1). Além disso, a seguinte estimativa de estabilidade se mantêm:*

$$\|\overline{\mathrm{u}}\| \le \frac{1}{\underline{\alpha}} \|F\|_{V^*}.$$

## APÊNDICE B.2–O Método de Galerkin

A solução u do problema variacional abstrato (B.1.1), satisfaz a equação

$$\mathrm{a}\,(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \langle F, \mathrm{v} \rangle_* \tag{B.2.1}$$

para *cada* v no espaço de Hilbert $V$. Em aplicações concretas, é importante calcular as soluções aproximadas com um determinado grau de precisão e a dimensão infinita de $V$ é o principal obstáculo. Muitas vezes, porém, $V$ pode ser escrito como uma união subespaços de dimensão finita, de forma que, em princípio, pode ser razoável obter soluções aproximadas "projetando" a equação (B.2.1) nesses subespaços. Esta é a ideia do **método de Galerkin**.

Em princípio, quanto maior for a dimensão do subespaço melhor deve ser o grau de aproximação. Mais precisamente, a ideia é construir uma sequncia $\{V_k\}$ de subespaços de $V$ com as seguintes propriedades:

a) Cada $V_k$ é de *dimensão finita*: $dimV_k = k$,

b) $V_k \subset V_{k+1}$ (não necessariamente estrita)

c) $\overline{\cup V_k} = V$.

Para realizar a projeção, suponha que $span(V_k) = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$. Em seguida, Logo, procura-se para uma aproximação da solução u na forma

$$\mathrm{u}_k = \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j, \tag{B.2.2}$$

solucionando o problema *projetado*

$$\mathrm{a}\left(\mathrm{u}_k, \mathrm{v}\right) = \langle F, \mathrm{v}\rangle_* \quad \forall \mathrm{v} \in V_k. \tag{B.2.3}$$

Dado que $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ forma uma base em $V_k$, a equação anterior requer

$$\mathrm{a}\left(\mathrm{u}_k, \varphi_r\right) = \langle F, \varphi_r\rangle_* \qquad r = 1, 2, \ldots, k. \tag{B.2.4}$$

Substituindo (B.2.2) em (B.2.4), obtém-se $k$ equações lineares algébricas

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \mathrm{a}\left(\varphi_j, \varphi_r\right) = \langle F, \varphi_r\rangle_* \qquad r = 1, 2, \ldots, k. \tag{B.2.5}$$

para os coeficientes desconhecidos $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Introduzindo os vetores

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \langle F, \varphi_1\rangle_* \\ \langle F, \varphi_2\rangle_* \\ \vdots \\ \langle F, \varphi_k\rangle_* \end{pmatrix}$$

e a matriz $\mathbf{A} = [\mathrm{a}_{rj}]$, com entradas

$$\mathrm{a}_{rj} = \mathrm{a}\left(\varphi_j, \varphi_r\right) \qquad r = 1, 2, \ldots, k,$$

então é possível escrever (B.2.5) na forma compacta

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{F}. \tag{B.2.6}$$

A matriz $\mathbf{A}$ é chamada de *matriz de rigidez* e tem um papel muito importante na análise numérica do problema.

Se a forma bilinear a é coerciva, $\mathbf{A}$ é *estritamente positiva definida.* De fato, seja $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^k$. Então, pela linearidade e a coercividade:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} &= \sum_{r,j=1}^{k} \mathrm{a}_{rj}\xi_r\xi_j = \sum_{r,j=1}^{k} \mathrm{a}\left(\varphi_j, \varphi_r\right)\xi_r\xi_j \\ &= \sum_{r,j=1}^{k} \mathrm{a}\left(\xi_j\varphi_j, \xi_r\varphi_r\right) = \mathrm{a}\left(\sum_{j=1}^{k}\xi_j\varphi_j, \sum_{r=1}^{k}\xi_r\varphi_r\right) \\ &\geq \underline{\alpha}\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \xi_j\varphi_j \in V_k.$$

Como $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ é uma base em $V_k$, tem-se que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e somente se $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Portanto, $\mathbf{A}$ é estritamente positiva definida e em particular, não singular. Assim, para cada $k \geq 1$, existe uma única solução $u_k \in V_k$ para (B.2.6). Deseja-se mostrar que $u_k \to u$, quando $k \to \infty$, *i.e.*, a *convergência do método* e fornecer controle sobre o erro de aproximação.

## APÊNDICE B.3–Convergência do Método de Galerkin

O seguinte lema mostra a utilidade da continuidade e das constantes de coercividade ($M$ e $\alpha$, respectivamente) da forma bilinear a. Este lema mostra a convergência do método e mostra o controle que se tem sobre o erro de aproximação.

**Lema B.1** (Céa). *Assuma-se que todas as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram são satisfeitas e que* u *é a solução do problema (B.1.1). Se* $\mathrm{u}_k$ *é a solução do problema (B.2.4), então*

$$\|\mathrm{u} - \mathrm{u}_k\| \leq \frac{M}{\underline{\alpha}} \inf_{\mathrm{v} \in V_k} \|\mathrm{u} - \mathrm{v}\|. \tag{B.3.1}$$

*Demonstração.* Tem - se

$$\mathrm{a}(\mathrm{u}_k, \mathrm{v}) = \langle F, \mathrm{v} \rangle_* \quad \forall \mathrm{v} \in V_k$$

e

$$\mathrm{a}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \langle F, \mathrm{v} \rangle_* \quad \forall \mathrm{v} \in V_k.$$

Subtraindo as duas equações obtém-se

$$\mathrm{a}(\mathrm{u} - \mathrm{u}_k, \mathrm{v}) = 0 \quad \forall \mathrm{v} \in V_k.$$

Em particular, tem-se para $\mathrm{v} - \mathrm{u}_k \in V_k$

$$\mathrm{a}(\mathrm{u} - \mathrm{u}_k, \mathrm{v} - \mathrm{u}_k) = 0 \quad \forall \mathrm{v} \in V_k$$

o que implica

$$\begin{aligned} \mathrm{a}(\mathrm{u}, \mathrm{u}_k, \mathrm{u} - \mathrm{u}_k) &= \mathrm{a}(\mathrm{u} - \mathrm{u}_k, \mathrm{u} - \mathrm{v}) + \mathrm{a}(\mathrm{u} - \mathrm{u}_k, \mathrm{v} - \mathrm{u}_k) \\ &= \mathrm{a}(\mathrm{u} - \mathrm{u}_k, \mathrm{u} - \mathrm{v}). \end{aligned}$$

Logo, pela coercividade de a,

$$\underline{\alpha} \|\mathrm{u} - \mathrm{u}_k\|^2 \leq \mathrm{a}(\mathrm{u} - \mathrm{u}_k, \mathrm{u} - \mathrm{u}_k) \leq M \|\mathrm{u} - \mathrm{u}_k\| \|\mathrm{u} - \mathrm{v}\|$$

disto obtém-se,

$$\|\mathrm{u} - \mathrm{u}_k\| \leq \frac{M}{\underline{\alpha}} \|\mathrm{u} - \mathrm{v}\|. \tag{B.3.2}$$

Esta desigualdade vale para todo $\mathrm{v} \in V_k$, com $\frac{M}{\underline{\alpha}}$ independente de $k$. Portanto, (B.3.2) vale se é tomado o ínfimo do lado direito sobre todo $\mathrm{v} \in V_k$. □

Agora, tem-se os elementos necessários para analisar a convergência do método de Galerkin. Como tem-se assumido que

$$\overline{\cup V_k} = V,$$

existe a sequência $\{\mathrm{w}_k\} \subset V_k$ tal que $\mathrm{w}_k \to \mathrm{u}$ quando $k \to \infty$. Do lema de Céa tem-se que para toda $k$:

$$\|\mathrm{u} - \mathrm{u}_k\| \leq \frac{M}{\underline{\alpha}} \inf_{\mathrm{v} \in V_k} \|\mathrm{u} - \mathrm{v}\| \leq \frac{M}{\underline{\alpha}} \|\mathrm{u} - \mathrm{w}_k\|$$

assim obtém-se

$$\|\mathrm{u} - \mathrm{u}_k\| \to 0.$$