



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Ciência e Tecnologia

Faculdade de Engenharia

Wendel Fonseca da Silva

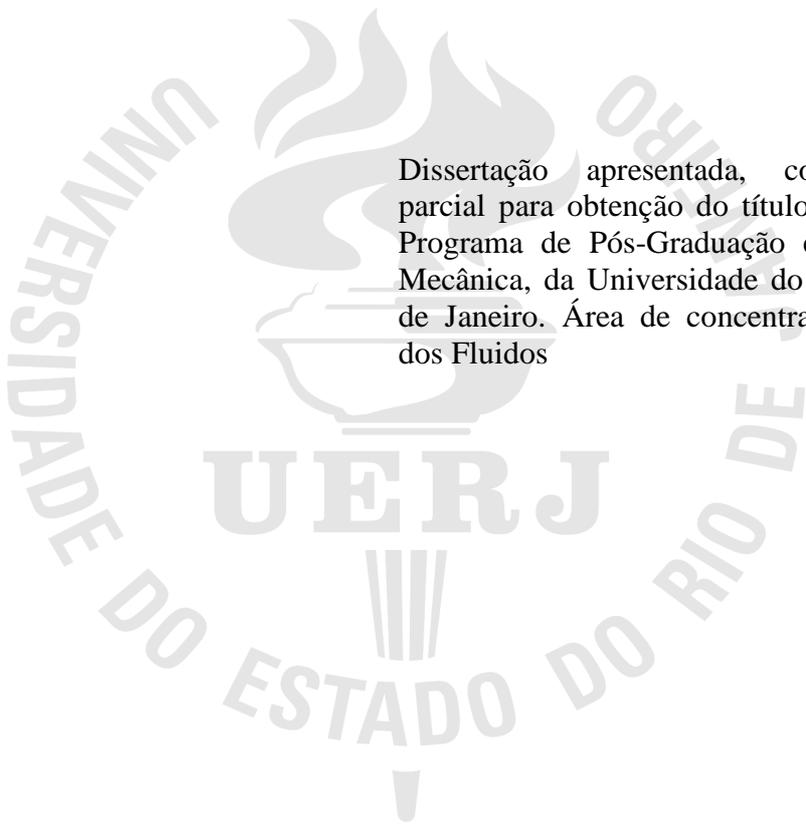
**Simulação de problemas de transferência de calor em regime permanente com uma relação entre condutividade térmica e temperatura constante por partes**

Rio de Janeiro

2013

Wendel Fonseca da Silva

**Simulação de problemas de transferência de calor em regime permanente com uma relação entre condutividade térmica e temperatura constante por partes**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Laura Martins-Costa

Rio de Janeiro

2013

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Wendel Fonseca da.  
Simulação de problemas de transferência de calor em regime permanente com uma relação entre condutividade térmica e temperatura constante por partes / Wendel Fonseca da Silva. - 2013.  
56f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.  
Coorientador: Maria Laura Martins-Costa.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Mecânica dos fluidos - Dissertações. I. Gama, Rogério Martins Saldanha. II. Costa, Maria Laura Martins. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 532

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Wendel Fonseca da Silva

**Simulação de problemas de transferência de calor em regime permanente com uma relação entre condutividade térmica e temperatura constante por partes**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Mecânica dos Fluidos

Aprovado em: 20 de março de 2013.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Laura Martins-Costa (Coorientadora)  
Universidade Federal Fluminense – UFF

---

Prof. Dr. João Miguel Truong Dinh Tien  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

---

Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid  
Universidade Federal Fluminense – UFF

Rio de Janeiro

2013

## **DEDICATÓRIA**

Ao meu orientador Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama e a minha Coorientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Laura Martins-Costa, grandes profissionais, estes foram os grandes responsáveis pelo incentivo e ensinamentos para a conclusão deste árduo trabalho, ao Eng<sup>o</sup> Eduardo Sidney, como meu superior na Empresa Companhia Siderúrgica Nacional, onde trabalho, me proporcionou minhas idas e vindas ao Rio de Janeiro, para participar das aulas.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, por tudo que tem me proporcionado nessa minha caminhada de realizações, aprendizados e grandes vitórias em meio há tantos desafios.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ, que me proporcionou a oportunidade de desenvolver um projeto na área de meu interesse, associado ao Centro de Estudos e Pesquisas em Energias Renováveis CEPER.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio e patrocínio.

A minha querida mãe Marli Fonseca da Silva por todo apoio, amor, educação e bons exemplos de superação e vitórias.

A meu querido pai Vicente de Souza Silva pelo apoio e educação.

Aos meus irmãos Wescley e Alina por todo carinho e apoio nessa minha caminhada.

Aos meus cunhados que participam intensamente de minha vida como irmãos.

Ao meu amigo, Cleciano Berlando,, foram dias difíceis e cansativos juntos viajando para o Rio para a conquista desse título, passamos momentos de dificuldades e alegrias inigualáveis.

Aos Mestres da UniFOA que iniciaram meu processo de qualificação na graduação e aos Mestres da UERJ que contribuíram para fechar mais esta etapa de meus aprendizados.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta dissertação, muito obrigado!

*" Quando uma criatura humana desperta para um grande sonho e sobre ele lança toda a força de sua alma, todo o universo conspira a seu favor."*

Johann Goethe

## RESUMO

SILVA, Wendel Fonseca da. *Simulação de problemas de transferência de calor em regime permanente com uma relação entre condutividade térmica e temperatura constante por partes*. 2013. 56f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

Este trabalho estuda a transferência de calor por condução considerando a condutividade térmica como uma função constante por partes da temperatura. Esta relação, embora fisicamente mais realista que supor a condutividade térmica constante, permite obter uma forma explícita bem simples para a inversa da Transformada de Kirchhoff (empregada para tratar a não linearidade do problema). Como exemplo, apresenta-se uma solução exata para um problema com simetria esférica. Em seguida, propõe-se uma formulação variacional (com unicidade demonstrada) que introduz um funcional cuja minimização é equivalente à solução do problema na forma forte. Finalmente compara-se uma solução exata obtida pela inversa da Transformada de Kirchhoff com a solução obtida via formulação variacional.

Palavras-chave: Transferência de calor não linear; Condutividade térmica temperatura-dependente; Formulação variacional; Transformada de Kirchhoff.

## ABSTRACT

This work studies conduction heat transfer considering thermal conductivity as a piecewise constant function of temperature. This relationship, although physically more realistic than assuming constant thermal conductivity, provides a simple explicit form for the inverse of Kirchhoff transformation (employed to deal with the problem non-linearity). An exact solution for a problem with spherical symmetry is presented, as an example. In the sequence, a variational formulation (with demonstrated uniqueness) is proposed. This formulation introduces a functional whose minimization is equivalent to the solution of the problem in the strong form. Finally an exact solution obtained using the inverse of Kirchhoff transformation is compared with the solution obtained via variational formulation.

Keywords: Nonlinear heat transfer; Temperature-dependent thermal conductivity; Variational Formulation; Kirchhoff transformation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1- Condutividade térmica versus temperatura para alguns refratários .....	17
Figura 1.2- Condutividade térmica versus temperatura para alguns metais .....	18
Figura 1.3- Esquema para o problema plano .....	19
Figura 3.1- Ilustração do problema .....	26
Figura 4.1- Corpo esférico .....	30
Tabela 1 - Exemplo de comparação com solução exata.....	54

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

MECAN/UERJ	Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade do Estado do RJ
TEM/UFF	Departamento de Engenharia Mecânica/Universidade Federal Fluminense
IME/UERJ	Instituto de Matemática e Estatística/ Universidade do Estado do Rio de Janeiro
CEPER	Centro de Estudos e Pesquisas em Energias Renováveis
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

## LISTA DE SÍMBOLOS

$k$	Condutividade térmica
$T_*$	Temperatura de referencia
$(k_1, k_2)$	Constantes positivas
$\dot{q}$	Taxa de geração de calor
$L$	Comprimento na direção longitudinal
$x$	Direção de coordenadas
$t$	Tempo
$T_0$	Temperatura de referencia quando $x=0$
$T_L$	Temperatura de referencia quando $x=L$
$h_0, h_L$	Coefficiente de troca de calor por convecção
$T_{\infty 0}, T_{\infty L}$	Temperatura dos ambientes (a esquerda e a direita)
$C_1$	Constante 1
$C_2$	Constante 2
<b>T</b>	Tensor tensão de Cauchy
<b>g</b>	Aceleração da gravidade
<b>v</b>	Velocidade
$q$	Fluxo de calor
$\rho$	Densidade mássica
$\Omega$	Configuração fixa
$\partial\Omega$	Fronteira de $\Omega$
$\Omega_t$	Configuração Material
$\partial\Omega_t$	Fronteira de $\Omega_t$
$u$	Energia interna especifica
$c$	Calor especifico
$n$	Vetor normal unitário exterior
$w$	Variável da equação diferencial linear
$\aleph[T]$	Transformada de Kirchhoff

$\xi$	Variável de similaridade
$\delta$	Numero positivo fixo
$r$	Variável radial
$R$	Raio do corpo esférico
$w_R$	Denotação do valor $w$ no contorno $r = R$
$W$	Redefinição da incógnita $w$
$I[v]$	Funcional
$\delta I$	Primeira variação do funcional
$v$	Função admissível
$\varepsilon$	Parâmetro escalar
$\eta$	Variação admissível
$\alpha$	Constante positiva
$\beta$	Constante menor que $\alpha$
$\Theta$	Redefinição da temperatura

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	13
1	<b>CONSIDERAÇÕES INICIAIS</b> .....	16
2	<b>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</b> .....	22
3	<b>A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF</b> .....	26
4	<b>UM EXEMPLO: PROBLEMA COM SIMETRIA ESFÉRICA</b> .....	30
5	<b>UM PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA O PROBLEMA</b> .....	36
6	<b>UNICIDADE DA SOLUÇÃO</b> .....	41
7	<b>UMA MUDANÇA DE VARIÁVEL CONVENIENTE</b> .....	46
8	<b>RESULTADOS</b> .....	48
9	<b>COMPARAÇÃO COM UMA SOLUÇÃO EXATA</b> .....	52
10	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS</b> .....	55
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	56

## INTRODUÇÃO

Problemas de transferência de calor por condução são geralmente simulados utilizando uma aproximação que supõe a condutividade térmica independente da temperatura, a fim de simplificar a simulação dos problemas considerados. A fim de tentar representar de uma forma mais realista este problema, um primeiro passo seria considerar um problema com uma dependência simples entre a condutividade térmica e a temperatura. Neste trabalho considera-se a condutividade térmica uma função constante por partes da temperatura. Esta relação, embora fisicamente mais realista que supor a condutividade térmica constante, ainda permite obter uma forma explícita bem simples para a inversa da Transformada de Kirchhoff, a ser empregada para tratar a não linearidade do problema.

Em diversos problemas com relevância engenharia verifica-se uma dependência que não pode ser desprezada da condutividade térmica com a temperatura. Por exemplo, no caso de nanotubos de carbono (conhecidos pelas suas elevadas condutividades térmicas), a condutividade térmica dependente da temperatura das cordas cristalinas de nanotubos de carbono de parede única diminui suavemente com a diminuição da temperatura e apresenta uma dependência linear da temperatura quando esta última é inferior a 30 K (Hone et al. , 1999). Além disso, quando a condutividade térmica é considerada como uma função da temperatura, verifica-se um pico da condutividade térmica e, em seguida, sua queda, a temperaturas mais elevadas (Osman e Srivastava, 2001). Propriedades térmicas desempenham um papel importante no silício poroso, especialmente em relação às suas aplicações em optoeletrônica. Geseley et al. (1997) verificaram que a condutividade térmica aumenta com o aumento da temperatura. Outro material importante que apresenta interesse em optoeletrônica e aplicações eletrônicas é o óxido de zinco. As condutividades térmica máximas do óxido de zinco policristalino ocorrem a cerca de 60 K e os seus valores são quase uma ordem de grandeza mais baixa do que aquelas do óxido de zinco comum (Alvarez-Quintana et al., 2010).

Em diversas aplicações de Engenharia simula-se um problema não-linear de transferência de calor complexo apenas para verificar se a temperatura máxima se mantém inferior a um determinado limite. Nesses casos, a simulação deixa de ser necessária se for determinada uma estimativa do limite superior para a solução. No caso de condutividade térmica constante, foram propostos limites superiores para problemas sujeitos a condições de contorno não-lineares, dadas por transferência de calor condução- radiação (Saldanha da Gama, 1997; Saldanha da Gama, 2000), que permitem contornar a necessidade de uma simulação completa do processo de transferência de calor por condução.

O objetivo principal deste trabalho é estudar a transferência de calor por condução em problemas nos quais considera-se a condutividade térmica uma função constante por partes da temperatura. Neste sentido, apresenta-se uma forma explícita para a inversa da Transformada de Kirchhoff e uma solução analítica através desta. Propõe-se uma formulação variacional, demonstrando sua unicidade. Esta formulação introduz um funcional cuja minimização é equivalente à solução do problema na forma diferencial. Finalmente compara-se uma solução exata obtida pela inversa da Transformada de Kirchhoff com a solução obtida via formulação variacional.

Para melhor compreensão, o trabalho será estruturado em capítulos. O capítulo 1 apresenta a equação que caracteriza a condutividade térmica dependente da temperatura a ser empregada neste trabalho. Ele apresenta problemas usuais de transferência de calor por condução, com condição de contorno linear, considerando a condutividade térmica constante e mostra a solução exata para um problema unidimensional. O capítulo 2 apresenta os fundamentos teóricos, a partir da equação de conservação de energia e da hipótese constitutiva dada pela lei de Fourier e expressa as condições de contorno lineares a serem utilizadas, a saber temperatura e /ou troca de calor por convecção prescritas na fronteira. No capítulo 3 é introduzida a transformada de Kirchhoff a ser empregada para tratar a não linearidade do problema, uma vez que, sempre que a condutividade térmica for dependente da temperatura, o problema será governado por uma equação diferencial não linear. Apresenta-se o problema completo de transferência de calor com condutividade térmica dependente da temperatura em regime permanente, empregando a transformada de Kirchhoff. O capítulo 4 apresenta a solução exata para um problema com simetria esférica utilizando a metodologia introduzida no capítulo anterior.

No capítulo 5 é construída uma formulação variacional para a transferência de calor com condutividade térmica dependente da temperatura, mostrando-se que a minimização do funcional proposto neste trabalho é equivalente ao problema introduzido no capítulo 3. O

capítulo 6 mostra que a solução dada pelo funcional apresentado no capítulo 5 é única, mostrando a convexidade do referido funcional. O capítulo 7 introduz uma mudança de variável conveniente no problema original e no problema modificado pela introdução da transformada de Kirchhoff. No capítulo 8 é apresentado um exemplo, enquanto o capítulo 9 compara duas metodologias para tratar um problema com solução exata – a inversa da Transformada de Kirchhoff e a solução obtida via formulação variacional

## 1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Em geral, de forma a simplificar os problemas, a condutividade térmica é suposta constante. Em outras palavras, ela afeta a distribuição de temperaturas, mas não é afetada por essa distribuição.

Nesta Dissertação de Mestrado, cujo texto tem também uma finalidade didática, vamos considerar uma classe de problemas de condução de calor onde a condutividade térmica, denotada pela letra  $k$ , é uma função (constante por partes) da temperatura, com a seguinte forma:

$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T_* < T \\ k_2 & \text{para } T_* \geq T \end{cases} \quad (1.1)$$

onde  $T_*$  é uma temperatura de referência (convenientemente escolhida) e  $k_1$  e  $k_2$  são constantes positivas. Esse tipo de relação permite uma aproximação sempre melhor que a hipótese de condutividade constante e, como veremos mais adiante, oferece uma forma explícita bem simples para a inversa da Transformada de Kirchhoff.

A escolha de  $k_1$  e  $k_2$  vai depender do comportamento real da condutividade térmica  $k$  com a temperatura e dos valores de temperatura envolvidos.

Apesar dessa pequena classe de problemas ser bastante modesta ela é consideravelmente mais geral do que os problemas encontrados na literatura básica de transmissão de calor por condução. Podemos afirmar que a esmagadora maioria dos livros de transmissão de calor apenas trata a condução de calor em corpos com condutividade térmica constante e, em geral, com temperatura prescrita em alguma parte do contorno. Em problemas reais, a temperatura não é prescritível em lugar algum, bem como não existem materiais não condutores, os chamados isolantes perfeitos.

Antes de passar para a análise teórica mais específica, é interessante observar o gráfico apresentado na Figura 1.1, o qual apresenta curvas de condutividade térmica versus temperatura para materiais refratários (Holman, 1983). O comportamento das curvas permite observar que, independentemente das unidades, há grandes variações na condutividade térmica com a variação de temperatura.

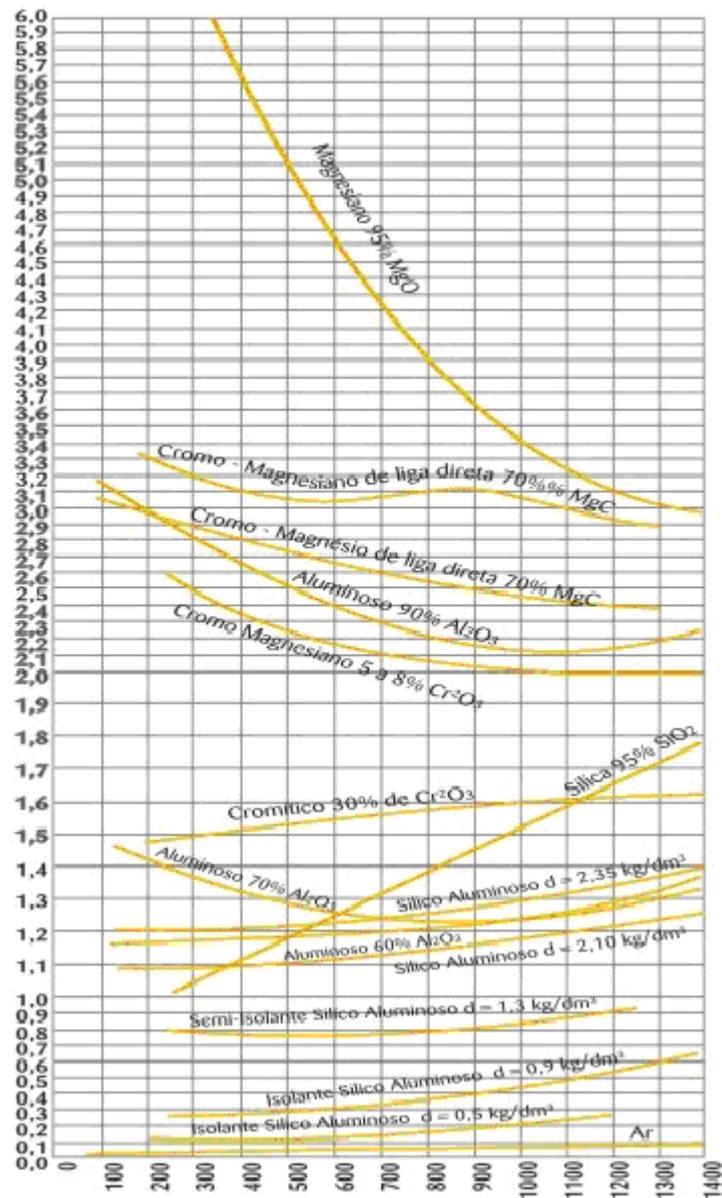


Figura 1.1. Condutividade térmica versus temperatura para alguns refratários.

A Figura 1.2 (Holman, 1983) mostra algumas curvas de condutividade térmica versus temperatura para materiais condutores. Neste caso também pode-se verificar grandes variações na condutividade térmica com a variação de temperatura, para alguns metais, enquanto para outros, como prata, cobre, ouro e alumínio, a hipótese de condutividade térmica independente de temperatura é bem razoável.

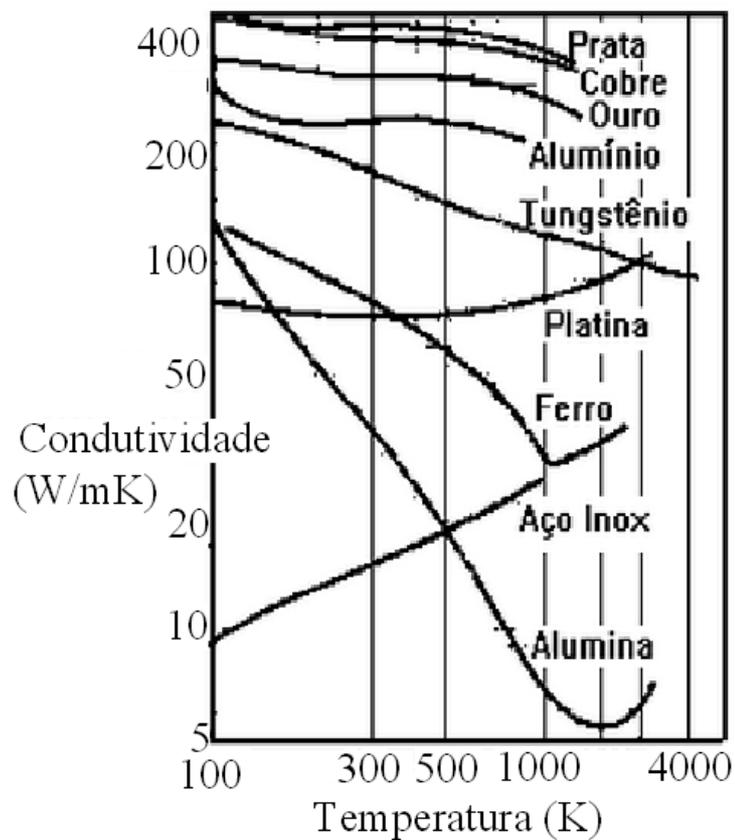


Figura 1.2. Condutividade térmica versus temperatura para alguns metais.

O problema (plano) unidimensional em regime permanente com condutividade térmica  $k$  constante, fonte interna de calor  $\dot{q}$  constante e com condições de contorno de Dirichlet (temperaturas prescritas) é dado por

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = k \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0, \quad \text{para } 0 < x < L$$

$$T = T_0 \quad x = 0$$

$$T = T_L \quad x = L$$
(1.2)

onde  $L$  representa o comprimento na direção longitudinal, conforme mostrado na Figura 1.3, que mostra um problema plano com dimensões perpendiculares à direção considerada (a direção  $x$ ) muito grandes, de forma a se considerar apenas a transferência de calor na direção  $x$ .

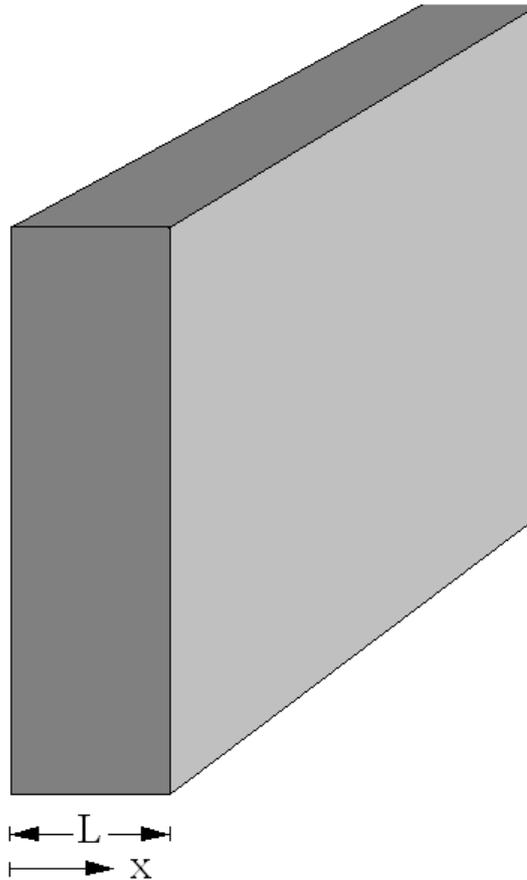


Figura 1.3. Esquema para o problema plano.

O problema descrito pela equação (1.2) tem como solução exata a seguinte expressão:

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + \left( \frac{T_L - T_0}{L} + \frac{\dot{q}L}{2k} \right) x + T_0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.3)$$

Este problema representa o processo de transferência de calor numa placa plana infinita, com condutividade térmica constante e geração interna de calor constante, cuja face  $x = 0$  é mantida na temperatura  $T_0$  e cuja face  $x = L$  é mantida na temperatura  $T_L$ .

Para ser um pouco mais realista, o problema anterior poderia considerar um processo de troca de calor por convecção entre as faces da placa e o ambiente externo (que poderia ser suposto diferente em cada lado). Neste caso, o processo de transferência de calor seria representado por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} &= k \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0, \quad \text{para } 0 < x < L \\ k \frac{dT}{dx} &= h_0 (T - T_{\infty_0}) \quad \text{em } x = 0 \\ -k \frac{dT}{dx} &= h_L (T - T_{\infty_L}) \quad \text{em } x = L \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde  $h_0$  e  $h_L$  são os coeficientes de troca de calor por convecção e  $T_{\infty_0}$  e  $T_{\infty_L}$  são as temperaturas dos ambientes (à esquerda e à direita).

A solução para o problema descrito na equação (1.4) é dada por

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + C_1x + C_2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.5)$$

com as constantes  $C_1$  e  $C_2$  dadas por

$$C_2 = \frac{h_0 T_{\infty_0} + h_L T_{\infty_L} + \dot{q}L + h_L \left( \frac{\dot{q}L^2}{2k} + \frac{h_0 L}{k} T_{\infty_0} \right)}{\left( h_0 + h_L + \frac{h_0 h_L L}{k} \right)} \quad (1.6)$$

$$C_1 = \frac{h_0 \left( h_0 T_{\infty_0} + h_L T_{\infty_L} + \dot{q}L + h_L \left( \frac{\dot{q}L^2}{2k} + \frac{h_0 L}{k} T_{\infty_0} \right) \right) - \left( h_0 + h_L + \frac{h_0 h_L L}{k} \right) T_{\infty_0}}{\left( h_0 + h_L + \frac{h_0 h_L L}{k} \right) k}$$

ou, numa forma alternativa, por

$$T = -\frac{\dot{q}}{2k} \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 + C_1 \left( x - \frac{L}{2} \right) + C_2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.7)$$

com as constantes  $C_1$  e  $C_2$  dadas, neste caso, por

$$C_1 = -\frac{\frac{\dot{q}L}{2} \left( \frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_L} \right) + T_{\infty_0} - T_{\infty_L}}{L + \frac{k}{h_0} + \frac{k}{h_L}} \quad (1.8)$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}L}{4} \left( \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_L} \right) - \left( \frac{\frac{\dot{q}L}{4} \left( \frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_L} \right) + \frac{T_{\infty_0} - T_{\infty_L}}{2}}{L + \frac{k}{h_0} + \frac{k}{h_L}} \right) \left( \frac{k}{h_0} - \frac{k}{h_L} \right) + \frac{\dot{q}L^2}{8k} + \frac{T_{\infty_0} + T_{\infty_L}}{2}$$

e, quando  $h_0$  e  $h_L$  tendem para o infinito, as temperaturas em  $x=0$  e em  $x=L$  tendem para  $T_{\infty_0}$  e para  $T_{\infty_L}$ . Em outras palavras, o problema de Dirichlet é um caso limite deste problema (que é mais realista por não prescrever temperaturas). Quando  $h_0$  e  $h_L$  tendem para o infinito ficamos com

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2k} + \left( \frac{T_{\infty_L} - T_{\infty_0}}{L} + \frac{\dot{q}L^2}{2k} \right) x + T_{\infty_0} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.9)$$

Neste trabalho vamos considerar, além das condições de contorno já discutidas, que a condutividade térmica possa depender da temperatura.

## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A equação da energia (1ª lei da Termodinâmica) estabelece, para um meio contínuo, que a taxa de variação (no tempo) da quantidade de energia de um corpo (soma de energia cinética e energia interna) é igual à soma da taxa de realização de trabalho mecânico sobre este corpo (potência mecânica das forças atuando sobre o corpo) e da taxa de energia transmitida na forma de calor (calor transmitido por unidade de tempo pela fronteira e geração interna de calor).

O princípio acima é representado matematicamente por (Slattery, 1999)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[ u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (2.1)$$

onde o significado físico das integrais da equação (2.1) é descrito a seguir:

$$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS \rightarrow \text{Potência mecânica das forças de superfície.}$$

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \rightarrow \text{Potência mecânica das forças de corpo.}$$

$$\int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \rightarrow \text{Fluxo de calor entrando através da fronteira do corpo } (\partial\Omega_t).$$

$$\int_{\Omega_t} \dot{q} dV \rightarrow \text{Taxa de geração interna de calor por unidade de volume.}$$

Nas quantidades definidas na equação (2.1)  $\mathbf{T}$  representa o tensor tensão de Cauchy,  $\mathbf{g}$  o vetor aceleração da gravidade e  $\mathbf{v}$  o campo de velocidades. Estas quantidades não serão utilizadas neste trabalho.

As quantidades a serem consideradas neste trabalho são  $\mathbf{q}$ , representando o vetor fluxo de calor por unidade de tempo e de área,  $\rho$ , representando a densidade e  $\dot{q}$ , representando a taxa de geração de calor por unidade de tempo e de volume. Por exemplo, quando uma corrente elétrica flui através de um condutor,  $\dot{q}$  é positivo e, na média, igual ao produto da diferença de potencial pela corrente dividido pelo respectivo volume de material

condutor. Além disso  $\Omega_t$  representa a configuração ocupada por um corpo num dado instante  $t$ , com fronteira  $\partial\Omega_t$ .

O sinal negativo na penúltima integral da equação (2.1) aparece para que esta integral represente o fluxo de calor entrando através da fronteira  $\partial\Omega_t$  (em vez do fluxo de calor deixando a fronteira  $\partial\Omega_t$ ).

Para um corpo rígido, podemos escrever que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

ou seja, a taxa de variação da energia interna específica  $u$  é proporcional à taxa de variação da temperatura  $T$ . A quantidade  $c$  representa o calor específico do corpo em questão.

Para qualquer corpo rígido em repouso (suposto opaco para que possamos desconsiderar a transmissão de energia por radiação através do corpo), caracterizado por uma configuração fixa  $\Omega$ , podemos reescrever a equação da energia, equação (2.1), da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_{\partial\Omega} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} \dot{q} dV \quad (2.3)$$

ou ainda,

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\int_{\partial\Omega} \text{div } \mathbf{q} dV + \int_{\Omega} \dot{q} dV \quad (2.4)$$

o que nos conduz à seguinte equação diferencial parcial (visto que a equação acima deve valer para qualquer configuração  $\Omega$ ):

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + \dot{q} \quad (2.5)$$

O vetor fluxo de calor  $\mathbf{q}$  é, em geral, dado pela Lei de Fourier. Para um meio contínuo isotrópico, a Lei de Fourier associa o vetor fluxo de calor e o vetor gradiente de temperaturas da seguinte forma (Slattery, 1999)

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T \quad (2.6)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica. Para um meio contínuo (corpo) homogêneo,  $k = \hat{k}(T)$ .

Levando em conta a Lei de Fourier, a equação da energia anteriormente obtida – equação (2.5) – pode ser escrita como:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } T) + \dot{q} \quad (2.7)$$

A equação diferencial (2.7) requer condições iniciais e condições de contorno. Neste trabalho consideraremos apenas problemas em regime permanente, quando a equação (2.7) reduz-se a:

$$\text{div} (k \text{ grad } T) + \dot{q} = 0 \quad (2.8)$$

O problema expresso pela equação (2.8) não requer condições iniciais.

Como condição de contorno, empregaremos a seguinte relação:

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty) \quad \text{sobre o contorno} \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{n}$  representa o vetor normal unitário exterior, definido sobre  $\partial\Omega$  (fronteira de  $\Omega$ ,  $h$  é o coeficiente de troca de calor por convecção (que pode ser variável, mas é conhecido) e  $T_\infty$  é a temperatura do ambiente exterior (pode ser variável, mas é conhecida).

Podemos sintetizar a descrição matemática em foco neste trabalho como (Slattery, 1999; Incropera e Dewitt, 1966):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= h(T - T_\infty) && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $k = \hat{k}(T)$ .

### 3 A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

Quando a condutividade térmica é uma função da temperatura, ou seja,  $k = \hat{k}(T)$ , a equação diferencial que governa a condução de calor no corpo que ocupa a configuração  $\Omega$  é necessariamente não linear.

A figura 3.1 ilustra o problema: um corpo que ocupa a configuração  $\Omega$ , com fronteira  $\partial\Omega$  e normal exterior  $\mathbf{n}$ .

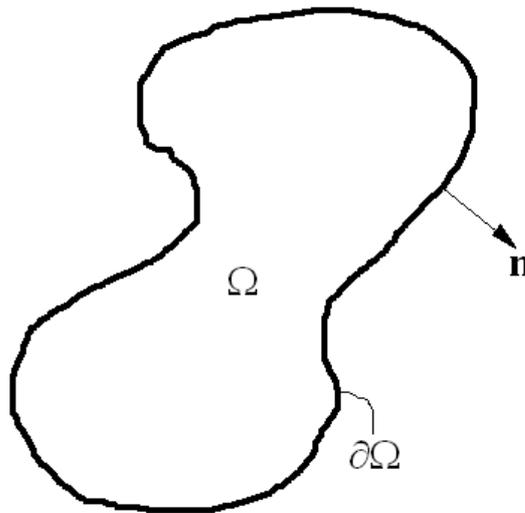


Figura 3.1. Ilustração do problema.

Uma forma eficaz de se evitar essa não linearidade é representar o problema com o auxílio da Transformada de Kirchhoff  $\mathfrak{N}[T]$ , caracterizada por (Arpaci, 1966)

$$w = \mathfrak{N}[T] = \frac{1}{k_0} \int_a^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

onde  $k_0$  é uma constante de referência sempre positiva e  $a$  é uma constante escolhida de forma conveniente.

A nova variável, denotada por  $w$ , será a incógnita de uma equação diferencial linear, uma vez que

$$\text{grad } w = \text{grad} \left( \frac{1}{k_0} \int_a^T \hat{k}(\xi) d\xi \right) = \frac{\hat{k}(T)}{k_0} \text{grad } T \quad (3.2)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } w) &= \text{grad} \left( \frac{1}{k_0} \int_a^T \hat{k}(\xi) d\xi \right) = \frac{1}{k_0} \text{div}(\hat{k}(T) \text{grad } T) \\ &= \frac{1}{k_0} \text{div}(k \text{ grad } T) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Uma vez que a condutividade térmica é uma quantidade sempre positiva, para cada temperatura  $T$  teremos apenas um valor da incógnita  $w$ . Em outras palavras, a Transformada de Kirchhoff é única. Se admitirmos (e isso é fato real) que exista um número positivo fixo  $\delta$  tal que  $k > \delta > 0$ , temos assegurada a inversibilidade da Transformada de Kirchhoff.

Neste trabalho, por conveniência, empregaremos sempre  $k_0$  unitário. Dessa forma, a transformada de Kirchhoff definida na equação (3.1) reduz-se à expressão

$$w = \int_a^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

o que nos conduzirá à seguinte igualdade:

$$\text{div}(k \text{ grad } T) + \dot{q} = \text{div}(\text{grad } w) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.5)$$

Sempre que a taxa de geração de calor  $\dot{q}$  independer da temperatura  $T$ , a equação na variável  $w$  será linear.

Como mencionado no capítulo 1, consideraremos que a condutividade seja dada pela seguinte expressão

$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T < T_* \\ k_2 & \text{para } T \geq T_* \end{cases} \quad (1.1)$$

Assim sendo, podemos representar a variável  $w$  como

$$w = \mathfrak{N}[T] = \int_{T_*}^T \hat{k}(\xi) d\xi = (T - T_*) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |T - T_*| \frac{(k_1 - k_2)}{2} \quad (3.6)$$

Considerando a dependência da condutividade térmica na temperatura dada pela equação (1.1), a inversa da Transformada definida na equação (3.6) é facilmente obtida, de forma exata, sendo dada por

$$T = \mathfrak{N}^{-1}[w] = T_* + w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \quad (3.7)$$

As condições de contorno do tipo Dirichlet para a temperatura dão origem a condições também do tipo Dirichlet para a função  $w$ , solução do problema transformado. Assim, nos casos aqui considerados, teremos

$$w|_{\text{CONTORNO}} = \left( T|_{\text{CONTORNO}} - T_* \right) \frac{(k_2 + k_1)}{2} + \left| T|_{\text{CONTORNO}} - T_* \right| \frac{(k_1 - k_2)}{2} \quad (3.8)$$

Quando, no contorno, é considerada a troca de calor por convecção, ou seja,

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = h(T - T_\infty) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (3.9)$$

a condição de contorno equivalente para a função  $w$  fica

$$-\text{grad } w \cdot \mathbf{n} = h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_\infty \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (3.10)$$

O processo de transferência de calor, em regime permanente, neste caso é descrito por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -\operatorname{grad} w \cdot \mathbf{n} &= h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_\infty \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.11)$$

Se for conveniente prescrever a temperatura em parte da fronteira, além do fluxo de calor prescrito no restante da fronteira, então, a descrição do problema pode ser generalizada na forma a seguir

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -\operatorname{grad} w \cdot \mathbf{n} &= h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_\infty \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \\ w &= \text{prescrito} \quad \text{sobre } \partial\Omega - \partial\Omega_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

#### 4 UM EXEMPLO: PROBLEMA COM SIMETRIA ESFÉRICA

A título de ilustração, vamos considerar agora o processo de transferência de calor numa esfera opaca em repouso com geração interna de calor positiva ( $\dot{q} > 0$ ) e constante, trocando calor por convecção, sendo o coeficiente  $h$  e a temperatura  $T_\infty$  dados e constantes.

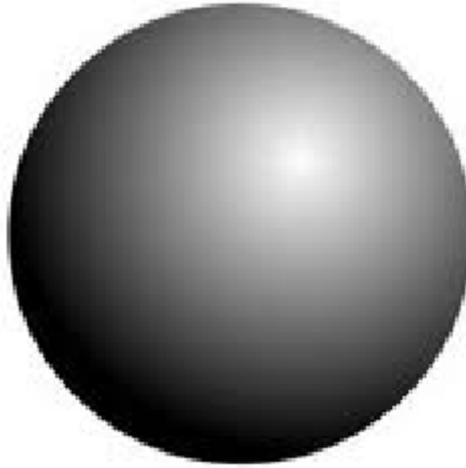


Figura 4.1. Corpo esférico.

A descrição matemática para esse problema em regime permanente é a seguinte:

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \quad 0 \leq r < R \quad (4.1)$$

$$-k \frac{dT}{dr} = h(T - T_\infty) \quad \text{para } r = R$$

Se a condutividade térmica  $k$  for constante, a solução do problema é obtida a partir do procedimento a seguir:

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) = -r^2 \dot{q} \Rightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q} r^3}{3k} + C_1 \quad (4.2)$$

Como  $r = 0$  faz parte do domínio, a constante  $C_1$  é nula. Dessa forma,

$$\frac{dT}{dr} = \Rightarrow T = -\frac{\dot{q}r^2}{6k} + C_2 \quad (4.3)$$

A constante  $C_2$  é obtida a partir da condição de contorno, ou seja,

$$\begin{aligned} -k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R} &= h(T|_{r=R} - T_\infty) \Rightarrow -k \left( -\frac{\dot{q}R}{3k} \right) = h \left( -\frac{\dot{q}R^2}{6k} + C_2 - T_\infty \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{\dot{q}R}{3h} + \frac{\dot{q}R^2}{6k} + T_\infty \end{aligned} \quad (4.4)$$

Assim,

$$T = \frac{\dot{q}}{6k} (R^2 - r^2) + \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty \quad \text{para } 0 \leq r \leq R \quad (4.5)$$

Consideremos agora a condutividade térmica dependente da temperatura segundo a relação abaixo, anteriormente definida:

$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T_* < T \\ k_2 & \text{para } T_* \geq T \end{cases} \quad (1.1)$$

A descrição matemática para esse problema em regime permanente é a seguinte:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 k \frac{dT}{dr} \right) \right] + \dot{q} &= 0 \quad 0 \leq r < R \\ -k \frac{dT}{dr} &= h(T - T_\infty) \quad \text{para } r = R \end{aligned} \quad (4.6)$$

ou, com o auxílio da Transformada de Kirchoff,

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dw}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \quad 0 \leq r < R$$

$$-\frac{dw}{dr} = h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_\infty \right) \quad \text{para } r = R \quad (4.7)$$

Neste caso, a conservação de energia, permite calcular a variável  $w$  no contorno diretamente, uma vez que (Carslaw e Jaeger, 1959)

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dw}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dw}{dr} \right) + r^2 \dot{q} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{dw}{dr} \Big|_{r=R} - r^2 \frac{dw}{dr} \Big|_{r=0} = - \int_0^R r^2 \dot{q} dr \Rightarrow -R^2 \frac{dw}{dr} \Big|_{r=R} = \dot{q} \frac{R^3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dw}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{\dot{q}R}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \left( w_R \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w_R| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_\infty \right) = \frac{\dot{q}R}{3}$$

onde  $w_R$  denota o valor de  $w$  no contorno  $r = R$ .

A partir da relação (4.7), podemos escrever que

$$w_R \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w_R| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] = \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \quad (4.9)$$

ou seja,

$$w_R = \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \quad (4.10)$$

Assim,  $w$  é dado por

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dw}{dr} \right) \right] + \dot{q} = 0 \quad 0 \leq r < R \quad (4.11)$$

ou seja, como  $\dot{q} = \text{constante}$ ,

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dw}{dr} \right) = -\dot{q}r^2 \Rightarrow r^2 \frac{dw}{dr} = \frac{-\dot{q}r^3}{3} + C_1 \quad (4.12)$$

Uma vez que  $r = 0$  faz parte do domínio, temos que  $C_1 = 0$ . Assim,

$$r^2 \frac{dw}{dr} = \frac{-\dot{q}r^3}{3} \Rightarrow \frac{dw}{dr} = \frac{-\dot{q}r}{3} \Rightarrow w = -\frac{\dot{q}r^2}{6} + C_2 \quad (4.13)$$

onde a constante  $C_2$  é dada por

$$w_R = -\frac{\dot{q}R^2}{6} + C_2 \Rightarrow C_2 = w_R + \frac{\dot{q}R^2}{6} \quad (4.14)$$

Logo,

$$w = \frac{\dot{q}}{6}(R^2 - r^2) + w_R = \frac{\dot{q}}{6}(R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right), \quad \text{para } 0 \leq r \leq R \quad (4.15)$$

Invertendo a Transformada de Kirchhoff (Carslaw e Jaeger, 1959), temos a seguinte distribuição de temperaturas:

$$T = T_* + \left\{ \frac{\dot{q}}{6}(R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + \left\{ \frac{\dot{q}}{6}(R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right],$$

para  $0 \leq r \leq R$

(4.16)

A temperatura no contorno é então dada por

$$\begin{aligned}
T_R = T_* + & \left[ \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \right] \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + \\
& + \left[ \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \right] \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A temperatura máxima é dada por (admitindo  $\dot{q} > 0$ )

$$\begin{aligned}
T = T_* + & \left\{ \frac{\dot{q}R^2}{6} + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + \\
& + \left\{ \frac{\dot{q}R^2}{6} + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

É interessante notar que, quando  $k_1 = k_2 = k$ , a solução é dada por

$$\begin{aligned}
T = T_* + & \\
& + \left\{ \frac{\dot{q}}{6} (R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k+k}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k-k}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \right] + \\
& + \left\{ \frac{\dot{q}}{6} (R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k+k}{2} \right) + \left| \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right| \left( \frac{k-k}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} \right],
\end{aligned} \tag{4.19}$$

para  $0 \leq r \leq R$

ou seja,

$$\begin{aligned}
T = T_* + \left\{ \frac{\dot{q}}{6} (R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty - T_* \right) \left( \frac{k+k}{2} \right) \right\} \left[ \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \right] = \\
= \frac{\dot{q}}{6k} (R^2 - r^2) + \left( \frac{\dot{q}R}{3h} + T_\infty \right) \quad \text{para } 0 \leq r \leq R
\end{aligned} \tag{4.20}$$

o que coincide com a solução obtida sob a hipótese de condutividade constante (independente de  $T_*$ ).

Esses resultados são suficientes para mostrar algumas consequências oriundas da hipótese de condutividade constante.

## 5 UM PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA O PROBLEMA

Vamos considerar o problema de transmissão de calor em regime permanente num corpo (representado pela configuração  $\Omega$ ) cuja condutividade térmica seja dada por

$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T_* < T \\ k_2 & \text{para } T_* \geq T \end{cases} \quad (1.1)$$

admitindo uma com fonte interna de calor  $\dot{q}$  conhecida (independente da temperatura).

Será proposto o seguinte funcional  $I[v]$ , que é minimizado pela solução do problema, dada por  $w$ :

$$I[v] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad } v) \cdot (\text{grad } v) dV - \int_{\Omega} \dot{q} v dV + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{v^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v|v|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_{\infty})v \right) dS \quad (5.1)$$

onde  $\partial\Omega - \partial\Omega_1$  é o subconjunto da fronteira com temperatura prescrita enquanto  $\partial\Omega_1$  é o subconjunto da fronteira onde há troca de calor por convecção com  $h$  e  $T_{\infty}$  supostos conhecidos, mas não necessariamente constantes. Quando se supuser que uma dada parte de  $\partial\Omega_1$  esteja isolada, ou seja, esta parte de  $\partial\Omega_1$  não troca calor, então  $h=0$  nessa parte, caracterizando uma condição de contorno do tipo Neumann.

Para demonstrar a equivalência entre a minimização do funcional  $I[v]$  dado pela equação (5.1) e o problema original, dado pela equação (3.2), que, por conveniência, é repetida abaixo

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } w) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\ -\text{grad } w \cdot \mathbf{n} &= h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_{\infty} \right) && \text{sobre } \partial\Omega_1 \\ w &= \text{prescrito} && \text{sobre } \partial\Omega - \partial\Omega_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

vamos calcular a primeira variação do funcional  $I[v]$  e igualá-la a zero, levando em conta a seguinte condição de contorno essencial:  $w = \text{prescrito sobre } \partial\Omega - \partial\Omega_1$ .

Supondo que a função admissível  $v$  seja representando como

$$v = w + \varepsilon\eta \quad (5.2)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro escalar,  $\eta$  é uma variação admissível, que é nula nos subconjuntos do contorno onde a temperatura é prescrita, e  $w$  é o campo que minimiza  $I[v]$ , teremos a primeira variação de  $I[v]$  dada por (Taylor, 1958)

$$\delta I = \left[ \frac{d}{d\varepsilon} I[w + \varepsilon\eta] \right]_{\varepsilon=0} \quad (5.3)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \delta I = & \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad}(w + \varepsilon\eta)) \cdot (\text{grad}(w + \varepsilon\eta)) dV - \int_{\Omega} \dot{q}(w + \varepsilon\eta) dV + \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{(w + \varepsilon\eta)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{(w + \varepsilon\eta)|(w + \varepsilon\eta)|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} h((T_* - T_{\infty})(w + \varepsilon\eta)) dS \right]_{\varepsilon=0} \quad (5.4) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{d}{d\varepsilon} (\text{grad}(w + \varepsilon\eta)) \cdot (\text{grad}(w + \varepsilon\eta)) dV - \int_{\Omega} \dot{q} \frac{d}{d\varepsilon} (w + \varepsilon\eta) dV + \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{(w + \varepsilon\eta)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{(w + \varepsilon\eta)|(w + \varepsilon\eta)|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) \right) dS + \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( (T_* - T_{\infty}) \frac{d}{d\varepsilon} (w + \varepsilon\eta) \right) dS \right]_{\varepsilon=0} \quad (5.5) \end{aligned}$$

Efetuada as derivações ficamos com a primeira variação de  $I[v]$  dada por

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((grad \eta) \cdot (grad(w + \varepsilon \eta)) + (grad(w + \varepsilon \eta)) \cdot (grad \eta)) dV + \right. \\ & - \int_{\Omega} \dot{q} \eta dV + \int_{\partial \Omega_1} h \left( \left( \frac{2(w + \varepsilon \eta) \eta}{4} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \\ & \left. + \int_{\partial \Omega_1} h \left( \left( \frac{2|(w + \varepsilon \eta)| \eta}{4} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \int_{\partial \Omega_1} h((T_* - T_{\infty}) \eta) dS \right]_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (5.6)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ \int_{\Omega} (grad \eta) \cdot (grad w) dV - \int_{\Omega} \dot{q} \eta dV + \int_{\partial \Omega_1} h \left( \left( \frac{2w \eta}{4} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \right. \\ & \left. + \int_{\partial \Omega_1} h \left( \left( \frac{2|w| \eta}{4} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \int_{\partial \Omega_1} h((T_* - T_{\infty}) \eta) dS \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Se levarmos em conta que (Gurtin, 1981)

$$\operatorname{div}(\eta(\operatorname{grad} w)) = (\operatorname{grad} \eta) \cdot (\operatorname{grad} w) + \eta \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) \quad (5.8)$$

podemos representar a primeira variação de  $I[v]$ ,  $\delta I$ , como

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\eta(\operatorname{grad} w)) - \eta \operatorname{div}(\operatorname{grad} w)) dV - \int_{\Omega} \dot{q} \eta dV + \right. \\ & \left. + \int_{\partial \Omega_1} h \left( \left( \frac{w \eta}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \left( \frac{|w| \eta}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \int_{\partial \Omega_1} h((T_* - T_{\infty}) \eta) dS \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

ou ainda, com o auxílio do teorema da divergência (Gurtin, 1981; Taylor, 1958),

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ -\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q})\eta \, dV + \int_{\partial\Omega} \eta (\operatorname{grad} w) \cdot \mathbf{n} \, dS \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \left( \frac{w\eta}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \left( \frac{|w|\eta}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \int_{\partial\Omega_1} h((T_* - T_\infty)\eta) dS \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Uma vez que  $\eta = 0$  sobre  $\partial\Omega - \partial\Omega_1$ , ficamos com

$$\int_{\partial\Omega - \partial\Omega_1} \eta (\operatorname{grad} w) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (5.11)$$

E, assim, a primeira variação de  $I[v]$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ -\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q})\eta \, dV + \int_{\partial\Omega_1} \eta (\operatorname{grad} w) \cdot \mathbf{n} \, dS \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \left( \frac{w\eta}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \left( \frac{|w|\eta}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty)\eta \right) dS \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

ou ainda, como

$$\begin{aligned} \delta I = & \left[ -\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q})\eta \, dV + \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega_1} \left\{ (\operatorname{grad} w) \cdot \mathbf{n} + h \left( \left( \frac{w}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \left( \frac{|w|}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty) \right) \right\} \eta \, dS \right] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uma vez que  $\eta$  (variação admissível) é arbitrário (exceto sobre  $\partial\Omega - \partial\Omega_1$ ), a primeira variação será nula, para qualquer  $\eta$  admissível, se e somente se forem satisfeitas tanto a equação de Euler-Lagrange como a condição de contorno natural, dadas, respectivamente, pelas equações (5.14) e (5.15), apresentadas a seguir

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.14)$$

$$(\operatorname{grad} w) \cdot \mathbf{n} + h \left( \left( \frac{w}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \left( \frac{|w|}{2} \right) \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty) \right) = 0 \quad (5.15)$$

sendo a condição de contorno natural (equação (5.15)) válida sobre  $\partial\Omega_1$ .

Uma vez que  $w$  é prescrito sobre  $\partial\Omega - \partial\Omega_1$  (condição de contorno essencial), a equivalência entre o problema original e a minimização do funcional está demonstrada.

Para problemas planos unidimensionais, caracterizados por dependência apenas na variável cartesiana retangular  $x$ , considerando troca de calor por convecção em  $x=0$  e em  $x=L$ , o funcional  $I[v]$ , definido na equação (5.1), se reduz a

$$\begin{aligned} I[v] = & \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L \dot{q} v dx + \\ & + \left[ h \left( \frac{v^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v|v|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty) v \right) \right]_{x=0} + \\ & + \left[ h \left( \frac{v^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v|v|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty) v \right) \right]_{x=L} \end{aligned} \quad (5.16)$$

## 6 UNICIDADE DA SOLUÇÃO

Já foi demonstrada a equivalência entre o extremo do funcional  $I[v]$  dado por

$$\begin{aligned}
 I[v] = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad } v) \cdot (\text{grad } v) dV - \int_{\Omega} \dot{q}v dV + \\
 & + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{v^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v|v|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_{\infty})v \right) dS
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

e a solução do problema

$$\begin{aligned}
 & \text{div}(\text{grad } w) + \dot{q} = 0 \quad \text{em } \Omega \\
 -\text{grad } w \cdot \mathbf{n} = & h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] + T_* - T_{\infty} \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \\
 & w = \text{prescrito} \quad \text{sobre } \partial\Omega - \partial\Omega_1
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Se o funcional  $I[v]$  for convexo, então o extremo corresponderá a um mínimo e será único, garantindo-se, assim, a unicidade da solução (Taylor, 1959). Vamos mostrar agora que o funcional é estritamente convexo. Para ser estritamente convexo é preciso que (Taylor, 1959)

$$\begin{aligned}
 I[\theta v_1 + (1-\theta)v_2] & < \theta I[v_1] + (1-\theta)I[v_2], \\
 & \text{para todo } \theta \in (0,1), \text{ com } v_1 \neq v_2
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Para o funcional  $I[v]$ , a desigualdade apresentada na equação (6.1) é representada por

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)) \cdot (\text{grad}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)) dV + \\
& - \int_{\Omega} \dot{q}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2) dV + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \\
& + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{(\theta v_1 + (1-\theta)v_2) |(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \\
& + \int_{\partial\Omega_1} h((T_* - T_{\infty})(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)) dS < \\
& < \theta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad} v_1) \cdot (\text{grad} v_1) dV - \int_{\Omega} \dot{q} v_1 dV + \right. \\
& \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{v_1^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v_1 |v_1|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_{\infty}) v_1 \right) dS \right] + \\
& + (1-\theta) \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad} v_2) \cdot (\text{grad} v_2) dV - \int_{\Omega} \dot{q} v_2 dV + \right. \\
& \left. + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{v_2^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v_2 |v_2|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_{\infty}) v_2 \right) dS \right] \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\int_{\Omega} \dot{q}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2) dV = \theta \int_{\Omega} \dot{q} v_1 dV + (1-\theta) \int_{\Omega} \dot{q} v_2 dV \tag{6.3}$$

e que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_1} h((T_* - T_{\infty})(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)) dS &= \theta \int_{\partial\Omega_1} h((T_* - T_{\infty})v_1) dS + \\
& + (1-\theta) \int_{\partial\Omega_1} h((T_* - T_{\infty})v_2) dS \tag{6.4}
\end{aligned}$$

a desigualdade expressa pela equação (6.2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad} (\theta v_1 + (1-\theta) v_2)) \cdot (\text{grad} (\theta v_1 + (1-\theta) v_2)) dV + \\
& + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{(\theta v_1 + (1-\theta) v_2)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \right) dS + \\
& + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{(\theta v_1 + (1-\theta) v_2) |(\theta v_1 + (1-\theta) v_2)|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS < \\
& < \theta \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad} v_1) \cdot (\text{grad} v_1) dV + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{v_1^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v_1 |v_1|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS \right] + \\
& + (1-\theta) \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\text{grad} v_2) \cdot (\text{grad} v_2) dV + \int_{\partial\Omega_1} h \left( \frac{v_2^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v_2 |v_2|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) dS \right]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Assim, para demonstrar a convexidade, é suficiente provar que

$$\begin{aligned}
& (\text{grad} (\theta v_1 + (1-\theta) v_2)) \cdot (\text{grad} (\theta v_1 + (1-\theta) v_2)) < \\
& < \theta (\text{grad} v_1) \cdot (\text{grad} v_1) + (1-\theta) (\text{grad} v_2) \cdot (\text{grad} v_2)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

e que

$$\begin{aligned}
& (\theta v_1 + (1-\theta) v_2)^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + (\theta v_1 + (1-\theta) v_2) |(\theta v_1 + (1-\theta) v_2)| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] < \\
& < \theta \left( v_1^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + v_1 |v_1| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) + (1-\theta) \left( v_2^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + v_2 |v_2| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 & \theta a^2 + (1-\theta)b^2 - (\theta a + (1-\theta)b)^2 = \\
 & = \theta a^2 + (1-\theta)b^2 - (\theta^2 a^2 + 2\theta(1-\theta)ab + (1-\theta)^2 b^2) = \\
 & = \theta(1-\theta)a^2 + (1-\theta)(1-(1-\theta))b^2 - 2\theta(1-\theta)ab = \theta(1-\theta)(a-b)^2
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

temos que, para  $\theta \in (0,1)$  e para  $a \neq b$ ,

$$\theta a^2 + (1-\theta)b^2 - (\theta a + (1-\theta)b)^2 > 0 \tag{6.9}$$

Logo, se  $\theta \in (0,1)$  e se  $v_1 \neq v_2 + \text{constante}$ ,

$$\begin{aligned}
 & (\text{grad}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)) \cdot (\text{grad}(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)) < \\
 & < \theta(\text{grad} v_1) \cdot (\text{grad} v_1) + (1-\theta)(\text{grad} v_2) \cdot (\text{grad} v_2)
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Se  $v_1 = v_2 + \text{constante}$ , vale a igualdade.

Para mostrar que

$$\begin{aligned}
 & (\theta v_1 + (1-\theta)v_2)^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + (\theta v_1 + (1-\theta)v_2) \left| (\theta v_1 + (1-\theta)v_2) \right| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] < \\
 & < \theta \left( v_1^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + v_1 |v_1| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) + (1-\theta) \left( v_2^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + v_2 |v_2| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

vamos considerar uma função contínua e diferenciável dada por  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x|x|$ , com  $\alpha > 0$  e  $\alpha > \beta$ . A primeira derivada de  $f(x)$  é dada por

$$f'(x) = 2\alpha x + 2\beta|x| \tag{6.12}$$

Enquanto a segunda derivada de  $f(x)$  é dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 2\alpha + 2\beta, & \text{se } x > 0 \\ 2\alpha - 2\beta, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

Logo, como  $\alpha > \beta$ , a derivada primeira é estritamente crescente. Dessa forma  $f(x)$  é convexa.

Assim, fazendo

$$\alpha = \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] \quad \text{e} \quad \beta = \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \quad (6.14)$$

asseguramos a convexidade estrita da função

$$f(x) = x^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + x|x| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \quad (6.15)$$

ou seja, fica provado que

$$\begin{aligned} & (\theta v_1 + (1-\theta)v_2)^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + (\theta v_1 + (1-\theta)v_2) |(\theta v_1 + (1-\theta)v_2)| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] < \\ & < \theta \left( v_1^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + v_1 |v_1| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) + (1-\theta) \left( v_2^2 \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + v_2 |v_2| \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Está, assim, assegurada a unicidade da solução (Taylor, 1959).

## 7 UMA MUDANÇA DE VARIÁVEL CONVENIENTE

Para o problema de condução de calor com convecção prescrita na fronteira e condutividade térmica dependente da temperatura descrito a seguir

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= h(T - T_\infty) && \text{sobre } \partial\Omega \\
 \text{com } k = \hat{k}(T) &= \begin{cases} k_1 & \text{para } T_* < T \\ k_2 & \text{para } T \geq T_* \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

fica interessante a seguinte redefinição de temperatura

$$\Theta = T - T_* \tag{7.2}$$

dando origem ao seguinte problema

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \Theta) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 -k \operatorname{grad} \Theta \cdot \mathbf{n} &= h(\Theta - \Theta_\infty) && \text{sobre } \partial\Omega \\
 \text{com } k = \hat{k}(\Theta + T_*) &= \begin{cases} k_1 & \text{para } 0 < \Theta \\ k_2 & \text{para } 0 \geq \Theta \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

A redefinição da temperatura leva a Transformada de Kirchhoff a assumir a seguinte forma

$$w = \int_{T_*}^T \hat{k}(\xi) d\xi = \int_0^\Theta \hat{k}(\xi + T_*) d\xi = \Theta \frac{(k_2 + k_1)}{2} + |\Theta| \frac{(k_1 - k_2)}{2} \tag{7.4}$$

sendo sua inversa dada por

$$T - T_* = \Theta = w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \quad (7.5)$$

Neste caso, o problema descrito pela equação (7.1) se reduz a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\ -\operatorname{grad} w \cdot \mathbf{n} &= h \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] - \Theta_\infty \right) && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.6)$$

Quando a taxa de geração de calor é dada por  $\dot{q} = \text{constante} \neq 0$ , redefine-se a incógnita  $W$  como

$$W = \frac{w}{\dot{q}} \quad (7.7)$$

e o problema transformado pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} W) + 1 &= 0 && \text{em } \Omega \\ -\operatorname{grad} W \cdot \mathbf{n} &= h \left( W \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |W| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] - \frac{\Theta_\infty}{\dot{q}} \right) && \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.8)$$

A inversa do problema transformado permite obter

$$T = \Theta + T_* = \dot{q} \left\{ W \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |W| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] \right\} + T_* \quad (7.9)$$

## 8 RESULTADOS

A título de ilustração do emprego do funcional  $I[v]$ , proposto neste trabalho, vamos construir uma aproximação para a solução do problema plano definido a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} &= 0 \quad 0 < x < L \\ k \frac{dT}{dr} &= h_0 (T - T_{\infty_0}) \quad \text{para } x = 0 \\ -k \frac{dT}{dr} &= h_L (T - T_{\infty_L}) \quad \text{para } x = L \end{aligned} \quad (8.1)$$

com a condutividade térmica, dada por uma função constante por partes da temperatura, com a seguinte forma

$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T_* < T \\ k_2 & \text{para } T_* \geq T \end{cases} \quad (1.1)$$

Empregando a Transformada de Kirchhoff (Arpaci, 1966) temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} + \dot{q} &= 0 \quad 0 < x < L \\ \frac{dw}{dx} &= h_0 \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] - T_{\infty_0} \right) \quad \text{para } x = 0 \\ -\frac{dw}{dx} &= h_L \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] - T_{\infty_L} \right) \quad \text{para } x = L \end{aligned} \quad (8.2)$$

Vamos aproximar o campo  $w$ , solução do problema transformado, por

$$w = w_i + \frac{(w_{i+1} - w_i)}{\Delta x} (x - x_i), \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (8.3)$$

onde

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)\Delta x \\ \Delta x &= \frac{N-1}{L} = x_{i+1} - x_i \end{aligned} \quad (8.4)$$

O funcional  $I[v]$ , neste caso, dá origem à função de  $N$  variáveis, descrita abaixo:

$$\begin{aligned} I[v] &= F(w_1, \dots, w_N) = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left( \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} \right)^2 dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dot{q} \left( w_i + \frac{w_{i+1} - w_i}{\Delta x} (x - x_i) \right) dx \right\} + \\ &\quad + h_0 \left( \frac{(w_1)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{w_1 |w_1|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (-T_{\infty_0}) w_1 \right) + \\ &\quad + h_L \left( \frac{(w_N)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{w_N |w_N|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (-T_{\infty_L}) w_N \right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

No caso da taxa de geração de calor por unidade de tempo e de volume ( $\dot{q}$ ) ser constante, a função definida na equação (8.5) pode, ainda, ser escrita como

$$\begin{aligned} F(w_1, \dots, w_N) &= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{2\Delta x} (w_{i+1} - w_i)^2 - \dot{q} (w_{i+1} + w_i) \frac{\Delta x}{2} \right\} + \\ &\quad + h_0 \left( \frac{(w_1)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{w_1 |w_1|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (-T_{\infty_0}) w_1 \right) + \\ &\quad + h_L \left( \frac{(w_N)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{w_N |w_N|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (-T_{\infty_L}) w_N \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

O valor da aproximação nos nós pode ser obtido a partir da resolução do sistema não linear de equações abaixo

$$\frac{\partial}{\partial w_i} F(w_1, \dots, w_N) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (8.7)$$

ou seja, a partir da solução de

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial w_1} \left\{ \frac{1}{2\Delta x} (w_2 - w_1)^2 - \dot{q} (w_2 + w_1) \frac{\Delta x}{2} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial w_1} \left\{ h_0 \left( \frac{(w_1)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{w_1 |w_1|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (-T_{\infty_0}) w_1 \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial w_N} \left\{ \frac{1}{2\Delta x} (w_N - w_{N-1})^2 - \dot{q} (w_N + w_{N-1}) \frac{\Delta x}{2} \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial w_N} \left\{ h_L \left( \frac{(w_N)^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{w_N |w_N|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (-T_{\infty_L}) w_N \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \frac{1}{2\Delta x} (w_k - w_{k-1})^2 + \frac{1}{2\Delta x} (w_{k+1} - w_k)^2 + \right. \\ & \left. - \dot{q} (w_k + w_{k-1}) \frac{\Delta x}{2} - \dot{q} (w_{k+1} + w_k) \frac{\Delta x}{2} \right\} = 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (8.10)$$

O sistema de equações (8.8)-(8.10), após as derivações, pode ser reescrito como

$$-\frac{1}{\Delta x} (w_2 - w_1) - \dot{q} \frac{\Delta x}{2} + h_0 \left( \frac{w_1}{2} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{|w_1|}{2} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] - T_{\infty_0} \right) = 0 \quad (8.11)$$

$$\frac{1}{\Delta x} (w_N - w_{N-1}) - \dot{q} \frac{\Delta x}{2} + h_L \left( \frac{w_N}{2} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{|w_N|}{2} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] - T_{\infty_L} \right) = 0 \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{\Delta x} (w_k - w_{k-1}) - \frac{1}{\Delta x} (w_{k+1} - w_k) - \dot{q} \Delta x = 0, \quad k = 2, 3, 4, \dots, N-1 \quad (8.13)$$

Nesse ponto é interessante chamar a atenção que, se  $\dot{q} = \text{constante} = \dot{q}_i$  para  $x_i < x < x_{i+1}$ , então a equação (8.5) dará origem à equação (8.6). O valor da aproximação nos nós pode ser obtido a partir da resolução do sistema de equações (8.8)-(8.10), que, após as derivações, é representado pelo sistema (8.11)-(8.13).

## 9 COMPARAÇÃO COM UMA SOLUÇÃO EXATA

Vamos supor, por exemplo, que no problema definido pelas equações (8.1) e (1.1), com taxa de geração de calor ( $\dot{q}$ ) constante,  $L=1$ ,  $\dot{q}=1$ ,  $k_1=0.5$ ,  $k_2=1.0$ ,  $h_0 = h_L=1.0$ ,  $T_{\infty_0}=0,375$  e  $T_{\infty_L}=-0,375$ . Neste caso, o problema (8.2), repetido, aqui, por conveniência,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} + \dot{q} &= 0 \quad 0 < x < L \\ \frac{dw}{dx} &= h_0 \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] - T_{\infty_0} \right) \quad \text{para } x=0 \\ -\frac{dw}{dx} &= h_L \left( w \left[ \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_2} \right] + |w| \left[ \frac{1}{2k_1} - \frac{1}{2k_2} \right] - T_{\infty_L} \right) \quad \text{para } x=L \end{aligned} \quad (8.2)$$

admite a seguinte solução exata

$$w = \frac{2+x-4x^2}{8}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.1)$$

para a qual o valor do funcional

$$\begin{aligned} I[v] &= \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L \dot{q} v dx + \\ &+ \left[ h \left( \frac{v^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v|v|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty) v \right) \right]_{x=0} + \\ &+ \left[ h \left( \frac{v^2}{4} \left[ \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right] + \frac{v|v|}{4} \left[ \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right] + (T_* - T_\infty) v \right) \right]_{x=L} \end{aligned} \quad (9.2)$$

é

$$\begin{aligned}
I[w] &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1-8x}{8} \right)^2 dx - \int_0^1 \left( \frac{2+x-4x^2}{8} \right) dx + \\
&+ \left( \frac{1}{64}[3] + \frac{1}{64}[1] - 0.375 \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{256}[3] - \frac{1}{256}[1] - \frac{1}{8} \right) = \\
&= \frac{1}{6} \left( \left( \left( \frac{7}{8} \right)^3 + \left( \frac{1}{8} \right)^3 \right) \right) - \left( \frac{2 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{8} \right) + \\
&+ \left( \frac{1}{64}[3] + \frac{1}{64}[1] - 0.375 \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{256}[3] - \frac{1}{256}[1] - \frac{1}{8} \right)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

ou seja,

$$I[w] = -0,182291666666 \tag{9.4}$$

Invertendo a transformada, temos que

$$T - T_* = \Theta = \frac{1}{16} \left\{ 3(2+x-4x^2) + |2+x-4x^2| \right\}, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{9.5}$$

Aproximando a solução por uma função contínua, linear por partes, formada por 50 segmentos de reta, temos

$$w = w_i + \frac{(w_{i+1} - w_i)}{\Delta x} (x - x_i), \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 50 \tag{9.6}$$

onde

$$x_i = \frac{i-1}{50}, \quad i = 1, 2, \dots, 51 \tag{9.7}$$

Neste caso, quando o valor obtido para o funcional é  $I[w] = -0,182291666666$ , obtemos a seguinte aproximação

**Tabela 1: Exemplo de Comparação com Solução Exata**

$x =$	$w =$	$\Theta =$		$x =$	$w =$	$\Theta =$
0.00	0.2500	0.5000		0.52	0.1798	0.3596
0.02	0.2523	0.5046		0.54	0.1717	0.3434
0.04	0.2542	0.5084		0.56	0.1632	0.3264
0.06	0.2557	0.5114		0.58	0.1543	0.3086
0.08	0.2568	0.5136		0.60	0.1450	0.2900
0.10	0.2575	0.5150		0.62	0.1353	0.2706
0.12	0.2578	0.5156		0.64	0.1252	0.2504
0.14	0.2577	0.5154		0.66	0.1147	0.2294
0.16	0.2572	0.5144		0.68	0.1038	0.2076
0.18	0.2563	0.5126		0.70	0.0925	0.1850
0.20	0.2550	0.5100		0.72	0.0808	0.1616
0.22	0.2533	0.5066		0.74	0.0687	0.1374
0.24	0.2512	0.5024		0.76	0.0562	0.1124
0.26	0.2487	0.4974		0.78	0.0433	0.0866
0.28	0.2458	0.4916		0.80	0.0300	0.0600
0.30	0.2425	0.4850		0.82	0.0163	0.0326
0.32	0.2388	0.4776		0.84	0.0022	0.0044
0.34	0.2347	0.4694		0.86	-0.0123	-0.0123
0.36	0.2302	0.4604		0.88	-0.0272	-0.0272
0.38	0.2253	0.4506		0.90	-0.0425	-0.0425
0.40	0.2200	0.4400		0.92	-0.0582	-0.0582
0.42	0.2143	0.4286		0.94	-0.0743	-0.0743
0.44	0.2082	0.4164		0.96	-0.0908	-0.0908
0.46	0.2017	0.4034		0.98	-0.1077	-0.1077
0.48	0.1948	0.3896		1.00	-0.1250	-0.1250
0.50	0.1875	0.3750				

Note que, para  $w \geq 0$ , temos  $\Theta = 2w$  e que, para  $w \leq 0$ , temos  $\Theta = w$ .

## 10 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Este trabalho apresentou um problema de transferência de calor não linear por condução no qual a condutividade térmica é uma função constante por partes da temperatura. A não linearidade do problema é tratada empregando-se transformadas de Kirchhoff. Esta classe de problemas, apesar de ser bem mais geral que a formulação com condutividade térmica constante, permite obter uma forma explícita bem simples para a inversa da Transformada de Kirchhoff. Esta formulação permite a obtenção de soluções exatas, como aquela apresentada para um problema com simetria esférica.

O trabalho também propõe uma formulação variacional e demonstra sua unicidade, com relevante aplicação para simulações utilizando uma metodologia numérica de elementos finitos. A referida formulação variacional introduz um funcional cuja minimização é equivalente à solução do problema na forma forte (na forma diferencial). A equivalência entre as formas diferencial e variacional é ilustrada através de um exemplo com solução exata, quando os valores obtidos pela inversa da Transformada de Kirchhoff coincidem com aqueles obtidos através da minimização do funcional introduzido na formulação variacional.

Uma sugestão para futuros trabalhos, visando reproduzir um comportamento mais realista da condutividade térmica, como o mostrado nas Figuras 1.1 e 1.2, seria utilizar valores fisicamente realistas para a condutividade térmica em situações que se aproximassem de um comportamento constante por partes. Numa etapa subsequente, sugere-se considerar a condutividade térmica com uma dependência linear da temperatura.

## REFERÊNCIAS

- Alvarez-Quintana, J. Martínez, E., Pérez-Tijerina, E., Pérez-García, S. A. e Rodríguez-Viejo, J., 2010, “Temperature dependent thermal conductivity of polycrystalline ZnO films”, *J. Appl. Phys.*, vol. 107, pp. 063713.1-063713.4.
- Arpaci, V.S., 1966, *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.
- Carslaw, H.S e Jaeger, J.C., 1959 *Conduction Heat Transfer in Solids*, Oxford University Press.
- Geseley, G., Linsmeieryx, J., Drachy, V. Frickey, J. e Arens-Fischerz, R., 1997, “Temperature-dependent thermal conductivity of porous silicon”, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol 30 pp. 2911–2916.
- Gurtin, M.E., 1981 *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press.
- Holman, J.P., 1983, *Transferência de Calor*, McGraw-Hill.
- Hone, J., Whitney, M., Piskoti, C. e Zettl, A., 1999, Thermal conductivity of single-walled carbon nanotubes, *Physical Review B*, vol. 59/4, pp. 0163-1829/99/59(4)/2514(3).
- Incropera, F. e Dewitt, P.D., 1996, *Introduction to Heat Transfer*, 3<sup>rd</sup> edition, John Wiley&Sons, New York.
- Osman, M. A. e Srivastava, D., 2001, “Temperature dependence of the thermal conductivity of single-wall carbon nanotubes”, *Nanotechnology*, vol. 12, pp. 21–24.
- Saldanha da Gama, R.M., 1997 “An easy procedure for solving steady-state conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions”, *Mech. Research Comm.*, vol. 24/2, pp. 197-202.
- Saldanha da Gama, R.M., 2000, “An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions”. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol.27, No.7, pp.955-964.
- Slattery, J.C., 1999, *Advanced Transport Phenomena*, Cambridge University Press, USA.
- Taylor, A.E., 1958, *Introduction to functional analysis*, Wiley Toppan, Tokyo.