



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Allan Moraes de Lira

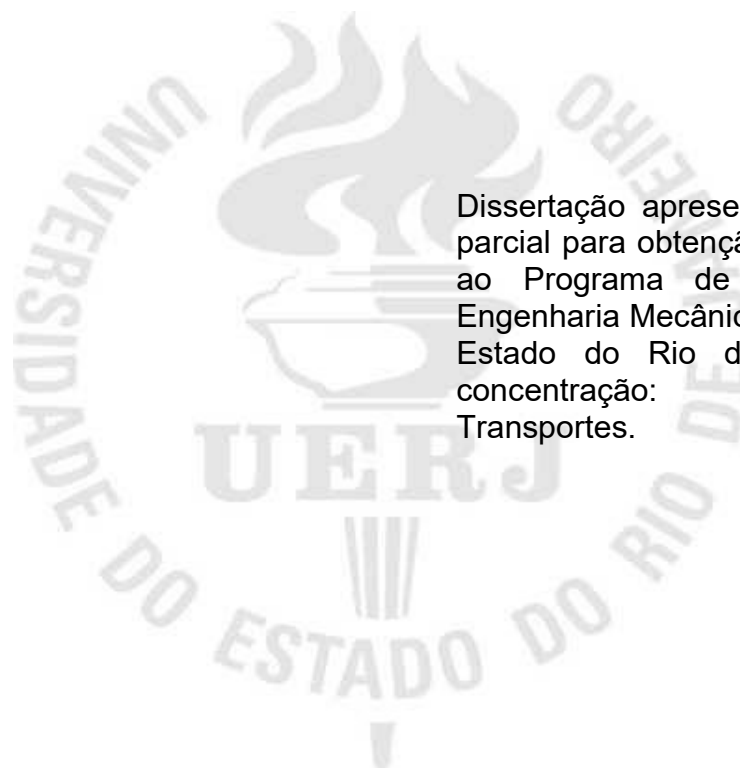
**Simulação do Processo de Transmissão de Calor em uma Placa, com
Condutividade Térmica Dependente da Temperatura, Aquecida por uma
Fonte Externa de Radiação**

Rio de Janeiro

2016

Allan Moraes de Lira

Simulação do processo de transmissão de calor em uma placa, com condutividade térmica dependente da temperature, aquecida por uma fonte externa de radiação



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

L768 Lira, Allan Moraes de.
Simulação do processo de transmissão de calor em uma placa, com condutividade térmica dependente da temperature, aquecida por uma fonte externa de radiação / Allan Moraes de Lira. - 2016.
61 f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Calor - Transmissão - Dissertações. 3. Fontes de radiação - Dissertações. 4. Condutividade térmica – Dissertações. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 536.24

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Allan Moraes de Lira

Simulação do processo de transmissão de calor em uma placa, com condutividade térmica dependente da temperatura, aquecida por uma fonte externa de radiação

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: fenômenos de transportes.

Aprovado em 19 de Dezembro de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof^a Dr. José Júlio Pedrosa Filho
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dra. Maria Laura Martins Costa
Universidade Federal Fluminense – UFF

Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid
Universidade Federal Fluminense – UFF

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

Aos meus queridos pais: Ramirez Rodrigues de Lira e Neuzi Moraes da Silva de Lira. Apesar da vida humilde e com poucas oportunidades/possibilidades, me proporcionaram uma criação pautada em valores sólidos e conseguiram desenvolver em mim a força e a determinação que foram necessários para que eu pudesse conquistar/realizar, por meio de trabalho duro, os meus projetos e sonhos. Meus pais, mesmo sem o ensino fundamental, foram e ainda são os meus melhores Professores.

AGRADECIMENTOS

Agradeço grandemente ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama, por toda a paciência e compreensão. Sem o apoio do meu Orientador seria impossível a conclusão deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer a minha ex-chefe, Professora Miriam Moraes Puerari (Escola Naval), por me ceder dias de trabalho para que eu pudesse assistir às aulas na UERJ. O apoio da Professora Miriam foi fundamental, ela é uma das responsáveis pelas principais conquistas da minha vida.

Agradeço a Professora Ednilsa Santana do Nascimento Gomes (Colégio Militar de Campo Grande) pelo apoio nas correções textuais de algumas partes deste trabalho. A professora Ednilsa é um exemplo de companheirismo.

Agradeço a Professora Renata Pessoa Silva (Colégio Militar de Campo Grande) pela ajuda na elaboração do abstract.

RESUMO

LIRA, Allan Moraes. *Simulação do processo de transmissão de calor em uma placa, com condutividade térmica dependente da temperatura, aquecida por uma fonte externa de radiação*. 2016. 61f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

Esta dissertação tem por objetivo abordar a transferência de energia na forma de calor por meio de uma perspectiva mais realista, no que diz respeito a condutividade térmica dos materiais. A condutividade térmica não é considerada constante neste trabalho. A ideia admitida neste texto consiste em uma dependência entre a condutividade térmica e a temperatura. Desse modo, faz-se a seguinte aproximação: a condutividade térmica é uma função - constante por partes (três “degraus”) - da temperatura. É introduzida a Transformada de Kirchhoff, a ser empregada para tratar a não linearidade do problema, tendo em vista que, se tratando de condutividade térmica variável, o problema será governado por uma equação diferencial não linear. O objeto de estudo deste trabalho consiste na transmissão de calor em uma placa retangular delgada que é exposta a uma fonte de radiação térmica. Finalmente, são apresentados os resultados dos campos de temperaturas da placa, com suas respectivas análises.

Palavras-chave: Transferência de Calor; Radiação; Condutividade térmica variável; Transformada de Kirchhoff.

ABSTRACT

LIRA, Allan Moraes. *Simulation of the process of heat transfer in a plate, with thermal conductivity dependent on the temperature, heated by an external source of radiation*. 2016. 61f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

This study aims to approach the energy transference by heat means through a realist perspective in relation to the materials thermal conductivity. The thermal conductivity is not considered steadfast in this research. The admitted idea in this text is a dependency between thermal conductivity and temperature. Thus, the following approach is done: the thermal conductivity is a function – constant through parts (three "steps") – of temperature. The Kirchhoff Transformation is introduced to be applied to deal with the problem nonlinearity, considering that, when dealing with variable thermal conductivity, the problem will be conducted by a nonlinear differential equation. The aim of the study of this work consists in the heat transmission in a rectangular thin board that is exposed to a thermal radiation source. Lastly, the board temperature fields results are shown with their analysis.

Keywords: Heat Transference; Radiation; Variable Thermal Conductivity; Kirchhoff Transformation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Corpo convexo	15
Figura 2 - Corpo não convexo	16
Figura 3 – Esquema ilustrativo da fonte de calor e da placa plana.....	32
Figura 4 – Esquema para cálculo de c.....	33
Figura 5 – Condutividade térmica versus temperature para alguns refratários.....	40
Figura 6 – Condutividade térmica versus temperature para alguns metais.....	41
Figura 7 – Esquema do problema a ser resolvido.....	45
Figura 8 – Condutividade térmica em função da temperatura absoluta	46
Figura 9 – Campo de temperaturas para $H = 0,05$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$	52
Figura 10 – Campo de temperaturas para $H = 0,1$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$	53
Figura 11 – Campo de temperaturas para $H = 0,3$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$	54
Figura 12 – Campo de temperaturas para $H = 0,05$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$	55
Figura 13 – Campo de temperaturas para $H = 0,1$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$	56
Figura 14 – Campo de temperaturas para $H = 0,3$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$	57

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFF	Universidade Federal Fluminense

LISTA DE SÍMBOLOS

C	Representação de um corpo
Ω	Conjunto aberto e limitado pertencente ao \mathbb{R}^M ($M = 1, 2$ ou 3)
$\partial\Omega$	Fronteira de um corpo
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a uma superfície
D/Dt	Derivada material
div	Divergente
ρ	Densidade
u	Energia interna específica
\mathbf{V}	velocidade
q	Fluxo de calor por unidade de tempo e área
\mathbf{T}	Tensor de cauchy
\mathbf{g}	Força de corpo externa por unidade de massa
\dot{q}	Forncimento de calor interno por unidade de tempo e volume
$grad$	gradiente
$\partial/\partial t$	Derivada parcial em relação ao tempo
\mathbf{c}	Calor específico
T	Temperatura
k	Condutividade térmica
$\hat{F}(x)$	Função genérica
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção
∞	Infinito
q_{CONV}	Fluxo de calor por convecção

q_{RAD}	Fluxo de calor por radiação
σ	Constante de Stefan-Boltzmann
$\hat{K}(x, y)$	Função dependente da geometria de um corpo
e_b	Energia emitida por radiação, por unidade de tempo e área
ε	Emissividade
α	Absortância
r	Reflectância
B	Radiosidade
H'	Energia radiante térmica incidente por unidade de tempo e área
c	Efeito da fonte externa de radiação térmica
dA	Elemento infinitesimal de área
m	Constante positiva
χ	Ponto genérico sobre a fonte externa de radiação
Γ	Representação da fonte de radiação externa
$\partial\Gamma$	Fronteira da fonte de radiação externa
a	Raio da esfera, fonte de radiação externa
\mathbf{m}	Vetor unitário normal à superfície da fonte de radiação externa
H	Altura
w	Transformada de Kirchhoff
k_0	Constante de referência positiva
λ	Constante de escolha conveniente
L	Lado da placa retangular
L'	Lado da placa retangular
\mathbf{r}	Vetor posição da fonte de radiação externa

D	Domínio aberto e convexo no \mathbb{R}^2
Q	Calor dissipado pela fonte de radiação externa
ξ	Variável genérica
C_1	Constante 1
C_2	Constante 2
ψ	Função genérica
β	Variável genérica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	15
1.1 Transmissão de calor no interior do corpo.....	16
1.2 Lei de Fourier.....	18
1.3 Condições de contorno usuais e suas limitações.....	19
1.4 Transmissão de calor por radiação – corpos cinzentos.....	21
1.5 O acoplamento entre a condução e a radiação térmica.....	26
1.6 Modelo matemático resultante para um corpo convexo.....	28
1.7 Modelo matemático resultante mais realista.....	29
2 MODELAGEM DA FONTE EXTERNA DE RADIAÇÃO E DO SEU EFEITO SOBRE A PLACA	31
3 ALGUNS ASPECTOS DA CONDUTIVIDADE VARIÁVEL	39
4 A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF	42
5 DESCRIÇÃO DO FENÔMENO NUMA PLACA DELGADA COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA CONSTANTE POR PARTES DA TEMPERATURA	45
6 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	52
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	58
REFERÊNCIAS	59

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem por objetivo abordar a transferência de energia na forma de calor por meio de uma perspectiva mais realista, no que diz respeito à condutividade térmica dos materiais. O objeto de estudo desta dissertação consiste na análise da transmissão de calor em uma placa retangular, considerada um corpo rígido, opaco, convexo e em repouso. Considera-se que a placa esteja imersa em um meio não opaco, não participante e exposta a uma fonte de radiação térmica e sua condutividade térmica não seja constante.

A ideia admitida neste trabalho traduz-se em uma dependência entre a condutividade térmica e a temperatura. Nesse sentido, faz-se a seguinte aproximação: a condutividade térmica é uma função – constante por partes – da temperatura. Essa aproximação da condutividade térmica implica uma não linearidade na equação diferencial que governa a transferência de calor por condução. A não linearidade da equação citada é contornada empregando a Transformada de Kirchhoff e obtendo a sua inversa.

Do ponto de vista da não constância da condutividade térmica e em respeito à relevância desta abordagem, cita-se o caso dos nanotubos de carbono, conhecidos pelas suas elevadas condutividades térmicas. A condutividade depende da temperatura das cordas cristalinas de nanotubos de carbono de parede única e diminui gradualmente com o decréscimo da temperatura, apresentando uma dependência linear da temperatura quando ela é inferior a 30 K (Hone et al., 1999).

Além disso, há o óxido de zinco – material importante que apresenta interesse em optoeletrônica e aplicações eletrônicas. A condutividade térmica máxima do óxido de zinco policristalino ocorre a cerca de 60 K e o seu valor é quase uma ordem de grandeza mais baixa do que aquela do óxido de zinco comum (Alvarez-Quintana e tal., 2010).

Exemplos de aplicações do problema objeto deste trabalho podem ser encontrados em “flares” e em satélites artificiais. Podemos associar as ideias deste texto às situações onde há a possibilidade de altas temperaturas e/ou atmosferas rarefeitas, com a existência de radiação térmica que não pode ser desprezada.

Esta dissertação está estruturada em capítulos. O capítulo 1 apresenta os fundamentos teóricos da transferência de calor necessários para abordar o problema objeto

deste trabalho. O capítulo 2 evidencia a modelagem da fonte externa de radiação e do seu efeito sobre a placa. O capítulo 3 expõe alguns aspectos da condutividade variável. No capítulo 4, é introduzida a Transformada de Kirchhoff a ser empregada para tratar a não linearidade do problema. O capítulo 5 aborda o problema objeto desta dissertação – a descrição do fenômeno de transferência de calor em uma placa delgada com condutividade térmica constante por partes da temperatura. Já o capítulo 6 traz a apresentação dos resultados, por meio de gráficos, e suas análises. No capítulo 7, são apresentadas as considerações finais.

1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Qualquer corpo fora do equilíbrio térmico experimenta um processo interno de transmissão de calor. Se o corpo for rígido e opaco esta transmissão de calor se processa por condução pura, em função dos gradientes internos de temperatura.

O processo interno de transmissão de calor é combinado com outros mecanismos (convecção e radiação térmica) para promover a troca de calor do corpo para a vizinhança e vice-versa.

Quando um ou mais corpos (com temperaturas diferentes de zero absoluto) encontram-se imersos em meios não opacos sempre há um processo de troca de calor por energia radiante térmica através de suas fronteiras.

O processo de transferência de calor ocorrendo dentro do corpo é governado por uma equação diferencial definida no interior do corpo enquanto que a transmissão de calor de/para a vizinhança é descrita através de condições de fronteira (condições de contorno)

Considere o corpo C mostrado na figura 1, que será susposto convexo (um corpo convexo não recebe radiação térmica diretamente da própria superfície) representado pelo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$. Se o corpo C estiver em repouso, for rígido (indeformável) e opaco, o processo de transferência de energia no seu interior se dá exclusivamente por condução de calor.

Se o corpo C estiver imerso num meio não opaco, haverá transmissão de calor por radiação térmica entre o corpo e o universo exterior. Se o corpo C estiver imerso num meio material deformável (fluido, por exemplo) haverá troca de calor por convecção entre o corpo e o ambiente exterior.

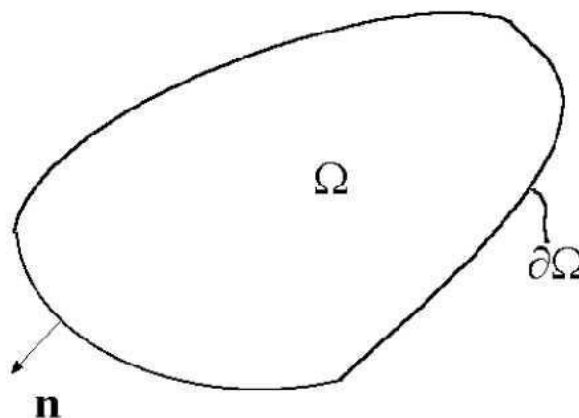


Figura 1. Corpo convexo

Se ao invés de um corpo convexo tivermos um corpo não convexo, mostrado na

figura 2, além das transferências de energia descritas acima, teremos também a troca de calor por radiação (direta) entre pontos diferentes sobre a fronteira do corpo. Isto ocorrerá porque há pontos da fronteira que se “enxergam”.

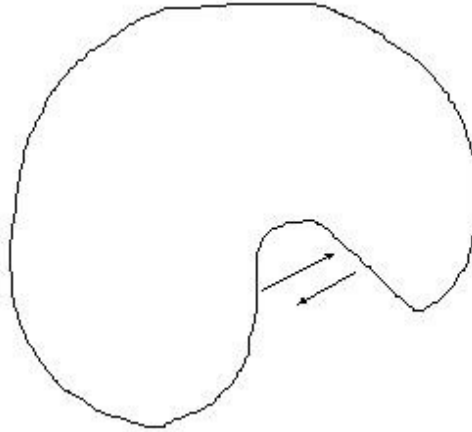


Figura 2 – Corpo não convexo

1.1 Transmissão de calor no interior de um corpo

Em um primeiro momento, será considerado que o corpo C (figura 1) esteja imerso num meio fluido não opaco, de tal forma que a troca de calor através da fronteira $\partial\Omega$ se processe por convecção e por radiação térmica. Para simplificar o modelo matemático, a superfície $\partial\Omega$ será suposta cinzenta. A hipótese de superfície cinzenta consiste em supor que as propriedades físicas de $\partial\Omega$ independam do comprimento de onda da radiação.

A conservação da energia é um dos cinco postulados básicos da Mecânica dos Meios Contínuos. Este postulado dá origem à seguinte equação diferencial, válida para todo e qualquer subconjunto material de um dado corpo

$$\left[\rho \frac{D}{Dt} \left(u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) \right] = -div \mathbf{q} + div (\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \dot{q}_{em} \quad \Omega \quad (1)$$

onde Ω é um conjunto aberto e limitado pertencente ao \mathbb{R}^M ($M = 1, 2$ ou 3), D/Dt representa a derivada material, div representa o operador divergente, ρ representa a densidade, u a

energia interna específica, \mathbf{v} a velocidade, \mathbf{q} o fluxo de calor por unidade de tempo e área, \mathbf{T} o tensor de Cauchy, \mathbf{g} a força de corpo externa por unidade de massa e \dot{q} a taxa de fornecimento de calor por unidade de tempo e volume no interior do corpo.

Impondo que as equações de continuidade e de quantidade de movimento sejam satisfeitas para o corpo em questão, podemos reduzir (1) à seguinte forma

$$\frac{\rho Du}{Dt} = -div \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot grad \mathbf{v} + \dot{q} \quad em \Omega \quad (2)$$

onde *grad* representa o operador gradiente.

Sob a hipótese do corpo rígido e em repouso, a equação (2) se reduz a

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -div \mathbf{q} + \dot{q} \quad (3)$$

onde $\frac{\partial T}{\partial t}$ representa a derivada parcial com relação ao tempo, c o calor específico e T a temperatura.

A hipótese de o corpo opaco faz com que \dot{q} represente apenas uma taxa de geração de calor por unidade de tempo e volume. Este campo \dot{q} pode depender da temperatura T e da posição espacial.

Para processos em regime permanente ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), objetivo deste trabalho, a equação (3) se reduz a

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{q} = 0 \text{ em } \Omega \quad (4)$$

1.2 Lei de Fourier

Neste trabalho, todos os fenômenos envolvendo transporte de energia no interior de corpos, a Lei de Fourier será empregada para correlacionar o campo de temperaturas com o fluxo local de calor.

A Lei de Fourier é uma equação constitutiva que, para materiais isotrópicos, é dada por

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T \quad (5)$$

onde T é o campo de temperaturas, \mathbf{q} o vetor fluxo de calor por unidade de tempo e área e k é a condutividade térmica. A condutividade térmica k é um campo escalar que pode depender da posição e da temperatura.

Combinando (4) e (5), obtemos a seguinte equação diferencial parcial elíptica

$$\operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) + \dot{q} = 0 \text{ em } \Omega \quad (6)$$

Esta equação governará os processos de transferência de calor, em regime permanente, no interior do corpo contínuo que é representado pelo conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

com fronteira $\partial\Omega$.

1.3 Condições de contorno usuais e suas limitações

Amparadas pelo apelo didático e pela simplicidade de sua utilização as condições de contorno, em geral associadas ao problema (6), são do seguinte tipo

$$T = \hat{F}(X) \text{ sobre } \partial\Omega_1 \quad e \quad \text{grad } T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_2 \quad (7)$$

onde $\hat{F}(X)$ é uma função conhecida sobre $\partial\Omega_1$ ($\partial\Omega_1$ não pode ser um conjunto vazio), $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega$ representa a fronteira de Ω e \mathbf{n} representa o vetor unitário exterior.

A condição de contorno acima impõe que a temperatura seja prescrita sobre uma parte da fronteira e que a outra parte seja termicamente isolada (isto é, tenha fluxo normal de calor nulo). Esse tipo de condição de contorno, apesar de matematicamente conveniente, é bastante limitado no que diz respeito à representação de fenômenos reais. Não há como impor, na prática, uma temperatura sobre uma parte da fronteira do corpo, bem como não há fronteiras perfeitamente adiabáticas.

As condições de contorno aceitáveis para a equação (6) são aquelas que surgem a partir das condições de salto no fluxo normal de energia através da fronteira $\partial\Omega$. Em outras palavras, devemos impor que o fluxo normal de calor por unidade de tempo e área chegando por condução à fronteira do corpo (proveniente do seu interior) seja igual ao fluxo normal de calor por unidade de tempo e área deixando esta fronteira em direção a vizinhança.

Por exemplo, se admitirmos que o corpo troca calor por convecção com a sua vizinhança teremos a seguinte condição de contorno.

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = q_{CONV} \text{ sobre } \partial\Omega \quad (8)$$

Se admitirmos que q_{CONV} é dado pela Lei de Newton do resfriamento e que a vizinhança está a uma temperatura T_∞ e admitindo o coeficiente de transferência de calor por convecção h conhecido, teremos

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = h (T - T_\infty) \text{ sobre } \partial\Omega \quad (9)$$

A condição de contorno linear acima é a mais simples que existe dentro de um contexto fisicamente admissível. Quanto mais aquecido estiver o corpo maior será a perda de calor deste para o universo que o cerca.

Além disso, a condição (9) tem como caso limite a condição (7), já que:

- a) se $h \rightarrow 0$ sobre $\partial\Omega_2$ teremos o caso da superfície isolada;
- b) se $h \rightarrow \infty$ sobre $\partial\Omega_1$ teremos o caso de temperatura prescrita ($T = T^\infty$). A temperatura T^∞ poderia ser exatamente $\hat{F}(X)$.

Infelizmente a condição de contorno (9) não se adéqua em todas aplicações. Muitas vezes é necessário considerar condições muito mais complexas sobre $\partial\Omega$.

Para ilustrar esse fato, considera-se que o corpo representado por Ω seja um corpo negro convexo imerso no vácuo (sem a presença de outros emissores/refletores de

radiação térmica). Neste caso a condição de contorno seria

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = q_{RAD} \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (10)$$

onde q_{RAD} representa o fluxo de calor por unidade de tempo e área deixando a superfície $\partial\Omega$ em cada ponto. Uma vez que o corpo é negro e convexo, (10) é representada por

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = \sigma T^4 \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (11)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e T representa a temperatura absoluta.

Quando o corpo não for convexo a equação (11) não será mais suficiente para representar a condição de contorno, isto porque haverá emissão direta do corpo para ele mesmo. Neste caso teremos que incorporar a (11) um operador integral ficando com uma expressão do tipo

$$-k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} = \sigma T^4 - \int_{Y \in \partial\Omega} \hat{K}(X, Y) \sigma T^4 dA \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (12)$$

onde $\hat{K}(X, Y)$ é uma função que depende da geometria do corpo.

Se o corpo não for cinzento nem mesmo a forma apresentada em (12) será suficiente para descrever o que ocorre na fronteira.

1.4 Transmissão de calor por radiação – corpos cinzentos

Uma das suposições mais comuns em engenharia é a de que as propriedades associadas à radiação térmica não dependam do comprimento de onda da radiação. Tal hipótese caracteriza as chamadas “superfícies cinzentas”.

Neste trabalho, a discussão será limitada a superfícies cinzentas difusas. Uma superfície cinzenta difusa reflete a energia radiante térmica de maneira uniforme e independente da história da radiação incidente. Isto permite uma simplificação na abordagem matemática possibilitando a combinação direta das parcelas emitida e refletida da radiação.

Os corpos cinzentos são, na verdade, generalizações dos corpos negros. A energia emitida por radiação, por unidade de tempo e área, a partir de um ponto sobre a superfície de um corpo cinzento, é dada por

$$e = \varepsilon e_b = \varepsilon \sigma T^4 \quad (13)$$

onde e_b é a energia emitida por radiação, por unidade de tempo e área, a partir de um ponto sobre a superfície de um corpo negro à temperatura T e ε é a emissividade da superfície ($0 < \varepsilon \leq 1$). Quando $\varepsilon = 1$ o corpo é dito negro, pois o corpo negro é aquele que apresenta o maior poder emissivo possível.

Diferentemente do corpo negro, o corpo cinzento não absorve toda a energia radiante incidente. Parte dela é refletida. Assim, duas outras propriedades (ambas não negativas) são definidas, por conveniência: a absorptância α e a reflectância r .

Pelo princípio de conservação de energia, podemos garantir para um corpo

opaco que

$$\alpha + r = 1 \quad (14)$$

A Lei de Kirchhoff assegura que

$$\alpha = \varepsilon \quad (15)$$

e assim podemos escrever

$$r = 1 - \varepsilon \quad (16)$$

Para superfícies cinzentas difusas, torna-se interessante introduzir o conceito de radiosidade, denotada aqui pela letra B , a qual é definida como a soma das energias emitida e refletida (representa de fato a energia radiante térmica total emergente por unidade de tempo e área) sendo dada por

$$B = \varepsilon \sigma T^4 + rH' \quad (17)$$

onde H' representa a energia radiante térmica incidente total por unidade de tempo e área. Essa totalidade da energia radiante térmica incidente (H'), representa os efeitos combinados da radiação proveniente dos pontos da fronteira do próprio corpo que se “enxergam” (corpo não convexo) e de alguma fonte externa de radiação (conhecida) cuja incidência seja conhecida.

Para um dado ponto sobre a fronteira de um corpo, a energia radiante térmica incidente por unidade de tempo e área (H') é dada por

$$H' = \hat{H}(X) = \int_{Y \in \partial\Omega} \hat{B}(Y) \hat{K}(X, Y) dA + \hat{c}(X) \text{ para todo } X \in \partial\Omega \quad (18)$$

onde $\hat{H}(X)$ representa a função H' como função da posição X sobre $\partial\Omega$, $\hat{B}(Y)$ representa a função B (radiosidade) como função da posição Y sobre $\partial\Omega$, $\hat{c}(X)$ (dado do problema) representa a função c (efeito da fonte externa de radiação térmica) como função da posição X sobre $\partial\Omega$ e o núcleo $\hat{K}(X, Y)$ é a função dada por

$$\hat{K}(X, Y) = \begin{cases} \frac{[(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot \mathbf{n}_X]_+ [(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{n}_Y]_+}{\pi [(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{Y})]^2} & (19) \\ 0 & \end{cases}$$

A (19) é satisfeita se os pontos X e Y puderem ser conectados por uma linha reta que não seja interceptada por nenhum meio opaco.

Em qualquer outro caso onde “[]₊” representa a parte positiva do argumento entre colchetes, \mathbf{X} é um ponto sobre a fronteira $\partial\Omega$, \mathbf{Y} é também um ponto sobre a fronteira $\partial\Omega$, \mathbf{n}_X é o vetor normal unitário exterior sobre $\partial\Omega$ no ponto \mathbf{X} e \mathbf{n}_Y é o vetor normal unitário exterior sobre $\partial\Omega$ no ponto \mathbf{Y} .

A conservação de energia num espaço fechado permite concluir que

$$0 \leq \int_{Y \in \partial\Omega} \hat{K}(X, Y) dA \leq 1 \text{ para qualquer } X \in \partial\Omega \quad (20)$$

o que é muitas vezes denominado de “conservação do fator de forma”.

Na quase totalidade das aplicações a desigualdade acima é restrita e satisfaz à relação abaixo

$$\int_{Y \in \partial\Omega} \hat{K}(X, Y) dA \leq m < 1 \text{ para qualquer } X \in \partial\Omega \quad (21)$$

onde m é uma constante positiva.

Combinando (17) e (18) chegamos à equação de conservação da energia radiante térmica

$$B = \varepsilon\sigma T^4 + r \left(\int_{\partial\Omega} BK dA + c \right) \text{ sobre } \partial\Omega \quad (22)$$

onde $B = \hat{B}(X)$ para todo $X \in \partial\Omega$, $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(X)$ para todo $X \in \partial\Omega$, $T = \hat{T}(X)$ para todo $X \in \partial\Omega$, $r = \hat{r}(X)$ para todo $X \in \partial\Omega$, $c = \hat{c}(X)$ para todo $X \in \partial\Omega$ e $K = \hat{K}(X, Y)$ para todo $X \in \partial\Omega$ e $Y \in \partial\Omega$. É importante ressaltar que

$$K \equiv \hat{K}(X, Y) \equiv \hat{K}(Y, X) \text{ para } X \in \partial\Omega \text{ e } Y \in \partial\Omega \quad (23)$$

e que, a variável especial Y é utilizada como variável de integração.

1.5 O acoplamento entre a condução e a radiação térmica

Para o desenvolvimento deste trabalho, vamos admitir que os efeitos da convecção – nos processos de transferência de calor – sejam desprezíveis quando comparados aos efeitos da radiação. Portanto, o estudo consiste na transferência de calor em corpos imersos em meios não participantes.

Com base nas informações anteriores, considere um sistema composto por um corpo rígido, opaco, cinzento e em repouso, imerso num meio não participante e exposto a uma fonte externa de radiação térmica representada pela função c definida sobre $\partial\Omega$. Neste corpo haverá um processo de transmissão de calor por condução descrito pela equação diferencial

$$\text{div} (k \text{ grad } T) + \dot{q} = 0 \text{ em } \Omega \quad (24)$$

a qual deverá estar sujeita a condições de contorno.

A condição de contorno para a equação acima será a já discutida condição de continuidade do fluxo normal de calor, num contexto onde toda troca de calor entre corpo e vizinhança se dê por radiação térmica. Assim,

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = q_{RAD} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \quad (25)$$

O calor transferido (por unidade de tempo e área) a partir de cada ponto sobre a fronteira do corpo, por radiação térmica, é dado pela diferença entre a energia emergente (radiosidade) e a energia incidente, ambas por unidade de tempo e área. Desta forma pode-se reescrever (25) na forma abaixo

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = B - H' \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (26)$$

ou ainda, considerando (18),

$$-k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} = B - \left(\int_{\partial\Omega} BK \, dA + c \right) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (27)$$

Combinando agora (22), (24) e (27) chega-se a descrição matemática do processo de transmissão de calor condução/radiação num sistema de N corpos rígidos, opacos e em repouso imersos num meio não participante. Tal descrição é representada por

$$\begin{aligned} \text{div} (k \text{ grad } T) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ -k \text{ grad } T \cdot \mathbf{n} &= B - \int_{\partial\Omega} BK \, dA - c \quad \text{sobre } \Omega \end{aligned} \quad (28)$$

$$B = \varepsilon\sigma T^4 + r \left(\int_{\partial\Omega} BK \, dA + c \right) \text{ sobre } \partial\Omega$$

sendo inerentemente não linear e consistindo de uma equação diferencial parcial elíptica (definida na região Ω) sujeita a condições de contorno (representando a continuidade dos fluxos de calor) e a uma equação integral de Fredholm de segunda espécie definida também sobre a fronteira $\partial\Omega$ (representando a conservação da energia radiante térmica).

O problema (28) não é suficiente para uma descrição física completa. Uma vez que o campo T representa uma temperatura absoluta, a solução de (28) deve satisfazer a restrição termodinâmica abaixo

$$T \geq 0 \text{ em } \bar{\Omega}. \quad (29)$$

1.6 Modelo matemático resultante para um corpo convexo

Quando Ω é convexo não há troca direta de energia radiante térmica entre pontos da fronteira do corpo ($K \equiv 0$). Assim, temos a descrição mais simples possível para o problema (28) que, com a restrição (29) se reduz a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 && \text{em } \Omega \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= B - c && \text{sobre } \partial\Omega \\ B &= \varepsilon\sigma T^4 + rc && \text{sobre } \partial\Omega \\ T &\geq 0 && \text{em } \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (30)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\
 -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= \varepsilon \sigma T^4 - \varepsilon c \quad \text{sobre } \partial\Omega \\
 T &\geq 0 \quad \text{em } \bar{\Omega}
 \end{aligned} \tag{31}$$

uma vez que $\varepsilon = 1 - r$.

1.7 Modelo matemático resultante mais realista

Visando dar um tratamento mais realista ao problema, admite-se a seguinte equação para a radiação térmica

$$q_{RAD} = \varepsilon \sigma \left| \bar{T}^3 \right| \bar{T} - c \quad \text{sobre } \partial\Omega \tag{32}$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e ε é a emissividade [26,27].

Combinando as equações acima, temos o seguinte modelo matemático

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\
 \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= q_{RAD} \quad \text{sobre } \partial\Omega
 \end{aligned} \tag{33}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} &= 0 \\ -k \operatorname{grad} T \cdot \mathbf{n} &= \varepsilon \sigma |\bar{T}|^3 \bar{T} - c \text{ sobre } \partial\Omega \end{aligned} \tag{34}$$

onde a incógnita é o campo de temperaturas T .

2 MODELAGEM DA FONTE EXTERNA DE RADIAÇÃO E DO SEU EFEITO SOBRE A PLACA

A fonte externa de radiação será tratada sendo um corpo negro esférico de raio a , com temperatura uniforme T_S , dissipando calor numa taxa constante Q (conhecida), que não é afetada pela presença da placa. A esfera será representada pelo conjunto Γ , com fronteira $\partial\Gamma$.

$$\begin{aligned}\Gamma &\equiv \mathcal{X} = \{ (x, y, z) \text{ tais que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < a^2 \} \\ \partial\Gamma &\equiv \{ \mathcal{X} = (x, y, z) \text{ tais que } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \}\end{aligned}\quad (35)$$

e a placa é representada pelo conjunto Ω , com fronteira $\partial\Omega$ dados por

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } -d < z < d \} \\ \partial\Omega &\equiv \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_L \cup \partial\Omega_0 \\ \partial\Omega_U &\equiv \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } z = d \} \\ \partial\Omega_L &\equiv \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in D \text{ e } z = -d \} \\ \partial\Omega_0 &\equiv \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \text{ tais que } (x, y) \in \partial D \text{ e } -d < z < d \}\end{aligned}\quad (36)$$

onde D é um domínio aberto e convexo contido no \mathbb{R}^2 .

Estabelecendo um sistema de coordenadas cartesiano cuja origem se encontra no centro da placa, a posição (\mathbf{r}) da fonte externa de radiação é dado por

$$\mathbf{r} = H\hat{\mathbf{k}} \quad (37)$$

A figura abaixo ilustra a situação supracitada.

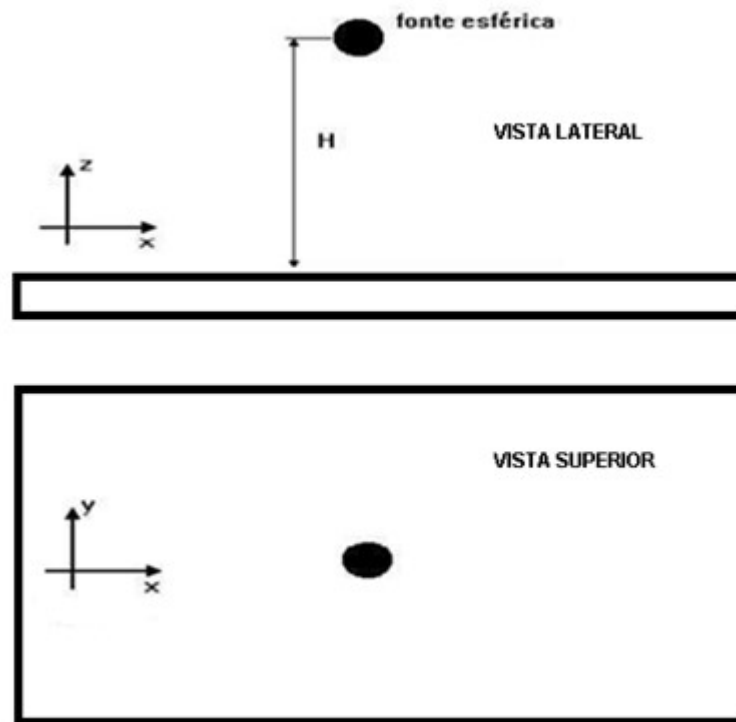


Figura 3 – Esquema ilustrativo da fonte de calor e da placa plana.

Desta forma, a fonte será um emissor de energia radiante térmica difusa e a taxa de energia radiante térmica por unidade de área que, partindo da fonte externa, incide sobre um ponto \mathbf{x} ($\mathbf{x} \in \partial\Omega_U$), sobre a fronteira da placa é dada por [26]

$$c = \hat{c}(\mathbf{x}) = \int_{\chi \in \partial\Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \chi) dA \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (38)$$

Neste trabalho será suposto que a fonte de radiação esteja contida no cilindro gerado pela placa plana (que caracteriza a seção reta do cilindro), de forma que não haja incidência direta da radiação emitida pela fonte sobre a borda lateral da placa ($\partial\Omega_0$).

O núcleo da integral acima (fator de forma) é dado por

$$K(\mathbf{x}, \chi) = - \left\{ \frac{[(\mathbf{x} - \chi) \cdot \mathbf{m}][(\mathbf{x} - \chi) \cdot \mathbf{n}]}{\pi[(\mathbf{x} - \chi) \cdot (\mathbf{x} - \chi)]^2} \right\} \text{ para } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ e } \chi \in \partial\Gamma$$

onde \mathbf{m} é o vetor normal unitário exterior definido no ponto $\chi \in \partial\Gamma$, \mathbf{n} é o vetor normal unitário exterior definido no ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ e a função $K(\mathbf{x}, \chi)$ é tal que

$$K(\mathbf{x}, \chi) = \begin{cases} 0 & \text{se uma reta ligando } \mathbf{x} \text{ e } \chi \text{ contiver pontos de } \Gamma \text{ ou de } \Omega \\ 1 & \text{se uma reta ligando } \mathbf{x} \text{ e } \chi \text{ não contiver pontos de } \Gamma \text{ ou de } \Omega \end{cases} \quad (40)$$

Sendo a fronteira $\partial\Omega$ a união dos subconjuntos $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_L$ e $\partial\Omega_0$, podemos concluir que $K(\mathbf{x}, \chi) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega_L$ e para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega_0$. Assim, sobre estas superfícies

$$c = \hat{c}(\mathbf{x}) = \int_{\chi \in \partial\Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \chi) dA = 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_L \quad (41)$$

Para determinar c sobre $\partial\Omega_U$ vamos considerar o seguinte esquema sugerido na figura abaixo

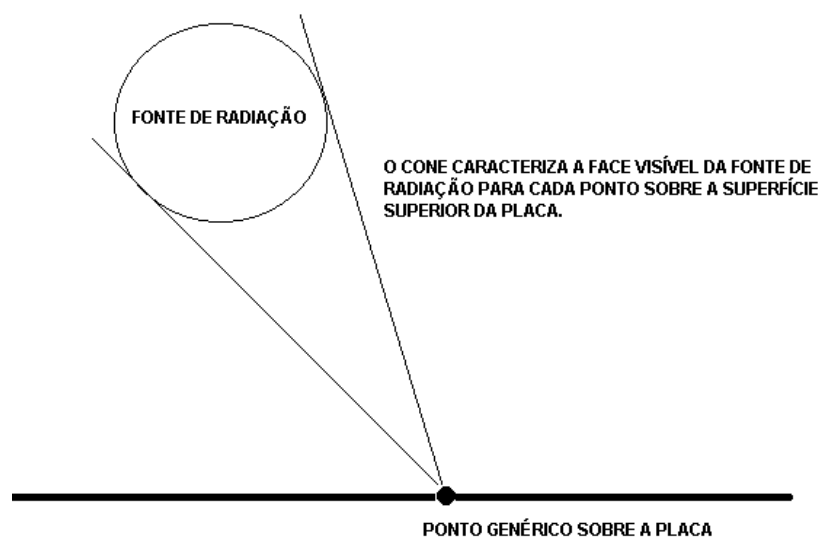


Figura 4 – Esquema para cálculo de c

Um dado ponto $\mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ recebe energia radiante térmica da parte da superfície $\partial\Gamma$ que o “enxerga” (vide o cone da figura). Assim, considerando um sistema esférico de coordenadas centrado na fonte e um sistema cartesiano retangular $[x, y, z]$ com o vetor unitário associado ao eixo z na mesma direção e sentido do vetor \mathbf{x} podemos representar um ponto genérico sobre $\partial\Gamma$ como

$$\chi = a \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + a \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + a \cos \phi \hat{\mathbf{k}} \quad (42)$$

e um ponto genérico $\mathbf{x} \in \partial\Omega_U$ como (baseado na definição do subconjunto $\partial\Omega_U$)

$$\mathbf{x} = \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (43)$$

Os vetores \mathbf{n} e \mathbf{m} serão dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{k}} \text{ (referente ao sistema cartesiano original)} \end{aligned} \quad (44)$$

O subconjunto $\partial\Gamma^* \subset \partial\Gamma$ formado pelo ponto $\chi \in \partial\Gamma$, para os quais $K(\mathbf{x}, \chi)$ não é nulo, é caracterizado por

$$0 \leq \varphi < \arccos \sqrt{\frac{a^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2}} \quad (45)$$

Se levarmos em conta que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \chi) \cdot \mathbf{m} &= \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} \right) \mathbf{k}' \cdot (\cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} \right) \cos \phi \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \chi) \cdot \mathbf{n} &= \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} \right) \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} = -H(\mathbf{x} - \chi) \cdot (\mathbf{x} - \chi) \\ &= (a \cos \theta \sin \phi)^2 + (a \sin \theta \sin \phi)^2 + \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} - a \cos \phi \right)^2 \end{aligned} \quad (47)$$

teremos, para os pontos onde $K(\mathbf{x}, \chi)$ não é nulo, a seguinte expressão

$$K(\mathbf{x}, \chi) = \frac{H \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} \right) \cos \phi}{\pi \left[(a \cos \theta \sin \phi)^2 + (a \sin \theta \sin \phi)^2 + \left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2} - a \cos \phi \right)^2 \right]^2} \quad (48)$$

ou ainda

$$K(\mathbf{x}, \chi) = \frac{H(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2}) \cos \phi}{\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 - 2a \cos \phi \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} + a \right) \right]^2} \quad (49)$$

A fonte c é então representada por

$$\begin{aligned} c = \hat{c}(\mathbf{x}) &= \int_{\chi \in \partial\Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \chi) dA = \int_{\chi \in \partial\Gamma^*} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \chi) dA = \\ &= \int_0^\varphi \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma T_s^4) H(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2}) a^2 \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi}{\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 - 2a \cos \phi \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2} + a \right) \right]^2} \end{aligned} \quad (50)$$

onde o ângulo φ é dado por

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{a^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2}} \quad (51)$$

Vamos levar em conta agora a hipótese de que a fonte seja representada por uma esfera muito pequena (fonte pontual). Essa hipótese equivale a considerar o limite quando o raio da esfera tende para zero. Neste caso teremos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} K(\mathbf{x}, \chi) = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ \frac{H(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2}) \cos \phi}{\pi \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 - 2a \cos \phi (\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2 + a^2})^2 \right]} \right\} \quad (52)$$

$$= \frac{H \cos \phi}{\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2]^{3/2}}$$

e, consequentemente, (note que agora $\phi = \pi/2$)

$$c = \int_{\chi \in \partial\Gamma} \sigma T_s^4 K(\mathbf{x}, \chi) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma T_s^4) H a^2 \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi}{\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2]^{3/2}} \quad (53)$$

Integrando, obtem-se

$$c = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{(\sigma T_s^4) H a^2 \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi}{\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2]^{3/2}} = \quad (54)$$

$$= \frac{(\sigma T_s^4) H a^2}{\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2]^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\theta d\phi$$

$$= \frac{(\sigma T_s^4) H a^2}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + H^2]^{3/2}}$$

A fonte é um corpo negro e dissipa calor numa taxa Q . Desta forma, podemos concluir que

$$Q = (\sigma T_s^4) 4\pi a^2$$

ou seja,

$$c = \frac{QH}{4\pi[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2]^{3/2}} \text{ para todo } (x, y) \in D \quad (56)$$

3 ALGUNS ASPECTOS DA CONDUTIVIDADE VARIÁVEL

A maioria dos estudos sobre a transmissão de calor trata a condução em corpos com condutividade térmica constante – isso pode ser observado na maioria dos livros de transferência de calor. Há uma conveniência matemática ao tratar a condutividade térmica constante, no entanto, em muitos problemas reais, a hipótese de condutividade constante não é satisfatória. Neste trabalho, a condutividade térmica é uma função (constante por partes) da temperatura com a seguinte forma:

$$k = \hat{k}(T) \begin{cases} k_1 & \text{para } T < T_1 \\ k_2 & \text{para } T_1 \leq T < T_2 \\ k_3 & \text{para } T \geq T_2 \end{cases} \quad (57)$$

onde T_1 e T_2 são temperaturas de referências (convenientemente escolhidas) e k_1 , k_2 e k_3 são constantes positivas.

A aproximação da condutividade térmica por uma função constante por partes, permite uma aproximação melhor que a hipótese da condutividade constante. A escolha de k_1 , k_2 e k_3 vai depender do comportamento real da condutividade térmica k com a temperatura e dos valores de temperatura envolvidos.

No intuito de verificar a relevância da condutividade térmica variável é interessante observar o gráfico apresentado na Figura 5, o qual apresenta curvas de condutividade térmica *versus* temperatura para materiais refratários (Holman, 1983). O comportamento das curvas permite observar que, independentemente das unidades, há grandes variações na condutividade térmica com a variação de temperatura.

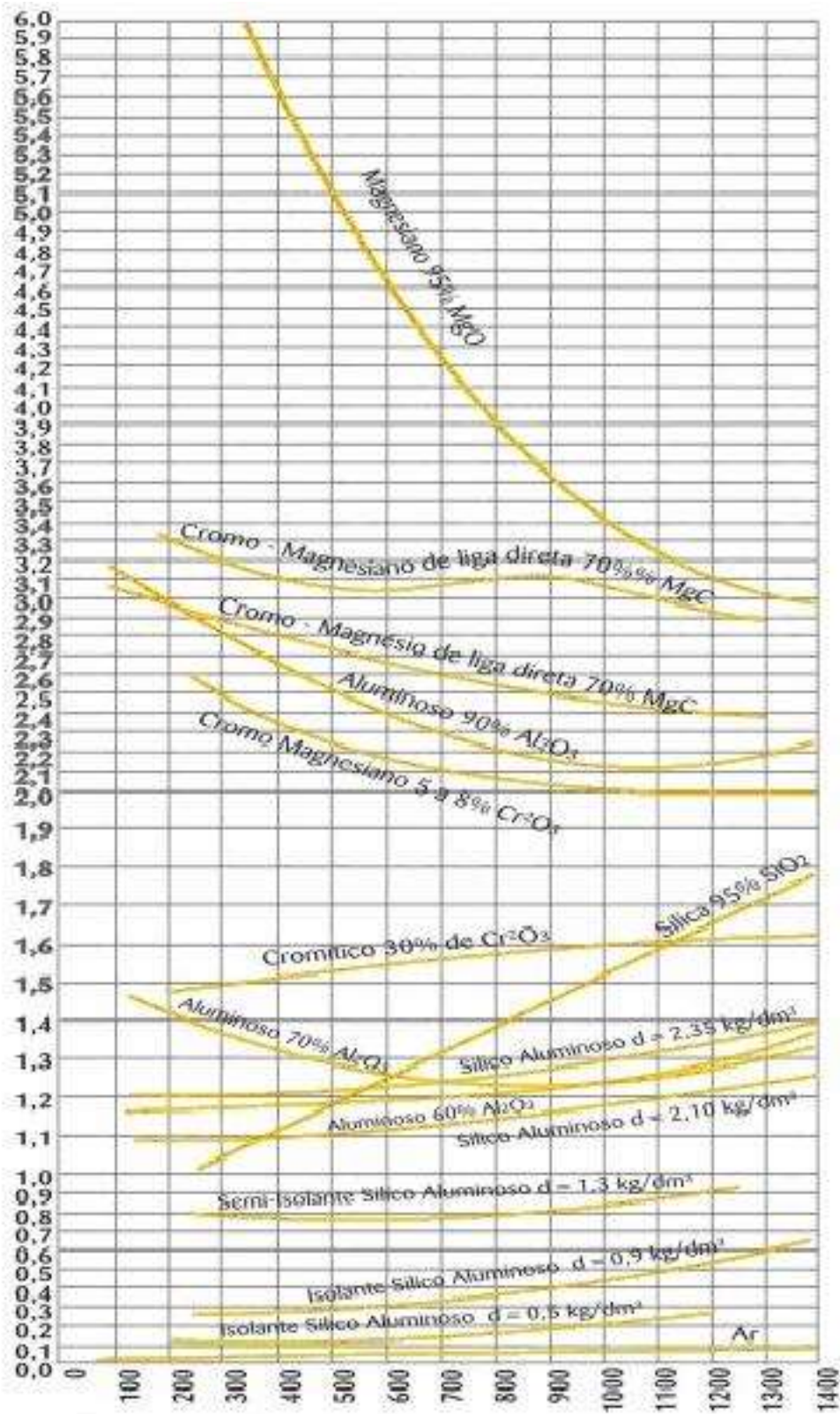


Figura 5. Condutividade térmica versus temperatura para alguns refratários.

A Figura 6 (Holman, 1983) mostra algumas curvas de condutividade térmica versus temperatura para materiais condutores. Neste caso também pode-se verificar grandes variações na condutividade térmica com a variação de temperatura, para alguns metais, enquanto para outros, como prata, cobre, ouro e alumínio, a hipótese de condutividade térmica independentemente de temperatura é bem razoável.

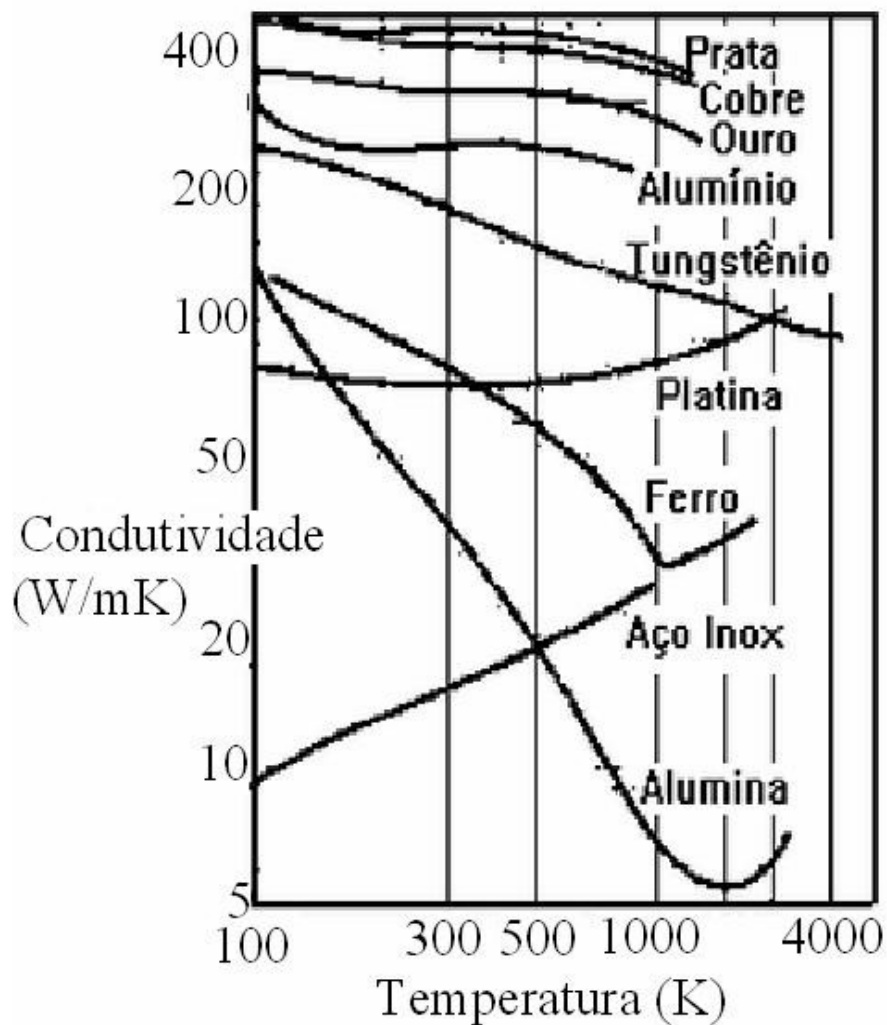


Figura 6. Condutividade térmica versus temperatura para alguns metais.

4 A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

A abordagem da condutividade térmica sendo constante por partes da temperatura, implica uma não linearidade na equação diferencial que governa a condução de calor no corpo que ocupa a configuração Ω , com fronteira $\partial\Omega$.

Para contornar o problema da não linearidade da equação (34), aplica-se a Transformada de Kirchhoff, caracterizada por (Arpaci, 1966)

$$w = \frac{1}{k_0} \int_{\lambda}^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (58)$$

onde k_0 é uma constante de referência sempre positiva e λ é uma constante escolhida de forma conveniente.

Portanto, teremos uma nova variável w que será a incognita de uma equação diferencial linear, uma vez que

$$\text{grad } w = \text{grad} \left(\frac{1}{k_0} \int_{\lambda}^T \hat{k}(\xi) d\xi \right) = \frac{\hat{k}(T)}{k_0} \text{grad } T \quad (59)$$

e, conseqüentemente,

$$(60)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) &= \operatorname{div} \left[\operatorname{grad} \left(\frac{1}{k_0} \int_{\lambda}^T \hat{k}(\xi) d\xi \right) \right] = \frac{1}{k_0} \operatorname{div}(\hat{k}(T) \operatorname{grad} T) \\ &= \frac{1}{k_0} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \end{aligned}$$

Pelo fato da condutividade térmica ser uma quantidade positiva, para cada temperatura T teremos apenas um valor da incognita w . Ou seja, a transformada de Kirchhoff é única. Admitindo que exista um número positivo γ tal que $k > \gamma > 0$, temos assegurada a inversibilidade da Transformada de Kirchhoff.

Por conveniência, admite-se k_0 unitário. Portanto, a Transformada de Kirchhoff definida na equação (63) é reduzida para a seguinte forma

$$w = \int_{\lambda}^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (61)$$

o que leva a seguinte equação

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \dot{q} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} w) + \dot{q} = 0 \text{ em } \Omega \quad (62)$$

Sempre que a taxa de geração de calor \dot{q} independe da temperatura T , a equação na variável w será linear. O campo de temperatura é obtido pela inversa da Transformada de Kirchhoff.

Para o problema objeto deste trabalho, temos que

(63)

$$w = \int_0^T \hat{k}(\xi) d\xi = \begin{cases} k_1 T & \text{para } T \leq T_1 \\ k_2(T - T_1) + k_1 T_1 & \text{para } T_2 \geq T > T_1 \\ k_3(T - T_2) + k_2(T_2 - T_1) + k_1 T_1 & \text{para } T > T_2 \end{cases}$$

Vem que

$$w = \frac{1}{2} [(k_1 + k_3)T + (k_2 - k_1)(|T - T_1| - T_1) + (k_3 - k_2)(|T - T_2| - T_2)] \quad (64)$$

Tem-se que

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} \right) w + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) (|w - w_1| - w_1) + \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right) (|w - w_2| - w_2) \right] \quad (65)$$

com $w_1 = k_1 T_1$ e $w_2 = k_2(T_2 - T_1) + k_1 T_1$.

5 DESCRIÇÃO DO FENÔMENO NUMA PLACA DELGADA COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA CONSTANTE POR PARTES DA TEMPERATURA

Este capítulo aborda o problema objeto desta dissertação – o estudo da transmissão de calor em uma placa retangular delgada que é submetida a radiação térmica de uma fonte pontual externa. Admiti-se que a fonte de radiação esteja no centro da placa a uma altura H . Além disso, considera-se que a condutividade térmica é uma função (constante por partes) da temperatura, conforme a equação (57).

A seguir, é apresentado o esquema do problema a ser resolvido, bem como o gráfico mostrando o comportamento da condutividade térmica em função da temperatura:

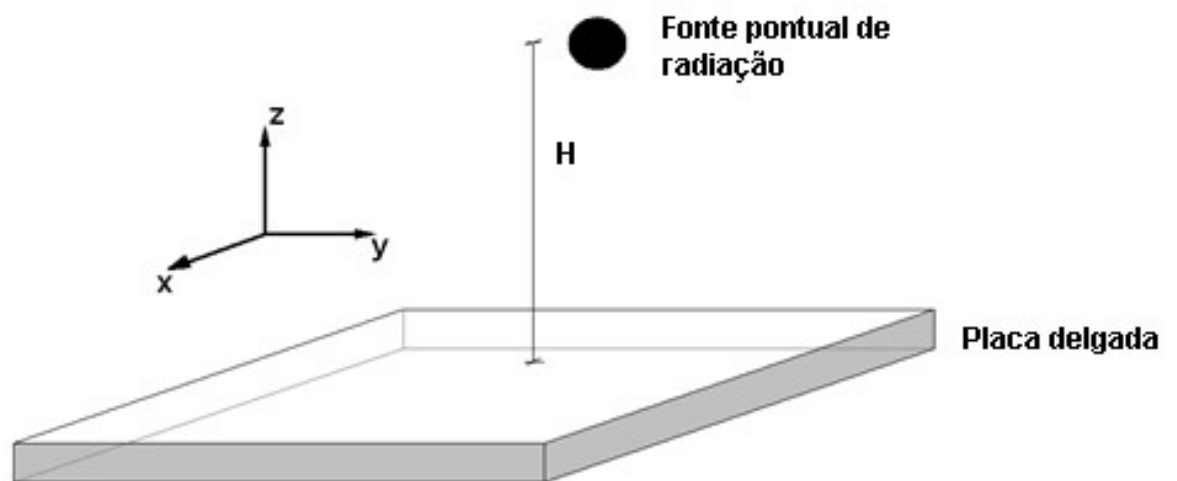


Figura 7. Esquema do problema a ser resolvido.

Fonte externa na posição (x_F, y_F, H) .

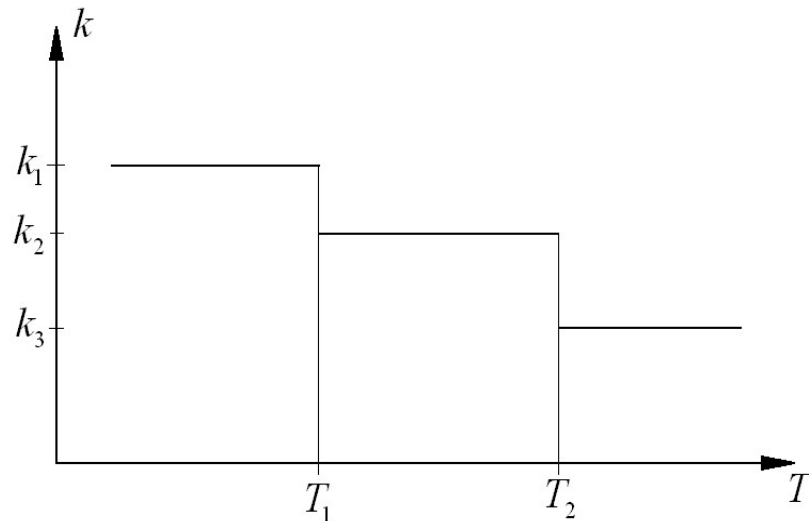


Figura 8. Condutividade térmica em função da temperatura absoluta

Da equação (24) obtemos o problema original dado por (sem fonte interna de calor)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (66)$$

onde $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ com $x = \pm L$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ com $y = \pm L'$; $k \frac{\partial T}{\partial z} = \varepsilon \sigma |T^3| T$ com $z = 0$ e $k \frac{\partial T}{\partial z} = \varepsilon \sigma |T^3| T - c$ com $z = \delta$.

A espessura da placa é considerada suficientemente pequena de maneira que podemos aproximar a temperatura da placa sendo igual nas duas faces. Esta hipótese pode ser definido por

$$\bar{T} = \int_0^{\delta} T dz \quad (67)$$

Integrando a equação (34) na espessura da placa, teremos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) - 2\varepsilon\sigma \left| \bar{T}^3 \right| \bar{T} + c\delta = 0 \quad (68)$$

onde $-L < x < L$; $-L' < y < L'$ com $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = 0$ na fronteira.

Aplicando a transformada de Kirchhoff

$$w = \int_0^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (69)$$

ficamos com o problema abaixo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2\varepsilon\sigma \left| \bar{T}^3 \right| \bar{T} + c\delta = 0 \quad (70)$$

onde $-L < x < L$; $-L' < y < L'$ com $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ na fronteira.

Portanto, o problema a ser resolvido é dado por

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + C_1 \left\{ \frac{H}{[H^2 + (x-x_F)^2 + (y-y_F)^2]^{1/3}} \right\} - C_2 |\bar{T}(\omega)|^3 \bar{T}(\omega) = 0 \quad (71)$$

onde $-L < x < L$; $-L' < y < L'$ com $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ na fronteira

Aplicando o método das diferenças finitas, a solução do problema é dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = \omega \quad (72)$$

Cada elemento da sequência é obtido a partir da solução do problema abaixo, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial y^2} - (\alpha \psi^{n+1} - \beta^n) = 0 \quad (73)$$

onde $-L < x < L$; $-L' < y < L'$; $\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial y} = 0$ na fronteira

sendo

$$\beta^n = \alpha\psi^n + C_1 \left(\frac{H}{H^2 + (x - x_F) + (y - y_F)^2} \right) - C_2 |\bar{T}(\psi^n)|^3 \bar{T}(\psi^n) \quad (74)$$

A equação (73) corresponde ao seguinte problema (discretizado)

$$\left[\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] - \alpha\psi_{i,j}^{n+1} + \beta_{i,j}^n = 0$$

$i = 2, \dots, N-1$

$j = 2, \dots, M-1$

(75)

$$\psi_{1,j}^{n+1} = \psi_{2,j}^{n+1} \quad \psi_{N-1,j}^{n+1} = \psi_{N,j}^{n+1} \quad j = 2, 3, \dots, M-1$$

$$\psi_{i,1}^{n+1} = \psi_{i,2}^{n+1} \quad \psi_{i,M-1}^{n+1} = \psi_{i,M}^{n+1} \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

onde

$$\beta_{i,j}^n = C_1 \left[\frac{H}{(H^2 + x_i^2 + y_i^2)^{\frac{3}{2}}} \right] - C_2 |\bar{T}(\psi_{i,j}^n)|^3 \bar{T}(\psi_{i,j}^n) + \alpha\psi_{i,j}^n \quad (76)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{T}(\psi_{i,j}^n) = & \left(\frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_3} \right) \psi_{i,j}^n + \left(\frac{1}{2k_2} - \frac{1}{2k_1} \right) (|\psi_{i,j}^n - k_1 T_1| - k_1 T_1) \\ & + \left(\frac{1}{2k_3} - \frac{1}{2k_2} \right) [|\psi_{i,j}^n - k_1 T_1 - k_2 (T_2 - T_1)| - k_1 T_1 - k_2 (T_2 - T_1)] \end{aligned} \quad (77)$$

Resolve-se para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ até convergir. Em geral bastam 5 ou 6 iterações.

Considere as seguintes observações:

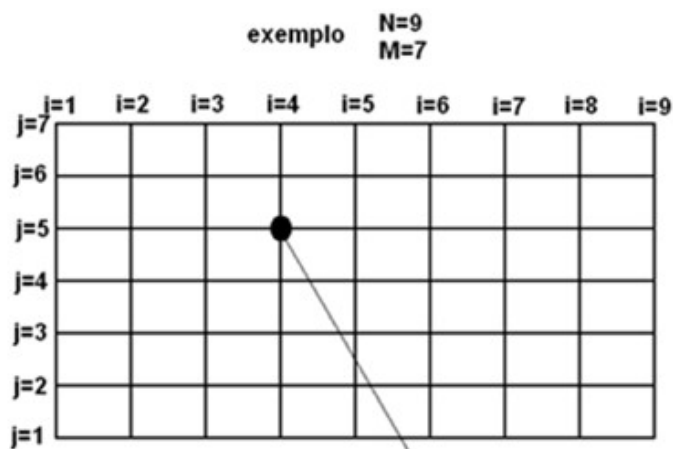
$$x_i = 2 \left(\frac{i-1}{N-1} \right) L - L, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$y_j = 2 \left(\frac{j-1}{M-1} \right) L' - L', \quad j = 1, 2, 3, \dots, M$$
(78)

onde N é o número de nós na direção x e M é o número de nós na direção y

$$\Delta x = \frac{2L}{N-1}; \quad \Delta y = \frac{2L'}{M-1}$$
(79)

Para ilustrar, vamos admitir $N = 9$ e $M = 7$



$$x_4 = 2 \left(\frac{4-1}{9-1} \right) L - L = -\frac{L}{4}$$
(80)

$$y_5 = 2 \left(\frac{5-1}{7-1} \right) L' - L' = -\frac{L'}{3}$$

Sendo

$$\Delta x = \frac{L}{8} \quad e \quad \Delta y = \frac{L'}{6} \quad (81)$$

6 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os perfis das temperaturas da placa retangular delgada. As modelagens foram realizadas variando a distância (**H** – figura 7) da fonte pontual externa de radiação ao centro da placa em duas condições: primeiro a modelagem foi realizada admitindo a condutividade térmica decrescente com o aumento da temperatura; essa condição pode ser verificada nas figuras 9, 10 e 11. No Segundo momento, a condutividade térmica foi admitida crescente com o aumento da temperatura; essa condição pode ser verificada nas figuras 12, 13 e 14.

A figura 9 ilustra a condição da condutividade térmica decrescente com o aumento da temperatura, com os seguintes valores: $H = 0,05$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$.

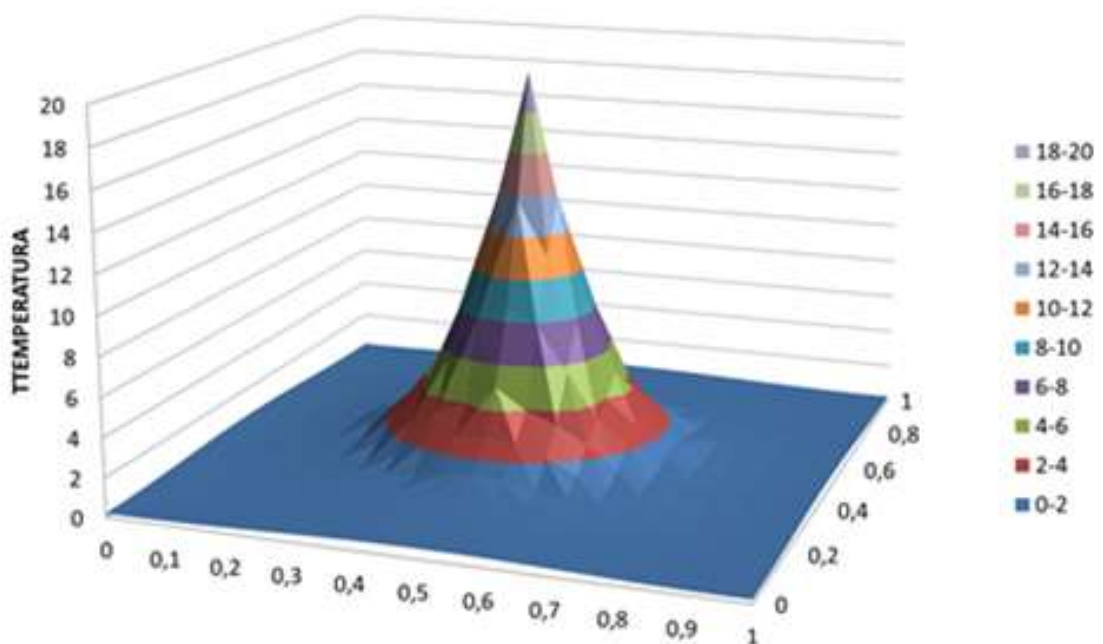


Figura 9. Campo de temperatura para $H = 0,05$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$

A figura 10 ilustra a condição da condutividade térmica decrescente com o aumento da temperatura, com os seguintes valores: $H = 0,1$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$.

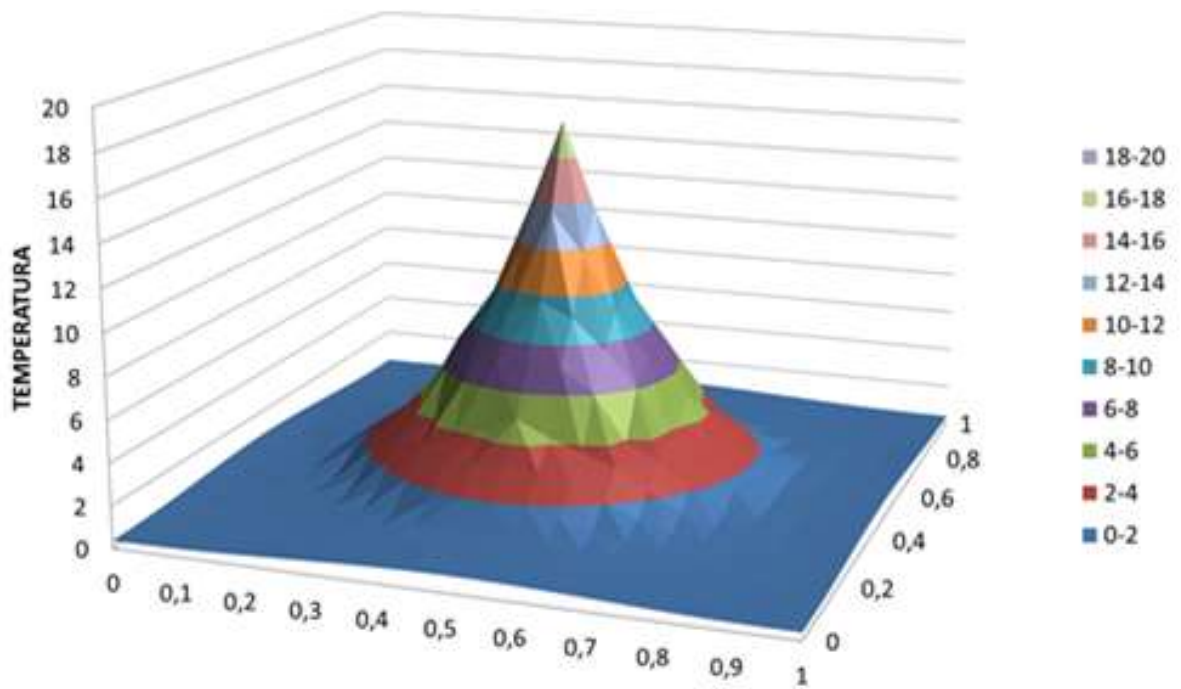


Figura 10. Campo de temperatura para $H = 0,1$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$

A figura 11 ilustra a condição da condutividade térmica decrescente com o aumento da temperatura, com os seguintes valores: $H = 0,3$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$.

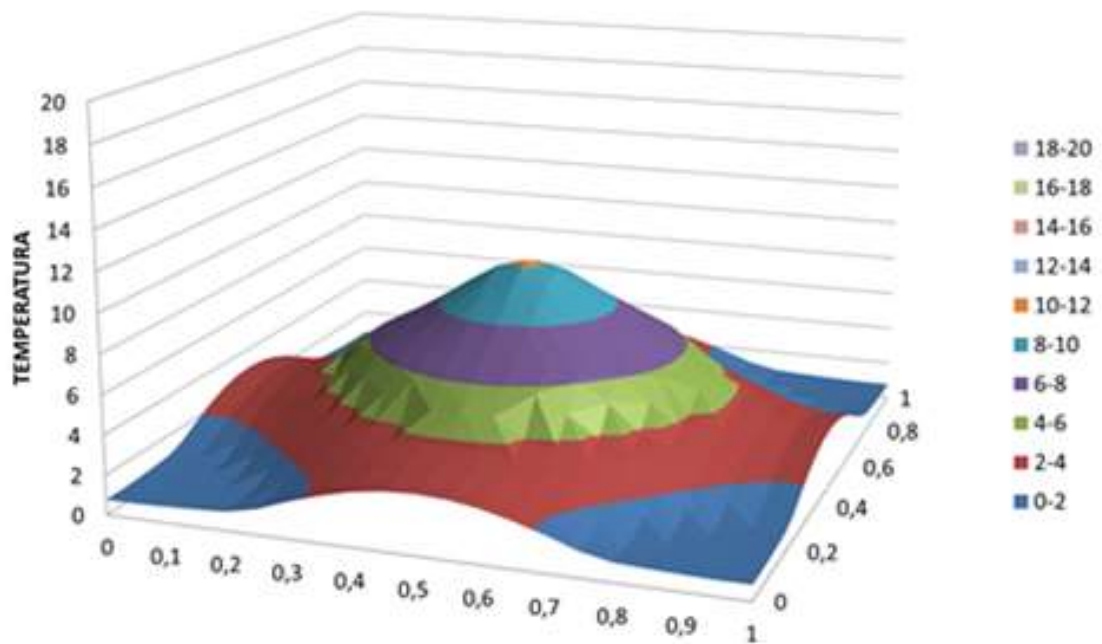


Figura 11. Campo de temperatura para $H = 0,3$; $k_1 = 3$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 0,05$

Analisando as figuras 9, 10 e 11, nota-se que, ao aproximar a fonte externa de radiação à placa, o gradiente de temperatura aumenta na região central da mesma, ao passo que nas regiões periféricas os valores das temperaturas são discretos.

A figura 12 ilustra a condição da condutividade térmica crescente com o aumento da temperatura, com os seguintes valores: $H = 0,05$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$.

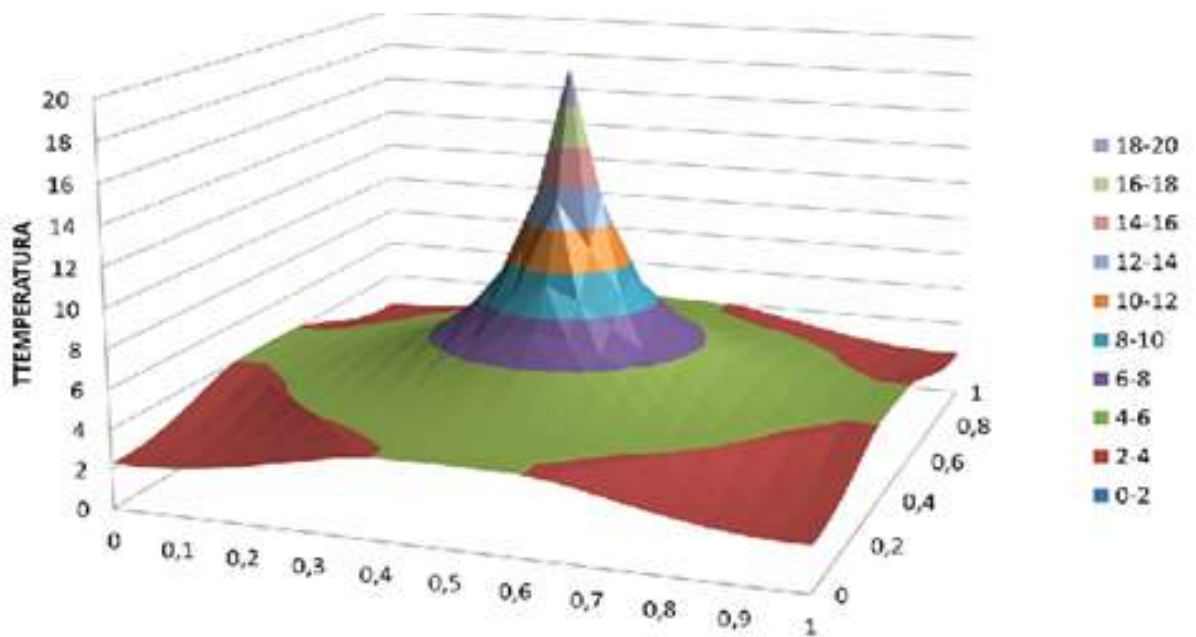


Figura 12. Campo de temperatura para $H = 0,05$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$

A figura 13 ilustra a condição da condutividade térmica crescente com o aumento da temperatura, com os seguintes valores: $H = 0,1$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$.

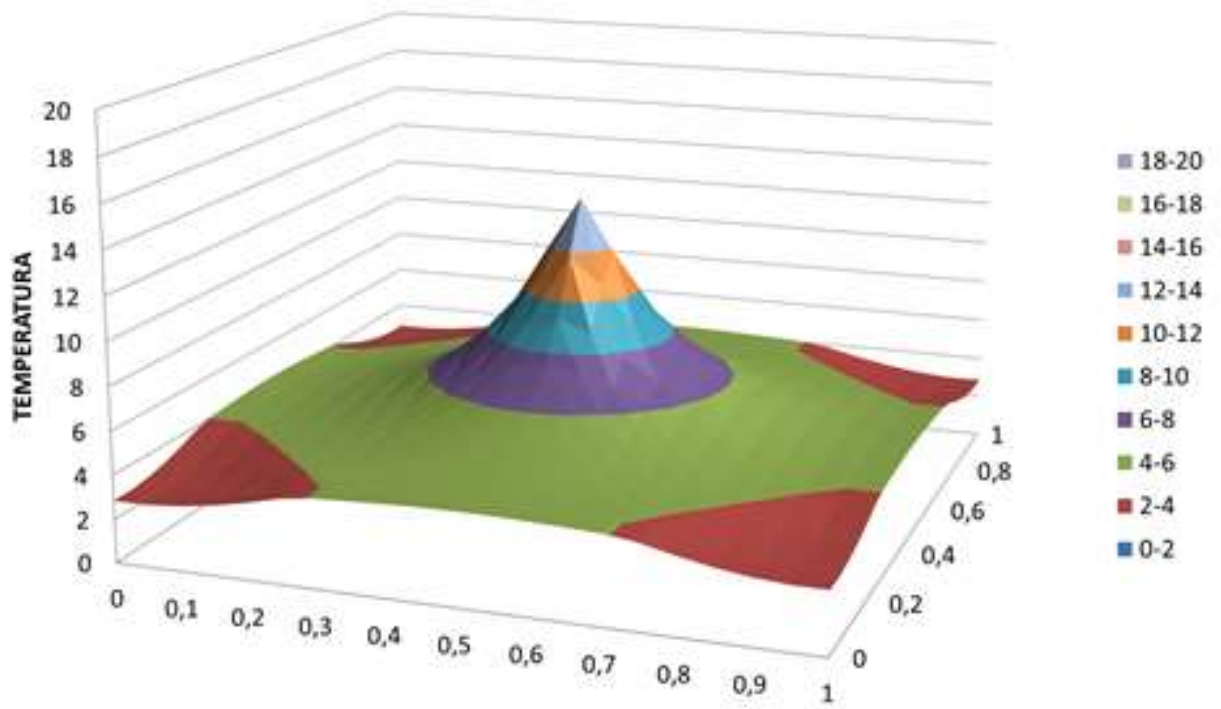


Figura 13. Campo de temperatura para $H = 0,1$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$

A figura 14 ilustra a condição da condutividade térmica crescente com o aumento da temperatura, com os seguintes valores: $H = 0,3$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$.

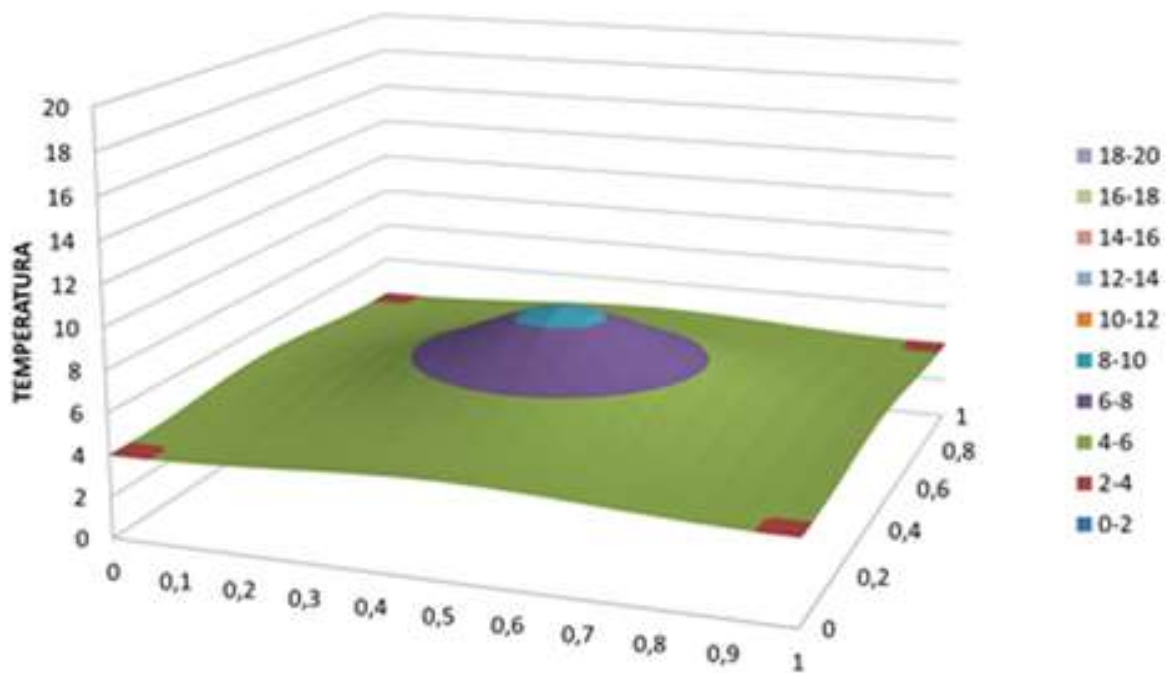


Figura 14. Campo de temperatura para $H = 0,3$; $k_1 = 0,05$; $k_2 = 0,5$; $k_3 = 3$

Esquadrinhando as figuras 12, 13 e 14, observa-se que, ao aproximar a fonte externa de radiação térmica à placa, o gradiente de temperatura aumenta na região central da mesma. Além disso, as regiões periféricas assumem valores significantes de temperaturas quando confrontadas com as figuras 9, 10 e 11.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação abordou a transferência de energia na forma de calor por meio de uma perspectiva mais realista, no que diz respeito à condutividade térmica dos materiais. O objeto de estudo foi a transmissão de calor em uma placa retangular, considerada um corpo rígido, opaco, convexo e em repouso. Além disso, foi admitido que a placa estivesse imersa em um meio não opaco, não participante e exposta a uma fonte de radiação térmica. A condutividade térmica da placa não foi considerada constante. A aproximação assumida foi a de que a condutividade térmica é uma função – constante por partes – da temperatura. A não linearidade da equação que governa a transferência de calor no interior da placa foi contornada empregando a Transformada de Kirchhoff e obtendo a sua inversa.

O elemento inédito deste trabalho foi a abordagem da condutividade variável (constante por partes da temperatura), em três “degraus”, o que parece fornecer uma visão mais abrangente e realista dos processos de transferência de energia na forma de calor. Pela análise dos gráficos, foi possível verificar que o comportamento dos campos de temperaturas da placa são fisicamente consistentes.

Conseqüentemente, surgem possibilidades de trabalhos futuros que podem abordar de forma ainda mais realista os processos de transferência de calor, como, por exemplo, uma abordagem com N fontes externas de radiação térmica, admitir a condutividade térmica com uma dependência linear da temperatura ou aumentar o número de “degraus” da condutividade térmica constante por partes da temperatura.

REFERÊNCIAS

- [1] ARPACI, V.S. *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1966.
- [2] Alvarez-Quintana, J. Martínez, E., Pérez-Tijerina, E., Pérez-García, S. A. e Rodríguez-Viejo, J, 2010, "Temperature dependent thermal conductivity of polycrystalline ZnO films", *J. Appl. Phys.*, vol. 107, pp. 063713.1-063713.4.
- [3] Carslaw, H.S e Jaeger, J.C., 1959 *Conduction Heat Transfer in Solids*, Oxford University Press.
- [4] GAMA, R.M.S. A linear scheme for simulating conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, vol.21, pp.447-454, Julho, 1997.
- [5] GAMA, R.M.S. Análise da troca de calor por radiação térmica difusa em uma cavidade cinzenta trapezoidal. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol.VIII, no.1, pp.31-43, 1986.
- [6] GAMA, R.M.S. An a priori upper bound estimate for the steady-state temperature distribution in a body subjected to linear boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, vol.27, no.2, pp.229-234, 2000.
- [7] GAMA, R.M.S. A new mathematical model for energy transfer problems with radiative boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling*, no.2, vol.14, pp.96-103, 1990.
- [8] GAMA, R.M.S. A note on the solutions of thermal radiant energy interchange problems. *Journal of Heat Transfer (ASME)*, vol.110, no.4A, pp.1014-1016, 1988.

- [9] GAMA, R.M.S. An upper bound estimate for a class of conduction heat transfer problems with nonlinear boundary conditions. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, vol.27, no.7, pp.955- 964, 2000.

- [10] GAMA, R.M.S. Aplicação do método das cordas cruzadas na solução local de problemas simétricos de radiação pura. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol.VI, no.3, pp.199-210, 1984.

- [11] GAMA, R.M.S. Existence, uniqueness and construction of the solution of the energy transfer problem in a rigid and non-convex black body. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, vol.42, pp.334-347, 1991.

- [12] GAMA, R.M.S. Numerical simulation of the (nonlinear) conduction/radiation heat transfer process in a nonconvex and black cylindrical body. *Journal of Computational Physics*, vol.128, pp.341-350, 1996.

- [13] GAMA, R.M.S. On a class of elliptic problems and its application to heat transfer in nonconvex bodies. *Journal of Computational Mathematics*, vol.11, no.4, pp.301-312, 1993.

- [14] GAMA, R.M.S. On the heat transfer phenomenon in a spherical body surrounded by vacuum, with temperature-dependent heat generation. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, vol.XIII, no.2, pp.151-166, 1991.

- [15] GAMA, R.M.S. On the physical solutions to the heat equation subjected to nonlinear boundary conditions. *Journal of Computational Mathematics*, vol.10, Suppl. Iss., pp.15-21, 1992.

- [16] GAMA, R.M.S. On the solutions of the energy transfer problem in a nonconvex black body with convective/radiative boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol.26, no.5, pp.641-653, 1991.

- [17] GAMA, R.M.S. Simulation of the steady-state energy transfer in rigid bodies, with convective/radiative boundary conditions, employing a minimum principle. *Journal of Computational Physics*, vol.99, no.2, pp.310-320, 1992.
- [18] GAMA, R.M.S. The nonlinear conduction/radiation heat transfer phenomenon represented as the limit of a sequence of linear problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol.24, no.1, pp.119-128, 1997.
- [19] GAMA, R.M.S. Uma formulação variacional geral para problemas de troca de calor por radiação difusa. *Revista Brasileira de Ciência Mecânica*, vol.VII, no.2, pp.163-179, 1985.
- [20] Geseley, G., Linsmeieryx, J., Drachy, V. Frickey, J. e Arens-Fischerz, R., 1997, "Temperature-dependent thermal conductivity of porous silicon", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol 30 pp. 2911–2916.
- [21] Hone, J., Whitney, M., Piskoti, C. e Zettl, A., 1999, Thermal conductivity of single-walled carbon nanotubes, *Physical Review B*, vol. 59/4, pp. 0163-1829/99/59(4)/2514(3).
- [22] Osman, M. A. e Srivastava, D., 2001, "Temperature dependence of the thermal conductivity of single-wall carbon nanotubes", *Nanotechnology*, vol. 12, pp. 21–24.
- [23] INCROPERA, F; DEWITT P.D., *Introduction to Heat Transfer*, 3rd edition, John Wiley&Sons, Inc., 1996.
- [24] KREYSZIG, E. *Introductory to Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

- [25] SLATTERY, J.C. Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua, McGraw – Hill Kogakusha, Tokyo, 1972.
- [26] SPARROW, E.M.; CESS, R.D. Radiation Heat Transfer, McGraw-Hill, Washington, 1978.
- [27] TAYLOR, A.E. Introduction to functional analysis, Wiley Toppan, Tokyo, 1958.