



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

Lucas Coelho da Silva

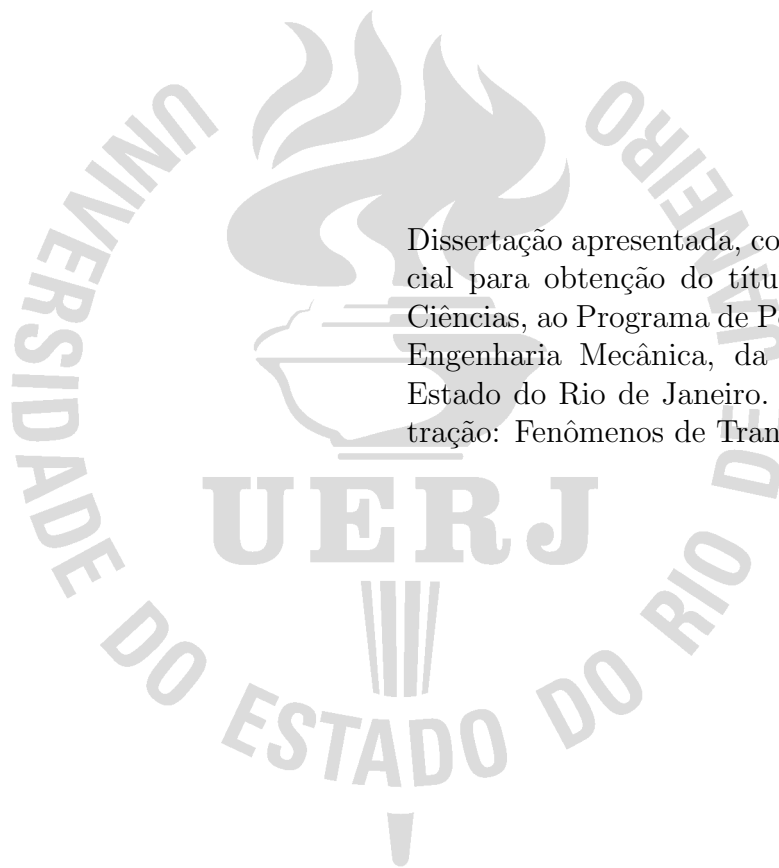
**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ CONJUGADO EM
UM DUTO ORTOTRÓPICO POR TRANSFORMADA
INTEGRAL**

Rio de Janeiro

2017

Lucas Coelho da Silva

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ CONJUGADO EM UM DUTO
ORTOTRÓPICO POR TRANSFORMADA INTEGRAL**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientador: Prof. Daniel José Nahid Mansur Chalhub, DSc

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S586 Silva, Lucas Coelho da.
Solução do problema de Graetz conjugado em um duto
ortotrópico por transformada integral / Lucas Coelho da Silva. –
2017.
108f.

Orientador: Daniel José Nahid Mansur Chalhub.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão -
Teses. 3. Escoamento - Teses. 4. Termodinâmica - Teses. I.
Chalhub, Daniel José Nahid Mansur. II. Universidade do Estado
do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 536.7

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Lucas Coelho da Silva

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ CONJUGADO EM UM DUTO
ORTOTRÓPICO POR TRANSFORMADA INTEGRAL**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovada em 21 de Fevereiro de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Daniel José Nahid Mansur Chalhub, DSc (Orientador)
PPG-EM UERJ

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, PhD
PPG-EM UERJ

Prof. Manoel Antônio da Fonseca Costa Filho, DSc
PPG-EM UERJ

Prof. Leandro Alcoforado Sphaier, PhD
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2017

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha família, e à todos aqueles que sempre me incentivaram a seguir em frente.

AGRADECIMENTOS

Fátima Maria Coelho, minha mãe;

Daniel J. N. M. Chalhub, meu orientador;

Bárbara Maely A. de Meneses, minha namorada

O começo de todas as ciências é o espanto de as coisas serem o que são.

Aristóteles

RESUMO

COELHO DA SILVA, L.C.S. *SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE GRAETZ CONJUGADO EM UM DUTO ORTOTRÓPICO POR TRANSFORMADA INTEGRAL*. 2017. 108 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Na área de estudos de simulação para transferência de calor em dutos, este trabalho propõe uma comparação entre estratégias de solução híbrida para resolver a transferência de calor conjugada em um duto com escoamento axissimétrico feito de um material ortotrópico, em que propriedades mecânicas variam nas duas direções principais. O problema apresenta um domínio único. O regime adotado é o permanente, sem variação de propriedades com o tempo. O trabalho visa a análise da distribuição do número de Nusselt para os casos simulados e analisar a taxa de convergência do número de Nusselt com a metodologia da Técnica da Transformada Integral Generalizada. O perfil de temperatura do duto também é determinado. O efeito da difusão axial no problema também foi estudado e considerado, variando o número de Péclet. Resultados gráficos foram criados para a melhor visualização do perfil das curvas de Nusselt. Várias tabelas foram criadas para indicar a mudança de comportamento da taxa de convergência de acordo com a variação dos parâmetros adimensionais. Foram criadas tabelas de comparação e validação dos resultados desse trabalho com os resultados publicados na literatura existente. Por meio de operações matemáticas, uma formulação generalizada é definida e os resultados podem ser estudados e analisados. A formulação é simplificada pelas hipóteses do problema e adimensionalizada. Para o problema proposto, algumas condições de contorno foram adotadas e também adimensionalizadas, entre elas a de 3º tipo, também conhecida como condição de Robin ou condição de contorno de convecção. Considera-se também temperatura prescrita inicial na entrada do canal, temperatura finita longe da entrada e variação da temperatura no centro do duto nula devido a simetria axial do problema. Usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) em combinação com um problema auxiliar, que no caso é o problema de autovalor de Bessel, na qual a solução procurada é escrita em termos de autofunções ortogonais originadas de um problema de Sturm-Liouville, os autovalores são calculados por um método numérico. Embora a transformação do problema original leve a um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) acoplado, neste trabalho é utilizado um método matricial analítico, no qual a solução é obtida em termos de autovalores e autovetores de uma matriz envolvendo os coeficientes de acoplamento do sistema de EDOs. Assim, a única implementação numérica necessária é o cálculo dos autovalores e autovetores da matriz coeficiente mencionada anteriormente. Ao final é possível determinar os resultados, obter o perfil de temperatura e também o comportamento do número de Nusselt. Pelos resultados, a GITT se mostrou eficiente pela análise de convergência, piores taxas foram encontradas na entrada do canal, o valor de Péclet influencia na forma como o escoamento se desenvolve termicamente, assim como Biot e a razão de aspecto do duto, e conforme Péclet aumenta, Nusselt se aproxima da solução para o caso sem difusão axial, como esperado.

Palavras-chave: Escoamento axissimétrico. Material ortotrópico. Transferência de calor conjugada. Técnica da Transformada Integral Generalizada.

ABSTRACT

COELHO DA SILVA, L.C.S. *SOLUTION OF CONJUGATED GRAETZ PROBLEM IN AN ORTHOTROPIC DUCT BY INTEGRAL TRANSFORMS*. 2017. 108 f.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

In the realm of simulation studies for heat transfer in ducts, this paper proposes a comparison between hybrid solution strategies for solving the conjugate heat transfer in a duct made of an orthotropic material with axisymmetric flow, which mechanical properties vary in the two main directions. The problem has a single domain. The permanent regime has been considered for this problem with no variation of properties with the time. The work aims to analyze Nusselt number distribution for the simulated cases and analyze Nusselt convergence rate with Generalized Integral Transform Technique. The duct temperature profile is also determined. The axial diffusion effect was also studied and considered, varying Péclet number. Graphic results were created for better visualization of Nusselt behaviour profile. Several tables were created to indicate the modification of convergence rate according to variation of dimensionless parameters. Tables of comparison and validation purposes were created to compare with results published in literature. Through mathematical operations, a generalized formulation is defined and the results can be studied and analyzed. The formulation is simplified by hypothesis and dimensionless parameters. For the proposed work, some boundary conditions were adopted and also replaced by dimensionless parameters, as the third kind condition, most known as Robin condition or convection boundary condition. There is also an initial temperature at the channel entrance, a finite temperature far from the entrance and no variation of temperature at the duct center due the axial symmetry of the problem. Using the Generalized Integral Transform Technique (GITT) in combination with an auxiliary problem, represented by Bessel eigenvalue problem, which the required solution is written in terms of orthogonal eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem, the eigenvalues are calculated by a numerical method. Although the original problem transformation takes to a coupled ordinary differential equations system (ODE), in this work is used an analytical matrix method, which the solution is obtained in terms of eigenvalues and eigenvectors from a matrix involving the coupling coefficients of the ODEs system. Thus, only one numerical implementation is necessary, that is the calculation of eigenvalues and eigenvectors from the coefficient matrix mentioned. At the end, is possible to determine the results, to obtain the temperature profile and also the Nusselt number behaviour. By the results, GITT is an efficient technique according to the convergence analysis, worse rates were found in the channel entrance, Péclet value influences the way as the flow develops thermally, as well as Biot and the duct aspect ratio, and as Péclet raises, Nusselt approaches the solution for the case with no axial diffusion, as expected.

Keywords: Axisymmetric flow. Orthotropic material. Conjugate Heat Transfer.

Generalized Integral Transform Technique.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Representação esquemática do problema.	30
Figura 2 -	θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	46
Figura 3 -	θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.1$	47
Figura 4 -	θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	47
Figura 5 -	θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$	48
Figura 6 -	Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$	50
Figura 7 -	Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$	50
Figura 8 -	Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.9$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$	51
Figura 9 -	Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.9$, $Bi = 1$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$	51
Figura 10 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=1$, $Bi = 10^6$ e $n_{\max} = 200$	54
Figura 11 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Biot, $\beta=1$, $Pe = 10^6$ e $n_{\max} = 200$	54
Figura 12 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	57
Figura 13 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi =$ 10 , $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	57
Figura 14 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi =$ 10 , $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	58
Figura 15 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	58
Figura 16 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi =$ 10 , $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	59
Figura 17 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	59
Figura 18 -	Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	61

Figura 19 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	61
Figura 20 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	62
Figura 21 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=1$, $Bi = 1$ e $n_{\max} = 200$	64
Figura 22 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=1$, $Bi = 10$ e $n_{\max} = 200$	64
Figura 23 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	65
Figura 24 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	65
Figura 25 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	66
Figura 26 - Linhas de isotemperatura de θ em função de ξ para $Pe=1$, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	68
Figura 27 - Linhas de isotemperatura de θ em função de ξ para $Pe=1$, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	68
Figura 28 - Linhas de isotemperatura de θ em função de ξ para $Pe=10$, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	69
Figura 29 - Linhas de isotemperatura de θ em função de ξ para $Pe = 10^6$, $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	69
Figura 30 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	77
Figura 31 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	77
Figura 32 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	78
Figura 33 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 5$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$	78
Figura 34 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$	79
Figura 35 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$	79
Figura 36 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	80
Figura 37 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	80

Figura 38 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.8$, $Bi = 10$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	81
Figura 39 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.8$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	81
Figura 40 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 1$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	82
Figura 41 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 1$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	82
Figura 42 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 100$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	83
Figura 43 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	83
Figura 44 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $Pe =$ 1000000 , $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	84
Figura 45 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 10$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	84
Figura 46 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 100$, $Pe =$ 10^6 , $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	85
Figura 47 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	85
Figura 48 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	86
Figura 49 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi =$ 10 , $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	86
Figura 50 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	87
Figura 51 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi =$ 10 , $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	87
Figura 52 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	88
Figura 53 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	88
Figura 54 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	89
Figura 55 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$	89
Figura 56 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$	90

Figura 57 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$	90
Figura 58 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$	91
Figura 59 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	91
Figura 60 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi =$ 10 , $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	92
Figura 61 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	92
Figura 62 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$	93
Figura 63 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 1$	93
Figura 64 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 10$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	94
Figura 65 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	94
Figura 66 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 10^6$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	95
Figura 67 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=1$, $\beta=0.8$, e números de Biot diferentes.	42
Tabela 2	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=10$, $\beta=0.8$, e números de Biot diferentes.	42
Tabela 3	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=1$, $\beta=0.9$, e números de Biot diferentes.	43
Tabela 4	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=10$, $\beta=0.9$, e números de Biot diferentes.	44
Tabela 5	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=10^3$, $\beta=1$ e $Bi=10^6$.	44
Tabela 6	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por FDM para $Pe=10^3$, $\beta=1$ e $Bi=10^6$.	45
Tabela 7	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por FDM para $Pe=10$, $\beta=0.9$ e $Bi=10$.	48
Tabela 8	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por FDM para $Pe=10$, $\beta=0.8$ e $Bi=10$.	48
Tabela 9	- Nusselt resolvido por GITT para $\beta=1$, $Bi=10^6$ e $n_{max}=200$. Comparação com (HENNECKE, 1968) [†] .	53
Tabela 10	- Nusselt resolvido por GITT para $\beta=1$, $Pe=10^6$ e $n_{max}=200$. Comparação com (ROHSENOW; HARTNETT; CHO, 1998) [†] .	53
Tabela 11	- Nusselt resolvido por GITT para $Bi=10^6$, $\xi=10$, $\tilde{k}=\tilde{k}_z=\tilde{k}_r$, números de Péclet diferentes e $n_{max}=200$. Comparação com (LIN; WANG; GUO, 2016) [†] .	55
Tabela 12	- θ resolvido por GITT para $Bi=1$, $Pe=1$, $\eta=\beta$, $n_{max}=200$ e resolvido por FDM com malha de 2000×200 .	55
Tabela 13	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=1$, $\beta=0.6$, e números de Biot diferentes.	96
Tabela 14	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=10$, $\beta=0.6$, e números de Biot diferentes.	96
Tabela 15	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=10^6$, $\beta=0.6$, e números de Biot diferentes.	97
Tabela 16	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=50$, $\beta=0.8$, e números de Biot diferentes.	97
Tabela 17	- Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=10^6$, $\beta=0.8$, e números de Biot diferentes.	98
Tabela 18	- Nusselt resolvido por GITT para $\beta=0.4$, $Bi=1$, $\tilde{k}_z=0.5$, $\tilde{k}_r=1.5$ e $n_{max}=200$.	98
Tabela 19	- Nusselt resolvido por GITT para $\beta=0.4$, $Bi=10$, $\tilde{k}_z=0.5$, $\tilde{k}_r=1.5$ e $n_{max}=200$.	99
Tabela 20	- Nusselt resolvido por GITT para $\beta=0.4$, $Bi=100$, $\tilde{k}_z=0.5$, $\tilde{k}_r=1.5$ e $n_{max}=200$.	99

Tabela 21 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	99
Tabela 22 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	100
Tabela 23 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	100
Tabela 24 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 100$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	100
Tabela 25 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	101
Tabela 26 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	101
Tabela 27 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	101
Tabela 28 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 100$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	102
Tabela 29 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	102
Tabela 30 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 1$, e $n_{\max} = 200$	102
Tabela 31 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 10$, e $n_{\max} = 200$	103
Tabela 32 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 100$, e $n_{\max} = 200$	103
Tabela 33 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	103
Tabela 34 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$	104
Tabela 35 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	104
Tabela 36 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$	104
Tabela 37 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	105
Tabela 38 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$	105
Tabela 39 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$	105
Tabela 40 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$	106
Tabela 41 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$	106

Tabela 42 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.	106
Tabela 43 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.	107
Tabela 44 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.	107
Tabela 45 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.	107
Tabela 46 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.	108
Tabela 47 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.	108

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CITT	Técnica da Transformada integral Clássica
GITT	Técnica da Transformada integral Generalizada
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial

LISTA DE SÍMBOLOS

$u(r)$	Perfil de velocidade parabólico totalmente desenvolvido
$w(r)$	Capacidade térmica $w = \rho c_p$
$k_r(r), k_z(r)$	Condutividades térmicas nas direções r e z respectivamente
T_{in}	Temperatura na entrada do canal
T_f	Temperatura do ambiente externo
h	Coefficiente de transferência de calor por convecção
R_i, R_e	Raio interno e raio externo respectivamente
D_i, D_e	Diâmetro interno e diâmetro externo respectivamente
k_f	Condutividade térmica do fluido
k_{sr}, k_{sz}	Condutividades térmicas do sólido nas direções r e z respectivamente
\bar{u}	Velocidade média do fluido
w_f	Capacidade térmica do fluido interno
w_s	Capacidade térmica do sólido
Bi	Número de Biot $Bi = hR_e/k_{sr}$
Pe	Número de Péclet $Pe = D_i \bar{u} k_f / w_f$
Nu	Número de Nusselt $Nu = hD/k_f$
$K_r(\eta), K_z(\eta)$	Versões adimensionais de $k_r(r)$ e $k_z(r)$ respectivamente
ξ	Versão adimensional de z
η	Versão adimensional de r
θ	Versão adimensional de T
$u^*(\eta)$	Versão adimensional de $u(r)$
$w^*(\eta)$	Versão adimensional de $w(r)$
β	Razão de aspecto $\beta = D_i/D_e$
Ψ_n	Autofunções para a solução por GITT
λ_n	Autovalores para a solução por GITT
$\bar{\theta}_n(\xi)$	Temperaturas transformadas
N_n	Norma
n	Índice do somatório para a solução por GITT
n_{max}	Número máximo de termos somados (ordem de truncamento da série) para solução por GITT
$A_{n,m}$	Coefficientes da matriz A
$B_{n,m}$	Coefficientes da matriz B
$C_{n,m}$	Coefficientes da matriz C
A, B, C	Representações matriciais dos coeficientes $A_{n,m}, B_{n,m}, C_{n,m}$
\mathbf{y}	Vetor \mathbf{y}
\mathbf{O}	Matriz nula

I	Matriz identidade
E	Matriz E
D	Matriz D
M	Matriz em bloco M
$G_{n,m}$	Coefficientes da matriz G
ω_m	Autovalores de M
c_m	Constantes arbitrárias

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	19
1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	29
1.1	Equação da energia	29
1.2	Adimensionalização	32
1.3	Técnica da transformada integral generalizada (GITT)	34
1.4	Método das Diferenças Finitas (FDM)	39
2	RESULTADOS	41
2.1	Análise de convergência	41
2.2	Validação dos resultados com a literatura	52
2.3	Número de Nusselt	56
2.4	Distribuição de temperatura	63
	CONCLUSÃO	70
	REFERÊNCIAS	72
	ANEXO A – Outros resultados	76

INTRODUÇÃO

Motivação

Nos dias de hoje, é cada vez mais fácil e mais frequente modelar e simular problemas complexos computacionalmente. Além da rapidez, tudo é feito praticamente de maneira sofisticada e com um alto nível de precisão numérica. E isso traz mais confiança, e ao mesmo tempo menos tempo é usado para atingir os objetivos. A simulação computacional sempre vai ter importância na engenharia pois representa viabilidade econômica. Fazendo um projeto experimental, pessoas investem muito dinheiro na aquisição de equipamentos. Por outro lado, uma análise computacional pode ser realmente significativa quando a economia é o principal ponto a ser levado em consideração em qualquer projeto de engenharia.

O estudo da transferência de calor em diversos materiais é realmente importante para a engenharia, uma vez que as indústrias procuram alternativas financeiras e segurança ao mesmo tempo. A gama de aplicação vai desde a indústria de petróleo e gás até empresas que utilizam energia térmica em máquinas, trocadores de calor, sistemas de ar condicionado, geradores de vapor, dutos cujo objetivo é o transporte de fluidos viscosos, além de outras aplicações. Conhecer o perfil de temperatura em um duto de óleo, facilita o engenheiro a selecionar o material apropriado para essa aplicação, quanto tempo vai continuar sendo a melhor alternativa, aliando segurança e qualidade com economia na compra de materiais e manutenção. A última tarefa será selecionar o material que vai ter o melhor desempenho térmico, otimizando o processo.

Ao longo da história, o foco tem sido sempre técnicas analíticas. Os computadores de alto desempenho foram feitos recentemente, e isso permitiu o desenvolvimento de métodos numéricos também. No estudo da transferência de calor, os principais métodos de resolução são a técnica da transformada integral generalizada (GITT) e o método de diferenças finitas (FDM). Ambos os métodos podem ser aplicados em problemas conjugados de engenharia que envolvem condução e convecção.

Dada a ferramenta computacional disponível, normalmente a GITT produz um melhor código computacional para esse tipo de problema, porque ela salva informações importantes do problema físico. Além disso, possui maior facilidade de implementação com os recursos disponíveis (COTTA, 1998). A grande vantagem é que o método é capaz de gerar um problema mais simples, transformando analiticamente um sistema de equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias, e isso reduz a dependência de variáveis independentes a uma única variável. Normalmente, o esforço computacional é reduzido significativamente.

Definições

A solução da equação diferencial que determina a distribuição da temperatura em um corpo pode ser encontrada através de métodos analíticos e numéricos.

Soluções analíticas aproximadas ou exatas são bastante úteis no dia-a-dia da engenharia. Essas soluções proporcionam uma melhor visão do significado físico de vários parâmetros que envolvem problemas térmicos. Se soluções analíticas exatas são difíceis ou impossíveis de se obter, recorre-se a soluções analíticas aproximadas como alternativa poderosa para resolver estes problemas.

O desenvolvimento da computação ao longo de décadas também melhorou o uso e aplicação de métodos numéricos em várias áreas da engenharia e ciências aplicadas. Problemas complexos podem ser resolvidos com um baixo custo e uma agilidade maior se comparado com anos atrás. Pode-se citar 4 métodos que surgiram ao longo do tempo e se desenvolveram de acordo com o avanço da computação: A técnica da transformada integral clássica (CITT), a técnica da transformada integral generalizada (GITT), o método das diferenças finitas, e o método dos elementos finitos. Cada método tem suas vantagens comparativas, dependendo da natureza física do problema.

No geral, os problemas que envolvem equações diferenciais mais difíceis precisam de uma variedade de ferramentas para a sua resolução. Soluções analíticas podem ser desenvolvidas para a resolução do problema.

Transformada Integral

Koshlyakov em 1936 introduziu ideias que conduziram a criação da técnica da transformada integral de acordo com Cotta (1998). Em 1948, Grimmberg (1948) avançou com a teoria com a aplicação em problemas magnéticos e elétricos. Anos mais tarde, alguns autores conhecidos como Ozisik (1968) e Tranter (1962) vieram e adotaram a ideia.

A solução de uma equação diferencial parcial pode ser encontrada pelo método de separação das variáveis. Esse é o método mais antigo para a resolução de equações diferenciais parciais, sendo usado no século XVI por D'Alembert, Daniel Bernolli e Euler em problemas de ondas, vibrações e condução de calor (TRANTER, 1962). A principal característica do método de separação das variáveis é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que são submetidas a condições iniciais, e condições de contorno específicas (OZISIK, 1968).

A solução de equações diferenciais parciais de condução de calor pelo modo clássico da separação de variáveis nem sempre é trivial quando a equação e suas condições de contorno apresentam não homogeneidades. A técnica da transformada integral apresenta

uma aproximação eficiente para a solução de problemas homogêneos, e para os problemas permanentes e transitórios não homogêneos também. Pode-se citar a técnica da transformada integral clássica, que é uma extensão do método de separação das variáveis, e a técnica da transformada integral generalizada. O primeiro consiste no estabelecimento de um par Transformação-Inversa para cada potencial em função de uma base ortogonal de autofunções. Através de um problema de autovalor auxiliar escolhido adequadamente, é possível obter estas autofunções. A segunda consiste em escolher um problema de autovalor auxiliar, e depois um par transformação é desenvolvido, e a equação diferencial parcial inicial se transforma em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias usando operadores, truncamento, e por fim a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias. Através da formulação da inversa é possível obter os potenciais iniciais.

De acordo com Ozisik e Murray (1974), em 1974, a Rússia e outros países do Leste da Europa proporcionaram um grande avanço no desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos, como a Transformada Integral. Enquanto isso os Estados Unidos e o resto da Europa concentravam-se no desenvolvimento de métodos numéricos (diferenças finitas e elementos finitos).

A partir dos trabalhos de Ozisik e Murray (1974) e Mikhailov (1975), a técnica da transformada integral adquiriu uma estrutura semi-analítica que generalizou a aplicação do método. E justamente em 1975, um estudo contribuiu significativamente para a evolução da teoria da transformada integral. O trabalho foi publicado por Mikhailov (1975): sua pesquisa resolveu problemas de difusão com coeficientes dependentes do tempo, gerando termos que não eram transformáveis pela CITT. Usando um problema de autovalor auxiliar dependendo do tempo, Mikhailov obteve um sistema infinito de equações diferenciais com coeficientes variáveis para o potencial de transformação. Isto criou condições para o desenvolvimento do método que hoje em dia é mais conhecido como GITT.

De acordo com Cotta (1993), as características da abordagem da CITT se comparadas às metodologias numéricas, geram uma série de vantagens. Entre elas, pode-se citar: versatilidade do método para se associar com outros (devido às suas características analítico-numéricas), metodologia sistemática de solução, redução do tempo de processamento, aceleração da taxa de convergência numérica, não há malhas, determinação numérica direta de uma função em um ponto (para valores definidos de tempo e espaço), sem necessidade de cálculo numérico dos estados temporais anteriores ou de outros pontos do domínio espacial, e há o controle prescrito de erro.

Revisão de Literatura

É possível selecionar um conjunto de trabalhos publicados na literatura que utilizaram métodos numéricos e analíticos para resolver problemas de transferência de calor.

Hwang e Fan (1964) estudaram a convecção forçada laminar na região de entrada de um duto retangular. Os perfis de temperatura e de velocidade foram modelados como desenvolvidos. As equações básicas de tempo, continuidade, e energia, foram representadas como diferenças finitas e resolvidas numericamente usando um computador de alta velocidade para uma rede de malha sobreposta ao campo de fluxo. As propriedades do fluido foram consideradas constantes. Os casos de parede com temperatura uniforme constante e fluxo de calor uniforme constante para o fluido são considerados. Finalmente, a solução exata da equação da energia obtida pelo método numérico é comparada com os resultados das soluções aproximadas.

Schmidt e Leppert (1965) desenvolveram um esquema de diferenças finitas implícito para resolver o problema de fluxo de gás laminar em dutos circulares aquecidos ou arrefecidos. A solução baseou-se nas equações da camada limite, e a validação para este problema foi encontrada a partir das soluções numéricas. Exemplos numéricos foram trabalhados no ar, incluindo convecção forçada pura com diferentes taxas de aquecimento uniforme, convecção forçada pura com temperatura da parede uniforme com aquecimento, bem como o gás de arrefecimento, e convecção forçada com fluxo de calor uniforme. Para a convecção pura, expressões aproximadas para o número de Nusselt local e para o fator de atrito foram dadas.

Torrance (1968) em seu artigo comparou 5 métodos numéricos para um problema bidimensional envolvendo convecção natural. Foram considerados procedimentos implícitos e explícitos. Requisitos para a estabilidade numérica foram o resultado da análise e da experiência, e quando satisfeitos, os fluxos calculados para todos os métodos foram semelhantes. A precisão e conservação dos métodos também foram examinados (energia e vorticidade). Um método se apresentou como conservador e estável sem uma limitação ao crescimento da malha de espaço, e que pode ser aplicado com sucesso para fluidos não-lineares, mas o autor alertou que deve se tomar cuidado devido a erros de truncamento que introduzem mecanismos de transporte falsos.

Notter e Sleicher (1972) usaram a equação descrevendo o problema de Graetz turbulento e resolveram numericamente para autovalores mais baixos, variando os valores do número de Reynolds e Prandtl. O problema era hidrodinamicamente desenvolvido, e os resultados numéricos apresentaram semelhança com os resultados experimentais.

Michelsen e Villadsen (1974) utilizaram um método de solução para equações diferenciais parciais, que é desenvolvido usando o problema de Graetz com difusão axial. O método matricial é utilizado através da diagonalização de matrizes. A precisão é discutida em termos dos autovalores, e a solução foi obtida em termos do número de Péclet e

Nusselt.

Papoutsakis, Ramkrishna e Lim (1980) produziram uma solução inteiramente analítica, cujo objetivo específico foi analisar o problema de Graetz para o caso da parede com condição de contorno de Dirichlet. A difusão axial foi também considerada.

Guedes, Cotta e Brum (1990) encontraram uma solução analítica para a convecção forçada em regime laminar no interior de tubos, incluindo efeitos da condução da parede na direção axial, com base em um modelo de temperatura da parede, e ainda considerando convecção externa. Os efeitos da convecção externa e condução axial ao longo da parede são então investigados através de uma análise dos valores típicos para o número de Biot e um parâmetro de conjugação de parede e fluido. Características da convergência da abordagem foram também analisadas e estudadas.

Barron et al. (1996) apresentou uma técnica que foi desenvolvida para avaliação dos autovalores, para o problema de graetz estendido. O método foi desenvolvido em um problema de convecção forçada, em um duto circular com escoamento laminar. Relações entre o número de Knudsen e os autovalores foram obtidas, e os resultados foram obtidos com um alto grau de precisão.

da Silva e Cotta (1996) estudaram as equações de camada limite em regime permanente e laminar para convecção forçada, adotando um fluido incompressível na entrada da região de um canal de placas paralelas. Essas equações foram resolvidas através do método da transformada Integral, adotando a formulação de função de corrente, o qual foi preferida sobre as variáveis de formulação habitualmente utilizadas. Esta abordagem híbrida e analítico-numérica permitiu o controle de erro global automático na solução final, e foi muito útil na validação dos esquemas numéricos. A análise da convergência foi realizada fornecendo resultados de benchmark para os campos de temperatura e números de Nusselt para diferentes valores do número de Prandtl.

Pereira, Guerrero e Cotta (1998) estudaram a técnica da transformada integral generalizada (GITT) para as equações de Navier-Stokes, considerando um problema bi-dimensional em geometrias cilíndricas. Soluções analítico-numéricas foram obtidas com um elevado grau de precisão. A abordagem foi ilustrada por um fluxo laminar dentro de um canal anular e são obtidos excelentes resultados numéricos para demonstrar a convergência do método. São fornecidas comparações críticas para a formulação da camada limite, e um conjunto de resultados de benchmark é produzido por diferentes valores do número de Reynolds.

Gyves e Irvine Jr (1999) estudaram o fluxo laminar desenvolvido e a convecção forçada em um problema conjugado de canais retangulares. O número de Nusselt médio da parede foi apresentado como uma função da condução e a análise numérica foi importante para o desenvolvimento deste estudo.

Da Silva, Guerrero e Cotta (1999) usaram a CITT para resolver as equações de camada limite para um fluido incompressível em um canal, adotando a formulação da

função de corrente ao invés de variáveis primitivas. Esta abordagem analítico-numérica forneceu resultados de benchmark precisos e reconhecidos na validação dos esquemas numéricos. A formulação da função de corrente foi ilustrada por resultados numéricos para a convergência no caso de um plano.

Morini (2000) utilizou a técnica da transformada integral no seu artigo, e obteve uma solução precisa para o campo de temperatura, e números de Nusselt na região termicamente desenvolvida de dutos retangulares, em que um perfil de velocidade laminar está totalmente desenvolvido. Os resultados analíticos apresentados foram uma ferramenta poderosa, o que permitiu a investigação da convecção interna forçada em fluidos incompressíveis.

Castellões e Cotta (2006) analisaram a convecção laminar interna incompressível em desenvolvimento térmico em problemas de microcanais. Foram consideradas variações de entrada na temperatura e campo de velocidade. A formulação considerou efeitos de rarefação existentes no regime de escorregamento na parede. São considerados os efeitos de condução axial e dissipação viscosa. Por fim, a solução é obtida usando transformação integral parcial e o sistema resultante é resolvido numericamente pelo método das linhas.

Jeong e Jeong (2006) investigaram o problema de Graetz estendido através de um microcanal, pela expansão da autofunção para resolver a equação da energia. As condições foram o fluxo de calor uniforme e a temperatura da parede uniforme, onde um fluido hidrodinamicamente desenvolvido entra pelo microcanal sob essas condições. Foi mostrada a distribuição do número de Nusselt local pela variação dos parâmetros adimensionais. O número de Nusselt foi obtido em termos desses parâmetros.

Naveira et al. (2007) apresentou um estudo sobre solução analítico-numérica para convecção forçada transiente, onde o fluxo laminar varia com o tempo. Este era um problema conjugado envolvendo condução e convecção. A solução foi proposta a partir das distribuições de velocidade disponíveis com base na GITT combinada com o método de linhas implementado pelo Wolfram Mathematica. Os valores de temperatura foram determinados em qualquer ponto desejado no interior do fluido. Alguns casos de teste com diferentes materiais e espessuras de parede foram definidos para admitir uma interpretação física do efeito do envolvimento da parede em contraste com o modelo simplificado sem conjugação.

Nunes (2008) em sua tese de doutorado estudou um problema de transferência de calor conjugado em microescala para o caso de um fluxo laminar. A técnica da transformada integral generalizada foi usada para obter um sistema transformado de equações diferenciais ordinárias que foi resolvido programa Wolfram Mathematica. Determinou-se os campos de temperaturas nas regiões líquidas e sólidas de um microcanal retangular, formadas por placas planas e paralelas.

Naveira et al. (2009) conduziu um estudo com GITT que foi aplicado na solução analítico-numérica híbrida da convecção forçada em placas planas em regime laminar

transiente, sujeitas a variações temporárias no fluxo de calor na parede. A partir das distribuições de velocidade disponíveis e empregando uma transformação de coordenadas para apenas a região afetada termicamente ao longo da direção principal do fluxo, a distribuição de temperatura transiente é expandida em termos de funções específicas, obtidas a partir do operador de difusão na direção transversal. O sistema acoplado resultante de equações diferenciais parciais foi resolvido numericamente em termos da variável de tempo adimensional e da coordenada longitudinal, através da utilização do método de linhas realizados no software Wolfram Mathematica pela sub-rotina NDSolve. Soluções numéricas para a temperatura da parede foram então obtidas, assim como valores de temperatura para qualquer ponto na região do fluido. Foram simulados casos com diferentes materiais e diferentes espessuras de parede para permitir uma interpretação física do problema.

Li et al. (2009) fez um artigo sobre placas retangulares ortotrópicas. Soluções exatas dessas placas sujeitas a cargas arbitrárias são derivadas pela técnica da transformada integral. No método proposto, não é necessário pré-determinar a função de deformação, porque são usadas apenas as equações governantes básicas da teoria clássica de placas ortotrópicas. Portanto, ao contrário dos métodos semi-inversos convencionais, o estudo serviu como um modelo completamente racional e preciso na análise de placas. A aplicabilidade do método é grande, e pode lidar com placas com diferentes cargas em um processo uniforme, o que é mais simples do que os métodos anteriores. Os resultados numéricos foram apresentados para demonstrar a validade e a precisão da abordagem, em comparação com aqueles previamente relatados na bibliografia do artigo.

Silva, Quaresma e Santos (2010) analisaram um problema bidimensional com escoamento laminar na região de entrada da parede ondulada do duto, obtido a partir da solução das equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível (sem variação da densidade). A metodologia utilizada foi técnica da GITT na solução das equações de equilíbrio de Navier Stokes. A formulação de corrente foi adotada, e uma solução geral de filtragem que se adapta ao contorno irregular foi proposta para aumentar a taxa de convergência da autofunção. Casos representativos são considerados, a fim de relatar alguns resultados numéricos que ilustram a convergência da autofunção. O número de Reynolds é também calculado e comparado com os resultados de métodos discretos disponíveis na literatura, para diferentes números de Reynolds e amplitudes do canal ondulado. Em geral, o método proposto permitiu analisar diferentes perfis de canais, embora os resultados reportados são limitados à configuração do canal corrugado. O que não foi feito neste artigo foi a análise para geometrias representadas em coordenadas cilíndricas com raio variável. Os resultados convergentes de controle de erro, forneceram resultados de benchmark confiáveis para a validação dos resultados numéricos de códigos computacionais, que abordaram a solução das equações de Navier-Stokes em geometrias irregulares. A pesquisa foi de grande valor, porque embora a metodologia híbrida seja bem conhecida, os resultados foram importantes, também para a aplicação da técnica da transformada

integral na solução das equações de Navier Stokes.

Chalhub (2011) avaliou e comparou o desenvolvimento de esquemas para soluções da técnica da transformada integral e do método de volumes finitos discreto. O autor desenvolveu uma formulação mista utilizando combinações da GITT e métodos discretos tradicionais, tais como o método das diferenças finitas e o próprio método dos volumes finitos. O objetivo era gerar sistemas de soluções, para que fosse possível unir as vantagens dos diferentes métodos, formando um método misto otimizado para resolver problemas que envolvem advecção e difusão de uma forma mais eficiente.

Knupp, Naveira-Cotta e Cotta (2012) apresentaram um trabalho de uma abordagem analítica para problemas de transferência de calor conjugados, propondo uma formulação de domínio único para modelar tanto a corrente de fluido quanto as regiões da parede do canal. A técnica da transformada integral generalizada (GITT) foi empregada na solução analítico-numérica híbrida. Um problema de teste foi escolhido e ofereceu uma solução exata para fins de validação, baseada no problema de Graetz estendido, incluindo condução transversal através das paredes do canal. A excelente concordância entre soluções aproximadas e exatas têm demonstrado o sucesso da abordagem para lidar com problemas conjugados.

Knupp, Naveira-Cotta e Cotta (2013) estudaram uma extensão de uma formulação proposta de domínio único de problemas de transferência de calor conjugados, levando em conta os efeitos da difusão axial nas paredes e regiões do fluido. A formulação de domínio único modela os fenômenos de transferência de calor, tanto na corrente de fluido como nas paredes do canal, fazendo uso de coeficientes representados como funções de espaço variáveis. A técnica da transformada integral generalizada (GITT) foi empregada na solução numérico-analítica do problema de convecção-difusão resultante. Os resultados convergidos confirmaram a adequação desta abordagem de domínio único no manuseio de problemas de transferência de calor conjugados em microcanais, quando os efeitos de difusão axial estão envolvidos.

Chalhub, Sphaier e Alves (2013) apresentaram uma nova metodologia para a solução de problemas de transferência de calor por convecção através da técnica da transformada integral generalizada. O esquema proposto é baseado em escrever o potencial desconhecido em termos de expansões da autofunção. Em vez de transformar termos de advecção, uma aproximação foi utilizada anteriormente para a transformação integral. A aplicação foi demonstrada para um problema geral multidimensional, e resultados numéricos para um caso de teste unidimensional foram calculados.

Rodiet et al. (2014) desenvolveram um novo método para a caracterização térmica de materiais anisotrópicos. O trabalho foi feito através do uso de medições de temperatura por câmera infravermelha nas bordas da amostra e inserí-las como condições de contorno. Utilizando o princípio da superposição e transformadas integrais, é então possível através de um método iterativo, obter as propriedades do material nas suas diferentes direções de

anisotropia, por um método de mínimos quadrados aplicado a toda a faixa de temperatura. Este método foi validado através de uma simulação antes de ser aplicado a medições experimentais. Este método também é muito interessante porque pode ser estendido para medir a difusividade térmica numa área menor do que as dimensões das amostras para materiais de alta e baixa condutividade.

Braga Jr, Barros e Sphaier (2014) proporam uma metodologia para a obtenção de soluções totalmente analíticas para o problema estendido de Graetz-Brinkman incluindo os efeitos da condução axial em domínios infinitos e semi-infinitos. A metodologia baseada na técnica da transformada integral generalizada, consiste em expansões da autofunção em termos de bases ortogonais. A fim de manter o cálculo dos coeficientes da integral e a solução dos autoproblemas envolvidos, os autores utilizaram uma base de autofunção simples em termos do problema de Helmholtz.

Knupp et al. (2015) investigaram o comportamento transiente da transferência de calor conjugada com fluxo laminar de um microcanal retangular simulado por placas paralelas, tendo em conta os efeitos da difusão axial, que são muitas vezes relevantes nos microcanais. A metodologia da solução foi baseada na Técnica de Transformação Integral Generalizada (GITT), aplicada a uma formulação de domínio único. Os resultados apresentaram a comparação da GITT com balanço integral e a técnica sem balanço integral, assim como os relativos erros em relação à solução exata. A distribuição da temperatura foi obtida para diferentes posições axiais.

Cotta, Naveira-Cotta e Knupp (2016) utilizaram a técnica da transformada integral generalizada em combinação com a técnica do balanço integral para a melhora da taxa de convergência, e para resolução de um problema conjugado de transferência de calor em domínio único, envolvendo placas paralelas. A GITT foi empregada na solução do problema de autovalor diferencial adotando problemas auxiliares mais simples para a representação da autofunção. A comparação dos resultados foi feita entre a técnica com balanço integral e a abordagem convencional sem balanço integral para demonstrar a melhora na convergência do método na primeira ocasião em relação à técnica sem balanço integral.

Chalhub, Sphaier e Alves (2016) apresentaram uma solução analítica para uma versão estendida do problema de Graetz em canais de placas paralelas. A formulação do problema incluiu difusão de calor axial em um canal semi-infinito com uma determinada condição de entrada e paredes isotérmicas. A técnica da transformada integral generalizada foi a metodologia de solução, em que o perfil de temperatura procurado é escrito em termos de uma base de autofunção ortogonal, decorrente do tipo de problema de Sturm-Liouville. A análise de convergência dos resultados foi feita, e mostrou que melhores taxas de convergência são obtidas para valores maiores dos números de Péclet e Knudsen, mesmo na região de entrada.

Lin, Wang e Guo (2016) avaliaram a condução axial térmica da parede para a trans-

ferência de calor em um tubo circular com duas condições de contorno clássicas na parede externa. Considerou-se uma grande variedade de números de Peclet, de 7 a 14000. Foram considerados parâmetros de avaliação para quantificar a influência da condução axial na parede do duto. As equações governantes foram resolvidas por CFD (FLUENT). Diversos números de Nusselt foram também obtidos para a região termicamente desenvolvida.

Objetivos

Um dos objetivos do estudo é analisar uma metodologia de solução para escoamentos em desenvolvimento térmico, considerando-se a transferência de calor conjugada e difusão axial em um domínio único, em que há um fluido interno com um perfil de velocidades laminar, totalmente desenvolvido. A eficiência e precisão da metodologia da GITT é analisada pela análise de convergência do Nusselt. O trabalho também objetiva determinar a distribuição do número de Nusselt local para diversos casos e também a distribuição da temperatura adimensional no duto. A análise da influência do valor de Pécelt nesse tipo de problema também é um dos objetivos do trabalho, ou seja, avaliar o efeito da difusão axial pela variação de Pécelt nesse tipo de problema.

Organização do trabalho

Na seção 1.4, uma revisão bibliográfica é feita, a fim de listar e comparar trabalhos anteriores feitos no passado, que serviram de orientação e motivação para o presente estudo. A formulação do problema é apresentada no capítulo 2, que será o alvo da aplicação de diferentes abordagens da técnica da transformada integral generalizada e do método das diferenças finitas. A partir da equação de energia em sua forma geral, uma formulação final é apresentada após a aplicação de todas as hipóteses simplificadas, juntamente com as condições de contorno. A primeira abordagem é da técnica da transformada integral generalizada, por meio da solução da equação de Bessel. Um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias é gerado, e por meio da aplicação de um método matricial, uma solução analítica pode ser encontrada. No capítulo 3, os resultados são apresentados em tabelas, variando parâmetros como os números de Pécelt e Biot. A taxa de convergência do número de Nusselt é analisada em todas essas tabelas, bem como a distribuição do Nusselt em posições axiais diferentes. Gráficos ilustrativos do problema também são apresentados. Para a validação dos resultados, é feita a comparação com literaturas já existentes. No último capítulo, é possível obter conclusões e fazer considerações para o caso específico estudado.

1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

1.1 Equação da energia

É preciso resolver a equação da energia, a fim de resolver o problema de transferência de calor conjugado. A equação da energia em sua forma completa desprezando troca de calor por radiação, e sem mudança de fase do fluido interno, é dada por:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) + \mu \phi_t + \beta_t T \frac{Dp}{Dt} + \dot{g}''' \quad (1)$$

Onde ρ é a massa específica do fluido, c_p é o calor específico à pressão constante, T é a temperatura do fluido, t é o tempo, \mathbf{k} é o tensor condutividade térmica, μ é a viscosidade dinâmica, ϕ_t é a porção referente ao aquecimento por dissipação viscosa, β_t é o coeficiente de expansão térmica, p é a pressão, e \dot{g}''' é a geração interna de energia.

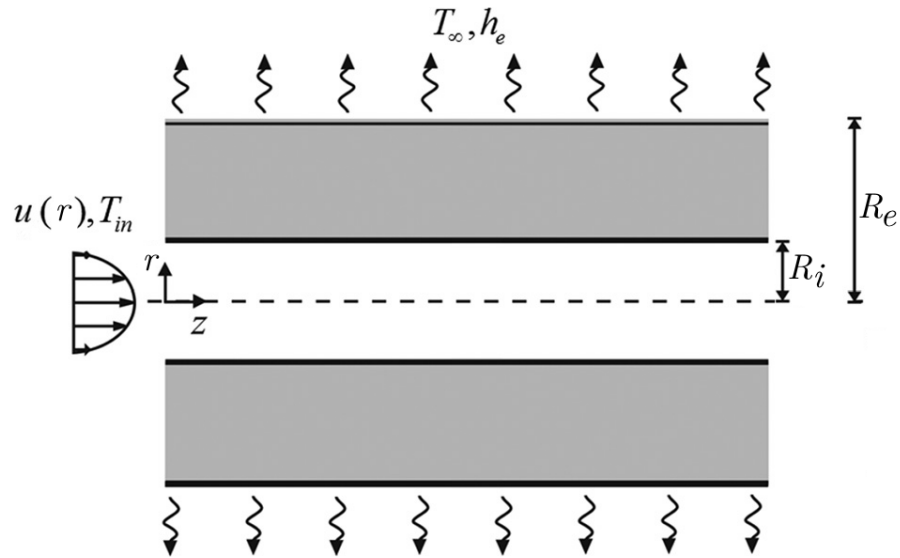
A equação completa do problema para coordenadas cilíndricas tem a seguinte forma:

$$w(r) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z(r) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k_\phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \mu \phi_t + \beta_t T \frac{Dp}{Dt} + \dot{g}''' \quad (2)$$

Considerando constantes todas as propriedades físicas do fluido e adotando as seguintes hipóteses, de acordo com Guedes, Cotta e Brum (1990) e Bejan (2013):

- Regime permanente ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$);
- Considera-se que os materiais líquidos e sólidos são incompressíveis ($\beta_t = 0$);
- Não há geração de energia interna e aquecimento por dissipação viscosa durante o processo ($\dot{g}''' = 0$ e $\phi_t = 0$);
- O fluido e o sólido envolvido têm propriedades termofísicas constantes;
- O problema é bidimensional em coordenadas cilíndricas, e o escoamento é hidrodinamicamente desenvolvido, portanto a componente transversal da velocidade v é nula ($v=0$), porém em desenvolvimento térmico;
- Ausência de efeitos angulares, ou seja, o escoamento é axissimétrico, em que propriedades físicas não variam em posições angulares, devido à sua simetria axial ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$). Há um raio interno e externo (R_i e R_e respectivamente), e a condutividade térmica varia nas direções r and z , afinal o material é ortotrópico.

Figura 1 - Representação esquemática do problema.



Fonte: (KNUPP; NAVEIRA-COTTA; COTTA, 2013)

A representação esquemática do problema é dada pela figura (1). Uma formulação de domínio único é desenvolvida. O problema geral em discussão é sobre convecção forçada interna em regime permanente. Se trata do problema estendido de Graetz, considerando transferência de calor conjugada e incluindo os efeitos da difusão axial. O fluido escoou com um perfil de velocidade laminar totalmente desenvolvido conhecido (Hagen–Poiseuille). Como dito anteriormente, a parede sólida do tubo ($R_i \leq r \leq R_e$) tem condutividade térmica ortotrópica. A temperatura de entrada é prescrita e há um fluido escoando na parede externa do duto, resultando uma condição de contorno de Robin (terceiro tipo) em $r = R_e$. A técnica da transformada integral generalizada é usada para determinar a solução numérico-analítica do problema geral.

A equação (2) pode ser simplificada levando em conta as hipóteses do problema, e é dada por:

$$u w(r) \frac{\partial T}{\partial z} = \left(k_z(r) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad (3)$$

Onde u e v são as componentes axial e transversal do vetor velocidade, respectivamente. É importante ressaltar que apesar da condutividade ser constante no fluido e na parede sólida, para esta formulação deve-se considerar o salto da propriedade na interface fluido-sólido já que será considerado domínio único.

Logo, a formulação geral do problema conjugado bidimensional em coordenadas

cilíndricas de um duto ortotrópico com escoamento axissimétrico é expressa como:

$$u(r) w(r) \frac{\partial T}{\partial z} = k_z(r) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r(r) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \text{para } 0 \leq z \leq \infty \text{ e } 0 \leq r \leq R_e \quad (4)$$

Onde $w(r) = \rho c_p$ é a capacidade térmica, $k_r(r)$ e $k_z(r)$ são as condutividades térmicas nas direções r e z respectivamente, $u(r)$ é o perfil de velocidade parabólico do escoamento totalmente desenvolvido, representado por um fluido que escoar entre $0 \leq r \leq R_i$. O perfil de velocidade do escoamento laminar e hidrodinamicamente desenvolvido, escrito em termos da velocidade média, é dado pela solução de Hagen-Poiseuille:

$$u(r) = 2\bar{u} \left[1 - \left(\frac{2r}{D_i} \right)^2 \right] \quad (5)$$

Onde \bar{u} é a velocidade média na seção longitudinal, e D_i é o diâmetro interno do duto.

Para o problema presente existem 4 condições de contorno, 2 delas em cada direção (r e z). A condição de entrada ou temperatura de entrada no duto é dada por:

$$T = T_{\text{in}} \quad \text{para } z = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R_e \quad (6)$$

Há simetria no centro do canal, portanto:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad \text{e} \quad z \geq 0 \quad (7)$$

Há também um fluxo de calor devido a convecção externa:

$$-k_r(r) \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_f) \quad \text{para } r = R_e \quad \text{e} \quad z \geq 0 \quad (8)$$

Finalmente, a saída do duto pode ser considerada isolada (quando o fluido está em desenvolvimento térmico, e sua temperatura é finita) para z tendendo ao infinito:

$$T < \infty \quad \text{para } z \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq r \leq R_e \quad (9)$$

Onde T_f é a temperatura ambiente externa, T_{in} é a temperatura na entrada do canal, e h é o coeficiente de transferência de calor por convecção.

1.2 Adimensionalização

Os seguintes grupos adimensionais são definidos:

$$K_r(\eta) = \frac{k_r(r)}{k_f}; \quad K_z(\eta) = \frac{k_z(r)}{k_f}; \quad \tilde{k}_r = \frac{k_{sr}}{k_f}; \quad \tilde{k}_z = \frac{k_{sz}}{k_f}; \quad (10)$$

$$\xi = \frac{z k_f}{4R_i^2 \bar{u} w_f}; \quad \eta = \frac{r}{R_e}; \quad \beta = \frac{R_i}{R_e} = \frac{D_i}{D_e}; \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_{in} - T_f}; \quad u^*(\eta) = \frac{u(r)}{\bar{u}}; \quad (11)$$

$$Pe = \frac{D_i \bar{u} k_f}{w_f}; \quad Bi = \frac{h R_e}{k_{sr}} \quad w^*(\eta) = \frac{w(r)}{w_f}; \quad \tilde{w} = \frac{w_s}{w_f} \quad (12)$$

$$(13)$$

$$u^*(\eta) = \begin{cases} 2(1 - \frac{\eta^2}{\beta^2}) & \text{se } \eta \leq \beta \\ 0 & \text{se } \eta > \beta \end{cases} \quad (14)$$

$$K_r(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta \leq \beta \\ \tilde{k}_r & \text{se } \eta > \beta \end{cases} \quad (15)$$

$$K_z(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta \leq \beta \\ \tilde{k}_z & \text{se } \eta > \beta \end{cases} \quad (16)$$

$$w^*(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta \leq \beta \\ \tilde{w} & \text{se } \eta > \beta \end{cases} \quad (17)$$

Onde k_f é a condutividade térmica do fluido, w_f é a capacidade térmica do fluido interno, k_{sr} é a condutividade térmica do sólido na direção r , k_{sz} é a condutividade térmica do sólido na direção z , w_s é a capacidade térmica do sólido, \bar{u} é a velocidade média do fluido ($0 \leq r \leq R_i$), R_i é o raio interno, R_e é o raio externo, Bi é o número de Biot, Pe é o número de Péclet, $K_r(\eta)$, $K_z(\eta)$, θ , ξ , η , $u^*(\eta)$ e $w^*(\eta)$ são as versões adimensionais de $k_r(r)$, $k_z(r)$, T , z , r , $u(r)$ e $w(r)$ respectivamente, e β é a razão de aspecto. As seguintes relações podem ser escritas:

$$D_i = 2R_i; \quad D_e = 2R_e; \quad Pe = Re Pr; \quad \alpha = \frac{k_f}{w_f}; \quad Pe = \frac{D_i \bar{u}}{\alpha}; \quad Re = \frac{D_i \bar{u}}{\nu}; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (18)$$

onde D_i e D_e são os diâmetros interno e externo respectivamente.

Após substituir os parâmetros estabelecidos na equação e fazendo algumas manipulações matemáticas, a equação (4) pode ser escrita na seguinte forma adimensional:

$$u^*(\eta) w^*(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{4\beta^2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_r(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{K_z(\eta)}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (19)$$

Percebe-se pela equação (19) que o termo de difusão axial contém Pe^2 dividindo, o que confirma que para valores muito altos de Pe a difusão axial pode ser desconside-

rada. Quando Péclet aumenta e os outros parâmetros do problema permanecem iguais, as condutividades térmicas da parede e do fluido diminuem juntos. Não existe advecção na parede, e se Péclet é muito alto, também não teria difusão ainda que a parede tenha uma condutividade térmica alta.

Para valores muito pequenos de Péclet a formulação não vale pois a difusão seria muito grande comparado com a advecção, e não se pode definir uma condição de entrada. Logo os resultados de Péclet muito pequenos não valem utilizando essa formulação com condição de entrada a partir do zero.

Como $u^*(\eta) = 0$ na parede, $w^*(\eta) = 1$. Logo, a equação adimensional que rege o problema proposto é dada por:

$$u^*(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{4\beta^2}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_r(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{K_z(\eta)}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad \text{para } 0 \leq \xi \leq \infty \quad \text{e } 0 \leq \eta \leq 1 \quad (20)$$

Com condições de contorno próprias para o problema:

$$\theta(0, \eta) = 1; \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = -\text{Bi} \theta(\xi, 1); \quad (23)$$

$$\theta(\xi \rightarrow \infty, \eta) < \infty \quad (24)$$

Reforçando que o número de Nusselt é uma grandeza realmente importante no estudo da convecção forçada, pois ele representa o coeficiente de transferência de calor por convecção na sua forma adimensional. Além disso, o número de Nusselt é o parâmetro usado para a análise da taxa de convergência nas abordagens de soluções do problema. Calculando o coeficiente de transferência de calor por convecção:

$$q = h (T_{z,i} - T_m) \quad (25)$$

Onde $T_{z,i}$ é a temperatura da parede em contato com o fluido interno (medida em $r = R_i$), e T_m é a temperatura média de mistura

$$h = \frac{(T_{z,i} - T_m)}{k_f \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_i}} \quad (26)$$

Onde a temperatura média de mistura pode ser definida por:

$$T_m = \frac{1}{\bar{u} A} \int u T \, dA \quad (27)$$

Substituindo na equação (26):

$$h = \frac{\frac{k_f}{Re} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}|_{\eta=\beta}}{\theta(\xi, \beta) - \frac{2}{\beta^2} \int_0^\beta u^* \theta \eta \, d\eta} \quad (28)$$

O número de Nusselt é definido por:

$$Nu = \frac{h D_i}{k_f} \quad (29)$$

Logo, rearranjando a equação para esse problema, o número de Nusselt local pode ser calculado usando a seguinte formulação:

$$Nu(\xi) = \frac{2\beta(\partial\theta/\partial\eta)_{\eta=\beta}}{\theta(\xi, \beta) - \frac{2}{\beta^2} \int_0^\beta u^* \theta \eta \, d\eta} \quad (30)$$

1.3 Técnica da transformada integral generalizada (GITT)

Uma alternativa para manipular o problema proposto é agora considerada. A formulação é baseada na técnica da transformada integral generalizada (GITT), e a abordagem começa com a representação da autofunção que é originada através de um problema auxiliar, e para o atual problema, o problema de autovalor de Bessel é escolhido devido ao sistema de coordenadas cilíndricas. O par transformação é então definido, e posteriormente a equação é transformada multiplicando pela autofunção e integrando no domínio. A equação resultante transformada é então resolvida usando a abordagem analítica do método matricial. Finalmente, utilizando a fórmula da inversa, o passo final é obter a solução analítica para o potencial.

A fim de resolver a distribuição de temperatura do problema com a GITT, o problema de autovalor de Bessel apropriado é considerado:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Psi'_n}{d\eta} \right) + \lambda_n^2 \Psi_n = 0 \quad (31)$$

$$\Psi'_n(0) = 0; \quad (32)$$

$$\Psi'_n(1) = -Bi \Psi_n(1). \quad (33)$$

onde Ψ_n são as autofunções, λ_n são os autovalores, e a solução para a equação de Bessel é dada por:

$$\Psi_n(\eta) = J_o(\lambda_n \eta) \quad (34)$$

Os autovalores podem agora ser calculados por um método numérico a partir da

seguinte equação abaixo:

$$\lambda_n = \frac{\text{Bi } J_0(\lambda_n)}{J_1(\lambda_n)} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

O par transformação é definido por:

$$\text{Transformada} \Rightarrow \bar{\theta}_n(\xi) = \int_0^1 \theta(\xi, \eta) \Psi_n(\eta) \eta \, d\eta \quad (36)$$

$$\text{Inversa} \Rightarrow \theta(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_n(\xi) \Psi_n(\eta)}{N_n} \quad (37)$$

Onde a norma N_n é definida por:

$$N_n = \int_0^1 \Psi_n^2 \eta \, d\eta \quad (38)$$

A transformação do problema dado é realizada multiplicando a equação (20) por $\eta \Psi_n$, integrando dentro de $0 \leq \eta \leq 1$, e aplicando a fórmula da inversa para os termos não transformáveis:

$$\int_0^1 u^*(\eta) w^*(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Psi_n \, d\eta = 4\beta^2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_r(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \Psi_n \, d\eta + \frac{1}{\text{Pe}^2} \int_0^1 K_z \eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \Psi_n \, d\eta \quad (39)$$

Aplicando a fórmula da inversa no primeiro termo da equação:

$$\int_0^1 u^*(\eta) w^*(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Psi_n \, d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 u^*(\eta) w^*(\eta) \eta \frac{\bar{\theta}'_m \Psi_m}{N_m} \Psi_n \, d\eta \quad (40)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}'_m}{N_m} \int_0^1 u^*(\eta) w^*(\eta) \eta \Psi_m \Psi_n \, d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \bar{\theta}'_m \quad (41)$$

Aplicando a fórmula da inversa no termo correspondente à difusão axial:

$$\frac{1}{\text{Pe}^2} \int_0^1 K_z \eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \Psi_n \, d\eta = \frac{1}{\text{Pe}^2} \int_0^1 K_z \eta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_m \Psi_m}{N_m} \right] \Psi_n \, d\eta \quad (42)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\text{Pe}^2} \frac{\bar{\theta}''_m}{N_m} \int_0^1 K_z \eta \Psi_m \Psi_n \, d\eta = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \bar{\theta}''_m \quad (43)$$

Integrando por partes o termo correspondente à difusão radial:

$$4\beta^2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_r(\eta) \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \Psi_n \, d\eta = 4\beta^2 \Psi_n K_r \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} - 4\beta^2 \int_0^1 K_r \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Psi'_n \, d\eta \quad (44)$$

Aplicando a fórmula da inversa e reorganizando a equação:

$$= -4\beta^2 \Psi_n K_r \eta \text{Bi}\theta|_{\eta=1} - \sum_{m=1}^{\infty} 4\beta^2 \frac{\bar{\theta}_m}{N_m} \int_0^1 K_r \eta \Psi'_m \Psi'_n d\eta \quad (45)$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} 4\beta^2 \frac{\Psi_n(1) K_r(1) \text{Bi} \bar{\theta}_m \Psi_m(1)}{N_m} - \sum_{m=1}^{\infty} 4\beta^2 \frac{\bar{\theta}_m}{N_m} \int_0^1 K_r \eta \Psi'_m \Psi'_n d\eta \quad (46)$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} 4\beta^2 \frac{\bar{\theta}_m}{N_m} \left[\text{Bi} K_r(1) \Psi_m(1) \Psi_n(1) + \int_0^1 K_r \eta \Psi'_m \Psi'_n d\eta \right] = - \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \bar{\theta}_m \quad (47)$$

O processo gera o seguinte sistema acoplado de EDO's:

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} \bar{\theta}_m''(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} \bar{\theta}_m'(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \bar{\theta}_m(\xi) \quad (48)$$

$$\bar{\theta}_n(0) = \int_0^1 \Psi_n(\eta) \eta d\eta = b_n \quad (49)$$

$$\bar{\theta}_n(\xi \rightarrow \infty) < \infty \quad (50)$$

onde os coeficientes $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ e $C_{n,m}$ são dados por:

$$A_{n,m} = \frac{1}{N_m} \int_0^1 u^*(\eta) w^*(\eta) \Psi_m \Psi_n \eta d\eta \quad (51)$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\text{Pe}^2 N_m} \int_0^1 K_z \Psi_m \Psi_n \eta d\eta \quad (52)$$

$$C_{n,m} = \frac{4\beta^2}{N_m} \left[\text{Bi} K_r(1) \Psi_m(1) \Psi_n(1) + \int_0^1 K_r \Psi'_m \Psi'_n \eta d\eta \right] \quad (53)$$

Todos os coeficientes acima são computados analiticamente, exceto $A_{n,m}$ que precisa ser calculado numericamente devido a não existência de solução analítica para esse termo. O coeficiente $C_{n,m}$ foi calculado realizando integração por partes apenas uma vez. Usualmente integra-se por partes duas vezes pois assim se melhora a convergência, porém esse problema não permite que se faça isso no coeficiente $C_{n,m}$ devido a condutividade térmica descontínua, e de derivada indeterminada na interface fluido-sólido.

O sistema de equações pode ser reescrito na forma matricial:

$$\mathbf{B}\theta'' = \mathbf{A}\theta' + \mathbf{C}\theta \quad (54)$$

$$\theta(0) = \mathbf{b}; \quad (55)$$

$$\theta(\xi \rightarrow \infty) < \infty \quad (56)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são representações matriciais dos coeficientes $A_{n,m}$, $B_{n,m}$ e $C_{n,m}$ respectivamente, θ e \mathbf{b} são representações vetoriais de $\bar{\theta}_m$ e b_m respectivamente.

O próximo passo é inverter a matriz \mathbf{B} e multiplicar a equação por \mathbf{B}^{-1} :

$$\boldsymbol{\theta}'' = \mathbf{D}\boldsymbol{\theta}' + \mathbf{E}\boldsymbol{\theta} \quad (57)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \quad (58)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C} \quad (59)$$

A matriz \mathbf{B} foi invertida no Mathematica através da rotina *Inverse*. A fim de resolver o sistema de equações, uma solução analítica é proposta. Uma mudança de variável é agora introduzida, reduzindo o sistema à primeira ordem, e escrevendo ele em termos de um vetor \mathbf{y} qualquer:

$$\mathbf{y}(\xi) = (\bar{\theta}_1(\xi), \bar{\theta}_2(\xi), \bar{\theta}_3(\xi), \dots, \bar{\theta}_{n_{\max}}(\xi), \bar{\theta}'_1(\xi), \bar{\theta}'_2(\xi), \bar{\theta}'_3(\xi), \dots, \bar{\theta}'_{n_{\max}}(\xi)) \quad (60)$$

A equação (54) pode ser reescrita na seguinte forma modificada:

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{M}\mathbf{y} \quad (61)$$

Onde a matriz em bloco \mathbf{M} é definida como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{E} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (62)$$

onde \mathbf{O} é a matriz nula e \mathbf{I} é a matriz identidade.

Pode-se obter a solução do sistema modificado integrando analiticamente. Os autovalores e autovetores de \mathbf{M} são calculados para que a solução dos componentes de \mathbf{y} possa ser escrita na seguinte forma:

$$y_n(\xi) = \sum_{m=1}^{2n_{\max}} G_{n,m} c_m \exp(\omega_m \xi) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, 2n_{\max} \quad (63)$$

no qual $G_{n,m}$ são os coeficientes da matriz \mathbf{G} contendo os autovetores de \mathbf{M} como colunas, ω_m são os autovalores de \mathbf{M} , e c_m são constantes arbitrárias. A matriz \mathbf{M} fornece n_{\max} autovalores positivos e n_{\max} autovalores negativos, tal que metade dos c_m 's podem ser eliminados para satisfazer a condição de contorno em $\xi \rightarrow \infty$, e uma vez que a solução quando ξ fica maior deve convergir para um valor finito, pode-se dizer que:

$$c_n = 0 \quad \text{se } \omega_n > 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, 2n_{\max} \quad (64)$$

Ou seja, c_n é zero se ω_m for positivo, pois o termo da exponencial sendo positivo, a temperatura iria para o infinito, o que não faz sentido. A restrição é justamente a temperatura ser finita quando ξ tende ao infinito.

O sistema algébrico admite calcular os valores de c_n restantes, pela aplicação da condição de contorno na entrada:

$$\sum_{m=1}^{2n_{\max}} G_{n,m} c_m = b_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \dots, n_{\max} \quad (65)$$

A solução do potencial transformado é obtida, e depois o campo de temperatura é calculado pela aplicação da fórmula da inversa. O número de Nusselt pode ser obtido diretamente das temperaturas transformadas usando a seguinte expressão:

$$\text{Nu}(\xi) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_n \frac{2\beta}{N_n} \Psi'_n(\beta)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_n}{N_n} \left[\Psi_n(\beta) - \frac{2}{\beta^2} \int_0^{\beta} u^* \Psi_n(\eta) \eta d\eta \right]} \quad (66)$$

A fim de evitar o cálculo direto da derivada $\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=\beta}$ usando soluções aproximadas, pode-se adotar a técnica alternativa do balanço integral (COTTA; MIKHAILOV, 1997). A técnica consiste em integrar a equação principal e substituir a derivada por integrais da equação principal. Essa técnica melhora consideravelmente a taxa de convergência do Nusselt. Para esse trabalho, a derivada foi implementada e calculada diretamente como se vê em (66). Entretanto, deve-se notar que a convergência poderia ser melhor se o balanço integral fosse implementado. Aplicando a técnica, temos que:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}'_n}{4\beta^3 N_n K_r(\beta)} \int_0^{\beta} \eta u^*(\eta) \Psi_n(\eta) d\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}''_n}{4\beta^3 \text{Pe}^2 N_n K_r(\beta)} \int_0^{\beta} \eta K_z(\eta) \Psi_n(\eta) d\eta \quad (67)$$

Substituindo (67) e fórmula inversa em (30), chegamos a formulação geral do número de Nusselt com balanço integral:

$$\text{Nu}(\xi) = \frac{2\beta \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}'_n}{4\beta^3 N_n K_r(\beta)} \int_0^{\beta} \eta u^*(\eta) \Psi_n(\eta) d\eta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}''_n}{4\beta^3 \text{Pe}^2 N_n K_r(\beta)} \int_0^{\beta} \eta K_z(\eta) \Psi_n(\eta) d\eta \right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_n}{N_n} \left[\Psi_n(\beta) - \frac{2}{\beta^2} \int_0^{\beta} u^* \Psi_n(\eta) \eta d\eta \right]} \quad (68)$$

1.4 Método das Diferenças Finitas (FDM)

O método clássico das diferenças finitas foi usado para comparar e validar as temperaturas adimensionais com o método da GITT. A forma discretizada da equação geral válida dentro do domínio é dada por:

$$\begin{aligned} &\theta_{i-1,j} \left(\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} + \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i+1,j} \left(\frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} \right) + \theta_{i,j} \left(-\frac{2\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{2\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i,j-1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) + \\ &+ \theta_{i,j+1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = 0 \quad \text{para} \quad 2 \leq i \leq i_{\max} - 1 \quad \text{e} \quad 2 \leq j \leq j_{\max} - 1 \end{aligned} \quad (69)$$

Discretizando as 4 condições de contorno, a seguir:

- Para $2 \leq i \leq i_{\max} - 1$ e $j = j_{\max}$:

$$\begin{aligned} &\theta_{i,j} \left((1 - \text{Bi}\Delta\eta) \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) - \frac{2\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{2\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i-1,j} \left(\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} + \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \\ &+ \theta_{i+1,j} \left(\frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} \right) + \theta_{i,j-1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

- Para $2 \leq i \leq i_{\max} - 1$ e $j = 1$

$$\begin{aligned} &\theta_{i-1,j} \left(\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} + \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i+1,j} \left(\frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} \right) + \theta_{i,j} \left(-\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} - \frac{2\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \\ &+ \theta_{i,j+1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

- Para $i = i_{\max}$ e $2 \leq j \leq j_{\max} - 1$:

$$\begin{aligned} &\theta_{i,j} \left(-\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} - \frac{2\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i-1,j} \left(\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} + \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i,j-1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) + \\ &+ \theta_{i,j+1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

- Para $i = 1$ e $2 \leq j \leq j_{\max} - 1$:

$$\begin{aligned} &\theta_{i+1,j} \left(\frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} \right) + \theta_{i,j} \left(-\frac{2\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{2\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i,j-1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) + \\ &+ \theta_{i,j+1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = -\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} - \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \end{aligned} \quad (73)$$

- Para $i = i_{\max}$ e $j = j_{\max}$:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} \left((1 - \text{Bi}\Delta\eta) \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} - \frac{2\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \\ + \theta_{i-1,j} \left(\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} + \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i,j-1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (74)$$

- Para $i = 1$ e $j = j_{\max}$:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} \left((1 - \text{Bi}\Delta\eta) \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) - \frac{2\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{2\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i+1,j} \left(\frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} \right) + \\ + \theta_{i,j-1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = -\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} - \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \end{aligned} \quad (75)$$

- Para $i = i_{\max}$ e $j = 1$:

$$\theta_{i,j} \left(-\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} - \frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} - \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i-1,j} \left(\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} + \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \theta_{i,j+1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = 0 \quad (76)$$

- Para $i = 1$ e $j = 1$:

$$\begin{aligned} \theta_{i+1,j} \left(\frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} - \frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} \right) + \theta_{i,j} \left(-\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} - \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} - \frac{2\nu_j}{\Delta\xi^2} \right) + \\ + \theta_{i,j+1} \left(\frac{\phi_j}{\Delta\eta^2} + \frac{\sigma_j}{2\Delta\eta} \right) = -\frac{\gamma_j}{2\Delta\xi} - \frac{\nu_j}{\Delta\xi^2} \end{aligned} \quad (77)$$

onde:

$$\gamma_j = \eta_j u^*(\eta_j) \quad (78)$$

$$\nu_j = \frac{4\beta^2 \eta_j K_x(\eta_j)}{\text{Pe}} \quad (79)$$

$$\sigma_j = \frac{\eta_j [K_r(\eta_{j+1}) - K_r(\eta_{j-1})]}{2\Delta\eta} + K_r(\eta_j) \quad (80)$$

$$\phi_j = \eta_j K_r(\eta_j) \quad (81)$$

Finalmente, a fim de resolver o sistema algébrico de equações gerado pela formulação de FDM, qualquer algoritmo de resolução de sistemas lineares pode ser usado para realizar a tarefa. Para esse trabalho, foi utilizada a rotina *LinearSolve* do Mathematica para resolver o sistema algébrico.

2 RESULTADOS

Nessa seção, uma discussão é feita sobre os resultados numéricos encontrados pela plataforma computacional Wolfram Mathematica. O objetivo aqui é avaliar a taxa de convergência da solução pela GITT, comparar com trabalhos já publicados para a validação dos resultados, apresentar a distribuição de Nusselt em função de posições axiais, e apresentar a distribuição de temperaturas do duto. Os resultados apresentados nas tabelas seguintes foram analisados principalmente para números de Biot e Péclet diferentes, de acordo com a posição axial (ξ), ordens de truncamento (n_{\max}) e combinações de \tilde{k}_z e \tilde{k}_r . A faixa de condutividades térmicas foi escolhida com base na aplicação de dutos ortotrópicos não-metálicos na indústria, e considerando a condutividade térmica da água pura igual a 0.5704 W/m.K, de acordo com Medeiros, Barbosa e Fontes (2010). Como exemplo (CALLISTER, 2012), pode-se citar a utilização de dutos ortotrópicos de polímero reforçado por fibra de vidro com condutividade térmica 0.2 W/m.K, dutos de polietileno com condutividade térmica 0.5 W/m.K, entre outros materiais na faixa entre 0.1 e 1 W/m.K, sendo a condutividade adimensional nesses casos iguais a 0.35 e 0.87 respectivamente, justificando a faixa de condutividades térmicas simuladas. O uso desses materiais na indústria tem crescido nos últimos anos, devido a sua baixa condutividade térmica. O número de Nusselt é escolhido para a análise da taxa de convergência devido a sua importância nesse tipo de problema de transferência de calor.

2.1 Análise de convergência

As 5 primeiras tabelas contêm resultados obtidos para diferentes ordens de truncamento, com a variação de alguns parâmetros como Biot e Péclet. É feita uma análise de convergência para cada uma das tabelas.

A tabela 1 introduz os resultados para GITT com $Pe=1$ e $\beta=0.8$. É analisada a convergência do número de Nusselt local em diferentes posições axiais, variando de 0.01 até 10, para diferentes números de Biot e condutividades térmicas. Valores de Nusselt foram representados para diferentes ordens de truncamento, para que fosse possível analisar o comportamento da convergência.

Quando $Bi=1$ observa-se o pior caso de convergência. Quando o número de Biot aumenta para 10, observa-se a melhora na taxa de convergência para a posição $\xi=1$, onde ocorrem 2 dígitos convergidos entre 20 e 200 termos somados na série. Para quase todos os valores de n_{\max} , Nusselt convergiu em 2 dígitos nessas posições, fato que não ocorreu quando $Bi=1$. Quando os valores das condutividades térmicas mudam de $k_z=0.5$ e $k_r=1.5$ para $k_z=1.5$ e $k_r=0.5$, esse fato também não ocorre tanto para $Bi=1$, como para $Bi=10$.

Tabela 1 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe= 1$, $\beta= 0.8$, e números de Biot diferentes.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	10.3460	7.29739	4.10655	4.08102	22.7417	9.38984	7.43054	7.37340
40	9.59751	7.34974	4.10679	4.08110	13.4301	9.32426	7.40304	7.34660
60	9.55641	7.35937	4.10235	4.07664	10.8430	9.27257	7.36905	7.31304
80	9.55801	7.35776	4.09655	4.07084	9.89936	9.22286	7.33314	7.27750
100	9.55628	7.35131	4.09002	4.06434	9.48979	9.17300	7.29569	7.24038
120	9.54943	7.34208	4.08292	4.05727	9.28319	9.12175	7.25639	7.20141
140	9.53861	7.33074	4.07522	4.04961	9.15866	9.06788	7.21458	7.15994
160	9.52372	7.31732	4.06672	4.04116	9.06865	9.00961	7.16900	7.11472
180	9.50522	7.30115	4.05693	4.03142	8.98883	8.94330	7.11682	7.06295
200	9.47707	7.27773	4.04329	4.01787	8.88065	8.84902	7.04231	6.98902
Bi=10								
20	15.3463	8.48855	3.77959	3.75638	48.2317	11.3510	7.38843	7.28345
40	12.8585	8.55338	3.77474	3.75146	25.2498	11.2400	7.36651	7.26262
60	12.6658	8.56715	3.76936	3.74609	16.8440	11.1677	7.33316	7.23002
80	12.6603	8.56672	3.76343	3.74018	13.7127	11.1024	7.29748	7.19498
100	12.6625	8.56013	3.75710	3.73388	12.3963	11.0390	7.26018	7.15829
120	12.6578	8.55000	3.75036	3.72717	11.7823	10.9750	7.22103	7.11975
140	12.6465	8.53724	3.74312	3.71998	11.4615	10.9085	7.17938	7.07873
160	12.6296	8.52196	3.73520	3.71210	11.2665	10.8371	7.13399	7.03400
180	12.6066	8.50339	3.72612	3.70307	11.1212	10.7564	7.08203	6.98280
200	12.5700	8.47627	3.71351	3.69054	10.9511	10.6422	7.00781	6.90963

Tabela 2 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe= 10$, $\beta= 0.8$, e números de Biot diferentes.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	7.14426	3.52342	3.44657	3.44657	10.4188	6.55278	6.33790	6.33790
40	7.16661	3.51696	3.44013	3.44013	10.4243	6.54601	6.33114	6.33114
60	7.16621	3.51092	3.43419	3.43419	10.3923	6.52192	6.30778	6.30778
80	7.15974	3.50483	3.42821	3.42821	10.3495	6.49314	6.27992	6.27992
100	7.15054	3.49857	3.42208	3.42208	10.3013	6.46177	6.24957	6.24957
120	7.13959	3.49205	3.41569	3.41569	10.2489	6.42816	6.21706	6.21706
140	7.12717	3.48514	3.40893	3.40893	10.1920	6.39198	6.18206	6.18206
160	7.11310	3.47764	3.40158	3.40158	10.1292	6.35224	6.14362	6.14362
180	7.09646	3.46906	3.39319	3.39319	10.0567	6.30649	6.09937	6.09937
200	7.07314	3.45726	3.38165	3.38165	9.95233	6.24084	6.03588	6.03588
Bi=10								
20	7.97307	3.30995	3.25755	3.25755	11.3001	6.27501	6.08295	6.08295
40	8.00825	3.30232	3.25001	3.25001	11.2806	6.27170	6.07964	6.07964
60	8.01246	3.29646	3.24424	3.24424	11.2376	6.24865	6.05729	6.05729
80	8.00771	3.29070	3.23856	3.23856	11.1868	6.22094	6.03042	6.03042
100	7.99894	3.28481	3.23276	3.23276	11.1319	6.19076	6.00117	6.00117
120	7.98774	3.27869	3.22673	3.22673	11.0734	6.15847	5.96986	5.96986
140	7.97459	3.27220	3.22034	3.22034	11.0106	6.12372	5.93619	5.93619
160	7.95940	3.26515	3.21340	3.21340	10.9417	6.08558	5.89922	5.89922
180	7.94136	3.25711	3.20549	3.20549	10.8626	6.04171	5.85669	5.85669
200	7.91549	3.24602	3.19457	3.19457	10.7492	5.97874	5.79565	5.79565

Tabela 3 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe=1$, $\beta=0.9$, e números de Biot diferentes.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	15.0871	7.74467	4.05473	4.03611	26.9871	11.7805	7.50474	7.47284
40	14.7176	7.80915	4.06476	4.04601	17.4611	11.6226	7.44431	7.41286
60	14.7952	7.82279	4.06380	4.04501	14.7614	11.5276	7.39852	7.36733
80	14.8483	7.82283	4.05978	4.04100	13.7965	11.4500	7.35651	7.32553
100	14.8728	7.81706	4.05436	4.03559	13.3797	11.3785	7.31525	7.28447
120	14.8799	7.80799	4.04804	4.02929	13.1615	11.3082	7.27330	7.24271
140	14.8754	7.79648	4.04092	4.02221	13.0183	11.2365	7.22946	7.19906
160	14.8625	7.78268	4.03290	4.01422	12.9037	11.1603	7.18216	7.15197
180	14.8409	7.76589	4.02354	4.00489	12.7900	11.0746	7.12830	7.09834
200	14.8022	7.74166	4.01048	3.99190	12.6423	10.9536	7.05147	7.02184
Bi=10								
20	21.7632	8.62356	3.63816	3.62260	46.2633	14.3490	7.18168	7.12161
40	20.5842	8.67787	3.63992	3.62432	27.9680	14.1652	7.13833	7.07887
60	20.6584	8.68949	3.63740	3.62180	21.3003	14.0451	7.09670	7.03768
80	20.7483	8.68810	3.63308	3.61749	18.8851	13.9471	7.05719	6.99855
100	20.7967	8.68090	3.62782	3.61225	17.8867	13.8576	7.01799	6.95971
120	20.8166	8.67032	3.62190	3.60636	17.4109	13.7704	6.97796	6.92003
140	20.8178	8.65720	3.61535	3.59983	17.1404	13.6818	6.93603	6.87846
160	20.8050	8.64161	3.60804	3.59255	16.9504	13.5880	6.89074	6.83357
180	20.7788	8.62276	3.59955	3.58410	16.7834	13.4828	6.83911	6.78237
200	20.7283	8.59562	3.58776	3.57236	16.5738	13.3346	6.76533	6.70921

Na tabela 2, existem 2 dígitos convergidos para $Bi=10$, em que $k_z=0.5$ e $k_r=1.5$, para a posição $\xi=0.01$ entre 100 e 200 termos na série, e na posição $\xi=0.1$, há o comportamento de 2 dígitos convergidos de 60 até 200 termos. O aumento do número de Péclet em relação à tabela 1 parece ter uma forte influência na melhora da taxa de convergência na entrada do duto em $\xi=0.01$. O número de Biot também influi nessa melhora pois em $\xi=0.01$, 2 dígitos convergidos são verificados para todos os valores de n_{max} entre 100 e 200, o que não ocorre quando $Bi=1$. Além disso, em $\xi=1$ há uma leve melhora da taxa pois existem 2 dígitos convergidos entre 20 e 180 termos, se comparado quando $Bi=1$, na mesma posição entre 20 e 160 termos isso ocorre.

Na tabela 3, para $Bi=1$, $k_z=0.5$, e $k_r=1.5$, é possível ver que a convergência ocorre para a posição $\xi=0.1$ apenas para 2 algarismos significativos entre 40 e 120 termos somados e novamente entre 140 e 200. Quando Bi é aumentado para 10, há convergência para 2 dígitos em $\xi=0.1$ entre 20 e 180 termos. Ao trocarmos os valores das condutividades térmicas, também se verificam 2 dígitos convergidos em alguns casos. Em todos os casos dessa tabela, a taxa de convergência é pior na entrada do duto.

Na tabela 4 quando $Bi=1$, $k_z=0.5$, e $k_r=1.5$, a convergência de 2 algarismos significativos é obtida na posição $\xi=0.01$ entre 20 e 200 termos da soma. E também 2 dígitos para 20 até 200 termos na posição $\xi=0.1$, o que não acontece $Bi=10$. Para $Bi=10$, a partir de 160 termos somados já é possível se verificar 2 dígitos convergidos em todas as posições axiais. Ao trocarmos os valores das condutividades térmicas, a taxa de convergência parece ter uma ligeira piora, pois não se verificam 2 dígitos convergidos a partir de 160 termos somados na série em todas as posições axiais para esses casos. Para todos

Tabela 4 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe= 10$, $\beta= 0.9$, e números de Biot diferentes.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	7.45742	3.47757	3.41340	3.41340	12.0919	6.53088	6.38568	6.38568
40	7.49767	3.48063	3.41632	3.41632	12.0000	6.49328	6.34877	6.34877
60	7.50326	3.47790	3.41362	3.41362	11.9262	6.45858	6.31481	6.31481
80	7.49954	3.47350	3.40929	3.40929	11.8582	6.42457	6.28154	6.28154
100	7.49175	3.46829	3.40417	3.40417	11.7914	6.39014	6.24787	6.24787
120	7.48155	3.46250	3.39848	3.39848	11.7236	6.35456	6.21308	6.21308
140	7.46944	3.45614	3.39223	3.39223	11.6527	6.31702	6.17637	6.17637
160	7.45543	3.44908	3.38530	3.38530	11.5763	6.27626	6.13652	6.13652
180	7.43874	3.44091	3.37728	3.37728	11.4893	6.22963	6.09093	6.09093
200	7.41507	3.42963	3.36620	3.36620	11.3653	6.16284	6.02562	6.02562
Bi=10								
20	8.09116	3.22883	3.18874	3.18874	13.4877	6.14331	6.01492	6.01492
40	8.12647	3.22849	3.18841	3.18841	13.3800	6.11608	5.98810	5.98810
60	8.13198	3.22558	3.18553	3.18553	13.2899	6.08403	5.95668	5.95668
80	8.12798	3.22141	3.18141	3.18141	13.2092	6.05201	5.92532	5.92532
100	8.11963	3.21654	3.17661	3.17661	13.1317	6.01952	5.89350	5.89350
120	8.10866	3.21115	3.17129	3.17129	13.0539	5.98593	5.86062	5.86062
140	8.09562	3.20525	3.16545	3.16545	12.9734	5.95050	5.82593	5.82593
160	8.08046	3.19869	3.15898	3.15898	12.8871	5.91206	5.78828	5.78828
180	8.06239	3.19111	3.15149	3.15149	12.7893	5.86808	5.74522	5.74522
200	8.03669	3.18061	3.14113	3.14113	12.6502	5.80502	5.68349	5.68349

Tabela 5 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe = 10^3$, $\beta= 1$ e $Bi = 10^6$.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
20	4.91777	3.65817	3.65689	3.65689	4.91777	3.65817	3.65689	3.65689
40	4.91745	3.65810	3.65682	3.65682	4.91745	3.65810	3.65682	3.65682
60	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
80	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
100	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
120	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
140	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
160	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
180	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682
200	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682	4.91744	3.65810	3.65682	3.65682

os casos dessa tabela, ainda não foi percebido seis algarismos significativos convergidos. Comparando-se essa tabela com a tabela 3, novamente é possível perceber a influência que o aumento do número de Péclet tem na melhora da taxa de convergência na entrada do duto, e também em outras posições axiais.

Com relação à tabela 5, pode-se confirmar o que as literaturas (SHAH; LONDON, 1978) e (BEJAN, 2013) publicaram para o número de Nusselt local ser igual a 3.66 para altos valores de ξ , do número de Péclet, do número de Biot e para espessuras de parede do duto nulas ($\beta = 1$). Deve-se notar que para altos valores do número de Biot, a condição de contorno se aproxima da temperatura prescrita em $\eta = 1$. O resultado é que desprezando a difusão axial, devido ao alto valor do número de Péclet, o número de Nusselt local converge para 3.66.

Tabela 6 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por FDM para $Pe = 10^3$, $\beta = 1$ e $Bi = 10^6$.

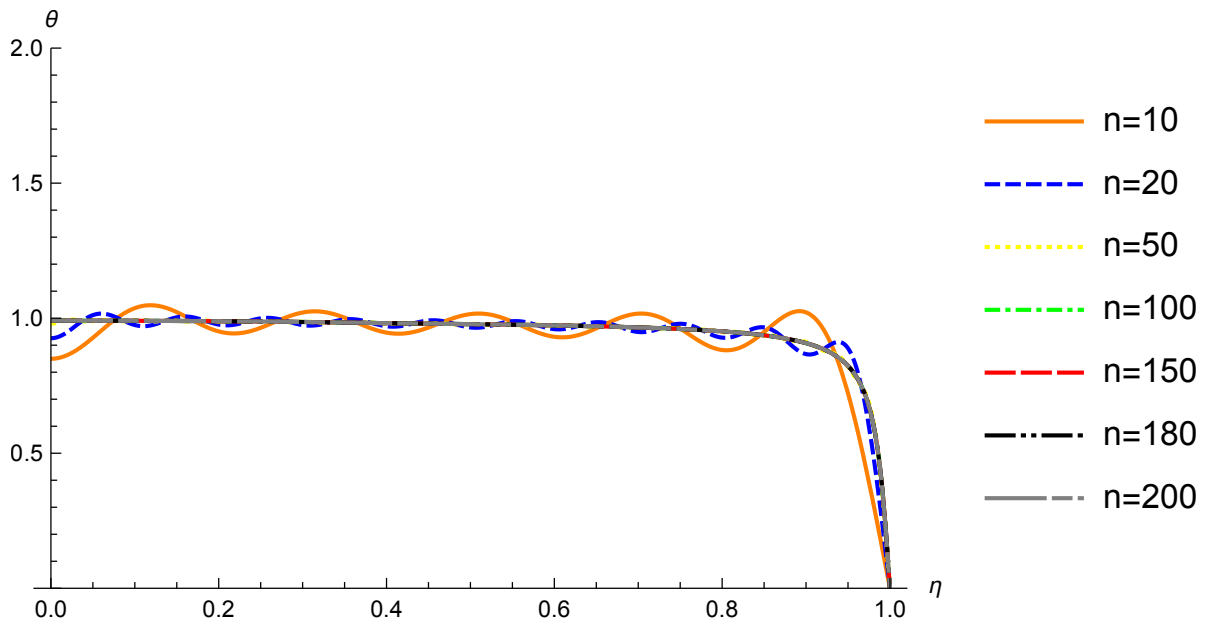
$i_{\max} \times j_{\max}$	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$			$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$		
	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
120x12	0.307789	3.51948	3.51948	0.307789	3.51948	3.51948
250x25	3.594120	3.60263	3.60263	3.594120	3.60263	3.60263
500x50	3.642950	3.63142	3.63142	3.642950	3.63142	3.63142
1000x100	3.647790	3.64444	3.64444	3.647790	3.64444	3.64444
2000x200	3.652390	3.65069	3.65069	3.652390	3.65069	3.65069

O efeito da variação da taxa de convergência parece ser fortemente dependente dos números de Biot e Péclet. Para altos valores de Pe , é notável a melhora nas taxas de convergência, e a taxa também parece melhorar para altos valores de Bi . Apesar do alto valor de Péclet na tabela 2 e na tabela 4, uma baixa taxa de convergência ocorre na entrada do canal em que $k_z=1.5$ e $k_r=0.5$.

Em todas as tabelas onde $Pe=1$ podemos ver uma redução na taxa de convergência, devido a uma maior influência do termo de difusão axial. Por outro lado, quando o número de Péclet aumenta para 10, a taxa de convergência aumenta consideravelmente. Para todas as tabelas, na entrada do canal na posição $\xi = 0.01$, é verificada a pior taxa de convergência devido a descontinuidade da condição de contorno. Quando os valores das condutividades térmicas são trocados de $k_z=0.5$ e $k_r=1.5$ para $k_z=1.5$ e $k_r=0.5$, verifica-se uma piora na taxa de convergência.

A tabela 6 apresenta os resultados pelo método das diferenças finitas. A malha de 120x12 mostrou um percentual de erro muito grande se comparada com malhas mais refinadas. Utilizando-se a malha de 500x500 e malhas mais refinadas, o índice de erro diminui consideravelmente e conseqüentemente há uma melhora da taxa de convergência. A malha de 2000x200 mostrou-se adequada para resolver esse tipo de problema pois apresentou uma aproximação muito boa se comparada com os resultados para esse mesmo caso por GITT. Para o regime termicamente desenvolvido onde $\xi = 10$, o resultado de Nusselt para a malha de 2000x200 apresentou um erro de apenas 0,00613 (menos de 1 por cento). Além disso, os resultados por FDM apresentaram para esse caso uma aproximação muito boa se comparado com os resultados da literatura em regime termicamente desenvolvido.

Figura 2 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.



Os gráficos ilustrados pelas figuras 2 e 3 apresentam a distribuição da temperatura adimensional para cada posição radial, variando-se a ordem de truncamento. Pela figura 2, é possível notar em todos os casos onde $\xi = 0.01$, que para pequenos valores de n_{\max} , a curva apresenta maiores oscilações do que se comparado a casos com maiores valores de n_{\max} , pois é requerido um número maior de termos somados à série para esses casos mais oscilantes na entrada do duto. A partir de $n_{\max} = 50$, já é possível notar a melhora significativa da taxa de convergência de θ , porém ainda baixa por se tratar da região da entrada do canal. Analisando-se a figura 3, onde $\xi = 0.1$, é possível confirmar que para posições axiais mais distantes da entrada, a taxa de convergência de θ melhora, e poucos termos somados na série por GITT são requeridos nesses casos.

Todos os resultados foram gerados utilizando GITT, variando-se a ordem de truncamento, simulando-se até $n_{\max} = 200$. O método apresentou ótima concordância com a literatura em todos os casos sem exceção, como veremos na próxima seção.

Figura 3 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.1$.

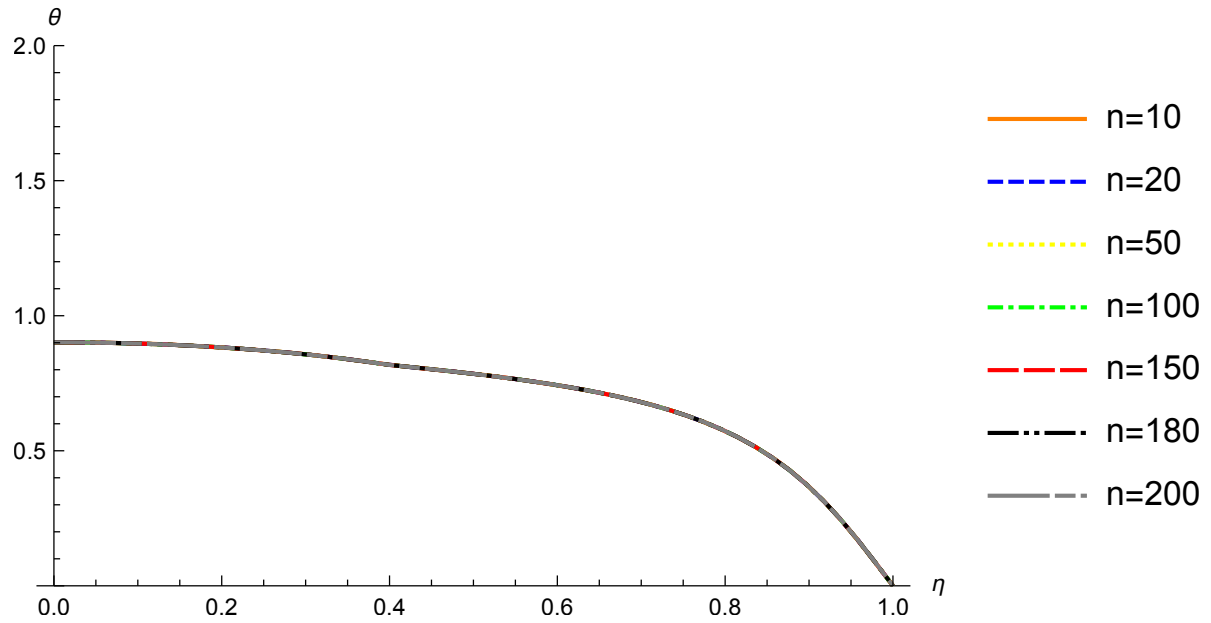


Figura 4 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

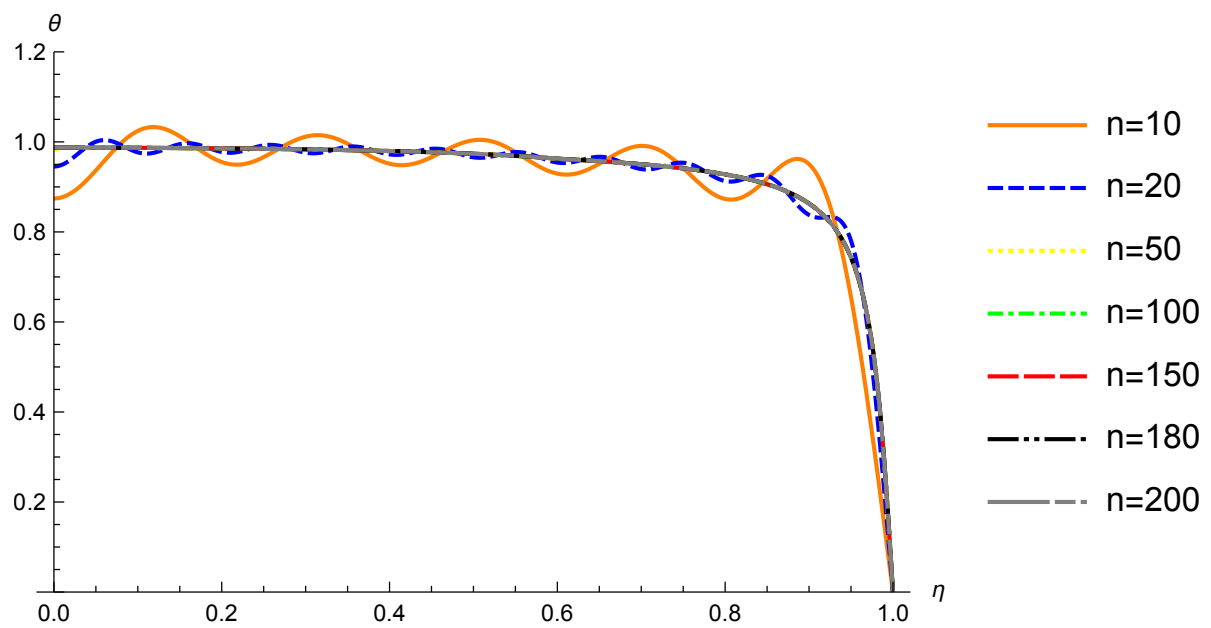


Figura 5 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$.

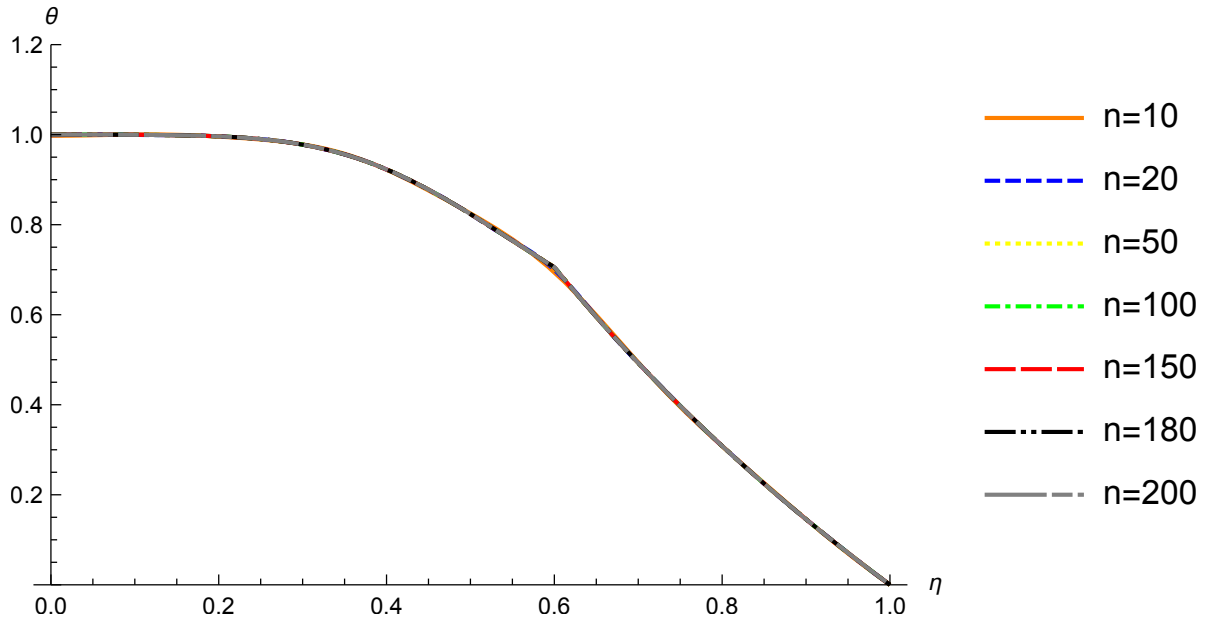


Tabela 7 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por FDM para $Pe = 10$, $\beta = 0.9$ e $Bi = 10$.

$i_{\max} \times j_{\max}$	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$			
	$\xi = 0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
120x12	87.5008	3.27028	2.81617	2.81617
250x25	4.49570	3.06915	2.97304	2.97304
500x50	6.80905	3.62781	3.55571	3.55571
1000x100	8.99369	3.61067	3.55896	3.55896
2000x200	9.37949	3.60668	3.56047	3.56047

Tabela 8 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por FDM para $Pe = 10$, $\beta = 0.8$ e $Bi = 10$.

$i_{\max} \times j_{\max}$	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$			
	$\xi = 0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
120x12	9.02868	7.38323	3.1909	3.18302
250x25	5.27169	3.76531	3.61282	3.61282
500x50	6.70191	3.70398	3.61685	3.61685
1000x100	8.48560	3.68444	3.61875	3.61875
2000x200	8.89457	3.67953	3.61963	3.61963

O gráfico da figura 4, novamente mostra as grandes oscilações que ocorrem na entrada do duto, principalmente para poucos termos somados na série. Apresentou o mesmo comportamento da figura 2, ou seja, o aumento de β em relação a esse outro gráfico não influenciou o comportamento, que continuou oscilatório devido a dificuldade em convergir para poucos termos somados na entrada.

O gráfico 5 mostrou que com o aumento de Péclet, a taxa de convergência de θ aumentou significativamente na entrada, mesmo com poucos termos somados. Não são vistas oscilações de θ como ocorreu em casos anteriores com menor Péclet. Nesse gráfico é possível confirmar visualmente a grande influência que Péclet exerce nesse tipo de problema, pois todas as curvas coincidem com Péclet elevado e os valores de θ permanecem iguais visualmente.

Os resultados apresentados pela tabela 7 novamente apresentam uma taxa de erro menor para a malha de 2000x200 em posições axiais mais longe da entrada. O erro maior ocorre na malha de 120x12, conforme esperado. Novamente pode-se ver a dificuldade em convergir na entrada devido à condição de contorno descontínua na entrada do canal.

Pela tabela 8, é possível perceber que com uma razão de aspecto menor em relação à tabela 7, o mesmo comportamento se mantém pois a malha de 120x12 apresenta um erro muito grande em relação às outras malhas. O erro da malha de 120x12 fica muito menor em posições mais afastadas da entrada, a partir de $\xi = 1$. Além disso, todas as malhas apresentam dificuldade em convergir na entrada, e a malha de 2000x200 novamente se mostrou ideal para esse caso simulado.

As figuras a seguir representam curvas de erro para ordens de truncamento diferentes, variando ξ . O erro para cada ordem de truncamento é calculado pela diferença entre cada ordem de truncamento e $n_{\max} = 200$, ou seja, é dado por:

$$\epsilon = |\text{Nu}(n_{\max}) - \text{Nu}(200)|$$

Pela figura 6, vemos que o erro diminui conforme a ordem de truncamento aumenta. O erro é maior para posições axiais menores a partir de uma certa ordem de truncamento. O erro para $\xi=1$ é igual ao erro para $\xi=10$ em todas as ordens de truncamento. Pela figura 7, vemos o mesmo comportamento da figura 6, ou seja, uma tendência em reduzir o erro conforme n_{\max} aumenta e são somados mais termos na série. Com o aumento de Péclet, o erro permanece o mesmo a partir da posição axial $\xi=1$. Péclet exerce a mesma influência nas figuras 8 e 9.

Figura 6 - Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$

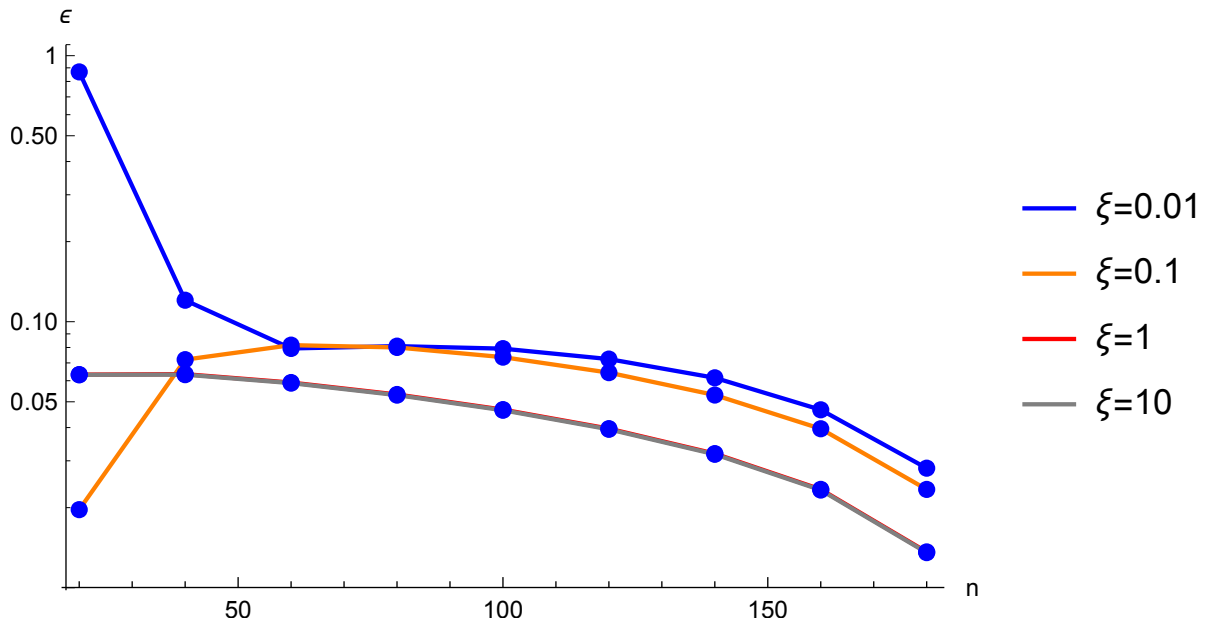


Figura 7 - Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$

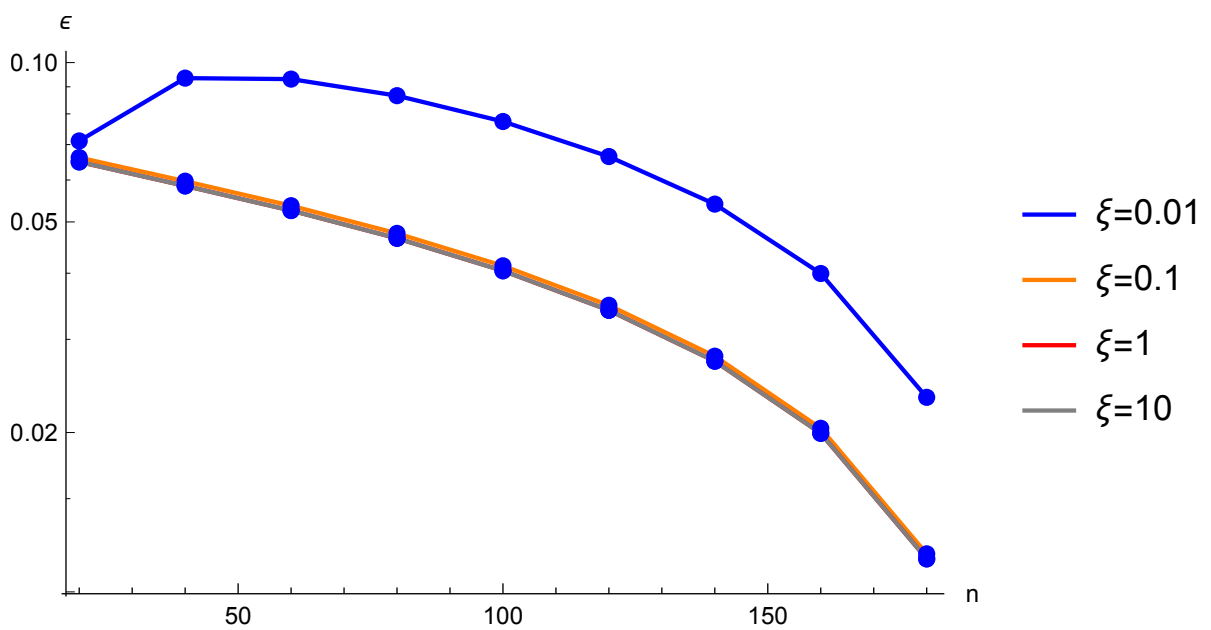


Figura 8 - Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.9$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$

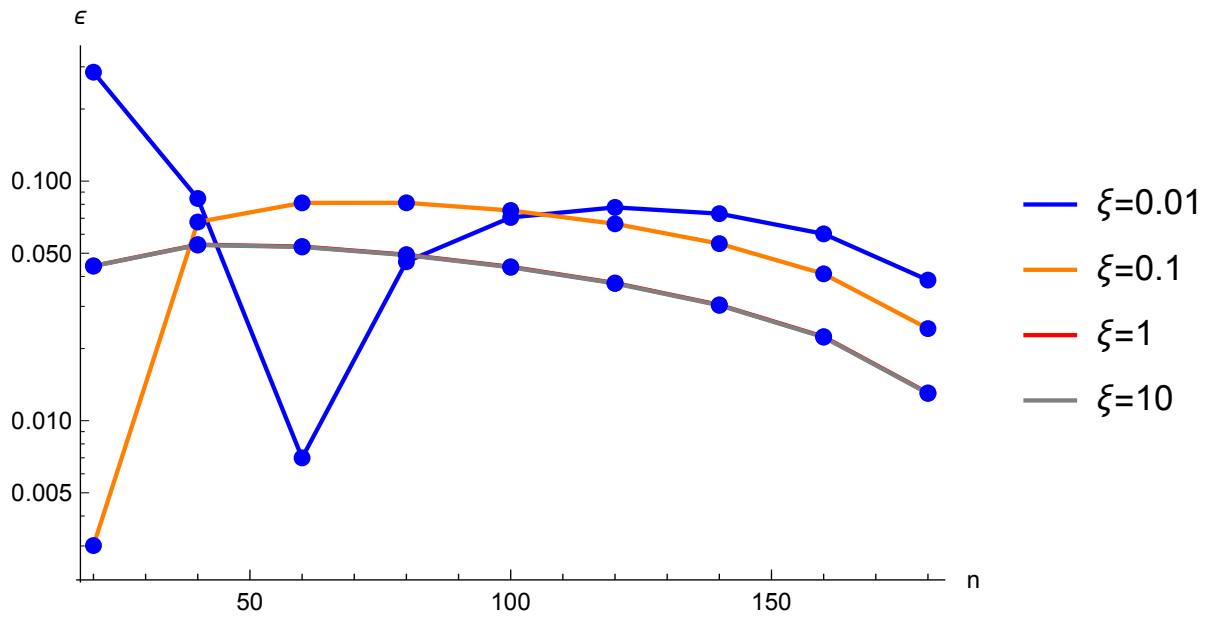
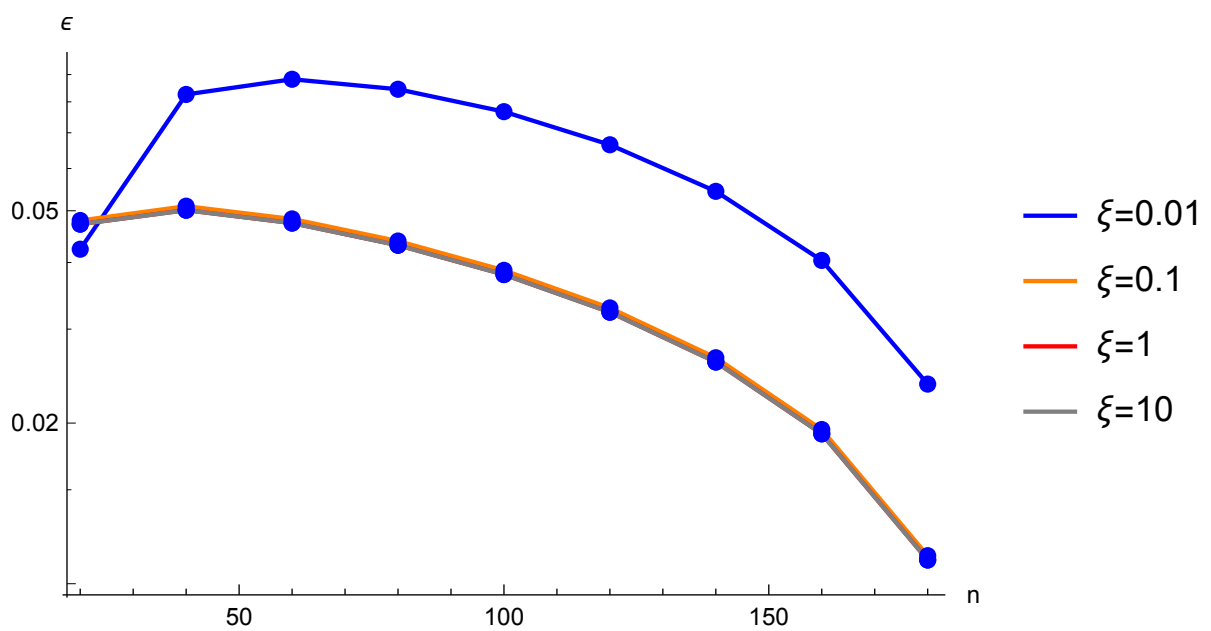


Figura 9 - Erro em função de $n_{\max} = 200$ para diferentes valores de ξ , $\beta=0.9$, $Bi = 1$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$



2.2 Validação dos resultados com a literatura

Da tabela 9 em diante, as tabelas foram feitas analisando-se Nusselt para diferentes posições axiais, conforme a variação de Péclet.

Com relação à tabela 9, os resultados obtidos foram comparados lado a lado na mesma coluna, com a literatura existente em (SHAH; LONDON, 1978) e (HENNECKE, 1968). Os valores à direita das colunas foram os resultados obtidos no gráfico de Hennecke (1968). Tais resultados não possuem um grau de precisão elevado, pois são resultados antigos gerados por computadores da época, além de terem sido tirados de gráficos, mas um excelente parâmetro para comparação. O resultados obtidos nesses casos da tabela 9 se aproximam dos obtidos por Hennecke (1968), como se pode ver na figura 10. Pode-se afirmar que para esse conjunto de dados, que o escoamento se torna termicamente desenvolvido em posições axiais mais próximas à entrada conforme Péclet aumenta. Quando $Pe=5$, o escoamento se desenvolve termicamente aproximadamente em $\xi=0.5$. Quando o número de Péclet aumenta para 10 e depois 20, isso ocorre aproximadamente em $\xi=0.3$. Já quando temos $Pe=50$ e $Pe = 10^6$, esse fato ocorre em $\xi=0.2$. As duas últimas colunas confirmam os resultados obtidos por (SHAH; LONDON, 1978) e (BEJAN, 2013) para posições axiais longe da entrada, $\beta=1$, e Péclet muito maior do que 1, pois a partir de $Pe = 50$ em $\xi = 0.1$, Nusselt já se aproxima de 3,66 quando chega finalmente em $\xi=0.2$.

A figura 10 mostra a distribuição do número de Nusselt local para valores diferentes de Péclet, na região em desenvolvimento térmico e também na região termicamente desenvolvida, conforme a tabela 9. Examinando-se o comportamento de Nusselt, nota-se que Péclet tem um efeito muito mais pronunciado em posições próximas à entrada, conforme esperado. Na entrada se encontram os maiores valores de Nusselt, que vai decaindo conforme se afasta da entrada do duto. Embora difícil de se enxergar na presente escala, os valores diferentes de Péclet geram valores diferentes de Nusselt na região termicamente desenvolvida ($\xi > 1$), que pode ser visto claramente com os dados da tabela 9. Comparando os valores do número de Nusselt com difusão axial com o caso sem difusão axial, nota-se que com o aumento de Péclet, os valores de Nusselt convergidos se aproximam do caso onde $Pe \rightarrow \infty$, como esperado.

Tabela 9 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 10^6$ e $n_{\max} = 200$. Comparação com (HENNECKE, 1968)[†].

ξ	Pe = 1		Pe = 2		Pe = 5		Pe = 10		Pe = 20		Pe = 50		Pe = 10 ⁶	
	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]
0.01	65.64	65.0	33.60	30.0	14.33	12.2	8.30	7.10	5.93	5.60	5.11	5.10	4.92	4.92
0.02	33.84	32.9	17.77	15.8	8.21	7.10	5.46	5.00	4.53	4.40	4.24	4.20	4.17	4.17
0.03	23.25	22.9	12.53	11.4	6.26	5.50	4.59	4.30	4.08	4.00	3.93	3.90	3.89	3.89
0.04	17.98	17.4	9.94	9.20	5.34	4.90	4.20	4.00	3.88	3.80	3.79	3.80	3.77	3.77
0.05	14.82	14.4	8.41	7.80	4.82	4.50	3.99	3.90	3.78	3.72	3.72	3.71	3.71	3.71
0.1	8.57	8.50	5.47	5.30	3.96	3.90	3.72	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66
0.2	5.60	5.50	4.26	4.30	3.78	3.77	3.69	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66
0.3	4.74	4.70	4.01	4.00	3.77	3.77	3.69	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66
0.4	4.38	4.50	3.95	3.92	3.77	3.77	3.69	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66
0.5	4.20	4.30	3.93	3.92	3.77	3.77	3.69	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66
1	4.03	4.03	3.92	3.92	3.77	3.77	3.69	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66
2	4.03	4.03	3.92	3.92	3.77	3.77	3.69	3.70	3.67	3.67	3.66	3.66	3.66	3.66

Tabela 10 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta=1$, $Pe = 10^6$ e $n_{\max} = 200$. Comparação com (ROHSENOW; HARTNETT; CHO, 1998)[†].

ξ	Bi = 1		Bi = 10		Bi = 100		Bi = 10 ⁶	
	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]	Nu	Nu [†]
0.01	5.90	5.98	5.24	5.37	4.95	4.98	4.92	5.00
0.02	4.94	5.05	4.39	4.61	4.20	4.24	4.17	4.27
0.03	4.56	4.67	4.06	4.29	3.91	3.96	3.89	3.96
0.04	4.37	4.50	3.91	4.10	3.78	3.87	3.77	3.83
0.05	4.26	4.37	3.84	3.94	3.72	3.81	3.71	3.76
0.1	4.13	4.15	3.76	3.85	3.67	3.71	3.66	3.66
0.2	4.12	-	3.76	-	3.67	-	3.66	-
0.3	4.12	-	3.76	-	3.67	-	3.66	-
0.4	4.12	-	3.76	-	3.67	-	3.66	-
0.5	4.12	-	3.76	-	3.67	-	3.66	-
1	4.12	-	3.76	-	3.67	-	3.66	-
2	4.12	-	3.76	-	3.67	-	3.66	-

Com relação à tabela 10, os resultados se aproximam da literatura existente em (ROHSENOW; HARTNETT; CHO, 1998) como se pode ver na figura 11. Os resultados de Rohsenow, Hartnett e Cho (1998) foram também colocados ao lado dos resultados obtidos nesse trabalho na mesma coluna à direita. Essa tabela também confirma os valores encontrados por (SHAH; LONDON, 1978) e (BEJAN, 2013), para posições axiais longe da entrada, $\beta=1$ (sem espessura de parede), e Péclet muito maior do que 1. Esses valores são mostrados na última coluna. Para $Bi=1$, o escoamento não se torna desenvolvido termicamente em posições axiais menores ou iguais a 0.2. A partir de 0.3 até valores mais longe da entrada, Nusselt não varia mais e o escoamento se torna desenvolvido termicamente. A mesma análise vale para quando $Bi=10$. Para valores de Bi iguais a 100 e posições axiais longe da entrada (a partir de $\xi=0.2$), o fluido se torna desenvolvido. Nesse tipo de escoamento, há um balanço dos mecanismos de difusão e convecção, e consequente equilíbrio térmico. É importante notar que para $Bi=0$, tem-se a condição de contorno de segundo tipo na parede (fluxo prescrito). Em contrapartida, se $Bi = \infty$, a condição de contorno é a de primeiro tipo (temperatura prescrita).

Também para a validação dos resultados, foi feita a comparação com (LIN; WANG;

Figura 10 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=1$, $Bi = 10^6$ e $n_{\max} = 200$.

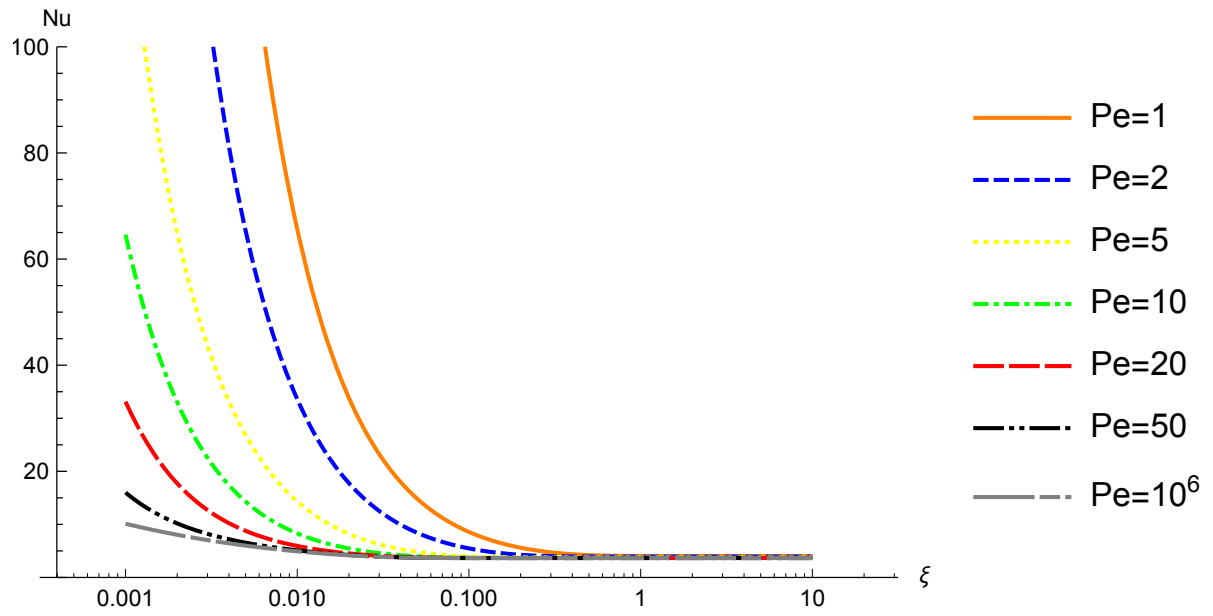


Figura 11 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Biot, $\beta=1$, $Pe = 10^6$ e $n_{\max} = 200$.

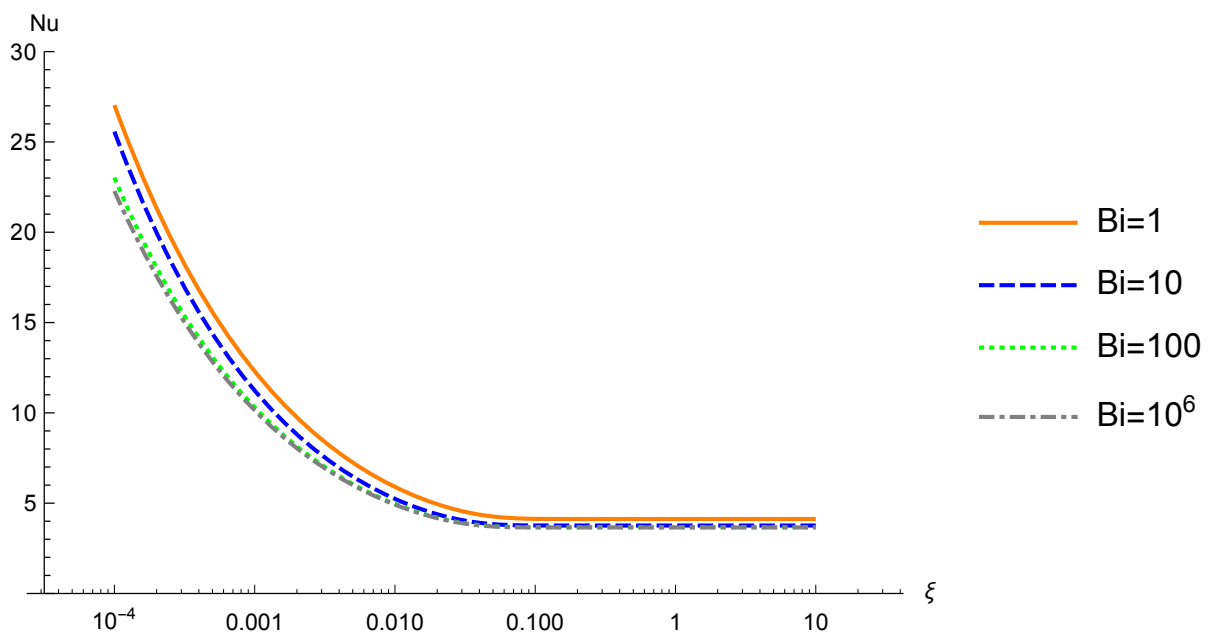


Tabela 11 - Nusselt resolvido por GITT para $Bi = 10^6$, $\xi=10$, $\tilde{k} = \tilde{k}_z = \tilde{k}_r$, números de Péclet diferentes e $n_{\max} = 200$. Comparação com (LIN; WANG; GUO, 2016)[†].

Pe = 700				Pe = 7000				Pe = 14000			
\tilde{k}	β	Nu	Nu [†]	\tilde{k}	β	Nu	Nu [†]	\tilde{k}	β	Nu	Nu [†]
1	1/6	4.21	4.22	1	1/6	4.21	4.23	1	1/6	4.21	4.33
1	1/4	4.17	4.20	1	1/4	4.17	4.21	1	1/4	4.17	4.31
1	1/2	4.06	4.07	1	1/2	4.06	4.08	1	1/2	4.06	4.20
1	1	3.66	3.66	1	1	3.66	3.66	1	1	3.66	3.66
7	1	3.66	3.66	7	1	3.66	3.66	7	1	3.66	3.66
14	1	3.66	3.66	14	1	3.66	3.66	14	1	3.66	3.66
28	1	3.66	3.66	28	1	3.66	3.66	28	1	3.66	3.66
663	1	3.66	3.66	663	1	3.66	3.66	663	1	3.66	3.66

Tabela 12 - θ resolvido por GITT para $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\eta = \beta$, $n_{\max} = 200$ e resolvido por FDM com malha de 2000 x 200.

$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 2.0$			
ξ	β	GITT	FDM	ξ	β	GITT	FDM
0.01	0.8	0.970241	0.970035	0.01	0.8	0.963999	0.963080
0.1	0.8	0.735548	0.733985	0.1	0.8	0.690349	0.683038
1	0.8	0.095357	0.0939929	1	0.8	0.066472	0.0614954
10	0.8	6.6×10^{-10}	5.9×10^{-10}	10	0.8	4.1×10^{-11}	2.2×10^{-11}
0.01	0.6	0.982460	0.982365	0.01	0.6	0.978979	0.978553
0.1	0.6	0.829063	0.828183	0.1	0.6	0.797379	0.793424
1	0.6	0.155892	0.154330	1	0.6	0.113796	0.107777
10	0.6	2×10^{-8}	1.9×10^{-8}	10	0.6	1.4×10^{-9}	9.1×10^{-10}

GUO, 2016). A tabela 11 apresenta a variação do número de Nusselt para diferentes β em uma posição axial já em regime termicamente desenvolvido, variando-se as condutividades térmicas e Péclet. Os resultados se aproximaram dos publicados por (LIN; WANG; GUO, 2016). Nessa tabela, é possível ver que o número de Nusselt diminui conforme β aumenta para todos os números de Péclet e condutividades térmicas simulados. Se compararmos dois casos com o mesmo valor de Péclet e mesmo valor de β , variando a condutividade térmica, percebe-se que uma maior condutividade térmica leva a um número de Nusselt menor, exceto para o caso com $\beta=1$, no qual a parede do duto é nula e o parâmetro condutividade não tem influência, visto que para esses casos Nusselt não varia (Nu=3.6568). Novamente é possível validar esses dados com os resultados obtidos por (SHAH; LONDON, 1978) e (BEJAN, 2013), desprezando a difusão axial com $\beta=1$ (Nu=3.66).

A tabela 12 mostra a comparação entre os métodos da GITT e FDM para o cálculo de θ , para a validação deste parâmetro. Os resultados obtidos por FDM possuem uma aproximação excelente com os resultados obtidos por GITT, e apresentam um erro muito pequeno (erro menor que 1 por cento). Logo, os resultados por FDM servem como parâmetro de comparação e validação dos resultados por GITT, que é a principal metodologia do trabalho.

2.3 Número de Nusselt

Comparando as figuras 10 e 11, considerando-se somente as posições axiais que representam a região termicamente desenvolvida, percebe-se que o valor do Nusselt local estabiliza em um valor menor quando há um aumento no número de Biot, ou seja o escoamento se desenvolve termicamente para um valor de Nusselt menor, para todos os valores de Péclet apresentados.

As figuras 12 e 13 foram simuladas considerando $\beta=0.4$, ou seja, uma espessura de parede considerável. Analisando-se a dependência do número de Péclet nessas figuras, é possível notar que quanto maior Péclet, o fluido desenvolve-se em posições mais próximas à entrada do duto. Um aumento em Bi causa um aumento ligeiro no valor de Nusselt em posições próximas à entrada para baixos números de Péclet.

Fazendo-se uma análise geral dos gráficos 14, 15, 16 e 17, simulamos um material isotrópico com o valor igual das condutividades térmicas em r e z, e percebe-se que com o aumento da condutividade verificado pela figura 17, o valor do Nusselt para cada posição axial é menor para todos os casos de Péclet simulados. Ou seja, conclui-se que o valor da condutividade térmica influenciou no valor de Nusselt, e o aumento da condutividade levou a redução do número de Nusselt.

Pela curva de $Pe=1$ da figura 14, é possível perceber que nesse caso, o escoamento teve uma maior dificuldade em se desenvolver termicamente. Isso é claro quando analisamos a posição axial $\xi=1$ no gráfico, pois para Péclet igual a 5 ou maior, temos o desenvolvimento térmico. Para $Pe=2$ o fluido se desenvolve um pouco mais à frente da posição $\xi=1$, e quando $Pe=1$ só há desenvolvimento térmico a partir da posição $\xi=5$.

Pela figura 15, os valores de Nusselt permanecem decaindo conforme Péclet aumenta, e conforme o fluido avança em posições axiais mais longe da entrada até finalmente convergir no regime termicamente desenvolvido. O mesmo comportamento da figura 15, é visto na figura 16, onde o Biot aumenta. Porém nesse caso o aumento do Biot levou a um aumento do Nusselt. As curvas das figuras 15 e 16 confirmam que Péclet e Biot exercem influência nesse tipo de problema, pois a variação desses parâmetros influi no valor do número de Nusselt, no formato da curva que tende cada vez mais a ficar constante conforme Péclet aumenta, e também é claramente visível que influem na posição axial que o escoamento se desenvolve termicamente.

O gráfico 17, além de valores menores de Nusselt causado pelo aumento das condutividades térmicas, apresenta alguns valores de Nusselt maiores para Péclet maiores em posições próximas à entrada. Esse é um comportamento diferente do verificado nos gráficos 15 e 16. Esse comportamento em posições próximas à entrada também acontece no gráfico 14 para $Pe=5, 10$ e 50 . Isso acontece devido a uma maior influência da parede nesses casos onde utilizamos $\beta=0.6$. Nos casos 15 e 16, uma parede menor foi simulada, onde $\beta=0.8$, por isso o comportamento nesses casos foi diferente.

Figura 12 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

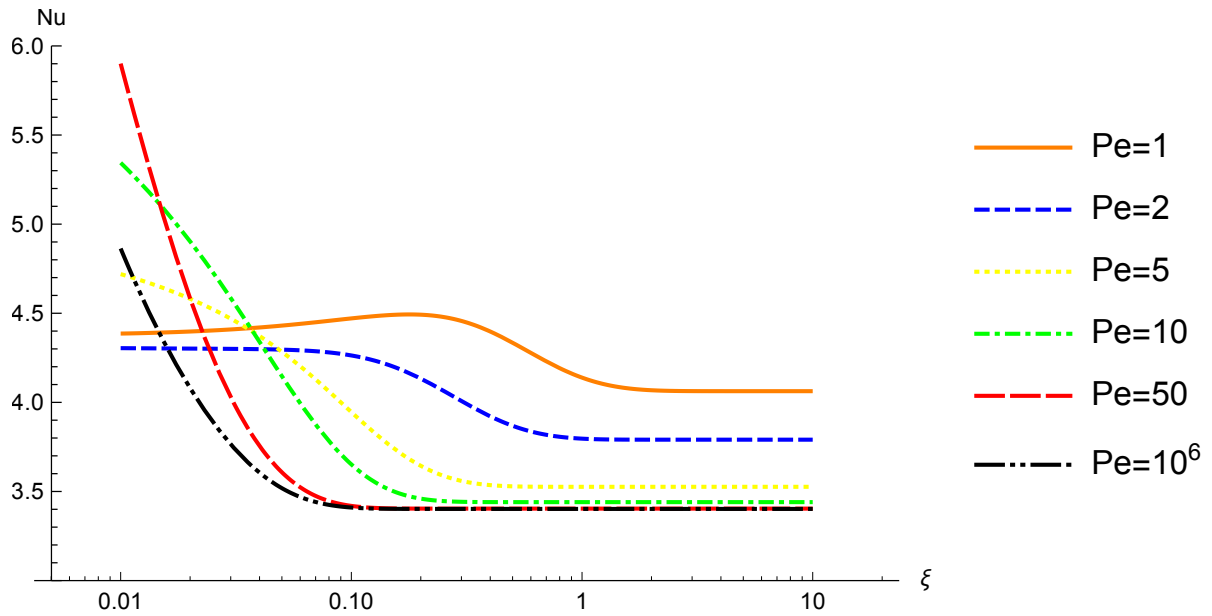


Figura 13 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

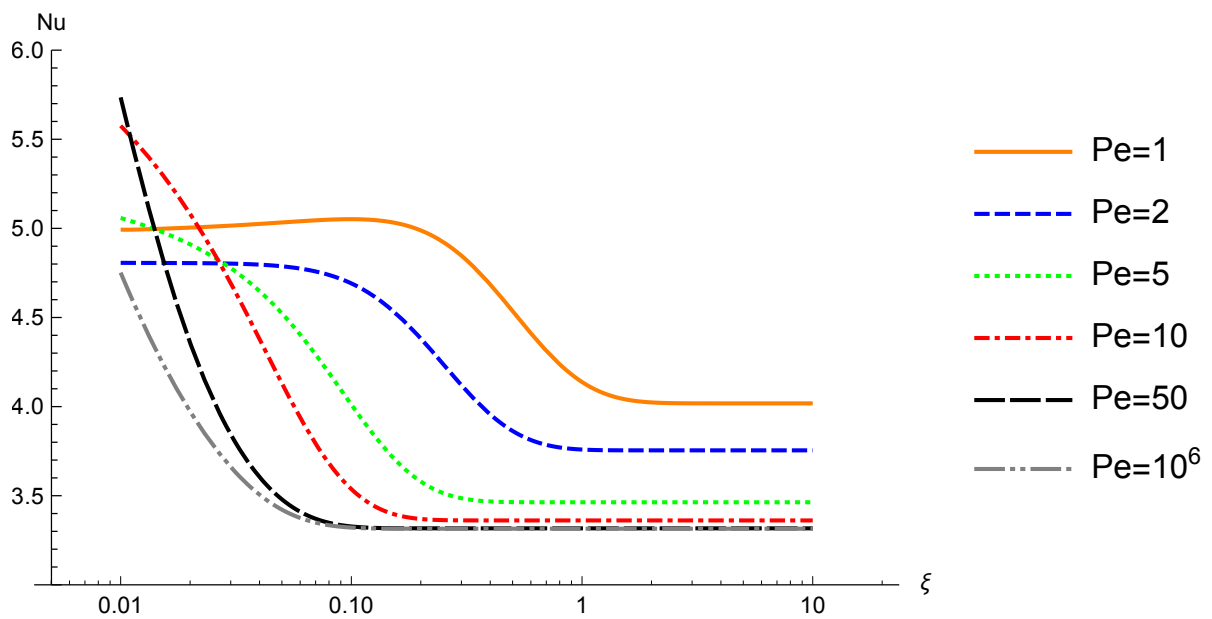


Figura 14 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

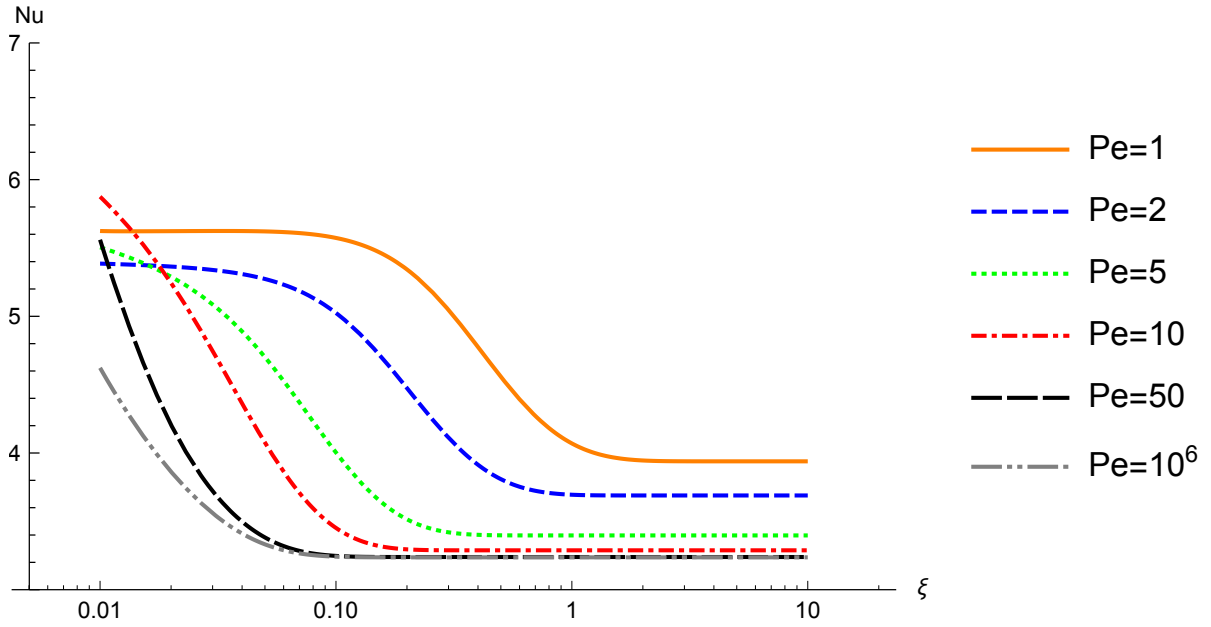


Figura 15 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

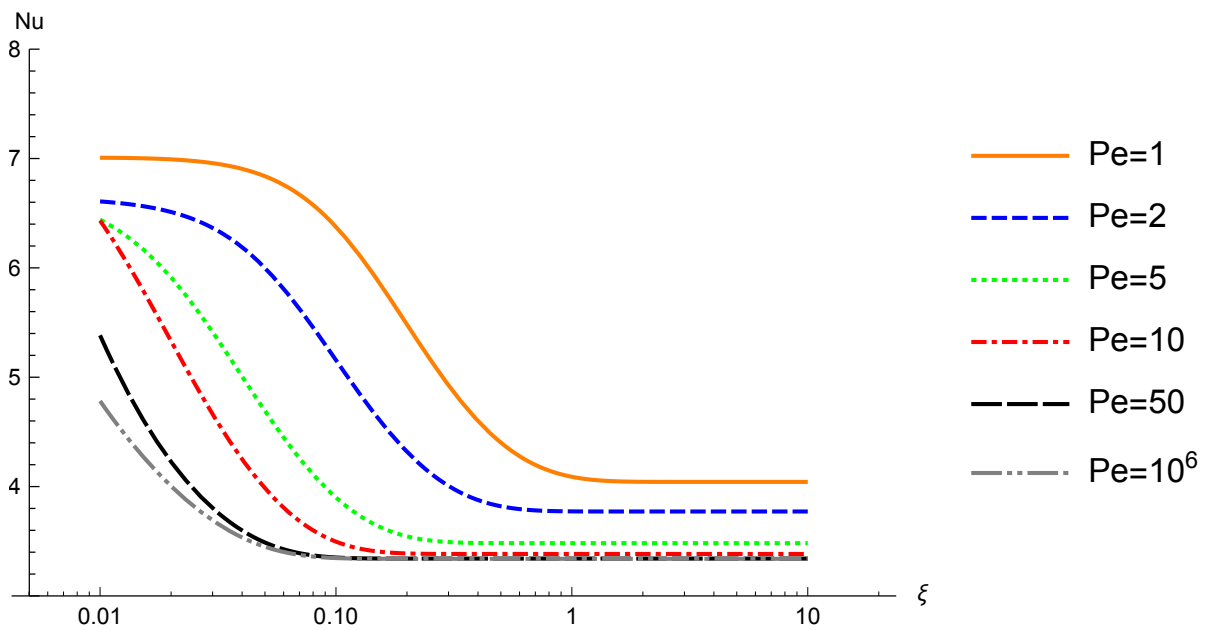


Figura 16 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

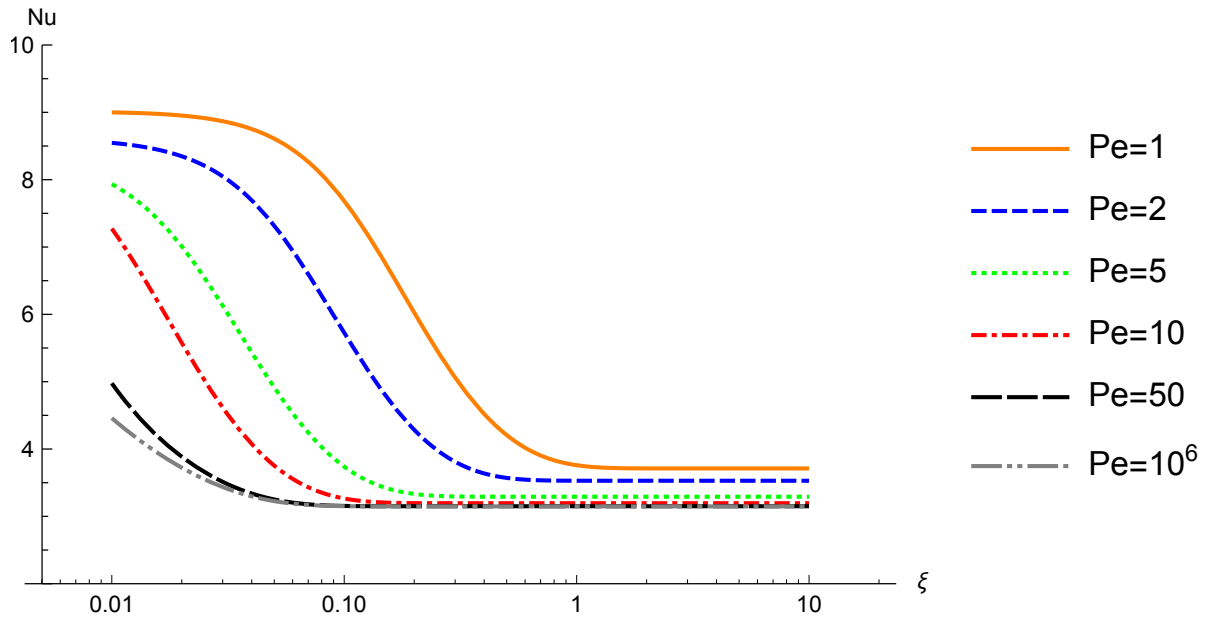
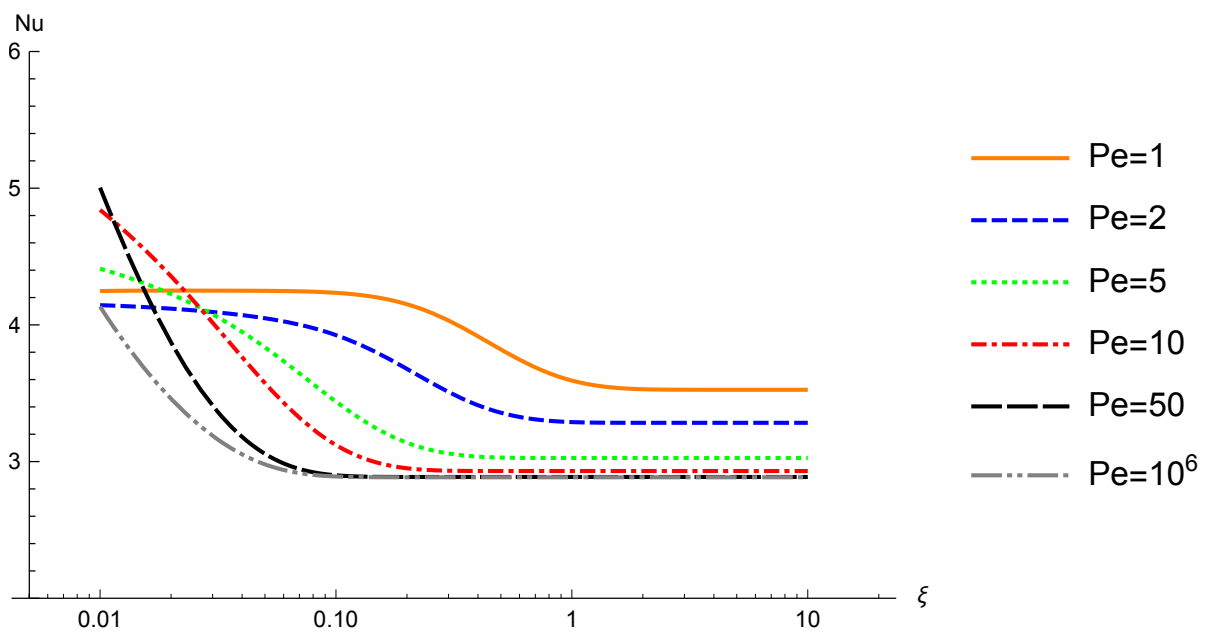


Figura 17 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.



A figura 18 apresenta alguns comportamentos similares aos casos anteriores, com valores variados de Nusselt na entrada e em posições próximas, e apresenta também maior tendência ao desenvolvimento térmico conforme Péclet aumenta. Quando $Pe = 50$, a curva apresenta comportamento quase idêntico ao caso quando $Pe = 10^6$, somente variando desta curva na entrada e em posições próximas da entrada do canal.

O gráfico 19 também apresenta uma curva quando $Pe=50$ bem similar ao caso quando $Pe = 10^6$. Esse comportamento é esperado devido a uma menor influência da difusão axial conforme Péclet aumenta. Vemos também o distanciamento da curva de $Pe = 50$ para a curva de $Pe = 10$.

O gráfico 20 mostra uma curva para $Pe=1$ muito oscilante de valores de Nusselt. Primeiramente na entrada, a curva começa com um valor alto em comparação aos demais, e cai abruptamente antes de estabilizar. Em $\xi=0.1$ começa a cair novamente antes de começar a estabilizar de novo quando passa de $\xi=1$, quando finalmente o escoamento atinge o desenvolvimento térmico conforme se afasta de $\xi=1$, e Nusselt não varia mais. Analisando pela posição $\xi=10$, é claramente visível no gráfico que as curvas apresentam valores de Nusselt que não variam mais, e permanecem constantes já pouco depois da posição $\xi=1$.

As figuras 21 e 22 representam o caso sem espessura de parede onde $\beta=1$, com a diferença do Biot maior da figura 22.

Figura 18 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

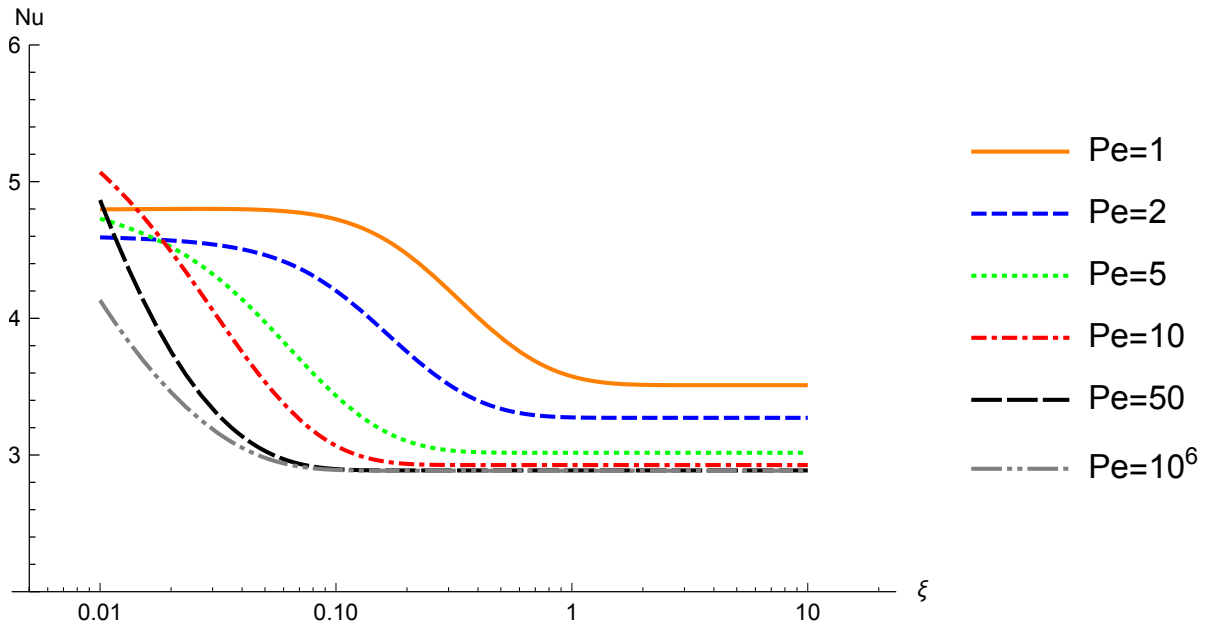


Figura 19 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

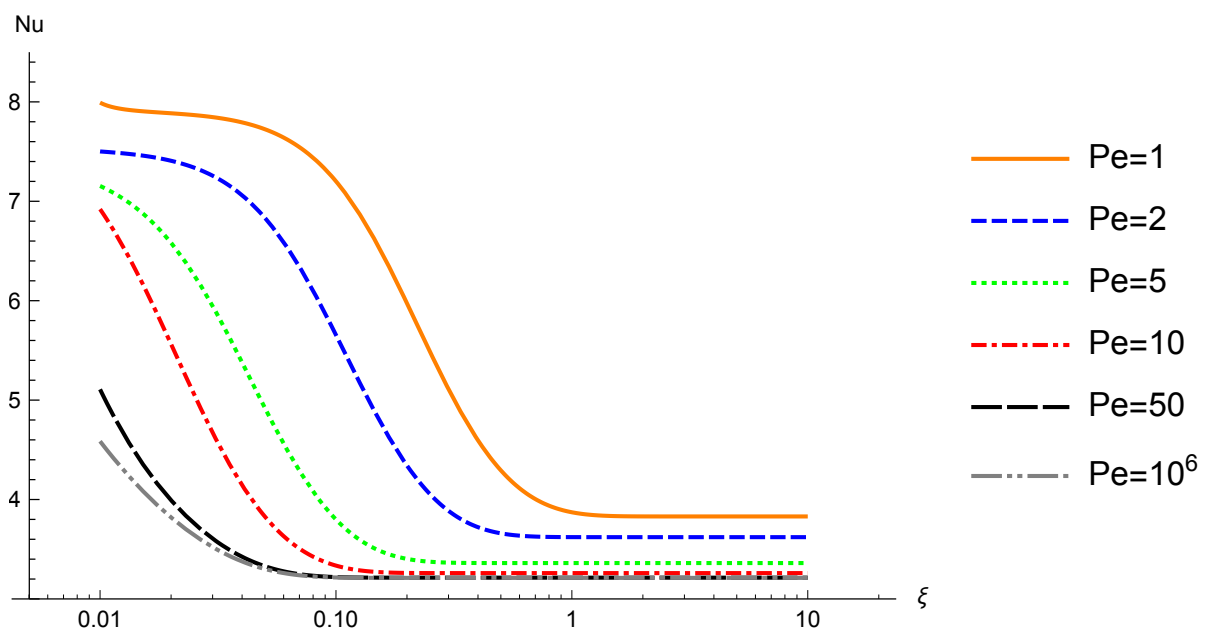
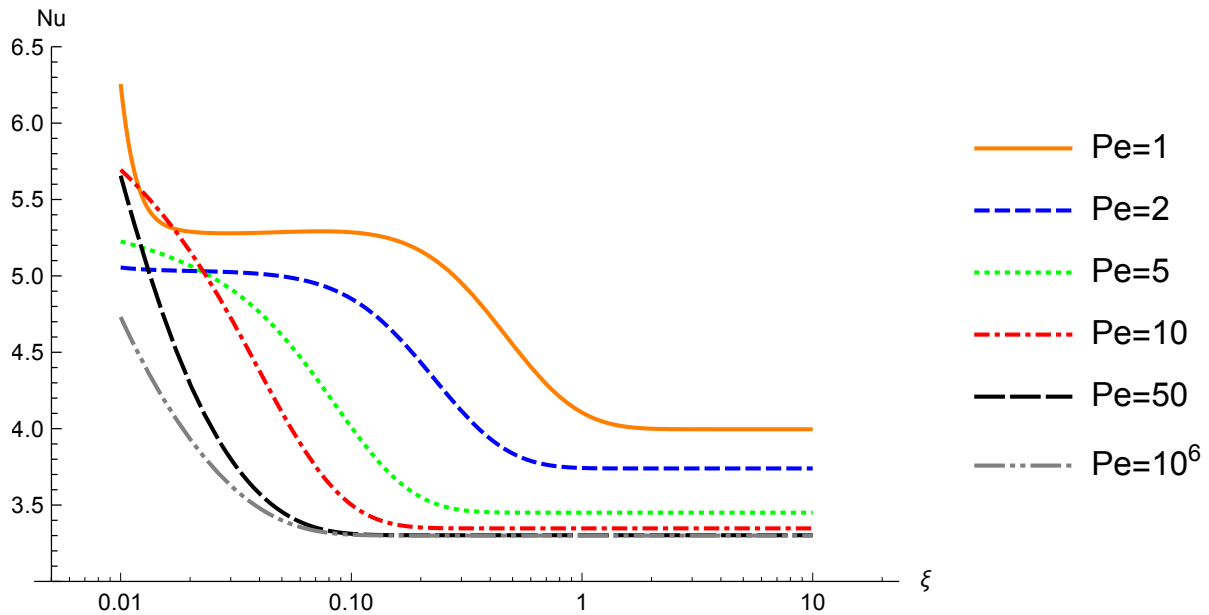


Figura 20 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.



A figura 21 mostra que β exerce influência no perfil das curvas. As curvas não oscilam e têm um perfil assintótico. A curva de $Pe=10$ já se assimila muito à curva de $Pe = 10^6$. Somente há decaimento visível de Nusselt a partir de $\xi=0.1$ para as curvas de $Pe=1$ e 2 . A solução se aproxima cada vez mais da solução sem difusão axial conforme Péclet aumenta, conforme o esperado.

A figura 22 apresenta maior decaimento de Nusselt a partir da entrada para valores pequenos de Péclet se comparada com a figura 21. Esse comportamento é visível quando $Pe= 1$ e $Pe=2$. Essa maior variação na entrada para esses casos foi devido a um maior número de Biot envolvido. Após a entrada o comportamento se repete, e Nusselt quase não varia a partir de $\xi=0.1$ para valores de Pe maiores.

Quando analisamos todas as curvas da distribuição de Nusselt em cada posição axial, percebemos que conforme o número de Péclet aumenta, o escoamento se desenvolve em posições axiais mais próximas à entrada do canal. Isso se explica devido a uma maior influência da difusão axial em casos onde Péclet é pequeno. Podemos verificar isso visualmente pela figura 18, onde a curva se torna constante em regiões mais próximas à entrada conforme Péclet aumenta. Com o aumento de Péclet, a solução se aproxima da solução quando Biot e Péclet são muito altos em dutos com parede desprezível, ou seja, com razão de aspecto igual a 1.

Em todas os casos onde $\beta=1$, é possível visualizar que o valor de Nusselt é extremamente dependente do número de Péclet, para qualquer valor de Biot, principalmente na entrada do canal, e também em posições axiais próximas à entrada. Nusselt possui valores muito altos nessas posições quando Pe não é tão alto, se comparado com posições mais

distantes da entrada. Percebe-se esse aumento significativo de Nusselt para essas posições se comparado também com casos onde $\beta < 1$. Nusselt tem uma tendência geral em diminuir com o aumento de Péclet. Conforme o esperado, onde $\beta=1$, os gráficos e tabelas não apresentam variação do número de Nusselt se todos os parâmetros se mantiverem iguais e forem simuladas outras condutividades térmicas, visto que este não influencia o valor de Nusselt, pois quando $\beta=1$, a parede do duto é desprezível.

Resumindo, em todas os casos sem exceção, conforme Péclet aumenta, os valores de Nusselt gradualmente diminuem e se aproximam da solução para o caso sem difusão axial. Nusselt diminui conforme mais longe da entrada se encontra a posição axial. Em alguns casos, Nusselt é maior para a mesma posição axial conforme Péclet aumenta, principalmente para posições próximas à entrada.

Foram simulados outros casos diversos, e esses casos podem ser encontrados no Anexo A, que contem tabelas e gráficos desses casos. Vimos que o comportamento de Nusselt pode variar significativamente conforme a variação dos parâmetros que envolvem o problema. Os casos simulados refletem aplicações físicas, ou seja, foram simulados valores de parâmetros encontrados em aplicações práticas da engenharia.

2.4 Distribuição de temperatura

Os gráficos das figuras 23, 24 e 25, demonstram a distribuição da temperatura para diferentes posições radiais variando-se ξ . É possível perceber que com o aumento de Biot, as curvas tendem a $\theta=0$, conforme a posição radial mais se afasta do centro do duto onde $\eta=0$. A curva tende mais rapidamente a $\theta=0$ para posições axiais mais distantes da entrada como mostra a figura 23. Isso acontece pois $Bi \rightarrow \infty$ representa a condição de contorno de 1º tipo.

Pelo gráfico 24, foi possível perceber que o aumento de Biot realmente leva a temperatura adimensional a tender a zero quando a posição radial mais se afasta do centro do duto. Há uma inclinação da curva cada vez maior conforme ξ aumenta, e as curvas para ξ maiores distam bastante das curvas para ξ menores, como se pode ver a partir da curva de $\xi=5$. Pode se confirmar visualmente por esse gráfico, a condição de contorno na entrada onde $\theta=1$.

Figura 21 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=1$, $Bi = 1$ e $n_{\max} = 200$.

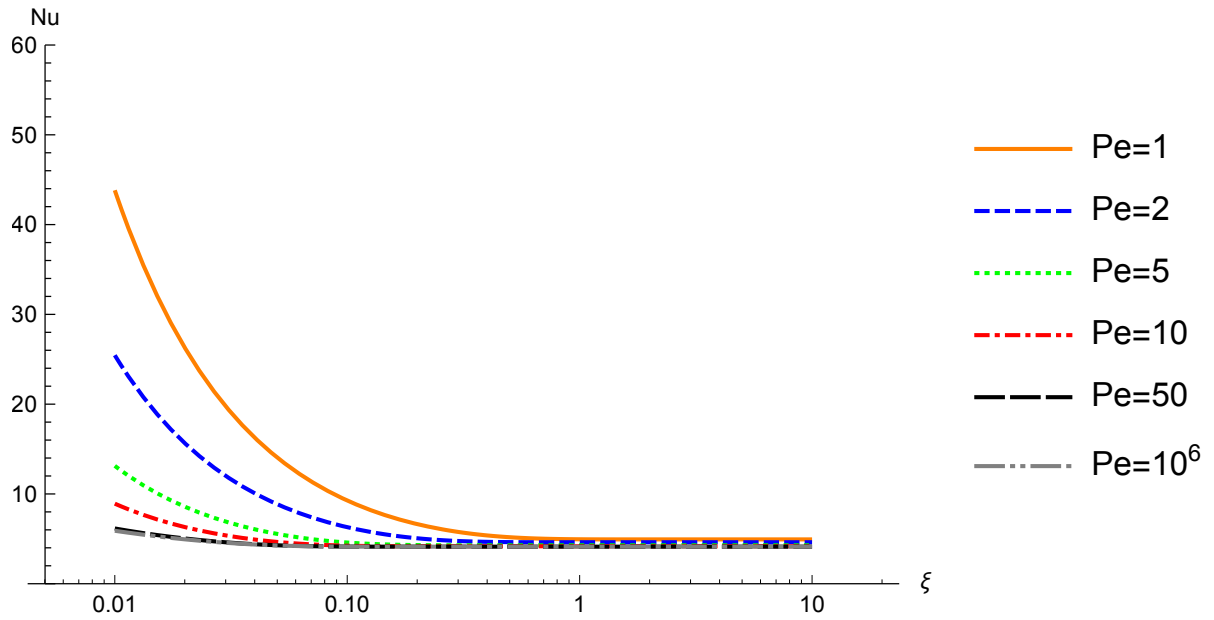


Figura 22 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=1$, $Bi = 10$ e $n_{\max} = 200$.

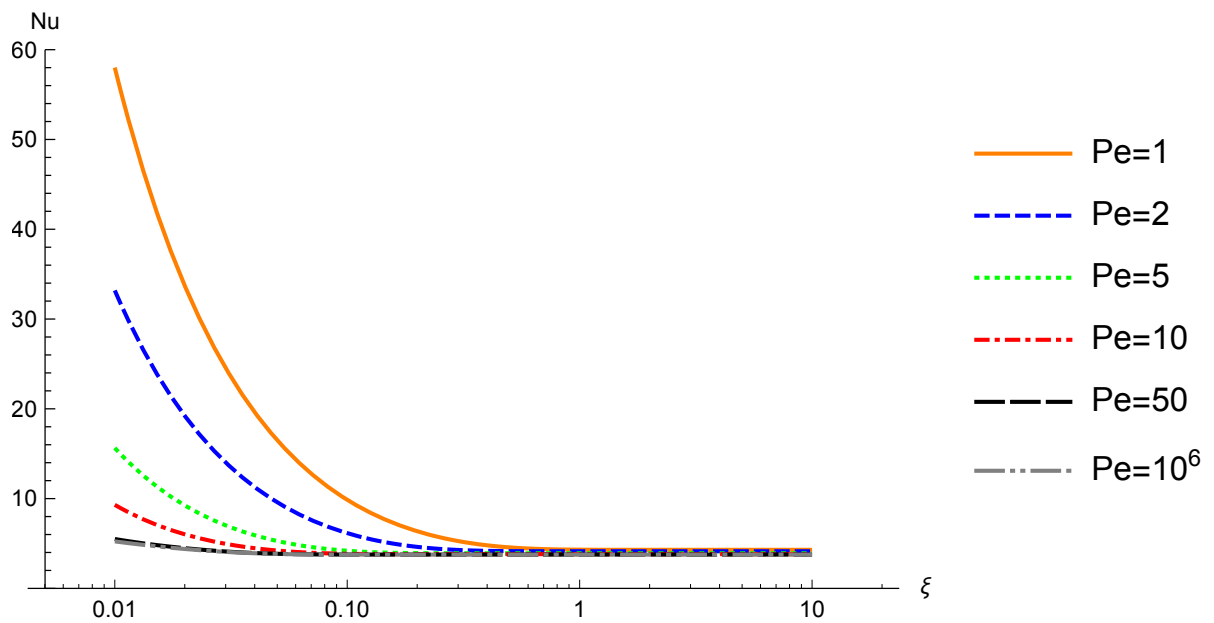


Figura 23 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

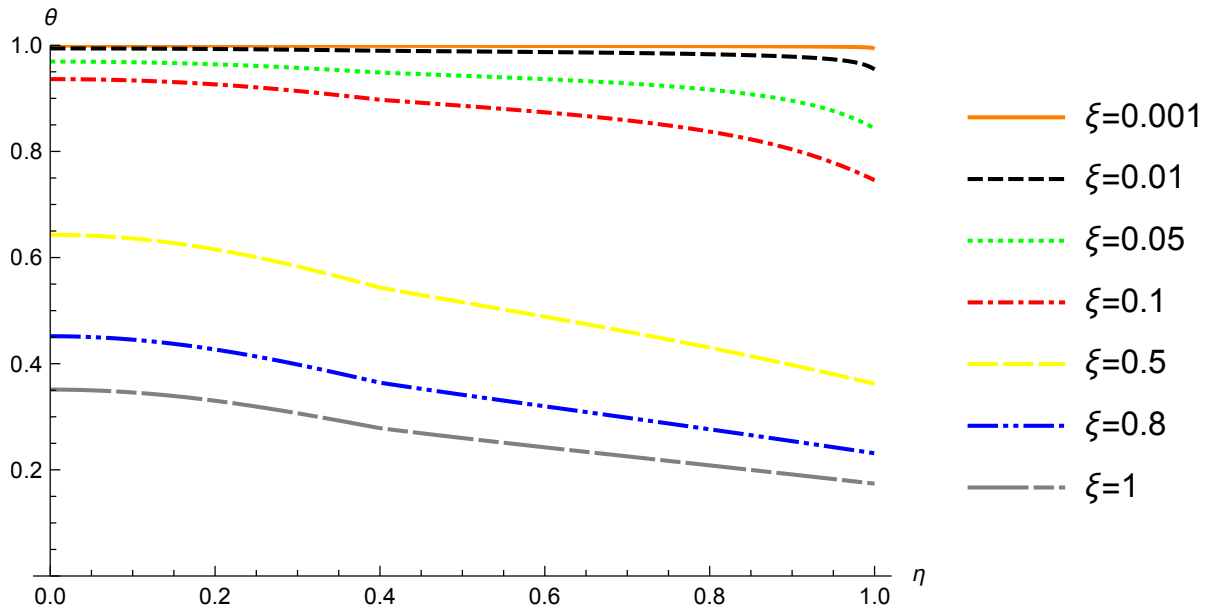


Figura 24 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

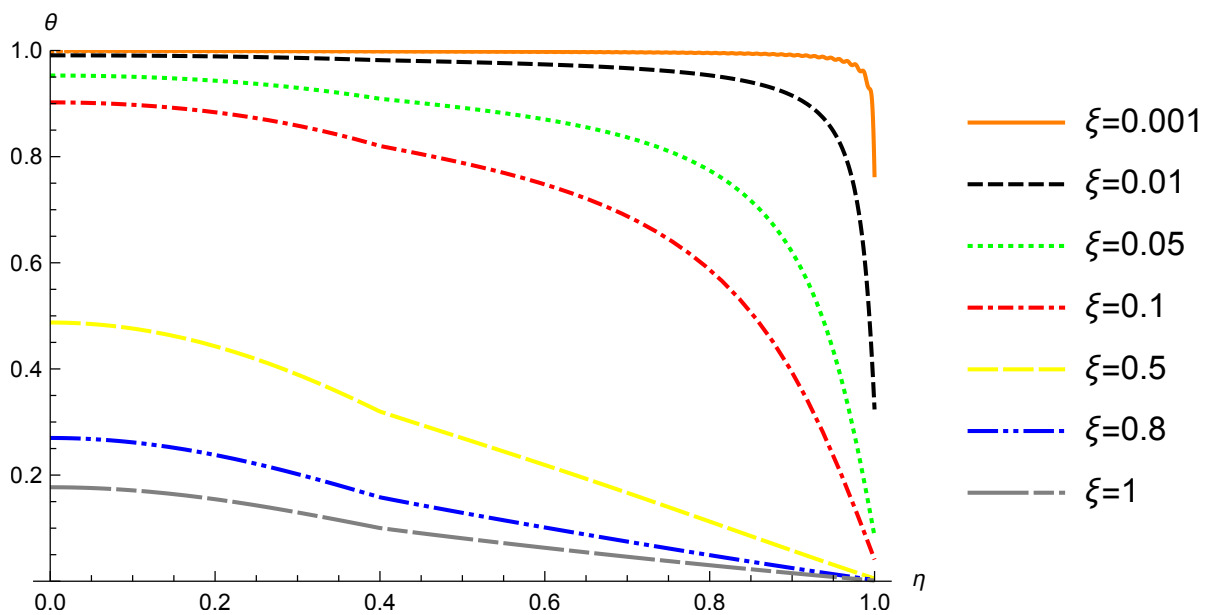
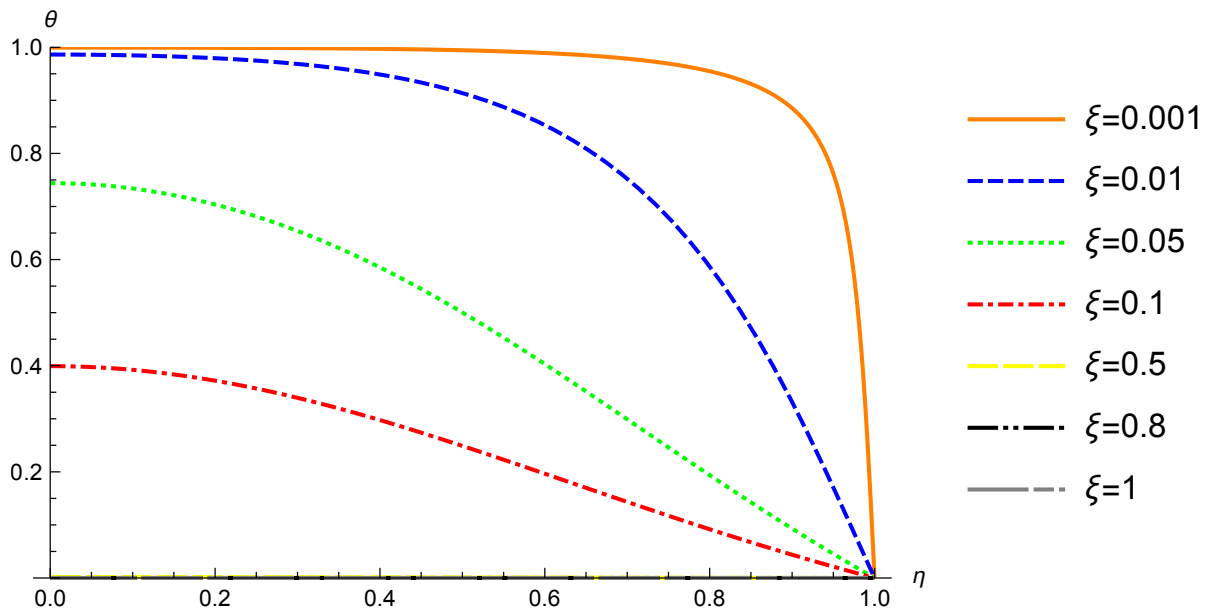


Figura 25 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.



Na figura 25 usou-se $Bi = 10^6$, e isso garantiu que θ tendesse a 0 em $\eta=1$ para posições axiais menores ou iguais $\xi=0.1$. Já para posições maiores que $\xi=0.1$, θ tem valor muito próximo de zero em todas as posições radiais quando finalmente chega a zero em $\eta=1$. Quando esse valor de Biot é aumentado, gradativamente a temperatura tende a temperatura prescrita em $\theta=0$ para todas as posições axiais. Na figura 25, a temperatura é prescrita no contorno, onde $\eta=1$, com $Bi = 10^6$ para todas as posições axiais mas afastadas da entrada. Logo é possível concluir e confirmar que o aumento de Biot causa a aproximação da condição de contorno de 1º tipo, pois Biot muito grande anula a condição de contorno de 3º tipo em $r = R_e$, ficando temperatura prescrita $\theta=0$. Devido a descontinuidade na entrada onde $\theta=1$, para valores mais próximos à entrada o valor de θ em regiões próximas à entrada é mais próximo de 1, porém se aproxima de 0 conforme a posição axial aumenta. No geral, em todos os casos onde $Bi=1$, os campos de temperatura são mais uniformes.

As figuras 26, 27, 28 e 29 representam as isolinhas de temperatura. Pela figura 26, vemos que na região de entrada temos as temperaturas mais próximas de $\theta=1$ e para regiões mais afastadas da entrada do canal temos temperaturas mais próximas de $\theta=0$.

Na figura 27, aumentamos β em relação à figura 26, e vemos que as temperaturas se aproximam de 0 em posições axiais mais perto da entrada se comparado com a figura 26. Enquanto na figura 26, a temperatura adimensional é 0.1 próximo de $\xi=2$, na figura 27 a temperatura é 0.1 próximo de $\xi=1.5$.

Na figura 28, vemos o mesmo comportamento, com temperaturas próximas à entrada igual a 1, satisfazendo portanto a condição de contorno. A partir de posições axiais

pouco depois de $\xi = 0.5$, vemos temperaturas adimensionais abaixo de 0.1, tendendo a zero. Por essa figura nós vemos que com o aumento de Péclet em relação à figura 27, as temperaturas tendem a zero em posições axiais mais próximas à entrada se comparado com a figura 27.

Na figura 29, usamos um número de Péclet e Biot muito altos sem espessura de parede. Ou seja, nessa figura temos valores de θ para o caso sem difusão axial. Pela análise da figura, vemos que existem regiões próximas de $\eta=1$ em que θ é abaixo de 0.1 para qualquer posição axial. Comparado com a figura 28 onde usamos um Péclet menor, chegamos a conclusão que Péclet tem uma forte influência no valor de θ . Mais uma vez θ tende a 0 em regiões mais próximas à entrada com um novo aumento de Péclet.

Figura 26 - Linhas de isoterma de θ em função de ξ para
 $Pe=1$, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e
 $n_{\max} = 200$.

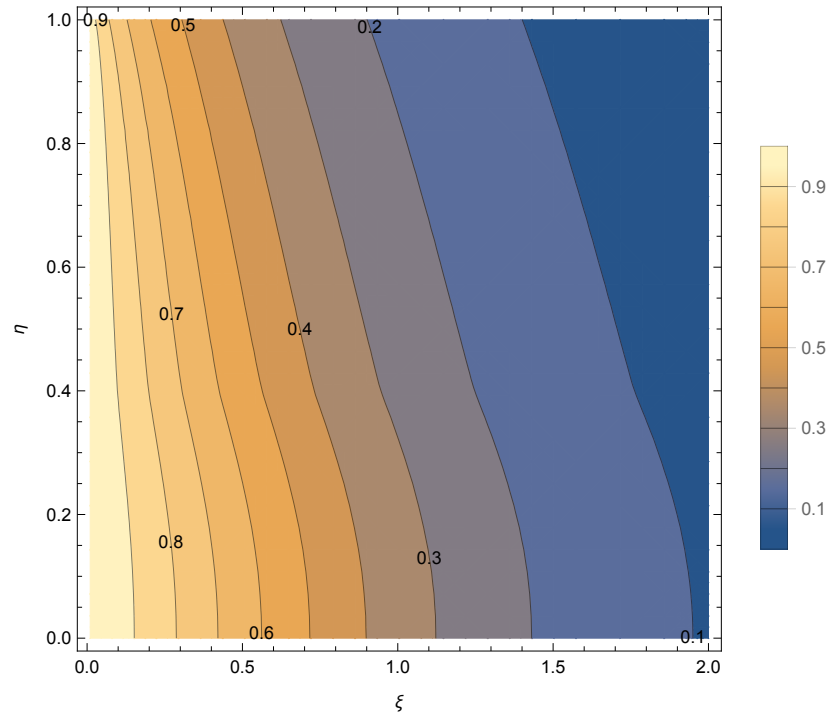


Figura 27 - Linhas de isoterma de θ em função de ξ para
 $Pe=1$, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e
 $n_{\max} = 200$.

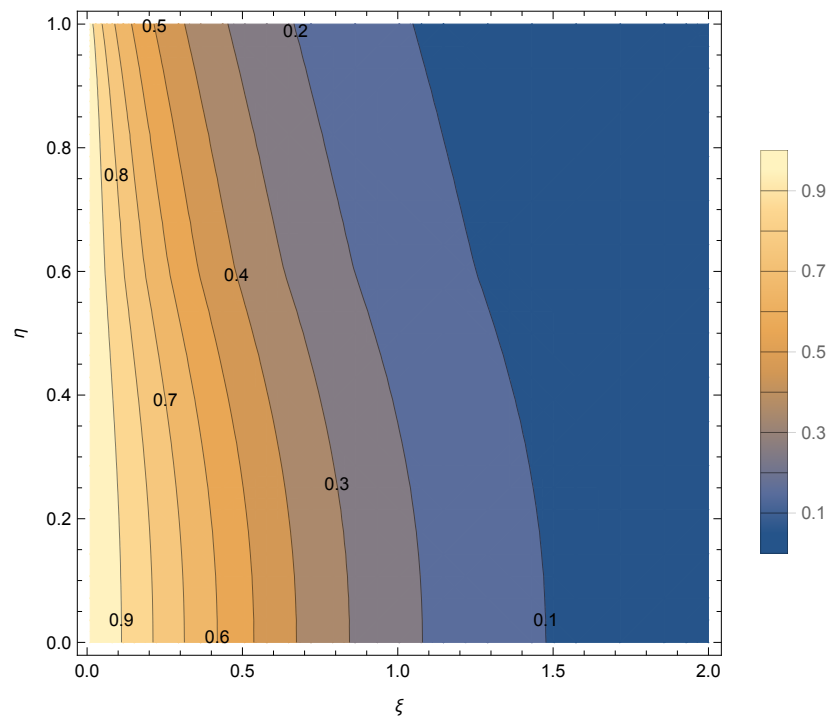


Figura 28 - Linhas de isoterma de θ em função de ξ para $Pe=10$, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

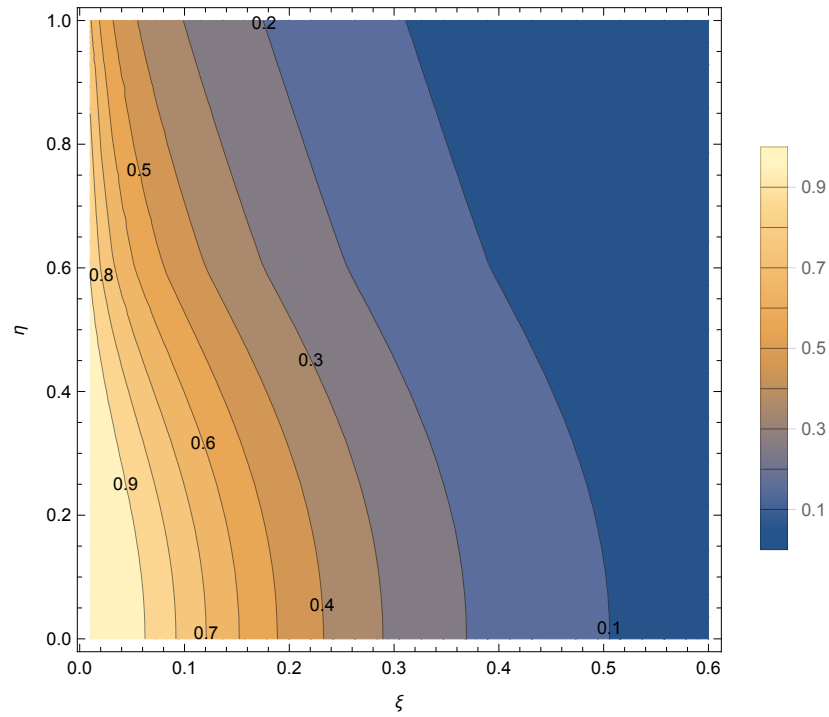
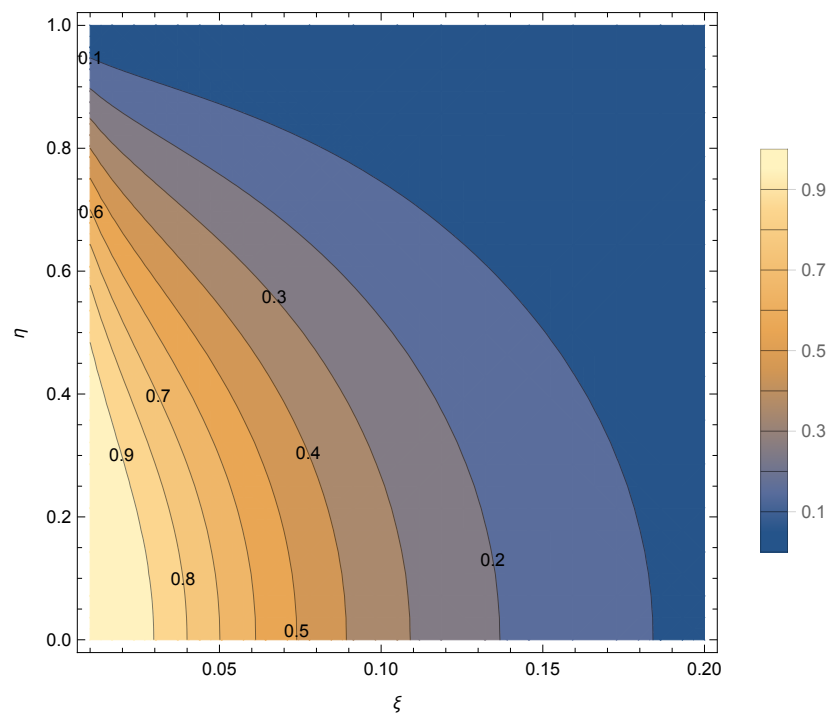


Figura 29 - Linhas de isoterma de θ em função de ξ para $Pe = 10^6$, $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.



CONCLUSÃO

Esse trabalho apresenta uma solução semi-analítica para o problema de transferência de calor conjugado em um duto com material de parede ortotrópico considerando a difusão axial. Também foram simulados casos sem difusão axial, com valor de Péclet muito maior do que 1.

Foi mostrado o comportamento da convergência do número de Nusselt local. Por GITT, 200 termos somados na série são suficientes para garantir pelo menos 2 algarismos convergidos para as regiões termicamente desenvolvidas. Porém para a entrada do duto e regiões próximas à entrada, seria necessário somar mais termos para garantir 2 algarismos significativos. Para FDM, a malha de 2000x200 mostrou ser eficiente pela análise de convergência, porém a entrada apresenta problema para convergir, assim como a GITT devido a descontinuidade da condição de contorno na entrada.

A metodologia de solução foi baseada na técnica da transformada integral generalizada, e um problema de autovalor de Bessel com solução analítica foi empregado para a transformação. Embora um sistema acoplado de EDO's foi obtido, as equações puderam ser resolvidas analiticamente, reescrevendo esse sistema numa forma modificada e empregando um método matricial. Após demonstrar a solução, a distribuição do número de Nusselt para diferentes valores de Péclet foi analisada.

Os resultados foram verificados por comparações com os dados da literatura e tiveram uma ótima concordância. O método da GITT cumpriu todas as expectativas e constitui uma excelente técnica na busca de soluções para problemas de transferência de calor conjugada com formulação de domínio único. O método pode apresentar resultados precisos se somados muitos termos na série, e mostrou ser um método eficaz para se obter resultados aproximados mesmo com menos termos somados na série.

Uma análise da convergência da solução mostrou que muito boas taxas de convergência são vistas para altos valores do número de Péclet, Biot, e razão de aspecto para posições mais afastadas da entrada do duto. Na entrada a convergência não é tão boa, porém tem uma leve melhora quando esses parâmetros são altos.

Quando Biot é 1, os campos de temperatura são mais uniformes, conforme esperado. Foi comprovada a aproximação das condições de contorno de 1º e 2º tipo para Biot muito grande e Biot muito pequeno, respectivamente.

Uma redução da taxa de convergência foi vista na entrada do canal, como esperado devido a descontinuidade da condição de contorno. Uma redução dessa taxa também foi vista para baixos valores de Péclet e Biot no geral.

Dutos com razão de aspecto igual a 1 apresentaram comportamento esperado, pois foram simuladas diversas condutividades térmicas nesses casos para comprovar que Nusselt não variou com a condutividade térmica, pois se a parede é desprezível, não

tem condução e a parede pode ter qualquer valor de condutividade térmica que não vai influenciar no valor de Nusselt. Por outro lado quando a razão de aspecto é zero, o duto é maciço e não contém escoamento interno. Não foram simulados casos para esse valor de razão de aspecto nula. Quanto mais o valor da razão de aspecto se aproximou de 1, menor foi o valor da espessura de parede simulada. Por outro lado, quanto mais o valor da razão de aspecto se aproximou de zero, maior foi o valor da espessura de parede simulada. A análise gráfica de casos sem espessura de parede ($\beta=1$), mostrou que as curvas não variaram tanto a partir de uma certa posição axial. As curvas apresentaram perfil similar, e os resultados se aproximaram cada vez mais da solução sem difusão axial.

Quando os valores das condutividades térmicas \tilde{k}_z e \tilde{k}_r mudam de 0.5 e 1.5 respectivamente para 1.5 e 0.5, o resultado é uma ligeira piora da taxa de convergência em alguns casos, e quando as condutividades simuladas aumentam, o Nusselt convergido diminui para cada posição axial nas regiões em desenvolvimento térmico e também nas regiões termicamente desenvolvidas se comparado com casos com menor condutividade.

Também foram simulados casos com condutividades térmicas iguais, ou seja, casos de materiais isotrópicos. Os resultados foram analisados com base na variação dos parâmetros adimensionais. Resultados gráficos ilustraram muito bem o comportamento das curvas. Os resultados mostraram que assim como em materiais ortotrópicos, o aumento das condutividades térmicas levou a um menor número de Nusselt.

Pela distribuição do Nusselt local para cada posição axial, foi possível concluir que o escoamento se desenvolveu termicamente em posições axiais mais próximas à entrada quanto maior foi o número de Nusselt simulado. Esse comportamento foi o esperado, devido a uma menor influência da difusão axial conforme Péclet aumenta. A análise da distribuição de Nusselt também mostrou que para casos simulados de dutos com parede desprezível, Nusselt é muito dependente de Péclet em posições axiais próximas à entrada para baixos valores de Péclet, devido a uma maior variação de Nusselt nessas posições.

Pela análise das isolinhas de temperatura, vemos que Péclet influi no valor de θ e em sua tendência a valores abaixo de 0.1, conforme Péclet aumenta. O caso sem difusão axial mostrou regiões em que θ é próximo de 0 perto de $\eta=1$ para qualquer posição axial.

Através dos gráficos das curvas de erro de GITT, foi possível concluir que o erro associado à série é menor conforme a ordem de truncamento aumenta, ou seja, o erro é menor quando mais termos são somados na série.

Com relação à toda a análise do problema, resultados ilustrativos foram apresentados, mostrando a variação do número de Nusselt local com posições axiais para diferentes valores de Péclet, Biot, razão de aspecto e condutividades térmicas.

Como comentário final, uma boa sugestão para trabalhos futuros seria implementar a técnica da transformada integral generalizada com o balanço integral na formulação do Nusselt, juntamente com o método das diferenças finitas, para dutos de geometrias diferentes, e condições de contorno e aquecimento diferentes.

REFERÊNCIAS

- BARRON, R. F.; WANG, X.; WARRINGTON, R. O.; AMEEL, T. Evaluation of the eigenvalues for the graetz problem in slip-flow. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Ruston, Louisiana 71272 USA, v. 23, p. 563–574, 1996.
- BEJAN, A. *Convection heat transfer*. Durham, North Carolina: John Wiley & Sons, 2013.
- BRAGA JR, N. R.; BARROS, L. S. de; SPHAIER, L. A. Generalized integral transform solution of extended graetz problems with axial diffusion. *ICCM*, Niterói, RJ, 2014.
- CALLISTER, W. D. *Ciência e Engenharia de Materiais*. [S.l.: s.n.], 2012.
- CASTELLÕES, F. V.; COTTA, R. M. Analysis of transient and periodic convection in microchannels via integral transforms. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, v. 6, p. 321–326, 2006.
- CHALHUB, D. J. N. M. *Desenvolvimento de Soluções Para Problemas de Advecção-Difusão Combinando Transformação Integral e Métodos Discretos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ, 2011.
- CHALHUB, D. J. N. M.; SPHAIER, L. A.; ALVES, L. S. de B. Integral transform solution of convective heat transfer problems using upwind approximations. *Numerical Heat Transfer*, Niterói, RJ, v. 63, p. 167–187, 2013.
- CHALHUB, D. J. N. M.; SPHAIER, L. A.; ALVES, L. S. de B. Integral transform solution for thermally-developing slip-flow within isothermal parallel plates. *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, Niterói, RJ, v. 8, n. 2, p. 147–161, 2016.
- COTTA, R. M. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1993.
- COTTA, R. M. *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*. [S.l.]: Begell House, Inc., 1998.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. *Heat conduction: lumped analysis, integral transforms, symbolic computation*. [S.l.]: John Wiley & Son Limited, 1997.
- COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; KNUPP, D. C. Enhanced convergence of eigenfunction expansions in convection-diffusion with multiscale space variable coefficients. *Numerical Heat Transfer*, Rio de Janeiro, RJ, 2016.
- DA SILVA, E. F.; COTTA, R. M. Benchmark results for internal forced convection through integral transformation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Rio de Janeiro, RJ, v. 23, p. 1019–1029, 1996.
- DA SILVA, E. F.; GUERRERO, J. S. P.; COTTA, R. M. Integral transform solution of boundary layer equations in stream function-only formulation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Rio de Janeiro, RJ, p. 51–61, 1999.

- GRIMNBERG, G. A. *Selected problems of mathematical theory of electrical and magnetic effects*. [S.l.]: Nauk, 1948.
- GUEDES, R. O. C.; COTTA, R. M.; BRUM, N. C. L. Heat transfer in laminar flow with wall axial conduction and external convection. *J. Thermophysics*, Rio de Janeiro, RJ, v. 5, 1990.
- GYVES, T. W.; IRVINE JR, T. F. Laminar conjugated forced convection heat transfer in curved rectangular channels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, New York, USA, p. 3953–3964, 1999.
- HENNECKE, D. K. Heat transfer by hagen-poiseuille flow in the thermal development region with axial conduction. *Heat and Mass Transfer*, v. 1, p. 177–184, 1968.
- HWANG, C. L.; FAN, L. T. Finite difference analysis of forced-convection heat transfer in entrance region of a flat rectangular duct. Manhattan, Kansas, USA, v. 13, p. 401–422, 1964.
- JEONG, H. E.; JEONG, J. T. Extended graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Buk-ku, Gwangju 500-757, Republic of Korea, v. 49, p. 2151–2157, 2006.
- KNUPP, D. C.; COTTA, R. M.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; KAKAÇ, S. Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral transforms with single domain formulation. *International Journal of Thermal Sciences*, Rio de Janeiro, RJ, v. 88, p. 248–257, 2015.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Rio de Janeiro, RJ, v. 39, p. 355–362, 2012.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Conjugated convection-conduction analysis in microchannels with axial diffusion effects and a single domain formulation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Rio de Janeiro, RJ, v. 135, 2013.
- LI, R.; ZHONG, Y.; TIAN, B.; LIU, Y. On the finite integral transform method for exact bending solutions of fully clamped orthotropic rectangular thin plates. *Applied Mathematics Letters*, Liaoning Province, China, p. 1821–1827, 2009.
- LIN, M.; WANG, Q. W.; GUO, Z. Investigation on evaluation criteria of axial wall heat conduction under two classical thermal boundary conditions. *Applied Energy*, China, v. 162, p. 1662–1669, 2016.
- MEDEIROS, P. S. G.; BARBOSA, C. R. F.; FONTES, F. A. O. Propriedades termofísicas de fluidos secundários à base de álcool para termoacumulação. Rio Grande do Norte, RN, 2010.
- MICHELSSEN, M. L.; VILLADSEN, J. The graetz problem with axial heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Danmarks tekniske Højskole, 2800 Lyngby, Denmark, v. 17, p. 1391–1402, 1974.

- MIKHAILOV, M. D. On the solution of the heat equation with time dependent coefficient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 18, p. 344–345, 1975.
- MORINI, G. L. Analytical determination of the temperature distribution and nusselt numbers in rectangular ducts with constant axial heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Ferrara, Italy, p. 741–755, 2000.
- NAVEIRA, C. P.; LACHI, M.; COTTA, R. M.; PADET, J. Integral transform solution of transient forced convection in external flow. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Rio de Janeiro, RJ, v. 34, p. 703–712, 2007.
- NAVEIRA, C. P.; LACHI, M.; COTTA, R. M.; PADET, J. Hybrid formulation and solution for transient conjugated conduction-external convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Rio de Janeiro, RJ, p. 112–123, 2009.
- NOTTER, R. H.; SLEICHER, C. A. A solution to the turbulent graetz problem - iii fully developed and entry region heat transfer rates. *Chemical Engineering Sciences*, Washington, USA, v. 27, p. 2073–2093, 1972.
- NUNES, J. S. *Análise teórico-experimental da conjugação condução e convecção de calor em microcanais assimétricos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2008.
- OZISIK, M. N. *Boundary value problems of heat conduction*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc, 1968.
- OZISIK, M. N.; MURRAY, R. L. On the solution of linear diffusion problems with variable boundary condition parameters. *Journal of Heat Transfer*, v. 96c, p. 48–51, 1974.
- PAPOUTSAKIS, E.; RAMKRISHNA, D.; LIM, H. C. The extended graetz problem with dirichlet wall boundary conditions. *Applied Scientific Research*, Houston, TX 77001, U.S.A., v. 36, p. 13–34, 1980.
- PEREIRA, L. M.; GUERRERO, J. S. P.; COTTA, R. M. Integral transformation of the navier-stokes equations in cylindrical geometry. *Computational Mechanics*, Rio de Janeiro, RJ, v. 21, p. 60–70, 1998.
- RODIET, C.; NIEZGODA, M.; REMY, B.; DEGIOVANNI, A. New estimation method based on integral transforms for the thermal diffusivity measurement of anisotropic materials. *International Heat Transfer Conference*, Kyoto, Japan, 2014.
- ROHSENOW, W. M.; HARTNETT, J. P.; CHO, Y. I. *Handbook of heat transfer*. USA: McGraw-Hill, 1998.
- SCHMIDT, P. M. W.; LEPPERT, G. Heat transfer and friction for laminar flow of gas in a circular tube at high heating rate. solutions for hydrodynamically developed flow by a finite-difference method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, California, p. 1281–1301, 1965.
- SHAH, R. K.; LONDON, A. L. *Laminar flow forced convection in ducts: A source book for compact heat exchanger analytical data*. In T. F. Irvine Jr. and J. P. Hartnet, editors, *Advances in Heat Transfer*. New York, USA: Academic Press, 1978.

SILVA, J. N. N. R. L.; QUARESMA, C. A. C.; SANTOS, R. M. C. Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Rio de Janeiro, RJ, v. 21, p. 219–243, 2010.

TORRANCE, K. E. Comparison of finite-difference computations of natural convection. *Journal of research of the National Bureau of Standards - B. Mathematical Sciences*, Washington, D. C., USA, v. 72B, 1968.

TRANter, C. J. *Integral transform in mathematical physics*. New York: John Wiley, 1962.

ANEXO A – Outros resultados

Figura 30 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

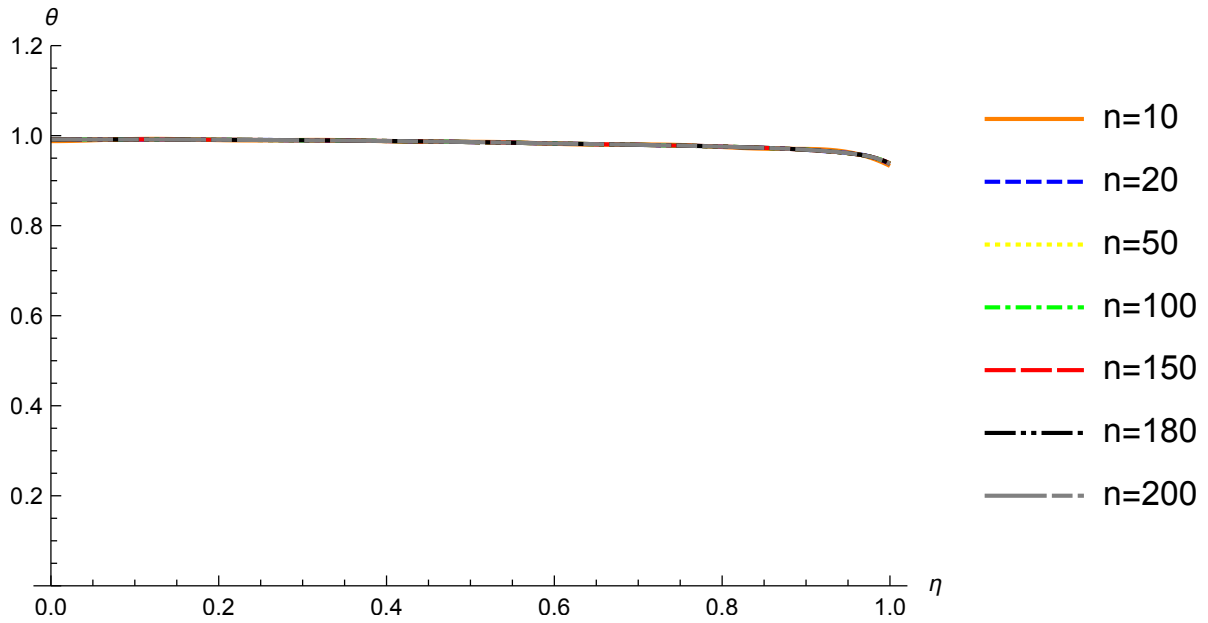


Figura 31 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

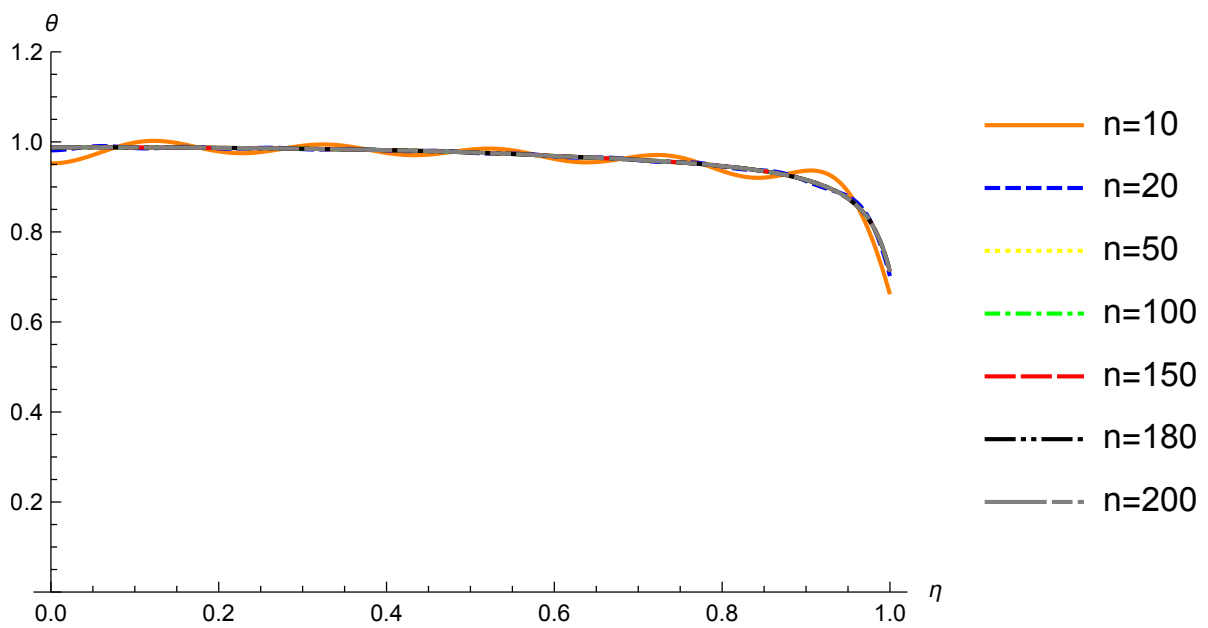


Figura 32 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

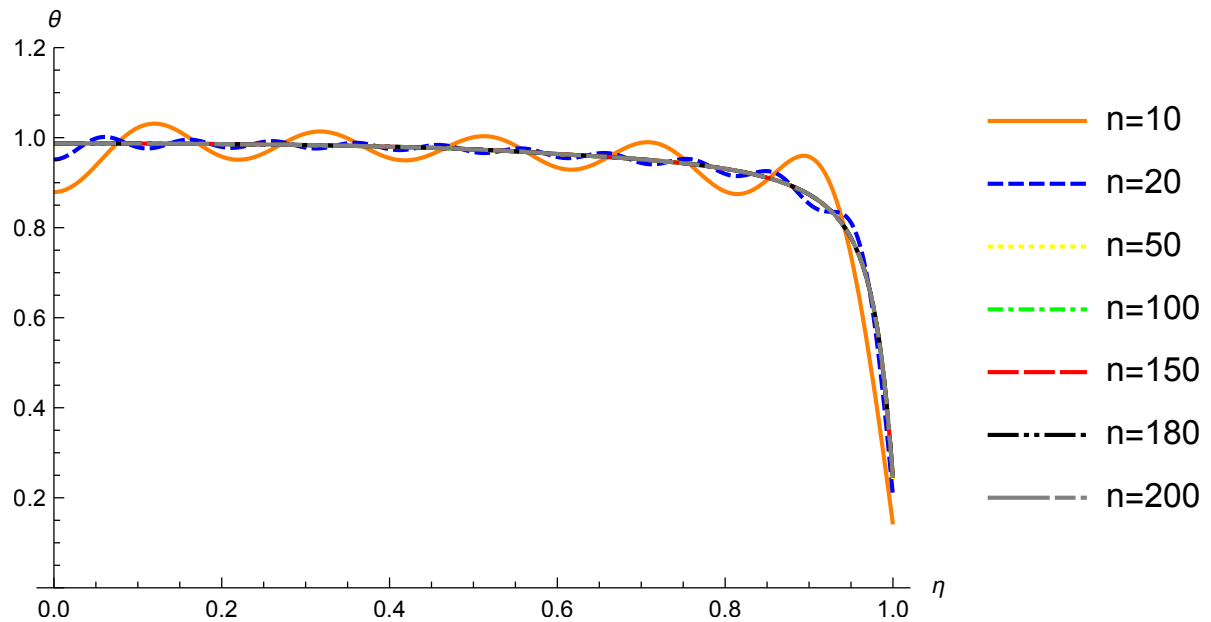


Figura 33 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 5$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$.

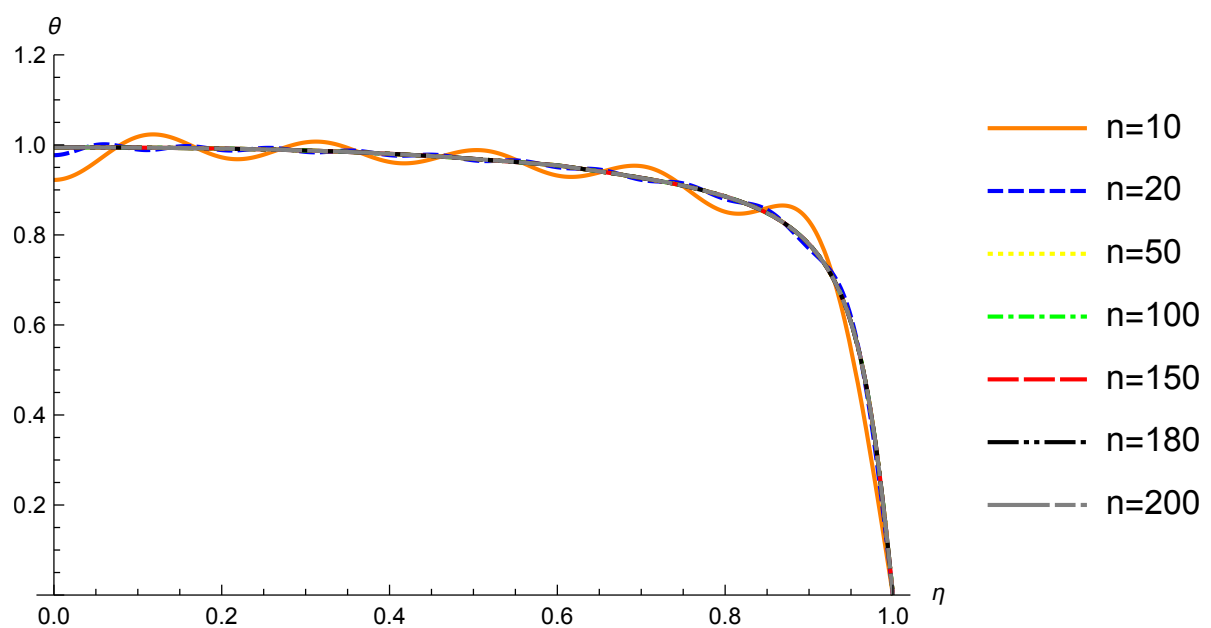


Figura 34 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$.

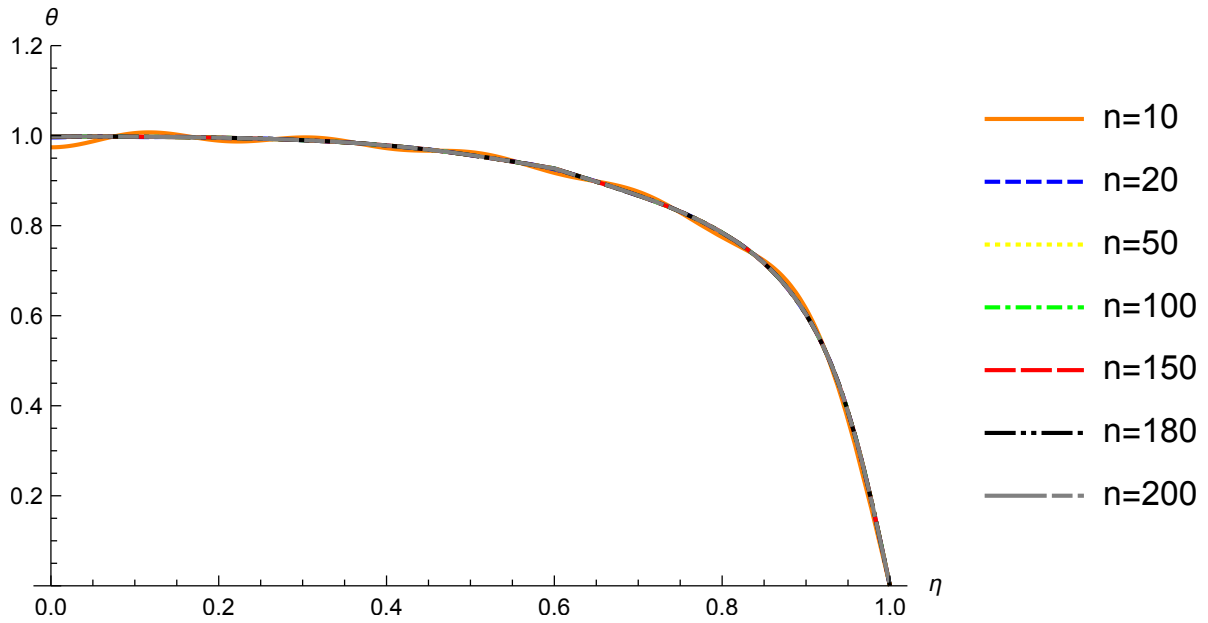


Figura 35 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $\xi = 0.01$.

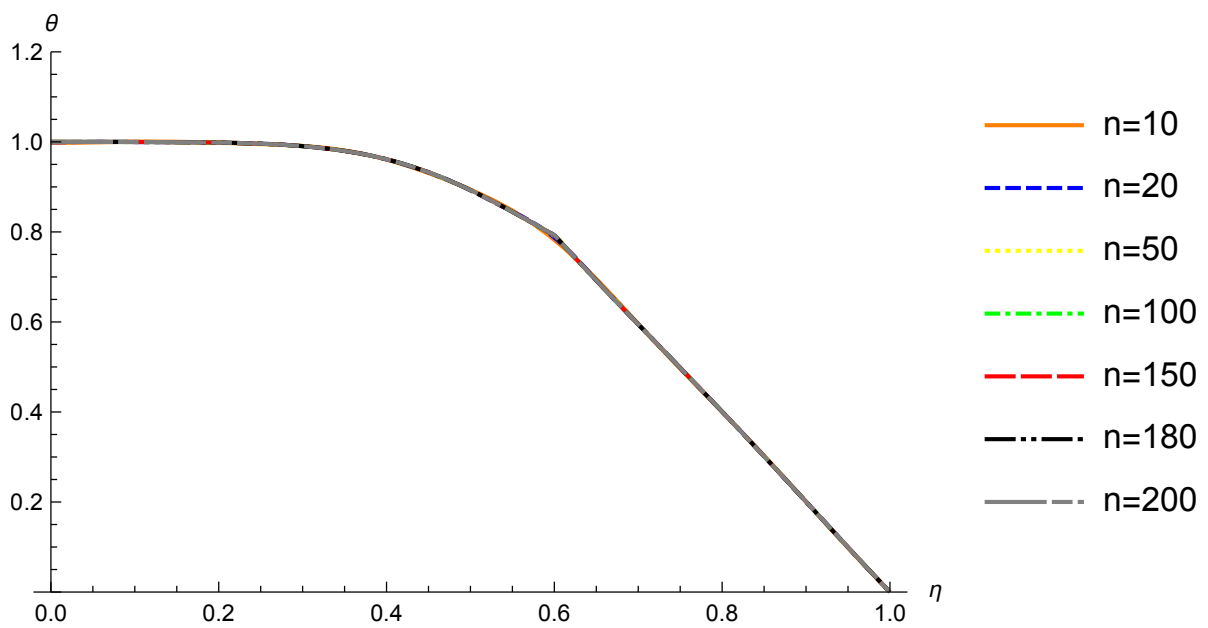


Figura 36 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.6$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

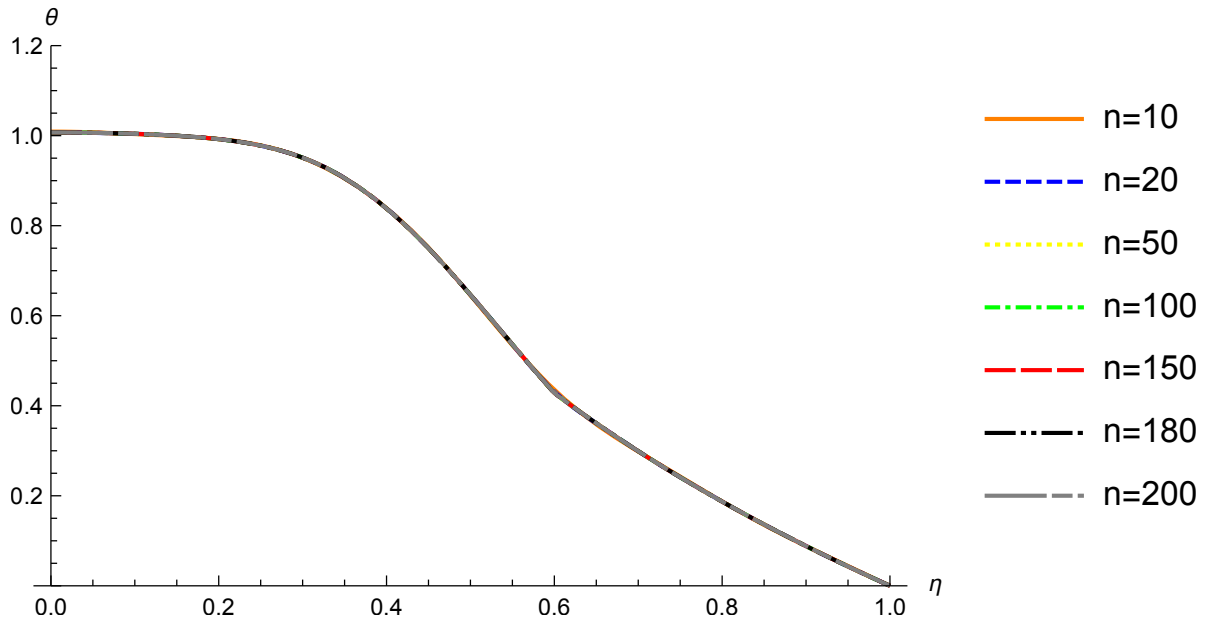


Figura 37 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

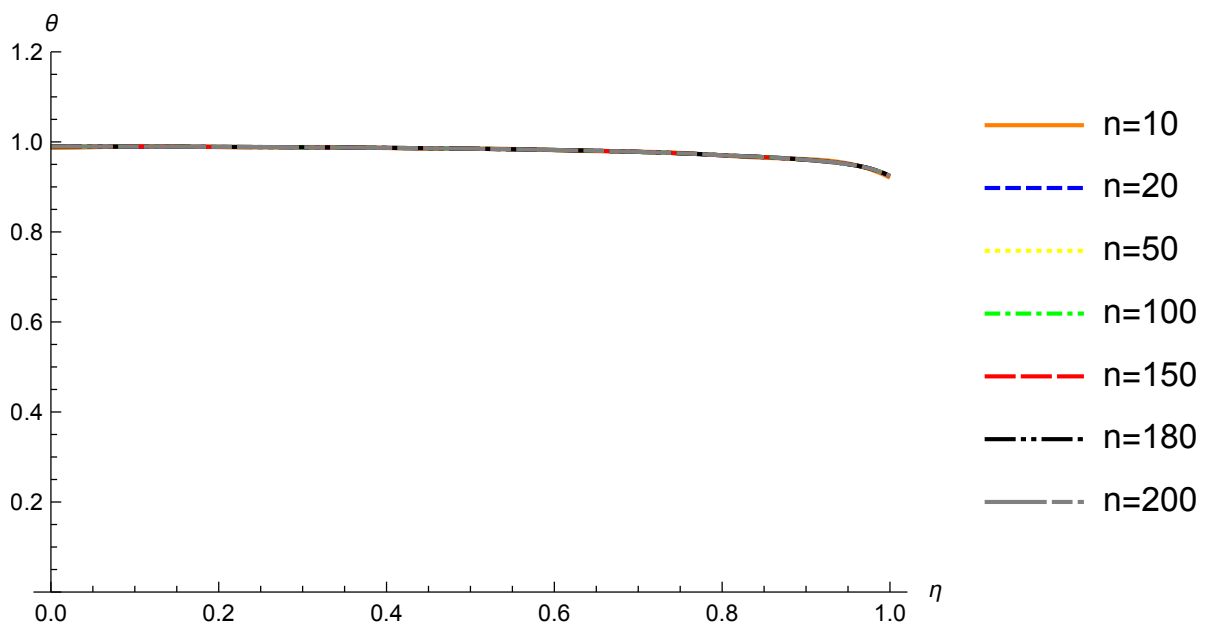


Figura 38 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.8$, $Bi = 10$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

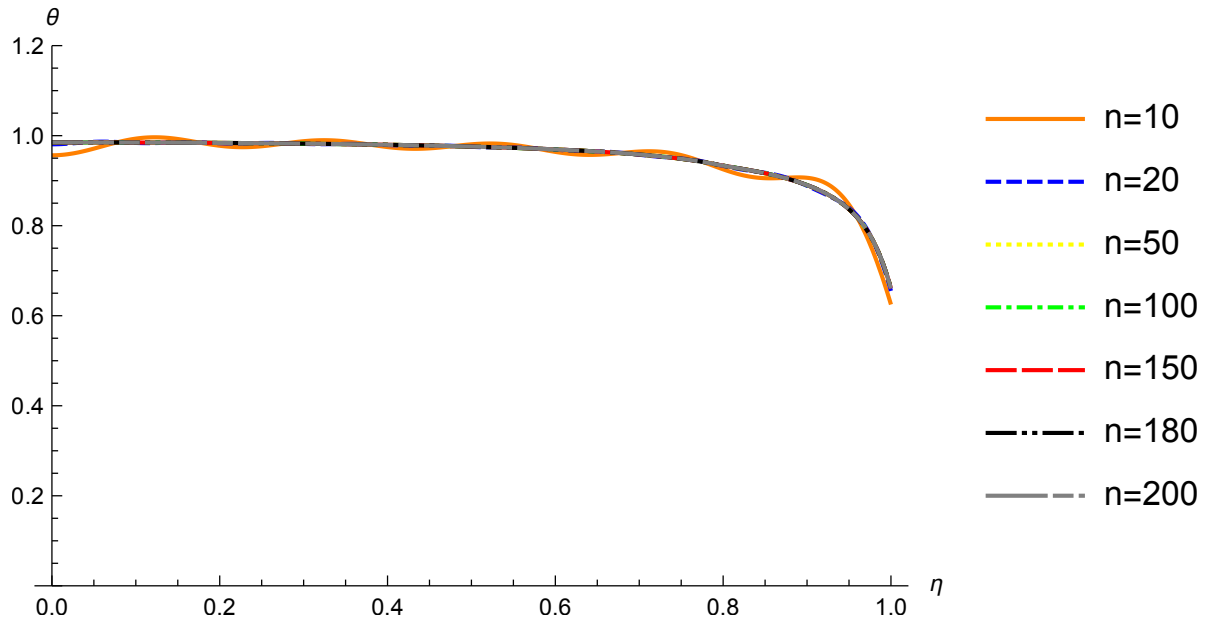


Figura 39 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.8$, $Bi = 100$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

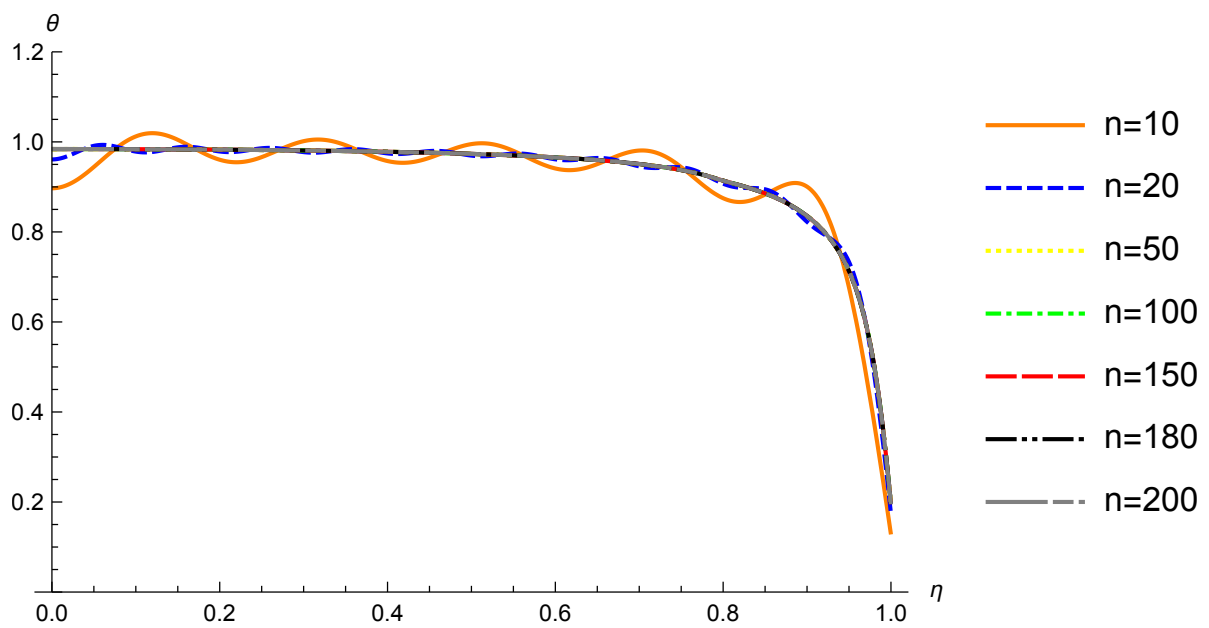


Figura 40 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 1$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

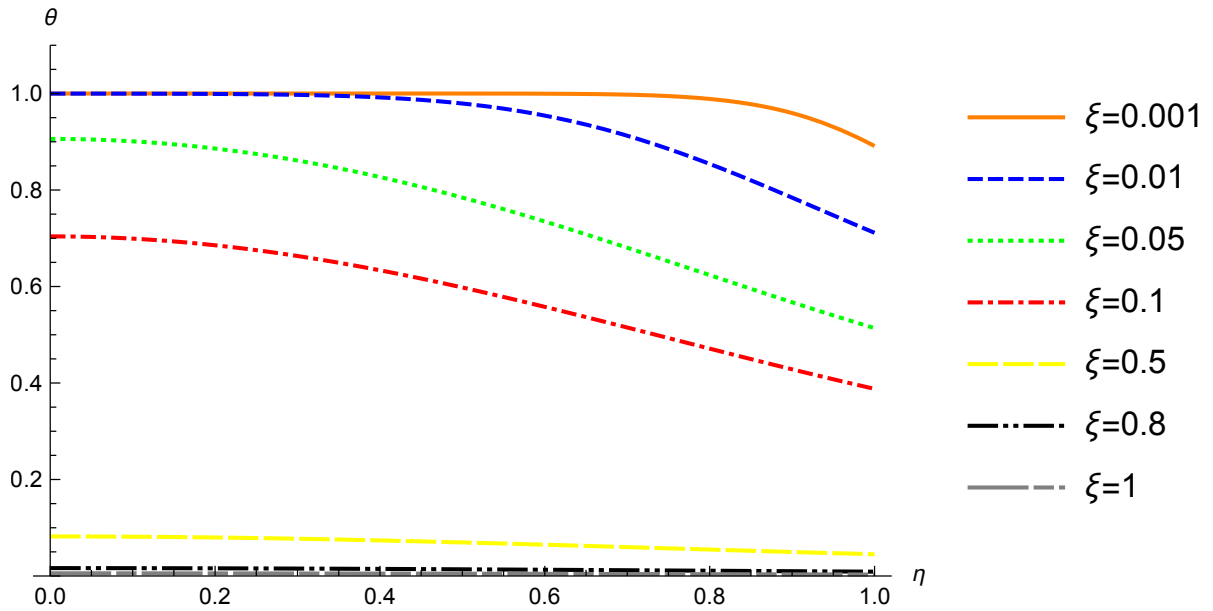


Figura 41 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 1$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

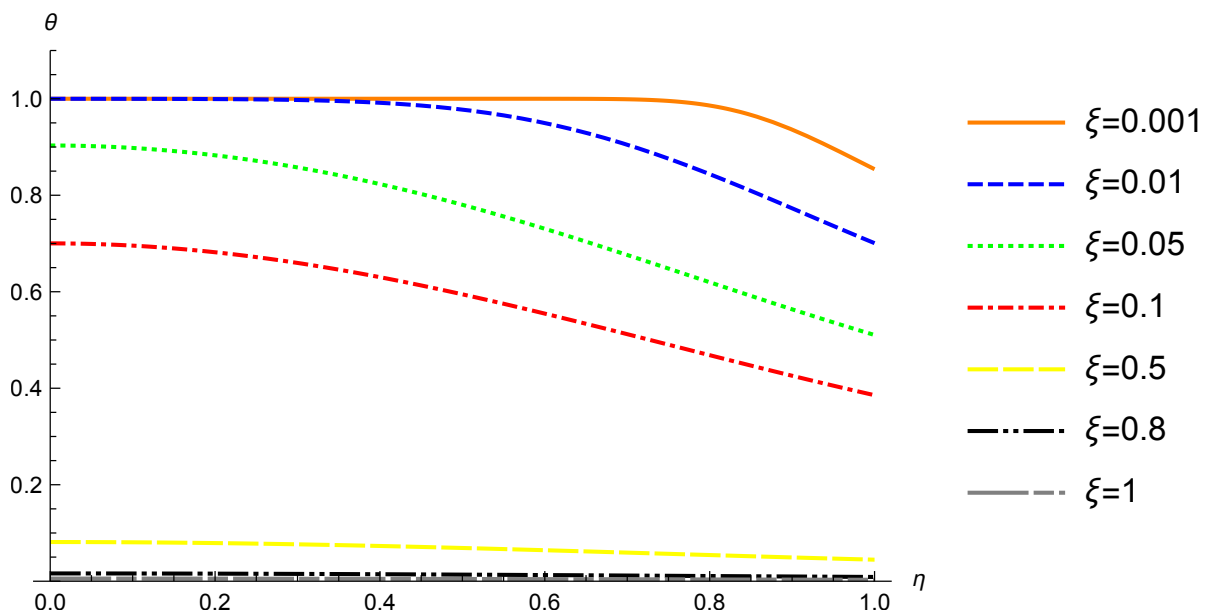


Figura 42 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 100$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

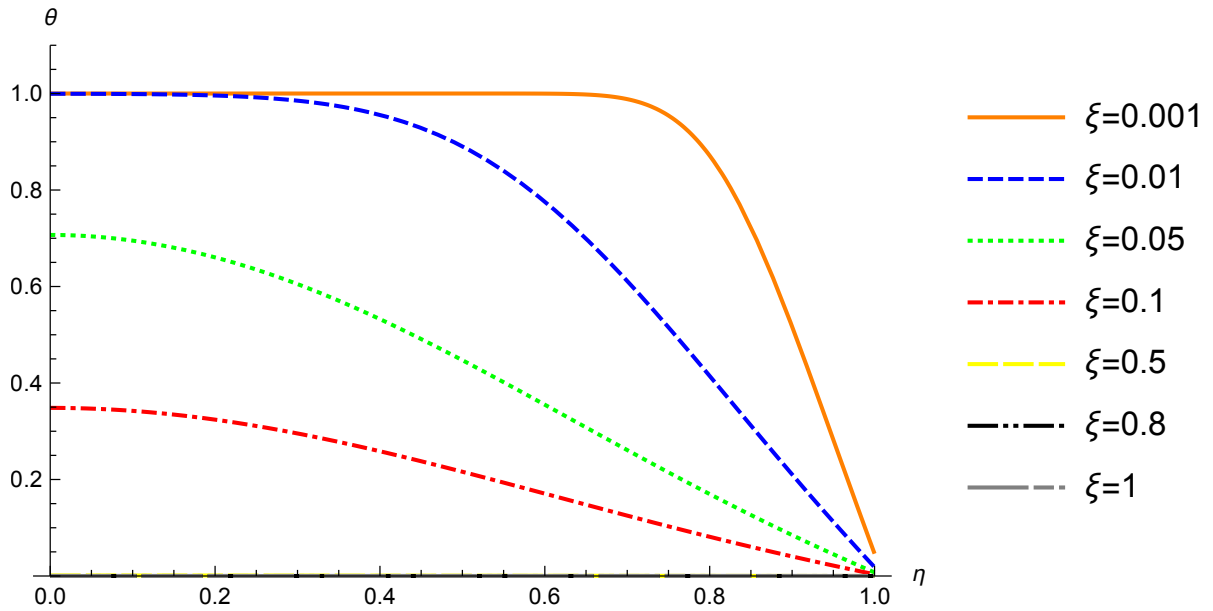


Figura 43 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

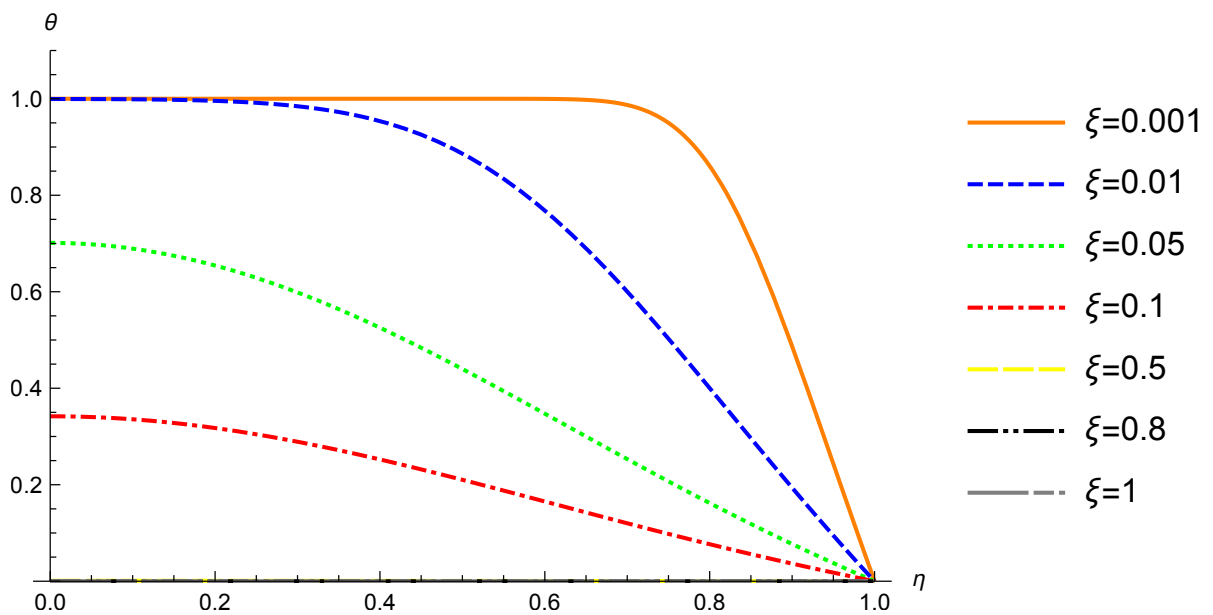


Figura 44 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $Pe = 1000000$,
 $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

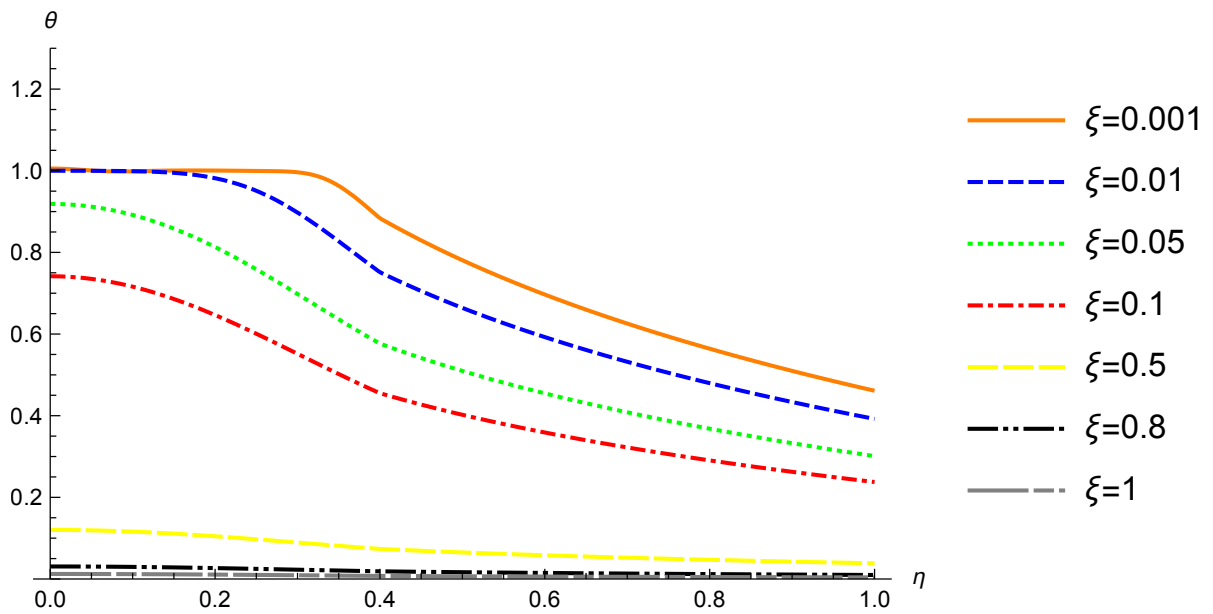


Figura 45 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 10$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$,
 $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

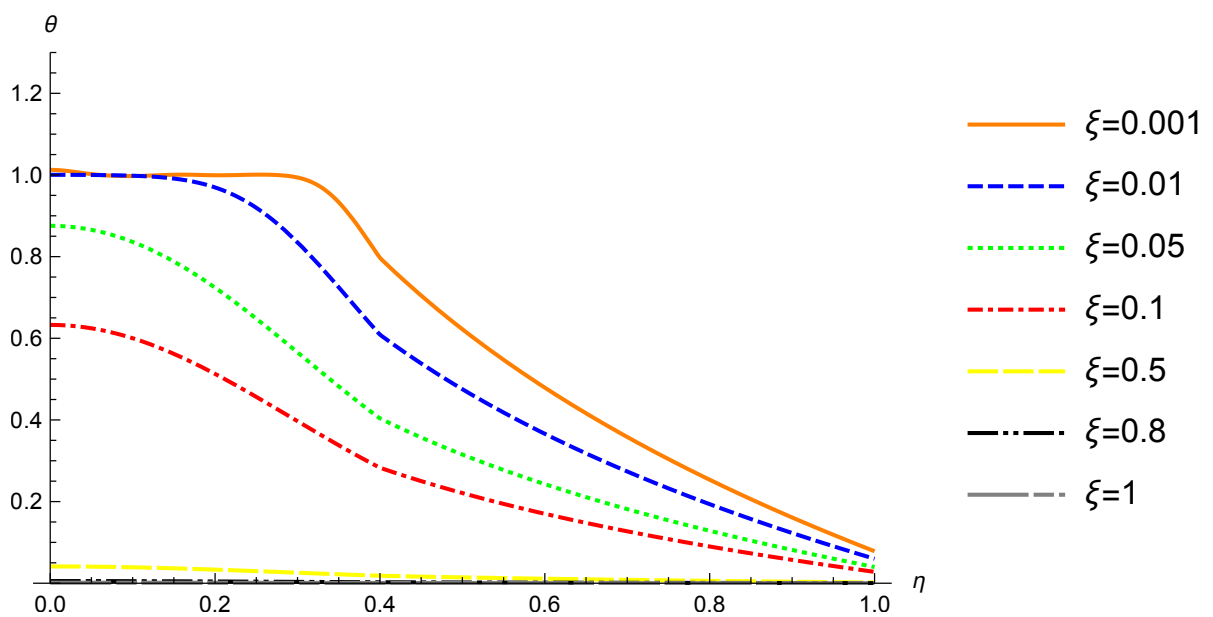


Figura 46 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 100$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

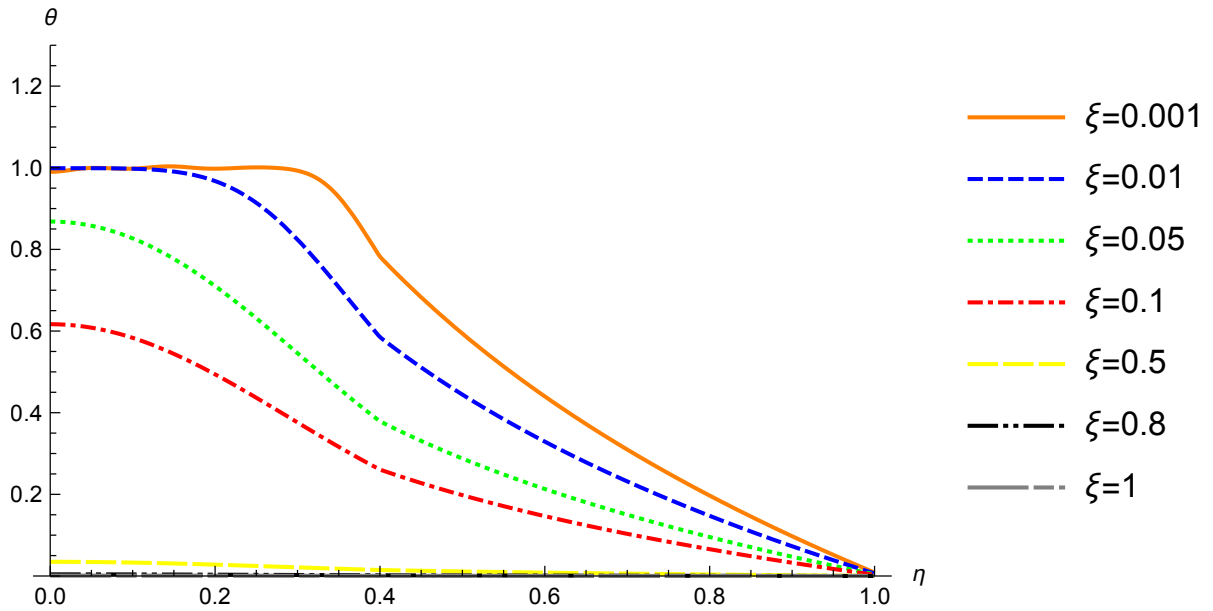


Figura 47 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $Pe = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

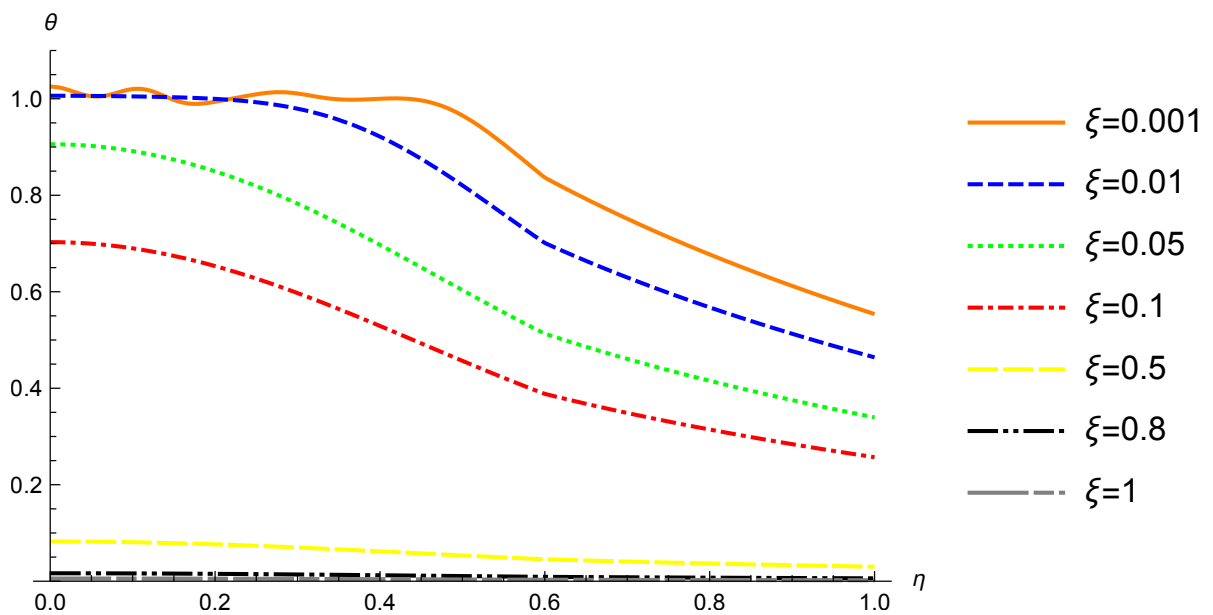


Figura 48 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

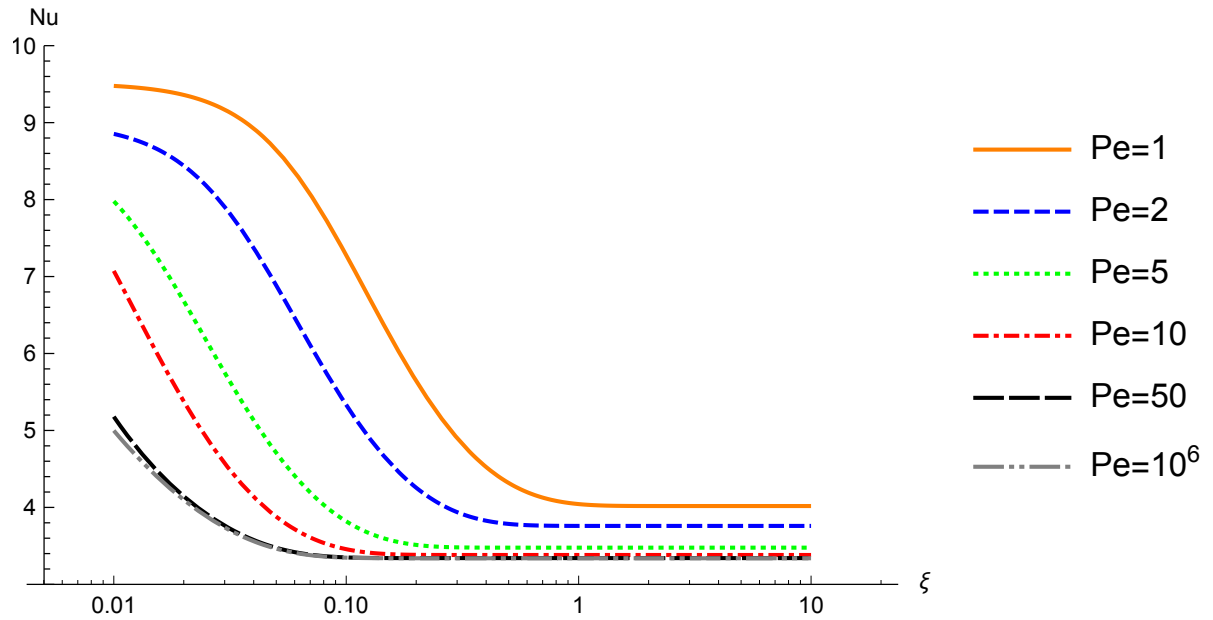


Figura 49 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.8$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

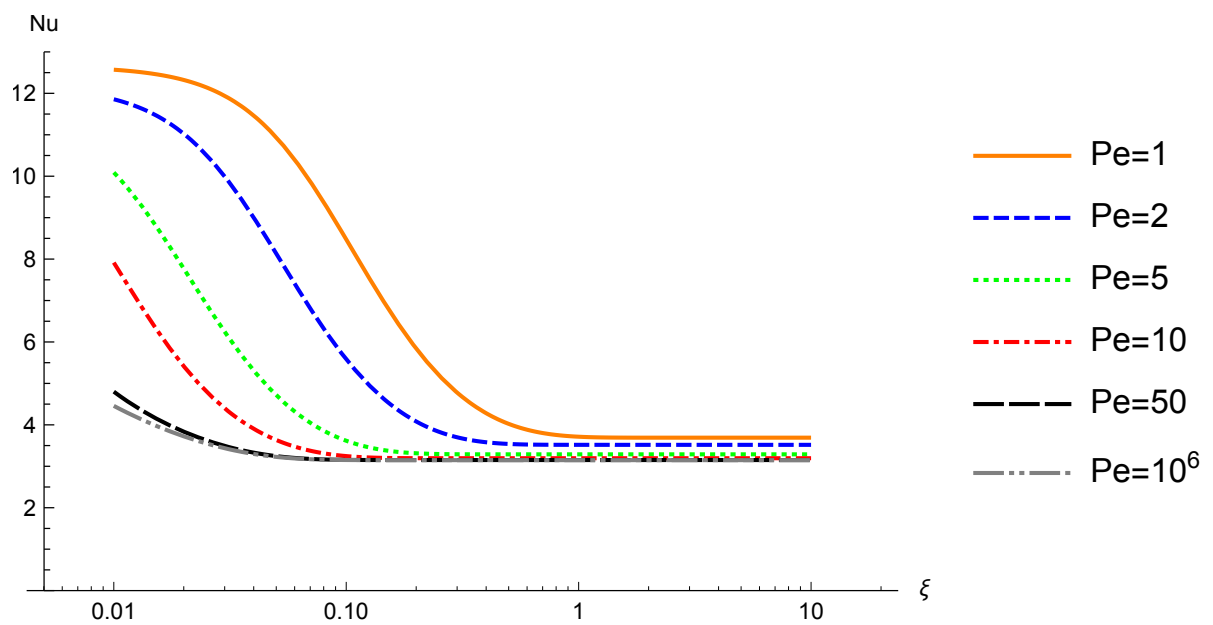


Figura 50 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

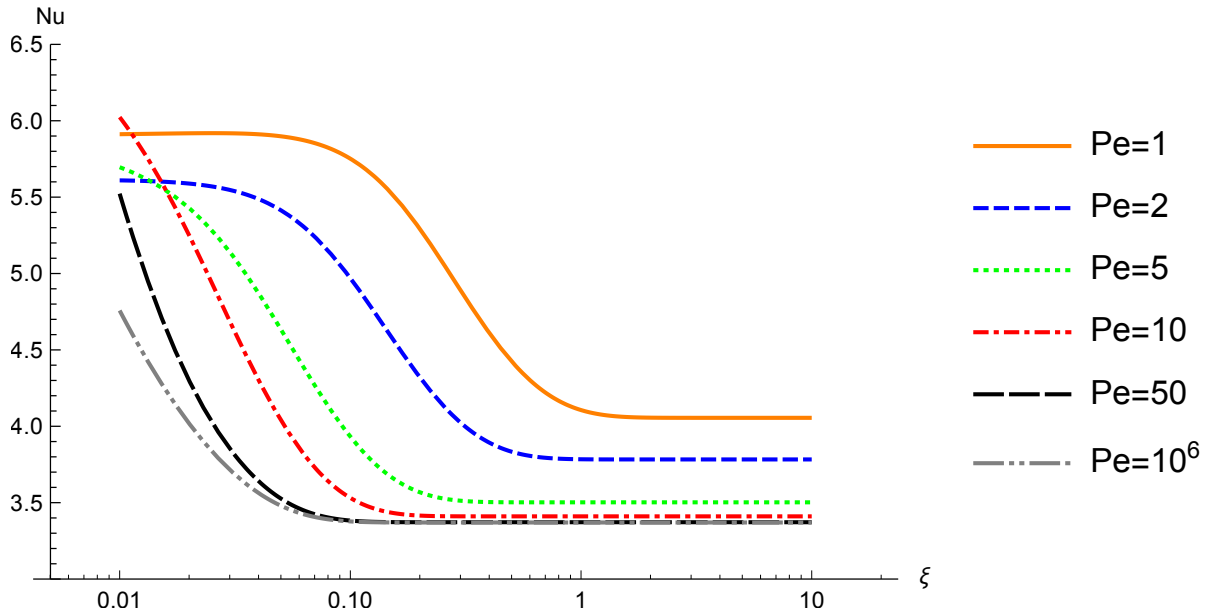


Figura 51 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

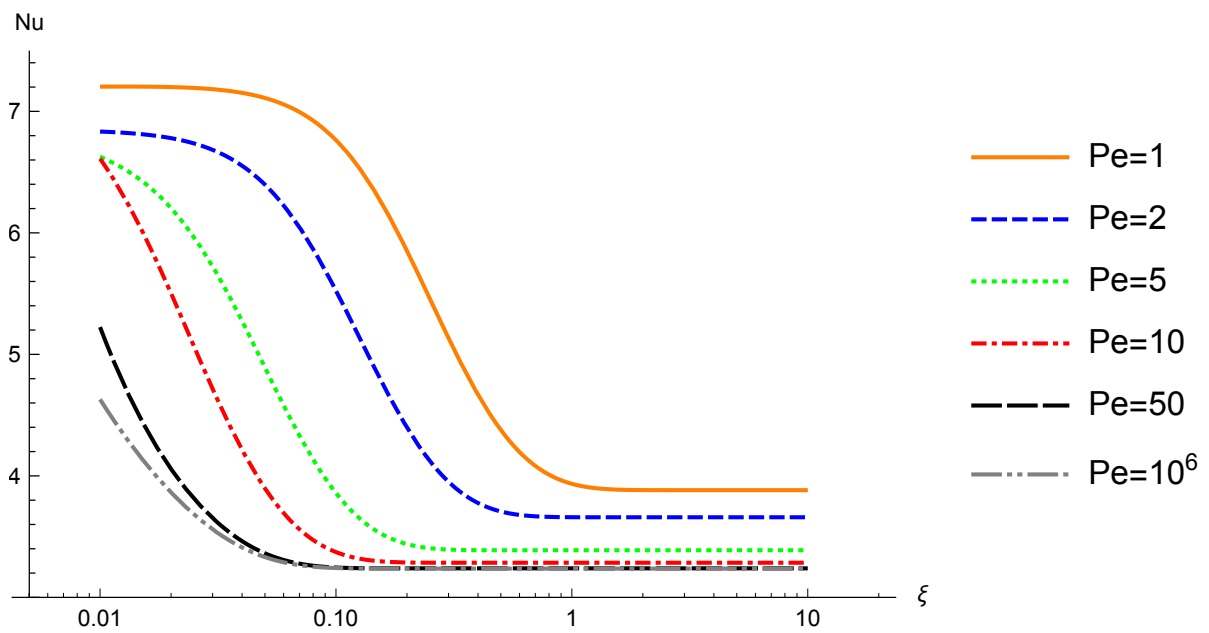


Figura 52 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

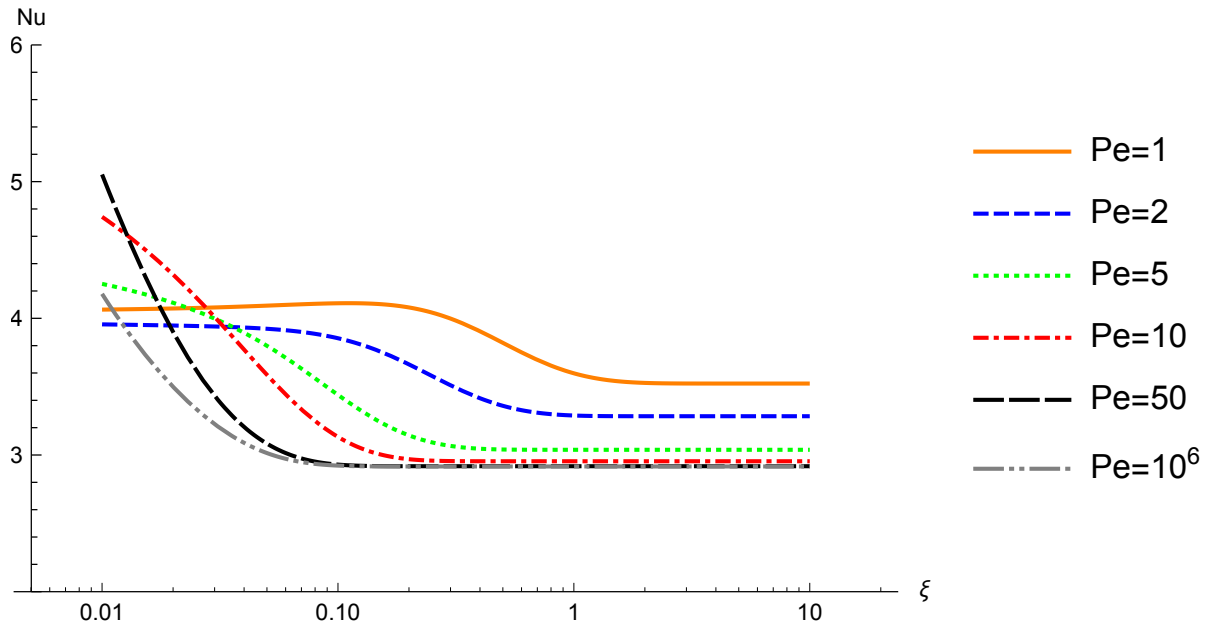


Figura 53 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

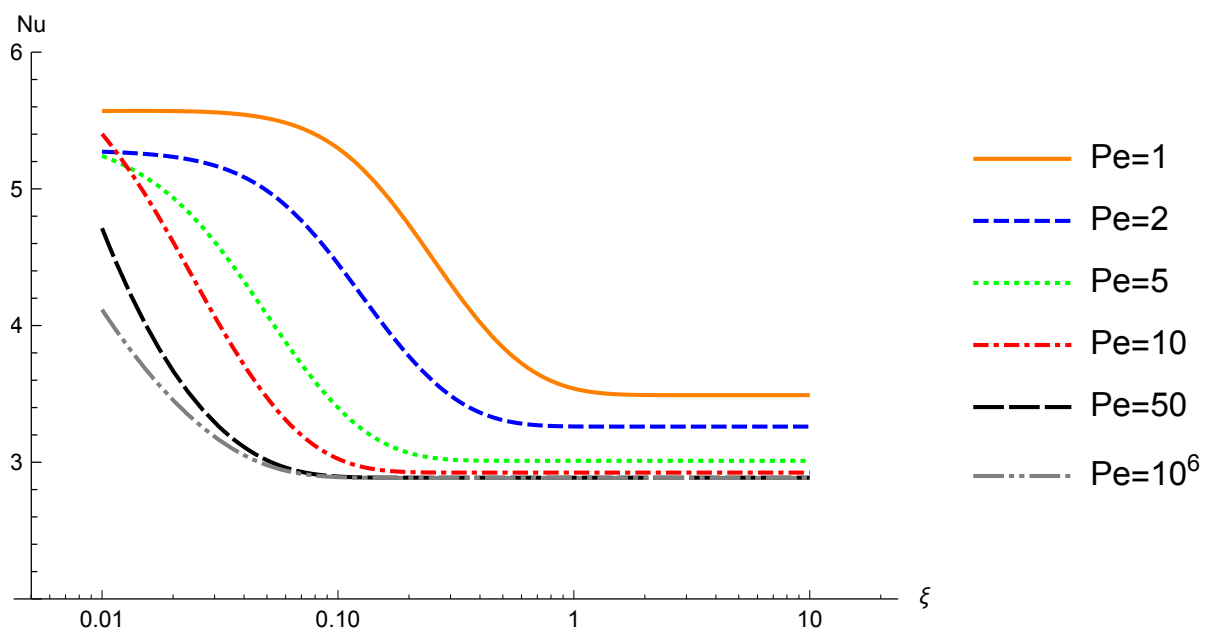


Figura 54 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

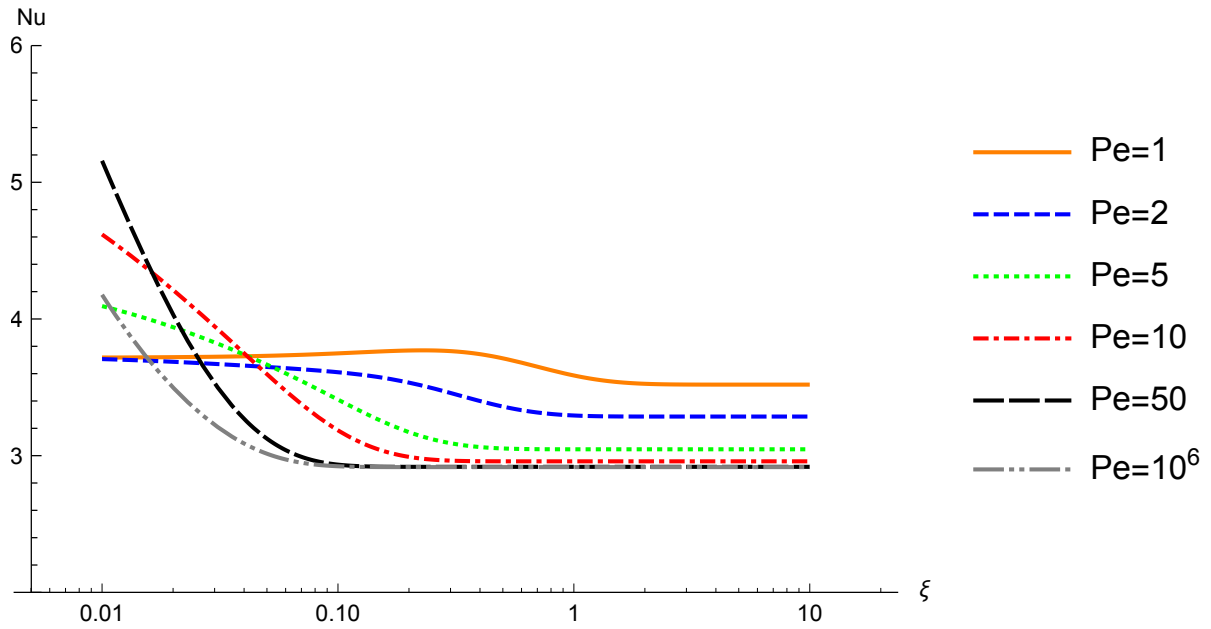


Figura 55 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$.

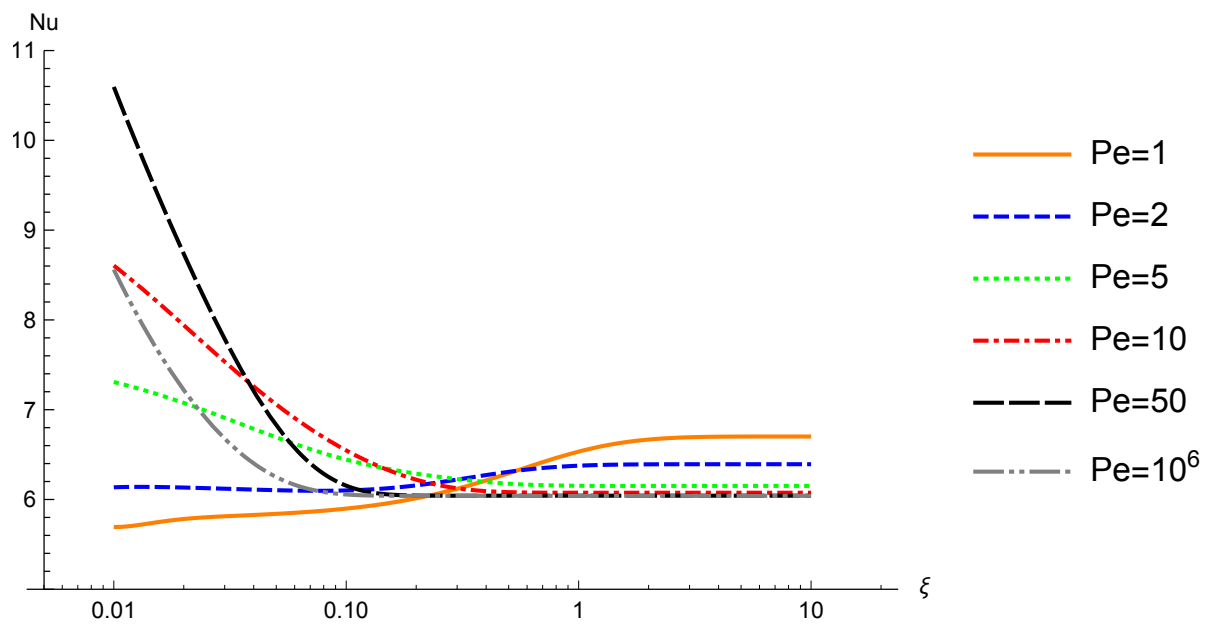


Figura 56 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$.

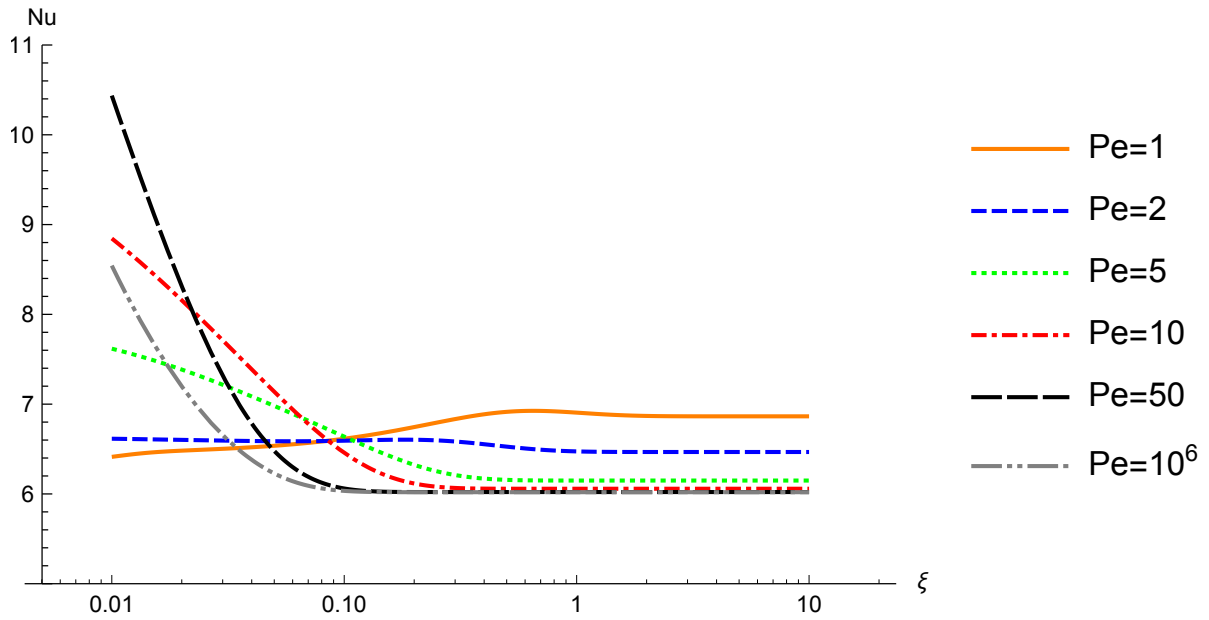


Figura 57 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$.

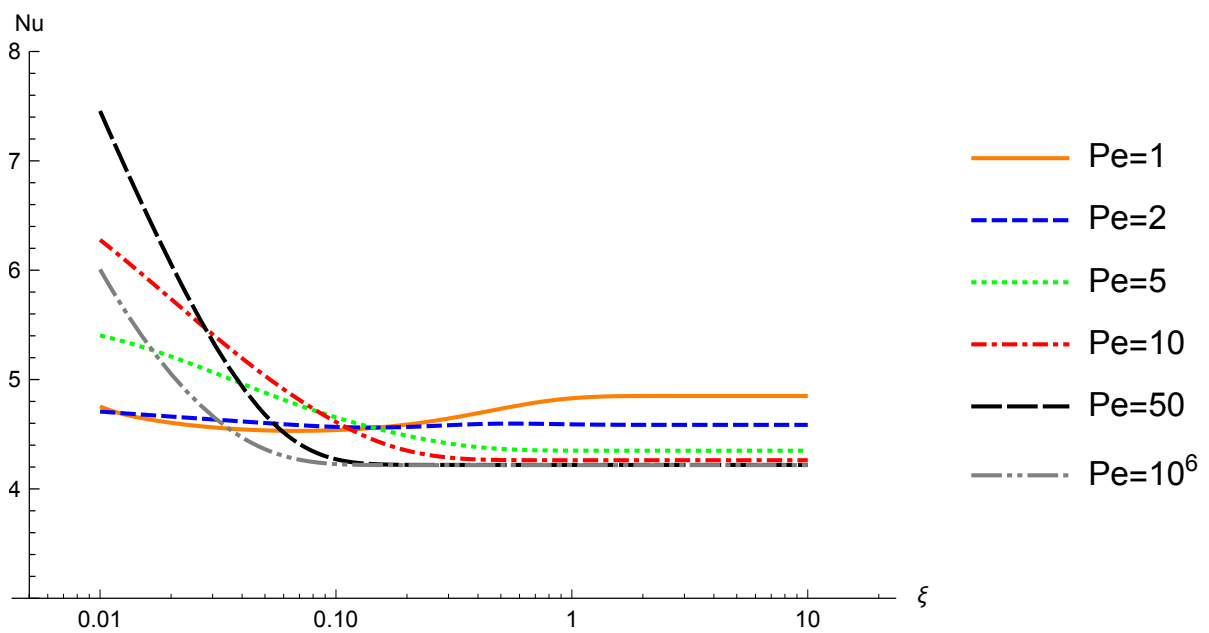


Figura 58 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$.

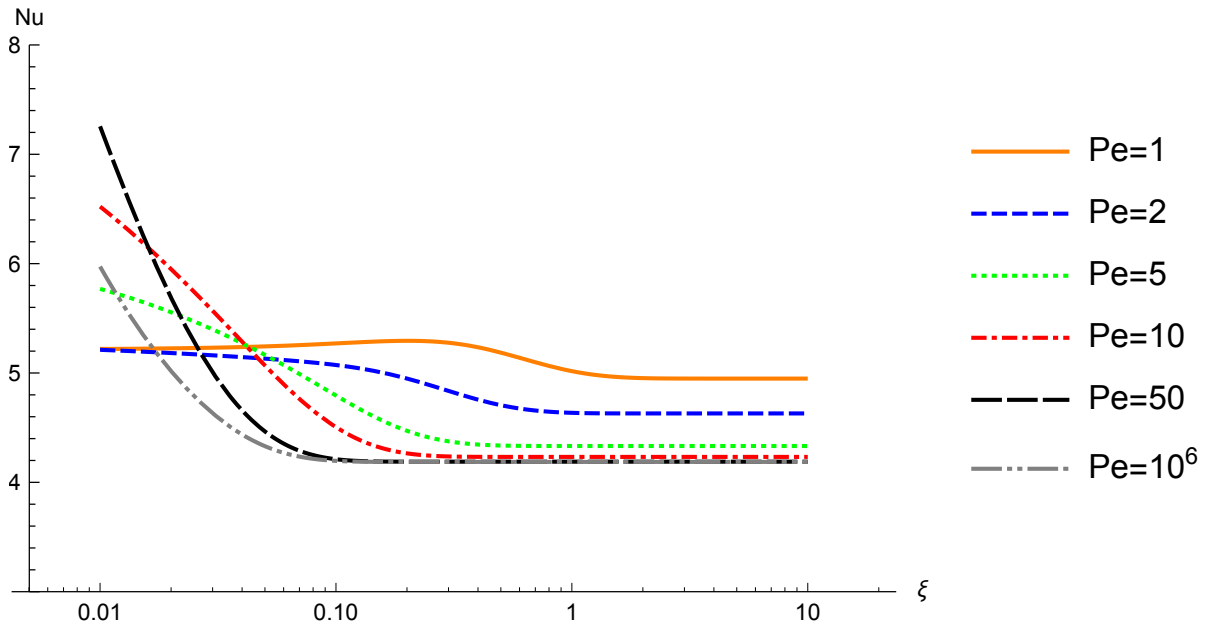


Figura 59 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

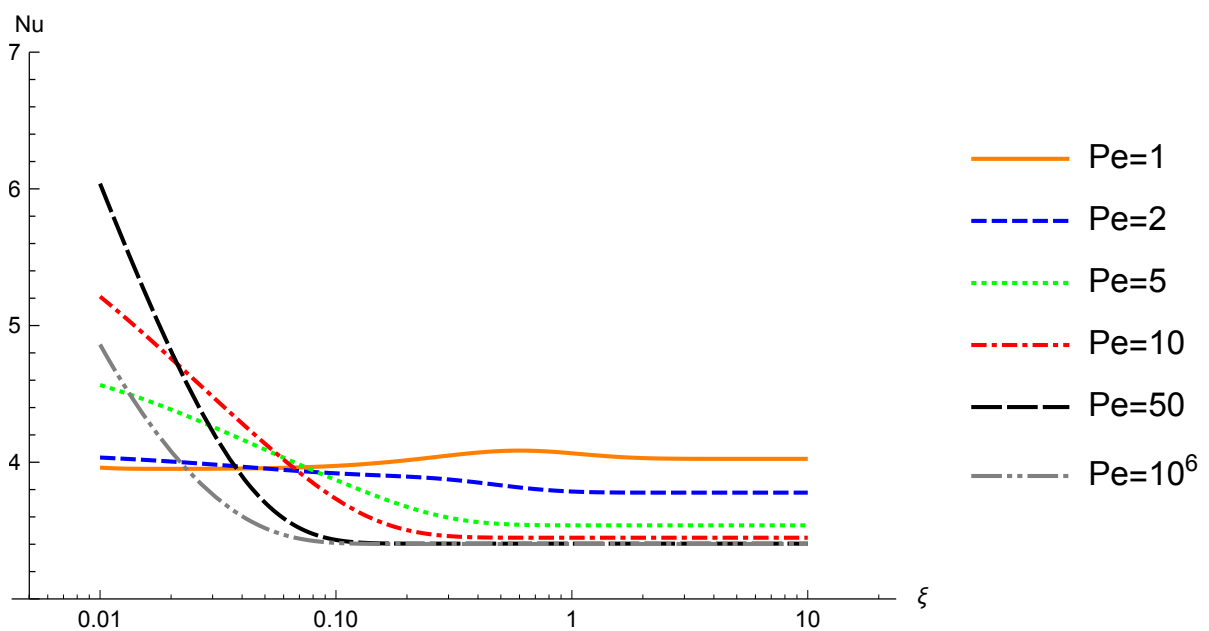


Figura 60 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.4$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

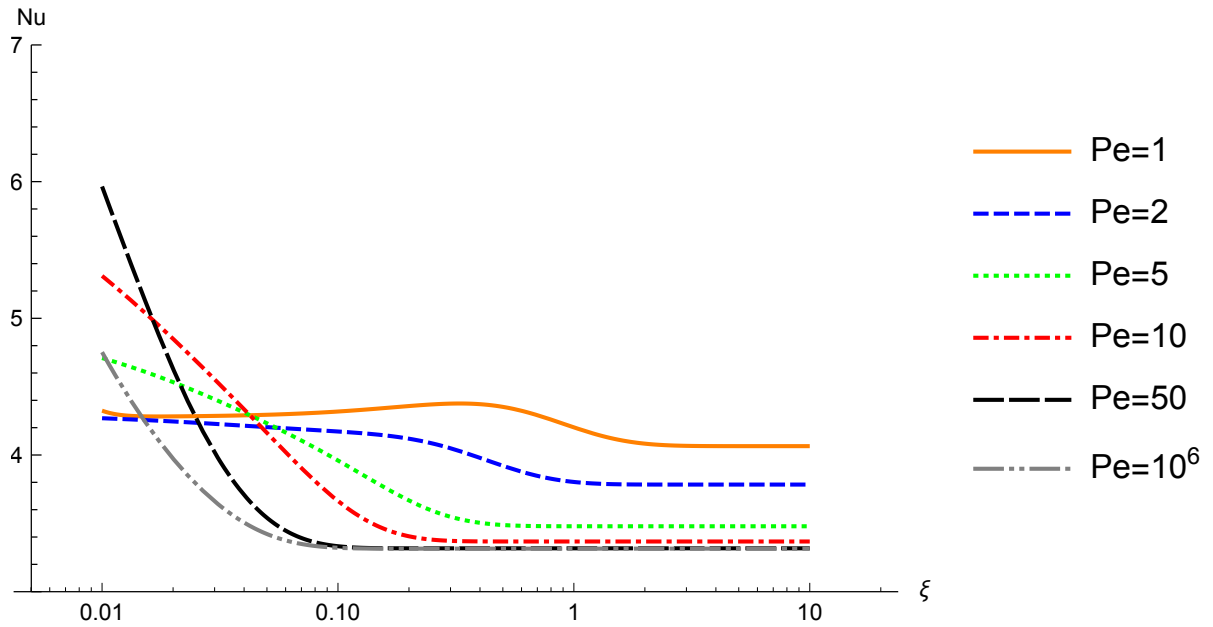


Figura 61 - Nusselt em função de ξ para diferentes valores de Péclet, $\beta=0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

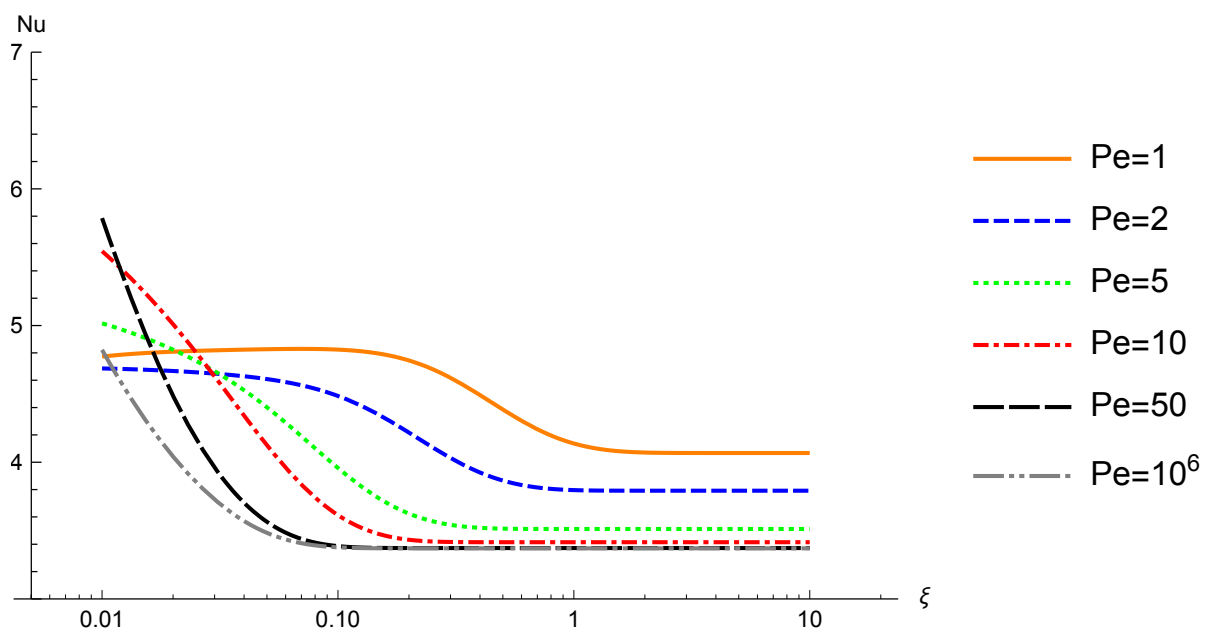


Figura 62 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 100$, $Pe = 1$,
 $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 0.01$.

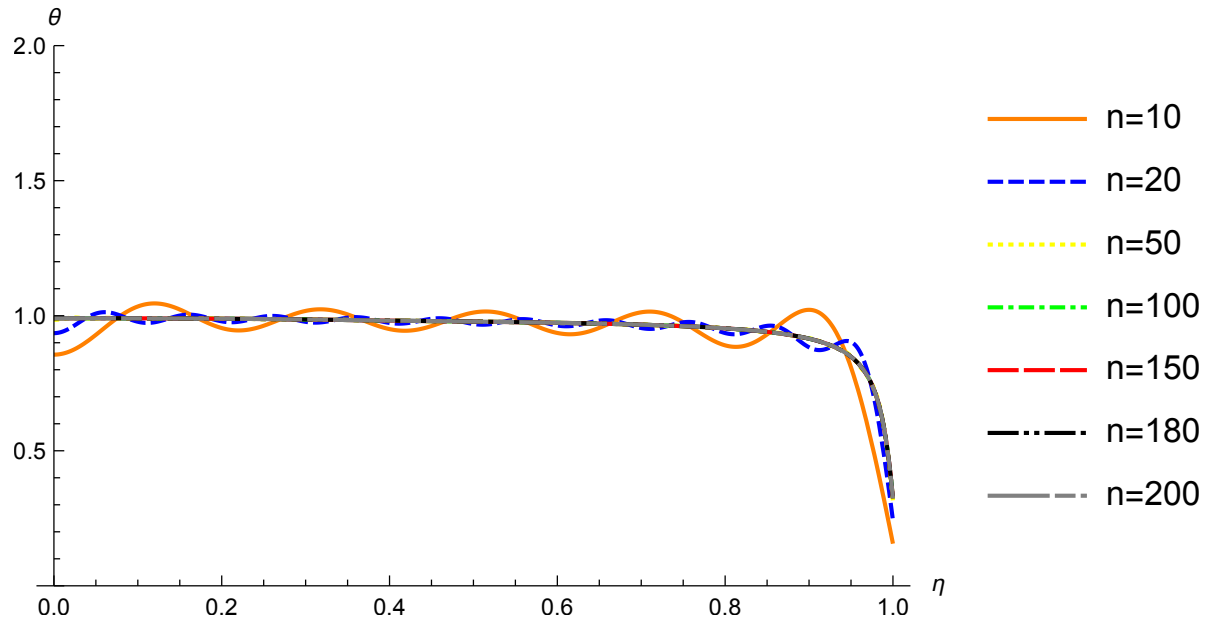


Figura 63 - θ em função de η para diferentes valores de n_{\max} , $\beta=0.4$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$,
 $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $\xi = 1$.

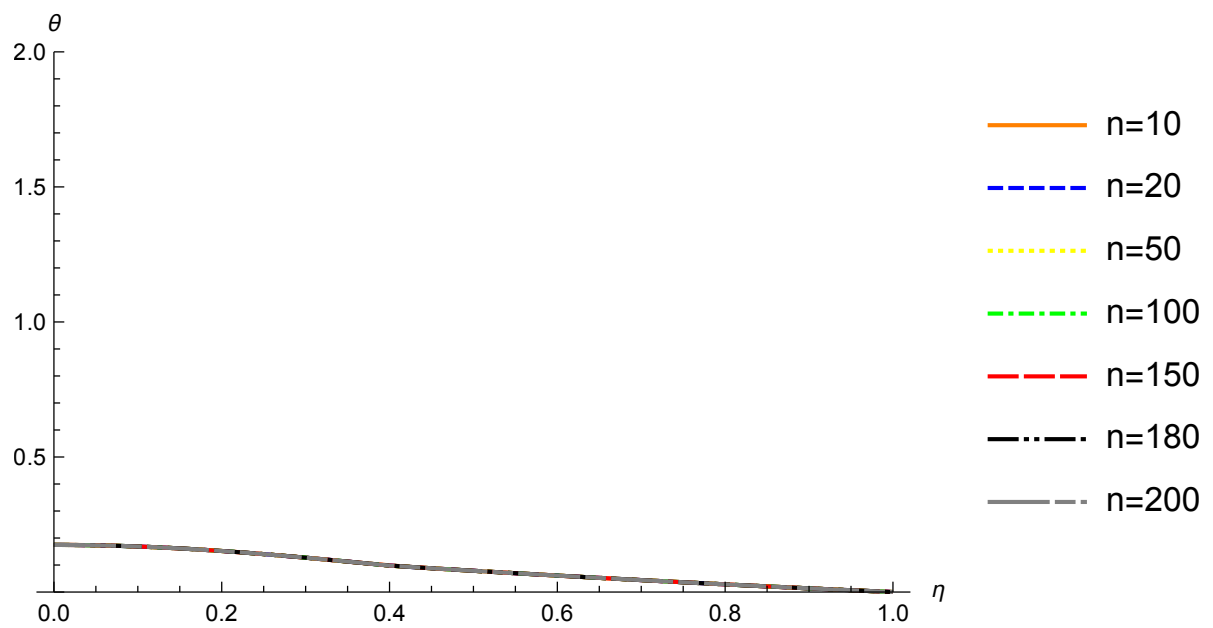


Figura 64 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.4$, $Bi = 10$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

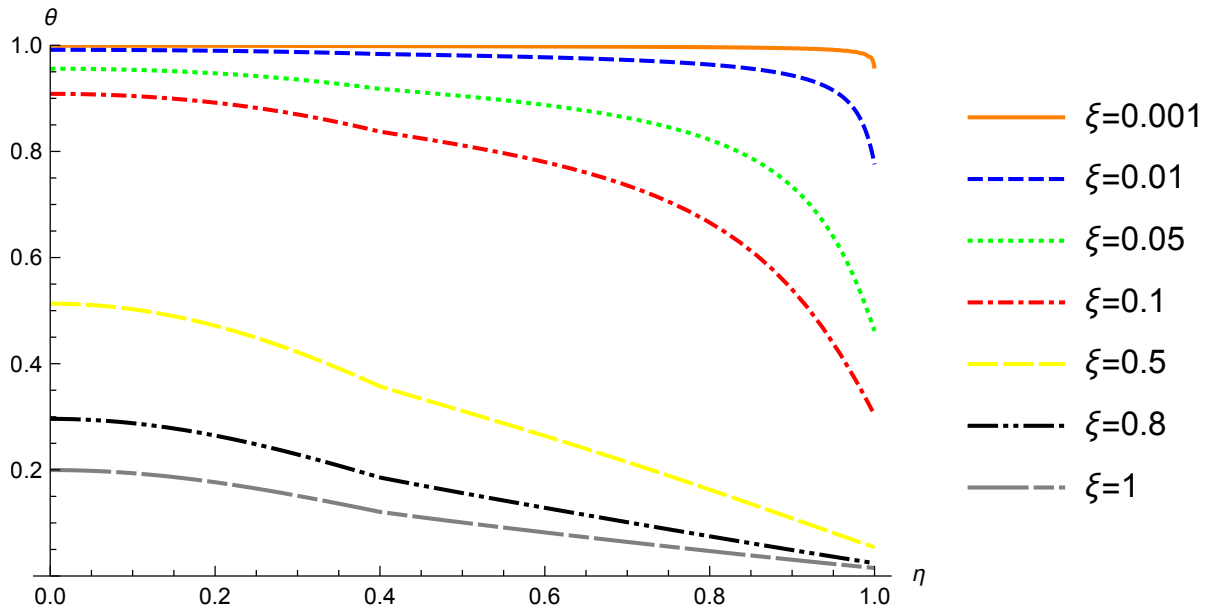


Figura 65 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 10^6$, $Pe = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

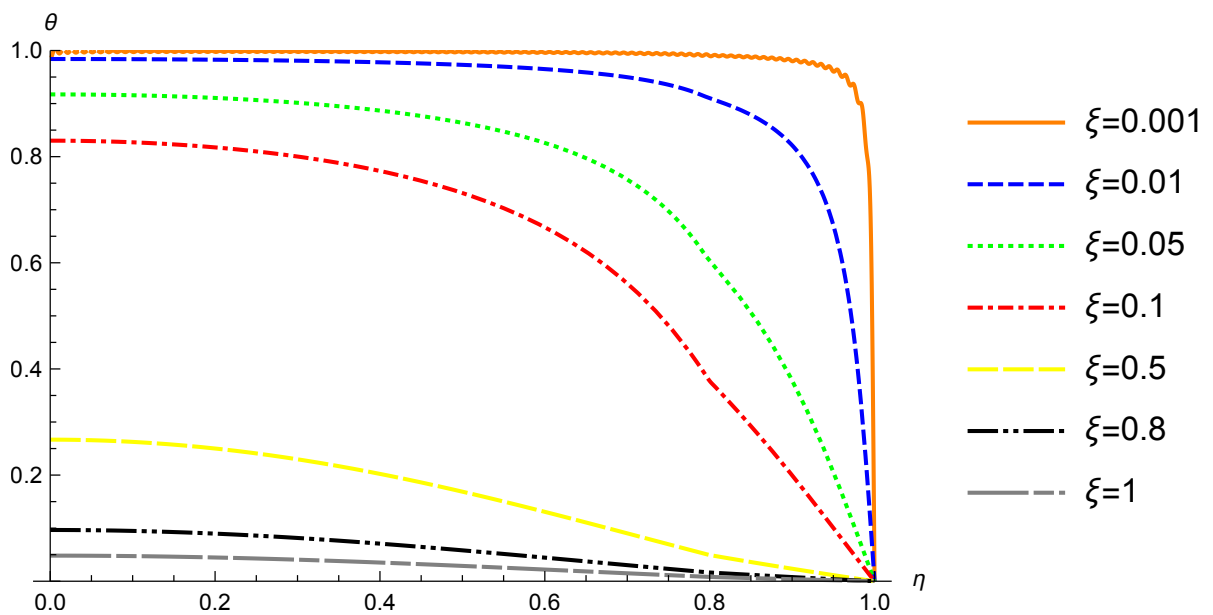


Figura 66 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=0.8$, $Bi = 10^6$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

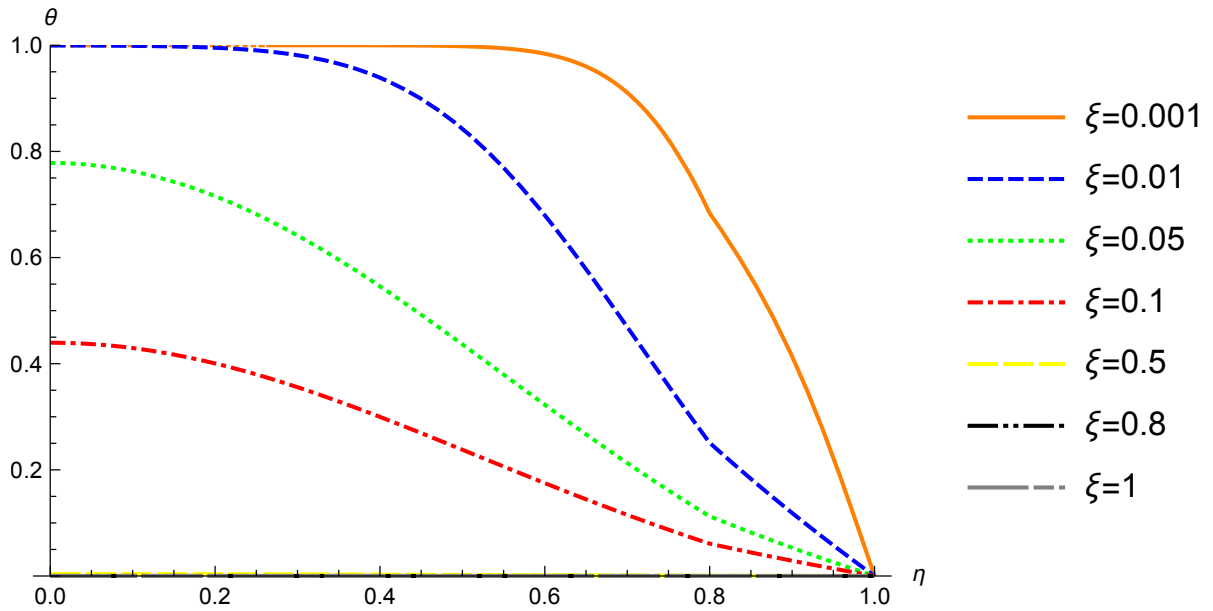


Figura 67 - θ em função de η para diferentes valores de ξ , $\beta=1$, $Bi = 10^6$, $Pe = 50$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

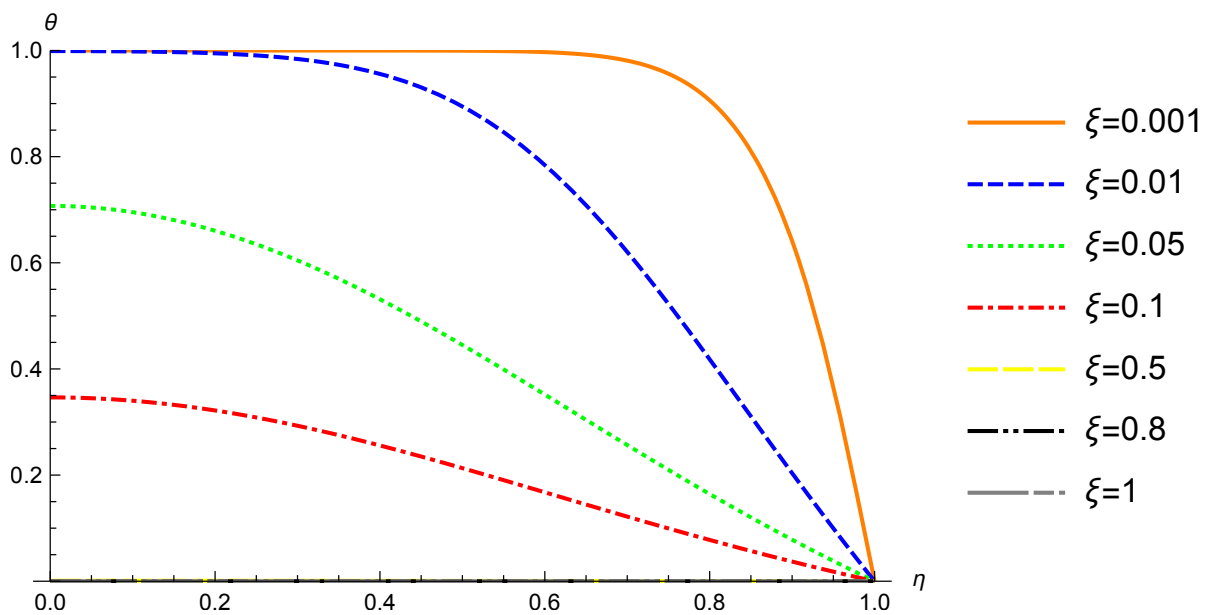


Tabela 13 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe= 1$, $\beta= 0.6$, e números de Biot diferentes.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	7.54559	5.80201	4.18095	4.13024	21.7166	7.07536	7.27403	7.21258
40	6.21124	5.82435	4.17550	4.12432	12.2508	7.07349	7.27729	7.21614
60	6.02988	5.82555	4.16910	4.11783	9.21914	7.06121	7.25405	7.19322
80	5.99193	5.82106	4.16226	4.11098	7.98242	7.03710	7.22384	7.16331
100	5.97733	5.81403	4.15506	4.10381	7.39612	7.00734	7.19004	7.12984
120	5.96636	5.80543	4.14746	4.09628	7.08631	6.97378	7.15342	7.09354
140	5.95537	5.79554	4.13936	4.08824	6.90462	6.93662	7.11375	7.05423
160	5.94319	5.78421	4.13050	4.07948	6.78512	6.89513	7.07005	7.01090
180	5.93059	5.77084	4.12036	4.06945	6.68892	6.84691	7.01971	6.96099
200	5.91194	5.75161	4.10615	4.05541	6.57593	6.77737	6.94772	6.88961
Bi=10								
20	13.4666	6.79011	4.01147	3.95889	55.1472	8.11669	7.55461	7.36943
40	8.22905	6.83313	4.00303	3.95010	31.6660	7.97851	7.55434	7.37149
60	7.46114	6.84084	3.99607	3.94308	18.8376	7.95439	7.52823	7.34681
80	7.31954	6.83881	3.98913	3.93616	13.1970	7.92235	7.49575	7.31551
100	7.28486	6.83252	3.98201	3.92909	10.5132	7.88591	7.45997	7.28084
120	7.26959	6.82374	3.97460	3.92174	9.13840	7.84615	7.42149	7.24344
140	7.25689	6.81305	3.96673	3.91396	8.38651	7.80292	7.37998	7.20304
160	7.24326	6.80046	3.95817	3.90550	7.94363	7.75519	7.33437	7.15861
180	7.22689	6.78529	3.94839	3.89584	7.65115	7.70012	7.28194	7.10750
200	7.20316	6.76308	3.93473	3.88235	7.29743	7.62128	7.20710	7.03451

Tabela 14 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe= 10$, $\beta= 0.6$, e números de Biot diferentes.

n_{max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	6.14488	3.61292	3.48982	3.48982	9.13981	6.69102	6.30497	6.30497
40	6.13086	3.59859	3.47571	3.47571	9.22267	6.71673	6.32759	6.32759
60	6.11919	3.58986	3.46719	3.46719	9.22820	6.70296	6.31411	6.31411
80	6.10797	3.58236	3.45990	3.45990	9.20734	6.67889	6.29119	6.29119
100	6.09670	3.57520	3.45296	3.45296	9.17480	6.64996	6.26379	6.26379
120	6.08508	3.56802	3.44601	3.44601	9.13508	6.61762	6.23324	6.23324
140	6.07285	3.56059	3.43882	3.43882	9.08942	6.58203	6.19964	6.19964
160	6.05961	3.55263	3.43112	3.43112	9.03730	6.54241	6.16227	6.16227
180	6.04454	3.54364	3.42243	3.42243	8.97573	6.49645	6.11895	6.11895
200	6.02364	3.53122	3.41043	3.41043	8.88588	6.43031	6.05662	6.05662
Bi=10								
20	6.71054	3.45179	3.36225	3.36225	9.47355	6.55645	6.17448	6.17448
40	6.71221	3.43728	3.34796	3.34796	9.48425	6.58181	6.19793	6.19793
60	6.70579	3.42887	3.33971	3.33971	9.48598	6.56782	6.18464	6.18464
80	6.69677	3.42169	3.33269	3.33269	9.46268	6.54390	6.16205	6.16205
100	6.68642	3.41486	3.32602	3.32602	9.42809	6.51532	6.13510	6.13510
120	6.67501	3.40801	3.31933	3.31933	9.38647	6.48347	6.10510	6.10510
140	6.66255	3.40092	3.31242	3.31242	9.33897	6.44847	6.07213	6.07213
160	6.64874	3.39332	3.30501	3.30501	9.28498	6.40956	6.03548	6.03548
180	6.63275	3.38473	3.29665	3.29665	9.22146	6.36447	5.99301	5.99301
200	6.61013	3.37287	3.28508	3.28508	9.12885	6.29961	5.93194	5.93194

Tabela 15 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe = 10^6$, $\beta = 0.6$, e números de Biot diferentes.

n_{\max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	4.88140	3.45702	3.44980	3.44980	8.83038	6.27954	6.26432	6.26432
40	4.85452	3.44238	3.43522	3.43522	8.89717	6.30317	6.28774	6.28774
60	4.84032	3.43373	3.42658	3.42658	8.88991	6.29011	6.27467	6.27467
80	4.82901	3.42639	3.41927	3.41927	8.86346	6.26745	6.25204	6.25204
100	4.81864	3.41945	3.41234	3.41234	8.82832	6.24027	6.22491	6.22491
120	4.80849	3.41252	3.40543	3.40543	8.78755	6.20990	6.19461	6.19461
140	4.79814	3.40537	3.39829	3.39829	8.74181	6.17648	6.16127	6.16127
160	4.78716	3.39772	3.39066	3.39066	8.69032	6.13929	6.12417	6.12417
180	4.77486	3.38910	3.38206	3.38206	8.63014	6.09616	6.08114	6.08114
200	4.75797	3.37720	3.37019	3.37019	8.54291	6.03409	6.01922	6.01922
Bi=10								
20	4.75120	3.31892	3.31393	3.31393	8.65749	6.11700	6.10358	6.10358
40	4.72383	3.30418	3.29923	3.29923	8.72541	6.14184	6.12824	6.12824
60	4.70992	3.29582	3.29089	3.29089	8.71839	6.12921	6.11560	6.11560
80	4.69891	3.28879	3.28387	3.28387	8.69237	6.10710	6.09352	6.09352
100	4.68884	3.28214	3.27723	3.27723	8.65783	6.08056	6.06702	6.06702
120	4.67898	3.27550	3.27060	3.27060	8.61778	6.05093	6.03745	6.03745
140	4.66891	3.26865	3.26375	3.26375	8.57287	6.01833	6.00492	6.00492
160	4.65824	3.26131	3.25643	3.25643	8.52233	5.98207	5.96873	5.96873
180	4.64627	3.25304	3.24817	3.24817	8.46327	5.94002	5.92677	5.92677
200	4.62983	3.24162	3.23677	3.23677	8.37770	5.87952	5.86641	5.86641

Tabela 16 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe = 50$, $\beta = 0.8$, e números de Biot diferentes.

n_{\max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	5.28874	3.41544	3.40635	3.40635	10.1732	6.31742	6.29452	6.29452
40	5.27346	3.40856	3.39951	3.39951	10.2001	6.31164	6.28860	6.28860
60	5.26259	3.40250	3.39348	3.39348	10.1748	6.28867	6.26567	6.26567
80	5.25256	3.39650	3.38749	3.38749	10.1360	6.26105	6.23813	6.23813
100	5.24264	3.39037	3.38138	3.38138	10.0906	6.23089	6.20807	6.20807
120	5.23251	3.38401	3.37504	3.37504	10.0405	6.19854	6.17582	6.17582
140	5.22189	3.37729	3.36834	3.36834	9.98567	6.16369	6.14109	6.14109
160	5.21038	3.36999	3.36106	3.36106	9.92482	6.12539	6.10293	6.10293
180	5.19739	3.36167	3.35276	3.35276	9.85429	6.08131	6.05901	6.05901
200	5.17963	3.35022	3.34134	3.34134	9.75241	6.01802	5.99595	5.99595
Bi=10								
20	4.90490	3.21748	3.21309	3.21309	9.74142	6.01696	6.00101	6.00101
40	4.88864	3.20970	3.20532	3.20532	9.77085	6.01494	5.99890	5.99890
60	4.87841	3.20388	3.19952	3.19952	9.74623	5.99325	5.97723	5.97723
80	4.86912	3.19821	3.19386	3.19386	9.70860	5.96689	5.95093	5.95093
100	4.85995	3.19245	3.18811	3.18811	9.66482	5.93807	5.92218	5.92218
120	4.85059	3.18647	3.18214	3.18214	9.61659	5.90718	5.89137	5.89137
140	4.84078	3.18015	3.17582	3.17582	9.56388	5.87392	5.85819	5.85819
160	4.83019	3.17328	3.16897	3.16897	9.50546	5.83739	5.82175	5.82175
180	4.81818	3.16546	3.16116	3.16116	9.43780	5.79534	5.77981	5.77981
200	4.80167	3.15467	3.15038	3.15038	9.34007	5.73496	5.71960	5.71960

Tabela 17 - Tabela de convergência do Nusselt resolvida por GITT para $Pe = 10^6$, $\beta = 0.8$, e números de Biot diferentes.

n_{\max}	$\tilde{k}_z = 0.5$ e $\tilde{k}_r = 1.5$				$\tilde{k}_z = 1.5$ e $\tilde{k}_r = 0.5$			
	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$	$\xi=0.01$	$\xi=0.1$	$\xi=1$	$\xi=10$
Bi=1								
20	5.10605	3.41231	3.40453	3.40453	8.89752	6.30778	6.29261	6.29261
40	5.09007	3.40542	3.39767	3.39767	8.91501	6.30199	6.28673	6.28673
60	5.07916	3.39936	3.39163	3.39163	8.89100	6.27905	6.26382	6.26382
80	5.06927	3.39336	3.38564	3.38564	8.85613	6.25148	6.23630	6.23630
100	5.05958	3.38723	3.37954	3.37954	8.81596	6.22136	6.20624	6.20624
120	5.04973	3.38088	3.37320	3.37320	8.77182	6.18906	6.17401	6.17401
140	5.03943	3.37416	3.36649	3.36649	8.72366	6.15426	6.13929	6.13929
160	5.02831	3.36687	3.35922	3.35922	8.67032	6.11603	6.10115	6.10115
180	5.01576	3.35855	3.35092	3.35092	8.60857	6.07201	6.05723	6.05723
200	4.99862	3.34711	3.33951	3.33951	8.51945	6.00882	5.99420	5.99420
Bi=10								
20	4.55437	3.21430	3.21099	3.21099	8.54402	6.00828	5.99726	5.99726
40	4.53915	3.20651	3.20321	3.20321	8.56549	6.00629	5.99520	5.99520
60	4.52959	3.20069	3.19740	3.19740	8.54257	5.98464	5.97357	5.97357
80	4.52093	3.19502	3.19175	3.19175	8.50895	5.95832	5.94728	5.94728
100	4.51239	3.18927	3.18600	3.18600	8.47021	5.92955	5.91856	5.91856
120	4.50369	3.18329	3.18003	3.18003	8.42769	5.89871	5.88777	5.88777
140	4.49457	3.17698	3.17372	3.17372	8.38133	5.86550	5.85462	5.85462
160	4.48473	3.17012	3.16687	3.16687	8.33001	5.82901	5.81820	5.81820
180	4.47357	3.16230	3.15906	3.15906	8.27062	5.78703	5.77629	5.77629
200	4.45824	3.15152	3.14829	3.14829	8.18492	5.72674	5.71611	5.71611

Tabela 18 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	4.38609	4.30418	4.71958	5.34428	5.87297	5.90085	4.86332
0.02	4.39757	4.30174	4.58150	4.90307	4.96580	4.58290	4.08015
0.03	4.40911	4.30025	4.46987	4.58550	4.42649	4.02980	3.76477
0.04	4.42023	4.29851	4.37230	4.33971	4.08456	3.75572	3.60554
0.05	4.43074	4.29589	4.28398	4.14664	3.86198	3.60767	3.51852
0.1	4.47115	4.26325	3.94557	3.65201	3.47527	3.41914	3.40991
0.2	4.49197	4.13330	3.64408	3.45982	3.41362	3.40397	3.40226
0.3	4.45692	4.00776	3.55942	3.44209	3.41239	3.40388	3.40222
0.4	4.39756	3.92169	3.53569	3.44044	3.41237	3.40388	3.40222
0.5	4.33456	3.86855	3.52894	3.44029	3.41237	3.40388	3.40222
1	4.13883	3.79641	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222
2	4.06805	3.79068	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222
5	4.06283	3.79064	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222
10	4.06283	3.79064	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222
20	4.06283	3.79064	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222
50	4.06283	3.79064	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222
100	4.06283	3.79064	3.52622	3.44027	3.41237	3.40388	3.40222

Tabela 19 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	4.99286	4.80660	5.05827	5.57553	5.97870	5.73507	4.75174
0.02	5.00435	4.80518	4.91068	5.08150	4.93343	4.35787	3.97295
0.03	5.01539	4.80234	4.77728	4.69271	4.30584	3.84425	3.66135
0.04	5.02508	4.79656	4.64886	4.37869	3.92797	3.60503	3.50567
0.05	5.03332	4.78733	4.52422	4.13036	3.69924	3.47962	3.42182
0.1	5.05157	4.69129	4.01096	3.53723	3.36377	3.32748	3.32124
0.2	4.98855	4.38228	3.57946	3.36948	3.32775	3.31703	3.31497
0.3	4.84705	4.12024	3.48599	3.36163	3.32738	3.31698	3.31495
0.4	4.68529	3.95628	3.46758	3.36128	3.32737	3.31698	3.31495
0.5	4.53611	3.86333	3.46405	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
1	4.13799	3.75904	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
2	4.02350	3.75449	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
5	4.01811	3.75449	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
10	4.01811	3.75449	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
20	4.01811	3.75449	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
50	4.01811	3.75449	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495
100	4.01811	3.75449	3.46322	3.36126	3.32737	3.31698	3.31495

Tabela 20 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 100$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	5.23436	5.00052	5.19999	5.67649	6.01968	5.66550	4.73277
0.02	5.22595	4.99759	5.04371	5.14879	4.90928	4.29844	3.95569
0.03	5.23526	4.99209	4.89487	4.72168	4.25708	3.80594	3.64477
0.04	5.24306	4.98224	4.74679	4.37729	3.87863	3.57734	3.48962
0.05	5.24925	4.96753	4.60098	4.10954	3.65677	3.45745	3.40629
0.1	5.25222	4.82906	4.00927	3.50533	3.34526	3.31282	3.30710
0.2	5.13892	4.42770	3.55448	3.35421	3.31395	3.30315	3.30107
0.3	4.94105	4.11703	3.46862	3.34822	3.31366	3.30311	3.30105
0.4	4.73266	3.93640	3.45375	3.34799	3.31366	3.30311	3.30105
0.5	4.55069	3.84030	3.45124	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
1	4.10865	3.74355	3.45073	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
2	4.00142	3.74040	3.45073	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
5	3.99761	3.74040	3.45073	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
10	3.99761	3.74040	3.45073	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
20	3.99761	3.74040	3.45073	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
50	3.99761	3.74040	3.45073	3.34798	3.31366	3.30311	3.30105
100	3.99761	3.74040	3.45073	3.34798	3.31366	3.30310	3.30104

Tabela 21 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	6.25610	5.05492	5.22567	5.69465	6.02737	5.65613	4.73052
0.02	5.28960	5.03235	5.06666	5.16026	4.90605	4.29177	3.93139
0.03	5.27883	5.02465	4.91458	4.72634	4.25082	3.80214	3.62777
0.04	5.28226	5.01352	4.76268	4.37715	3.87285	3.57484	3.47929
0.05	5.28669	4.99751	4.61298	4.10672	3.65221	3.45561	3.40003
0.1	5.28532	4.85056	4.00884	3.50207	3.34388	3.31187	3.30591
0.2	5.16216	4.43343	3.55199	3.35321	3.31310	3.30229	3.30020
0.3	4.95427	4.11614	3.46735	3.34742	3.31282	3.30225	3.30018
0.4	4.73841	3.93391	3.45292	3.34720	3.31282	3.30225	3.30018
0.5	4.55177	3.83787	3.45052	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
1	4.10535	3.74252	3.45004	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
2	3.99961	3.73952	3.45004	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
5	3.99599	3.73951	3.45004	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
10	3.99599	3.73951	3.45004	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
20	3.99599	3.73951	3.45004	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
50	3.99599	3.73951	3.45004	3.34719	3.31282	3.30225	3.30018
100	3.99599	3.73951	3.45004	3.34719	3.31281	3.30224	3.30018

Tabela 22 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	5.91194	5.60972	5.69580	6.02364	6.07777	5.52292	4.75797
0.02	5.91792	5.58882	5.42890	5.25102	4.81023	4.29945	4.01831
0.03	5.91801	5.54725	5.14237	4.68804	4.19556	3.85483	3.71612
0.04	5.91143	5.48759	4.87156	4.30296	3.86720	3.64140	3.56333
0.05	5.89826	5.41388	4.63433	4.04016	3.67917	3.52673	3.48004
0.1	5.75161	4.97002	3.93139	3.53122	3.41089	3.38274	3.37720
0.2	5.29279	4.32137	3.56834	3.41546	3.38123	3.37199	3.37022
0.3	4.89166	4.02480	3.51278	3.41064	3.38089	3.37193	3.37019
0.4	4.61164	3.89315	3.50391	3.41044	3.38089	3.37193	3.37019
0.5	4.42552	3.83364	3.50249	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
1	4.10615	3.78411	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
2	4.05644	3.78303	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
5	4.05541	3.78303	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
10	4.05541	3.78303	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
20	4.05541	3.78303	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
50	4.05541	3.78303	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019
100	4.05541	3.78303	3.50221	3.41043	3.38089	3.37193	3.37019

Tabela 23 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	7.20316	6.83383	6.62634	6.61013	6.19603	5.22452	4.62983
0.02	7.19994	6.77949	6.20431	5.50254	4.63642	4.05597	3.86385
0.03	7.18252	6.68322	5.72520	4.71555	3.97351	3.65305	3.56034
0.04	7.15233	6.55248	5.27506	4.21405	3.65469	3.46256	3.41083
0.05	7.11022	6.39674	4.89136	3.89719	3.48502	3.36255	3.33184
0.1	6.76308	5.52485	3.85922	3.37287	3.26818	3.24579	3.24162
0.2	5.85237	4.39807	3.43868	3.28724	3.24997	3.23893	3.23678
0.3	5.13406	3.95154	3.39348	3.28514	3.24985	3.23891	3.23677
0.4	4.66852	3.77686	3.38839	3.28509	3.24985	3.23891	3.23677
0.5	4.37783	3.70699	3.38782	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
1	3.93473	3.65981	3.38774	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
2	3.88298	3.65927	3.38774	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
5	3.88235	3.65927	3.38774	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
10	3.88235	3.65927	3.38774	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
20	3.88235	3.65927	3.38774	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
50	3.88235	3.65927	3.38774	3.28508	3.24985	3.23891	3.23677
100	3.88235	3.65927	3.38774	3.28508	3.24984	3.23891	3.23676

Tabela 24 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 100$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	7.78085	7.39237	7.07164	6.87453	6.20673	5.12085	2.01109
0.02	7.77268	7.30970	6.52735	5.55680	4.55437	3.99866	1.43912
0.03	7.74152	7.16993	5.91845	4.67876	3.90501	3.61085	1.98674
0.04	7.69347	6.98523	5.36788	4.15277	3.60201	3.42747	2.47280
0.05	7.62969	6.77030	4.91783	3.83517	3.44266	3.33165	2.78914
0.1	7.13871	5.64195	3.80584	3.33827	3.24243	3.22161	3.19159
0.2	5.96147	4.34946	3.40566	3.26323	3.22652	3.21549	3.21327
0.3	5.11563	3.89288	3.36720	3.26159	3.22642	3.21547	3.21332
0.4	4.60528	3.72681	3.36325	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
0.5	4.30320	3.66402	3.36285	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
1	3.87749	3.62484	3.36280	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
2	3.83467	3.62448	3.36280	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
5	3.83426	3.62448	3.36280	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
10	3.83426	3.62448	3.36280	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
20	3.83426	3.62448	3.36280	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
50	3.83426	3.62448	3.36280	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332
100	3.83426	3.62448	3.36279	3.26155	3.22642	3.21547	3.21332

Tabela 25 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	7.99226	7.50139	7.15410	6.92080	6.20709	5.10823	4.58618
0.02	7.88528	7.40745	6.58218	5.56321	4.54353	3.99278	3.82016
0.03	7.84670	7.25720	5.94730	4.67239	3.89729	3.60687	3.52212
0.04	7.79365	7.06026	5.37921	4.14445	3.59662	3.42436	3.37692
0.05	7.72457	6.83248	4.91917	3.82768	3.43864	3.32905	3.30094
0.1	7.20139	5.65580	3.79921	3.33522	3.24047	3.21983	3.21593
0.2	5.97385	4.34176	3.40279	3.26147	3.22482	3.21379	3.21164
0.3	5.10997	3.88596	3.36516	3.25987	3.22473	3.21378	3.21163
0.4	4.59542	3.72165	3.36134	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
0.5	4.29331	3.65993	3.36095	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
1	3.87173	3.62175	3.36090	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
2	3.83004	3.62141	3.36090	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
5	3.82966	3.62141	3.36090	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
10	3.82966	3.62141	3.36090	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
20	3.82966	3.62141	3.36090	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
50	3.82966	3.62141	3.36090	3.25984	3.22473	3.21378	3.21163
100	3.82966	3.62141	3.36090	3.25983	3.22472	3.21377	3.21162

Tabela 26 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	9.47707	8.85355	7.97838	7.07314	6.04288	5.17963	4.99862
0.02	9.35984	8.44025	6.68113	5.37729	4.55784	4.14415	4.09816
0.03	9.16786	7.90682	5.75033	4.57307	3.99858	3.76297	3.73880
0.04	8.92281	7.37052	5.13023	4.13775	3.72529	3.57631	3.56007
0.05	8.64670	6.88507	4.70735	3.87910	3.57503	3.47546	3.46378
0.1	7.27773	5.33050	3.81888	3.45726	3.37084	3.35022	3.34711
0.2	5.64335	4.25598	3.51281	3.38378	3.35091	3.34138	3.33954
0.3	4.90122	3.93858	3.48098	3.38171	3.35073	3.34134	3.33951
0.4	4.52457	3.82707	3.47741	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
0.5	4.31754	3.78542	3.47701	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
1	4.04329	3.75973	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
2	4.01807	3.75950	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
5	4.01787	3.75950	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
10	4.01787	3.75950	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
20	4.01787	3.75950	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
50	4.01787	3.75950	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951
100	4.01787	3.75950	3.47695	3.38165	3.35073	3.34134	3.33951

Tabela 27 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	12.5700	11.8570	10.0898	7.91549	5.93070	4.80167	4.45824
0.02	12.3225	11.0243	7.77105	5.41473	4.25554	3.83565	3.72267
0.03	11.9382	9.99601	6.24523	4.39815	3.70826	3.49142	3.43559
0.04	11.4620	9.00108	5.30977	3.90516	3.45874	3.32903	3.29740
0.05	10.9376	8.13304	4.71598	3.63467	3.32873	3.24560	3.22662
0.1	8.47627	5.58349	3.61651	3.24602	3.17171	3.15467	3.15152
0.2	5.84096	4.08131	3.31401	3.19542	3.16102	3.15039	3.14830
0.3	4.77839	3.69998	3.29070	3.19458	3.16097	3.15038	3.14829
0.4	4.28116	3.57981	3.28876	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
0.5	4.02377	3.53918	3.28860	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
1	3.71351	3.51766	3.28858	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
2	3.69066	3.51755	3.28858	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
5	3.69054	3.51754	3.28858	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
10	3.69054	3.51754	3.28858	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
20	3.69054	3.51754	3.28858	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
50	3.69054	3.51754	3.28858	3.19457	3.16097	3.15038	3.14829
100	3.69054	3.51754	3.28858	3.19457	3.16097	3.15037	3.14829

Tabela 28 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 100$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	14.5945	13.7411	11.2219	8.15381	5.78363	4.67718	4.33001
0.02	14.1959	12.4477	8.06668	5.30421	4.14158	3.75695	3.65292
0.03	13.5945	10.9397	6.24113	4.28001	3.62601	3.42939	3.37752
0.04	12.8697	9.56753	5.21701	3.80663	3.39327	3.27626	3.24700
0.05	12.0944	8.43834	4.60260	3.55283	3.27326	3.19871	3.18133
0.1	8.75597	5.47479	3.53548	3.19901	3.13252	3.11709	3.11421
0.2	5.70466	3.96243	3.26426	3.15638	3.12381	3.11364	3.11163
0.3	4.61819	3.60890	3.24533	3.15577	3.12378	3.11363	3.11163
0.4	4.13773	3.50289	3.24391	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
0.5	3.89741	3.46866	3.24380	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
1	3.62224	3.45176	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
2	3.60443	3.45169	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
5	3.60435	3.45169	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
10	3.60435	3.45169	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
20	3.60435	3.45169	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
50	3.60435	3.45169	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163
100	3.60435	3.45169	3.24379	3.15576	3.12378	3.11363	3.11163

Tabela 29 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 10^6$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	15.1114	14.1811	11.4399	8.17743	5.76005	4.66370	-1.74816
0.02	14.6371	12.7424	8.09692	5.28476	4.12893	3.74964	2.05302
0.03	13.9642	11.1043	6.22915	4.26500	3.61807	3.42418	2.96287
0.04	13.1633	9.64623	5.19876	3.79581	3.38756	3.27220	3.09780
0.05	12.3168	8.46764	4.58546	3.54471	3.26883	3.19536	3.11285
0.1	8.78073	5.45293	3.52736	3.19563	3.13010	3.11486	3.10976
0.2	5.67856	3.94854	3.26052	3.15395	3.12162	3.11150	3.10951
0.3	4.59638	3.59985	3.24212	3.15337	3.12159	3.11150	3.10951
0.4	4.12074	3.49585	3.24076	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
0.5	3.88363	3.46245	3.24066	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
1	3.61364	3.44610	3.24065	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
2	3.59644	3.44603	3.24065	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
5	3.59637	3.44603	3.24065	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
10	3.59637	3.44603	3.24065	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
20	3.59637	3.44603	3.24065	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
50	3.59637	3.44603	3.24065	3.15336	3.12159	3.11150	3.10951
100	3.59637	3.44603	3.24064	3.15336	3.12158	3.11149	3.10950

Tabela 30 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 1$, e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	43.8243	25.4491	13.1304	8.92105	7.00992	6.15678	5.89945
0.02	26.2964	15.6587	8.58135	6.31119	5.39532	5.04158	4.94514
0.03	19.7661	12.0131	6.92163	5.38273	4.81486	4.61300	4.56121
0.04	16.2641	10.0686	6.06292	4.92002	4.52956	4.39949	4.36789
0.05	14.0531	8.85117	5.54539	4.65466	4.37171	4.28308	4.26268
0.1	9.26788	6.29606	4.58764	4.23864	4.15715	4.13683	4.13300
0.2	6.63901	5.06349	4.30603	4.17254	4.13670	4.12623	4.12421
0.3	5.77000	4.75933	4.28231	4.17099	4.13653	4.12618	4.12418
0.4	5.37856	4.66530	4.28018	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
0.5	5.17984	4.63441	4.27999	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
1	4.95121	4.61888	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
2	4.93693	4.61881	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
5	4.93687	4.61881	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
10	4.93687	4.61881	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
20	4.93687	4.61881	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
50	4.93687	4.61881	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418
100	4.93687	4.61881	4.27997	4.17095	4.13653	4.12618	4.12418

Tabela 31 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 10$, e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	58.0081	33.1896	15.6421	9.30971	6.55091	5.49723	5.23667
0.02	33.7072	19.2180	9.24169	6.02037	4.85584	4.47829	4.38886
0.03	24.5392	14.0223	7.01382	4.96359	4.30797	4.11029	4.06506
0.04	19.6097	11.2801	5.91336	4.47625	4.05839	3.93952	3.91358
0.05	16.5028	9.58615	5.27748	4.21435	3.93038	3.85440	3.83871
0.1	9.86059	6.15263	4.19386	3.85374	3.78486	3.76839	3.76537
0.2	6.36477	4.62393	3.92904	3.81355	3.77680	3.76518	3.76289
0.3	5.27141	4.27910	3.91242	3.81308	3.77678	3.76518	3.76288
0.4	4.79816	4.17994	3.91131	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
0.5	4.56522	4.14953	3.91124	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
1	4.30988	4.13569	3.91123	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
2	4.29566	4.13564	3.91123	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
5	4.29561	4.13564	3.91123	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
10	4.29561	4.13564	3.91123	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
20	4.29561	4.13564	3.91123	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
50	4.29561	4.13564	3.91123	3.81307	3.77678	3.76518	3.76288
100	4.29561	4.13564	3.91123	3.81306	3.77677	3.76517	3.76288

Tabela 32 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 1$, $Bi = 100$, e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	71.1863	36.5111	15.1270	8.55841	6.03296	5.16028	4.95545
0.02	36.8205	18.9492	8.48220	5.54864	4.57225	4.26792	4.19768
0.03	25.0643	13.1857	6.40592	4.64088	4.10682	3.94891	3.91365
0.04	19.1983	10.3669	5.43103	4.23265	3.89848	3.80501	3.78515
0.05	15.7075	8.71235	4.88445	4.01754	3.79453	3.73609	3.72437
0.1	8.89293	5.58377	3.99215	3.73559	3.68475	3.67241	3.67013
0.2	5.72447	4.31033	3.79489	3.70891	3.67992	3.67060	3.66875
0.3	4.80756	4.04550	3.78465	3.70869	3.67991	3.67059	3.66875
0.4	4.42809	3.97511	3.78409	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
0.5	4.24851	3.95524	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
1	4.06639	3.94724	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
2	4.05832	3.94722	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
5	4.05830	3.94722	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
10	4.05830	3.94722	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
20	4.05830	3.94722	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66875
50	4.05830	3.94722	3.78406	3.70868	3.67991	3.67059	3.66874
100	4.05830	3.94722	3.78405	3.70868	3.67991	3.67059	3.66874

Tabela 33 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	3.71827	3.70654	4.09413	4.61843	5.06350	5.15741	4.17731
0.02	3.72072	3.68669	3.94002	4.21231	4.30600	4.03310	3.49854
0.03	3.72366	3.67133	3.82817	3.94601	3.86431	3.53016	3.22586
0.04	3.72695	3.65911	3.73982	3.74904	3.57654	3.26935	3.08871
0.05	3.73049	3.64896	3.66612	3.59589	3.38200	3.12437	3.01416
0.1	3.74842	3.61047	3.41006	3.18532	3.00933	2.93431	2.92252
0.2	3.76934	3.53448	3.17193	2.99112	2.93066	2.91833	2.91635
0.3	3.76481	3.45861	3.09119	2.96362	2.92796	2.91823	2.91633
0.4	3.74254	3.39965	3.06301	2.95941	2.92787	2.91823	2.91633
0.5	3.71213	3.35918	3.05275	2.95875	2.92787	2.91823	2.91633
1	3.58661	3.29393	3.04666	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633
2	3.52582	3.28623	3.04661	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633
5	3.51980	3.28614	3.04661	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633
10	3.51980	3.28614	3.04661	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633
20	3.51980	3.28614	3.04661	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633
50	3.51980	3.28614	3.04661	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633
100	3.51980	3.28614	3.04661	2.95863	2.92787	2.91823	2.91633

Tabela 34 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	4.75410	4.70752	5.40334	6.27752	7.00763	7.45632	6.00732
0.02	4.60459	4.66151	5.21123	5.73658	6.07245	6.05572	5.05140
0.03	4.56295	4.63556	5.06846	5.41371	5.56321	5.35060	4.66585
0.04	4.54414	4.61701	4.96185	5.19464	5.22983	4.93645	4.47055
0.05	4.53529	4.60275	4.87998	5.03444	4.99306	4.67968	4.36329
0.1	4.53806	4.56703	4.65421	4.61164	4.44765	4.27150	4.22747
0.2	4.58850	4.56645	4.48683	4.35078	4.25045	4.22010	4.21744
0.3	4.64374	4.58237	4.41625	4.28680	4.23191	4.21946	4.21739
0.4	4.69281	4.59281	4.38242	4.26931	4.23008	4.21945	4.21739
0.5	4.73315	4.59688	4.36595	4.26431	4.22989	4.21945	4.21739
1	4.82899	4.59047	4.35028	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739
2	4.84971	4.58588	4.34976	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739
5	4.84975	4.58569	4.34976	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739
10	4.84975	4.58569	4.34976	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739
20	4.84975	4.58569	4.34976	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739
50	4.84975	4.58569	4.34976	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739
100	4.84975	4.58569	4.34976	4.26225	4.22987	4.21945	4.21739

Tabela 35 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 1.0$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	4.79676	4.59214	4.72878	5.06898	5.23049	4.86502	4.13223
0.02	4.80013	4.56948	4.52265	4.48819	4.21145	3.75596	3.45879
0.03	4.80053	4.54086	4.32508	4.06045	3.68125	3.33769	3.18836
0.04	4.79808	4.50534	4.13974	3.75336	3.38201	3.13695	3.05283
0.05	4.79267	4.46344	3.97290	3.53401	3.20320	3.02981	2.97958
0.1	4.72453	4.20236	3.43340	3.06798	2.93092	2.89682	2.89096
0.2	4.47057	3.75502	3.10197	2.93522	2.89683	2.88714	2.88529
0.3	4.20911	3.51672	3.03504	2.92698	2.89636	2.88709	2.88527
0.4	4.00559	3.39826	3.02036	2.92645	2.89635	2.88709	2.88527
0.5	3.85974	3.33827	3.01706	2.92642	2.89635	2.88709	2.88527
1	3.57525	3.27497	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527
2	3.51336	3.27204	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527
5	3.51075	3.27204	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527
10	3.51075	3.27204	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527
20	3.51075	3.27204	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527
50	3.51075	3.27204	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527
100	3.51075	3.27204	3.01609	2.92641	2.89635	2.88709	2.88527

Tabela 36 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 1.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	5.22054	5.21191	5.76902	6.52168	7.15029	7.25580	5.97338
0.02	5.22548	5.18245	5.55579	5.94982	6.07208	5.68855	5.01771
0.03	5.23122	5.16175	5.39874	5.56917	5.44688	5.00699	4.63239
0.04	5.23716	5.14531	5.27266	5.28653	5.04749	4.65852	4.43750
0.05	5.24319	5.13133	5.16604	5.06824	4.78301	4.46577	4.33072
0.1	5.27053	5.07303	4.79382	4.50498	4.29655	4.21136	4.19654
0.2	5.29421	4.94933	4.47117	4.26516	4.20214	4.18903	4.18687
0.3	5.27660	4.83609	4.37515	4.23678	4.19929	4.18887	4.18682
0.4	5.23516	4.75619	4.34587	4.23321	4.19920	4.18887	4.18682
0.5	5.18616	4.70569	4.33667	4.23276	4.19920	4.18887	4.18682
1	5.01686	4.63575	4.33236	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682
2	4.95309	4.63017	4.33235	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682
5	4.94885	4.63014	4.33235	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682
10	4.94885	4.63014	4.33235	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682
20	4.94885	4.63014	4.33235	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682
50	4.94885	4.63014	4.33235	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682
100	4.94885	4.63014	4.33235	4.23269	4.19920	4.18887	4.18682

Tabela 37 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	4.06368	3.95574	4.25187	4.74232	5.13363	5.05228	4.17907
0.02	4.07191	3.94723	4.11375	4.31987	4.28822	3.90046	3.49899
0.03	4.07945	3.94019	3.99833	4.01019	3.79535	3.43329	3.22600
0.04	4.08650	3.93253	3.89460	3.77126	3.49126	3.20537	3.08877
0.05	4.09280	3.92351	3.79931	3.58636	3.29786	3.08325	3.01419
0.1	4.11010	3.85426	3.43963	3.13252	2.97500	2.92986	2.92252
0.2	4.07945	3.66298	3.14358	2.96933	2.92739	2.91806	2.91636
0.3	3.99811	3.51028	3.06655	2.95562	2.92655	2.91800	2.91633
0.4	3.90517	3.41534	3.04595	2.95445	2.92653	2.91800	2.91633
0.5	3.82068	3.35994	3.04031	2.95435	2.92653	2.91800	2.91633
1	3.59771	3.28897	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633
2	3.52750	3.28378	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633
5	3.52278	3.28375	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633
10	3.52278	3.28375	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633
20	3.52278	3.28375	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633
50	3.52278	3.28375	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633
100	3.52278	3.28375	3.03815	2.95434	2.92653	2.91800	2.91633

Tabela 38 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	5.69385	6.13576	7.30855	8.60541	9.78326	10.5953	8.56099
0.02	5.78265	6.13293	7.07578	7.94104	8.55176	8.73525	7.21866
0.03	5.81284	6.11996	6.90956	7.53438	7.88652	7.78694	6.67689
0.04	5.82750	6.11010	6.78635	7.25827	7.45633	7.20582	6.40184
0.05	5.83990	6.10332	6.69239	7.05821	7.15176	6.82715	6.25017
0.1	5.89838	6.10069	6.44371	6.54571	6.42018	6.15363	6.05562
0.2	6.01285	6.15702	6.28781	6.22062	6.09983	6.04407	6.04062
0.3	6.11881	6.22122	6.22708	6.12486	6.05707	6.04210	6.04054
0.4	6.21209	6.27194	6.19437	6.09287	6.05094	6.04207	6.04054
0.5	6.29200	6.30828	6.17589	6.08162	6.05004	6.04207	6.04054
1	6.53351	6.37634	6.15282	6.07526	6.04989	6.04207	6.04054
2	6.66754	6.39150	6.15122	6.07522	6.04989	6.04207	6.04054
5	6.70085	6.39267	6.15122	6.07522	6.04989	6.04207	6.04054
10	6.70144	6.39267	6.15122	6.07522	6.04989	6.04207	6.04054
20	6.70144	6.39267	6.15122	6.07522	6.04989	6.04207	6.04054
50	6.70144	6.39267	6.15122	6.07522	6.04989	6.04207	6.04054
100	6.70144	6.39267	6.15122	6.07522	6.04989	6.04207	6.04054

Tabela 39 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 0.5$, $\tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	5.56961	5.27161	5.24069	5.40150	5.29363	4.71198	4.11640
0.02	5.56908	5.23409	4.93537	4.61225	4.12591	3.66796	3.45429
0.03	5.55996	5.17052	4.61417	4.06732	3.58567	3.29151	3.18627
0.04	5.54222	5.08590	4.32327	3.70952	3.30313	3.11112	3.05173
0.05	5.51640	4.98676	4.07844	3.47158	3.14332	3.01463	2.97898
0.1	5.29752	4.45225	3.39804	3.02515	2.91948	2.89543	2.89093
0.2	4.73657	3.77389	3.06824	2.92803	2.89591	2.88701	2.88530
0.3	4.30476	3.48748	3.01937	2.92423	2.89566	2.88697	2.88527
0.4	4.02249	3.36357	3.01171	2.92408	2.89566	2.88697	2.88527
0.5	3.84131	3.30803	3.01049	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
1	3.53888	3.26175	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
2	3.49181	3.26071	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
5	3.49079	3.26071	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
10	3.49079	3.26071	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
20	3.49079	3.26071	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
50	3.49079	3.26071	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527
100	3.49079	3.26071	3.01026	2.92407	2.89566	2.88697	2.88527

Tabela 40 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = 2.0$, $\tilde{k}_r = 0.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	6.41290	6.61467	7.61759	8.84526	9.93582	10.4366	8.54331
0.02	6.48208	6.60203	7.38530	8.15689	8.58993	8.31378	7.19831
0.03	6.50240	6.59414	7.21623	7.71134	7.80710	7.31829	6.65539
0.04	6.51960	6.58947	7.08570	7.38780	7.28803	6.78389	6.37990
0.05	6.53624	6.58718	6.98027	7.13844	6.92857	6.47885	6.22813
0.1	6.61476	6.59280	6.63826	6.45806	6.20418	6.06055	6.03409
0.2	6.74463	6.60340	6.32347	6.11620	6.03609	6.02119	6.01930
0.3	6.83375	6.58387	6.21038	6.06655	6.02963	6.02087	6.01922
0.4	6.88708	6.55366	6.17070	6.05906	6.02938	6.02087	6.01922
0.5	6.91422	6.52661	6.15670	6.05792	6.02937	6.02087	6.01922
1	6.90547	6.47368	6.14898	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922
2	6.86870	6.46709	6.14893	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922
5	6.86419	6.46702	6.14893	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922
10	6.86419	6.46702	6.14893	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922
20	6.86419	6.46702	6.14893	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922
50	6.86419	6.46702	6.14893	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922
100	6.86419	6.46702	6.14893	6.05772	6.02937	6.02087	6.01922

Tabela 41 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	3.96098	4.03431	4.56493	5.21192	5.77593	6.03801	4.86143
0.02	3.95165	4.00526	4.38567	4.75955	4.96903	4.81366	4.07944
0.03	3.95257	3.98378	4.26012	4.48030	4.51411	4.22344	3.76442
0.04	3.95426	3.96719	4.16624	4.28409	4.21283	3.89671	3.60535
0.05	3.95653	3.95415	4.09270	4.13587	4.00138	3.70518	3.51841
0.1	3.97340	3.91885	3.87014	3.73126	3.55053	3.43187	3.40991
0.2	4.01466	3.89486	3.67359	3.50373	3.42293	3.40454	3.40226
0.3	4.04887	3.87423	3.59482	3.45980	3.41531	3.40430	3.40222
0.4	4.07094	3.85156	3.56237	3.45040	3.41484	3.40430	3.40222
0.5	4.08206	3.83128	3.54868	3.44832	3.41481	3.40430	3.40222
1	4.06555	3.78578	3.53834	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222
2	4.03049	3.77775	3.53816	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222
5	4.02474	3.77759	3.53816	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222
10	4.02473	3.77759	3.53816	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222
20	4.02473	3.77759	3.53816	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222
50	4.02473	3.77759	3.53816	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222
100	4.02473	3.77759	3.53816	3.44772	3.41481	3.40430	3.40222

Tabela 42 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	4.77296	4.68603	5.01607	5.54405	5.93538	5.78597	4.82250
0.02	4.80880	4.66759	4.82406	5.00978	4.92720	4.48528	4.04173
0.03	4.81861	4.64843	4.66634	4.62775	4.35963	3.96107	3.72771
0.04	4.82369	4.62896	4.52724	4.34095	4.01690	3.70332	3.56959
0.05	4.82684	4.60845	4.40219	4.12450	3.80111	3.56400	3.48353
0.1	4.82391	4.48487	3.95755	3.61312	3.43992	3.38641	3.37742
0.2	4.74437	4.21673	3.62414	3.43271	3.38344	3.37225	3.37022
0.3	4.61744	4.03131	3.54189	3.41656	3.38227	3.37216	3.37019
0.4	4.49136	3.92494	3.52011	3.41504	3.38224	3.37216	3.37019
0.5	4.38572	3.86610	3.51413	3.41490	3.38224	3.37216	3.37019
1	4.13708	3.79610	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019
2	4.07101	3.79174	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019
5	4.06756	3.79173	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019
10	4.06756	3.79173	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019
20	4.06756	3.79173	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019
50	4.06756	3.79173	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019
100	4.06756	3.79173	3.51182	3.41488	3.38224	3.37216	3.37019

Tabela 43 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	7.00693	6.60766	6.44082	6.43200	6.09445	5.38354	4.78258
0.02	6.99236	6.51089	5.91297	5.33052	4.71909	4.22688	4.00397
0.03	6.95757	6.36526	5.41325	4.66148	4.11884	3.80363	3.69141
0.04	6.90527	6.18885	5.00687	4.25012	3.80736	3.59883	3.53456
0.05	6.83806	5.99899	4.69134	3.98488	3.63051	3.48868	3.44961
0.1	6.37549	5.15661	3.90043	3.49644	3.37920	3.35142	3.34626
0.2	5.48189	4.31840	3.54506	3.38852	3.35167	3.34149	3.33954
0.3	4.92670	4.00641	3.49256	3.38401	3.35136	3.34145	3.33951
0.4	4.60025	3.87694	3.48413	3.38381	3.35136	3.34145	3.33951
0.5	4.40217	3.81995	3.48276	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
1	4.08943	3.77312	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
2	4.04363	3.77209	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
5	4.04270	3.77209	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
10	4.04270	3.77209	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
20	4.04270	3.77209	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
50	4.04270	3.77209	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951
100	4.04270	3.77209	3.48250	3.38380	3.35136	3.34145	3.33951

Tabela 44 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.4$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	4.32445	4.26899	4.70934	5.31029	5.82941	5.96438	4.75247
0.02	4.28255	4.24537	4.53306	4.84986	4.97483	4.63044	3.97336
0.03	4.28612	4.22786	4.40758	4.55349	4.46612	4.01915	3.66159
0.04	4.29008	4.21446	4.31091	4.33471	4.12145	3.70838	3.50580
0.05	4.29437	4.20395	4.23205	4.16185	3.88118	3.54066	3.42190
0.1	4.31801	4.17200	3.96001	3.66303	3.41693	3.33264	3.32124
0.2	4.35818	4.11928	3.66707	3.40531	3.33116	3.31735	3.31497
0.3	4.37594	4.04929	3.54805	3.37211	3.32919	3.31728	3.31495
0.4	4.37183	3.97900	3.50394	3.36794	3.32915	3.31728	3.31495
0.5	4.35211	3.92107	3.48790	3.36742	3.32914	3.31728	3.31495
1	4.20220	3.80283	3.47876	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495
2	4.08302	3.78402	3.47870	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495
5	4.06484	3.78368	3.47870	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495
10	4.06481	3.78368	3.47870	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495
20	4.06481	3.78368	3.47870	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495
50	4.06481	3.78368	3.47870	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495
100	4.06481	3.78368	3.47870	3.36734	3.32914	3.31728	3.31495

Tabela 45 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10 ⁶
0.01	5.62415	5.38548	5.50438	5.87534	6.06942	5.56039	4.62309
0.02	5.62297	5.36400	5.29002	5.24361	4.86049	4.20586	3.86287
0.03	5.62422	5.33914	5.08763	4.74666	4.18814	3.72159	3.56020
0.04	5.62377	5.30900	4.89048	4.36260	3.80853	3.49807	3.41081
0.05	5.62117	5.27313	4.70222	4.07494	3.58807	3.38223	3.33184
0.1	5.57338	5.02462	4.00285	3.45187	3.28083	3.24719	3.24162
0.2	5.34283	4.47462	3.51473	3.29519	3.25094	3.23908	3.23678
0.3	5.04665	4.11235	3.41985	3.28841	3.25068	3.23905	3.23677
0.4	4.77541	3.91392	3.40147	3.28812	3.25068	3.23905	3.23677
0.5	4.55799	3.80881	3.39791	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
1	4.07008	3.69474	3.39705	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
2	3.94536	3.68941	3.39705	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
5	3.93904	3.68940	3.39705	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
10	3.93904	3.68940	3.39705	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
20	3.93904	3.68940	3.39705	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
50	3.93904	3.68940	3.39705	3.28811	3.25068	3.23905	3.23677
100	3.93904	3.68940	3.39705	3.28810	3.25068	3.23904	3.23676

Tabela 46 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.8$, $Bi = 10$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 1.5$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	8.99984	8.54692	7.93477	7.27318	6.16901	4.97686	4.45998
0.02	8.95217	8.34740	7.01024	5.57672	4.44648	3.88503	3.72259
0.03	8.86815	8.04935	6.12957	4.61481	3.80483	3.51279	3.43540
0.04	8.75204	7.69398	5.43442	4.07345	3.50994	3.33981	3.29729
0.05	8.60911	7.31800	4.91499	3.75383	3.35750	3.25137	3.22655
0.1	7.68521	5.72666	3.73841	3.26543	3.17408	3.15500	3.15152
0.2	6.02676	4.28604	3.33352	3.19685	3.16129	3.15043	3.14830
0.3	5.06134	3.81133	3.29590	3.19556	3.16123	3.15042	3.14829
0.4	4.52105	3.63783	3.29220	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
0.5	4.20739	3.57146	3.29184	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
1	3.75997	3.52938	3.29180	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
2	3.71209	3.52898	3.29180	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
5	3.71158	3.52898	3.29180	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
10	3.71158	3.52898	3.29180	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
20	3.71158	3.52898	3.29180	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
50	3.71158	3.52898	3.29180	3.19553	3.16123	3.15042	3.14829
100	3.71158	3.52898	3.29179	3.19553	3.16122	3.15042	3.14829

Tabela 47 - Nusselt resolvido por GITT para $\beta = 0.6$, $Bi = 1$, $\tilde{k}_z = \tilde{k}_r = 2.0$ e $n_{\max} = 200$.

ξ	Pe = 1	Pe = 2	Pe = 5	Pe = 10	Pe = 20	Pe = 50	Pe = 10^6
0.01	4.24757	4.14404	4.41139	4.84126	5.15038	5.00387	4.13434
0.02	4.25074	4.11860	4.22542	4.35593	4.26570	3.87146	3.45924
0.03	4.25042	4.09448	4.07712	4.01652	3.77084	3.40952	3.18855
0.04	4.24995	4.07158	3.94914	3.76402	3.47086	3.18067	3.05293
0.05	4.24910	4.04880	3.83570	3.57394	3.28050	3.05674	2.97964
0.1	4.23450	3.92535	3.43840	3.12097	2.95399	2.89961	2.89097
0.2	4.15111	3.67774	3.13811	2.95106	2.89906	2.88739	2.88530
0.3	4.03203	3.50933	3.05936	2.93320	2.89775	2.88732	2.88528
0.4	3.91642	3.41211	3.03640	2.93118	2.89772	2.88732	2.88528
0.5	3.82021	3.35747	3.02934	2.93095	2.89772	2.88732	2.88528
1	3.59273	3.28884	3.02612	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528
2	3.52914	3.28365	3.02611	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528
5	3.52529	3.28362	3.02611	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528
10	3.52529	3.28362	3.02611	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528
20	3.52529	3.28362	3.02611	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528
50	3.52529	3.28362	3.02611	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528
100	3.52529	3.28362	3.02611	2.93092	2.89772	2.88732	2.88528