



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Paula Machado Pirozzi de Alcantara Abi-Nader

**Simulação numérica do processo de condução de calor em um
corpo rígido com mudança de fase**

Rio de Janeiro

2016

Paula Machado Pirozzi de Alcantara Abi-Nader

**Simulação numérica do processo de condução de calor em um corpo rígido
com mudança de fase**



Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica em Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: em Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

A148 Abi-Nader, Paula Machado Pirozzi de Alcântara.
Simulação numérica do processo de condução de calor
em um corpo rígido com mudança de fase / Paula Machado
Pirozzi de Alcântara Abi-Nader. - 2016.
58 f.

Orientador: José Júlio Pedrosa Filho.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio
de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Mecânica. 2. Calor - Transmissão -
Dissertações. 3. Temperatura - Cálculo numérico -
Diferenças finitas - Dissertações. I. Pedrosa Filho, José
Júlio. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III.
Título.

CDU 621:536.2

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial
desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Paula Machado Pirozzi de Alcantara Abi-Nader

**Simulação numérica do processo de condução de calor em um corpo rígido
com mudança de fase**

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica em Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômeno de transporte.

Aprovada em:

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Paulo Guilherme Santos Couto de Castro
Faculdade de Engenharia – UERJ

Rio de Janeiro

2016

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho ao meu companheiro e maior incentivador, Igor Toledo Pimentel.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, por me amparar nos momentos mais tortuosos, me dando forças para superar as dificuldades.

Ao meu professor e orientador José Júlio Pedrosa Filho do departamento de pós-graduação em engenharia mecânica – UERJ, pelos ensinamentos, colaboração e apoio.

Ao professor doutor Rogério Martins Saldanha da Gama pelo apoio, paciência e pela grande ajuda prestada. Por estar disposto a compartilhar seus conhecimentos acadêmicos e científicos.

Agradeço de forma especial à minha amiga, Raquel Ximenes, por abrir as portas de sua casa para me acolher nesse período do mestrado.

Ao meu companheiro de vida, Igor Toledo Pimentel. Por sempre me incentivar a dar o meu melhor e por toda ajuda que fez toda a diferença para a conclusão desse projeto.

Aos meus pais, Maria Francisca Machado Pirozzi e Paulo Cesar Nader, e familiares que sempre mostraram preocupação genuína e muito amor. Por sempre acreditarem no meu potencial.

Agradeço também aos meus amigos que tive a oportunidade de conviver nesse período de estudo.

A Capes, pelo apoio financeiro, que sem ele não conseguiria concluir meu maior objetivo.

RESUMO

ABI-NADER, P. M. P. A. *Simulação numérica do processo de condução de calor em um corpo rígido com mudança de fase*. 2016. 58f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

O trabalho apresenta um estudo sobre a transferência de calor em um corpo rígido em regime transiente, sem geração de calor e com um fluxo de calor bidimensional. Simula-se, numericamente, o comportamento da temperatura variando com o tempo. O método das diferenças finitas é aplicado com o propósito de definir o perfil de temperatura ao longo da barra em um intervalo de tempo estipulado. O método para a solução do sistema de equações lineares de Gauss-Seidel é empregado para resolver as equações diferenciais que regem os problemas de transferência de calor bidimensional com mudança de fase em regime transiente. São avaliados para diferentes materiais, verificando que comportamento do perfil de temperatura é semelhante para meios distintos.

Palavras Chave: Transferência de calor; Regime transiente; Método das diferenças finitas; Distribuição de temperatura; Mudança de fase.

ABSTRACT

ABI-NADER, P. M. P. A. *Numerical simulation of heat conduction in a process of rigid body phase change*. 2016. 58f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

This present study on heat transfer in a rigid body in transient without heat and with a two-dimensional heat flow. It is simulated numerically temperature behavior varying with time. The finite difference method is applied in order to set the temperature profile along the rod in a specified time interval. The method for the solution of linear equations Gauss-Seidel system is used to solve the differential equations that react the two-dimensional heat transfer problems with phase change in transient regime. They are evaluated for different materials, temperature profile checking that the behavior is similar for different media.

Keywords: Heat transfer; Transient; Finite Difference Method; Temperature distribution; Phase change.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Distribuição unidimensional de temperatura e fluxo de calor	17
Figura 2: Condução de calor em regime permanente em uma placa plana	18
Figura 3: Condução de calor em regime transiente em uma placa plana.	18
Figura 4: Representação Gráfica do perfil de temperatura da água	20
Figura 5: Volume de controle diferencial, dx,dy,dz , para análise da condução em coordenadas cartesianas.	21
Figura 6: Condução Bidimensional – Rede Nodal	26
Figura 7: Condução Bidimensional – Aproximação por Diferenças Finitas	27
Figura 8: Temperatura da superfície constante em $x=0$, na parede plana	33
Figura 9: Fluxo térmico diferente de zero na parede plana	34
Figura 10: Superfície adiabática	34
Figura 11: Condição de convecção na superfície	35
Figura 12: Gráfico esquemático das temperaturas de contorno da placa no instante inicial.	40
Figura 13: Algoritmo do desenvolvimento do problema	42
Figura 14: Gráfico do perfil de temperatura sem mudança de fase	43
Figura 15: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo – sem mudança de fase.	44
Figura 16: Gráfico do perfil de temperatura com mudança de fase	45
<i>Figura 17: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo de 100 segundo – com mudança de fase.</i>	46
Figura 18: Gráfico do perfil de temperatura com mudança de fase	47
Figura 19: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo de 100 segundo – com mudança de fase.	48
Figura 20: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo de 1000 segundo – com mudança de fase.	49
Figura 21: Representação gráfica em três dimensões da distribuição da temperatura com o tempo de 1000 segundo – com mudança de fase.	49
Figura 22: Representação gráfica em três dimensões da distribuição da temperatura com o tempo de 100 segundo – com mudança de fase.	50

Figura 23: Representação gráfica em três dimensões da distribuição da 51 temperatura com o tempo de 10000 segundo – com mudança de fase.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Valores dos dados da primeira simulação.....	36
Tabela 2: Valores dos dados da segunda simulação.....	37
Tabela 3: Valores dos dados da terceira simulação.....	37
Tabela 4: Valores dos dados da quarta simulação.....	38
Tabela 5: Valores dos dados da quinta simulação.....	38
Tabela 6: Valores dos dados da sexta simulação.....	38

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
T	Temperatura
χ	Concentração de fase líquida
ρ	Massa específica
α	Difusividade térmica
ε	Erro
k	Condutividade térmica
c_p	Calor específico
\dot{q}	Taxa de calor
q''	Fluxo de calor
A	Área da seção transversal
L	Comprimento da barra
t	Tempo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
Objetivo do trabalho	12
Organização do texto	13
1 - CONTEXTO HISTÓRICO	14
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
2.1 - Transferência de calor por condução	16
2.2 - Transferência de calor no regime transiente	17
2.3 - Exigência da conservação de energia	18
2.4 - Energia interna	19
2.5 - Calor latente	19
2.6 - Armazenamento de calor latente	20
2.7 - A Equação da Difusão do Calor	21
2.8 - Equação de Diferenças Finitas	24
2.9 - Solução numérica de sistemas lineares	30
2.9.1 - Solução do sistema linear de equações pelo método de Gauss-Seidel	31
3 - PROBLEMA PROPOSTO	36
4 - DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE RESOLUÇÃO	40
5 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	43
6 - CONCLUSÃO	52
6.1 - Sugestão de continuidade do trabalho	52
REFERÊNCIAS	53
ANEXO I – Código aplicado ao software que modela o método das diferenças finitas com solução de Gauss-Seidel – com mudança de fase.....	55
ANEXO II - Código aplicado ao software que modela o método das diferenças finitas com solução de Gauss-Seidel – sem mudança de fase.....	57

INTRODUÇÃO

A transferência de calor é um aspecto dominante na maioria dos dispositivos de conservação e produção de energia. Com isso, a determinação das propriedades físicas dos materiais é um ramo promissor e de grau elevado em diversos setores. A título de exemplo, cita-se o controle da temperatura em equipamentos industriais, mecânicos e eletrônicos.

Tendo em vista, então, que estudo do fluxo de calor para regimes em que ocorrem mudança de fase é de suma importância na engenharia, há a necessidade de se analisar o comportamento da temperatura ao longo de um corpo rígido.

Vários mecanismos atuam para que a mudança de fase de sólido para líquido ou na direção oposta ocorra. Porém o calor é o mais significativo mecanismo que permite a troca de fase segundo ISMAIL (1998).

Segundo ISMAIL (1998), a transição de uma fase para outra, ou seja, a absorção ou liberação de calor latente acontece numa certa temperatura em função da energia disponível, sendo que esta temperatura de mudança de fase depende da pressão. As forças coesivas presentes nas fases sólida e líquida mantêm os átomos unidos. No estado sólido as moléculas vibram em torno de posições de equilíbrio fixas. No estado líquido, os átomos são mais enérgicos que na fase sólida, isso resulta a transladação das moléculas ao redor das posições fixas com o aumento da temperatura. Em virtude dos átomos, no estado sólido, serem menos energéticos comparados ao estado líquido, se faz necessária uma adição de energia para que supere as forças coesivas.

Os problemas de mudança de fase no regime transiente possuem solução analítica apenas para casos restritos. Segundo Taylor (2005), ao contrário dos problemas lineares, a maioria dos problemas não lineares é impossível de ser resolvida de forma analítica. Faz-se necessário, então, a utilização de métodos numéricos para determinar a solução do problema.

Objetivo do trabalho

Este trabalho tem por objetivo modelar matematicamente o perfil de temperatura com mudança de fase de uma placa plana que apresenta um fluxo bidimensional, no regime transiente, com a condição de contorno de Dirichlet.

Organização do texto

Inicialmente, este trabalho apresenta um resumo do contexto histórico em que se começou a estudar a transferência de calor e em seguida apresenta-se uma revisão bibliográfica que aborda a conservação de energia abordando tópicos essenciais afim de analisar a energia interna do sistema, transferência de calor por condução e em regime transiente, a difusão do calor e suas condições de fronteira.

Em seguida é apresentada uma simulação numérica para a determinação da distribuição de temperaturas, na presença de mudança de fase, para dois corpos rígidos, com temperatura de fusão distintas. Para isso, emprega-se o método das diferenças finitas. Para resolver as equações algébricas oriundas da discretização do problema original, é utilizado o método numérico de Gauss-Seidel, que fornece uma ferramenta eficiente para a modelagem do comportamento da temperatura.

É feita uma discussão dos resultados numéricos encontrados para cada intervalo de tempo.

Finalmente, são apresentadas as conclusões do trabalho com propostas de continuidade do trabalho, as referências bibliográficas e um anexo que está descrito o código aplicado ao software Matlab usado para a resolução do problema.

1. CONTEXTO HISTÓRICO

Fourier estabeleceu sua teoria da propagação do calor em corpos sólidos, em um ambiente cenário marcado pelo paradigma newtoniano, reduzindo fenômenos naturais à análise matemática. Ele rompeu com a abordagem tradicional ao ignorar as hipóteses sobre a natureza do calor e criou um modelo físico. Esse contexto histórico será abordado a seguir.

No século XVIII, a mecânica era moldada pelo paradigma newtoniano e desenvolvida matematicamente por Euler, Lagrange e Laplace. Neste período, a construção de máquinas térmicas chamou a atenção para o estudo do fenômeno da transferência de calor. Inicialmente, a teoria mecânica, que era relacionada com o movimento de partículas da matéria, e a teoria do calórico, que afirmava que o calor era um fluido eram aceitas.

Em um ambiente influenciado pelas ideias newtonianas e com o propósito de se obter uma síntese que moldasse o cenário científico, surgiu o projeto laplaciano. Neste projeto, Laplace defendeu uma nova física universal, que tinha como hipótese os movimentos moleculares e forças associadas a eles.

Neste cenário, Jean Baptiste Joseph Fourier começa os estudos sobre condução de calor. No ano de 1807, Fourier apresenta, em um trabalho intitulado *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, a correta formulação da lei de propagação do calor. Com isso, Fourier rompeu a teoria laplaciana, ignorou a natureza do calor e ampliou as aplicações do cálculo diferencial. Contudo, a publicação de sua obra só se deu em 1822, em uma versão revisada e ampliada intitulada *Théorie analytique de la chaleur*.

Na primeira investigação de Fourier de formular a teoria de propagação de calor, ele considerou a propagação de calor entre um número finito de corpos discretizados em uma linha reta. Seu objetivo era formular uma lei matemática que descreveria como o aquecimento de um corpo rígido influenciava temperaturas ao longo do corpo em função do tempo [1]. A técnica usada para descrever esse problema foi a teoria das cordas vibrantes, que já tinha sido usada. Essa técnica considera um modelo contendo uma quantidade fixa de corpos discretos, para, então, obter a solução de um corpo contínuo, fazendo a quantidade de pontos fixos tender ao infinito. Como não conseguiu encontrar a solução desejada, abandonou essa teoria, até que Biot publicou uma obra em 1804 [1].

A obra de Biot determinava experimentalmente a lei de distribuição de temperaturas em barras de ferro. Essa barra era aquecida em uma das extremidades e podia dissipar calor para o meio externo. Para isso, recorreu à lei de resfriamento de Newton, que afirma que o calor dissipado por um corpo para o meio externo é proporcional a diferenças entre suas temperaturas. O obstáculo que o impediu de obter a equação de propagação do calor foi a abordagem, que assumia a priori que a transferência de calor deveria ocorrer entre pontos numa barra. Ignorando a noção de fluxo e não considerando a distância entre os pontos, ele não empregou a ideia de gradiente de temperatura.

Seguindo a linha de pensamento de Biot, Fourier voltou-se para desenvolver a metodologia da distribuição de temperatura em uma barra quando aquecida uma de suas extremidades, baseando-se, assim, na lei de resfriamento de Newton e na aplicação de diferentes coeficientes de condutividade para as propagações de calor. Diferentemente de Biot, Fourier assumiu a troca de calor entre seções na barra, e não em pontos (teoria do volume de controle) [1].

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Transferência de calor por condução

Em ÇENGEL et al.(2012), o fenômeno de condução térmica é descrito pela propagação de calor. A condução térmica ocorre quando a energia térmica é transferida entre as partículas, não havendo transporte de matéria.

FOURIER (1822) publicou o primeiro texto que tinha como intenção investigar o fenômeno de condução de calor em um sólido. Esse texto tinha como suma importância a introdução à interpretação e representação matemática do calor, através de análise de séries trigonométricas, que posteriormente foi intitulada séries de Fourier em sua homenagem. Esse texto tornou-se fonte padrão de pesquisas em condução de calor.

Em um meio sólido, a condução de calor é resultado da atividade atômica em forma de vibrações dos retículos. As partículas de maior valor energético transferem energia para as de menor valor energético. É possível quantificar processos de transferência de calor em termos de equações de taxas apropriadas. Com isso, a quantidade de energia sendo transferida por unidade de tempo é obtida.

A Lei de Fourier foi desenvolvida a partir de fenômenos observados ao invés de derivar de princípios fundamentais, por isso, é denominada *fenomenológica*.

É possível quantificar os processos de transferência de calor em termos do fluxo de energia que, no caso da condução, é dada empiricamente pela Lei de Fourier.

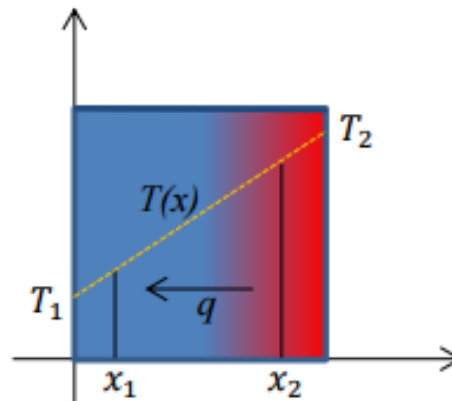
$$q'' = -k \cdot \nabla T = -k \left(\mathbf{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Onde, q'' é o fluxo de calor e é proporcional ao gradiente de temperatura nessa direção. A propriedade de transporte, k , é denominado condutividade térmica [W/mK] e é característica do material. O sinal de menos é proveniente do calor ser transferido na direção da temperatura maior para a menor.

O fluxo é o módulo de um vetor, ou seja, $q'' > 0$ indica que o fluxo transita no sentido positivo de x , e que $q'' < 0$ no sentido negativo. O sinal negativo da Equação

(2) indica que, quando o gradiente de temperatura é positivo o calor flui da direita para a esquerda, da seção x_2 para x_1 conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Distribuição unidimensional de temperatura e fluxo de calor.



Fonte: Autor

A taxa de transferência de calor, por sua vez, é dada por:

$$\dot{q} = -k \cdot A \cdot \nabla T = -kA \left(\mathbf{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2)$$

onde A , [m^2], é a área transversal ao fluxo.

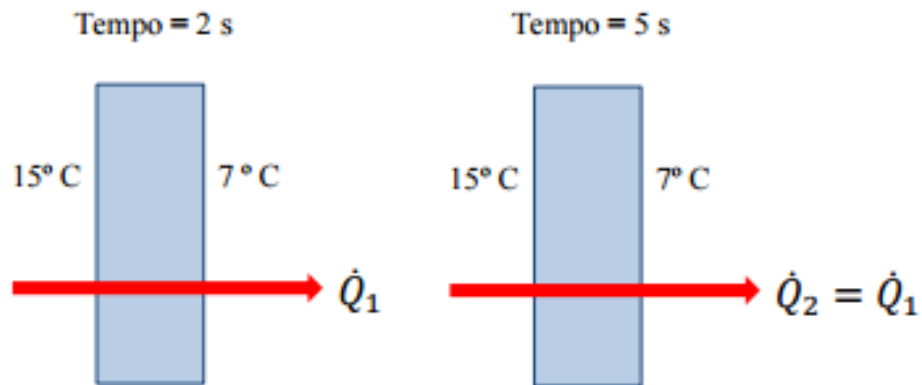
2.1. Transferência de calor no regime transiente

O desequilíbrio térmico de um sistema provoca o trânsito de energia. Essa transferência de calor possui direção e magnitude. A taxa de condução de calor, \dot{q} , em uma direção é proporcional ao gradiente de temperatura, segundo ÇENGEL (2009).

Segundo GUMERATO et al. (2006), um sistema é classificado como permanente quando a condução de calor não varia com o tempo. Diferentemente do regime permanente, o estado transiente implica na dependência da transferência de calor com o tempo.

A Figura 2 esquematiza a taxa de calor em regime permanente. Observa-se que esta não varia no instante seguinte.

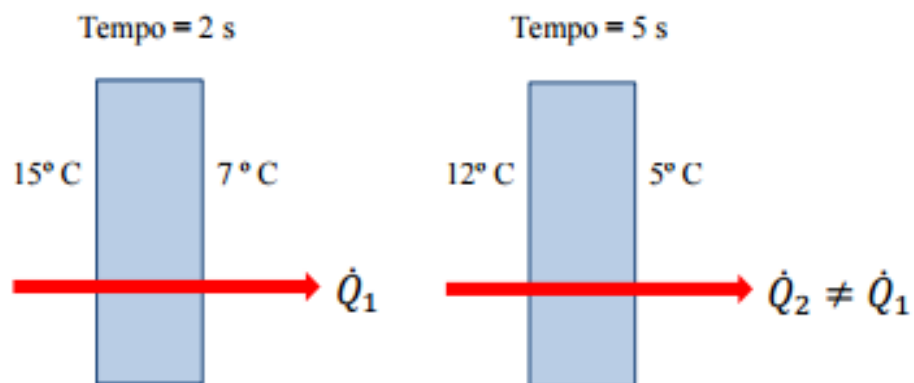
Figura 2: Condução de calor em regime permanente em uma placa plana



Fonte: Autor

Na Figura 3, observa-se que a taxa de calor no instante seguinte é diferente da taxa de calor no instante inicial. Classifica-se esse sistema de transferência de calor dependente do tempo.

Figura 3: Condução de calor em regime transiente em uma placa plana.



Fonte: Autor

2.2. Exigência da conservação de energia

A primeira lei da termodinâmica é um postulado que estabelece que a energia total de um sistema isolado é conservada. Além disso, a única maneira pela qual a quantidade de energia de um sistema pode mudar é se a energia cruzar sua fronteira [2]. Isso significa que o aumento na quantidade de energia armazenada em

um volume de controle deve ser igual à quantidade de energia que entra menos a que sai do volume de controle. A primeira lei da termodinâmica refere-se à energia total, que é constituída pela energia mecânica (é o conjunto das energias cinética e potencial) e pela energia interna. A energia interna pode ser subdividida em energia térmica e outras formas de energia interna como energias química e nuclear.

A soma de energia térmica e mecânica de um sistema não é conservada, pois pode existir outras formas de energia envolvidas no sistema. Por exemplo, se ocorrer uma reação química que diminua a quantidade de energia química no sistema, resultará, assim, um aumento na energia térmica do sistema. Assim, a primeira lei da termodinâmica pode ser enunciada na forma:

O aumento na quantidade de energia térmica e mecânica acumulada (armazenada) em um volume de controle deve ser igual à quantidade de energia térmica e mecânica que entra no volume de controle, menos a quantidade de energia térmica e mecânica que deixa o volume de controle, mais a quantidade de energia térmica que é gerada no interior do volume de controle [3].

Se a quantidade de energia térmica e mecânica que entra e é gerada excedem a quantidade de energia que sai do volume de controle, haverá um aumento de energia térmica e mecânica acumulada no volume de controle.

2.3. Energia interna

A energia interna é constituída por um componente sensível, que é ligado aos movimentos de translação, rotação e/ou vibração dos átomos que compõe a matéria, relaciona-se a mudança de temperatura; por um componente latente, que é relacionado com as forças intermoleculares que influenciam na mudança física da matéria; e por fim, um componente nuclear, que está relacionado com as forças de ligação no interior dos núcleos.

2.4. Calor latente

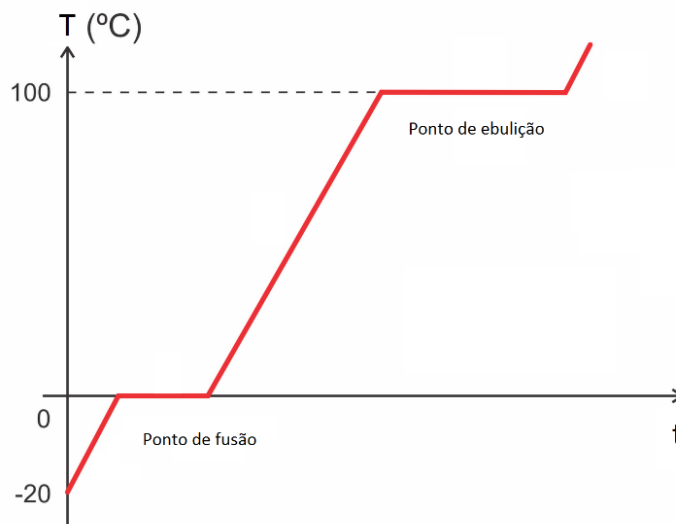
O calor é o processo de transferência de energia entre dois corpos devido a diferença de temperatura entre eles. Quando o corpo que recebe ou libera energia encontra-se na temperatura de mudança de fase, esse corpo permanece com a mesma temperatura até que a transição seja concluída, mesmo trocando calor. Isso ocorre, por exemplo, na liquefação de uma amostra gasosa, na solidificação de uma

amostra líquida e nas transições inversas. A quantidade de calor na transição de fase é explicitada na Equação (3).

$$Q = m \cdot L \quad (3)$$

A quantidade de calor trocada na mudança de fase é denominada de calor latente (Q). O coeficiente L é uma constante de proporcionalidade da substância, com massa m, de que é feita a amostra e da transição de fase. Esse coeficiente é conhecido como calor latente e refere-se à quantidade de calor que uma grama da substância necessita para mudar de fase. Além de depender da amostra, esta constante característica depende da mudança de fase de estado físico. A *Figura 4* a seguir, demonstra o perfil de temperatura da água com o tempo.

Figura 4: Representação Gráfica do perfil de temperatura da água



Fonte: Autor

2.5. Armazenamento de calor latente

Segundo WATANABE et al. (1993), no armazenamento da energia ou da perda de calor industrial, é aplicável o armazenamento de calor latente por uso de mudança de fase. Os autores afirmam que o calor latente tem características atrativas, uma vez que o material de mudança de fase oferece maior armazenamento de calor por unidade de volume comparado ao calor sensível, e a carga térmica é entregue a uma temperatura constante.

Para GONÇALVES (1996), o armazenamento térmico de calor latente está associado à mudança de fase de um material. A vantagem dessa forma de armazenar certa quantidade de energia é por ser significativamente maior que o calor sensível na mesma faixa de temperatura do material. A consequência é que a massa e o volume são menores, e o processo se realiza a temperaturas constantes.

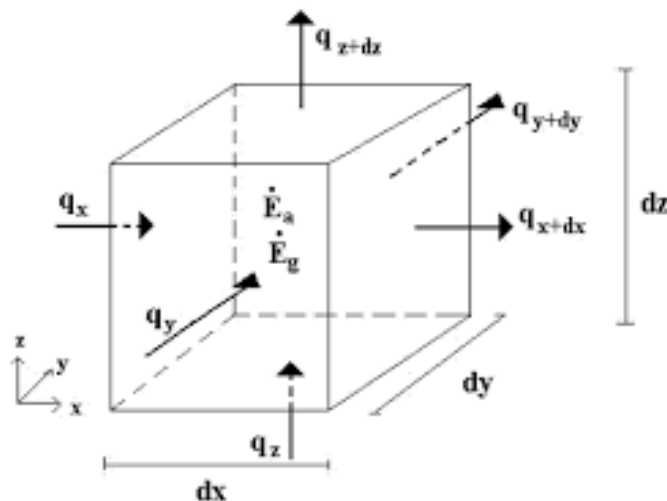
2.6. A Equação da Difusão do Calor

Objetiva-se na análise da condução de calor, determinar a distribuição de temperatura em um meio resultante da imposição de condições em suas fronteiras. Através da Lei de Fourier determina-se o fluxo de calor em qualquer ponto do meio ou superfície. [2]

O modelo matemático que descreve a difusão do calor em meios sólidos é intitulado equação do calor. Essa equação diferencial parcial descreve a quantidade de calor que se propaga em um meio.

Em um meio homogêneo, define-se um volume de controle diferencial apresentado na Figura 5.

Figura 5: Volume de controle diferencial, dx, dy, dz , para análise da condução em coordenadas cartesianas.



Fonte: INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6 ed. Rio de Janeiro

O gradiente de temperatura em um meio sólido indica que há transferência de calor por condução em cada superfície de controle. As taxas de transferência de

calor por condução perpendiculares a cada uma das superfícies de controle na posição das coordenadas x , y e z são: q_x , q_y e q_z . Nas superfícies opostas, as taxas de transferência de calor por condução são obtidas através da expansão de Taylor demonstrado a seguir:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + O(\Delta x^2) \quad (4)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + O(\Delta y^2) \quad (5)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + O(\Delta z^2) \quad (6)$$

Em alguns meios, há uma ou mais fontes de calor em seu interior associado a taxa de geração de energia térmica.

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad (7)$$

\dot{q} é a taxa de energia gerada por unidade de volume [W/m³].

Ademais, pode ocorrer variações na quantidade de energia interna armazenada no interior do volume de controle. Como o caso estudado há mudança de fase, os efeitos de energia latente são pertinentes. O acúmulo de energia é escrito na Equação (8).

$$\dot{E}_{acu} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz + \rho L \frac{\partial \chi}{\partial t} dx dy dz \quad (8)$$

Onde L é o calor latente referente a mudança de fase sólido-líquido, ρ é a densidade do meio na fase sólida e χ é a concentração de fase líquida do meio.

Para que haja conservação de energia, a energia que entra em um volume de controle, \dot{E}_{ent} , somada a energia gerada no sistema, \dot{E}_g , subtraindo a energia que deixa o volume de controle, \dot{E}_{sai} , é a energia que está acumulada nesse sistema.

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_g - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu} \quad (9)$$

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}dxdydz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz + \rho L \frac{\partial \chi}{\partial t} dxdydz \quad (10)$$

Substituindo as Equações (4), (5) e (6) na equação (10), encontra-se:

$$q_x + q_y + \dot{E}_g - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) = \dot{E}_{acu} \quad (11)$$

$$\dot{q}dxdydz - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz + \rho L \frac{\partial \chi}{\partial t} dxdydz \quad (12)$$

A Lei de Fourier aplicada a um volume de controle multiplicado pela área (diferencial) da superfície de controle apropriada para obter a taxa de transferência de calor.

A taxa de transferência de calor que passa no eixo x atravessa uma área diferencial $dy \cdot dz$. Logo,

$$\dot{q}_x = -kdydz \frac{\partial T}{\partial x} \quad (13)$$

A taxa de transferência de calor que passa no eixo y atravessa uma área diferencial $dx \cdot dz$. Essa taxa é dada por,

$$\dot{q}_y = -kdx dz \frac{\partial T}{\partial y} \quad (14)$$

A taxa de transferência de calor que passa no eixo z atravessa uma área diferencial $dx \cdot dy$. Logo,

$$\dot{q}_z = -kdx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (15)$$

A Equação (12) é reescrita na forma:

$$\dot{q}dxdydz + k\nabla^2 T dxdydz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz + \rho L \frac{\partial \chi}{\partial t} dxdydz \quad (16)$$

$$\dot{q} + k\nabla^2 T(x, y, z) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho L \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (17)$$

$$\dot{q} + \nabla^2 T(x, y, z) = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho L}{k} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (18)$$

$$\dot{q} + \nabla^2 T(x, y, z) = \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho L}{k} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (19)$$

Sendo ρ a massa específica do meio e c_p o seu calor específico, k a condutividade térmica. A propriedade $\alpha = k/\rho c_p$ é a difusividade térmica do material, ou seja, expressa o quão rápido o calor se propaga através dele.

A Equação (19) é a forma geral, em coordenadas cartesianas, da equação da difusão do calor. Essa equação, usualmente chamada de equação do calor, fornece ferramenta básica para a análise da condução do calor. A solução da equação da difusão do calor obtém a distribuição do calor a distribuição de temperatura como uma função do tempo.

2.7. Equação de Diferenças Finitas

BREBBIA (1992) apresenta três maneiras para resolver o problema de transferência de calor em uma placa plana. A primeira usa a Transformada de Laplace, a segunda por aproximação de diferenças finitas e a terceira utiliza a solução fundamental dependente do tempo. Para este trabalho, adota-se a solução por aproximação por diferenças finitas.

O matemático Brook Taylor (1685-1731), em 1715, publicou a obra *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, onde expressa a série que hoje é conhecida como série de Taylor.

$$f(x + a) = f(a) + f'(a)x + f''(a) \frac{x^2}{2!} + f'''(a) \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (20)$$

Teorema de Taylor: Seja f uma função derivável até a ordem $n+1$ em um intervalo contendo x , então para cada $x + \Delta x$ nesse intervalo existe um número real entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''\Delta x^2}{2!} + \dots + \frac{f^n\Delta x^n}{n!} + O(x - \Delta x)^{n+1} \quad (21)$$

Onde $O(x - \Delta x)^{n+1}$ é chamado de erro associado à aproximação. Logo, o polinômio de Taylor é expresso na equação a seguir.

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''\Delta x^2}{2!} + \dots + \frac{f^n\Delta x^n}{n!} \quad (22)$$

Uma das primícias do método de diferenças finitas é discretizar o domínio da função e substituir as derivadas existentes no problema por aproximações de diferenças. Tais aproximações são obtidas pela *expansão de Taylor*. As equações discretizadas resultantes são usadas em programas de computador para determinar as soluções numéricas.

Segundo ÖZISIK (1994), a formulação matemática que gere os problemas de mudança de fase são equações diferenciais parabólicas, contudo, a interface da transição de estado não é conhecida, e sua solução é determinada separada da solução do problema. Por conseguinte, os sistemas em que há mudança de fase são não lineares e de solução analítica com alto grau de dificuldade.

Para ÖZISIK (1994), a maior parte das soluções de sistemas com mudança de fase é gerada através de métodos numéricos, são estes divididos nas seguintes categorias:

Método da malha fixa – Neste método o domínio espaço-tempo é discretizado em uma quantidade finita de nós com espaçamentos uniformes Δx e intervalos uniformes de tempo, Δt . A interfase móvel de transição de fase está posicionada entre dois pontos da malha em qualquer tempo.

Método da malha variável – O domínio espaço-tempo, neste método, é discretizado em intervalos iguais em uma das dimensões. O tamanho correspondente à outra dimensão é determinado pela fronteira móvel. Essa fronteira tem sua posição coincidindo com um ponto da malha no tempo e no espaço.

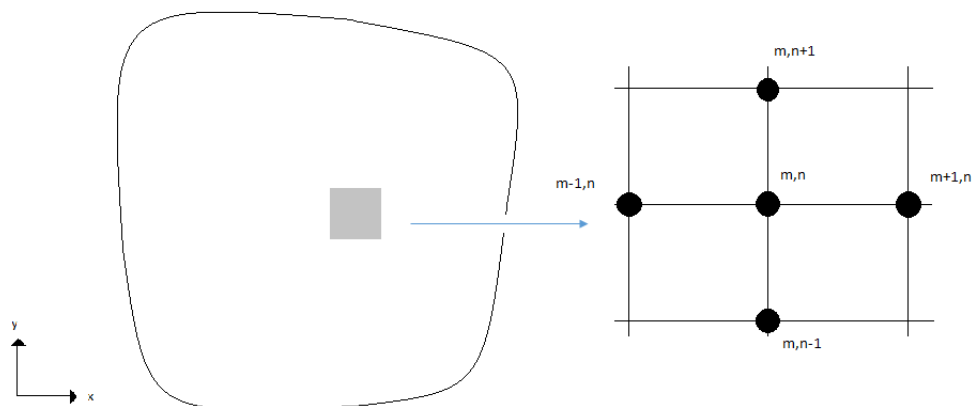
Método da frente fixa – Este método é aplicado em problemas unidimensional. É um esquema de transformação de coordenadas que fixa a fronteira móvel diminuindo a necessidade de acompanhá-la. É usada para problemas de grau avançado de complexidade usando esquema numérico.

Neste trabalho, o método usado é o método da malha fixa.

Opondo-se a uma solução analítica, que permite a determinação da temperatura em qualquer ponto de interesse em um meio, a solução numérica é

usada para obter a temperatura em pontos discretos. A premissa da solução numérica é, por consequência, a seleção desses pontos. Para isso, subdivide-se o meio de interesse em um número suficientemente pequeno de regiões especifica-se para cada região um ponto de referência localizado no seu centro. Esse ponto é chamado de ponto nodal ou de nó. O conjunto de nós é conhecido como rede, malha nodal. [2] . Os pontos nodas em um sistema bidimensional é representado na figura a seguir.

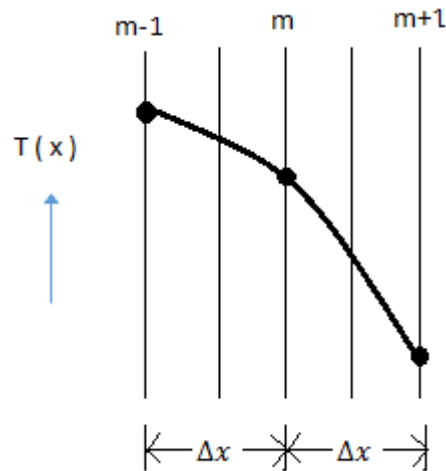
Figura 6: Condução Bidimensional – Rede Nodal



Fonte: Autor

Cada nó representa uma região e a sua temperatura é a média das temperaturas da região, representado na figura a seguir.

Figura 7: Condução Bidimensional – Aproximação por Diferenças Finitas



Fonte: Autor

Para a obtenção da solução numérica da distribuição de temperatura há a necessidade que a equação da conservação apropriada seja escrita para cada ponto nodal no tempo inicial. O conjunto das equações deve ser resolvido simultaneamente.

Para a solução do problema expresso na equação (19), há a necessidade, inicialmente, de definir os contadores no eixo x , no eixo y e temporal. Para a variação da temperatura longitudinal, o índice m será o contador. Para a variação da temperatura no eixo y , será o índice m . O índice i será usado para a variação da temperatura com o tempo.

Discretização no eixo x :

$$T(x + \Delta x, y, t) = T(x, y, t) + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \quad (23)$$

$$T(x - \Delta x, y, t) = T(x, y, t) - \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} - O(\Delta x^3) \quad (24)$$

Aplica-se o método das diferenças finitas centrada apresentado na seção 243.8:

$$T(x + \Delta x, y, t) + T(x - \Delta x, y, t) = 2T(x, y, t) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Delta x^2 \quad (25)$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} = \frac{T(x+\Delta x, y, t) - 2T(x, y, t) + T(x-\Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \quad (26)$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} = \frac{T_{m+1, n, i} - 2T_{m, n, i} + T_{m-1, n, i}}{\Delta x^2} \quad (27)$$

Discretização no eixo y é :

$$T(x, y + \Delta y, t) = T(x, y, t) + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} \Delta y^2 + O(\Delta y^3) \quad (28)$$

$$T(x, y - \Delta y, t) = T(x, y, t) - \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} \Delta y^2 - O(\Delta y^3) \quad (29)$$

Aplica-se o método das diferenças finitas centrada:

$$T(x, y + \Delta y, t) + T(x, y - \Delta y, t) = 2T(x, y, t) + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} \Delta y^2 \quad (30)$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial y^2} = \frac{T(x, y + \Delta y, t) - 2T(x, y, t) + T(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial y^2} = \frac{T_{m, n+1, i} - 2T_{m, n, i} + T_{m, n-1, i}}{\Delta y^2} \quad (32)$$

Para a distribuição da temperatura no tempo, aplica-se a diferença finita regressiva:

$$T(x, y, t - \Delta t) = T(x, y, t) - \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x, y, t) - T(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{m, n, i-1} - T_{m, n, i}}{\Delta t} \quad (35)$$

Como fator de concentração de fase líquida é uma derivada de primeira ordem no tempo, aplica-se a diferença finita regressiva.

$$\chi(x, y, t - \Delta t) = \chi(x, y, t) - \frac{\partial \chi}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (36)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\chi(x, y, t) - \chi(x, y, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\chi_{m,n,i-1} - \chi_{m,n,i}}{\Delta t} \quad (38)$$

O termo $T_{m,n,i-1}$ será denotado como $TA_{m,n}$, e o termo $\chi_{m,n,i-1}$, por $\chi A_{m,n}$.

Reescreve-se, então, a Equação (19) na forma:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T_{m+1,n,i} - 2T_{m,n,i} + T_{m-1,n,i}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{T_{m,n+1,i} - 2T_{m,n,i} + T_{m,n-1,i}}{\Delta y^2} \right) \\ & = \alpha \frac{(TA_{m,n} - T_{m,n,i})}{\Delta t} + \frac{\rho L}{k} \frac{(\chi A_{m,n} - \chi_{m,n})}{\Delta t} \end{aligned} \quad (39)$$

$$w = \left(-\frac{2}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{\alpha}{\Delta t} \right) \quad (40)$$

$$w_1 = \frac{\alpha}{\Delta t \cdot w} \quad (41)$$

$$w_2 = \frac{1}{\Delta x^2 \cdot w} \quad (42)$$

$$w_3 = \frac{1}{\Delta y^2 \cdot w} \quad (43)$$

$$w_4 = \frac{\rho L}{k\Delta tw} \quad (44)$$

$$T_{m,n,i} = w_1 T A_{m,n} + w_2 (T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + w_3 (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - w_4 (\chi A_{m,n} - \chi_{m,n}) \quad (45)$$

Com a EDP transformada em uma equação de diferenças em um domínio discreto, a molécula computacional pode ser aplicada em cada ponto do domínio, gerando um sistema linear. Esse sistema linear será resolvido com o método iterativo descrito na seção a seguir.

2.8. Solução numérica de sistemas lineares

Segundo FRANCO (2008), métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos. A primeira classificação é dos métodos diretos, com o número finito de passos, que fornecem uma solução exata, exceto o erro proveniente do arredondamento. A segunda classificação é dos métodos iterativos, estes permitem obter a solução do sistema com maior precisão, através de um processo infinito de convergência.

FRANCO (2008) ressalta o fato de que os erros de arredondamento dos métodos diretos, em sistemas mais complexos, tornam a solução sem significado, enquanto que os métodos iterativos os erros não se acumulam. Essas características fazem dos métodos iterativos os mais apropriados para a solução numérica de sistemas lineares providas das EDPs.

Um método iterativo baseia-se em uma técnica para resolver um sistema linear do tipo $A \cdot x = b$, apresentado na equação (51).

$$\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + \dots + a_{1N}T_N &= D_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + \dots + a_{2N}T_N &= D_2 \\ &\vdots \\ a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + a_{N3}T_3 + \dots + a_{NN}T_N &= D_N \end{aligned} \quad (46)$$

A partir de uma aproximação inicial x^0 para a solução x , gera uma sequência de vetores $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$, que converge para a solução x . Essa técnica transfoma o sistema $A \cdot x = b$ em um sistema equivalente na forma de Equação (52), para alguma matriz T e algum vetor \bar{d} fixos.

$$x^* = T \cdot x + \bar{d} \quad (47)$$

Após o vetor inicial ter sido obtido, a sequência de vetores para aproximar a solução é gerada calculando-se como na Equação a seguir.

$$x^k = T \cdot x^{k-1} + \bar{d}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

Neste trabalho, o método iterativo para solução do sistema linear decorrente da equação diferencial do calor é o método de Gauss-Seidel que será descrito na próxima seção.

2.8.1. Solução do sistema linear de equações pelo método de Gauss-Seidel

Após estabelecer a rede nodal e a equação de diferenças finitas apropriada para cada ponto nodal, é determinado a distribuição de temperatura. O problema é reduzido a solução de um sistema de equações algébricas lineares. O método iterativo de Gauss-Seidel pode ser usado para determinar a solução desejada.

Dado o sistema de equações (51):

A aplicação do método de Gauss-Seidel para esse sistema de equações segue o algoritmo a seguir:

- 1) As equações devem ser reordenadas para que os elementos na diagonal principal tenham os módulos maiores que a soma dos elementos das respectivas linhas;
- 2) Após a reordenação, cada uma das N equações deve ser escrita na forma explícita para a temperatura associada ao seu elemento da diagonal. Cada temperatura no vetor solução fica, então, na forma:

$$T_{m,n,i}^k = w_1 T A_{m,n} + w_2 (T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + w_3 (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - w_4 (\chi A_{m,n} - \chi_{m,n}) \quad (49)$$

3) Atribui-se o valor inicial $k=1$ na Equação (52), assim os valores de $T_{m,n,i}^k$ são calculados pela substituição no lado direito de valores de $T_{m,n,i}$.

4) Usando a Equação (52), o procedimento iterativo é continuado pelo cálculo de novos valores $T_{m,n,i}^k$ da iteração atual, na qual $1 \leq n \leq m - 1$, e os valores de $T_{m,n,i}^{k-1}$ da iteração anterior, na qual de $m + 1 \leq n \leq N$.

5) A iteração é rompida quando um critério de parada estabelecido a priori é satisfeito. O critério pode ser escrito como

$$|T_{m,n,i}^k - T_{m,n,i}^{k-1}| \leq \varepsilon \quad (50)$$

Onde ε representa um erro na temperatura, que pode ser considerado aceitável.

Se o primeiro critério for respeitado, o sistema resultante é dito diagonalmente dominante. Isso resulta em uma taxa de convergência maximizada, ou seja, o número de iterações necessário é minimizado.

2.9. Condição de Contorno para a equação da difusão do calor na superfície ($x=0$)

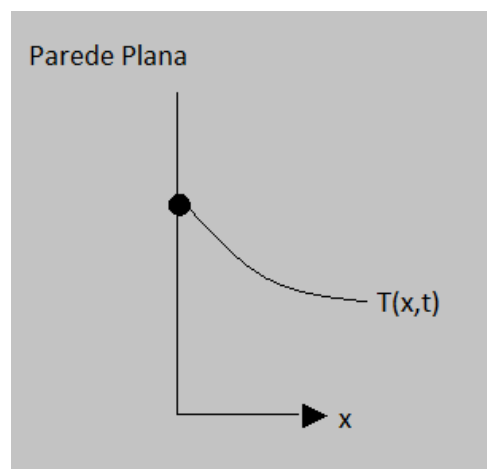
As condições físicas existentes nas fronteiras do meio e em um determinado instante auxiliam a obtenção da solução obtida através da equação do calor. Como a equação do calor é de segunda ordem em relação às coordenadas espaciais, duas condições de contorno são necessárias para descrever o sistema. Como a equação do calor é de primeira ordem em relação ao tempo, apenas uma condição temporal deve ser especificada.

O problema de fluxo de calor é guiado pela equação diferencial (19), que, segundo BREBBIA et al. (1948) pode ser reescrita na equação a seguir:

$$\nabla^2 T(x, y) = \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho L}{k} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (51)$$

A difusividade térmica, α , admite interpretações diferentes de acordo com o problema físico em consideração. Supondo que esta propriedade seja constante no tempo e no espaço, há três condições de contorno usadas na transmissão de calor. A primeira é intitulada, em homenagem a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, de condição de Dirichlet ou de primeiro tipo. Refere-se a uma situação em que a superfície é mantida a uma temperatura T_s (Figura 8).

Figura 8: Temperatura da superfície constante em $x=0$, na parede plana



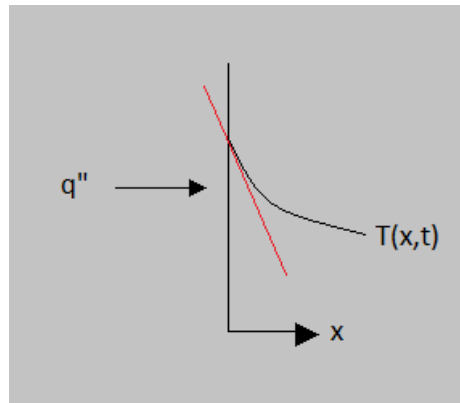
Fonte: Autor

$$T(0, t) = T_s, \quad t > 0 \quad (52)$$

A segunda condição de contorno corresponde à existência de um fluxo térmico constante na superfície. Esse fluxo térmico está relacionado ao gradiente de temperatura na superfície pela Lei de Fourier. É conhecida por condição de Neumann.

a) Fluxo térmico constante diferente de zero (Figura 9).

Figura 9: Fluxo térmico diferente de zero na parede plana

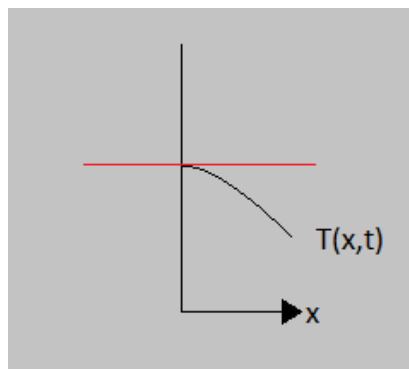


Fonte:Autor

$$q_s'' = -k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = cte \quad (53)$$

b) Superfície isolada termicamente (*Figura 10*).

Figura 10: Superfície adiabática

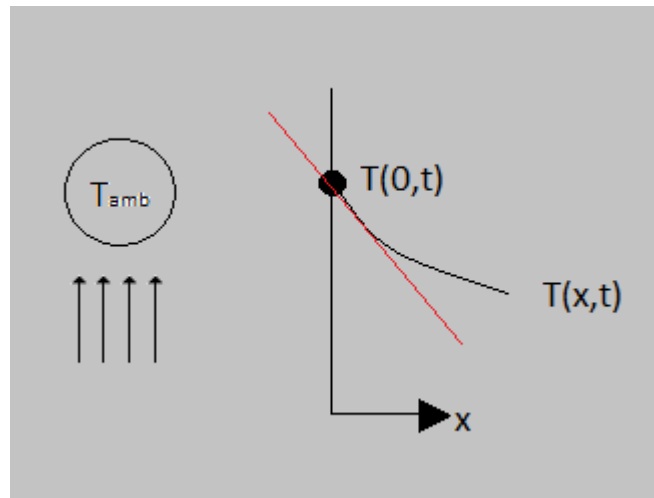


Fonte:Autor

$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

A terceira condição de contorno corresponde a existência, na superfície, de um aquecimento ou resfriamento por convecção (*Figura 11*).

Figura 11: Condição de convecção na superfície



Fonte: Autor

$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T_{\infty} - T(0,t)] \quad (55)$$

3. PROBLEMA PROPOSTO

Em uma placa plana, objetiva-se determinar o perfil de temperatura com mudança de fase em um regime transiente e sem geração de calor. Para esse fim, utiliza-se a equação (45). O termo χ corresponde a concentração de fase líquida. Nas regiões de estado sólido atribui-se o valor 0 ao χ . Nas regiões líquidas, o valor de χ é 1. Contudo, nas partes em que ocorrem mudança de fase, o χ varia.

As hipóteses escolhidas para a solução do problema foram:

- Fluxo de calor bidimensional em regime transiente e sem geração de calor;
- A variação do volume é nula;
- Meio incompressível, ou seja, a massa específica do material não varia;
- A condutividade térmica do meio é inalterável;
- A condição de contorno escolhida é a de primeiro tipo, ou seja, de Dirichlet, equação (52).

Este trabalho simula para diferentes materiais a distribuição de temperatura. São estes:

1) A primeira simulação trata um aquecimento da placa, sem geração de calor, porém a temperatura fornecida é inferior a temperatura de fusão. Para isso, os dados fornecidos são os do ouro, pois o ponto de fusão deste material é alto, sendo distante dos valores de estudo. Os valores usados nesse processo estão descritos na *Tabela 1*.

Tabela 1: Valores dos dados da primeira simulação

Dados do problema	Unidade	símbolo	valor
Temperatura de mudança de fase	[°C]	tmf	1610,33
Temperatura do x=0	[°C]	tx0	0
Temperatura do x=1	[°C]	txl	50
Comprimento da placa	[m]	L	1
número de nós	-	n	151
variação do tempo	[s]	dt	0.1
tempo total	[s]	t	10
massa específica	[Kg/m ³]	ρ	19300
condutividade térmica	[W/(m·K)]	k	317
variação no eixo x	[m]	dx	l/(n-1)
variação no eixo y	[m]	dy	dx
calor latente	[cal/g°C]	latente	0,032
calor específico	J/kgK	cp	128

2) A segunda simulação, o meio é de um material que tem temperatura de fusão igual a 10°C . A temperatura fornecida na extremidade L é superior a temperatura de mudança de fase. Os valores dos dados mencionados e os das propriedades do meio estão descritos na *Tabela 2*.

Tabela 2: Valores dos dados da segunda simulação

Dados do problema	Unidade	símbolo	valor
Temperatura de mudança de fase	[$^{\circ}\text{C}$]	tmf	10
Temperatura do x=0	[$^{\circ}\text{C}$]	tx0	0
Temperatura do x=1	[$^{\circ}\text{C}$]	txl	50
Comprimento da placa	[m]	L	1
número de nós	-	n	151
variação do tempo	[s]	dt	0.1
tempo total	[s]	t	100
variação no eixo x	[m]	dx	$l/(n-1)$
variação no eixo y	[m]	dy	dx

3) A terceira simulação é usado o mesmo meio que a simulação 2, porém o tempo de estudo é de 100 segundos. Os valore usados nesse processo estão descritos na *Tabela 3*.

Tabela 3: Valores dos dados da terceira simulação

Dados do problema	Unidade	símbolo	valor
Temperatura de mudança de fase	[$^{\circ}\text{C}$]	tmf	10
Temperatura do x=0	[$^{\circ}\text{C}$]	tx0	0
Temperatura do x=1	[$^{\circ}\text{C}$]	txl	50
Comprimento da placa	[m]	L	1
número de nós	-	n	151
variação do tempo	[s]	dt	0.1
tempo total	[s]	t	100
variação no eixo x	[m]	dx	$l/(n-1)$
variação no eixo y	[m]	dy	dx

4) A quarta simulação é usado o mesmo meio que a simulação 2, porém o tempo de estudo é de 1000 segundos. Os valore usados nesse processo estão descritos na *Tabela 4*.

Tabela 4: Valores dos dados da quarta simulação

Dados do problema	Unidade	símbolo	valor
Temperatura de mudança de fase	[°C]	tmf	10
Temperatura do x=0	[°C]	tx0	0
Temperatura do x=1	[°C]	txl	50
Comprimento da placa	[m]	L	1
número de nós	-	n	151
variação do tempo	[s]	dt	0.1
tempo total	[s]	t	10
variação no eixo x	[m]	dx	l/(n-1)
variação no eixo y	[m]	dy	dx

5) A quinta simulação apresenta resultados referentes a uma placa plana de gelo. O tempo de estudo é de 100 segundos. Os valores das propriedades e dos dados escolhidos estão apresentados na *Tabela 5*.

Tabela 5: Valores dos dados da quinta simulação

Dados do problema	Unidade	símbolo	valor
Temperatura de mudança de fase	[°C]	tmf	0
Temperatura do x=0	[°C]	tx0	-10
Temperatura do x=1	[°C]	txl	10
Comprimento da placa	[m]	L	1
número de nós	-	n	151
variação do tempo	[s]	dt	0.1
tempo total	[s]	t	100
massa específica	[Kg/m ³]	ρ	1000
condutividade térmica	[W/(m·K)]	k	10000
variação no eixo x	[m]	dx	l/(n-1)
variação no eixo y	[m]	dy	dx
calor latente	[kJ/kg]	latente	900

6) A sexta simulação apresenta resultados referentes a uma placa plana de gelo. O tempo de estudo é de 10000 segundos. Os valores usados nesse processo estão descritos na *Tabela 4*.

Tabela 6: Valores dos dados da sexta simulação

Dados do problema	Unidade	símbolo	valor
Temperatura de mudança de fase	[°C]	tmf	0

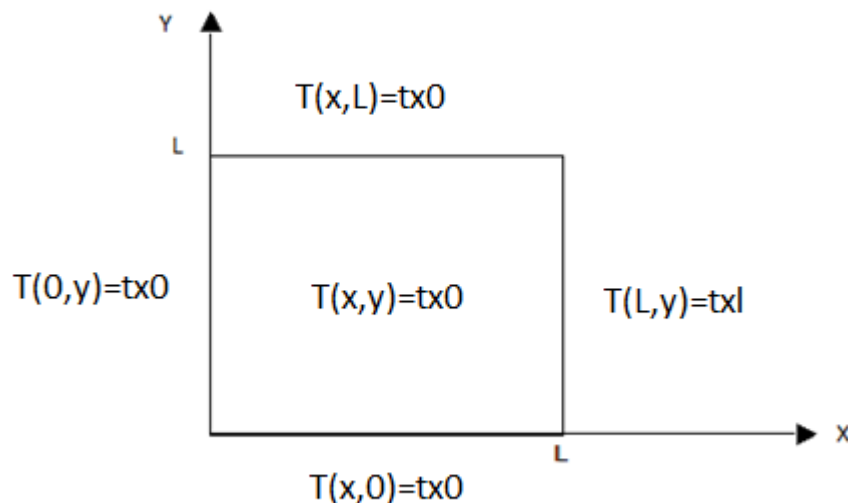
Temperatura do x=0	[°C]	tx0	-10
Temperatura do x=1	[°C]	txl	10
Comprimento da placa	[m]	L	1
número de nós	-	n	151
variação do tempo	[s]	dt	0.1
tempo total	[s]	t	1000
massa específica	[Kg/m ³]	ρ	1000
condutividade térmica	[W/(m·K)]	k	10000
variação no eixo x	[m]	dx	l/(n-1)
variação no eixo y	[m]	dy	dx
calor latente	[kJ/kg]	latente	900

4. DESCRIÇÃO DO ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

No início do programa insere-se os dados de entrada. São eles: o tempo total do processo e a variação no tempo, dt ; o número de nós e a quantidade de passadas dx e dy . Cria-se dois contadores: o primeiro será representado pela letra i , e este será responsável pela progressão do cálculo da temperatura no eixo x . O segundo contador será representado pela letra j , este será responsável pela progressão no eixo y . Isso faz com que a placa seja discretizada.

A primeira distribuição de temperatura é $T(0,y) = T(x,0) = T(x,L) = tx0$, sendo $tx0$ o valor atribuído a temperatura em $x = 0$. A temperatura $T(L,y) = txl$, onde txl é a temperatura escolhida para o lado em que $x = L$, sendo essa temperatura maior do que a temperatura de fusão. A temperatura no interior da placa será $tx0$. A *Figura 12* esquematiza a distribuição de temperatura no instante inicial.

Figura 12: Gráfico esquemático das temperaturas de contorno da placa no instante inicial.



Atribui-se o valor de $\chi = 0$, para os nós em que a temperatura é inferior a temperatura de mudança de fase. E, $\chi = 1$, para os com a temperatura maior que a temperatura de mudança de fase.

Cria-se uma constante c para que se garanta a convergência do método de Gauss-Seidel.

Adota-se o valor inicial para a variável $erro = 1$.

Cria-se um contador k , que será a progressão no método do Gauss-Seidel. Essa variável será sempre um número inteiro e seu valor inicial é zero. Esse contador estará indicado na parte superior da constante da temperatura, $T(i, j)^k$. Então, a temperatura inicial em cada nó será representada por $T(i, j)^0$.

Cria-se a variável $Told^0(i, j)$. Inicialmente essa variável terá o mesmo valor da temperatura no instante inicial, $T(i, j)^0$.

O contador do tempo é fixado, começando, então, o cálculo do perfil de temperatura na placa.

O contador j é fixado em 1, e o contador i avança calculando a temperatura em no nó com a equação(49). Calcula-se o erro com a equação (50). Se o erro for maior que o estipulado anteriormente, $Told^{k+1}(i, j) = T^k(i, j)$. Volta-se a calcular a temperatura nesse nó até que o erro seja menor que que o aceitável.

Após calcular todo o perfil de temperatura no eixo x , o contador j avança, e retorna o cálculo da temperatura em cada nó no eixo x .

Após esse processo, os contadores i e j retornam ao valor 1 e começa a verificação se as temperaturas em cada nó são maiores ou menores do que a temperatura de fusão. Para isso, o contador j permanece constante, até que todos os nós em x sejam inspecionados.

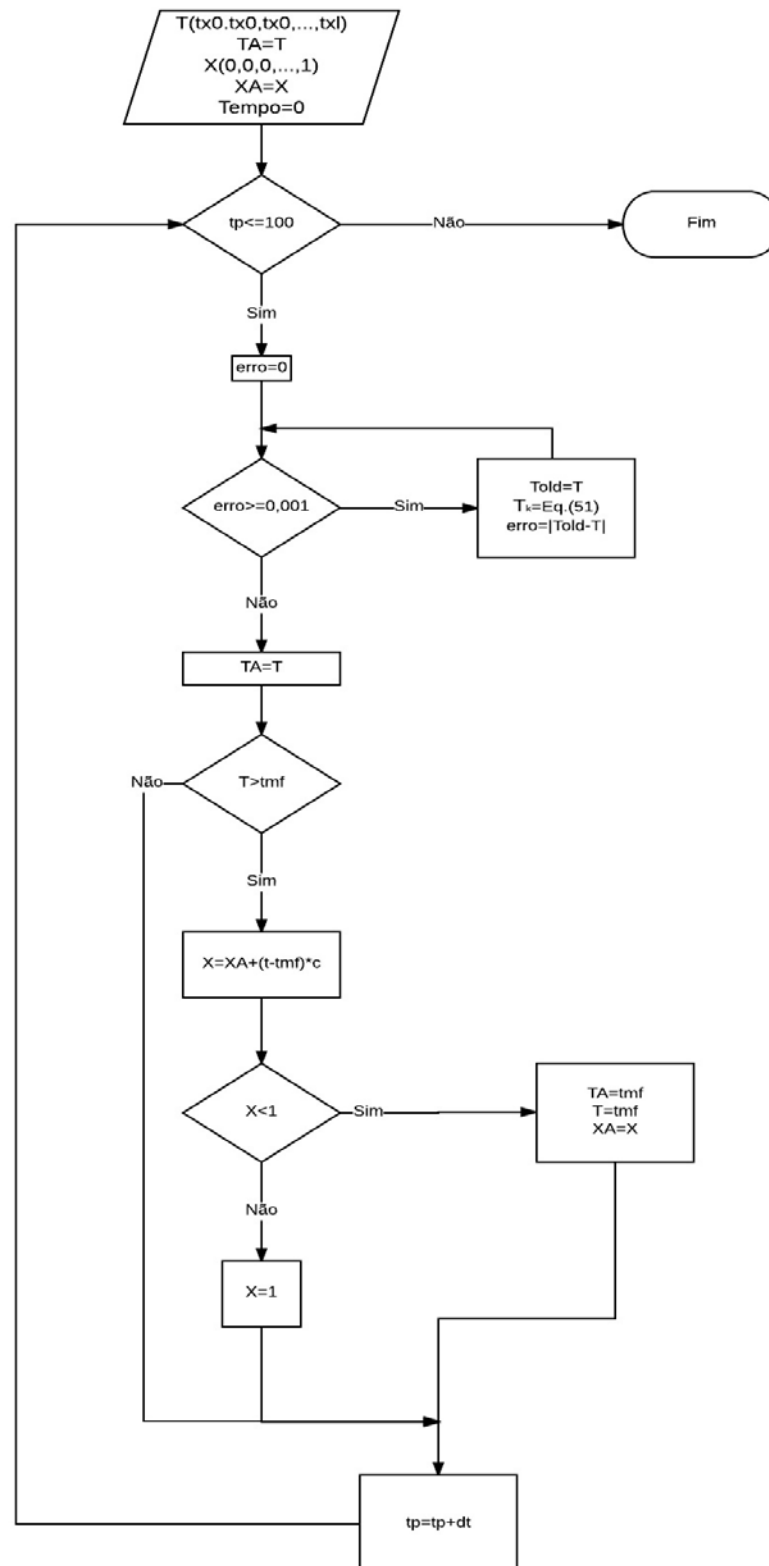
Se a temperatura no nó for menor que a temperatura de mudança de fase, permanece, então o valor calculado. Caso a temperatura no nó for maior que a temperatura de fusão, o valor da concentração de fase líquida muda pela equação

$$\chi^k = \chi^{k-1} + (Tmf - T^k) * c \quad (56)$$

Caso o valor da variável da concentração de fase líquida, χ , seja maior do que 1, atribui-se o valor 1 para essa variável e o algoritmo anda no tempo e retorna ao cálculo do perfil de temperatura para o instante seguinte. Caso o valor de χ for menor que 1, o valor da temperatura será o valor da temperatura de fusão e em seguida o algoritmo anda no tempo.

O algoritmo que descreve esse processo encontra-se na *Figura 13*.

Figura 13: Algoritmo do desenvolvimento do problema



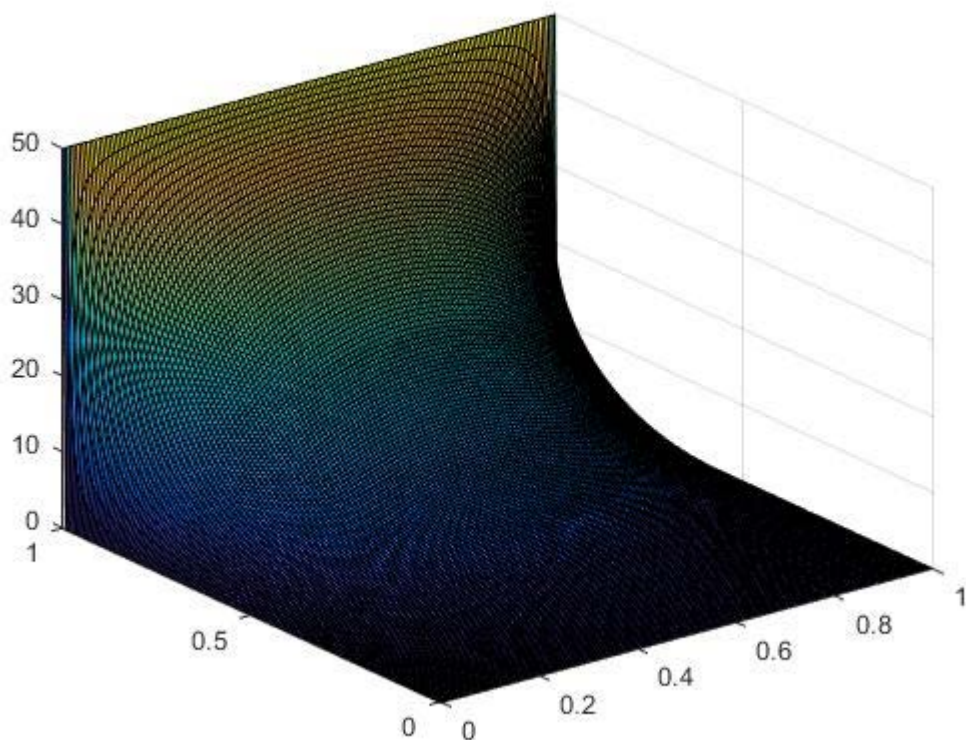
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das simulações numéricas para os casos apresentados no capítulo 3.

Foram realizadas medidas da distribuição de temperatura em função do tempo em posições fixas, conforme descrito na seção 2.8. Esses perfis de temperatura foram encontrados com o método de diferenças finitas desenvolvido na seção 2.8 e solucionadas com o método de Gauss-Seidel descrito na seção 3.9.1. O algoritmo que aplica essa solução está expresso na seção 4. O que difere em cada simulação é o meio sólido escolhido e o tempo estipulado a priori.

1° caso) Foram realizadas medidas de temperatura em função do tempo em posições fixas previamente determinadas. O primeiro caso, refere-se a uma transferência de calor bidimensional em uma placa plana sem geração de energia e em regime transiente. Contudo, a temperatura em que a placa foi exposta não excede a temperatura de fusão. A *Figura 14* representa essa distribuição de temperatura.

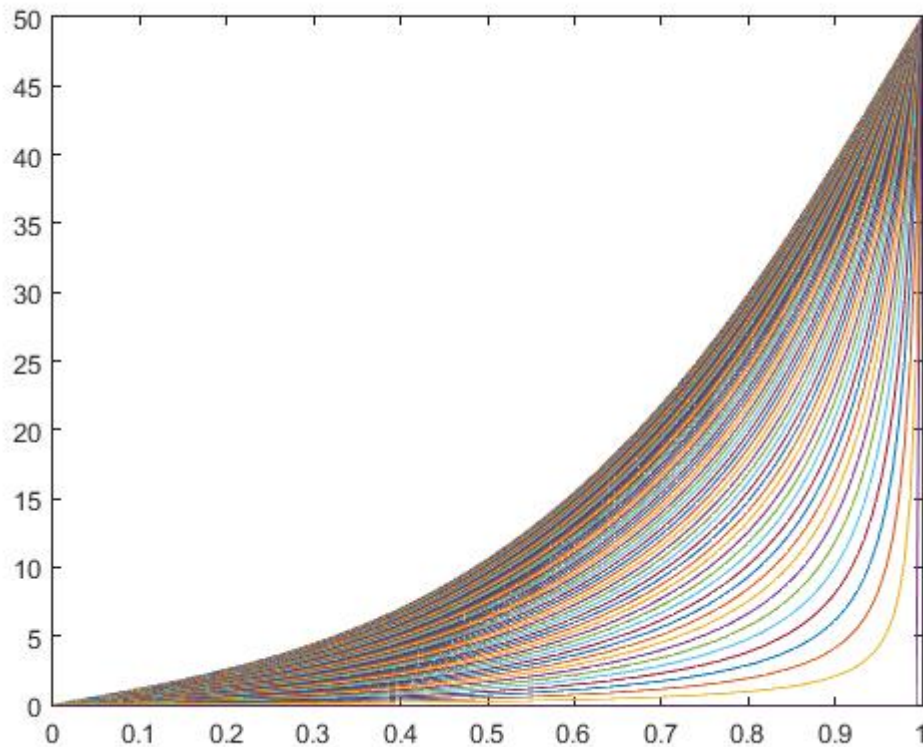
Figura 14: Gráfico do perfil de temperatura sem mudança de fase



As linhas de nível, representam a mudança da temperatura com o tempo.

O comportamento da temperatura em relação ao tempo está representado na *Figura 15*.

Figura 15: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo – sem mudança de fase.

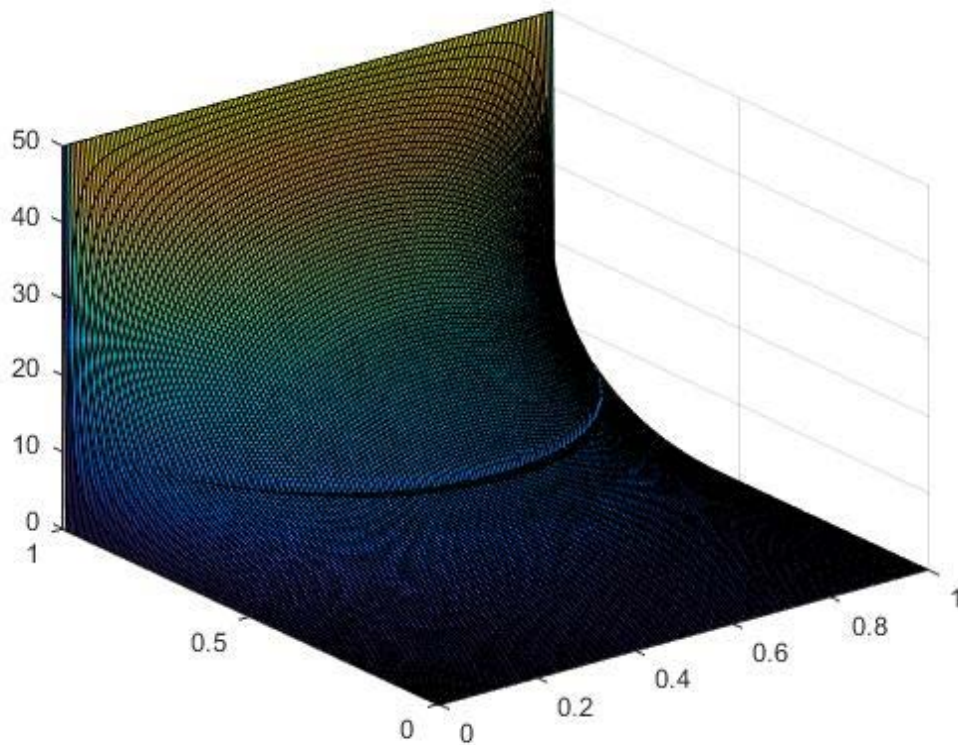


2º caso) O segundo caso, descreve o perfil de temperatura variando com o tempo ao longo da placa. O meio possui temperatura de fusão igual a 10°C. O tempo escolhido é de 100 segundo com passadas de $dt = 0,1$.

A Figura 16 representa essa distribuição de temperatura. No ponto crítico, ou seja, onde a temperatura é igual a temperatura de fusão, observa-se a transição de fase. Pois nessa região, a energia em que seria usada para o aumento da temperatura, é recolocada para a troca de estado.

O eixo vertical expressa os valores da temperatura e o plano formado pelos eixos horizontais representam o comprimento e a altura da placa plana.

Figura 16: Gráfico do perfil de temperatura com mudança de fase



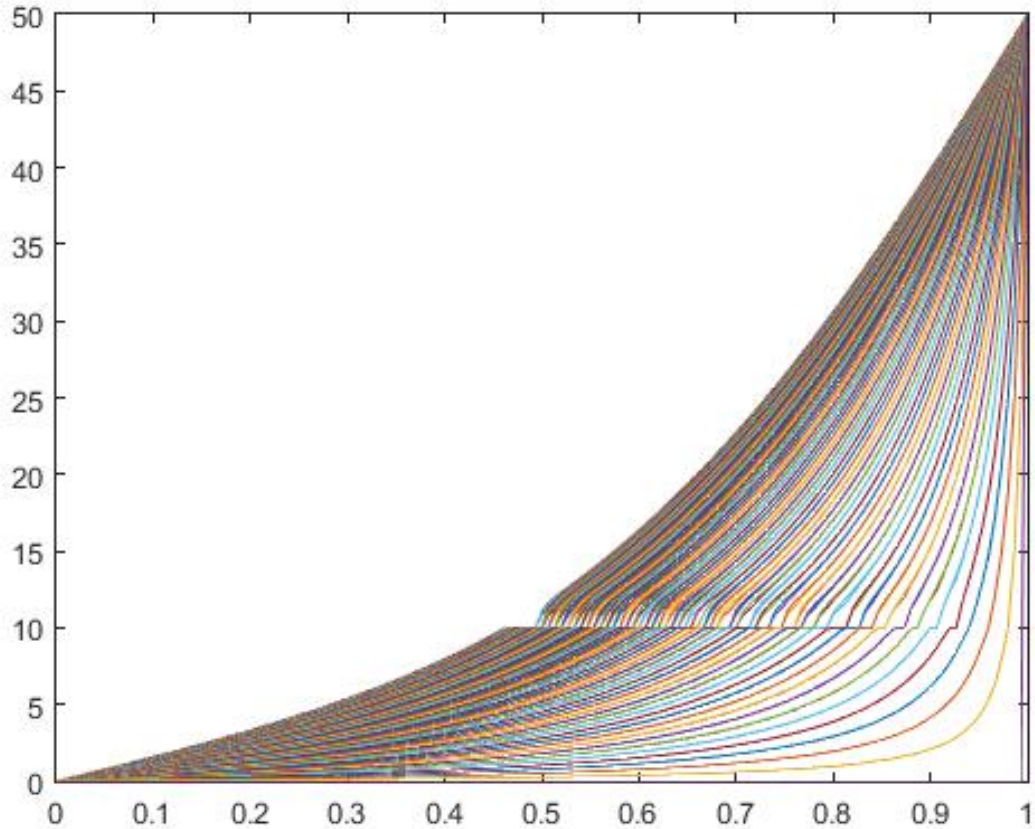
As temperaturas nas bordas das placas permanecem constantes, devido a escolha da condição de contorno de primeiro tipo (Dirichlet). Essas fontes frias auxiliam na redução das temperaturas próximas as bordas, pois retiram calor do meio.

Já a fonte quente, permite que a extremidade (L,L) tenha a temperatura seja t_{xl} em todo o processo, pois esta fonte fornece calor constantemente.

A *Figura 17* representa a distribuição de temperatura em relação ao tempo. O eixo vertical expressa os valores da temperatura e o eixo horizontal representa o comprimento da placa plana.

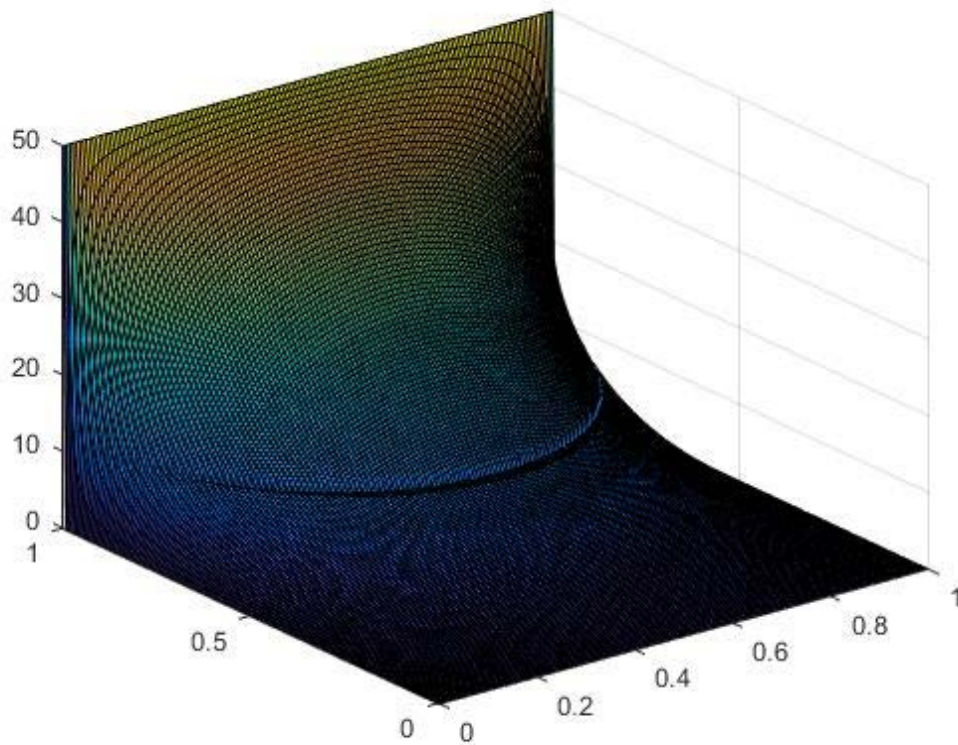
O eixo vertical expressa os valores da temperatura e o plano formado pelos eixos horizontais representam o comprimento e a altura da placa plana.

Figura 17: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo de 100 segundo
– com mudança de fase.



3° caso) O terceiro caso, descreve o perfil de temperatura variando com o tempo ao longo da placa. O meio possui temperatura de fusão igual a 10°C. O tempo escolhido é de 100 segundo com passadas de $dt = 0,1$. A *Figura 12* representa essa distribuição de temperatura. No ponto crítico, ou seja, onde a temperatura é igual a temperatura de fusão, observa-se a transição de fase. Pois nessa região, a energia em que seria usada para o aumento da temperatura, é recolocada para a troca de estado.

Figura 18: Gráfico do perfil de temperatura com mudança de fase

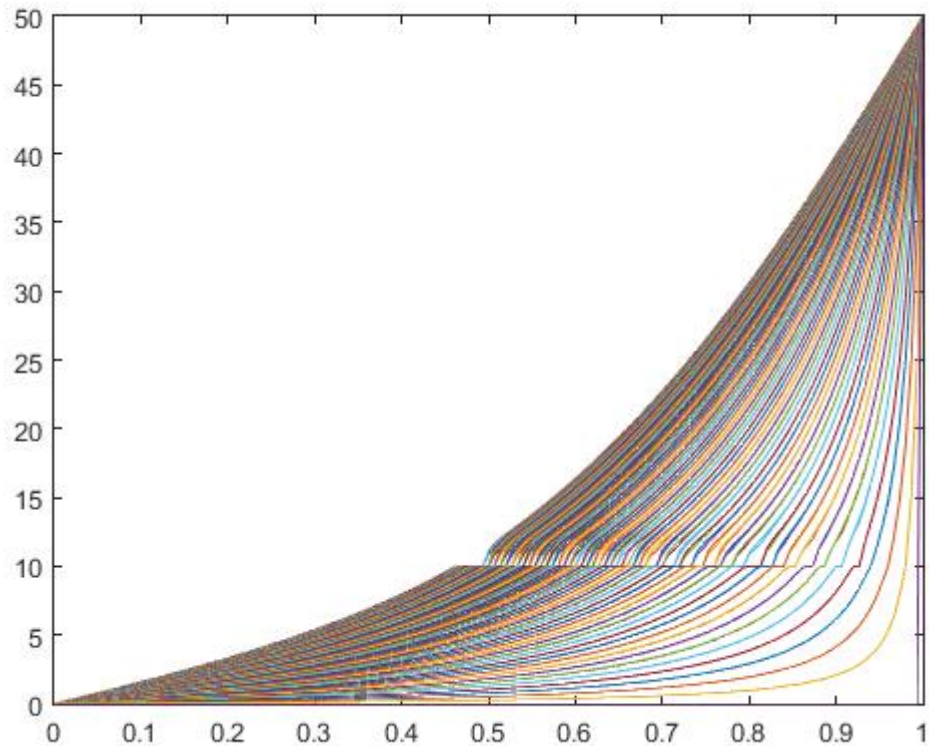


As temperaturas nas bordas das placas permanecem constantes, devido a escolha da condição de contorno de primeiro tipo (Dirichlet). Essas fontes frias auxiliam na redução das temperaturas próximas as bordas, pois retiram calor do meio.

Já a fonte quente, permite que a extremidade (L,L) tenha a temperatura seja t_{xl} em todo o processo, pois esta fonte fornece calor constantemente.

A *Figura 19* representa a distribuição de temperatura em relação ao tempo.

Figura 19: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo de 100 segundo – com mudança de fase.



4° caso) Para o mesmo material, mas o com o tempo do processo igual a 1000 segundos e passada de $dt = 0,1$ o perfil de temperatura se aproxima do perfil quando não ocorre mudança de fase (caso 1) sem mudança de fase. Isso ocorre, porque o sistema entra em equilíbrio. Há mudança de fase, mas ela se dá mais rapidamente. Esse comportamento pode ser observado na *Figura 20* e na *Figura 21*.

Figura 20: Representação gráfica da distribuição da temperatura com o tempo de 1000 segundo – com mudança de fase.

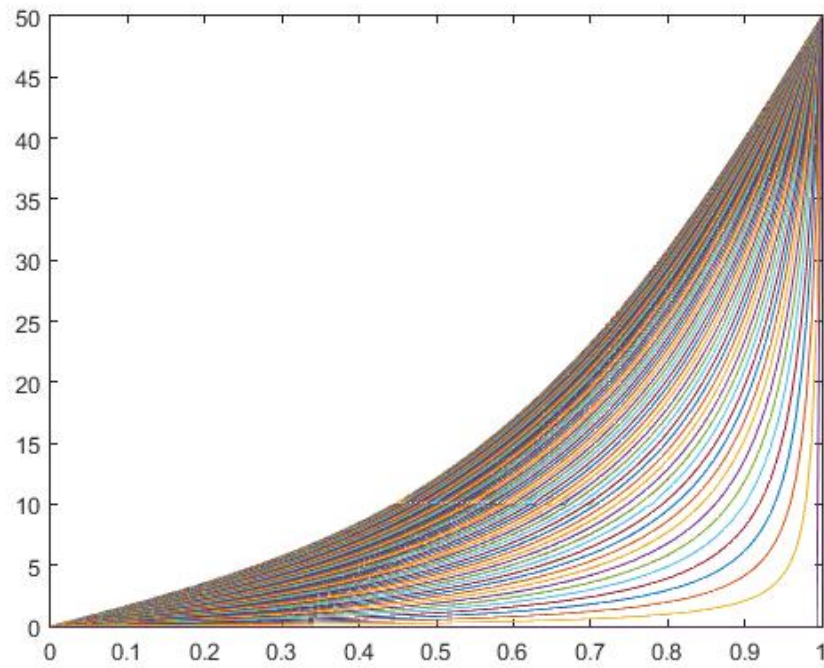
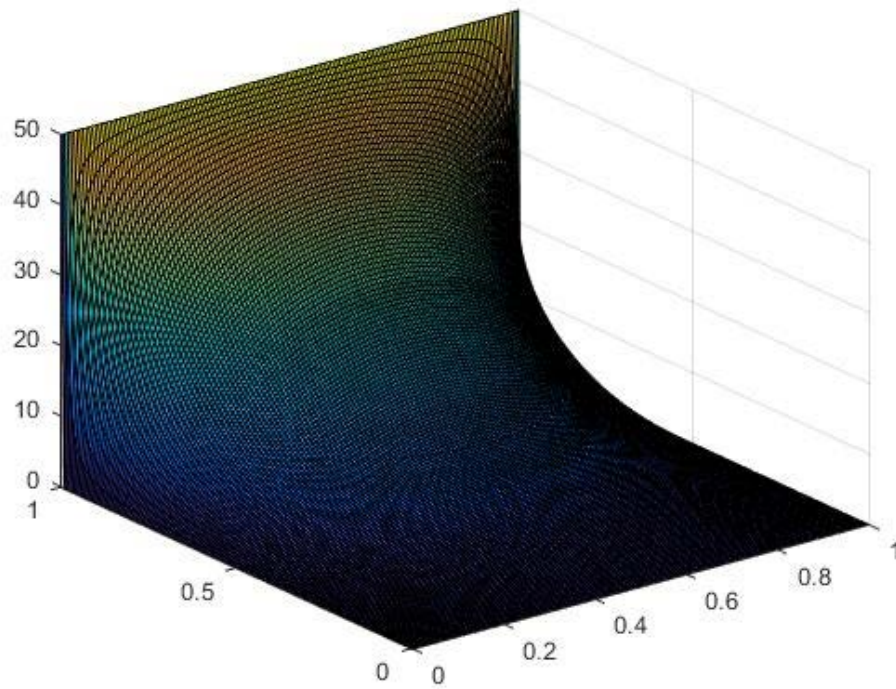
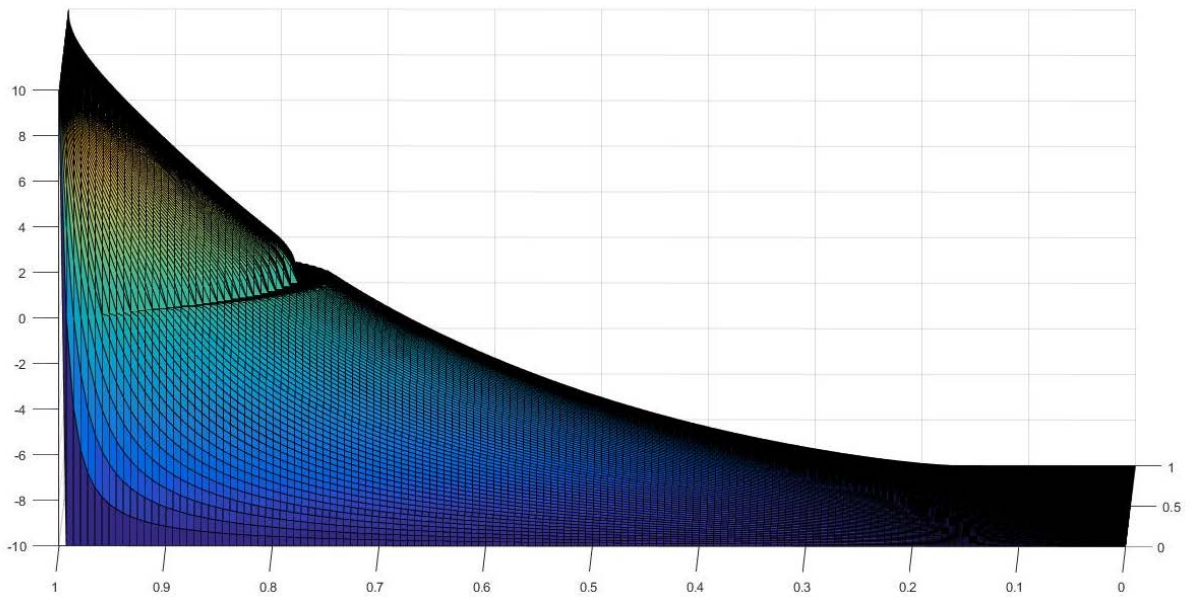


Figura 21: Representação gráfica em três dimensões da distribuição da temperatura com o tempo de 1000 segundo – com mudança de fase.



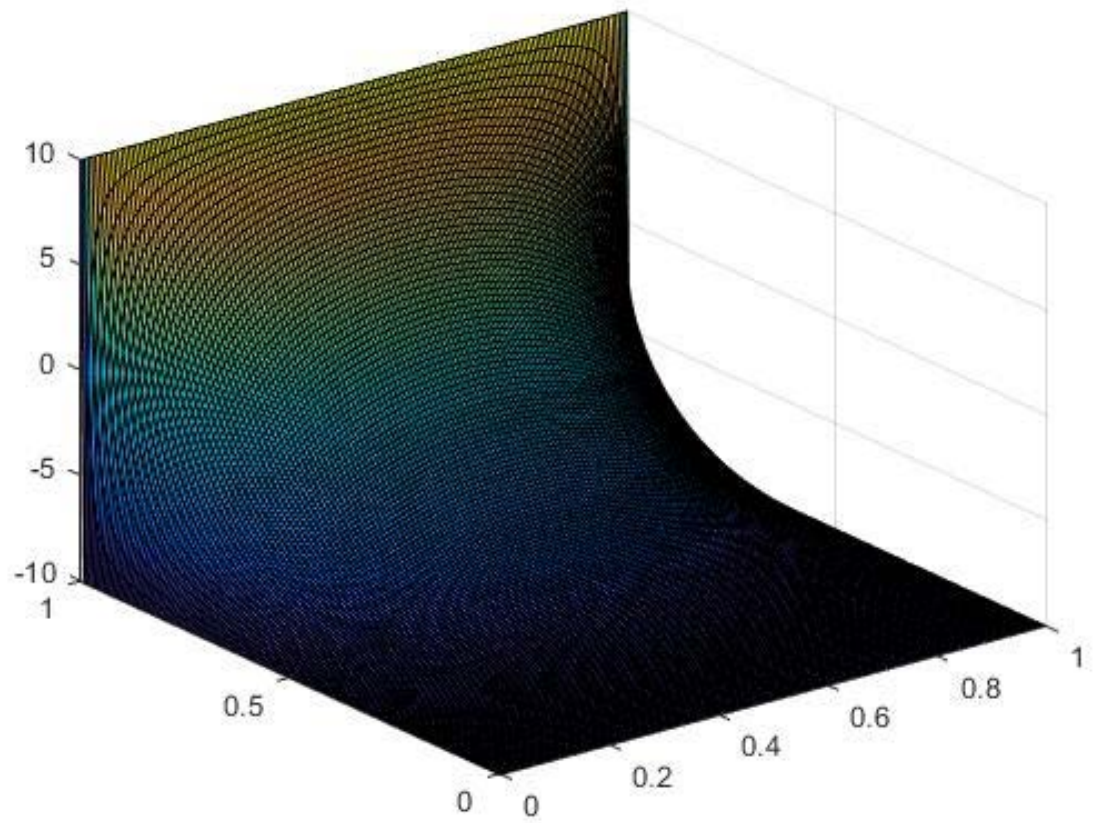
5° caso) A última simulação numérica refere-se a uma placa de gelo que inicialmente está a temperatura de -10°C . O tempo do processo é de 100 segundos e passada igual a $dt = 0,1$. O comportamento da temperatura pode ser observado na *Figura 22*.

Figura 22: Representação gráfica em três dimensões da distribuição da temperatura com o tempo de 100 segundo – com mudança de fase.



6° caso) A sexta simulação numérica refere-se a uma placa de gelo que inicialmente está a temperatura de -10°C . O tempo do processo é de 10000 segundos e passada igual a $dt = 0,1$. O perfil de temperatura se aproxima do perfil sem mudança de fase. Esse comportamento pode ser observado na *Figura 23*.

Figura 23: Representação gráfica em três dimensões da distribuição da temperatura com o tempo de 10000 segundo – com mudança de fase.



6. CONCLUSÃO

Apresentou-se neste trabalho uma metodologia numérica para determinar o perfil de temperatura em um corpo rígido. Através do método das diferenças finitas gerou-se equações diferenciais parciais. Essas equações são resolvidas com o auxílio da condição de fronteira de primeiro tipo (Dirichlet) e inicial. Para a solução da EDP, usou-se o método de Gauss-Seidel. Como ferramenta numérica, usou-se o software Matlab, que se mostrou eficiente na precisão dos resultados.

De uma forma geral, as simulações numéricas conseguiram estimar de maneira razoável o comportamento do perfil de temperatura, principalmente, na região próxima a transição de fase sólida para a líquida.

O comportamento da temperatura é semelhante para todos os casos. Conclui-se, também, que, com um tempo maior, a mudança de fase fica menos nítida.

6.1. Sugestão de continuidade do trabalho

São indicadas para a continuação deste trabalho as seguintes sugestões:

- Uma intervenção ao método para a amenização da temperatura após a temperatura de fusão;
- Estender esse problema para outros materiais com temperatura de fusão diferentes;
- Usar outras condições de contorno e inicial para este problema;
- Implementar esse algoritmo para o fluxo de calor em três dimensões.

REFERÊNCIAS

- [1] PIER, Anderson; AURANI, Katya M; A teoria analítica do calor de Joseph Fourier: uma análise das bases conceituais e epistemológicas; Revista brasileira de ensino de física, volume 37,n.1,2015.
- [2]BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [2] INCROPERA,F P.;DEWIYTT D. P.; BERGMAN T. L.; LAVINE A.S.; *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6 ed. Rio de Janeiro:
- [3] INCROPERA,F P.;DEWIYTT D. P.; BERGMAN T. L.; LAVINE A.S.; *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6 ed. Rio de Janeiro, página 9.
- [4] ÖZISIK, M. N. Finite difference methods in heat transfer. Boca Raton: CRC Press, Inc. 1994. 412 p.
- [5]CRANK, J. Two methods for the numerical solution of moving boundary problems in diffusion and heat flow. J. Mech. Appl. Math., v. 10, p. 220-231, 1957.
- [6]EHLICK, L. W. A numerical method of solving a heat flow problem with moving boundary. J. Assn. Comp. Math., v. 5, p. 161-176, 1958.
- [7]ISMAIL, K. A. R. Modelagem de processos térmicos: fusão e solidificação. Campinas, Kamal Abdel Radi Ismail, 1998. 400 p.
- [8]WATANABE, T.; KIBASHI, H.; KANZAWA, A. Enhancement of charging and discharging rates in a latent heat storage system by use of pcm wit different melting temperatures. Heat Recovery Systems & Chp. v. 13, n. 7, p. 57-66, 1993.
- [9]GONÇALVES, M. M. Armazenadores de calor latente de geometria anular com aletas alternadas. Campinas, 1996. 151 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica,Universidade Estadual de Campinas.

- [9]FOURIER,J.Théorie analytique de la chaleur.[S.l.:s.n.],1822
- [10]ÇENGEL, A. Y.; GHAJAR, A. J.Transferência de calor e massa. 4° ed. Editora McGraw-Hill, 2012
- [11]ÇENGEL, A. Y.; GHAJAR, A. J.Transferência de calor e massa. 3° ed. Editora McGraw-Hill, 2009
- [12]GUMERATO, H.F.; SCHMIDT,F.L e GOLDONI, J.S(2006). Transferência de calor transiente na agitação linear intermitente de latas. Ciências Tecnologia de Alimentos – UNICAP, Campinas-SP
- [13]Bejan, A. (1948). Convection Heat Transfer. Department of Mechanical Engineering and Materials Science. Duke University. Durham, North Carolina.
- [14]FRANCO, N.B. (2008). Cálculo numérico. Pearson.
- [15]J.R.TAYLOR. Classical Mechanics. University Sciensity Book, 2005.

ANEXO I - Código aplicado ao software que modela o método das diferenças finitas com solução de Gauss-Seidel – com mudança de fase.

```

tx0=0;
tx1=50;
tmf=10;
n=151;
l=1;
dt=0.1;
t=1;
ro=1000;
k=10000;
c=0.01;
dx=1/(n-1);
dy=dx;
latente=900;
T=zeros(n,n);
X=zeros(n,n);
vecx=0:dx:l;
vecy=vecx;
vect=0:dx:l;

for j=1:n
    for i=1:n-1
        T(i,j)=tx0;
        X(i,j)=0;
    end
    T(n,j)=tx1;
    X(n,j)=1;
end
TA=T;
XA=X;

for tempo=0:100
    erro=1;
    while erro>0.001
        erro=0;
        Told=T;
        for i=2:n-1
            for j=2:n-1
                T(i,j)=(((T(i+1,j)+T(i-1,j))/(dx*dx)+ (T(i,j+1)+T(i,j-1))
j)/dt)-((ro/k)*(X(i,j)-XA(i,j))/dt))/(2/(dx*dx)+2/(dy*dy)+c/dt);
                if abs(T(i,j)-Told(i,j))>erro
                    erro= abs(T(i,j)-Told(i,j));
                end
            end
        end
        erro=abs(T(i,j)-Told(i,j));
    end
    TA=T;

```

```

for i=2:n-1
    for j=2:n-1
        if T(i,j)>tmf
            X(i,j)=XA(i,j)+(T(i,j)-tmf)*c;
            if X(i,j)<1
                TA(i,j)=tmf;
                T(i,j)=tmf;
                XA(i,j)=X(i,j);

                else
                    X(i,j)=1;
                    T(i,j)=(((T(i+1,j)+T(i-1,j))/(dx*dx)+ (T(i,j+1)+T(i,j-1)))/(
(dy*dy)+c*TA(i,j)/dt))/(2/(dx*dx)+2/(dy*dy)+c/dt));
                end
            end
        end
        surf(vecx,vect,T);
        nome=strcat('Grafico', num2str(tempo));
        print(nome, '-dpng');
    end
end

```

ANEXO II - Código aplicado ao software que modela o método das diferenças finitas com solução de Gauss-Seidel – sem mudança de fase

```

tx0=0;
tx1=50;
tmf=10;
n=151;
l=1;
dt=0.1;
t=1;
ro=1000;
k=10000;
c=0.01;
dx=1/(n-1);
dy=dx;
latente=900;
T=zeros(n,n);
X=zeros(n,n);
vecx=0:dx:l;
vecy=vecx;
vect=0:dx:l;

for j=1:n
    for i=1:n-1
        T(i,j)=tx0;
        X(i,j)=1;
    end
    T(n,j)=tx1;
    X(n,j)=1;
end
TA=T;
XA=X;

for tempo=0:100
    erro=1;
    while erro>0.001
        erro=0;
        Told=T;
        for i=2:n-1
            for j=2:n-1
                T(i,j)=(((T(i+1,j)+T(i-1,j))/(dx*dx)+ (T(i,j+1)+T(i,j-1))
j)/dt)-((ro/k)*(X(i,j)-XA(i,j))/dt))/(2/(dx*dx)+2/(dy*dy)+c/dt);
                if abs(T(i,j)-Told(i,j))>erro
                    erro= abs(T(i,j)-Told(i,j));
                end
            end
        end
    end
    TA=T;

```

```

for i=2:n-1
    for j=2:n-1
        if T(i,j)>tmf
            X(i,j)=XA(i,j)+(T(i,j)-tmf)*c;
            if X(i,j)<1
                TA(i,j)=tmf;
                T(i,j)=tmf;
                XA(i,j)=X(i,j);

                else
                    X(i,j)=1;
                    T(i,j)=(((T(i+1,j)+T(i-1,j))/(dx*dx)+ (T(i,j+1)+T(i,j-1)))/(
(dy*dy)+c*TA(i,j)/dt))/(2/(dx*dx)+2/(dy*dy)+c/dt));
                end
            end
        end
        surf(vecx,vect,T);
        nome=strcat('Grafico', num2str(tempo));
        print(nome, '-dpng');
    end
end

```