



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Roberto Santos da Silveira

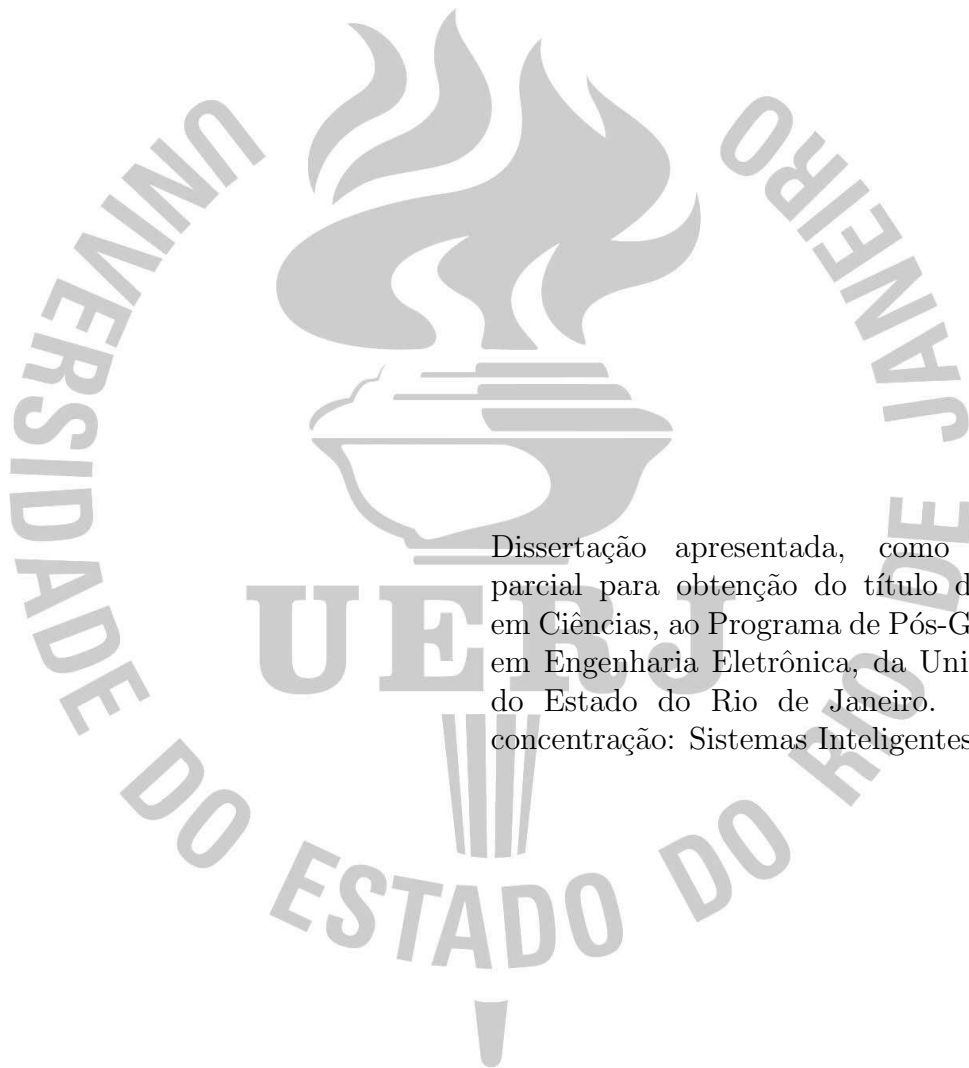
**Controle por Modos Deslizantes para Sistemas Incertos de Fase  
Não-Mínima**

Rio de Janeiro

2018

Roberto Santos da Silveira

**Controle por Modos Deslizantes para Sistemas Incertos de Fase Não-Mínima**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes.

Orientador: Prof. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2018

Roberto Santos da Silveira

## Controle por Modos Deslizantes para Sistemas Incertos de Fase Não-Mínima

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes.

Aprovado em: 16 de Agosto de 2018

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

---

Prof. Antonio Candea Leite, D.Sc.

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

---

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Josiel Alves Gouvêa, D.Sc.

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Rio de Janeiro

2018

## AGRADECIMENTO

Agradeço a Jessica, Adnélia, Sérgio, Simone, Alexandre e Fernando pelo amor, carinho, suporte e força, sempre que eu precisei.

Ao professor Tiago Roux pelos ensinamentos, dedicação e por abrir as portas para mim para o caminho da pesquisa.

A todos os professores que eu tive, desde a educação infantil até agora o PEL, pois cada um teve um papel importante na minha formação acadêmica.

*Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes.*

*Albert Einstein*

## RESUMO

**SANTOS**, Roberto *Controle por Modos Deslizantes para Sistemas Incertos de Fase Não-Mínima*. 79 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

Esta dissertação apresenta dois algoritmos de controle por modos deslizantes aplicados em sistemas incertos de fase não-mínima. O primeiro algoritmo utiliza a técnica de escalonamento temporal em conjunto com uma função de monitoração, onde o objetivo é realizar o rastreamento de uma trajetória conhecida pela saída da planta. Múltiplos observadores para os estados não-medidos da planta, para o sinal de saída e perturbações desconhecidas serviram de base para o projeto do segundo algoritmo proposto, cujo o objetivo é a estabilização do sistema. Ambos os controladores utilizam apenas a realimentação de saída para realizar as tarefas propostas. A estabilidade global e assintótica é demonstrada para o sistema em malha fechada em ambos os casos. Resultados de simulação ilustram o desempenho dos algoritmos de controle propostos.

Palavras-chave: Sistemas de Fase Não-Mínima; Controle por Modos Deslizantes; Sistemas Incertos; Escalonamento Temporal; Função de Monitoração; Múltiplos Observadores; Estabilidade Global.

## ABSTRACT

**SANTOS**, Roberto *Sliding Mode Control of Uncertain Nonminimum Phase Systems*. 79 f. Dissertation (Master's Degree in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, Rio de Janeiro State University (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

This dissertation presents two sliding mode control strategies applied to nonminimum phase uncertain systems. The first algorithm uses the time-scaling technique in conjunction with a monitoring function, where the objective is to track a known and desired trajectory. Multiple observers for the unmeasured states of the plant, for the output signal and unknown perturbations served as the basis for the design of the second proposed algorithm, whose objective is the stabilization of the perturbed system. Both controllers use only output feedback to perform the proposed tasks. Global asymptotic stability is demonstrated for the closed loop system in both cases. Simulation results illustrate the performance of the proposed control algorithms.

Keywords: Nonminimum Phase Systems; Sliding Mode Control; Uncertain Systems; Time-Scaling; Monitoring Function; Multiple Observers; Global Stability.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Turbina Hidráulica do tipo Pelton - Figura obtida em [1] em 18/09/2018 às 16:33.....	13
Figura 2 - Sistema de Tanques Acoplados - Adaptado da figura obtida em [2] em 18/09/2018 às 17:38. ....	14
Figura 3 - Diagrama de Bode do sistema $H_1(jw)$ . ....	19
Figura 4 - Diagrama de Bode do sistema $H_2(jw)$ . ....	20
Figura 5 - Resposta ao degrau para um sistema de fase mínima. ....	21
Figura 6 - Resposta ao degrau para um sistema de fase não-mínima. ....	21
Figura 7 - Lugar das Raízes para a função de transferência $H_3(s)$ . O zero da função de transferência está representado pelo círculo localizado em $-0,5$ no Eixo Real e os polos estão representados pelos “X” localizados em $-1$ e $-2$ no Eixo Real. Note que pela análise utilizando o método do Lugar das Raízes, os polos do sistema sempre se localizarão no SPE. ....	22
Figura 8 - Lugar das raízes para a função de transferência $H_4(s)$ . O zero da função de transferência está representado pelo círculo localizado em $0,5$ no Eixo Real e os polos estão representados pelos “X” localizados em $-1$ e $-2$ no Eixo Real. Note que o polo localizado em $-1$ se encontra com o zero quando o ganho em malha aberta tende a infinito. ....	22
Figura 9 - Plano de fase típico representando um sistema sob a ação de uma lei de controle baseada em modos deslizantes. Adaptado de [3]. ....	27
Figura 10- O atraso presente no chaveamento da lei de controle faz com que a trajetória dos estados faça um movimento de “zig-zag” em torno da superfície de deslizamento $s$ . Adaptado de [3]. ....	29
Figura 11- As trajetórias de $\varphi_m$ (linha pontilhada) e $ e $ (traço contínuo). A função de monitoração é um operador híbrido de saltos e fluxos.....	38
Figura 12- Saída $y(t)$ seguindo a referência $y_m(t)$ , com $\mu = 0,001$ .....	42
Figura 13- Detalhe da Figura 12. Podemos notar que o erro de rastreamento $e(t)$ se mantém na ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . ....	42



Figura 14- <i>Undershoot</i> no sinal de saída da planta - característica marcante dos sistemas de fase não-mínima. ....	43
Figura 15- Entrada de controle $u(t)$ , com $\mu = 0,001$ . ....	43
Figura 16- Entrada de controle $v(t)$ , com $\mu = 0,001$ . ....	44
Figura 17- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ , com $\mu = 0,001$ . .	44
Figura 18- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ , com $\mu = 0,001$ . .	45
Figura 19- Chaveamento da direção de controle com $\mu = 0,001$ . ....	45
Figura 20- Saída $y(t)$ seguindo a referência $y_m(t)$ , com $\mu = 0,001$ . ....	46
Figura 21- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ , com $\mu = 0,001$ . .	47
Figura 22- Direção de controle, com $\mu = 0,001$ . A função de monitoração não realizou nenhum chaveamento. ....	47
Figura 23- Saída $y(t)$ seguindo a referência $y_m(t)$ , com $\mu = 0,01$ . ....	48
Figura 24- Detalhe da Figura 12. Podemos notar que o erro de rastreamento $e(t)$ se mantém na ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . ....	49
Figura 25- <i>Undershoot</i> no sinal de saída da planta - característica marcante dos sistemas de fase não-mínima. ....	49
Figura 26- Entrada de controle $u(t)$ , com $\mu = 0,01$ . ....	50
Figura 27- Entrada de controle $v(t)$ , com $\mu = 0,01$ . ....	50
Figura 28- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ , com $\mu = 0,01$ . .	51
Figura 29- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ , com $\mu = 0,01$ . .	51
Figura 30- Chaveamento da direção de controle com $\mu = 0,01$ . ....	52
Figura 31- A saída $y(t)$ seguindo a referência $y_m(t)$ . ....	54
Figura 32- O regime transitório da saída $y(t)$ . ....	54
Figura 33- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ ....	55
Figura 34- Função de monitoração $\varphi_m(t)$ e o módulo do erro $ e(t) $ ....	55
Figura 35- Chaveamento da direção de controle. ....	56
Figura 36- Chaveamento da direção de controle. ....	56
Figura 37- Diagrama de blocos representando a realimentação de saída com esquema de múltiplos observadores. ....	59
Figura 38- Saída da planta $y$ e seu observador $\hat{y}$ . ....	68
Figura 39- Sinal de controle $u$ . ....	68
Figura 40- Estado $\eta$ e o estado observado $\hat{\eta}$ . ....	69

Figura 41 - O erro de estimação $\tilde{\eta}$ . . . . .	69
Figura 42 - A estimação das incertezas $\delta$ (representada pelo sinal $\frac{-l}{k_p}$ ) e o sinal da perturbação de entrada $d$ . . . . .	70

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	12
1	<b>SISTEMAS DE FASE NÃO-MÍNIMA</b> .....	18
1.1	Resposta ao Degrau em um Sistema de Fase Não-Mínima .....	20
1.2	Análise de Sistemas de Fase Não-Mínima via Método do Lugar das Raízes .....	21
1.3	Propostas para o Controle de Sistemas de Fase Não-mínima .....	23
1.4	Notações e Definições .....	24
2	<b>CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES</b> .....	25
2.1	Exemplo Motivacional .....	25
3	<b>CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES ATRAVÉS DE FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO E ESCALONAMENTO TEMPORAL</b> .....	30
3.1	Descrição do Problema .....	31
3.2	Objetivo de Controle .....	32
3.3	Representação de Dinâmicas Não-Modeladas por Perturbação Singular .....	32
3.3.1	<u>Escalonamento Temporal</u> .....	33
3.4	<b>Principais Hipóteses</b> .....	33
3.5	<b>Controle via Função de Monitoração para Rastreamento de Tra- jetórias</b> .....	34
3.5.1	<u>O caso singular <math>\mu = 0</math></u> .....	34
3.5.2	<u>Limitante Superior do Erro para <math>\mu = 0</math></u> .....	35
3.5.3	<u>Limitante Superior do Erro para <math>\mu \neq 0</math></u> .....	36
3.5.4	<u>Projeto da Função de Monitoração</u> .....	37
3.5.5	<u>Análise de Estabilidade</u> .....	39
3.6	<b>Resultados de Simulação</b> .....	40
3.6.1	<u>Exemplo 1</u> .....	41
3.6.2	Resultados de Simulação com $\mu = 0,001$ .....	41
3.6.3	Resultados de Simulação com $\mu = 0,01$ .....	48
3.6.4	<u>Exemplo 2</u> .....	53

3.7	<b>Conclusões</b> .....	57
4	<b>CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES ATRAVÉS DE MÚLTIPLOS OBSERVADORES</b> .....	58
4.1	<b>Descrição do Problema</b> .....	58
4.1.1	<u>Estabilização com Parâmetros Conhecidos</u> .....	60
4.2	<b>Estabilização com Parâmetros Desconhecidos e Estados não Mensuráveis</b> .....	61
4.2.1	<u>Estimação das Incertezas Paramétricas e Perturbações Externas</u> .....	61
4.2.2	<u>Observador de Ordem Reduzida para os Estados da Dinâmica Interna</u> .....	63
4.2.3	<u>Aplicação das Variáveis Estimadas na Lei de Controle</u> .....	64
4.2.4	<u>Análise de Estabilidade</u> .....	65
4.3	<b>Resultados de Simulação</b> .....	67
4.4	<b>Conclusões</b> .....	71
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	72
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	75

## INTRODUÇÃO

O controle de sistemas de fase não-mínima é um tema que já foi abordado anteriormente por diversos autores - Isidori em [4] nos apresenta um contexto histórico para este tema. Em um contexto geral de sistemas não-lineares, a condição de fase não-mínima pode ser caracterizada matematicamente através do conceito das dinâmicas dos zeros como um análogo não-linear da transmissão dos zeros “instáveis” da função de transferência de um sistema linear [4]. Basicamente, o desafio principal nos problemas de fase não-mínima é projetar uma lei de controle que atinja os objetivos do controlador enquanto que as dinâmicas dos zeros devem ser estabilizadas simultaneamente, evitando assim que os estados internos alcancem valores ilimitados. No capítulo 1 desta dissertação, será mostrado em detalhes como a presença de zeros de fase não-mínima na função de transferência de uma planta provoca a inversão da direção do sinal de controle esperado, podendo levar o sistema à instabilidade.

Diversos trabalhos propuseram estratégias de controle para sistemas de fase não-mínima, como: a redefinição da saída para obter novas (e estáveis) dinâmicas dos zeros [5], [6]; a modificação da saída do sistema de acordo com o paradigma da compensação paralela (*feedforward*) [7]; o método de “*system center*” para projetar um gerador para os perfis das referências dos estados que estabilizem as dinâmicas dos zeros [8], [9]; restrição de ganho do controlador em sistemas dissipativos [10]; o uso de observadores de alto ganho para estimação dos estados externos (derivadas do sinal de saída) [11]; métodos baseados em dados (*data-driven*) para um modelo de referência virtual [12], citando alguns exemplos.

O controle de turbinas hidráulicas do tipo Pelton [13], onde um fluxo de água gera energia elétrica (Figura 1), o controle de altitude para aeronaves através do ângulo do flap elevador [14] e o controle de nível [15] em um sistema de tanques acoplados (Figura 2) são alguns exemplos práticos de sistemas de fase não-mínima.

Devido a dificuldade encontrada em se projetar algoritmos de controle para sistemas que apresentam a condição de fase não-mínima, este problema continua sendo atual e interessante. Assim, o controle de sistemas de fase não-mínima será o objeto de estudo deste trabalho, e ao longo deste, serão apresentadas estratégias de controle para lidar com esta classe de sistemas.

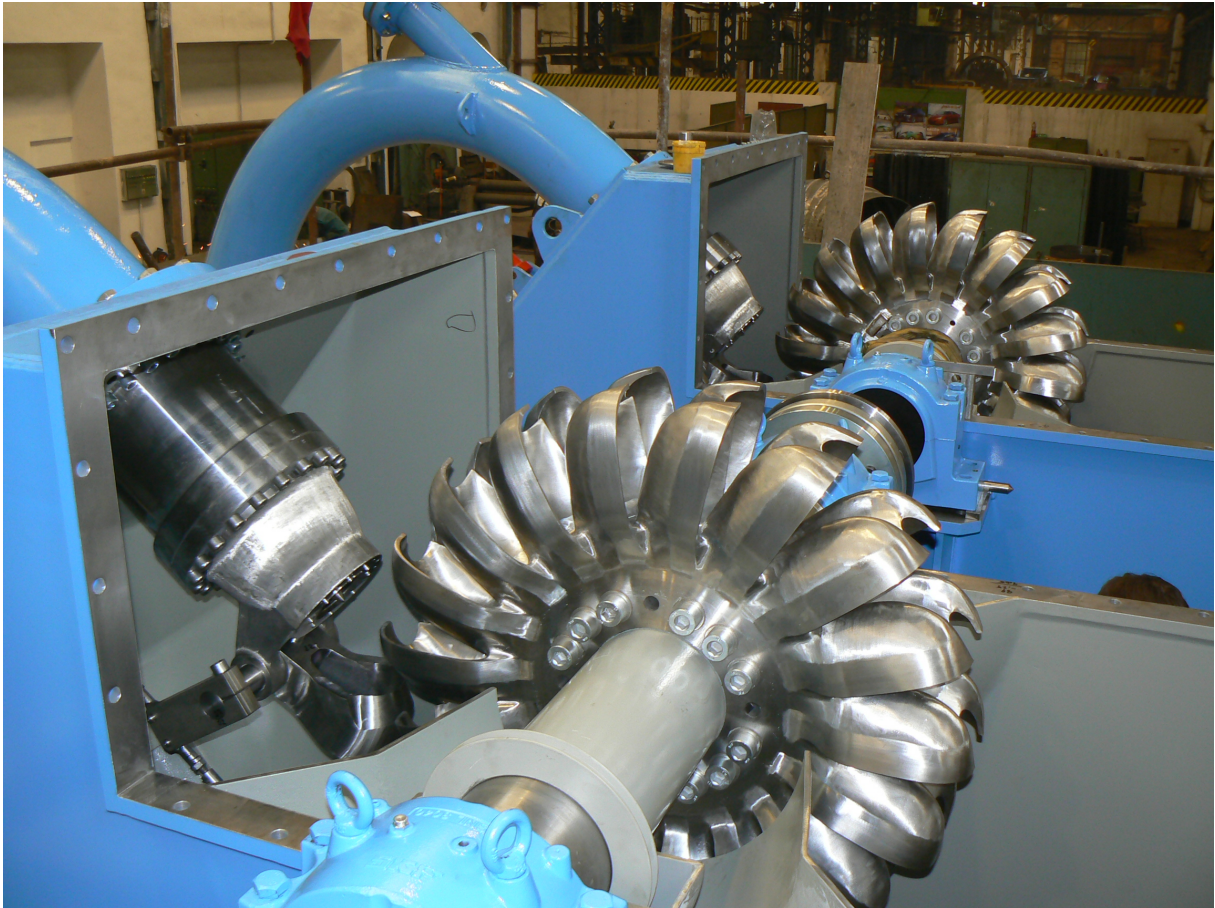


Figura 1 - Turbina Hidráulica do tipo Pelton - Figura obtida em [1] em 18/09/2018 às 16:33.

A maioria dos trabalhos que desenvolvem algoritmos de controle para sistemas de fase não-mínima assumem condições restritivas, e.g., realimentação de estados (parcial ou completa) em vez de apenas realimentação de saída, ou o total conhecimento das dinâmicas do sistema. Estratégias de controle que admitem incertezas paramétricas e/ou relaxamento da hipótese de medição completa dos estados geralmente estão sob a condição da planta ser de fase mínima [16], [17], [18], [19], [20]. A princípio a eliminação desta condição permanece um problema em aberto. Esta dissertação irá propor soluções para este problema utilizando estratégias de controle por modos deslizantes para sistemas de fase não-mínima considerando-se apenas o conhecimento parcial das dinâmicas da planta ou ainda o total desconhecimento destas, utilizando apenas a realimentação da planta no algoritmo do controlador. Assim, este é o objetivo principal deste trabalho, uma vez que a condição de fase não-mínima concomitante com incertezas paramétricas causam grande dificuldade no projeto do controlador.

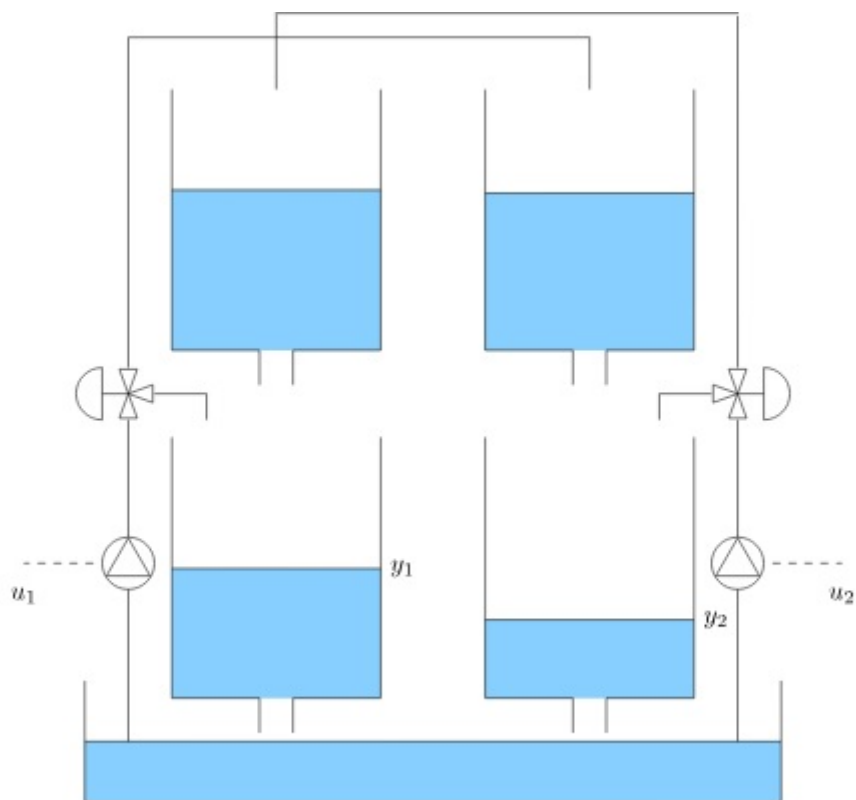


Figura 2 - Sistema de Tanques Acoplados - Adaptado da figura obtida em [2] em 18/09/2018 às 17:38.

## • Objetivos e Metas

Esta dissertação tem como objetivo principal desenvolver algoritmos de controle baseados em modos deslizantes e realimentação de saída para sistemas de fase não-mínima. Desconhecimento total ou parcial dos parâmetros da planta, assim como perturbações externas, serão consideradas no projeto dos controladores. Para lidar com estas dificuldades, foram utilizadas algumas técnicas de controle (que serão devidamente apresentadas ao longo do texto) em conjunto com o algoritmo por modos deslizantes.

Estabeleceu-se como meta que os algoritmos de controle desenvolvidos nesta pesquisa atinjam os objetivos pré-estabelecidos, seja estabilização/regulação ou rastreamento, quando aplicados em plantas de fase não-mínima, ainda que estas plantas apresentem de incertezas paramétricas e perturbações externas.

## • Metodologia

Primeiramente, realizou-se uma pesquisa sobre trabalhos cujo tema é o controle de sistemas de fase não-mínima. Em [4], Isidori nos apresenta um contexto histórico sobre este tema, detalhando o trabalho de diversos pesquisadores sobre sistemas de fase não-mínima. Em seguida uma nova abordagem para o trabalho de Hsu, Oliveira e Cunha, em [21], foi pensada. A solução encontrada em [21] para resolver um problema de direção de controle desconhecida poderia ser utilizada também em sistemas de fase não-mínima, pois a presença de zeros de fase não-mínima na função de transferência da planta provoca a inversão da direção do sinal de controle esperado.

Assim, foi projetado um algoritmo de controle, adaptado de [21], para sistemas de fase não-mínima. Em seguida, simulações a partir de exemplos acadêmicos foram realizadas utilizando o software MATLAB e a sua ferramenta Simulink, a fim de testar o controlador proposto quando aplicado em um sistema de fase não-mínima. Esta etapa da pesquisa deu origem a um artigo, que foi apresentado no XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), promovido pela Sociedade Brasileira de Automática (SBA), em 2017.

Em seguida, um novo algoritmo de controle para sistemas de fase não-mínima foi pensado, onde um esquema de múltiplos observadores serve de base para uma lei de controle por modos deslizantes. Estes múltiplos observadores tem a tarefa de estimar as incertezas paramétricas e as perturbações externas presentes no sistema. Assim como na



etapa anterior, após o projeto deste novo algoritmo, novas simulações foram realizadas para testar o desempenho desta lei de controle. Esta etapa da pesquisa também deu origem a um artigo, que foi apresentado no XXII Congresso Brasileiro de Automática (CBA), promovido pela Sociedade Brasileira de Automática (SBA), em 2018.

### • Organização da Dissertação

A seguir, segue a organização desta dissertação, com um breve resumo do que será apresentado em cada capítulo.

O capítulo 1 apresenta uma análise dos sistemas de fase não-mínima. A origem do termo fase não-mínima é apresentada. Uma comparação da resposta ao degrau entre sistemas de fase mínima e não-mínima é feita com o intuito de mostrar as características marcantes dos sistemas de fase não-mínima. Por fim, são apresentadas as dificuldades de se controlar de um sistema de fase não-mínima.

No capítulo 2, a técnica de controle por modos deslizantes é detalhada a partir de um exemplo motivacional. Vantagens e desvantagens deste método são apresentadas. O porquê da utilização desta técnica ao longo desta pesquisa é apresentado ao final deste capítulo.

No capítulo 3, combina-se a técnica de escalonamento temporal com o uso de uma função de monitoração para se projetar uma lei de controle por modos deslizantes. Aqui, este algoritmo de controle tem como objetivo fazer com que o sinal de saída de uma planta rastreie uma trajetória desejada. Além da condição de fase não-mínima, a planta está sujeita a incertezas paramétricas, o que traz um desafio maior para o projeto do controlador. A estabilidade global e assintótica é demonstrada para o sistema em malha fechada aplicando-se apenas realimentação de saída, enquanto que o erro de rastreamento atinge conjuntos residuais arbitrariamente pequenos. Resultados de simulação através de um exemplo acadêmico ilustram o desempenho do algoritmo de controle proposto.

O capítulo 4 apresenta uma nova estratégia de controle utilizando apenas realimentação de saída para a estabilização de sistemas incertos de fase não-mínima. Múltiplos observadores para os estados não-medidos da planta, para o sinal de saída e para as incertezas paramétricas e perturbações desconhecidas serviram de base para o projeto de uma lei de controle por modos deslizantes robusta a incertezas paramétricas e distúrbios externos. A estabilidade global e assintótica é demonstrada para o sistema em malha fechada.

Resultados de simulação através de um exemplo acadêmico ilustram o desempenho do algoritmo de controle proposto.

Segue ao final desta dissertação as conclusões sobre as contribuições apresentadas, as propostas sobre trabalhos futuros e uma seção contendo os trabalhos publicados durante o desenvolvimento desta dissertação.

## 1 SISTEMAS DE FASE NÃO-MÍNIMA

Um sistema linear, invariante no tempo, contendo apenas uma entrada e uma saída, pode ser representado por sua função de transferência, que é a razão entre a equação do sinal de saída e a equação do sinal de entrada do sistema. Quando aplicada a transformada de Laplace na função de transferência, esta pode ser escrita como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k_p \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (1)$$

onde  $Y(s)$  é a transformada de Laplace do sinal de saída do sistema,  $U(s)$  é a transformada de Laplace do sinal de entrada do sistema,  $k_p$  é o ganho em alta frequência do sistema,  $N(s)$  e  $D(s)$  são polinômios mônicos representados como  $N(s) = (s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_m)$  e  $D(s) = (s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)$ , com  $m \in \mathbb{N}$  sendo o número de zeros,  $n \in \mathbb{N}$  o número de polos da função de transferência.

Sistemas lineares de fase não-mínima são aqueles que possuem um ou mais zeros localizados no semi-plano da direita (SPD) em (1). Podemos entender este termo a partir dos seguintes exemplos de sistemas estáveis, apresentados por Castrucci, Bittar e Sales em [22]:

$$H_1(s) = \frac{1 + s/z}{1 + s/p} \quad (2)$$

e

$$H_2(s) = \frac{1 - s/z}{1 + s/p}, \quad (3)$$

onde  $z > 0$  e  $p > 0$  são respectivamente o zero e o polo da função de transferência.

O sistema descrito por (2) é dito de fase mínima, pois seu zero está localizado no semi-plano da esquerda (SPE) do plano  $s$ . Já no sistema em (3), o zero está localizado no semi-plano da direita do plano  $s$  ( $s = z$ ).

Analisando as respostas em frequência os sistemas (2) e (3) em relação ao seu módulo e fase, podemos notar que

$$|H_1(s)|_{s=jw} = \left| \frac{1 + (jw)/z}{1 + (jw)/p} \right| \quad (4)$$

e

$$|H_2(s)|_{s=jw} = \left| \frac{1 - (jw)/z}{1 + (jw)/p} \right|. \quad (5)$$

Conseqüentemente,

$$|H_1(jw)| = |H_2(jw)|. \quad (6)$$

assim,  $H_1$  e  $H_2$  possuem o mesmo valor em módulo, porém as fases de  $H_1$  e  $H_2$  são diferentes, dadas por

$$\angle H_1(jw) = \arctan\left(\frac{+w}{z}\right) - \arctan\left(\frac{w}{p}\right), \quad (7)$$

$$\angle H_2(jw) = \arctan\left(\frac{-w}{z}\right) - \arctan\left(\frac{w}{p}\right). \quad (8)$$

Definindo  $z = 1$  e  $p = 2$  em (2) e (3), seguem abaixo os diagramas de Bode para  $H_1(jw)$ , na Figura 3, e para  $H_2(jw)$ , na Figura 4:

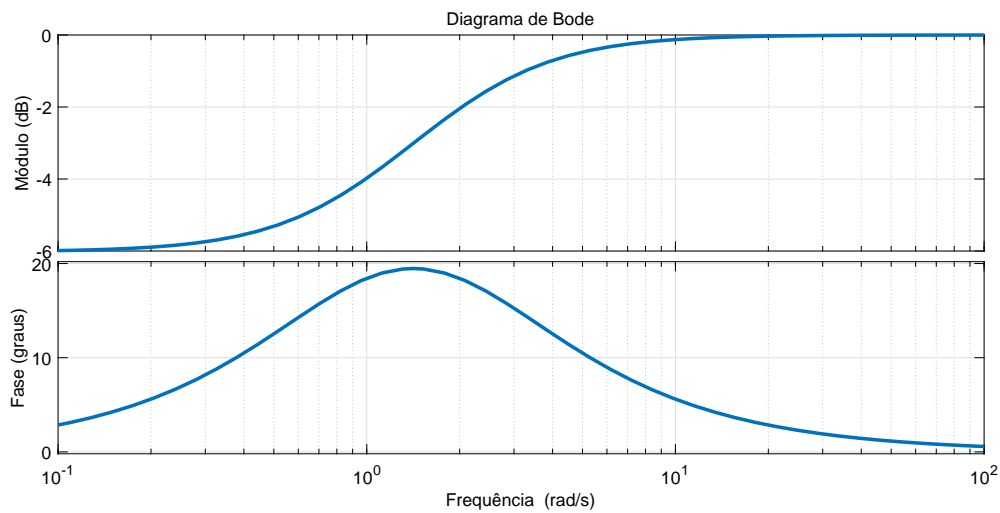


Figura 3 - Diagrama de Bode do sistema  $H_1(jw)$ .

Podemos perceber que apesar de  $H_1(jw)$  e  $H_2(jw)$  possuírem o gráficos idênticos para o módulo, seus gráficos de fase são diferentes. Note também que a variação total de fase  $H_1$  é menor que a de  $H_2$ . Por esta razão, pode-se dizer que  $H_1(s)$  é de fase mínima e conseqüentemente  $H_2(s)$  é de fase não-mínima.

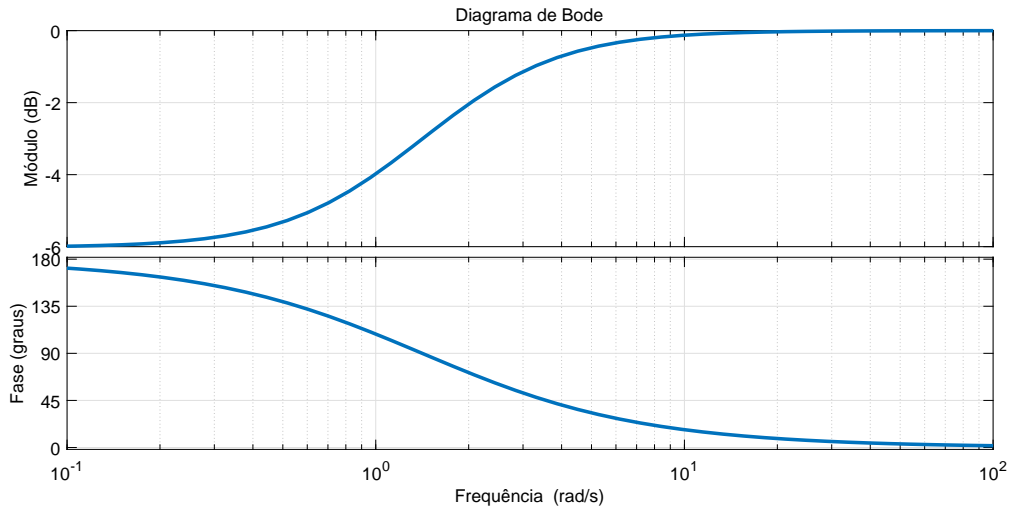


Figura 4 - Diagrama de Bode do sistema  $H_2(jw)$ .

### 1.1 Resposta ao Degrau em um Sistema de Fase Não-Mínima

Sejam as seguintes funções de transferência:

$$H_3(s) = \frac{Y_3(s)}{U_3(s)} = \frac{s + 0,5}{s^2 + 3s + 2} \quad (9)$$

e

$$H_4(s) = \frac{Y_4(s)}{U_4(s)} = \frac{s - 0,5}{s^2 + 3s + 2}. \quad (10)$$

Assim como  $H_1(s)$  e  $H_2(s)$ ,  $H_3(s)$  e  $H_4(s)$  possuem mesmo módulo, porém fases diferentes ( $H_4$  é de fase não-mínima). Aplicando-se um sinal de entrada na forma de um degrau atrasado (aplicado no instante de tempo  $t = 1s$ ) em 9 e 10, seguem seus respectivos sinais de saída na Figura 5 e na Figura 6.

Na Figura 6 pode-se observar uma característica marcante dos sistemas de fase não-mínima. Em  $t = 1$ , instante em que se aplica um degrau em (10), ocorre um sobrepasso (do inglês *overshoot*) no sinal de  $y_4(t)$ , onde a saída do sistema a princípio se afasta de seu valor em regime permanente<sup>1</sup>. Logo depois, o sinal de saída “corrige” a sua direção e em alguns instantes alcança o valor em regime permanente. Este fenômeno, conhecido como a mudança na direção de controle, torna a tarefa de se controlar esta classe de sistemas

<sup>1</sup>No exemplo utilizado, o valor em regime permanente da saída  $y_4$  atinge valores menores do que seu valor inicial. Se o ganho DC deste sistema fosse positivo, com o valor em regime permanente de  $y_4$  atingindo valores maiores do que seu valor inicial, observar-se-ia um subpasso (do inglês *undershoot*) no sinal de  $y_4$ .

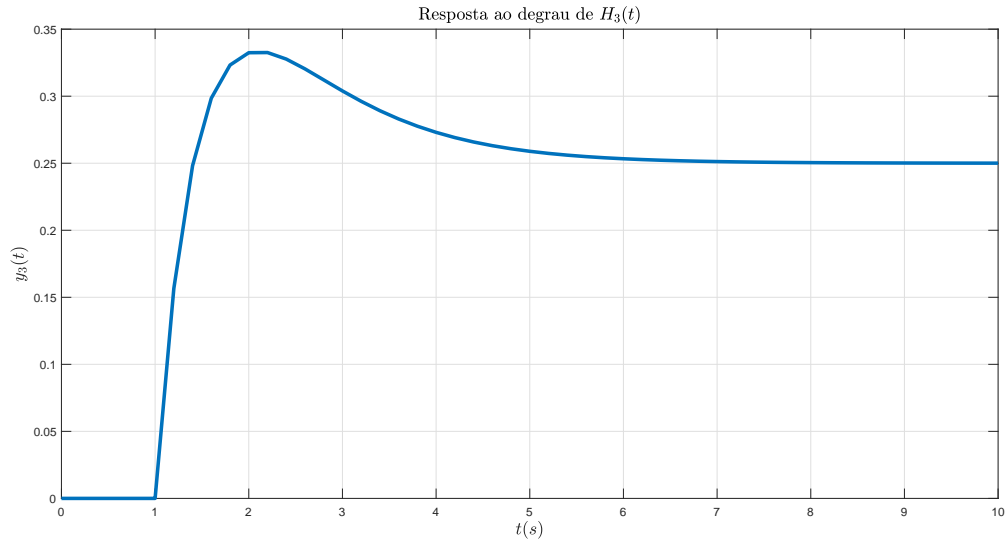


Figura 5 - Resposta ao degrau para um sistema de fase mínima.

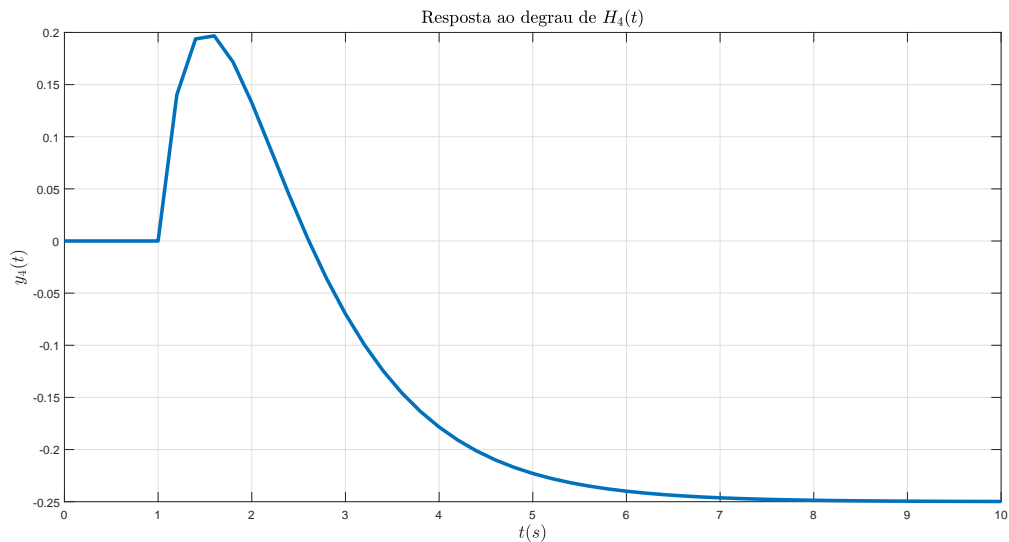


Figura 6 - Resposta ao degrau para um sistema de fase não-mínima.

um desafio interessante. Estratégias de controle baseadas em alto-ganho, por exemplo, poderiam levar um sistema de fase não-mínima à instabilidade [11] em malha fechada. Note ainda que a presença de um zero de fase não-mínima na função de transferência  $H_4(s)$  muda o sinal do ganho DC do sistema.

## 1.2 Análise de Sistemas de Fase Não-Mínima via Método do Lugar das Raízes

A partir do método do Lugar das Raízes (*Root Locus*), introduzido por Evans em [23, 24], será desenvolvida nesta seção uma análise simples sobre a estabilidade de

sistemas de fase não-mínima. Assim, a partir das funções de transferência  $H_3(s)$  e  $H_4(s)$  apresentadas na seção anterior, seguem abaixo seus gráficos para o Lugar das Raízes.

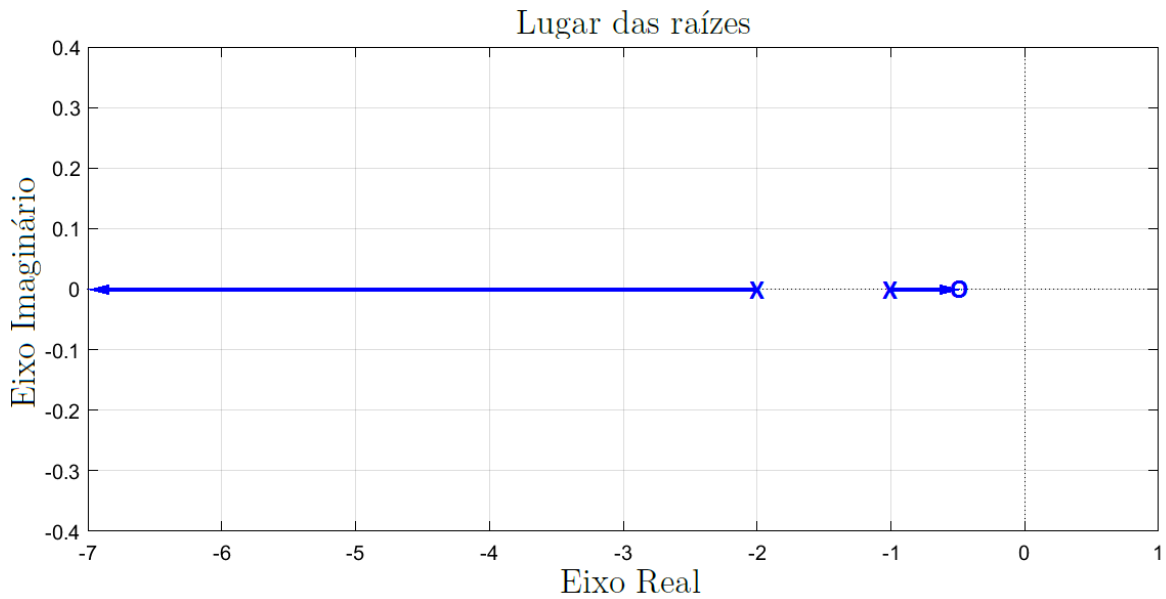


Figura 7 - Lugar das Raízes para a função de transferência  $H_3(s)$ . O zero da função de transferência está representado pelo círculo localizado em  $-0,5$  no Eixo Real e os polos estão representados pelos “X” localizados em  $-1$  e  $-2$  no Eixo Real. Note que pela análise utilizando o método do Lugar das Raízes, os polos do sistema sempre se localizarão no SPE.

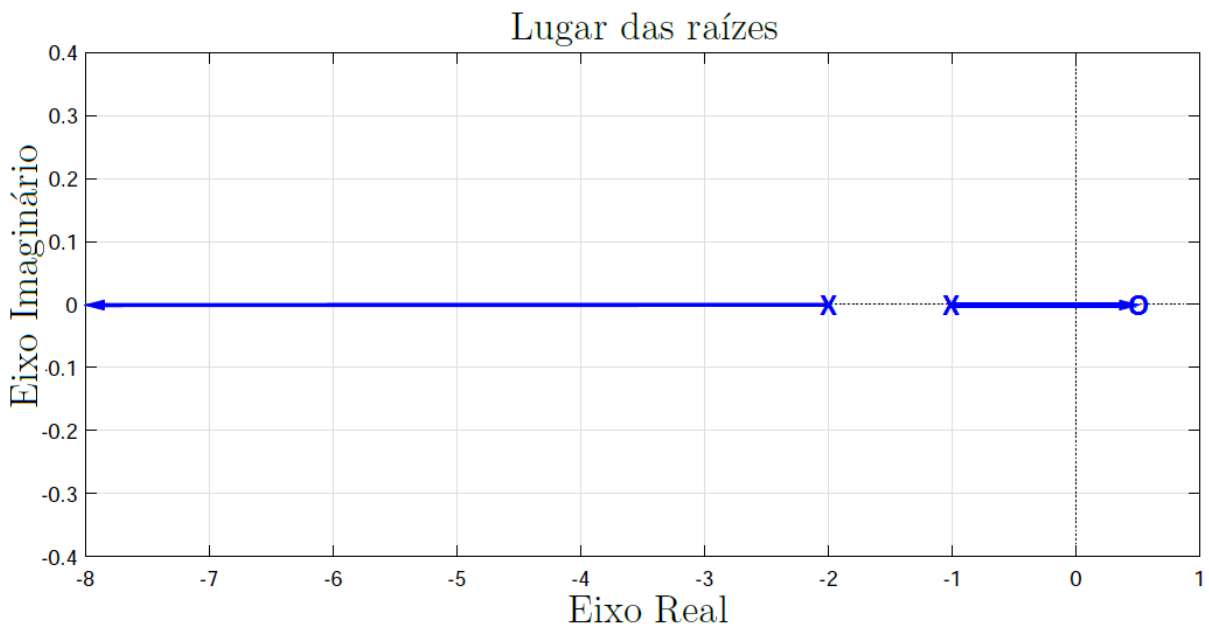


Figura 8 - Lugar das raízes para a função de transferência  $H_4(s)$ . O zero da função de transferência está representado pelo círculo localizado em  $0,5$  no Eixo Real e os polos estão representados pelos “X” localizados em  $-1$  e  $-2$  no Eixo Real. Note que o polo localizado em  $-1$  se encontra com o zero quando o ganho em malha aberta tende a infinito.

O método do Lugar das Raízes nos permite analisar de maneira simples e direta o comportamento dos polos e dos zeros de um sistema em malha fechada de acordo com o ganho do sistema em malha aberta. Assim, a partir da Figura 8, podemos perceber que quando o ganho em malha aberta da planta  $H_4$  tende a infinito, o polo localizado em  $s = -1$  converge para o zero localizado em  $0,5$ , no SPD, levando o sistema à instabilidade. Diferentemente, quando o sistema é de fase mínima, conforme ilustrado na Figura 7, o zero do sistema se localiza no SPE. Portanto, se um ganho alto, tendendo a infinito, for aplicado na planta, o polo localizado em  $s = 1$  converge para o zero no SPE. Assim, considerando o exemplo proposto, um ganho alto aplicado na planta de fase mínima não levará o sistema à instabilidade.

Assim, estratégias de controle baseadas em alto ganho, que geralmente são utilizadas em sistemas de controle com parâmetros desconhecidos, não indicadas para lidar com sistemas de fase não-mínima, pois um ganho alto no sinal de controle provavelmente levará o sistema em malha fechada à instabilidade [11, 25].

Ao utilizar uma malha de controle para cancelar o zero de fase não-mínima, é adicionado um polo instável no sistema. Assim, este método não é indicado, pois levaria o sistema à instabilidade.

### 1.3 Propostas para o Controle de Sistemas de Fase Não-mínima

Para superar o desafio de lidar com sistemas de fase não-mínima, esta dissertação apresenta duas técnicas de controle distintas:

- ✠ No capítulo 3, combina-se a técnica de escalonamento temporal com o uso de uma função de monitoração para se projetar uma lei de controle por modos deslizantes. A técnica de escalonamento temporal utilizada por Hsu, Oliveira e Cunha em [21] pode ser enxergada de uma maneira bem simples, como sendo um fator de ordem pequena (aqui nesta dissertação,  $\mu \leq 0,01$ ) multiplicado pela lei de controle. Assim, esta técnica pode ser vista como o oposto da técnica de alto ganho, esta não indicada para lidar com sistemas de fase não-mínima.
- ✠ No capítulo 4, uma nova técnica de controle é apresentada, onde múltiplos observadores para os estados não-medidos da planta, para o sinal de saída e para as incertezas paramétricas e perturbações desconhecidas servem de base para o projeto



de uma lei de controle por modos deslizantes robusta.

#### 1.4 Notações e Definições

Ao longo desta dissertação, serão utilizadas as seguintes notações e definições:

✠ A função  $\text{sgn}$ , conhecida como função sinal, é definida como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

✠ Ao longo desta dissertação, a norma Euclidiana de um vetor  $x$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $A$  são denotadas por  $\|x\|$  e  $\|A\|$ , respectivamente.

## 2 CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES

O controle a estrutura variável (*variable structure control* - VSC) é um método de controle não-linear que altera a dinâmica de um sistema através de um sinal de controle descontínuo chaveado em alta frequência entre duas ou mais estruturas de controle regidas por uma função de chaveamento, produzindo assim um novo sistema. Foi proposto e elaborado na década de 1960 na antiga União Soviética por Emel'yanov e Barbashin, porém somente na década de 1970 este conceito foi difundido para outros países, através de Itkis em [26] e de Utkin em [27].

A grande maioria dos problemas de controle apresenta diferenças entre o sistema real e seu respectivo modelo matemático. Assim, o controlador deve ser capaz de atingir um desempenho satisfatório mesmo com a presença destas incertezas. Uma das técnicas mais conhecidas de VSC é o controle por modos deslizantes (*sliding mode control* - SMC), detalhado através de um exemplo acadêmico na seção a seguir.

### 2.1 Exemplo Motivacional

A partir do exemplo apresentado por Khalil em [3], considere o seguinte sistema de ordem  $n = 2$ :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = h(x) + g(x)u, \quad (12)$$

onde  $h$  e  $g$  são funções não-lineares desconhecidas e  $g(x) \geq g_0 > 0 \forall x$ . Deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação de estados de modo a estabilizar o sistema ( $x_1 \rightarrow 0$  e  $x_2 \rightarrow 0$ ). Suponhamos que seja possível projetar uma lei de controle tal que o plano de fase do sistema (11)-(12) seja direcionado para a superfície

$$s = a_1x_1 + x_2 = 0. \quad (13)$$

Nesta superfície, a trajetória dos estados é dada por

$$\dot{x}_1 = -a_1x_1. \quad (14)$$

Definindo-se  $a_1 > 0$ , é garantido que  $x(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e a taxa de convergência pode ser controlada pela escolha de  $a_1$ . A partir de (14), podemos notar que dentro da superfície  $s = 0$ , as trajetórias são independentes de  $h(x)$  e  $g(x)$ .

Assim, o problema que se apresenta é: como trazer a trajetória dos estados para dentro da superfície  $s = 0$  e, após isto, manter esta trajetória dentro da superfície. A partir da primeira derivada temporal de  $s$ , dada por

$$\begin{aligned}\dot{s} &= a_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ &= a_1 x_2 + h(x) + g(x) u,\end{aligned}\tag{15}$$

e considerando que  $h(x)$  e  $g(x)$  satisfazem a desigualdade

$$\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq \varrho(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\tag{16}$$

para alguma função  $\varrho(x)$  conhecida e, com

$$V = \frac{s^2}{2},\tag{17}$$

sendo uma função candidata de Lyapunov para (15), temos que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s \dot{s} \\ &= s[a_1 x_2 + h(x)] + g(x) s u \\ &\leq g(x) |s| \varrho(x) + g(x) s u.\end{aligned}\tag{18}$$

Definindo o sinal de controle  $u$  como

$$u = -\beta(x) \operatorname{sgn}(s),\tag{19}$$

onde  $\beta(x) \geq \varrho(x) + \beta_0$ , com  $\beta_0 > 0$ , segue que

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq g(x)|s|\varrho(x) - g(x)[\varrho(x) + \beta_0]s \operatorname{sgn}(s) \\
&= -g(x)\beta_0|s| \\
&\leq -g_0\beta_0|s|.
\end{aligned} \tag{20}$$

Assim, a partir de (17) e (20), podemos garantir que a trajetória dos estados alcançam a superfície  $s = 0$  em tempo finito e que, uma vez dentro desta superfície, esta trajetória não poderá mais sair desta superfície. Este período em que há o confinamento da trajetória dentro da superfície  $s = 0$  e que as dinâmicas do sistema são representadas pelo modelo de ordem reduzida  $\dot{x}_1 = -a_1x_1$  é chamado de fase deslizante (ou modo deslizante), e a superfície  $s = 0$  é então chamada de superfície de deslizamento. Assim, esta técnica de controle ficou conhecida como controle por modos deslizantes. Abaixo, segue na Figura 9 um esboço do plano de fase que representa o sistema (11)-(12), em conjunto com a superfície de deslizamento em (13) e com a lei de controle definida em (19).

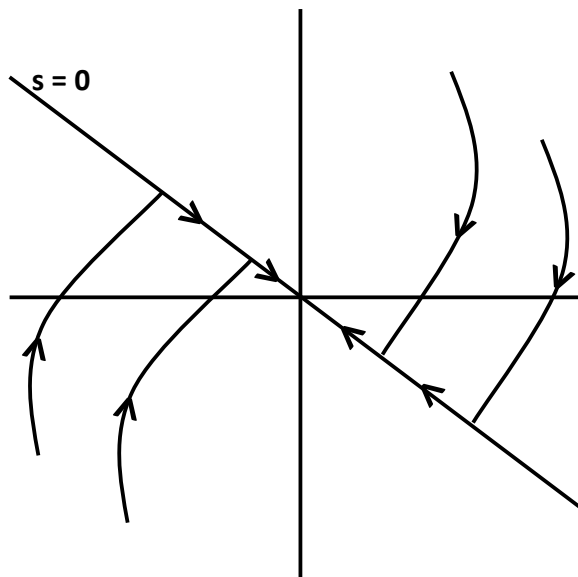


Figura 9 - Plano de fase típico representando um sistema sob a ação de uma lei de controle baseada em modos deslizantes. Adaptado de [3].

A característica marcante do controle por modos deslizantes é a sua robustez em relação aos parâmetros da planta, neste exemplo representados por  $h(x)$  e  $g(x)$ . Para se

projetar o sinal de controle em (19), basta sabermos um majorante para  $\varrho(x)$  e, durante o modo deslizante, a trajetória dos estados será independente de  $h(x)$  e  $g(x)$ . Assim, se para uma constante positiva conhecida  $k_1$ , a desigualdade

$$\left| \frac{a_1 x_2 + h(x)}{g(x)} \right| \leq k_1, \quad (21)$$

for satisfeita, podemos projetar a lei de controle por modos deslizantes como

$$u = -k \operatorname{sgn}(s), \quad (22)$$

onde  $k > k_1$ , e assim a lei de controle por modos deslizantes assume a forma de um relé, podendo ser reescrita como

$$u = \begin{cases} u^+ = -k, & \text{quando } \operatorname{sgn}(s) = 1 \\ u^- = k, & \text{quando } \operatorname{sgn}(s) = -1. \end{cases} \quad (23)$$

De fato, para que as trajetórias dos estados permaneçam na superfície de deslizamento, é necessário que a frequência de chaveamento da lei de controle seja infinita. Entretanto, isto não ocorre! Devido às imperfeições e atrasos presentes nos dispositivos de chaveamentos, o fenômeno conhecido como *chattering* (do inglês trepidação) é comum em sistemas baseados em controle por modos deslizantes.

A partir da Figura 10, considere inicialmente a trajetória dos estados indo em direção à superfície de deslizamento a partir da região do plano de fase onde  $s > 0$ . Em um modo deslizante ideal, a trajetória dos estados deveria começar a deslizar dentro da superfície de deslizamento  $s = 0$  a partir do momento em que a trajetória atinja o ponto  $A$ . Na prática, o atraso no chaveamento na lei de controle faz com que a trajetória atravesse a superfície de deslizamento até a região do plano de fase onde  $s < 0$ . Quando ocorre o chaveamento na lei de controle, a trajetória muda a sua direção, e novamente atinge a superfície de deslizamento. Novamente, a trajetória atravessa a superfície de deslizamento, e a repetição deste processo cria um movimento de “zig-zag”, como apresentado na Figura 10, e este movimento é assim conhecido como *chattering*. Este fenômeno resulta em baixa acurácia do algoritmo de controle, perdas devido ao calor em circuitos de eletrônica de potência e alto desgaste em peças mecânicas móveis. Além disso, o *chattering* pode excitar dinâmicas de alta frequência não modeladas, o que compromete o desempenho do sistema

e podem levar à instabilidade [3].

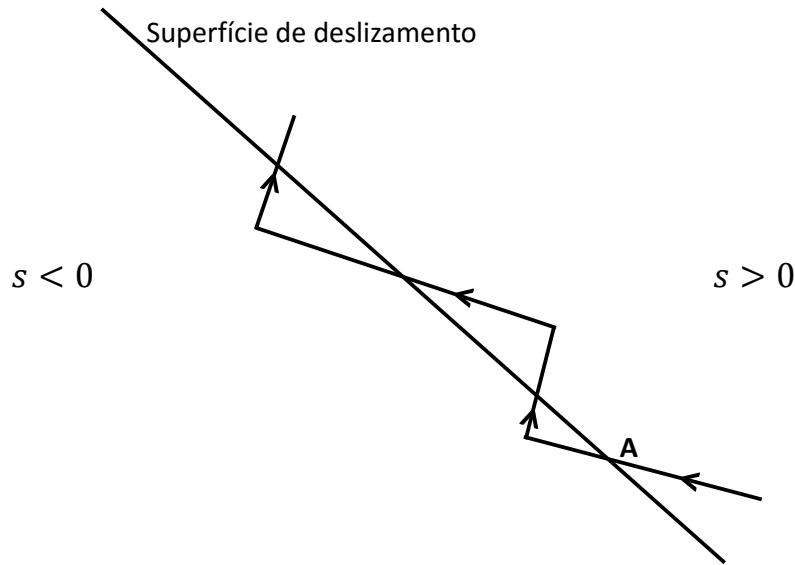


Figura 10 - O atraso presente no chaveamento da lei de controle faz com que a trajetória dos estados faça um movimento de “zig-zag” em torno da superfície de deslizamento  $s$ . Adaptado de [3].

No Capítulo 3, um integrador foi acoplado ao controlador, de maneira semelhante ao trabalho de Hsu, Oliveira e Cunha em [21] com o objetivo de suavizar o sinal de controle chaveado produzido pelo algoritmo baseado em modos deslizantes. Assim, o sinal de controle que é aplicado na planta passa a ser uma função suave, evitando assim os efeitos do *chattering*.

Nos capítulos a seguir, esta dissertação apresentará algoritmos de controle baseados em modos deslizantes utilizados para resolução de problemas envolvendo plantas de fase não-mínima. No Capítulo 3, uma técnica de escalonamento temporal será introduzida em um algoritmo de controle por modos deslizantes em conjunto com uma função de monitoração, cujo o objetivo é a fazer com que a saída de uma planta desconhecida rastreie uma determinada trajetória desejada. Já no Capítulo 4, a aplicação de uma lei de controle combinada a múltiplos observadores fará com que uma planta fase não-mínima, cuja totalidade de parâmetros é desconhecida, seja estabilizada.

### 3 CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES ATRAVÉS DE FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO E ESCALONAMENTO TEMPORAL

Neste capítulo, a técnica de controle por modos deslizantes será aplicada em conjunto com outras duas técnicas: a utilização de uma função de monitoração, que monitora o módulo do erro entre uma variável de interesse e seu valor desejado, e o escalonamento temporal, que altera a escala de tempo de um sistema, tornando possível que um determinado algoritmo de controle, projetado inicialmente para controlar uma planta de grau relativo  $n^* = 1$ , por exemplo, controle uma planta de grau relativo arbitrário.

A combinação das técnicas citadas acima foi apresentada por Hsu, Oliveira e Cunha em [21] como uma solução para um problema de controle por busca extremal (*Extremum Seeking Control*) em plantas de grau relativo arbitrário. Em [21], é implementado um controlador por busca extremal via modos deslizantes e realimentação de saída cujo objetivo é fazer com que a saída de uma planta atinja o valor máximo de uma função, em um cenário em que a direção de controle poderia ser inclusive variante no tempo.

Quando aplica-se um sinal de controle em uma planta de fase não-mínima, o valor de sua variável de saída inicialmente se afasta de um valor desejado. Em seguida, se o sinal de controle foi projetado corretamente, a trajetória de saída da planta tende a alcançar o valor desejado. Na prática, podemos observar um sobrepasso (do inglês - *overshoot*) ou um subpasso (do inglês - *undershoot*) no gráfico da saída da planta. Estas curvas, que são características de sistemas de fase não-mínima, indicam que inicialmente a direção de controle aplicada não é a correta, fazendo com que o valor da saída se afaste do valor desejado (conforme a Figura 6).

Em Levy [28], foram feitos chaveamentos na direção de um sinal de controle aplicado em uma planta de fase não-mínima, afim de reduzir o valor do *undershoot* presente na saída do sistema. Devido a estes chaveamentos serem realizados manualmente, o resultado desta técnica não foi satisfatório, pois acabou agravando o problema uma vez que os valores do *undershoot* aumentaram.

O problema de direção de controle desconhecida abordado em [21] pode ser generalizado para sistemas de fase não-mínima, uma vez que os sinais dos zeros da função de transferência da planta podem ser relacionados diretamente com o ganho DC do sistema, e indiretamente com a sua direção de controle. Assim, neste capítulo vamos utilizar a

função de monitoração apresentada em [21] para realizar os chaveamentos na direção de controle de maneira automática, esperando-se assim obter resultados melhores do que os alcançados em [28].

Neste capítulo, apresenta-se o seguinte problema: uma planta desconhecida, de fase não-mínima, deve ser controlada de modo que sua saída rastreie um modelo de referência o mais próximo possível. Para dificultar a execução desta tarefa, os estados deste sistema não estão disponíveis para medição, apenas a saída da planta é mensurável.

### 3.1 Descrição do Problema

Considere o seguinte sistema linear com grau relativo arbitrário  $n^*$  :

$$\dot{v} = u \quad (24)$$

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (25)$$

$$y = Cx, \quad (26)$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $y \in \mathbb{R}$  é a saída medida do sistema (25) – (26).

A planta a ser controlada é representada por (25)-(26), enquanto que o integrador (24) é utilizado para se obter um sinal de controle  $v \in \mathbb{R}$  contínuo, que incrementa o grau relativo do sistema [29], isto é,  $n \geq n^* - 1$  em vez de  $n \geq n^*$ , mas ajuda a suavizar o sinal de controle por modos deslizantes  $u$  introduzido adiante. O incremento do grau relativo do sistema faz com que o chaveamento em alta frequência fique retido apenas no sinal de controle  $u$ ; assim, o controle virtual  $v$  passa a ser aplicado diretamente na planta, o que nos leva a uma melhora na atenuação dos efeitos do *chattering* no sistema em malha fechada [30].

As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  e a ordem  $n$  do subsistema (25)-(26) podem ser incertas e a função de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  pode apresentar zeros no semi-plano direito complexo, admitindo assim que o sistema possa ser de fase não-mínima ou de fase mínima.



### 3.2 Objetivo de Controle

O objetivo do controle para rastreamento de trajetórias é fazer com que a saída medida do sistema (26) rastreie o comportamento de uma trajetória pré-definida. Em [21], um problema de busca extremal foi reformulado para um problema de rastreamento em que a direção de controle é desconhecida. Neste capítulo, deseja-se aplicar este método de controle para sistemas de fase não-mínima, buscando uma lei de controle  $u(t)$  por realimentação de saída tal que, para qualquer condição inicial, seja possível que a variável de saída  $y(t)$  do sistema rastreie uma determinada trajetória desejada o mais próximo possível.

O sinal do erro  $e(t)$  é dado por

$$e(t) = y(t) - y_m(t), \quad (27)$$

onde  $y_m(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de saída desejado a ser seguido pela saída da planta  $y(t)$ , sendo gerado pelo modelo de referência

$$\dot{y}_m(t) = -a_m y_m(t) + k_m r_m(t), \quad (28)$$

onde  $a_m > 0$  e  $k_m > 0$  são constantes dadas pelo projetista e  $r_m(t)$  é uma trajetória limitada.

### 3.3 Representação de Dinâmicas Não-Modeladas por Perturbação Singular

Utilizando a abordagem por perturbação singular apresentada por Kokotović, Khalil e O'Reilly em [31], foi demonstrado por Hsu, Oliveira e Cunha em [21] que o controle por modos deslizantes é robusto a dinâmicas rápidas não-modeladas, de modo que o sistema perturbado na forma a seguir [31, p. 50]:

$$\dot{v} = u \quad (29)$$

$$\mu \dot{x} = Ax + Bv \quad (30)$$

$$y = Cx, \quad (31)$$

apresenta um erro em regime permanente da ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  entre a saída  $y$  e seu valor desejado  $y_m$ , ou seja,

$$|y - y_m| \rightarrow \mathcal{O}(\sqrt{\mu}), \quad (32)$$

onde  $\mu > 0$  é uma constante suficiente pequena [32], [33].

### 3.3.1 Escalonamento Temporal

A razão para se utilizar o escalonamento temporal é a seguinte: se o controlador para rastreamento de trajetória originalmente proposto para um sistema com grau relativo  $n^* = 1$  é robusto a dinâmicas não-modeladas rápidas ( $\mu \rightarrow 0$ ) e estáveis, então este é também adequado para controlar dinâmicas com grau relativo arbitrário, se for devidamente escalonado.

Assim, aplicando-se um apropriado escalonamento temporal linear [34]

$$\frac{dt}{d\tau} = \mu, \quad (33)$$

o sistema (29)–(31) pode ser reescrito como

$$v' = \mu u \quad (34)$$

$$x' = Ax + Bu \quad (35)$$

$$y = Cx, \quad (36)$$

onde  $v' := \frac{dv}{d\tau}$  e  $x' := \frac{dx}{d\tau}$ . Isso significa que  $\exists \mu^* > 0$  tal que o sinal de entrada  $u$  pode ser escalonado, tal como em (34), para controlar o sistema original (25)–(26) em uma escala de tempo dilatada regida por  $t = \mu\tau$ ,  $\forall \mu \in (0, \mu^*]$ .

Como esperado, o preço a ser pago pela utilização da técnica de escalonamento temporal é que a resposta do sistema em malha fechada será lenta, como será evidenciado na seção 3.6.

## 3.4 Principais Hipóteses

As hipóteses a seguir são válidas para o sistema original (25)–(26) e para seu modelo equivalente (34)–(36):

**(H1)** (*Sobre as incertezas*): Todos os parâmetros incertos da planta representada pela tripla  $(A, B, C)$  pertencem a um conjunto compacto  $\Omega$ .

**(H2)** (*Sobre a estabilidade da planta linear*): A matriz  $A$  em (25) deve ser Hurwitz.

**(H3)** (*Sobre o ganho DC do sistema linear*): O ganho DC do sistema linear (25)–(26) é desconhecido; assim,  $k_{DC} = -CA^{-1}B \neq 0$ , podendo a constante  $k_{DC}$  ser positiva ou negativa. Além disso, assume-se que existe um limitante inferior tal que:  $0 < \underline{k}_{DC} \leq |k_{DC}|$ .

A partir de **(H2)** e **(H3)**, podemos escrever a seguinte função de transferência para o subsistema linear (25)–(26):

$$G(s) = k_p \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (37)$$

onde  $N(s)$  e  $D(s)$  são polinômios mônicos representados como  $N(s) = (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)$  e  $D(s) = (s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)$ , com  $m \in \mathbb{N}^*$  sendo o número de zeros,  $n \in \mathbb{N}^*$  o número de pólos da função de transferência, o grau relativo é  $n^* = n - m$  e  $k_p > 0$  sem perda de generalidade. Assim sendo, definindo-se  $z \in \mathbb{N}^*$  como a quantidade de zeros de fase não-mínima do sistema (25)–(26), conclui-se que

$$\begin{cases} k_p > 0, & \text{se } z \text{ for par} \\ k_p < 0, & \text{se } z \text{ for ímpar.} \end{cases} \quad (38)$$

### 3.5 Controle via Função de Monitoração para Rastreamento de Trajetórias

Primeiramente vamos apresentar alguns resultados obtidos por Oliveira, Peixoto e Hsu em [35] para o sistema (29)–(31) sem a presença de dinâmicas desconhecidas ( $\mu = 0$ ).

#### 3.5.1 O caso singular $\mu = 0$

Para este caso, a equação diferencial (30) é substituída pela equação algébrica  $x = -A^{-1}Bv$  e, a partir de (29) e (31), a primeira derivada temporal do sinal de saída  $y$  é dada por

$$\dot{y} = k_{DC}u, \quad (39)$$

onde o ganho DC, chamado de  $k_{DC}$ , coincide com o ganho de alta frequência e é o coeficiente de  $u$  que aparece na primeira derivada temporal da saída  $y$ , sendo dado por

$$k_{DC} = -CA^{-1}B. \quad (40)$$

O  $\text{sgn}(k_{DC})$  também é chamado de direção de controle. Neste caso, a lei de controle para plantas com  $\text{sgn}(k_{DC})$  desconhecido proposta por [35] seria dada por:

$$u = \begin{cases} u^+ = -\rho(t) \text{sgn}(e), & t \in T^+, \\ u^- = +\rho(t) \text{sgn}(e), & t \in T^-, \end{cases} \quad (41)$$

onde a função de monitoração é usada para decidir quando  $u$  deve ser chaveado de  $u^+$  para  $u^-$  e *vice-versa*. Em (41),  $\rho(t) > 0$  é uma função de modulação contínua a ser projetada nas seções posteriores e os conjuntos  $T^+$  e  $T^-$  satisfazem  $T^+ \cap T^- = \emptyset$  e  $T^+ \cup T^- = [0, +\infty)$ .

Aqui abordaremos o problema considerando que o sistema é de fase não-mínima, utilizando a função de monitoração apresentada em [35] para identificar o sinal de  $k_{DC}$  e em seguida aplicar a direção de controle adequada.

### 3.5.2 Limitante Superior do Erro para $\mu = 0$

A partir do sinal do erro (27), do modelo de referência (28) e da equação dinâmica da saída da planta (39) e, adicionando e subtraindo  $\lambda_m e$  na equação dinâmica do erro  $e(t)$ , obtém-se

$$\dot{e} = k_{DC}u - a_m y_m(t) - k_m r_m + \lambda_m e - \lambda_m e \quad (42)$$

$$\dot{e} = -\lambda_m e + k_{DC}(u + d_e) \quad (43)$$

onde  $\lambda_m > 0$  é uma constante arbitrária e

$$d_e(t) := \frac{1}{k_{DC}}[a_m y_m(t) - k_m r_m(t) + \lambda_m e(t)], \quad (44)$$

lembrando que os sinais  $y_m(t)$  e  $r_m(t)$  têm amplitude limitada.

Desta forma, se a lei de controle

$$u = -\text{sgn}(k_{DC})\rho\text{sgn}(e) \quad (45)$$

for utilizada com uma função de modulação  $\rho$  não-negativa satisfazendo

$$\rho \geq |d_e| + \delta, \quad (46)$$

e  $\delta > 0$  sendo uma constante arbitrária pequena, então usando-se o *Lema de Comparação*, apresentado por Filippov [36], tem-se que,  $\forall t \in [t_i, +\infty)$ :

$$|e(t)| \leq |e(t_i)|e^{\lambda_m(t-t_i)}, \quad (47)$$

onde  $t_i \in [0, +\infty)$ .

### 3.5.3 Limitante Superior do Erro para $\mu \neq 0$

Quando  $\mu \neq 0$  em (30), o escalonamento temporal (33) nos permite considerar o sistema original (24)–(26) em uma diferente escala de tempo sendo controlada por (41) devidamente escalonada por  $\mu u$ , como visto em (34).

Com o intuito de aplicar o escalonamento, a função de modulação deve ser modificada para satisfazer

$$\rho \geq \mu[|d_e| + \delta] \quad (48)$$

em vez de (46).

Da análise por perturbação singular mencionada na seção 3.3, utilizando a lei de controle definida em (45), um limitante superior para o rastreamento do erro  $e(t)$  poderia ser diretamente obtido, para  $\mu$  suficientemente pequeno, adicionando-se os termos de regime permanente e transitório em (32) e (47), respectivamente [27]. Assim, obteríamos

$$|e(t)| \leq \zeta(t), \quad (49)$$

$$\zeta(t) := |e(t_i)|e^{-\lambda_m(t-t_i)} + \pi_e(t) + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}), \quad (50)$$

onde  $\pi_e(t)$  é um termo com decaimento exponencial rápido que contém os efeitos da dinâmica estável não-modelada em (30).

O principal problema é que, para (49) e (50) serem válidas, é necessário o conhecimento do  $\text{sgn}(k_{DC})$  em (45). Na seção a seguir, um esquema de chaveamento baseado na função de monitoração é desenvolvido para lidar com a falta de conhecimento  $\text{sgn}(k_{DC})$ . Diferentemente de [21], neste capítulo  $\text{sgn}(k_{DC})$  é constante, mas dependente do número de zeros de fase não-mínima.

### 3.5.4 Projeto da Função de Monitoração

A descrição detalhada da função de monitoração pode ser encontrada em [37], [35]. Lembrando que, se a desigualdade (49) é verificada quando a direção do controle é correta, parece natural utilizar  $\zeta$  em (50) como base para decidir se um chaveamento no sinal de controle  $u$  em (45) de  $u^+$  para  $u^-$  (ou de  $u^-$  para  $u^+$ ) é necessário, i.e., o chaveamento ocorre quando (50) é violada.

Portanto, considere a seguinte função

$$\varphi_k(t) = |e(t_k)|e^{-\lambda_m(t-t_k)} + a(k)e^{-t/a(k)} + r, \quad (51)$$

onde  $t_k$  é o instante em que ocorre o chaveamento,  $k$  é a quantidade de chaveamentos,  $a(k)$  é qualquer sequência monotonicamente crescente em  $k$  e  $r > 0$  é uma constante arbitrária pequena de ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . A constante  $r$  pode ser substituída pela sequência  $r(k) = k\sqrt{\mu}$ , também de ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ .

A *função de monitoração*  $\varphi_m$  pode ser definida como

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, +\infty). \quad (52)$$

Note que a partir de (51) e (52), tem-se  $|e(t)| < |\varphi_m(t)|$  em  $t = t_k$ . Consequentemente,  $t_k$  é definido como o instante de tempo quando a função de monitoração  $\varphi_m(t)$  encontra  $|e(t)|$ , isto é,

$$t_{k+1} := \begin{cases} \min\{t > t_k : |e(t)| = \varphi_m(t)\}, & \text{se existir,} \\ +\infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (53)$$

onde  $k \in \{1, 2, \dots\}$  e  $t_0 := 0$ .

Deste ponto de vista, a função de monitoração (51)–(52) pode ser vista como um operador híbrido [38], onde a variável de salto (*jump*) é o estado da função de monitoração

no instante de tempo  $t_k$  e a condição (53) define a regra sobre o chaveamento ou não. O comportamento exponencial após a ocorrência do salto (que pode ser descrita por uma equação diferencial) é referida como fluxo (*flow*). A Figura 11 ilustra o rastreamento da norma do erro  $|e|$  e da função de monitoração  $\varphi_m$

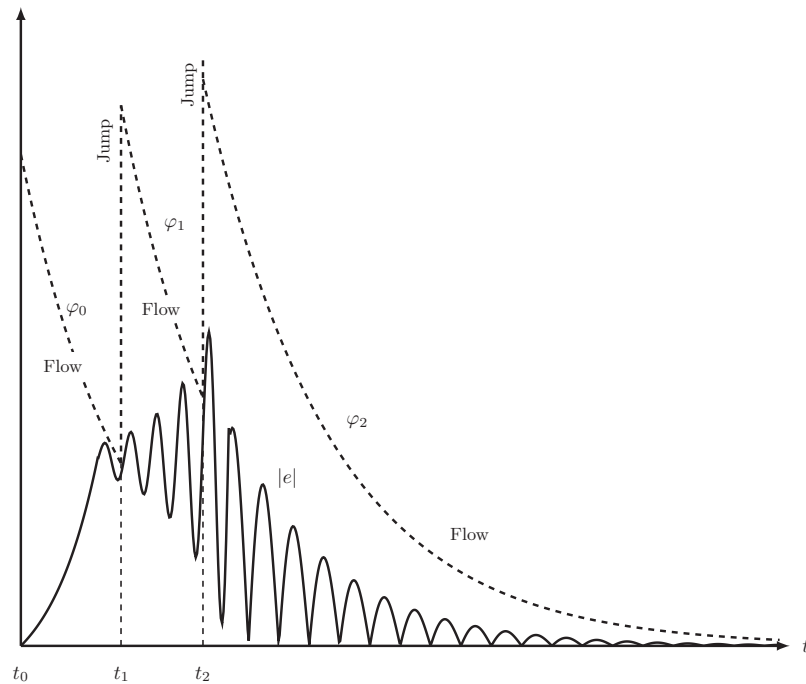


Figura 11 - As trajetórias de  $\varphi_m$  (linha pontilhada) e  $|e|$  (traço contínuo). A função de monitoração é um operador híbrido de saltos e fluxos.

Por construção, a seguinte desigualdade é diretamente obtida de (52)

$$|e(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, +\infty). \quad (54)$$

Utilizando o controlador proposto, se o chaveamento da função de monitoração cessa, o conjunto residual em torno do valor de  $y_m$  é dependente dos valores para os quais a função de monitoração converge. De acordo com a definição dada em (51), o conjunto residual final será da ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ .

### 3.5.5 Análise de Estabilidade

De acordo com (34), o controlador (41) deve ser escalonado para ser aplicado ao sistema original (24)–(26). Neste caso, a função de modulação  $\rho$  deve satisfazer a desigualdade (48).

O teorema a seguir apresenta uma possível implementação da função de modulação tal que (48) seja verificada e o controlador por realimentação de saída proposto baseado em função de monitoração faça com que a saída  $y(t)$  rastreie o modelo de referência  $y_m(t)$  com um erro pequeno. A amplitude das oscilações do erro de  $y$  em torno de  $y_m$  são mantidas na ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ .

*Teorema 1:* Considere o sistema (24)–(26), o modelo de referência (28), a função de monitoração (51)–(52) e a lei de controle (41). Assuma que **(H1)**–**(H3)** sejam válidas e que a função de modulação  $\rho$  em (41) é dada por

$$\rho(t) = \frac{\mu}{\underline{k}_{DC}} [a_m |y_m(t)| + k_m |r_m(t)| + \lambda_m |e(t)|] + \mu \delta, \quad (55)$$

para  $\mu > 0$  suficientemente pequeno,  $\delta > 0$  sendo uma constante arbitrária qualquer e  $\underline{k}_{DC} > 0$  definida em **(H3)**. Então: **(a)** A função de monitoração fará um número finito de chaveamentos na direção do sinal de controle até que esta seja corretamente estimada; **(b)** A saída  $y(t)$  tende globalmente para uma vizinhança pequena de  $y_m$  da ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ .

*Prova:* A prova é contruída por contradição. Considera-se 2 casos:  $|e(t)| > \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  e  $|e(t)| \leq \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . Enquanto  $|e(t)| > \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , suponhamos por contradição que  $u$  dado por (41) realiza chaveamentos sem parar,  $\forall t \in [0, +\infty)$ . Então o termo  $a(k)e^{-t/a(k)}$  em (51) aumentará ilimitadamente à medida que  $k \rightarrow +\infty$ . Assim, há um valor finito  $\kappa > 0$  tal que para  $k \geq \kappa$ : **(i)** o termo  $\pi_e(t) < a(\kappa)e^{-t/a(\kappa)}$  com  $\pi_e(t)$  em (50) e **(ii)** a direção de controle estará correta. A partir do item **(i)**, conclui-se que  $\varphi_m(t) > \zeta(t)$ ,  $\forall t \in [t_\kappa, t_{\kappa+1})$ , com  $\zeta$  em (50). De **(ii)**  $\zeta$  é um limitante superior válido para  $|e|$ . Consequentemente, nenhum chaveamento irá ocorrer após  $t = t_\kappa$ , i.e.,  $t_{\kappa+1} = +\infty$  - veja (53) - o que nos leva a uma contradição. Portanto,  $\varphi_m$  deve parar o chaveamento após algum valor finito  $k = N$  e  $t_N \in [0, +\infty)$ , sempre que  $|e(t)| > \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . Assim sendo, de (51), (52) e (54), conclui-se que

$$|e(t)| \leq |e(t_N)|e^{-\lambda_m(t-t_N)} + a(N)e^{-t/a(N)} + \mathcal{O}(\sqrt{\mu}),$$



i.e., o erro de rastreamento  $e(t)$  converge para um conjunto residual da ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ . Lembrando que no caso complementar já temos  $|e(t)| \leq \mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , nos resta mostrar que o erro  $e(t)$  finalmente entra na vizinhança da ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  com a direção de controle correta, i.e., com o valor correto de  $\text{sgn}(k_{DC})$ .

A seguir, segue mais uma (e última!) contradição. Suponha que terminamos com a estimação incorreta da direção de controle. Então, a equação para  $e$  pode ser escrita na escala de tempo  $\tau = \frac{1}{\mu}t$  com  $e' = -\mu\lambda_m e + |k_{DC}|[\rho \text{sgn}(e) + \mu d_e]$ , onde  $e' := \frac{de}{d\tau}$ . Neste caso, se  $\rho$  for definido como em (55), existe  $t_d > 0$  tal que  $ee' > 0, \forall t > t_d$ . Portanto,  $e$  iria divergir na medida que  $t \rightarrow +\infty$  para todas as condições iniciais, i.e.,  $e(t)$  não iria permanecer dentro do conjunto residual, gerando uma contradição. Assim sendo  $\text{sgn}(k_{DC})$  deve ser corretamente estimado em  $k = N$ . Então, podemos concluir que  $e(t)$  sempre tende globalmente a um conjunto residual da ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , na medida que  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

*Observação:* Uma vez que o projeto do controlador é desenvolvido baseado na escala de tempo lenta  $\tau = \mu t$ , é natural que os parâmetros  $a_m$  e  $k_m$  do modelo de referência (28), assim como a constante  $\lambda_m > 0$  em (43) usada na função de monitoração (51)–(52) devam ser escalonados apropriadamente como  $\mu a_m$ ,  $\mu k_m$  e  $\mu \lambda_m$ .

### 3.6 Resultados de Simulação

Para comprovação das técnicas apresentadas neste capítulo, foram realizadas simulações a partir de exemplos acadêmicos, onde a lei de controle apresentada em (41) em conjunto com a função de modulação em (55), satisfazendo (48), é aplicada sistemas de fase não-mínima.

As simulações foram realizadas utilizando o software MATLAB e sua ferramenta Simulink. O método de integração utilizado foi o ode1 (Euler) e foi utilizado um passo fixo de integração 0,001s.

### 3.6.1 Exemplo 1

Considere o sistema abaixo descrito por

$$\dot{v} = u \quad (56)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (57)$$

$$y = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \end{bmatrix} x, \quad (58)$$

cuja função de transferência de  $v$  para  $y$  com  $K_{DC} = -0,5$  é dada por

$$G(s) = \frac{s - 0,5}{s^2 + s + 1}. \quad (59)$$

Duas simulações do sistema (56)–(58) foram realizadas e com objetivo de comparar a resposta do sistema a diferentes valores de  $\mu$ , considerou-se  $\mu = 0,01$  e  $\mu = 0,001$ . Os demais parâmetros foram mantidos iguais em ambas as simulações. O sinal de referência  $y_m$  em ambas as simulações foi escolhido como em (28) com  $k_m = 0,5\mu$ ,  $a_m = \mu$  e  $r_m(t) = 2 \sin(0,0016t)$ . O sinal  $y_m$  é limitado, portanto o erro  $e(t)$  é mantido uniformemente limitado. Os parâmetros da função de monitoração são  $\lambda_m = \mu$ ,  $r = k\sqrt{\mu}$  e  $a(k) = k + 1$ . A lei de controle (41) é aplicada com a função de modulação (55) satisfazendo (48).

A seguir, serão apresentados os resultados das simulações considerando-se os dois valores distintos para  $\mu$ .

### 3.6.2 Resultados de Simulação com $\mu = 0,001$

Sob as condições acima descritas e iniciando a simulação com a estimação da direção de controle positiva, a saída da planta  $y(t)$  rastreia o modelo de referência  $y_m(t)$ , conforme ilustrado na Figura 12. Podemos observar a partir da Figura 13 que o erro de rastreamento  $e(t)$  permanece na ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  após a saída  $y(t)$  alcançar o modelo de referência. Assim, quanto menor o valor de  $\mu$ , menor será o valor do erro. O preço a se pagar é que ao se diminuir o valor de  $\mu$ , torna-se mais lenta a resposta do sistema à ação de controle.

A partir da Figura 14, podemos notar uma característica marcante dos sistemas de fase não-mínima - um *undershoot* no sinal da saída da planta. No início da simulação,

temos  $y(t) = -0,5$  e  $y_m(t) = 0$ . Assim, para a saída alcançar a trajetória de rastreamento, é necessário que o sinal de controle faça com que este sinal cresça, até alcançar a superfície de rastreamento. No entanto, o que podemos observar é que  $y(t)$  decresce, indicando que no início da simulação a direção do sinal de controle é a incorreta.

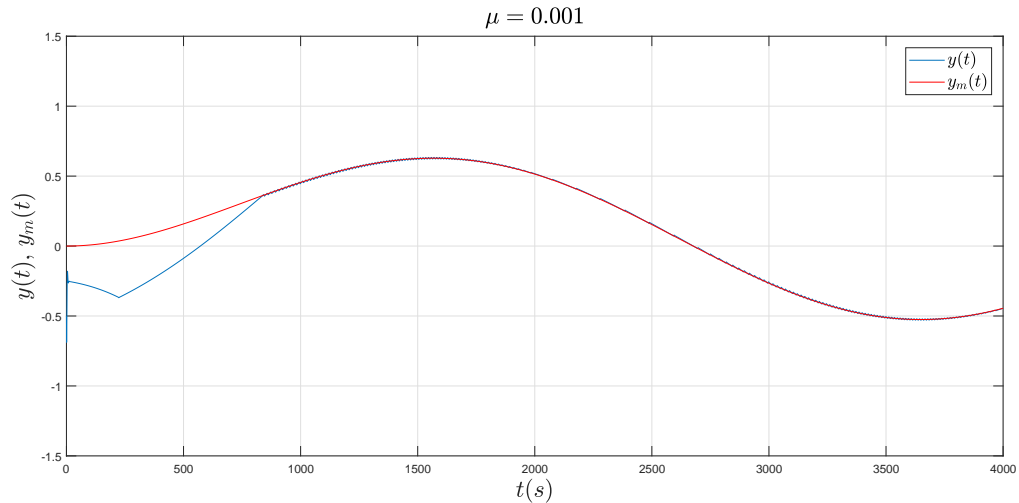


Figura 12 - Saída  $y(t)$  seguindo a referência  $y_m(t)$ , com  $\mu = 0,001$ .

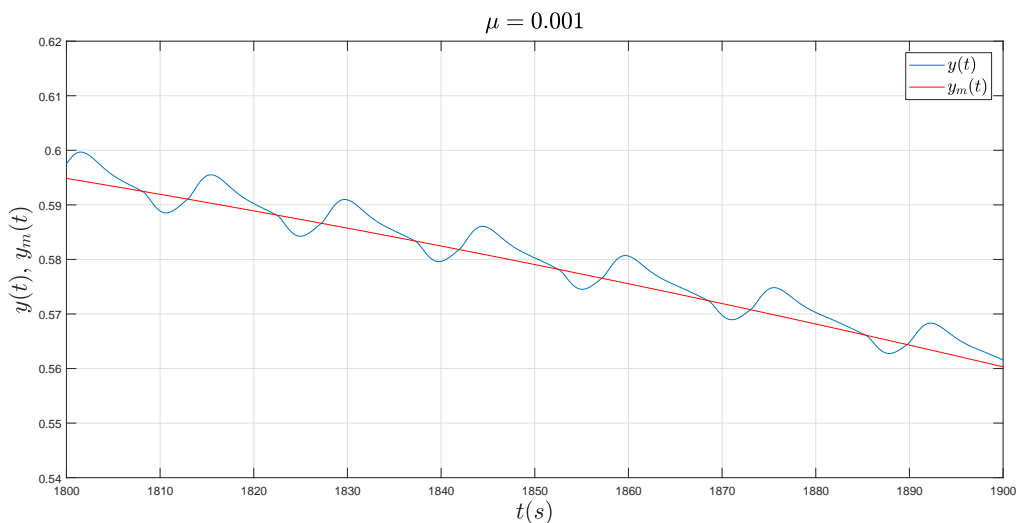


Figura 13 - Detalhe da Figura 12. Podemos notar que o erro de rastreamento  $e(t)$  se mantém na ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ .

A ação do integrador acoplado à entrada da planta torna o sinal de controle  $u(t)$  suave, conforme visto na Figura 15 e na Figura 16. Assim, a aplicação do sinal  $v(t)$  atenua os efeitos do *chattering* na planta.

A Figura 17 ilustra o comportamento da função de monitoração ao longo do período de simulação. A Figura 18 nos traz o comportamento da função de monitoração durante

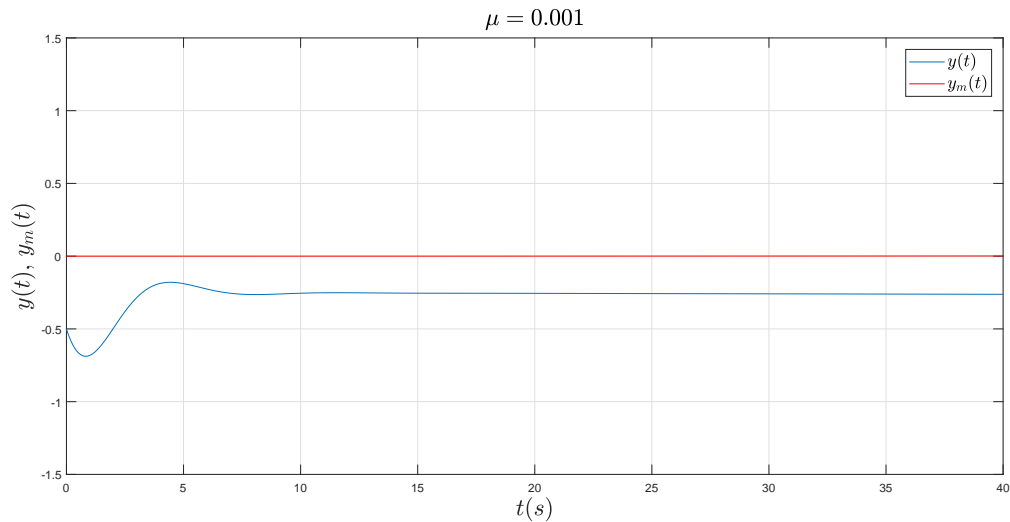


Figura 14 - *Undershoot* no sinal de saída da planta - característica marcante dos sistemas de fase não-mínima.

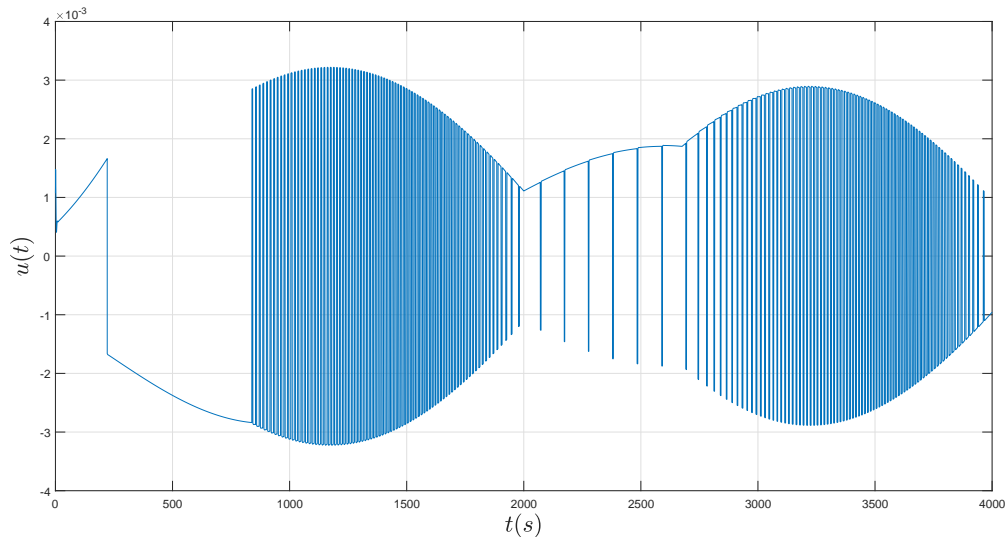


Figura 15 - Entrada de controle  $u(t)$ , com  $\mu = 0,001$ .

os 20 primeiros segundos da simulação e deixa claro que o primeiro chaveamento na direção de controle ocorre apenas após o instante de tempo  $t = 200s$ . Nesta simulação, foi necessário apenas um chaveamento para se encontrar a direção de controle correta. Após o chaveamento,  $|e(t)|$  diminui até alcançar valores da ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , conforme esperado.

Já a Figura 19 nos traz o chaveamento da direção de controle. Note que a direção de controle foi inicializada com um valor positivo, ou seja,  $\text{sgn}(k_{DC}) = 1$ . Note que o papel da função de monitoração é realizar o chaveamento na direção de controle até que esta seja a correta e, portanto, quando a direção de controle assumiu o seu valor correto,

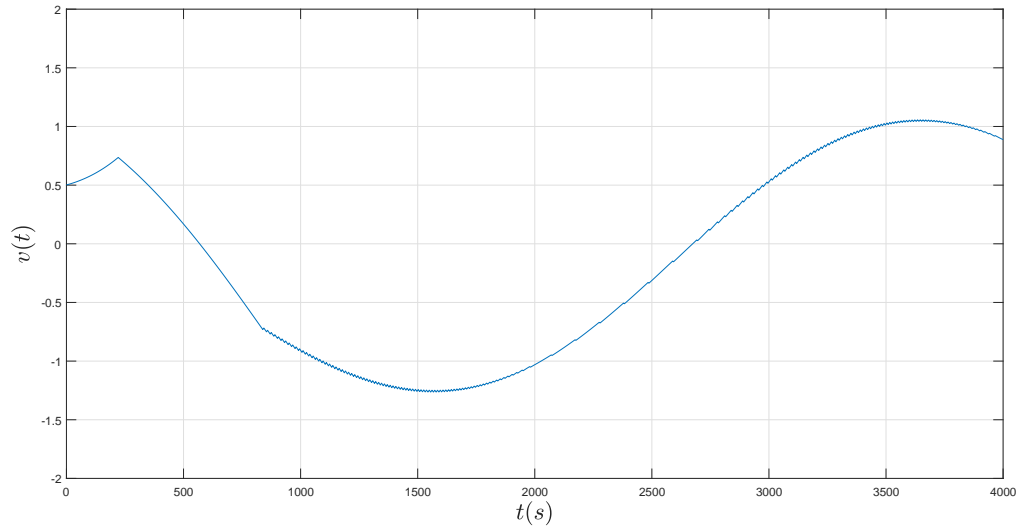


Figura 16 - Entrada de controle  $v(t)$ , com  $\mu = 0,001$ .

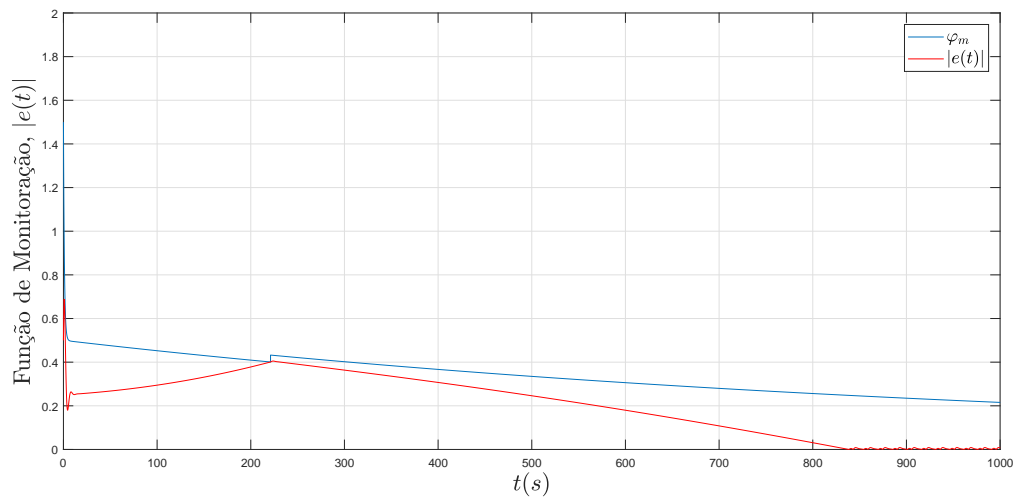


Figura 17 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$ , com  $\mu = 0,001$ .

com  $\text{sgn}(k_{DC}) = -1$ , a função de monitoração não realizou mais nenhum chaveamento.

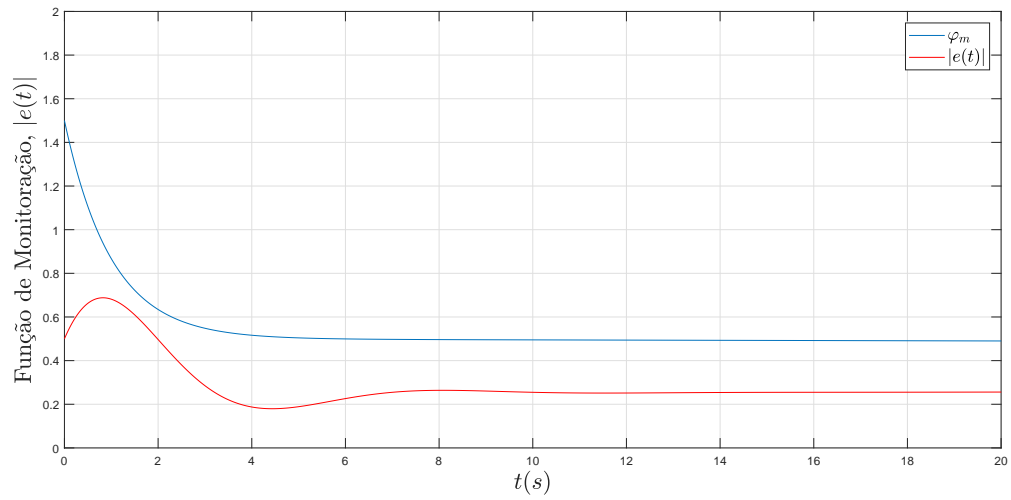


Figura 18 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$ , com  $\mu = 0,001$ .

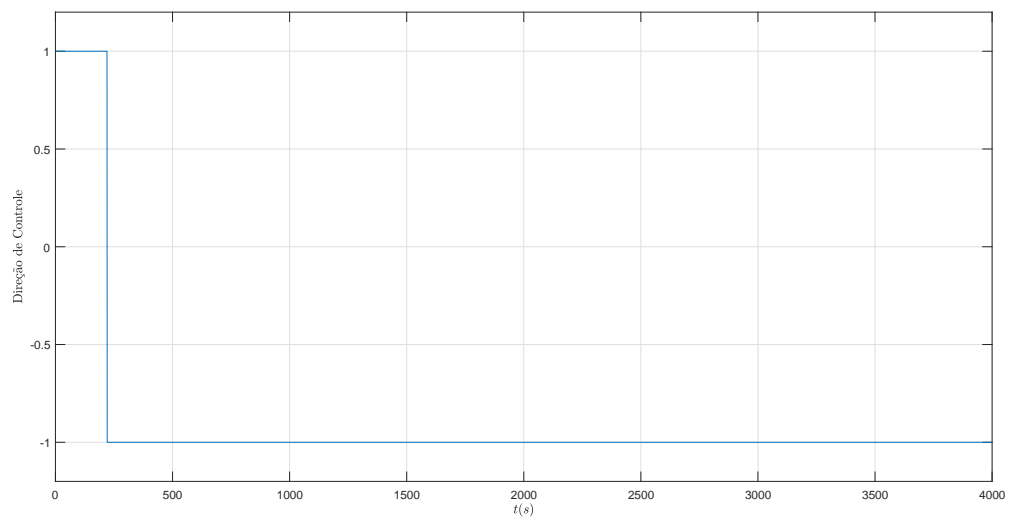


Figura 19 - Chaveamento da direção de controle com  $\mu = 0,001$ .

✠ Inicialização com  $\text{sgn}(k_{DC}) = -1$

Os resultados a seguir são referentes a simulação do comportamento do sistema utilizando os mesmos parâmetros e condições iniciais da simulação anterior, com exceção da inicialização da estimação do sinal do ganho DC do sistema. Aqui, inicializou-se este parâmetro como sendo negativo, ou seja, com a direção de controle correta.

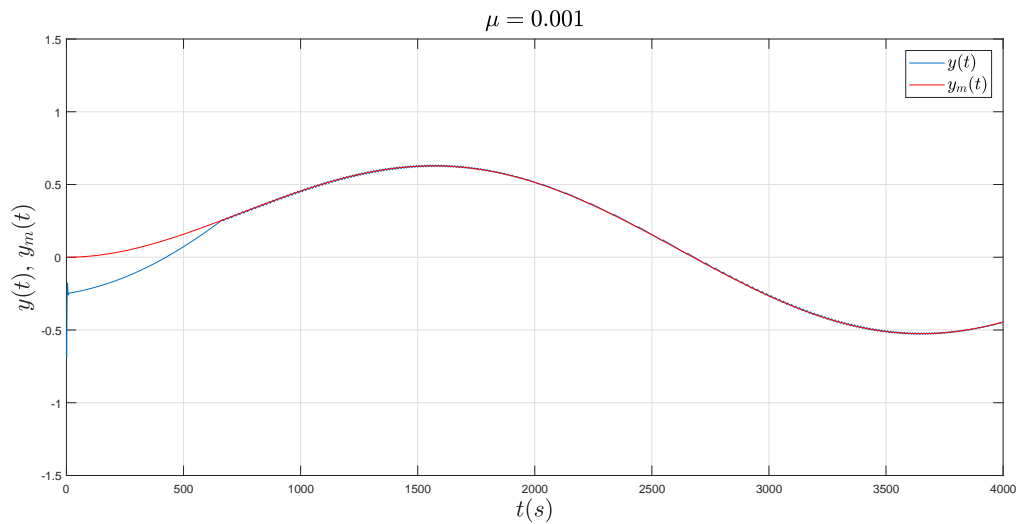


Figura 20 - Saída  $y(t)$  seguindo a referência  $y_m(t)$ , com  $\mu = 0,001$ .

Note a partir da Figura 20 que o sistema se comporta de maneira semelhante condição anterior. A saída  $y(t)$  rastreia o modelo de referência  $y_m(t)$ , e o erro de rastreamento  $e(t)$  permanece na ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$  após a saída  $y(t)$  alcançar o modelo de referência.

Como a direção de controle foi inicializada com o valor correto ( $\text{sgn}(k_{DC}) = -1$ ), a função monitoração não precisou realizar nenhum chaveamento - veja a Figura 21 e a Figura 22.

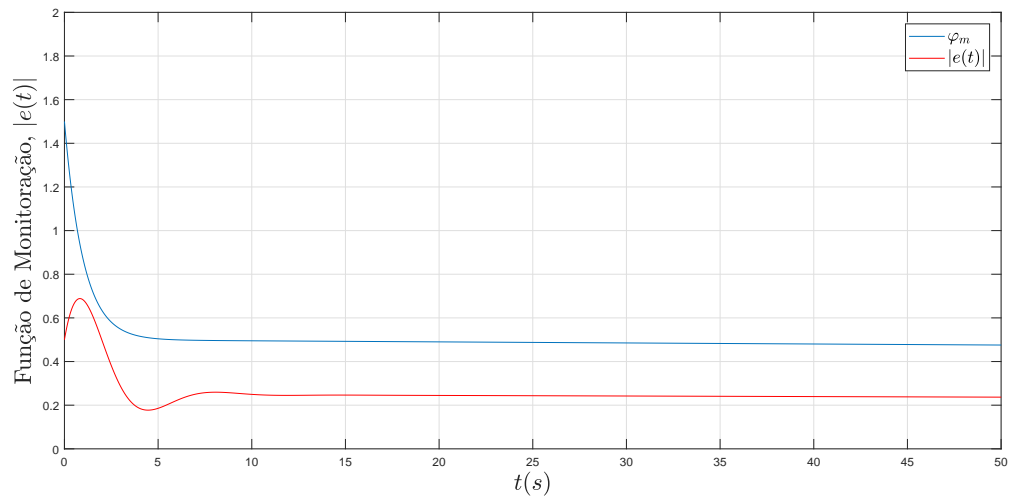


Figura 21 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$ , com  $\mu = 0,001$ .

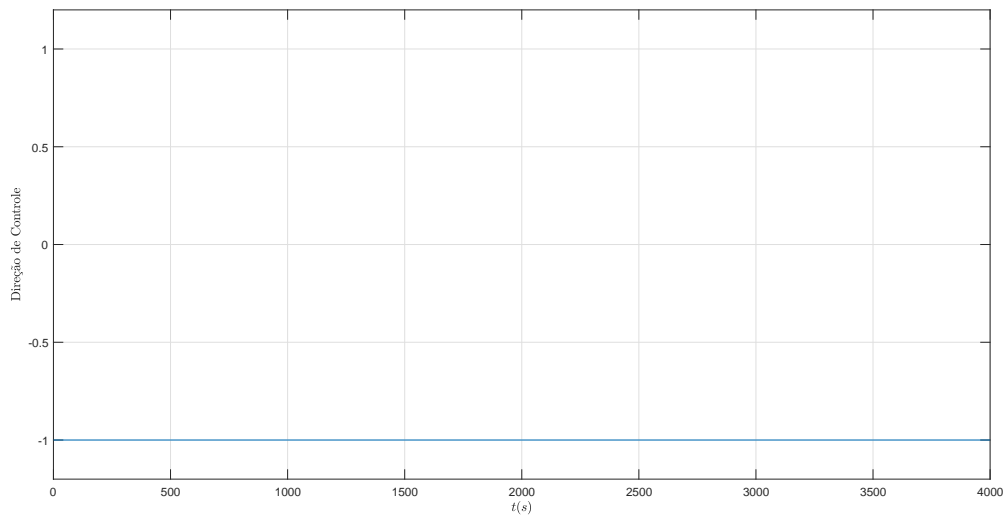


Figura 22 - Direção de controle, com  $\mu = 0,001$ . A função de monitoração não realizou nenhum chaveamento.



### 3.6.3 Resultados de Simulação com $\mu = 0,01$

Nesta seção, serão apresentados os resultados de simulação para  $\mu = 0,01$ . Com exceção a este, todos os outros parâmetros foram mantidos idênticos aos utilizados na simulação apresentada na seção anterior, assim como as condições iniciais da simulação.

A saída da planta  $y(t)$  rastreia o modelo de referência  $y_m(t)$  assim como na simulação anterior, conforme ilustrado na Figura 23. Porém, podemos observar a partir da Figura 24 que o erro de rastreamento  $|e(t)|$ , que permanece na ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , atinge valores maiores do que os alcançados na simulação anterior. Em compensação, a saída  $y(t)$  alcança o modelo de referência em um tempo menor do que o da simulação anterior.

Assim, quanto menor o valor de  $\mu$ , menor será o valor do erro. O preço a se pagar é que ao se diminuir o valor de  $\mu$ , torna-se mais lenta a resposta do sistema à ação de controle.

A Figura 25 detalha o *undershoot* presente novamente no sinal de saída do sistema.

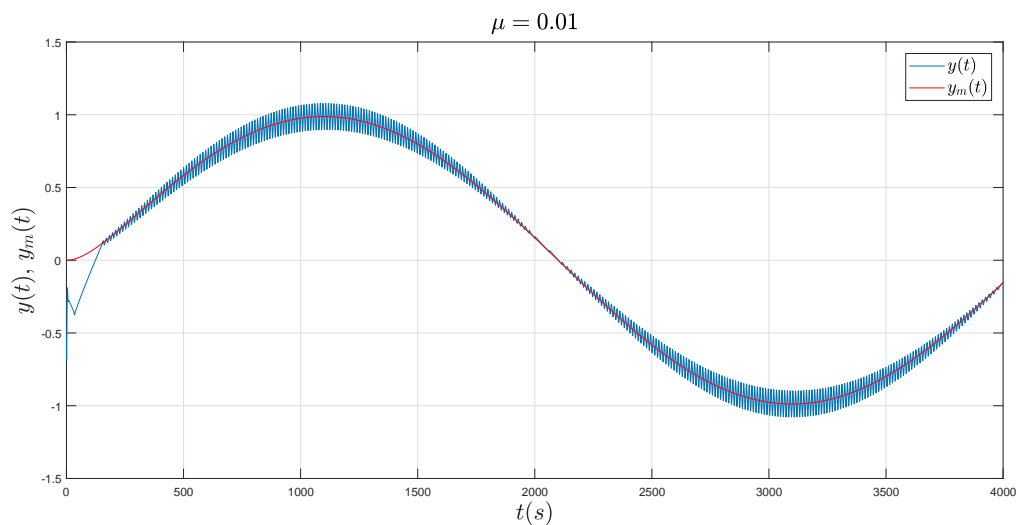


Figura 23 - Saída  $y(t)$  seguindo a referência  $y_m(t)$ , com  $\mu = 0,01$ .

A ação do integrador acoplado à entrada da planta torna o sinal de controle  $u(t)$  suave, conforme visto na Figura 26 e na Figura 27. Assim, a aplicação do sinal  $v(t)$  atenua os efeitos do *chattering* na planta.

A Figura 28 ilustra o comportamento da função de monitoração ao longo do período de simulação. A Figura 29 nos traz o comportamento da função de monitoração durante os 20 primeiros segundos da simulação e deixa claro que só ocorre um chaveamento na direção de controle. Nesta simulação, foi necessário apenas um chaveamento para se

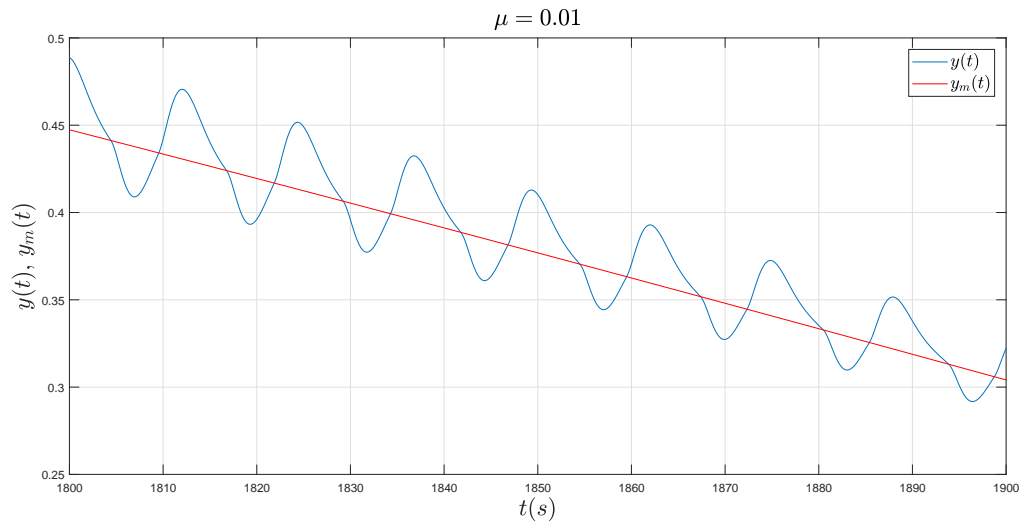


Figura 24 - Detalhe da Figura 12. Podemos notar que o erro de rastreamento  $e(t)$  se mantém na ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ .

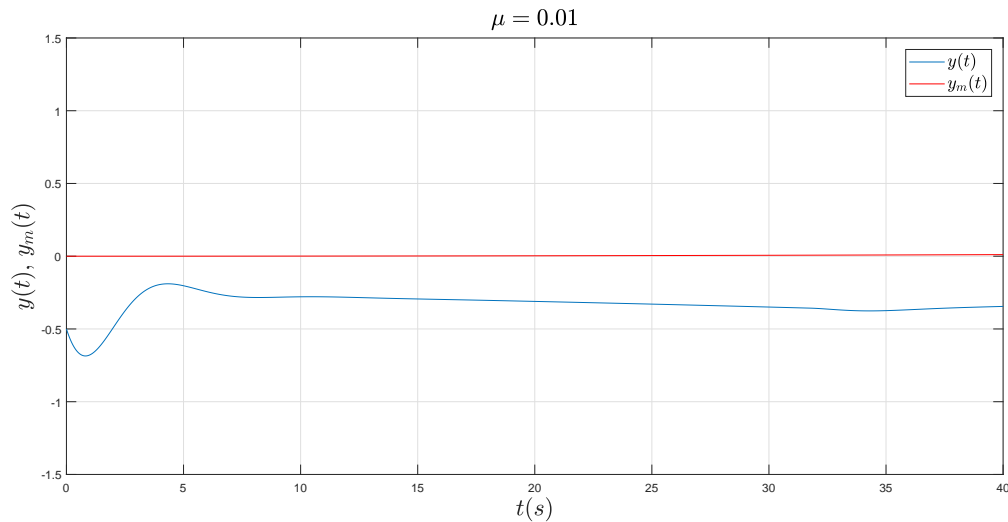


Figura 25 - *Undershoot* no sinal de saída da planta - característica marcante dos sistemas de fase não-mínima.

encontrar a direção de controle correta. Após o chaveamento,  $|e(t)|$  diminui até alcançar valores da ordem de  $\mathcal{O}(\sqrt{\mu})$ , conforme esperado.

Já a Figura 30 nos traz o chaveamento da direção de controle. Note que a direção de controle foi inicializada com um valor positivo, ou seja,  $\text{sgn}(k_{DC}) = 1$ . Note que o papel da função de monitoração é realizar o chaveamento na direção de controle até que esta seja a correta e, portanto, quando a direção de controle assume o valor correto, com  $\text{sgn}(k_{DC}) = -1$ , a função de monitoração não realiza mais nenhum chaveamento.

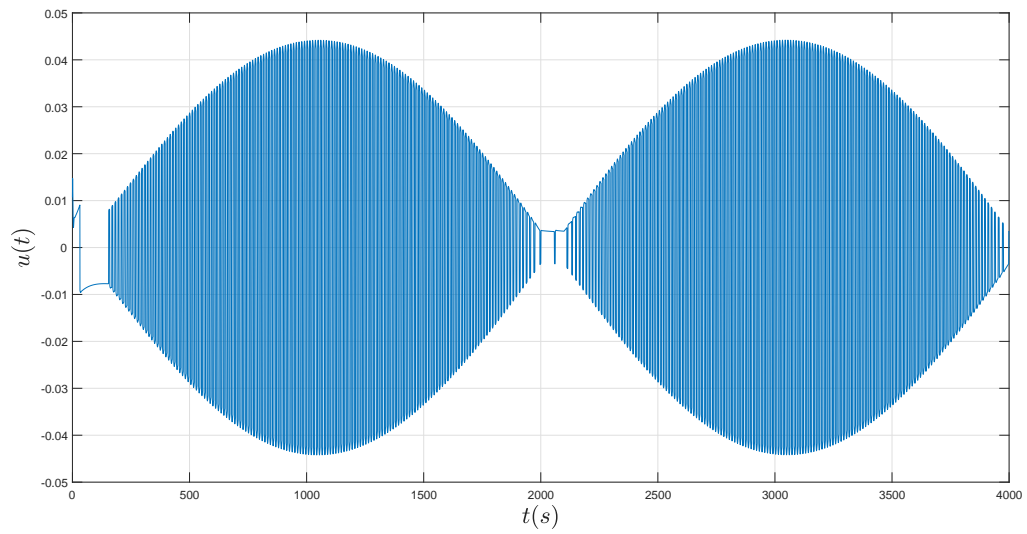


Figura 26 - Entrada de controle  $u(t)$ , com  $\mu = 0,01$ .

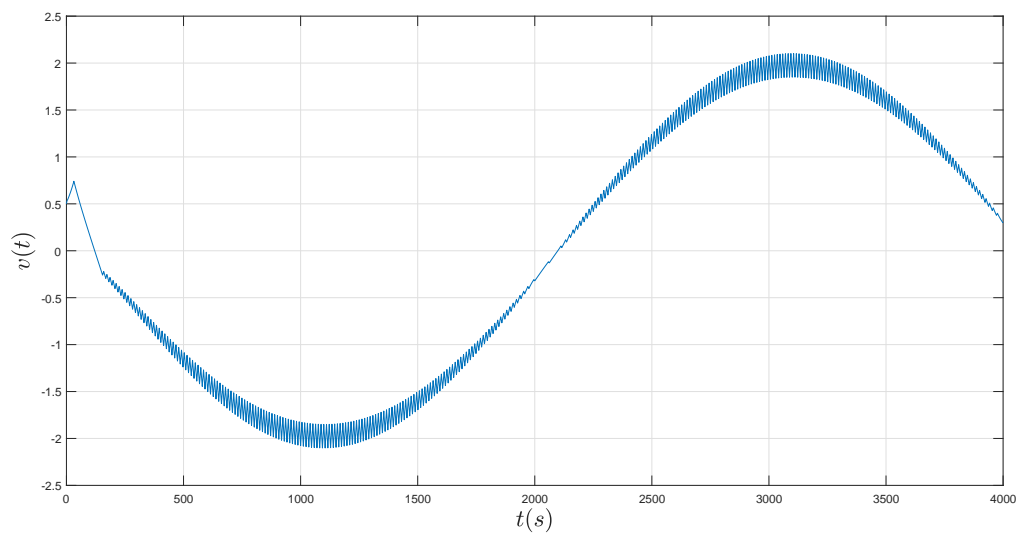


Figura 27 - Entrada de controle  $v(t)$ , com  $\mu = 0,01$ .

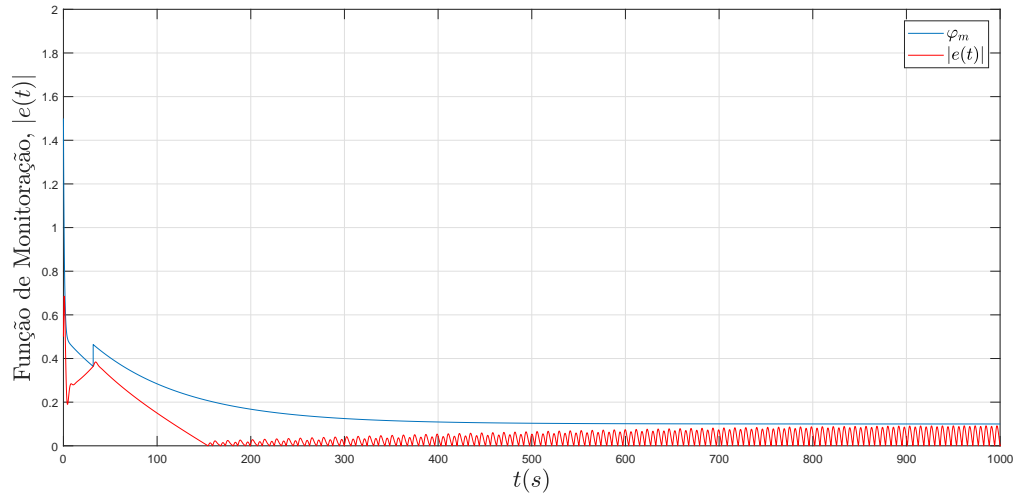


Figura 28 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$ , com  $\mu = 0,01$ .

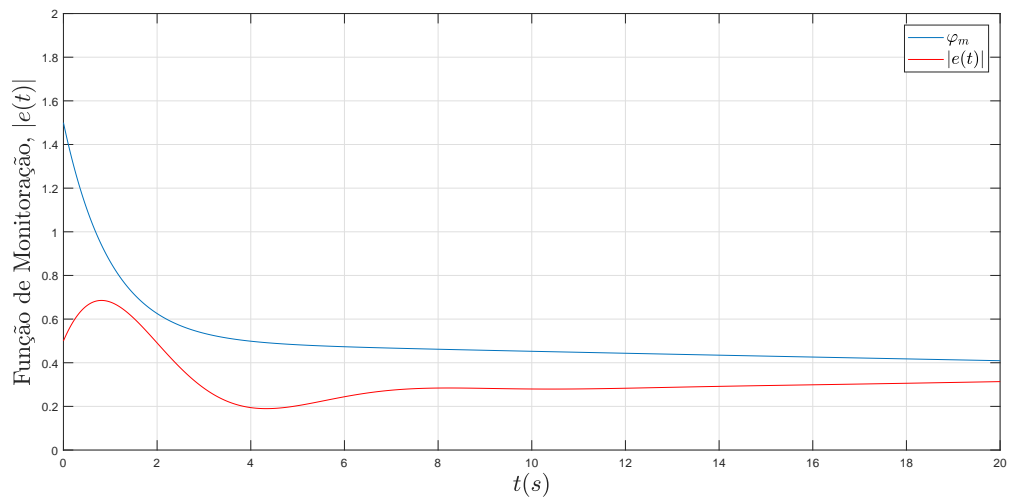


Figura 29 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$ , com  $\mu = 0,01$ .

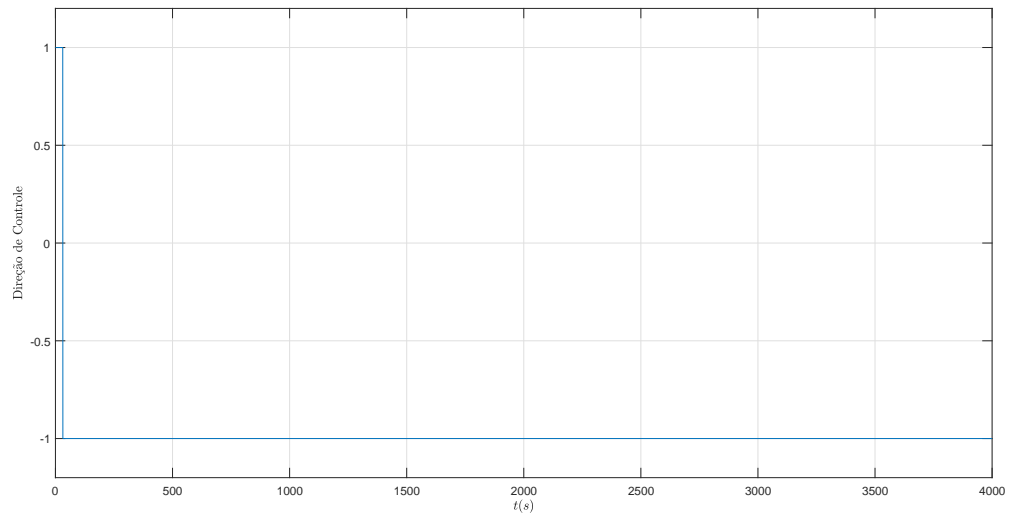


Figura 30 - Chaveamento da direção de controle com  $\mu = 0,01$ .

### 3.6.4 Exemplo 2

Considere o sistema abaixo descrito por

$$\dot{v} = u \quad (60)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -40 & -10000 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (61)$$

$$y = \begin{bmatrix} 10000 & -5000 \end{bmatrix} x, \quad (62)$$

cuja função de transferência de  $v$  para  $y$  com  $K_{DC} = -5$  é dada por

$$G(s) = \frac{1000s - 5000}{s^2 + 40s + 10000}. \quad (63)$$

Uma simulação do sistema (60)–(62) foi realizada, considerando-se  $\mu = 0,01$ . Os demais parâmetros foram mantidos iguais aos utilizados na seção 3.6.1. O sinal de referência  $y_m$  utilizado foi uma onda quadrada filtrada, diferentemente da referência escolhida na seção 3.6.1. Os parâmetros da função de monitoração são  $\lambda_m = \mu$ ,  $r = k\sqrt{\mu}$  e  $a(k) = k+1$ . A lei de controle (41) é aplicada com a função de modulação (55) satisfazendo (48).

Neste exemplo, assim como na seção 3.6.1, a resposta do sistema ao controlador é lenta, devido a utilização do escalonamento temporal. O modelo de referência é uma onda quadrada filtrada e sempre que há a transição entre seus picos, o sistema leva um tempo até que sua saída realize novamente o rastreamento, como mostra a Figura 31. Nos instantes iniciais da simulação, a saída do sistema apresentou valores transitórios elevados, como mostra a Figura 32.

A curiosidade neste exemplo é que, diferentemente do exemplo anterior, função de monitoração precisou realizar mais de 1 chaveamento até estimar corretamente o  $\text{sgn}(k_{DC})$ , como podemos observar na Figura 33 e na Figura 34.

A Figura 35 apresenta o chaveamento da direção de controle. Note pela Figura 36 que a direção de controle foi inicializada com um valor negativo, ou seja,  $\text{sgn}(k_{DC}) = -1$ , que de fato é o valor correto de  $\text{sgn}(k_{DC})$ . Porém, devido ao regime transitório inicial, 6 chaveamentos foram necessários ( $k = 6$ ) para a função de monitoração estimar corretamente a direção de controle ( $\text{sgn}(k_{DC}) = -1$ ). No instante  $t = 2000$ , há um salto

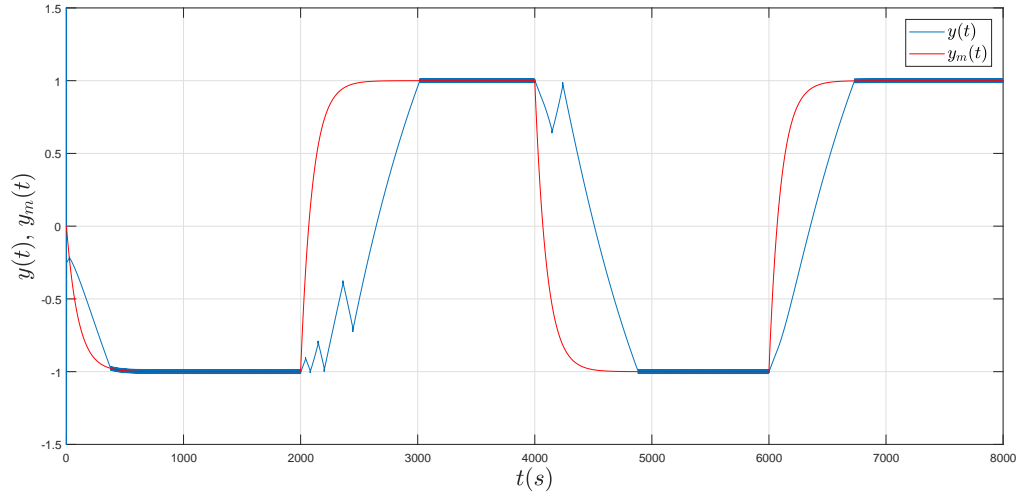


Figura 31 - A saída  $y(t)$  seguindo a referência  $y_m(t)$ .

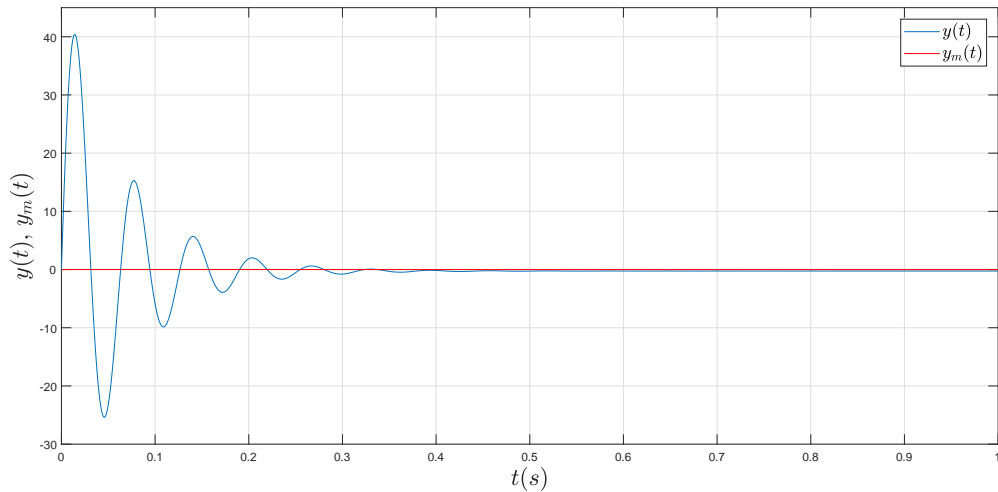


Figura 32 - O regime transitório da saída  $y(t)$ .

no modelo de referência  $y_m$ , e conseqüentemente  $|e| > \varphi_k$ , para  $k = 6$ . Assim, a função de monitoração realiza mais alguns chaveamentos até que em  $k = 12$ , ou seja, no décimo segundo chaveamento,  $\text{sgn}(k_{DC})$  é estimado corretamente novamente.

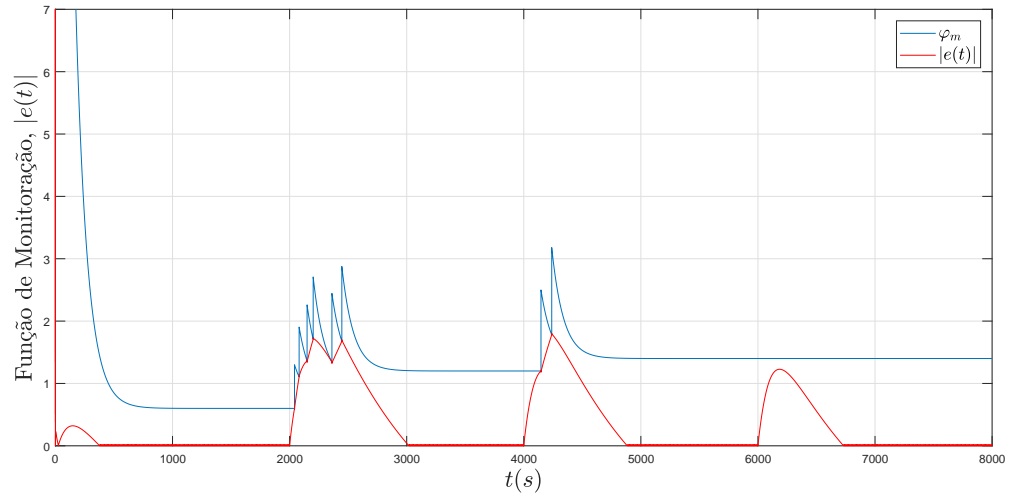


Figura 33 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$

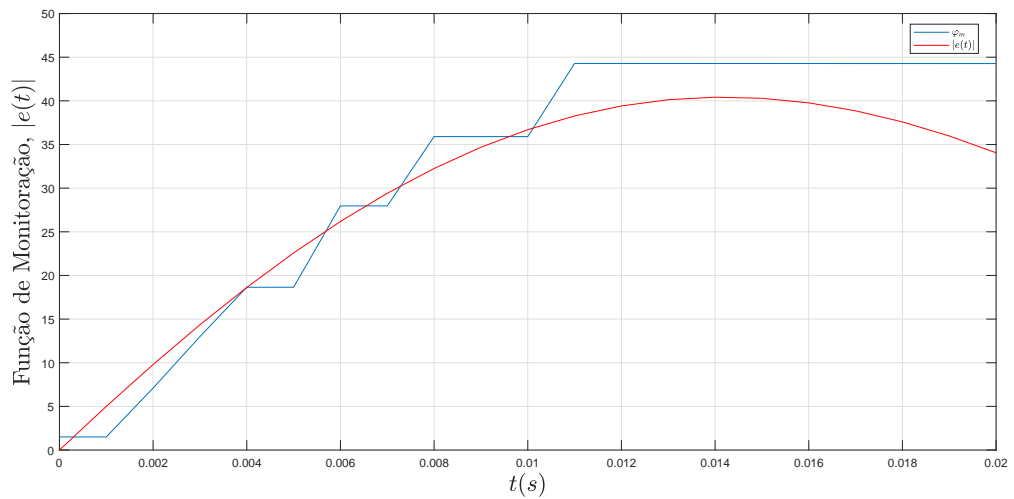


Figura 34 - Função de monitoração  $\varphi_m(t)$  e o módulo do erro  $|e(t)|$



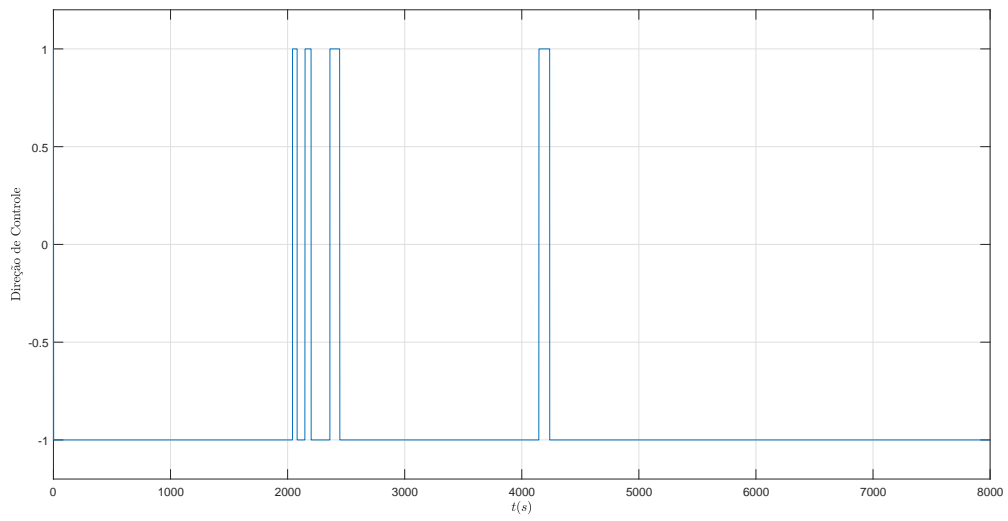


Figura 35 - Chaveamento da direção de controle.

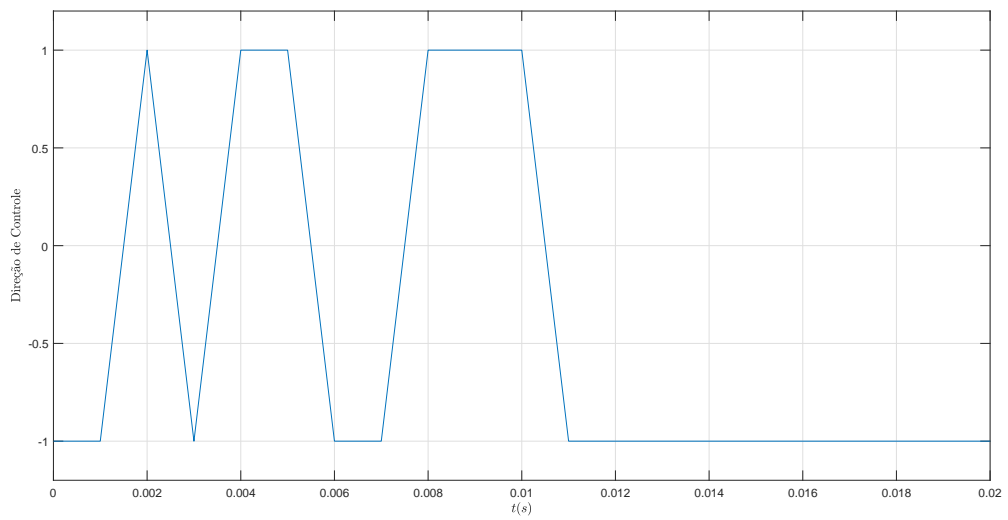


Figura 36 - Chaveamento da direção de controle.

### 3.7 Conclusões

Este capítulo apresentou um controlador por modos deslizantes para o problema de rastreamento de trajetória de sistemas incertos de fase não-mínima.

Abaixo, seguem as conclusões acerca deste capítulo:

- ✠ A releitura dos zeros de fase não-mínima como um problema de direção de controle desconhecida foi bem sucedida.
- ✠ A combinação da técnica de escalonamento temporal associada com uma função de monitoração apropriadamente projetada garante a estabilidade global e assintótica do sistema em malha fechada e a convergência do erro de rastreamento para um conjunto residual arbitrariamente pequeno.
- ✠ A estratégia de controle desenvolvida foi testada através de simulações numéricas a partir de exemplos acadêmicos, tendo apresentado resultados satisfatórios.
- ✠ Apesar do problema proposto neste capítulo apresentar um sistema incerto e de fase não-mínima, a estratégia de controle utilizou apenas realimentação de saída, o que a torna bastante relevante para a literatura.

## 4 CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES ATRAVÉS DE MÚLTIPLOS OBSERVADORES

Neste capítulo, a técnica de controle por modos deslizantes será aplicada em conjunto com um sistema de múltiplos observadores, com o objetivo de estabilizar uma planta de fase não-mínima. Diferentemente do problema apresentado no capítulo 3, aqui admite-se o conhecimento de alguns parâmetros da planta. A indisponibilidade da medição dos estados do sistema permanece, adicionando uma maior dificuldade no projeto do controlador.

Para atingir realizar a tarefa descrita acima, foram desenvolvidos 3 estimadores (veja a Figura 37):

- ✘ um observador de ordem reduzida, cuja tarefa é estimar o valor dos estados não-medidos da dinâmica interna da planta;
- ✘ um estimador das incertezas paramétricas e perturbações (entrada desconhecida);
- ✘ um observador de alto ganho para a saída medida da planta, ferramenta necessária para a implementação do estimador acima.

Através deste esquema de múltiplos observadores, iremos projetar uma lei de controle baseada em modos deslizantes que garanta estabilidade global e assintótica para a planta, mesmo que esta seja de fase não-mínima e admita incertezas paramétricas na dinâmica externa, utilizando apenas realimentação de saída. A estratégia de controle desenvolvida será testada através de simulações numéricas a partir de exemplos acadêmicos.

### 4.1 Descrição do Problema

Considere o seguinte sistema com grau relativo  $n^* = 1$

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t)] \quad (64)$$

$$y = Cx, \quad (65)$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $d(t)$  é uma perturbação não medida da planta,  $x \in \mathbb{R}^n$

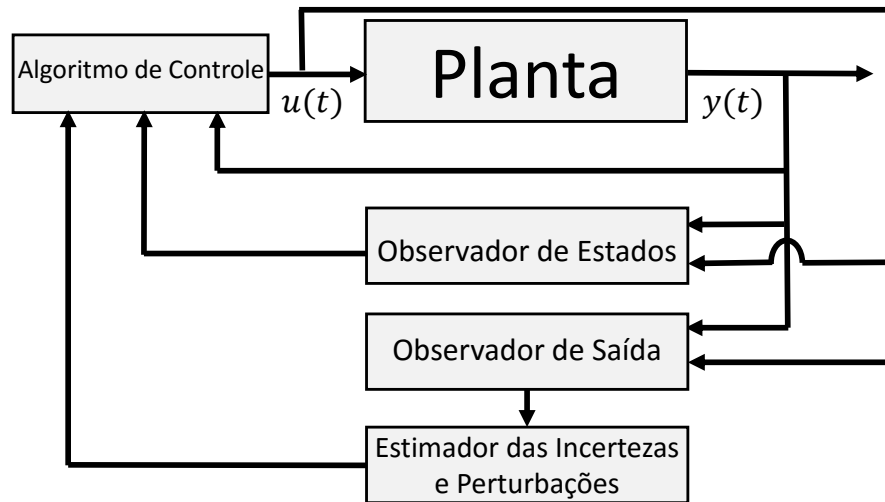


Figura 37 - Diagrama de blocos representando a realimentação de saída com esquema de múltiplos observadores.

é o vetor de estados e  $y \in \mathbb{R}$  é a saída medida do sistema (64) – (65). As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  são conhecidas.

Este sistema pode ser reescrito na Forma Normal apresentada por Khalil em [3, p. 517] aplicando-se uma transformação  $T$ , descrita por

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = Tx, \quad (66)$$

com  $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Assim, o sistema (64)–(65) pode ser representado por

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0y \quad (67)$$

$$\dot{y} = A_1\eta + B_1y + k_p[u + d(t)], \quad (68)$$

onde matrizes  $A_0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$ ,  $B_0 \in \mathbb{R}^{(n-1)}$  e  $B_1 \in \mathbb{R}$  são conhecidas. O parâmetro  $k_p$  representa o ganho de alta frequência da planta, e também é conhecido.

A representação na forma normal decompõe o sistema através de uma dinâmica interna ( $\eta$ ) e uma dinâmica externa ( $y$ ). Fazendo  $y = 0$  em (67), segue que

$$\dot{\eta} = A_0\eta, \quad (69)$$

onde esta equação é chamada de *dinâmica dos zeros* e os autovalores da matriz  $A_0$  são os zeros da função de transferência da planta (64)–(65).

Abaixo, seguem as hipóteses **(H4)** e **(H5)**, relativas ao sistema (67)–(68):

**(H4)** (*Sobre a fase não-mínima*): A matriz  $A_0$  em (67) não é Hurwitz.

**(H5)** (*Sobre a perturbação*): A perturbação  $d(t)$  é uniformemente limitada.

O sinal de controle  $u$  deverá ser projetado de maneira que a planta seja estabilizada, ou seja:

$$Tx(t) = \begin{bmatrix} \eta(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \rightarrow 0, \quad (70)$$

com  $t \rightarrow \infty$ .

#### 4.1.1 Estabilização com Parâmetros Conhecidos

Primeiramente, uma variável de controle auxiliar  $s$  é definida como [39]

$$s := y - K\eta, \quad (71)$$

com  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n-1}$ . Consequentemente, temos que sua derivada temporal é dada por

$$\dot{s} = A_1\eta + B_1y + k_p[u + d(t)] - KA_0\eta - KB_0y. \quad (72)$$

Em seguida, se a lei de controle por modos deslizantes  $u$  for projetada como [30]

$$u = -\operatorname{sgn}(k_p)\rho \operatorname{sgn}(s), \quad (73)$$

onde  $\rho$  é uma função de modulação definida como

$$\rho \geq \frac{1}{k_{min}} [\|A_1\|\|\eta\| + \|B_1\|\|y\| + \|KA_0\|\|\eta\| + \|KB_0\|\|y\|] + |d(t)| + c, \quad (74)$$

com  $k_{min} \in (0, |k_p|]$  e  $c > 0$  um parâmetro de projeto escolhido para ser arbitrariamente pequeno, temos que  $s \rightarrow 0$  em tempo finito e consequentemente  $y \rightarrow K\eta$ . Assim, podemos reescrever (67) como

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0K\eta = (A_0 + B_0K)\eta. \quad (75)$$

Então, se  $K$  for projetado de modo que  $(A_0 + B_0K)$  seja Hurwitz,  $\eta \rightarrow 0$  exponencialmente e portanto  $y \rightarrow 0$ .

## 4.2 Estabilização com Parâmetros Desconhecidos e Estados não Mensuráveis

Nesta dissertação, consideramos que  $\eta$  em (67)–(68) não pode ser medido. Além disto, a partir deste ponto, iremos considerar também que a planta possui incertezas paramétricas e perturbações (não medidas). Assim, torna-se necessário a estimação destas incertezas por meio de algoritmos observadores para que a lei de controle proposta em (73) e (74) possa ser aplicada. A partir destes algoritmos observadores, detalhados nas seções a seguir, podemos implementar a lei de controle proposta para a solução do problema apresentado neste trabalho.

### 4.2.1 Estimação das Incertezas Paramétricas e Perturbações Externas

Seja a planta

$$\dot{\eta} = A_0\eta + B_0y \quad (76)$$

$$\dot{y} = A_1\eta + B_1y + k_p[u + d(t)]. \quad (77)$$

Diferentemente de  $\dot{y}$  (68), a partir deste ponto temos que  $A_1 = \bar{A}_1 + \Delta_{A_1}$  e  $B_1 = \bar{B}_1 + \Delta_{B_1}$ , onde as matrizes  $\bar{A}_1$  e  $\bar{B}_1$  são conhecidas e  $\Delta_{A_1}$  e  $\Delta_{B_1}$  representam incertezas em torno destes parâmetros. Assim, a saída (77) pode ser reescrita como

$$\dot{y} = \bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y + k_p[u + \delta(\eta, y, t)] \quad (78)$$

onde a variável

$$\delta(\eta, y, t) = d(t) + \frac{\Delta_{A_1}\eta + \Delta_{B_1}y}{k_p} \quad (79)$$

representa as incertezas paramétricas da planta e perturbações externas.

**(H6)** (*Sobre as incertezas paramétricas*): Todos os parâmetros incertos em (77) pertencem a um conjunto compacto  $\Omega$ .

Para a estimação de  $\delta(\eta, y, t)$ , primeiramente iremos projetar um observador de alto ganho para a saída  $y$ . Mesmo sendo a saída  $y$  disponível para a medição, este estimador

será projetado exclusivamente para servir de ferramenta para a estimação das incertezas  $\delta(\eta, y, t)$ .

Este observador de alto ganho é dado por

$$\dot{\hat{y}} = \bar{A}_1 \hat{\eta} + \bar{B}_1 y + k_p u - \frac{1}{\varepsilon}(\hat{y} - y). \quad (80)$$

Em seguida, definindo-se uma variável auxiliar  $l$  como

$$l := \frac{\hat{y} - y}{\varepsilon}, \quad (81)$$

segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{l} &= \dot{\hat{y}} - \dot{y} \\ &= \bar{A}_1 \hat{\eta} + \bar{B}_1 y + k_p u - \frac{1}{\varepsilon}(\hat{y} - y) - \bar{A}_1 \eta - \bar{B}_1 y - k_p u - k_p \delta(\eta, y, t) \\ &= \bar{A}_1 \tilde{\eta} - k_p \delta(\eta, y, t) - l. \end{aligned} \quad (82)$$

Assim, admitindo-se que o ganho  $K$ , discutido na seção 4.1.1 foi projetado corretamente, temos que  $\tilde{\eta} \rightarrow 0$  exponencialmente e, sendo  $\varepsilon$  uma constante positiva suficientemente pequena, de forma que  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , então podemos estimar  $\delta$  como [40]:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(\eta, y, t) = \frac{-l(t)}{k_p} \quad (\text{caso singular } \varepsilon \rightarrow 0^+), \quad (83)$$

tal que,  $\forall \varepsilon \neq 0$ , pode ser definido um majorante para a expressão  $|k_p \delta(\eta, y, t)|$  dado por:

$$|k_p \delta(\eta, y, t)| \leq |l(t)| + \pi_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (84)$$

onde o termo  $\pi_0(t)$  denota um termo exponencialmente decrescente devido as condições iniciais do filtro (82).

Uma característica indesejada dos observadores de alto ganho é a presença do fenômeno de *peaking* [3], que consiste na presença de um sinal similar a um impulso em  $t = 0$  na estimativa de  $\delta$  (e conseqüentemente no sinal de controle  $u$  se esta estimativa for utilizada na função de modulação  $\rho$ ). Porém como a saída  $y$  pode ser medida (de fato a saída só é observada a fim de se obter uma estimativa para  $\delta$ ), pode-se definir como valor inicial de  $\hat{y}$  o mesmo valor inicial de  $y$ , ou seja,  $\hat{y}_0 = y_0$ . Esta inicialização elimina

os efeitos do *peaking* na estimação de  $\delta$  [41].

#### 4.2.2 Observador de Ordem Reduzida para os Estados da Dinâmica Interna

Considere a seguinte sistema:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \quad (85)$$

$$\bar{y} = \bar{C}\bar{x}, \quad (86)$$

com  $\bar{x} = \eta$ ,  $\bar{A} = A_0$ ,  $\bar{B}\bar{u} = B_0y$ ,  $\bar{y} = \bar{A}_1\eta = \dot{y} - \bar{B}_1y - k_p[u + \delta(\eta, y, t)]$  e  $\bar{C} = \bar{A}_1$ .

De acordo com Chen em [42], podemos desenvolver um observador tal que

$$\dot{\hat{x}} = \bar{A}\hat{x} + \bar{B}\bar{u} + L(\bar{y} - \hat{y}) \quad (87)$$

$$\hat{y} = \bar{C}\hat{x} \quad (88)$$

e conseqüentemente

$$\dot{\hat{\eta}} = A_0\hat{\eta} + B_0y + L(\bar{y} - \bar{A}_1\hat{\eta}) \quad (89)$$

$$\hat{y} = \bar{A}_1\hat{\eta}. \quad (90)$$

Sendo o erro de observação do estado  $\eta$  dado por  $\tilde{\eta} = \eta - \hat{\eta}$ , segue que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}} \\ &= A_0\eta + B_0y - A_0\hat{\eta} - B_0y - L(\bar{y} - \bar{A}_1\hat{\eta}) \\ &= A_0(\eta - \hat{\eta}) - L\bar{A}_1(\eta - \hat{\eta}) \\ &= (A_0 - L\bar{A}_1)\tilde{\eta}. \end{aligned} \quad (91)$$

Assim, se o ganho  $L$  for projetado de maneira que a matriz  $(A_0 - L\bar{A}_1)$  seja Hurwitz, então

$$\tilde{\eta} \rightarrow 0. \quad (92)$$

Embora foi mostrado que o observador (89)–(90) converge exponencialmente, este não é implementável diretamente, pois  $\bar{y} = \bar{A}_1\eta$  depende do próprio estado  $\eta$  não medido. Para



solucionar este problema, define-se uma variável auxiliar  $Z := \hat{\eta} - Ly$ , tal que

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= A_0\hat{\eta} + B_0y + L\bar{y} - L\bar{A}_1\hat{\eta} - L\dot{y} \\ &= A_0\hat{\eta} + B_0y + L\dot{y} - L\bar{B}_1y - L\bar{A}_1\hat{\eta} - L\dot{y} - Lk_p[u + \delta(\eta, y, t)] \\ &= A_0\hat{\eta} + B_0y - L\bar{B}_1y - L\bar{A}_1\hat{\eta} - Lk_p[u + \delta(\eta, y, t)].\end{aligned}\tag{93}$$

A partir de (84), substitui-se a dependência do termo  $\delta(\eta, y, t)$  em (93) pela variável auxiliar  $l$  em (80)–(81) tal que:

$$\dot{Z} = (A_0 - L\bar{A}_1)\hat{\eta} + (B_0 - L\bar{B}_1)y - Lk_p u + Ll.\tag{94}$$

Desta forma, um observador de ordem reduzida pode ser implementado como

$$\hat{\eta} = Z + Ly.\tag{95}$$

#### 4.2.3 Aplicação das Variáveis Estimadas na Lei de Controle

A partir dos estimadores apresentados acima, podemos reprojeter as equações que definem a lei de controle  $u$  considerando as variáveis observadas. Logo, (71) pode ser reescrita como

$$s = y - K\hat{\eta}\tag{96}$$

e conseqüentemente, considerando-se também que as incertezas em relação aos parâmetros  $\bar{A}_1$  e  $\bar{B}_1$  e que a perturbação  $d(t)$  estão incorporadas no termo  $\delta(\eta, y, t)$ , segue que

$$\dot{s} = \bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y + k_p[u + \delta] - KA_0\hat{\eta} - KB_0y.\tag{97}$$

Assim, a função de modulação  $\rho$  em (74) deve ser redefinida como

$$\rho \geq \frac{1}{k_{min}} [\|\bar{A}_1\|\|\hat{\eta}\| + \|\bar{B}_1\|\|y\| + \|KA_0\|\|\hat{\eta}\| + \|KB_0\|\|y\| + |l|] + c,\tag{98}$$

com  $k_{min} \in (0, |k_p|]$  e  $c > 0$  uma constante de projeto de ordem  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ .

#### 4.2.4 Análise de Estabilidade

O teorema a seguir apresenta uma possível implementação da função de modulação tal que (98) seja verificada e o controlador por modos deslizantes através de múltiplos observadores e realimentação de saída proposto faça com que a saída  $y$  e os estados  $\eta$  sejam estabilizados em tempo finito.

*Teorema 2:* Considere o sistema em sua representação na forma normal (76)–(77), a equação dinâmica da variável auxiliar  $s$  (97), a lei de controle (73), o observador de ordem reduzida em (94) e (95), o observador de alto ganho (80) e o estimador para as incertezas paramétricas e perturbações (81) e (84), para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Assuma que **(H4)**, **(H5)** e **(H6)** sejam válidas e que a função de modulação  $\rho$  em (73), satisfaz (98), e é dada por

$$\rho = \frac{1}{|k_p|} [\|\bar{A}_1\|\|\hat{\eta}\| + \|\bar{B}_1\|\|y\| + \|KA_0\|\|\hat{\eta}\| + \|KB_0\|\|y\| + |l|] + c, \quad (99)$$

onde  $c > 0$  é uma constante arbitrária pequena. Assuma também que a matriz  $K$  em (75) seja projetada de maneira que  $(A_0 + B_0K)$  seja Hurwitz e que a matriz  $L$  em (95) seja projetada de modo que  $(A_0 - L\bar{A}_1)$  também seja Hurwitz. Sendo assim, segue que a saída  $y$  e os estados  $\eta$  tendem globalmente e assintoticamente à zero.

*Prova:* Seja a seguinte equação candidata de Lyapunov

$$V = \frac{s^2}{2}. \quad (100)$$

Sendo assim, sua primeira derivada temporal ao longo de (78) e (89) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s(\dot{y} - K\dot{\hat{\eta}}) \\ &= s(\bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y + k_p(u + \delta) - KA_0\hat{\eta} - KB_0y - KL(\underbrace{\bar{y}}_{=\bar{A}_1\eta} - \bar{A}_1\hat{\eta})) \end{aligned} \quad (101)$$

Substituindo-se a lei de controle (73) em (101) obtém-se:

$$\dot{V} = s(\bar{A}_1\eta + \bar{B}_1y - KA_0\hat{\eta} - KB_0y + k_p\delta + k_p(-\rho \operatorname{sgn}(k_p) \operatorname{sgn}(s)) - KL(\bar{A}_1\eta - \bar{A}_1\hat{\eta})). \quad (102)$$

A partir de (91) e (92), temos que a parcela  $KL(\bar{A}_1\eta - \bar{A}_1\hat{\eta}) = KL\bar{A}_1\tilde{\eta} \rightarrow 0$  exponencialmente. Assim, podemos definir  $\pi_1 := -KL(\bar{A}_1\eta - \bar{A}_1\hat{\eta})$  como um termo de decaimento exponencial. Assim, utilizando a função de modulação  $\rho$  dada em (99), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V} = & s\bar{A}_1\eta - |s|\|\bar{A}_1\|\|\hat{\eta}\| + s\bar{B}_1y - |s|\|\bar{B}_1\|\|y\| - sKA_0\hat{\eta} - |s|\|KA_0\|\|\hat{\eta}\| - sKB_0y \\ & - |s|\|KB_0\|\|y\| + sk_p\delta - |s|l - |s|k_p c + s\pi_1. \end{aligned} \quad (103)$$

Aplicando-se algumas majorações matemáticas, temos que

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & |s|\|\bar{A}_1\|\|\eta\| - |s|\|\bar{A}_1\|\|\hat{\eta}\| + |s|\|\bar{B}_1\|\|y\| - |s|\|\bar{B}_1\|\|y\| + |s|\|KA_0\|\|\hat{\eta}\| \\ & - |s|\|KA_0\|\|\hat{\eta}\| + |s|\|KB_0\|\|y\| - |s|\|KB_0\|\|y\| + |s|k_p\delta - |s|l - |s|k_p c + s\pi_1 \end{aligned} \quad (104)$$

Ainda, a partir de (84), podemos majorar a parcela  $|k_p\delta| - |l| \leq \pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Assim, segue que

$$\dot{V} \leq |s|\|\bar{A}_1\|(\|\eta\| - \|\hat{\eta}\|) + |s|[\pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)] - |s|k_p c + s\pi_1. \quad (105)$$

Novamente, a partir de (91) e (92), temos que a parcela  $\|\bar{A}_1\|(\|\eta\| - \|\hat{\eta}\|) = \|\bar{A}_1\|(\|\tilde{\eta} + \hat{\eta}\| - \|\hat{\eta}\|) \leq \|\bar{A}_1\|\|\tilde{\eta}\| \rightarrow 0$  exponencialmente. Assim, definindo  $\pi_2 := |s|\|\bar{A}_1\|(\|\eta\| - \|\hat{\eta}\|)$  também como um termo de decaimento exponencial, obtém-se

$$\dot{V} \leq |s|[\pi_2 + \pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) - |k_p|c + \text{sgn}(s)\pi_1]. \quad (106)$$

Como  $\pi_0$ ,  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são termos de decaimento exponencial, podemos afirmar que  $\exists t \leq t_1$ , onde  $t_1 > 0$  é um instante de tempo finito, tal que

$$\pi_2 + \pi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) + \text{sgn}(s)\pi_1 < |k_p|c$$

para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Como  $c > 0$ , podemos concluir que

$$\dot{V} < 0. \quad (107)$$

Conseqüentemente, se  $K$  for projetado para que  $(A_0 + B_0K)$  em (75) seja Hurwitz  $s \rightarrow 0$  assintoticamente. De (91), (92) e (96), conclui-se que  $y \rightarrow K\eta$ . Logo, a partir de (75), pode-se afirmar também que  $\eta \rightarrow 0$ . Assim, o ponto de equilíbrio  $\eta = 0$  e  $y = 0$  é globalmente assintoticamente convergente.  $\square$

### 4.3 Resultados de Simulação

A seguir, serão apresentados resultados de simulação do sistema (76)–(77), já na forma normal, quando aplicada a lei de controle definida em (73) em conjunto com a função de modulação definida em (99) e com os observadores descritos nas seções 4.2.1 e 4.2.2.

As simulações foram realizadas utilizando o software MATLAB e sua ferramenta Simulink. O método de integração utilizado foi o ode1 (Euler) e foi utilizado um passo fixo de integração 0,001s.

Para a simulação, considerou-se os seguintes parâmetros:  $A_0 = 1$ ,  $B_0 = -1$ ,  $\bar{A}_1 = 1$ ,  $\bar{B}_1 = 1$  e  $k_p = 1$ . Para que  $(A_0 + B_0K)$  e  $(A_0 - L\bar{A}_1)$  sejam Hurwitz, considerou-se  $K = 3$  e  $L = 3$ . A fim de representar as incertezas nos parâmetros  $A_1$  e  $B_1$ ,  $\Delta_{A_1}$  e  $\Delta_{B_1}$  foram definidos como 1 e 0,5 respectivamente. Considerou-se também que a perturbação  $d(t)$  em (77) é um sinal senoidal, com amplitude de 0,5 e frequência de 10 Hz. Definiu-se  $y_0 = 3$  e  $\eta_0 = 3$  como as condições iniciais da planta.

A partir da Figura 38, podemos observar que a saída  $y$  é estabilizada após um regime transitório rápido. Ainda nesta Figura, podemos perceber que o observador de alto ganho projetado em (80) estima a saída da planta de maneira satisfatória e que a inicialização de  $\hat{y}$  com o mesmo valor inicial de  $y$  foi suficiente para se evitar o *peaking*, como pode ser visto também no gráfico do sinal de controle  $u$ , na Figura 39.

A seguir, a Figura 40 apresenta uma comparação entre a variável de estado  $\eta$  e seu respectivo observador de ordem reduzida. Já a Figura 41 apresenta o gráfico do erro entre o estado  $\eta$  e sua estimativa  $\hat{\eta}$ .

A estimação das incertezas da planta  $\delta$  (representada pelo sinal  $\frac{-l}{k_p}$ ) foi comparada com sinal da perturbação de entrada  $d$  na Figura 42. Podemos observar que após o regime

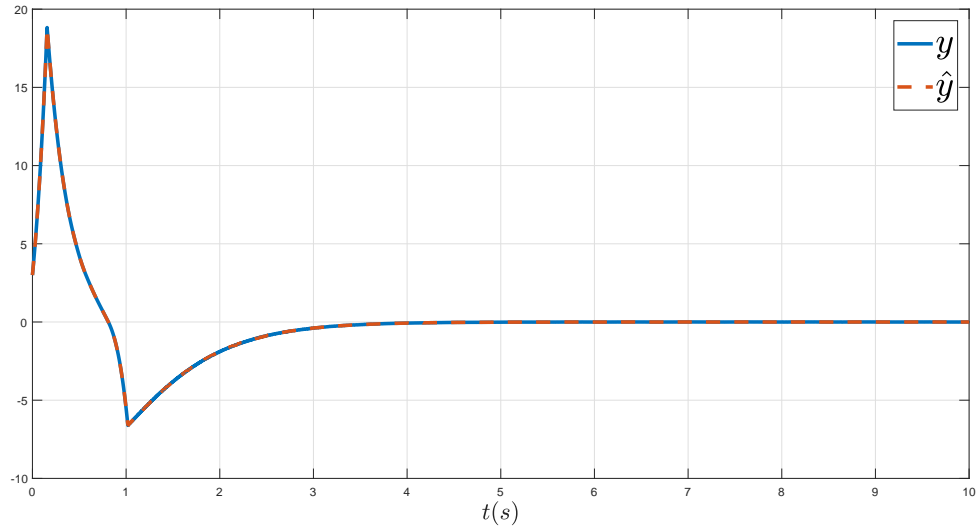


Figura 38 - Saída da planta  $y$  e seu observador  $\hat{y}$ .

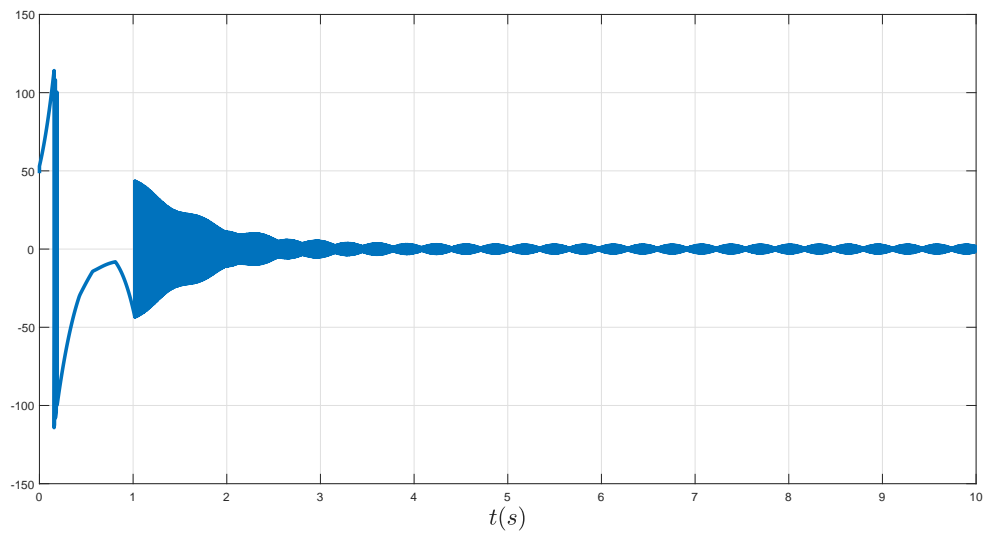


Figura 39 - Sinal de controle  $u$ .

transitório inicial, a estimação de delta segue o sinal da perturbação de entrada  $d$ . Isto ocorre pois as incertezas relacionadas aos parâmetros da planta são dadas na forma de  $\frac{\Delta A_1 \eta + \Delta B_1 y}{k_p}$ , e a medida que  $\eta$  e  $y \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow d$ , de acordo com (79).

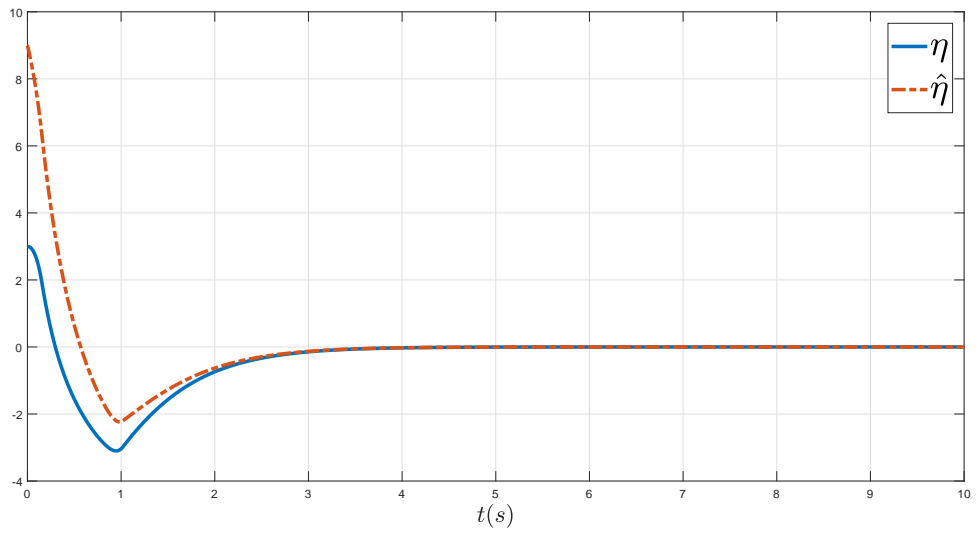


Figura 40 - Estado  $\eta$  e o estado observado  $\hat{\eta}$ .

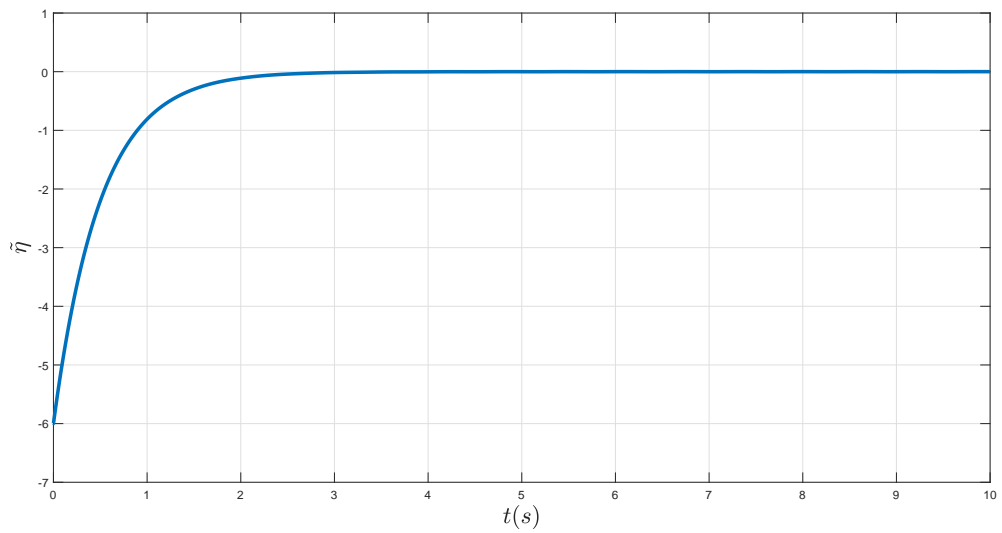


Figura 41 - O erro de estimação  $\tilde{\eta}$ .

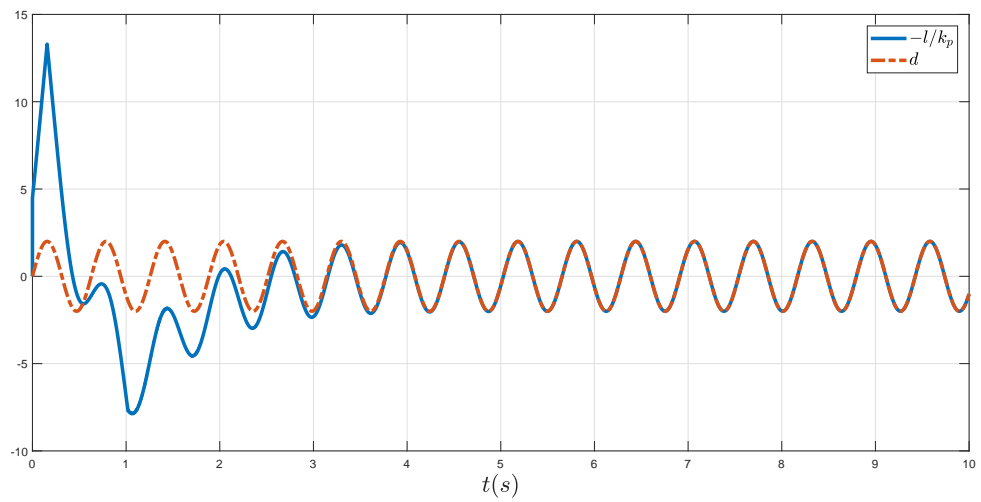


Figura 42 - A estimação das incertezas  $\delta$  (representada pelo sinal  $\frac{-l}{k_p}$ ) e o sinal da perturbação de entrada  $d$ .

#### 4.4 Conclusões

Este capítulo apresentou um algoritmo de controle por modos deslizantes via múltiplos observadores para o problema de estabilização de sistemas de fase não-mínima que apresentam incertezas paramétricas.

Abaixo, seguem as conclusões acerca deste capítulo:

- ✠ Utilizando apenas realimentação de saída, o algoritmo de controle proposto conseguiu realizar a tarefa de estabilizar uma planta de fase não-mínima.
- ✠ Um estimador para as incertezas paramétricas e perturbações externas presentes na planta pode ser implementado a partir de um observador de alto ganho.
- ✠ A combinação deste estimador com um observador de ordem reduzida para os estados não-medidos da planta permitiu o desenvolvimento de um algoritmo de controle robusto e eficiente para a solução do problema proposto.
- ✠ Uma prova rigorosa foi apresentada para garantir a estabilidade global e assintótica do sistema em malha fechada.
- ✠ A estratégia proposta foi testada através de simulações numéricas a partir de um exemplo acadêmico e apesar do cenário adverso, contendo incertezas e perturbações, obteve-se resultados satisfatórios.



## CONCLUSÃO

Esta dissertação apresentou duas estratégias de controle por modos deslizantes aplicados a sistemas de fase não-mínima. A primeira, apresentada no capítulo 3, utilizou o controle por modos deslizantes em conjunto com duas outras técnicas: o escalonamento temporal e a função de monitoração. Já no capítulo 4, um esquema de múltiplos observadores serviu como base para a implementação da lei de controle por modos deslizantes.

Devido a grande dificuldade encontrada em controlar sistemas de fase não-mínima, o fato de ambas as estratégias de controle obterem a estabilidade global assintótica em malha fechada utilizando apenas realimentação de saída é bastante relevante, visto que, para dificultar ainda mais o projeto dos algoritmos de controle, foram considerados plantas com incertezas paramétricas.

A comparação entre os dois algoritmos de controle apresentados não deve ser feita, pois apesar de ambas as estratégias se basearem em controle por modos deslizantes, suas técnicas associadas são distintas. A classe de sistemas abordados em cada capítulo também é diferente. No capítulo 3, a estratégia de controle foi aplicada em sistemas totalmente incertos, que admitem ter grau relativo arbitrário (desconhecido inclusive), com o objetivo de realizar o rastreamento de uma trajetória desejada. Já no capítulo 4, algumas restrições devem ser consideradas no projeto do controlador, como o conhecimento parcial dos parâmetros da planta e a obrigatoriedade do sistema ser de grau relativo  $n^* = 1$ .

É claro, a implementação de uma ou de outra estratégia de controle depende de vários fatores, e.g., qual é o sistema real que se deseja controlar? Qual é a dinâmica deste sistema? É possível obter uma representação paramétrica deste sistema? É necessário que haja uma resposta rápida do sistema à ação do controlador. Assim como não cabe a comparação entre as duas estratégias de controle apresentadas, não faz sentido também definir qual delas é a melhor.

Pode-se concluir que tanto a estratégia de controle apresentada no capítulo 3, quanto a estratégia de controle apresentada no capítulo 4, cumpriram as metas estabelecidas no início desta dissertação (rastreamento de trajetórias e estabilização, respectivamente). Assim, o objetivo principal desta dissertação, que é apresentar algoritmos de controle para sistemas de fase não-mínima baseados em controle por modos deslizantes e realimentação de saída, foi cumprido.

## • Propostas para Trabalhos Futuros

Segue como uma proposta para um trabalho futuro a realização de experimentos em um sistema de controle multivariável para regulação do nível de líquidos em um conjunto de tanques conectados utilizando os algoritmos de controle apresentados nesta dissertação, a partir da abordagem desenvolvida em [15].

Correia, Zacchi e Gouvêa em [43] propuseram um algoritmo de controle para plantas com parâmetros incertos baseado no método de controle com rejeição ativa de distúrbios (do inglês *Active Disturbance Rejection Control - ADRC*). A partir de uma função de monitoração, semelhante a apresentada em (51), pode se estender os resultados obtidos em [43] para sistemas de fase não mínima, visto que a grande barreira para isto é o não conhecimento do sinal da direção de controle. Assim, a tarefa da função de monitoração será estimar indiretamente a direção de controle.

Uma outra proposta para trabalhos futuros é a generalização da técnica apresentada no capítulo 4 para sistemas de grau relativo arbitrário. Embora as ferramentas desenvolvidas fossem restritas a plantas de grau relativo um, essa extensão é possível utilizando-se diferenciadores exatos baseados em modos deslizantes de ordem superior, assim como aqueles propostos por Oliveira, Estrada e Fridman em [44]. Esta nova abordagem poderá ser utilizada no projeto de um controlador global via realimentação de saída para o sistema TORA (*Translational Oscillator with a Rotational Actuator*), que é um sistema não-linear de fase não-mínima referência encontrado na literatura [45].

Aproveitando a discussão na literatura, onde em algumas referências o atraso é transformado em um problema de fase não-mínima por meio de aproximação de Padé [46], pode-se explorar também o caminho contrário: utilizar ferramentas de sistemas com atraso baseadas em predição, apresentadas por Krstic em [47], para compensar o efeito de fase não-mínima em sistemas incertos.

- **Publicações**

A seguir, seguem os trabalhos publicados durante o período em que cursei o mestrado e que serviram de base para o desenvolvimento de minha dissertação.

- ✠ SANTOS, R.; OLIVEIRA, T. R. Controle por Modos Deslizantes através de Função de Monitoração e Escalonamento Temporal para Rastreamento de Trajetórias em Plantas Incertas de Fase Não-Mínima. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2017.

Este trabalho foi a base para o Capítulo 3 desta dissertação.

- ✠ SANTOS, R.; OLIVEIRA, T. R. Estabilização de Sistemas de Fase Não-Mínima através de Controle por Modos Deslizantes e Múltiplos Observadores. *XXII Congresso Brasileiro de Automática*, 2018.

Este trabalho foi a base para o Capítulo 4 desta dissertação.

## REFERÊNCIAS

- [1] Hydrolink. *HHP H type horizontal compact Pelton turbine*. Disponível em: <<http://www.hydrolink.cz/en/pelton-turbines/hhp-h-type-horizontal-compact-pelton-turbine-4.html>>. Acesso em: 18 de Novembro de 2018.
- [2] Uppsala University. *Computer lab: Introduction to simulink quadruple tank control*. Disponível em: <<http://regtek3.it.uu.se/doku.php?id=exercises:complab:complab>>. Acesso em: 18 de Novembro de 2018.
- [3] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 2002.
- [4] ISIDORI, A. The zero dynamics of a nonlinear system: From the origin to the latest progresses of a long successful story. *European Journal of Control*, v. 19, p. 369–378, 2013.
- [5] GOPALSWAMY, S.; HEDRICK, J. K. Tracking nonlinear non-minimum phase systems using sliding control. *Int. Journal of Control*, v. 57, n. 5, p. 1141–1158, 1993.
- [6] MARINO, R.; TOMEI, P. A class of globally output feedback stabilizable nonlinear nonminimum phase systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 12, p. 2097–2101, 2005.
- [7] KAUFMAN, H.; BAR-KANA, I.; SOBEL, K. *Direct Adaptive Control Algorithms: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1994.
- [8] SHKOLNIKOV, I.; SHTESSEL, Y. Tracking controller design for a class of nonminimum phase systems via the method of system center. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 10, p. 1639–1643, 2001.
- [9] BAEV, S. et al. Output feedback tracking in causal nonminimum-phase nonlinear systems using HOSM techniques. *8th Int. Workshop on Variable structure systems*, p. 209–214, 2008.
- [10] PRISCOLI, F. D.; ISIDORI, A.; MARCONI, L. A dissipativity-based approach to output regulation of non-minimum-phase systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, p. 584–591, 2009.

- [11] NAZRULLA, S.; KHALIL, H. Robust stabilization of non-minimum phase nonlinear systems using extended high-gain observers. *IEEE Trans. Aut. Control*, v. 56, n. 4, p. 802–813, 2011.
- [12] SILVA, G. R. G.; CAMPESTRINI, L.; BAZANELLA, A. S. Multivariable virtual reference feedback tuning for non-minimum phase plants. *IEEE Control Systems Letters*, v. 2, n. 1, p. 121–126, 2018.
- [13] JOHNSON, R. M.; CHOW, J. H.; DILLON, M. V. Pelton turbine needle control model development, validation, and governor designs. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 135, n. 1, 2003.
- [14] SHKOLNIKOV, I.; SHTESSEL, Y. Aircraft nonminimum phase control in dynamic sliding manifolds. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 24, n. 3, p. 566–572, 2001.
- [15] JOHANSSON, K. H. Interaction bounds in multivariable control systems. *Automatica*, v. 38, p. 1045–1051, 2002.
- [16] RUPP, A.; STEINBERGER, M.; HORN, M. Sliding mode based platooning with non-zero initial spacing errors. *IEEE Control Systems Letters*, v. 1, n. 2, p. 274–279, 2017.
- [17] YU, X.; LIU, L. Target enclosing and trajectory tracking for a mobile robot with input disturbances. *IEEE Control Systems Letters*, v. 1, n. 2, p. 221–226, 2017.
- [18] RINALDI, G.; CUCUZZELLA, M.; FERRARA, A. Third order sliding mode observer-based approach for distributed optimal load frequency control. *IEEE Control Systems Letters*, v. 1, n. 2, p. 215–220, 2017.
- [19] CHOWDHURY, D.; KHALIL, H. K. Fast consensus in multi-agent systems with star topology using high gain observers. *IEEE Control Systems Letters*, v. 1, n. 1, p. 188–193, 2017.
- [20] YANG, J. et al. Continuous finite-time output regulation of nonlinear systems with unmatched time-varying disturbances. *IEEE Control Systems Letters*, v. 2, n. 1, p. 97–102, 2018.

- [21] HSU, L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Extremum seeking control via monitoring function and time-scaling for plants of arbitrary relative degree. *IEEE Workshop on Variable Structure Systems*, p. 1–6, 2014.
- [22] CASTRUCCI, P. L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. *Controle Automático*. [S.l.]: LTC, 2011.
- [23] EVANS, W. R. Graphical analysis of control systems. *AIEE Transactions*, v. 67, p. 547–551, 1948.
- [24] EVANS, W. R. Control system synthesis by root locus method. *AIEE Transactions*, v. 69, p. 66–69, 1950.
- [25] JUNIOR, F. C. S.; OLIVEIRA, J. B.; ARAÚJO, A. D. Influência dos zeros de fase não-mínima no desempenho de um controlador por posicionamento de pólos e estrutura variável. *X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2011*, p. 486–491, 2011.
- [26] ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. [S.l.]: Wiley, 1976.
- [27] UTKIN, V. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 2, p. 212–222, 1977.
- [28] LEVY, D. *Análise e controle de sistemas de fase não-mínima e de sistemas com tempo morto*. 2009. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Eletrônica), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- [29] LEVANT, A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *IEEE Int. J. Contr.*, v. 76, n. 4, p. 924–941, 2003.
- [30] UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding mode control in electromechanical systems*. [S.l.]: Taylor & Francis Ltd., 1999.
- [31] KOKOTOVIĆ, P.; KHALIL, H. K.; O'REILLY, J. *Singular perturbation methods in control: analysis and design*. [S.l.]: SIAM, 1999.
- [32] COSTA, R. R.; HSU, L. Unmodeled dynamics in adaptive control systems revisited. *Systems & Control Letters*, v. 16, p. 341–348, 1991.

- [33] COSTA, R. R.; HSU, L. Robustness of vs-mrac with respect to unmodeled dynamics and external disturbances. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 6, p. 19–33, 1992.
- [34] MOYA, P. et al. Application of nonlinear time-scaling for robust controller design of reaction systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 12, p. 57–69, 2002.
- [35] OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 55, p. 1028–1034, 2010.
- [36] FILIPPOV, A. L. Differential equations with discontinuous right-hand side. *Amer. Soc. Translations*, p. 199–231, 1964.
- [37] YAN, L. et al. A variable structure model reference robust control without a prior knowledge of high frequency gain sign. *Automatica*, p. 1036–1044, 2008.
- [38] GOEBEL, R.; SANFELICE, R. G.; TEEL, A. R. *Hybrid Dynamical Systemsâ Modeling, Stability, and Robustness*. [S.l.]: Princeton University Press, 2012.
- [39] GONZALEZ, T.; MORENO, J. A.; FRIDMAN, L. Variable gain super-twisting sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 8, p. 2100–2105, 2012.
- [40] CHAKRABORTTY, A.; ARCAK, M. Time-scale separation redesigns for stabilization and performance recovery of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, v. 45, p. 34–44, 2009.
- [41] SUSSMANN, H. J.; KOKOTOVIĆ, P. V. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 4, p. 424–440, 1991.
- [42] CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 1999.
- [43] CORREIA, C. A. M.; ZACHI, A. R. L.; GOUVÊA, J. A. Um método de controle robusto por realimentação de saída aplicado em sistemas com parâmetros incertos. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2017.

- [44] OLIVEIRA, T. R.; ESTRADA, A.; FRIDMAN, L. M. Global and exact hosm differentiator with dynamic gains for output-feedback sliding mode control. *Automatica*, v. 81, p. 156–163, 2017.
- [45] BUPP, R. T.; BERNSTEIN, D. S.; COPPOLA, V. T. A benchmark problem for nonlinear control design: Problem statement, experimental testbed, and passive nonlinear compensation. *American Control Conference*, p. 4363–4367, 1995.
- [46] LIU, G.; ZINOBER, A.; SHITESSEL, Y. Second-order sliding mode approach to siso time-delay system output tracking. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, n. 9, p. 3638–3645, 2009.
- [47] KRSTIC, M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. [S.l.]: Birkhauser, 2009.