



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Pedro Zanetti de Albuquerque

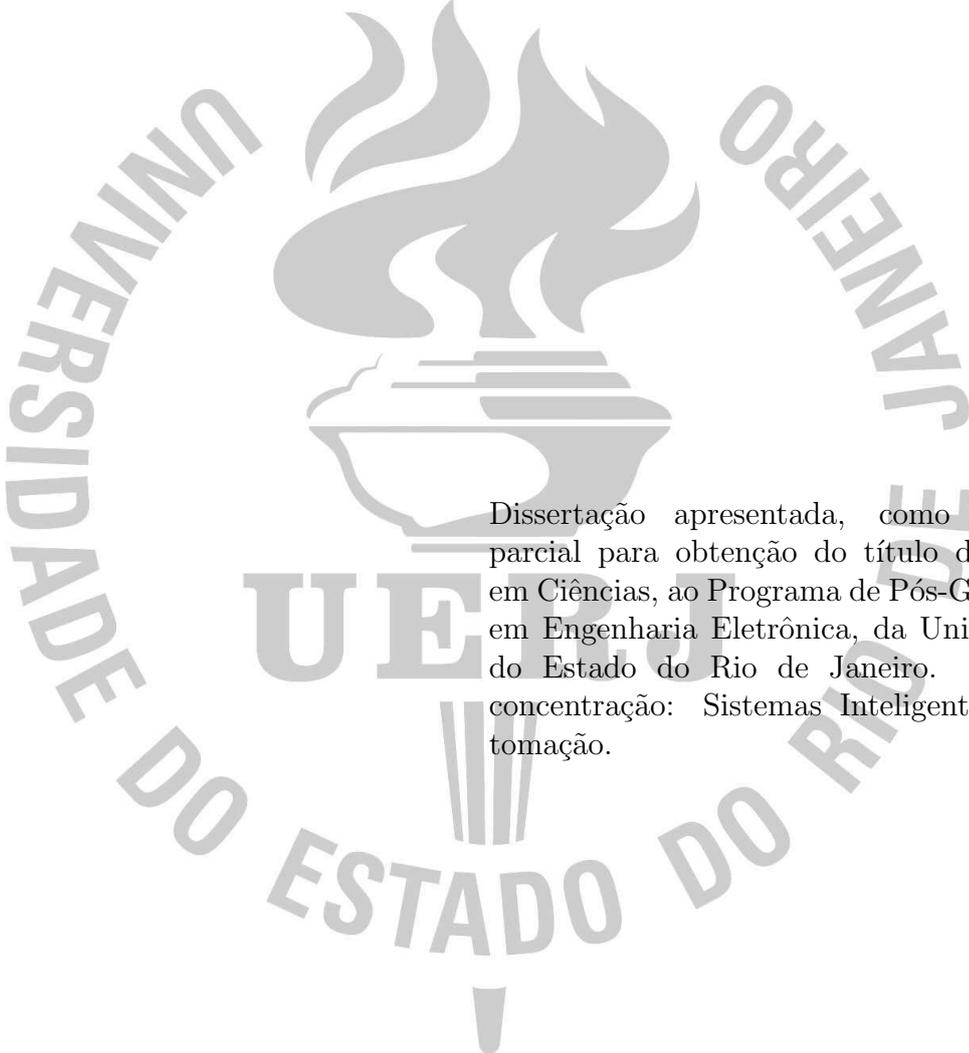
**Controle Extremal para Sistemas Descritos
por Equações Diferenciais Parciais**

Rio de Janeiro

2019

Pedro Zanetti de Albuquerque

**Controle Extremal para Sistemas Descritos
por Equações Diferenciais Parciais**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Americo Barbosa da Cunha Junior

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

A345 Albuquerque, Pedro Zanetti de.
Controle extremal para sistemas descritos por equações
diferenciais parciais / Pedro Zanetti de Albuquerque. –
2019.
133f.

Orientadores: Tiago Roux de Oliveira, Americo Barbosa
da Cunha Junior.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio
de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de
controle ajustável - Teses. 3. Equações diferenciais parciais
- Teses. 4. Otimização matemática - Teses. I. Oliveira,
Tiago Roux de. II. Cunha Junior, Américo Barbosa da. III.
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de
Engenharia. IV. Título.

CDU 681.511

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total
ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Pedro Zanetti de Albuquerque

**Controle Extremal para Sistemas Descritos
por Equações Diferenciais Parciais**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 28 de fevereiro de 2019

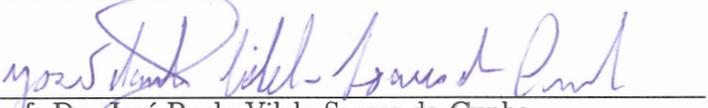
Banca Examinadora:


Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ


Prof. Dr. Americo Barbosa da Cunha Junior (Orientador)

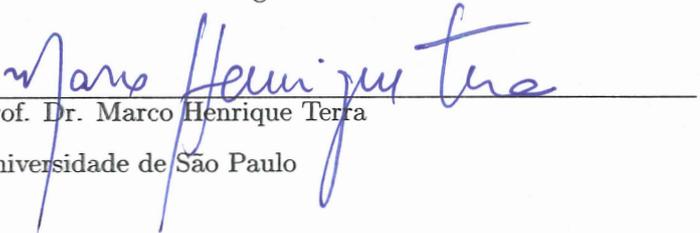
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ


Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha

Faculdade de Engenharia - UERJ


Prof. Dr. Paulo César Pellanda

Instituto Militar de Engenharia


Prof. Dr. Marco Henrique Terra

Universidade de São Paulo

Rio de Janeiro

2019

AGRADECIMENTO

A presente dissertação de mestrado não poderia chegar a bom porto sem o precioso apoio de várias pessoas. Em primeiro lugar, não posso deixar de agradecer meus orientadores, Professor Doutor Tiago Roux de Oliveira e Professor Doutor Americo Barbosa da Cunha Junior, por toda a paciência e empenho com que sempre me orientaram neste trabalho e no desenvolver de artigo e seminário do mestrado, mesmo com a longa espera em que passavam para obter uma resposta. Muito obrigado por terem me corrigido quando necessário passando a dose certa de motivação do jeito que seus orientandos sabem como é!

Desejo igualmente agradecer a todos os meus colegas do mestrado, da faculdade, trabalho e do colégio, cuja amizade esteve presente em todos os momentos, motivando e ajudando sempre que necessário com aquele apoio moral que precisamos para cruzar este desafio.

Por último, quero agradecer à minha família pelo apoio incondicional que me deram, especialmente aos meus pais, avó, irmãos e esposa pelas revisões incansáveis ao longo da elaboração deste trabalho.

RESUMO

ALBUQUERQUE, Pedro Zanetti de. *Controle extremal para sistemas descritos por equações diferenciais parciais*. 2019. 133f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Esta dissertação aborda o projeto e a análise da busca extremal baseada no método de Newton para mapeamentos (plantas) estáticos escalares e multivariáveis em cascata com dinâmica governada por equações diferenciais parciais (EDP's) em seu caminho de atuação. Embora classes mais gerais de sistemas baseados em EDP pudessem ser consideradas, concentramos nossos esforços no problema com EDP's de difusão. O esquema de controle adaptativo proposto para otimização em tempo real segue duas etapas básicas: primeiro, anula os efeitos da dinâmica de atuação nos sinais de perturbação e depois, aplica um controle de fronteira (*boundary control*) para o processo de difusão via transformação *backstepping*. Em particular, o compensador de difusão emprega estimativas baseadas em perturbações (baseadas na média) para o gradiente e o inverso da hessiana do mapeamento estático não-linear a ser otimizado. A análise de estabilidade completa do sistema em malha fechada é realizada usando o método de Lyapunov com aplicação da teorema da média para sistemas de dimensão infinita, a fim de capturar o estado infinito-dimensional do modelo do atuador. A convergência exponencial local para uma pequena vizinhança do extremo desconhecido é ilustrada por meio de exemplos numéricos.

Palavras-chave: Busca extremal; Controle adaptativo; *Backstepping*; Teoria da média; Sistemas de dimensão infinita; Equações diferenciais parciais;

ABSTRACT

ALBUQUERQUE, Pedro Zanetti de. *Extremum seeking for systems described by partial differential equations*. 2019. 133f. Dissertation (Master's Degree in Electronic Engineering) -Faculty of Engineering, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2019.

This dissertation addresses the design and analysis of fast Newton-based extremum seeking feedback for scalar and vectorial static maps in cascade with partial differential equation (PDE) dynamics in its actuation path. Although more general classes of PDE-based systems could be envisaged, we concentrated our efforts in handling diffusion PDEs. The proposed adaptive control scheme for real-time optimization follows two basic steps: first, it cancels out the effects of the actuation dynamics in the dither signals, and second, it applies a boundary control for the diffusion process via backstepping transformation. In particular, the diffusion compensator employs perturbation-based (averaging-based) estimates for gradient and Hessian's inverse of the nonlinear-scalar static map to be optimized. The complete stability analysis of the closed-loop system is carried out using Lyapunov's method and applying averaging for infinite-dimensional systems in order to capture the infinite-dimensional state of the actuator model. Local exponential convergence to a small neighborhood of the unknown extremum is guaranteed and verified by means of a numerical example.

Keywords: Extremum seeking; Adaptive control; Backstepping. Averaging theory; Infinite-dimensional systems; Partial differential equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Malha de controle com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão e busca extremal desconhecida com controlador de compensação de difusão.....	16
Figura 2	Exemplo do método de calculo da média com a dinâmia do sistema $\dot{z} = z \sin^2(\omega t) - 0.5z^2$, assumindo-se duas frequências diferentes $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$, e a dinâmica média do sistema $\dot{z}_{av} = 0.5(z_{av} - z_{av}^2)$, convergindo para o equilíbrio $z = 1$ e sua vizinhança, respectivamente.....	21
Figura 3	Esquema básico de busca extremal baseado no algoritmo de gradiente.....	24
Figura 4	Resultado da simulação da malha de controle de busca extremal com parâmetros $\omega = 10rad/s$, $a = 0.2$, $K = 0,1$ e mapeamento $y = y^* + 0.5H(\theta - \theta^*)^2$ com $y^* = 5$, $\theta^* = 2$ e $H = -2$	26
Figura 5	Algoritmo de busca extremal baseado em Newton para mapeamento estático.	27
Figura 6	Algoritmo de busca extremal para um mapeamento multivariável.....	28
Figura 7	Cascata de EDP de difusão com dinâmica de EDO com entrada limitada $U(t)$ em $x = D$	31
Figura 8	Resultados de simulação do controlador de compensação de difusão com a dinâmica do sistema $\dot{x} = x + u(0, t)$ e dinâmica de atuação descrita por uma EDP de difusão.	33
Figura 9	Malha de busca extremal baseada em algoritmo de gradiente com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão.	36
Figura 10	Estrutura do projeto do controladoro e prova da estabilidade do sistema em malha fechada.	42
Figura 11	Controle por busca extremal com atuação dinâmica governado por EDP de difusão com controlador compensador (103) e sinal de perturbação (89) : (a) mapa estático $y(t)$; (b) parâmetros $(\theta(t), \Theta(t))$	51
Figura 12	Controle por busca extremal básico sem compensação com ganho adaptativo K e sinal de perturbação (16) : (a) instabilidade para ω grande; (b) convergência lenta para ω pequeno.	51

Figura 13	Representação em (a) do sinal $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ e em (b) mostra-se a resposta do controlador $U(t)$	52
Figura 14	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro a	53
Figura 15	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω	54
Figura 16	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro K	54
Figura 17	Representação de $\hat{\theta}(t)$ quando varia-se o valor da condição inicial $\hat{\theta}(0)$	55
Figura 18	Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial $\hat{\theta}(0)$	55
Figura 19	Malha de busca extremal baseada em algoritmo de Newton com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão.	59
Figura 20	Estrutura do projeto do controlador e prova da estabilidade do sistema em malha fechada.	66
Figura 21	Busca extremal baseada no algoritmo de Newton com uma EDP de difusão em sua dinâmica de atuação.	77
Figura 22	Busca extremal baseada no algoritmo de Newton versus algoritmo de gradiente: tempo de resposta da saída $y(t)$ sujeito ao atuador EDP de difusão com coeficiente de difusão $D = 1$	77
Figura 23	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro a	78
Figura 24	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro a	78
Figura 25	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω	79
Figura 26	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω	79
Figura 27	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro K	80
Figura 28	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro K	81

Figura 29	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -50.	82
Figura 30	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -50.	82
Figura 31	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -200.	83
Figura 32	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -200.	83
Figura 33	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω_r	84
Figura 34	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω_r . Saturação de Γ em -50.	84
Figura 35	Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\Gamma(0)$	85
Figura 36	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\Gamma(0)$	85
Figura 37	Diagrama de bloco de busca extremal multivariável baseado em Newton com distintas EDP's de difusão na dinâmica de atuação.	89
Figura 38	Estrutura do projeto do controlador e prova da estabilidade do sistema em malha fechada.	93
Figura 39	Convergência dos parâmetros estimados $\hat{\theta}(t)$ aos seus valores ideais conforme estipulado.	109
Figura 40	Sinal de controle $U(t)$, onde $U_1(t)$ representa o sinal para controle do primeiro sistema e $U_2(t)$ do segundo.	109
Figura 41	Em (a) sinal de saída $y(t)$ convergindo ao valor ótimo estipulado no mapeamento. Em (b) sinal da saída $y(t)$ filtrado.	110
Figura 42	Convergência dos valores da estimação da matriz hessiana (398): (a) $H_{1,1} = -2$, (b) $H_{1,2} = -2$, (c) $H_{2,1} = -2$ e (d) $H_{2,2} = -4$	110

Figura 43	Convergência dos valores da estimação da matriz de (399): (a) $\Gamma_{1,1} \rightarrow -1$, (b) $\Gamma_{1,2} \rightarrow 0,5$, (c) $\Gamma_{2,1} \rightarrow 0,5$ e (d) $\Gamma_{2,2} \rightarrow -0,5$	111
Figura 44	Convergência da saída do mapeamento sob a superfície do mesmo.	111
Figura 45	Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor do parâmetro <i>a</i>	112
Figura 46	Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro <i>a</i> ; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro <i>a</i>	113
Figura 47	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação de <i>a</i>	114
Figura 48	Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor do parâmetro <i>ω</i>	114
Figura 49	Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro <i>ω</i> ; Em (c) e (d), mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro <i>ω</i>	115
Figura 50	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação de <i>ω</i>	116
Figura 51	Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor do parâmetro <i>k</i>	116
Figura 52	Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro <i>k</i> ; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro <i>k</i>	117
Figura 53	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação de <i>k</i>	118
Figura 54	Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$	118
Figura 55	Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor de suas respectivas condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$	119
Figura 56	Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$	120

Figura 57 Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial da matriz Γ	120
Figura 58 Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor de suas respectivas condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$	121
Figura 59 Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação das condições iniciais da matriz Γ	122
Figura 60 Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial da matriz ω_r	122
Figura 61 Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro ω_r do filtro Riccati; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro ω_r do filtro Riccati.	123
Figura 62 Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função do valor do parâmetro ω_r do filtro Riccati.	124

LISTA DE SIGLAS E SINAIS DE FÓRMULAS

LISTA DE SIGLAS

<i>ESC</i>	<i>Extremum Seeking Control</i>	<i>ES</i>	<i>Extremum Seeking</i>
<i>ODE</i>	<i>Ordinary Differential Equation</i>	EDO	Equação Diferencial Ordinária
<i>PDE</i>	<i>Partial Differential Equation</i>	EDP	Equação Diferencial Parcial
<i>LTI</i>	<i>Linear Time-Invariant</i>	LIT	Linear Invariante no Tempo

SINAIS DE FÓRMULAS

Símbolo	Descrição
$\alpha(x, t)$	Estado da EDP (dinâmica de atuação)
$\bar{\alpha}(x, t)$	Estado da EDP (Erro de estimativa propagado)
$\beta(x, t)$	Estado da EDP (dinâmica do sinal de perturbação)
$u(x, t)$	Estado da EDP (dinâmica do erro)
$v(x, t)$	Estado da EDP (dinâmica de erro homogeneizada)
$w(x, t)$	Estado da EDP (dinâmica do sistema alvo)

Símbolo	Descrição	Símbolo	Descrição
$\theta(t)$	Entrada/Atuador	θ^*	Entrada/Atuador ótimo
$\hat{\theta}(t)$	Entrada ótima estimada	$\tilde{\theta}(t)$	Erro de estimativa
$\Theta(t)$	Entrada/Atuador propagados	Θ^*	Entrada ótima propagada
$\vartheta(t)$	Erro de estimativa propagado	$G(t)$	Estimativa do gradiente
$\hat{H}(t)$	Estimativa da hessiana	$M(t)$	Sinal de perturbação multiplicativo
$N(t)$	Sinal de perturbação multiplicativo	$S(t)$	Sinal de perturbação aditivo
$Q(\cdot)$	Mapeamento	$U(t)$	Controlador
$y(t)$	Saída do mapeamento	y^*	Valor ótimo do mapeamento
$V(t)$	Funcional de Lyapunov-Krasovskii	$W(t)$	Funcional de Lyapunov-Krasovskii
$W_{1,2}(t)$	Funcional de Lyapunov-Krasovskii		
a	Amplitude de perturbação	c	Constante do filtro passa-baixa
H	Hessiana do mapeamento	K	Ganho do controlador
ω	Frequência de perturbação $[\frac{1}{s}]$		
$\mathcal{D}[\cdot]$	Operador de difusão	$\mathcal{D}^{-1}[\cdot]$	Operador inverso de difusão
$\mathcal{L}^{-1}\{\cdot\}$	Operador inverso de Laplace		

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	14
1	EMBASAMENTO MATEMÁTICO, TEOREMAS E DEFINIÇÕES IMPORTANTES	19
1.1	Semigrupos analíticos	19
1.2	Teoria da média	21
1.3	Busca extremal escalar com algoritmo de gradiente para mapeamentos estáticos	24
1.4	Busca extremal multivariável com algoritmo de Newton para mapeamentos estáticos	27
1.5	Busca extremal multivariável para mapeamentos estáticos	28
1.6	Adimensionalizando o domínio da EDP	29
1.7	<i>Backstepping</i> em EDP's	29
1.8	Compensação da difusão	31
1.9	Desigualdades importantes	33
2	BUSCA EXTREMAL PARA EDP UTILIZANDO ALGORITMO GRADIENTE ESCALAR	35
2.1	Declaração do problema	35
2.1.1	Dinâmica de atuação e saída	35
2.1.2	Sinais e sistemas	37
2.2	Projeto do controlador e sistema de malha fechada	39
2.2.1	Controlador de compensação de difusão.....	39
2.2.2	Sistema de malha fechada	40
2.3	Análise de estabilidade e convergência	41
2.4	Simulações	51
2.5	Avaliação de sensibilidade	53
3	BUSCA EXTREMAL ESCALAR PARA EDP DE DIFUSÃO UTILIZANDO ALGORITMO DE NEWTON	57
3.1	Declaração do problema	57

3.1.1	Dinâmica de atuação e saída	57
3.1.2	Sinais e sistemas	59
3.2	Sistema de controle em malha fechada	62
3.2.1	Controlador de compensação de difusão.....	62
3.2.2	Sistema em malha fechada	64
3.3	Análise de estabilidade e convergência	65
3.4	Simulações	76
3.5	Avaliação de sensibilidade	77
4	BUSCA EXTREMAL MULTIVARIÁVEL PARA EDP'S DE DI- FUSÃO COM COEFICIENTES DE DIFUSÃO DISTINTOS UTI- LIZANDO ALGORITMO DE NEWTON.....	86
4.1	Introdução	86
4.2	Declaração do problema	88
4.2.1	Dinâmica de atuação	88
4.2.2	Sinais e sistemas	89
4.3	Sistema de controle em malha fechada	92
4.3.1	Controlador de compensação de difusão via estimação da inversa da hessiana	92
4.4	Simulações	107
4.5	Avaliação de sensibilidade	112
	CONCLUSÃO	125
	APÊNDICE A	128
	REFERÊNCIAS.....	132

INTRODUÇÃO

Este capítulo coloca primeiro o tópico da tese no contexto do trabalho de pesquisa atual e motiva o problema. Em seguida, é apresentada uma descrição de cada capítulo e a estrutura da tese. Por fim, o capítulo termina com algumas definições notacionais.

Trabalhos Relacionados e Motivação

A busca extremal (*Extremum seeking - ES*) é uma abordagem em tempo real que não baseia-se em modelos no campo de controle adaptativo. É comumente usada para determinar e manter um mapeamento de saída desconhecido, não-linear, de um sistema dinâmico ou estático em seu extremo. O objetivo é encontrar o valor de entrada de um sistema desconhecido que leva a saída mensurável do sistema para seu valor ótimo desconhecido, usando sinais de perturbação. A ideia da busca extremal é datada de 1922 e foi inicialmente publicada na referência de Leblanc [1] para maximizar a transferência de potência em um bonde. Kazakevich [2] estudou intensamente este conceito em 1940, antes de ser introduzido nos anos de 1950 nos EUA por [3]. Somente em 2000 a primeira prova de estabilidade geral da busca extremal para sistemas dinâmicos com mapeamento de saída desconhecido foi desenvolvido por Wang e Krstić [4]. Desde então, o controle por busca extremal teve seu interesse renovado e novos trabalhos teóricos surgiram, como por exemplo: [5], [6], [7] e [8]. Em particular, a referência [7] introduz o método de Newton para busca extremal com a principal vantagem de garantir taxas de convergência mais rápidas que o método tradicional de gradiente, uma vez que a taxa de convergência é independente da hessiana do mapeamento. Além disso, a busca extremal foi aplicada com sucesso em diversos sistemas de engenharia, como robôs móveis, bioprocessos, motores a combustão, controle de sistemas de frenagem e mais, que é resumido juntamente com uma descrição histórica por [9] e referências nele contidas. Uma particularidade da literatura é que a maioria dos trabalhos com busca extremal envolvem apenas sistemas descritos por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

Por outro lado, a dinâmica de atuação, descrita por sistemas de dimensões infinitas, foi introduzida em várias aplicações. O exemplo representativo é o sistema com atrasos de atuação, em que a propagação de atraso pode ser descrita por uma equação diferencial parcial (EDP) hiperbólica de primeira ordem. A compensação do atuador e o atraso do

sensor foram desenvolvidas em [10] para sistemas lineares e em [11] para sistemas não-lineares através do método de *backstepping* de dimensão infinita [12]. Recentemente, a primeira contribuição da aplicação da busca extremal em sistemas de dimensão infinita foi alcançada por Oliveira e coautores em [13] no caso de atrasos de entrada ou saída com tempos de atraso conhecidos. Uma prova de estabilidade do sistema em malha fechada e a convergência para seu extremo é apresentada.

Outro sistema bem conhecido de dimensão infinita é o processo de difusão, que surge em vários sistemas biológicos, químicos e econômicos como [14] e [15]. A compensação da dinâmica do atuador governada por uma EDP de difusão foi estudada em [16] para a estabilização de um sistema linear. No entanto, não há trabalho na literatura considerando busca extremal na presença de dinâmicas de atuação governadas por EDP's de difusão ou, generalizando, EDP's parabólicas.

Este trabalho é motivado por exemplos como otimizar a taxa de produto de um biorreator tubular, onde o modelo é descrito por EDPs parabólicas lineares acopladas (no domínio) e analisadas em [17]. Por este propósito, considera-se o modelo dinâmico de um biorreator como atuador dinâmico de dimensões infinitas como mostrado em [17]. Encontrar e manter uma taxa de produto desconhecida ótima, descrita por um mapeamento estático, é uma configuração mais avançada do problema.

Objetivos

Como mencionado anteriormente, este trabalho foca na análise, especialmente estabilidade e convergência, da busca extremal baseada na metodologia de gradiente e Newton para um mapeamento estático desconhecido $Q(\cdot)$ com atuação dinâmica governada por EDP's de difusão, como mostrado na Figura 1. O controlador de compensação de difusão é baseado em um modelo parcialmente desconhecido, no qual estimamos, mais notavelmente a hessiana (ou sua inversa) desconhecida do mapeamento estático. Entretanto, os parâmetros do processo de difusão são conhecidos.

O objetivo neste trabalho é mostrar o desenvolvimento do caso da busca extremal para EDP's considerando a metodologia de gradiente para o caso escalar e a metodologia de Newton tanto para o caso escalar quanto para o caso multivariável. O caso multivariável na metodologia de gradiente possui interdependência de seus parâmetros

tornando muito complexo o desenvolvimento do controlador e portanto não será abordado neste trabalho. Os casos abordados possuem exemplos numéricos demonstrando a estabilidade e convergência.

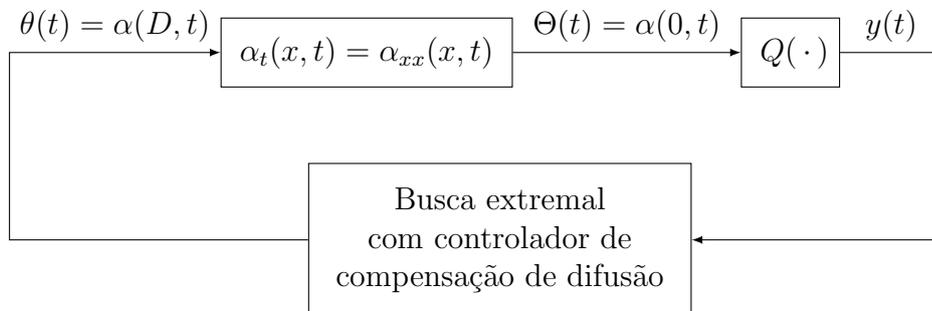


Figura 1: Malha de controle com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão e busca extremal desconhecida com controlador de compensação de difusão.

Estrutura do Trabalho

No próximo Capítulo 1, será sumarizado o conceito básico da busca extremal utilizando o algoritmo de gradiente e Newton, a generalização do caso multivariável e o procedimento geral de sua prova de estabilidade. O conceito do controlador de compensação de difusão e o método *backstepping*, o qual é usado para projetar o controlador, também são introduzidos no Capítulo 1. Como estamos lidando com dinâmica de atuação de dimensão infinita descrita por EDP's parabólicas, devemos considerar a teoria do semigrupo, especialmente semigrupos analíticos. Teoremas dos semigrupos analíticos e definições de desigualdades importantes fecham o Capítulo 1.

No Capítulo 2, tratamos apenas do caso escalar baseado no algoritmo de gradiente. Nele enunciamos o teorema da estabilidade e convergência do sistema em malha fechada. Primeiro, declaramos as equações da malha de controle na Figura 1 e no próximo passo projetamos o controlador de compensação de difusão pelo método de *backstepping*. Continuamos derivando as equações em malha fechada e aplicando o teorema da média para obter no sistema médio em malha fechada. Baseado neste sistema, usamos o método de *backstepping* e aplicamos o método de Lyapunov-Krasovkii para mostrar a estabilidade exponencial do sistema médio em malha fechada. Para mostrar a estabilidade exponencial do sistema original em malha fechada, invocamos o teorema da média para sistemas de dimensão infinita e a teoria do semigrupo analítico. Neste último passo, a convergência

assintótica para uma vizinhança do extremo do mapeamento estático desconhecido é mostrado. Ainda nele, apresentamos simulações para provar o desenvolvimento teórico em exemplo numérico.

O Capítulo 3, ainda no caso escalar, mostrará todo o desenvolvimento realizado no capítulo anterior tendo agora como base o algoritmo de Newton. Utilizando da mesma metodologia, declaramos as equações da malha de controle conforme diagrama de blocos apresentado no capítulo e no próximo passo projetamos o controlador também pelo método de *backstepping*. Derivando as equações em malha fechada e aplicando o teorema da média, obtemos o sistema médio em malha fechada e com este usamos o método de *backstepping* e aplicamos o método de Lyapunov-Krasovkii mostrando a estabilidade exponencial do sistema médio em malha fechada. Mostra-se então a estabilidade exponencial do sistema original invocando o teorema da média para sistemas de dimensão infinita e a teoria do semigrupo analítico. Então, a convergência assintótica para uma região do extremo do mapeamento estático desconhecido é mostrada. Ao final, apresentamos simulações para ilustrar o desenvolvimento teórico num exemplo numérico.

No Capítulo 4, é desenvolvido o algoritmo de Newton aplicado na busca extremal para um sistema de múltiplas entradas e uma única saída. Nele repetimos o processo realizado no capítulo anterior fazendo as considerações necessárias para o caso multivariável. Desenvolvemos o projeto do controlador, calcula-se o sistema médio em malha fechada e mostramos sua estabilidade exponencial, assim como para o sistema original. Então, ao final, apresentamos a convergência assintótica para uma região do extremo do mapeamento estático desconhecido. Ao final, são apresentadas simulações para explicar o desenvolvimento teórico em exemplo numérico.

Para finalizar, faz-se a conclusão apresentando os resultados obtidos e comparando-os com base nas simulações apresentadas no final de cada capítulo. Por fim, propõe-se trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos para um maior aprofundamento do material apresentado nesta tese.

Notação

Considere a função $u(x, t)$ dependente do espaço x e do tempo t . Simbolizamos as derivadas parciais como

$$u_x(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad u_{xx}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

A norma-2 de um vetor de estado de dimensão finita de uma EDO $\vartheta(t)$ é simbolizada por barras simples, $|\vartheta(t)|$. Em contraste, normas de funções (de x e t) são simbolizadas por barras duplas. A norma espacial $\mathcal{L}_2[0, D]$ do estado $u(x, t)$ de uma EDP é denotada como

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}^2 := \int_0^D u^2(x, t) dx,$$

onde, na sequência, o índice $\mathcal{L}_2([0, D])$ é retirado por simplicidade, conseqüentemente $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0, D])}$, se não especificado. Enfatiza-se que a norma espacial é dependente do tempo [12]. O termo $u_{av}(x, t)$ simboliza o estado médio de $u(x, t)$ como em [18] e a teoria da média introduzida na Seção 1.2. Como definido em [18], a função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é dita ser de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ no intervalo $[t_1, t_2]$, se

$$\exists k, \bar{\epsilon} : |f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon, \quad \forall \epsilon \in [0, \bar{\epsilon}] \quad \text{e} \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Na maioria dos casos não fornecemos a estimação das constantes k e $\bar{\epsilon}$, então $\mathcal{O}(\epsilon)$ pode ser interpretado como uma relação de ordem de grandeza para ϵ suficientemente pequena. O sobrescrito $*$ denota a otimização de um valor, isto é, y^* é o valor ótimo e x^* o otimizador de uma função $y = f(x)$.

1 EMBASAMENTO MATEMÁTICO, TEOREMAS E DEFINIÇÕES IMPORTANTES

O propósito deste capítulo é fornecer fundamentação conceitual do controle por busca extremal (*ESC*) e do controlador de compensação de difusão. Adiante, desenvolveremos a familiaridade com os métodos de média, *backstepping* e teoria dos semigrupos, os quais são usados para a análise no capítulo seguinte. Adicionalmente, uma visão geral das desigualdades importantes que são usadas com mais frequência neste trabalho são dadas.

1.1 Semigrupos analíticos

Como mencionado nas seções anteriores, esta dissertação lida com EDP's (lineares), que podem ser expressas como as equações denominadas evolucionárias [19]. Portanto, considere o estado de EDP $u(x, t)$, $x \in [0, 1]$ como uma função que pertence a um espaço Banach \mathcal{X} , ou seja, $z(t) := u(\cdot, t)$ com $z(t) \in \mathcal{X}$. Para descrever uma solução de uma equação evolucionária é usado a teoria do semigrupo. Introduzimos uma classe especial de semigrupos, nomeado nesta seção como semigrupo analítico. Primeiramente, considere o problema Cauchy no espaço \mathbb{R} ($z(t) \in \mathbb{R}$)

$$\dot{z}(t) = Az(t) + f(t), \quad z(0) = z_0. \quad (1)$$

A solução de (1) pode ser calculada com a fórmula

$$z(t) = e^{At} z_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Agora considere o problema Cauchy (1) definido no espaço Banach \mathcal{X} (com $z(t) \in \mathcal{X}$), portanto um problema de dimensão infinita. Para descrever a solução deste problema de dimensão infinita, a teoria dos semigrupos ([20], [21]) é usada. Dizemos que o operador A gera um semigrupo $T_A(t) = (e^{At})_{t \geq 0}$, tal que a solução do problema Cauchy de dimensão infinita é dada como

$$z(t) = T_A(t)z_0 + \int_0^t T_A(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (3)$$

O semigrupo gerado é dito analítico, se as condições expostas na próxima definição forem satisfeitas.

Proposição 1.1 ([22]) *Seja \mathcal{X} o espaço Banach e Σ_δ um setor com ângulo δ em \mathbb{C} . Uma família de operadores $(T(t))_{t \in \Sigma_\delta \cup \{0\}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X})$ é chamada de semigrupo analítico (de ângulo $\delta \in (0, \pi/2]$) se*

$$(i) \quad T(0) = I \text{ e } T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \text{ para todo } t_1, t_2 \in \Sigma_\delta.$$

$$(ii) \quad \text{O mapeamento } t \mapsto T(t) \text{ é analítico em } \Sigma_\delta$$

$$(iii) \quad \lim_{\Sigma_{\delta'} \ni t \rightarrow 0} T(t)z = z \text{ para todo } z \in \mathcal{X} \text{ e } 0 < \delta' < \delta,$$

Em Henry [21], Lunardi [19] e Engel e outros [22], muitos exemplos de geradores de semigrupos analíticos podem ser encontrados, como o operador de Laplace

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (4)$$

com domínio

$$D(\Delta) = \left\{ \varphi \in \mathcal{X} : \varphi, \frac{d}{dx}\varphi \in \mathcal{X} \text{ c.a.}, \frac{d^2}{dx^2}\varphi \in \mathcal{X}, \frac{d}{dx}\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0 \right\}, \quad (5)$$

onde c.a. significa contínuo absoluto. No próximo capítulo, lidaremos com matrizes de operadores, ou seja, matrizes que consistem em operadores de fronteira e de dimensão infinita como elementos. Portanto, o próximo teorema expõe as condições para cada operador da matriz, de tal forma que a matriz de operadores gera um semigrupo analítico.

Teorema 1.1 ([23]) *Considere a matriz de operadores*

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (6)$$

com $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) = D(A) \times (D(D) \cap D(B)) \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, onde A, B, D são operadores lineares e \mathcal{E}, \mathcal{F} são espaços Banach adequados. Se A e D geram um semigrupo analítico em \mathcal{E} e \mathcal{F} , respectivamente e B é limitado em D , então \mathbf{A} é gerador de um semigrupo analítico,

onde a limitação em D é definida como

$$\exists \epsilon_1 \geq 0, \epsilon_2 \geq 0, \text{ t.q. } \|Bz\| \leq \epsilon_1 \|Dz\| + \epsilon_2 \|z\|, \quad \text{com } D(D) \subset D(B). \quad (7)$$

1.2 Teoria da média

O cálculo da média é um dos elementos chave da busca extremal por meio de perturbações periódicas e na prova da estabilidade nos capítulos seguintes. Este método aproxima a solução de um sistema não linear periódico através da solução do chamado sistema médio, obtido pela média do sistema original em relação a uma alta frequência, como mostrado na Figura 2 e resumido no seguinte teorema.

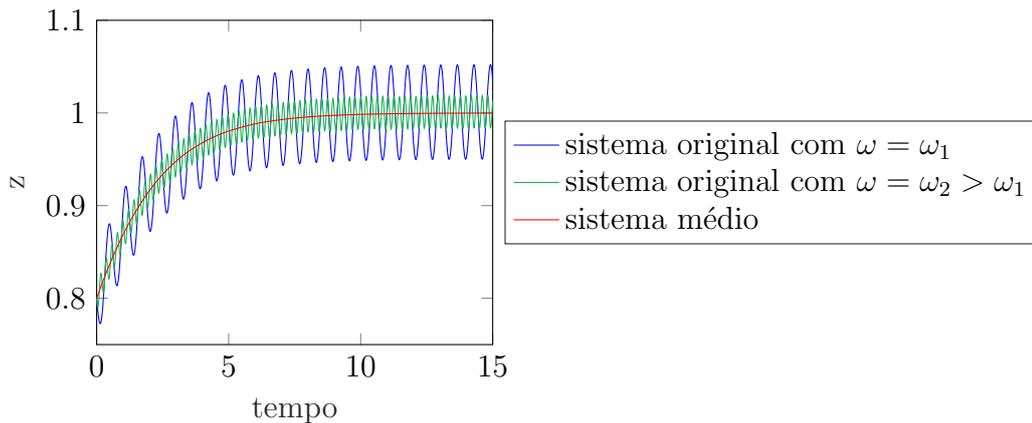


Figura 2: Exemplo do método de cálculo da média com a dinâmica do sistema $\dot{z} = z \sin^2(\omega t) - 0.5z^2$, assumindo-se duas frequências diferentes $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2$, e a dinâmica média do sistema $\dot{z}_{av} = 0.5(z_{av} - z_{av}^2)$, convergindo para o equilíbrio $z = 1$ e sua vizinhança, respectivamente.

Teorema 1.2 (Teorema da média para EDO's [18]) *Considere o sistema original*

$$\dot{z} = f(\omega t, z), \quad z(0) = z_0, \quad (8)$$

seja $f(\omega t, z)$ e suas derivadas parciais com respeito a z até a segunda ordem contínuas e limitadas por $(\omega t, z) \in [0, \infty) \times D_0$, para cada conjunto compacto $D_0 \subset D$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é o domínio. Suponha que f seja T -periódico com $T > 0$ em ωt , ou seja, $f(s, z) = f(s+T, z)$

para todo $s \in [0, \infty)$. Considere o sistema médio

$$\dot{z}_{\text{av}} = f_{\text{av}}(z_{\text{av}}), \quad z_{\text{av}}(0) = z_{\text{av},0} \quad (9)$$

com

$$f_{\text{av}}(z_{\text{av}}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, z_{\text{av}}) d\tau. \quad (10)$$

Suponha que $z_{\text{av}} = 0 \in D$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (9), $\Omega \subset D$ é um subconjunto compacto de sua região de atração, $z_{\text{av}}(0) \in \Omega$, e $z(0) - z_{\text{av}}(0) = \mathcal{O}(1/\omega)$, então existe um $\bar{\omega} > 0$ tal que para todo $\omega > \bar{\omega}$

$$\|z(t) - z_{\text{av}}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathcal{O}(1/\omega), \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (11)$$

Além disso, (8) tem uma solução única, T -periódica, exponencialmente estável $\bar{z}(t, 1/\omega)$ com a propriedade $\|\bar{z}(t, 1/\omega)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathcal{O}(1/\omega)$.

Note que $\bar{z}(t, 1/\omega)$ é a aproximação da solução de (8), considerando a solução do sistema médio (9), veja [18]. Analisando um sistema médio e mostrando que o mesmo é exponencialmente estável, pode-se aplicar o teorema dado acima. Assim, o sistema original (8) é exponencialmente estável e a solução se comporta como (11). No caso do *ESC*, a análise do sistema médio em malha fechada é muito mais fácil do que a análise do sistema em malha fechada original, como veremos mais adiante.

Dinâmicas de atuação governadas por EDP's de difusão representam um sistema de dimensão infinita, que causam problemas de transformação na derivação da teoria da média ([18], [24]). Portanto, o Teorema 1 tem que ser estendido à média para sistemas de dimensão infinita, onde o resultado principal pode ser encontrado em [24] e é resumido no teorema que segue:

Teorema 1.3 (Teorema da média para EDP's [24]) *Considere o sistema de dimensão infinita, definido no espaço de Banach \mathcal{X}*

$$\dot{z}(t) = Az(t) + F(\omega t, z), \quad (12)$$

com $z(0) = z_0 \in \mathcal{X}$, $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}$ da origem a um semigrupo contínuo $T_A(t)$ com a propriedade $\|T_A(t)\| \leq Me^{\mu t}$ para algum M, μ . Além disso, a não linearidade $F : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ com $t \mapsto F(t, z)$ é Fréchet diferenciável em z , fortemente contínua e uniformemente periódica em t com respeito a z no subconjunto compacto \mathcal{X} . Adicionalmente, a seguinte hipótese (H) tem de ser satisfeita: Se $h : [s, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ é norma contínua, então

$$i) \int_s^t T_A(t - \tau)h(\tau) \in \mathcal{D}(A), \quad \text{para } s \leq t;$$

$$ii) \|A \int_s^t T_A(t - \tau)h(\tau)d\tau\| \leq Me^{\mu t} \sup_{s \leq \tau \leq t} \|h(\tau)\|.$$

Junto com (12), o sistema médio

$$\dot{z}_{\text{av}} = Az_{\text{av}} + F_0(z) \quad \text{com} \quad F_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau, z)d\tau \quad (13)$$

é considerado. Suponha que $z_{\text{av}} = 0 \in D \subset \mathcal{X}$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do sistema médio (13), então para algum $\bar{\omega} > 0$ e $\omega > \bar{\omega}$

a) existe uma solução periódica exponencialmente estável única $t \mapsto \bar{z}(t, 1/\omega)$, contínua em t e $1/\omega$, com $\|\bar{z}(t, 1/\omega)\| \leq \mathcal{O}(1/\omega)$ para $t > 0$,

b) e $\|z_0 - z_{\text{av}}(0)\| < \mathcal{O}(1/\omega)$, a solução estimada de (12) é dada por

$$\|z(t) - z_{\text{av}}(t)\| \leq \mathcal{O}(1/\omega), \quad t > 0, \quad (14)$$

c) e para $\|z_0\| < \mathcal{O}(1/\omega)$, e pelo múltiplo teorema estável, assegura-se

$$\|z(t) - \bar{z}(t, 1/\omega)\| \leq Ce^{-\gamma t}, \quad t > 0, \quad (15)$$

para algum $C, \gamma > 0$.

Comentário 1.1 *Como a enunciada hipótese (H), em [24], a propriedade de suavidade do operador A , é trivialmente satisfeita se A em (12) e (13), respectivamente, da origem a um semigrupo analítico. A definição de semigrupos analíticos pode ser encontrada na Seção 1.1.*

Como exposto pelo teorema 1.3 e cometário 1.1, para que seja possível concluir a prova da estabilidade exponencial do sistema original (12), algumas suposições devem ser satisfeitas para o uso do teorema em um sistema exponencialmente estável de dimensão infinita médio. Especialmente, é preciso definir um vetor de estado de dimensão infinita adequado do sistema e então mostrar que A gera um semigrupo analítico. Enfatiza-se que este teorema é o passo chave para a prova de estabilidade do sistema em malha fechada na Figura 1.

1.3 Busca extremal escalar com algoritmo de gradiente para mapeamentos estáticos

Como introduzido, a busca extremal para mapeamentos estáticos é um esquema de controle de otimização em tempo real, onde o objetivo é otimizar o mapeamento estático desconhecido não-linear $Q(\cdot)$ com a saída ótima desconhecida y^* , com o otimizador desconhecido θ^* , com a saída y e entrada θ mensuráveis. Sem perda de generalidade consideramos problemas de maximização (para minimização usar $y = -y$). Esta seção apresenta as equações básicas da malha de busca extremal baseada em gradiente como mostrado na Figura 3.

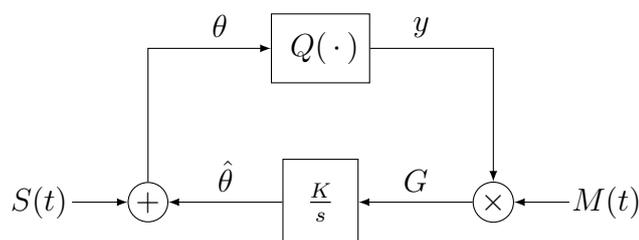


Figura 3: Esquema básico de busca extremal baseado no algoritmo de gradiente.

O método de perturbação senoidal, portanto, a teoria da perturbação [18], constitui o básico da busca extremal ([5], [4]), tal que o parâmetro de entrada θ do mapeamento estático varia para estimar o gradiente G do mapeamento. Portanto, o sinal de

perturbação

$$S(t) = a \sin(\omega t) \quad (16)$$

com amplitude de perturbação a e frequência ω , é adicionada à estimação do otimizador θ^* , o qual é dado por $\hat{\theta}$. O sinal *dither* para estimar o gradiente do mapeamento estático é escolhido como

$$M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t). \quad (17)$$

A idéia de escolher os sinais *dither* como (16) e (17) é entendida observando a média do sinal de G e assumindo que $Q(\theta)$ é quadrático

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (18)$$

com hessiana H negativa desconhecida. Este pressuposto pode ser satisfeito na região ótima para qualquer mapeamento não-linear em \mathcal{C}^2 . Adicionalmente, introduz-se a estimativa do erro

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*. \quad (19)$$

A estimativa do gradiente como na Figura 3 juntamente com (16)-(19) é dada como

$$G(t) = M(t)y \quad (20)$$

$$= \frac{2}{a} \sin(\omega t)y^* + \frac{H}{a}\tilde{\theta}^2 \sin(\omega t) + 2H\tilde{\theta} \sin^2(\omega t) + 2Ha \sin^3(\omega t). \quad (21)$$

Usando a identidade $2 \sin^2(\omega t) = 1 - \cos(2\omega t)$ e $4 \sin^3(\omega t) = 3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)$, obtemos

$$G(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t)y^* + \frac{H}{a}\tilde{\theta}^2 \sin(\omega t) + H\tilde{\theta}(1 - \cos(2\omega t)) + \frac{Ha}{2}(3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t)), \quad (22)$$

onde podemos aplicar a teoria da média da Seção 1.2 e obter

$$G_{\text{av}}(t) = H\tilde{\theta}_{\text{av}} = H(\hat{\theta}_{\text{av}} - \theta^*), \quad (23)$$

que é o gradiente médio do mapeamento. Obtemos a equação (23) escolhendo um ω grande e definindo como zero, todos os termos em (22), que dependem de seno e coseno com argumentos ω , 2ω , 3ω . Isso resulta na dinâmica de erro média

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}} = KH\tilde{\theta}_{\text{av}}, \quad (24)$$

com $K > 0$. O sistema (24) é exponencialmente estável e pelo Teorema 1.2, a estabilidade exponencial da dinâmica do erro original

$$\dot{\tilde{\theta}} = KH\tilde{\theta} \quad (25)$$

segue. A equação (25) é bem conhecida como a lei de controle do método de otimização de gradiente descendente [25]. Como no geral a hessiana H é desconhecida, a mesma deve ser estimada como mostrado em [7] e usada no capítulo 2. Por Ariyur e Krstić [5], a convergência de (θ, y) para a região do extremo (θ^*, y^*) é dada como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta - \theta^*) = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y - y^*) = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2). \quad (26)$$

Essas observações revelam que o algoritmo de busca extremal baseada no gradiente é apenas localmente convergente e a taxa depende da hessiana H . A Figura 4 mostra o comportamento da saída $y(t)$ e a estimativa ótima da entrada $\hat{\theta}(t)$ e com eles a convergência para o valor ótimo y^* e θ^* .

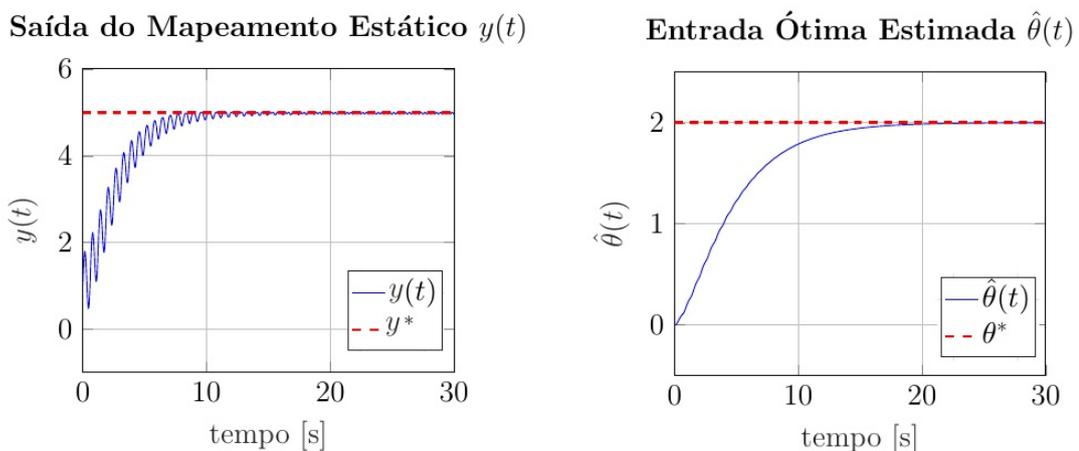


Figura 4: Resultado da simulação da malha de controle de busca extremal com parâmetros $\omega = 10\text{rad/s}$, $a = 0.2$, $K = 0,1$ e mapeamento $y = y^* + 0.5H(\theta - \theta^*)^2$ com $y^* = 5$, $\theta^* = 2$ e $H = -2$.

Para contornar a dependência de H na taxa de convergência do sistema, existente no algoritmo baseado no método de gradiente, existe o algoritmo de busca extremal baseado no método de Newton [7], onde a taxa de convergência independe da hessiana.

1.4 Busca extremal multivariável com algoritmo de Newton para mapeamentos estáticos

A versão da busca extremal com algoritmo de Newton, mostrada na Figura 5, garante que a taxa de convergência seja atribuível pelo projetista, em vez de ser dependente da hessiana do mapa.

Os elementos da matriz desmoduladora $N(t)$ para gerar a estimativa da hessiana são dados por

$$N_{ii}(t) = \frac{16}{a_i^2} (\sin^2(\omega_i t)) \quad , \quad N_{ij}(t) = \frac{4}{a_i a_j} (\sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t)) \quad (27)$$

Para um mapeamento quadrático, o sistema médio em variáveis de erro $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$, $\tilde{\Gamma} = \hat{\Gamma} - H^{-1}$ é

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}}{dt} = -K\tilde{\theta}_{av} - K \underbrace{\tilde{\theta}_{av} H \tilde{\theta}_{av}}_{\text{quadrático}} \quad , \quad \frac{d\tilde{\Gamma}_{av}}{dt} = -K\tilde{\Gamma}_{av} - K \underbrace{\tilde{\Gamma}_{av} H \tilde{\Gamma}_{av}}_{\text{quadrático}} \quad (28)$$

Como os autovalores são determinados por K e ω_r e independentes do H desconhecido, a taxa de convergência (local) é atribuível pelo usuário.

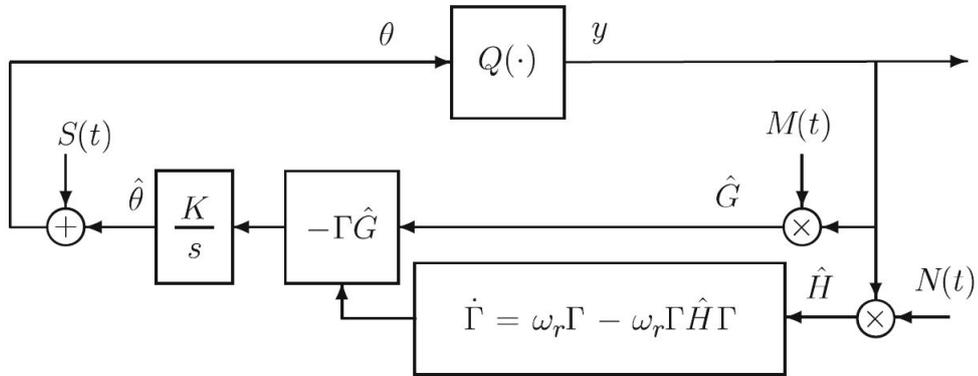


Figura 5: Algoritmo de busca extremal baseado em Newton para mapeamento estático.

Na Figura 5 a excitação multiplicativa $N(t)$ ajuda a gerar a estimativa da hessiana

$\frac{\partial^2 Q(\theta)}{\partial \theta^2}$ como $\hat{H}(t) = N(t)y(t)$. A matriz da equação diferencial de Riccati Γ gera uma estimativa da inversa da hessiana, evitando inversões matriciais da estimativa da hessiana que podem ser singulares durante o transiente.

1.5 Busca extremal multivariável para mapeamentos estáticos

Para mapas estáticos, a busca extremal se estende de maneira direta do caso de entrada única para o caso de múltiplas entradas como mostrada a Figura 6. Nela, é apresentado um mapeamento multivariável $y = Q(\theta)$, onde θ é o vetor de entrada $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$. O algoritmo emprega o sinal do vetor de perturbação aditiva $S(t)$ dado em (29) e o sinal do vetor de demodulação multiplicativo $M(t)$ dado em (30),

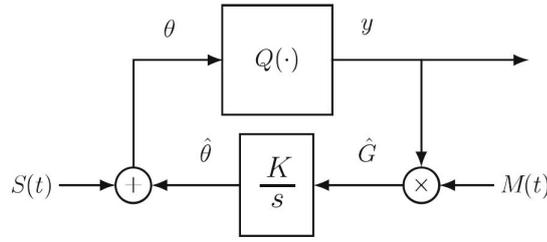


Figura 6: Algoritmo de busca extremal para um mapeamento multivariável.

$$S(t) = [a_1 \sin(\omega_1 t) \cdots a_n \sin(\omega_n t)]^T, \quad (29)$$

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \cdots \frac{2}{a_n} \sin(\omega_n t) \right]^T, \quad (30)$$

com amplitudes de perturbação a_i diferentes de zero e com uma matriz de ganho K que é diagonal. Para garantir a convergência, o projetista deve escolher $\omega_i \neq \omega_j$. Esta é a condição chave que difere o caso de múltiplas entradas do caso de entrada única. Além disso, para simplificar a análise de convergência, o usuário deve escolher ω_i/ω_j como racional e $\omega_i + \omega_j \neq \omega_k$ para diferentes i, j e k .

Se o mapeamento desconhecido é quadrático, isto é, $Q(\theta) = Q^* + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T H(\theta - \theta^*)$, o sistema médio é

$$\dot{\tilde{\theta}}_{ave} = KH\tilde{\theta}_{ave}, \quad H \text{ é a hessiana}, \quad (31)$$

se, por exemplo, o mapeamento $Q(\cdot)$ tem um máximo que é localmente quadrático (o que implica $H = H^T < 0$) e se o usuário escolhe os elementos da diagonal da matriz de ganho K como positivos, o algoritmo de busca extremal é garantido convergir localmente. No entanto, a taxa de convergência depende da hessiana H desconhecida. Essa fraqueza do algoritmo de busca extremal baseado em gradiente é removida com o algoritmo baseado em Newton.

1.6 Adimensionalizando o domínio da EDP

Nas simulações desta dissertação o domínio de difusão das equações diferenciais parciais são adimensionalizados da seguinte forma.

Considere a EDP de difusão

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < D, \quad t > 0. \quad (32)$$

Aplicando a mudança de variáveis

$$0 \leq \bar{x} = \frac{x}{D} \leq 1, \quad (33)$$

e definindo $D := \partial/\partial\bar{x}$, pode-se escrever

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2} = D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{D^2} \frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}. \quad (34)$$

Finalmente, a partir de (34), obtemos

$$u_t(\bar{x}, t) = \frac{1}{D^2} u_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{x}, t), \quad 0 < \bar{x} < 1. \quad (35)$$

1.7 *Backstepping* em EDP's

Backstepping para EDPs é conceito de controle de fronteira [12], onde efeitos desestabilizadores que aparecem no domínio espacial $[0, D]$ podem ser eliminados. A principal ideia é achar a mudança de variáveis que transforma o sistema EDP com fronteira de

controle (em $x = D$)

$$u_t(x, t) = D_u u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (36)$$

$$R_u u(x, t) = U(t), \quad (37)$$

no sistema alvo

$$w_t(x, t) = D_w w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (38)$$

$$R_w w(x, t) = 0, \quad (39)$$

o qual deve ser exponencialmente estável. Os operadores D_u , D_w são operadores diferenciais espaciais e R_u , R_w são operadores de fronteira. Uma transformação de coordenadas padrão

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y) u(y, t) dy, \quad (40)$$

é proposta em Krstić e Smyshlyaev [12], onde $k(x, y)$ é o núcleo da integral (40) que é uma transformação da integral de Volterra. Como a transformação de coordenadas (40) é inversível [12], a estabilidade do sistema alvo traduz-se na estabilidade do sistema original. Portanto, se o controlador de fronteira for escolhido como

$$U(t) = u(D, t) = \int_0^D k(x, y) u(y, t) dy, \quad (41)$$

e existe o ganho *kernel* $k(x, y)$, o sistema original (36)-(37) com o controlador (41) é exponencialmente estável. O ganho *kernel* $k(x, y)$ deve satisfazer as condições que ocorrem substituindo a transformação (40) no sistema alvo (38)-(39) juntamente com as equações do sistema original (36)-(37).

Comentário 1.2 *Existe também o backstepping para EDO, especialmente backstepping integrador [26], onde a lei de realimentação é propagada em sentido reverso através da cadeia de integradores. O nome backstepping para EDP's é causado pela estrutura triangular da transformação da integral de Volterra similar com o backstepping de EDO.*

1.8 Compensação da difusão

Nesta seção, aplicamos a técnica de *backstepping* para EDP's introduzido na seção anterior para compensar o processo de difusão, ou seja, controlar um sistema com dinâmica de atuação governada por EDP's de difusão, seguindo em Krstić [27]. Consideramos a cascata EDP-EDO

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t), \quad (42)$$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (43)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (44)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (45)$$

que consiste em um sistema LIT (linear invariante no tempo) com o valor limite do processo de difusão descrito por (43)-(45) como entrada, veja a Figura 7.

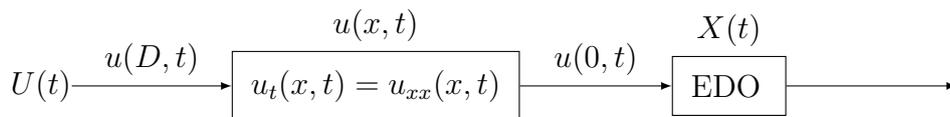


Figura 7: Cascata de EDP de difusão com dinâmica de EDO com entrada limitada $U(t)$ em $x = D$.

Enfatiza-se que a escolha do domínio $[0, D]$, especialmente o parâmetro D , é o mesmo que escolher o coeficiente de difusão \tilde{D} para a EDP $\tilde{u}_t(x, t) = \tilde{D}\tilde{u}_{xx}(x, t)$, onde $x \in [0, 1]$. A transformação

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x k(x, y)u(y, t)dy - \gamma(x)X(t), \quad (46)$$

faz com que o sistema (42)-(45) torne-se no sistema alvo

$$\dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw(0, t), \quad (47)$$

$$w_t(x, t) = w_{xx}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (48)$$

$$w_x(0, t) = 0, \quad (49)$$

$$w(D, t) = 0, \quad (50)$$

que é exponencialmente estável para a escolha adequada de K . Note que o termo extra

$-\gamma(x)X(t)$ em (46) é usado para estabilizar o sistema LIT (42). Calculando as derivadas $w_t(x, t)$, $w_x(x, t)$ e $w_{xx}(x, t)$ de (46), aplicando-as no sistema alvo (47)-(50) e usando o sistema de equações (42)-(45), obtemos as seguintes condições para os ganho *kernels* $k(x, y)$ e $\gamma(x)$:

$$\gamma''(x) = A\gamma(x), \quad (51)$$

$$\gamma(0) = K, \quad (52)$$

$$\gamma'(0) = 0, \quad (53)$$

$$k_{xx}(x, y) = k_{yy}(x, y), \quad (54)$$

$$k(x, x) = 0, \quad (55)$$

$$k_y(x, 0) = \gamma(x)B. \quad (56)$$

As equações (51)-(53) definem um problema de valor inicial através de uma EDO de segunda ordem cuja solução é

$$\gamma(x) = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix} x \right) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

As equações (54)-(56) compreendem uma EDP hiperbólica do tipo Goursat, em que a solução explícita é

$$k(x, y) = \int_0^{x-y} \gamma(\sigma)Bd\sigma. \quad (58)$$

Assim, a lei de controle pode ser calculada com a condição de contorno (45), com a transformação *backstepping* (46), com $\gamma(D)$ em (57) e com o ganho *kernel* (58) como sendo

$$U(t) = \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \left\{ \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix} D \right) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} X(t) + \int_0^D \left(\int_0^{D-y} \exp \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix} \xi \right) d\xi \right) \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Bu(y, t) dy \right\}. \quad (59)$$

Aplicando o controlador (59) na cascata EDP-EDO (42)-(45) com os parâmetros $A = 1$, $B = 1$, o comprimento do domínio $D = 3$, e com ganho do controlador $k = 1.3$, o

equilíbrio do sistema (42) pode ser estabilizado como ilustrado na Figura 8.

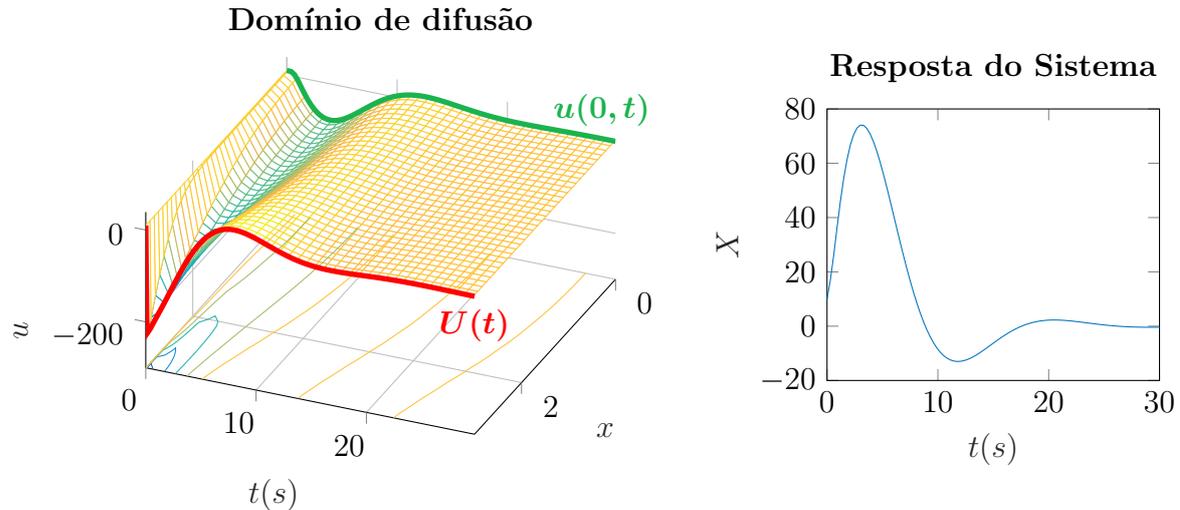


Figura 8: Resultados de simulação do controlador de compensação de difusão com a dinâmica do sistema $\dot{x} = x + u(0, t)$ e dinâmica de atuação descrita por uma EDP de difusão.

Note que o ganho de $U(t)$ é muito maior que a saída do processo de difusão $u(0, t)$, logo da entrada do sistema LIT. Observações revelam que a entrada do processo de difusão é amortecida e atrasada em sua saída. Adicionalmente, enfatiza-se que o amortecimento da saída do processo de difusão aumenta elevando-se a frequência de oscilação da entrada, devido a um significativo pico na intensidade da resposta em altas frequências, como veremos mais adiante.

1.9 Desigualdades importantes

Neste trabalho, as desigualdades de *Young*, *Poincaré*, *Agmon* e *Cauchy-Schwarz* são usadas com frequência. Assim, declaramos essas desigualdades na forma como as usamos, nominalmente para um domínio espacial $[0, D]$. Na literatura [28], estas desigualdades são declaradas para o domínio espacial normalizado $[0, 1]$.

Proposição 1.2 *Desigualdade de Poincaré*

$$\|w(t)\|^2 \leq 2w(D, t)^2 + 4D^2\|w_x(t)\|^2 \quad (60)$$

$$\|w(t)\|^2 \leq 2Dw(0, t)^2 + 4D^2\|w_x(t)\|^2 \quad (61)$$

Proposição 1.3 *Desigualdade de Agmon (Caso 1)*

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(0, t)^2 + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\| \quad (62)$$

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(D, t)^2 + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\| \quad (63)$$

Proposição 1.4 *Desigualdade de Agmon (Caso 2)*

$$w(0, t)^2 \leq \frac{D+1}{D} \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2 \quad (64)$$

$$w(D, t)^2 \leq \frac{D+1}{D} \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2 \quad (65)$$

Proposição 1.5 *Desigualdade de Young*

$$ab \leq \frac{\gamma}{2} a^2 + \frac{1}{2\gamma} b^2, \quad \gamma > 0 \quad (66)$$

Proposição 1.6 *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$\int_0^D u(x, t) w(x, t) dx \leq \|u(t)\| \|w(t)\| \quad (67)$$

As provas estendidas de [28] para o domínio $([0, D])$ das desigualdades de Poincarè e Agmon podem ser encontradas no Apêndice A.

2 BUSCA EXTREMAL PARA EDP UTILIZANDO ALGORITMO GRADIENTE ESCALAR

Neste capítulo, é projetado um controlador por busca extremal pelo método do gradiente para mapas estáticos com atuação dinâmica governada por equações parciais diferenciais de difusão [29]. Para compensar a atuação dinâmica, o controlador é projetado através de uma transformação backstepping de dimensão infinita e é alimentado com a estimativa do gradiente e da hessiana do mapeamento. A principal contribuição deste capítulo é na análise de estabilidade. Primeiramente, obtemos o sistema médio para controle por busca extremal exponencialmente estável. Em seguida, invoca-se o teorema de média para sistemas de dimensões infinitas para EDPs parabólicas do sistema médio via análise de semigrupos, enquanto que em [13] o sistema foi descrito como uma equação diferencial funcional. Finalmente, a convergência para uma região do ponto de extremo é provada.

Na próxima seção, apresentamos o problema com as formulações matemáticas. Na Seção 2.2, mostramos o projeto do controlador de compensação de difusão e as equações do sistema de malha fechada. A Seção 2.3 apresenta a prova do nosso teorema principal sobre a estabilidade e convergência do sistema de malha fechada para controle de busca extremal com dinâmica de atuação governada por EDPs. Simulações numéricas são feitas na Seção 2.4, as quais validam a estabilidade e convergência do sistema de malha fechada.

2.1 Declaração do problema

2.1.1 Dinâmica de atuação e saída

Consideramos dinâmica de atuação, as quais são descritas por um processo de difusão, por exemplo a equação do calor com atuador $\theta(t)$ e o atuador de propagação $\Theta(t)$ dado por

$$\Theta(t) = \alpha(0, t) \tag{68}$$

$$\partial_t \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in [0, D] \tag{69}$$

$$\partial_x \alpha(0, t) = 0 \tag{70}$$

$$\alpha(D, t) = \theta(t), \tag{71}$$

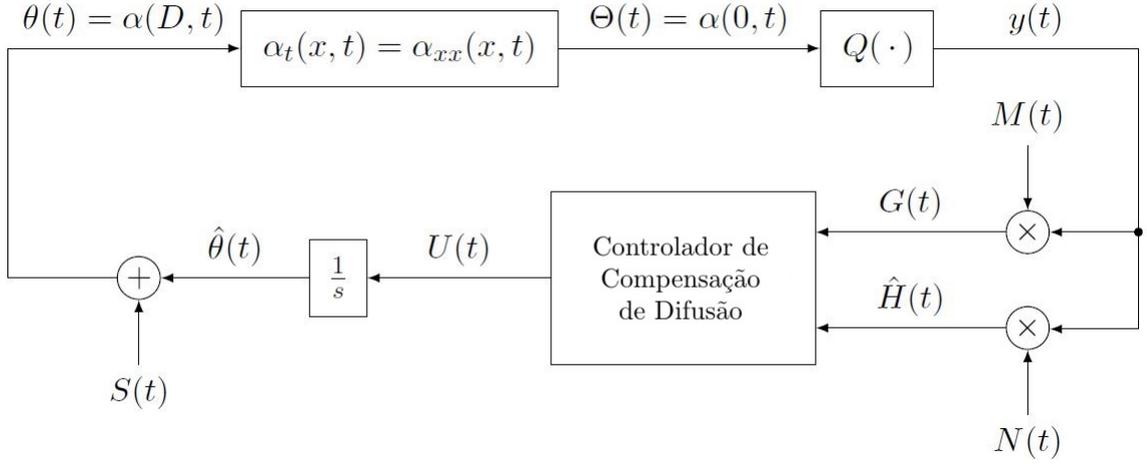


Figura 9: Malha de busca extremal baseada em algoritmo de gradiente com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão.

onde o comprimento do domínio D é conhecido. A medida é definida pela entrada do mapa estático desconhecido (68), tal que

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (72)$$

Por uma questão de simplicidade assumimos o seguinte:

Hipótese 2.1 *O mapa estático não linear desconhecido é quadrático, por exemplo,*

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \quad (73)$$

onde além da constante $\Theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$ começarem desconhecidos, $H < 0$ escalar é a hessiana desconhecida do mapa estático.

A hipótese 2.1 é razoável, desde que toda função não linear em \mathcal{C}^2 pode ser aproximada como a função quadrática na região de seu extremo. Consequentemente, a saída do mapa estático é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \quad (74)$$

Combinando a dinâmica de atuação acima e o esquema básico do controle por busca extremal, adaptando ainda mais o esquema proposto em [13], o controle por busca extremal em malha fechada com dinâmica de atuação governada por um sistema de EDP

de difusão sob controlador de compensação de difusão desconhecido é mostrado na Figura 9.

2.1.2 Sinais e sistemas

Como no esquema básico do controle por busca extremal, definimos a entrada ótima desconhecida θ^* de $\theta(t)$ com respeito ao mapa estático e ao processo de difusão, com a relação $\Theta^* = \theta^*$. Como nosso objetivo é achar a entrada ótima desconhecida θ^* , definimos o erro de estimação

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (75)$$

onde $\hat{\theta}(t)$ é a estimação de θ^* . Para tornar (75) relevante com o otimizador do mapa estático Θ^* , apresentamos o erro de estimação propagado $\vartheta(t)$ através do domínio de difusão

$$\vartheta(t) := \bar{\alpha}(0, t), \quad (76)$$

$$\partial_t \bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx} \bar{\alpha}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (77)$$

$$\partial_x \bar{\alpha}(0, t) = 0, \quad (78)$$

$$\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t). \quad (79)$$

Da malha de controle na Figura 9, temos

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t). \quad (80)$$

Tomando o a derivada do tempo de (76)-(79) e com ajuda de (75) e (80), a dinâmica do erro propagada pode ser escrita como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (81)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (82)$$

$$\partial_x u(0, t) = 0, \quad (83)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (84)$$

onde $u(x, t) := \bar{\alpha}_t(x, t)$ e $\dot{\theta}(t) = \hat{\theta}(t)$, desde que θ^* seja constate. Assim como na busca extremal sem atuação através do domínio de difusão, o sinal de perturbação $S(t)$ deve somar $a \sin(\omega t)$ em $\Theta(t)$, com objetivo de compensar o processo de difusão. Conseqüentemente, $a \sin(\omega t)$ com amplitude de perturbação a e frequência ω é aplicada como segue:

$$S(t) := \beta(D, t), \quad (85)$$

$$\partial_t \beta(x, t) = \partial_{xx} \beta(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (86)$$

$$\partial_x \beta(0, t) = 0, \quad (87)$$

$$\beta(0, t) = a \sin(\omega t). \quad (88)$$

As equações (85)-(88) descreve um problema de geração de trajetória como em [12]. A solução explícita de (85) é dada por

$$\begin{aligned} S(t) = & \frac{1}{2} a e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}} D} \sin \left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2}} D \right) \\ & + \frac{1}{2} a e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}} D} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}} D \right). \end{aligned} \quad (89)$$

A relação entre o erro de estimação propagado $\vartheta(t)$, a entrada propagada $\Theta(t)$, e o otimizador do mapa estático Θ^* é dada por

$$\vartheta(t) + a \sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*, \quad (90)$$

que pode ser facilmente comprovado, considerando $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ juntamente com as soluções de (68)-(71), (76)-(79) e (85)-(88). Resta definir o sinal dither $N(t)$ que é usado para estimar a hessiana do mapa estático multiplicando-o pela saída $y(t)$ do mapa estático. Ghaffari, Krstić e Nešić [7], derivaram a estimativa da hessiana como

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad \text{onde} \quad N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (91)$$

Observe que o sinal dither $M(t)$, para estimar o gradiente, é o mesmo que no controle por busca extremal básico (veja a equação (17)), tal que

$$G(t) = M(t)y(t). \quad (92)$$

2.2 Projeto do controlador e sistema de malha fechada

2.2.1 Controlador de compensação de difusão

Consideramos a cascata de EDP-EDO (81)-(84). Como em [16] usamos a transformação backstepping

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x q(x, y)u(y, t)dy - \gamma(x)\vartheta(t), \quad (93)$$

com o ganho kernels

$$q(x, y) = \bar{K}(x - y) \quad \text{e} \quad \gamma(x) = \bar{K}, \quad (94)$$

que transformam (81)-(84) no sistema alvo

$$\dot{\vartheta}(t) = \bar{K}\vartheta(t) + w(0, t), \quad (95)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_{xx}w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (96)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0, \quad (97)$$

$$w(D, t) = 0, \quad (98)$$

com $\bar{K} < 0$. Como o sistema alvo (95)-(98) é exponencialmente estável (veja [16]), o controlador que compensa o processo de difusão pode ser obtido através da avaliação da transformação backstepping (93) em $x = D$

$$U(t) = \bar{K}\vartheta(t) + \bar{K} \int_0^D (D - y)u(y, t)dy. \quad (99)$$

No entanto, a lei de controle proposta em (99) não é diretamente aplicável, porque não temos medição de $\vartheta(t)$. Assim sendo, introduzimos um importante resultado de [7]: A versão média do gradiente (92) e a estimativa da hessiana (91) são calculadas para

$$G_{\text{av}}(t) = H\vartheta_{\text{av}}(t), \quad \hat{H}_{\text{av}} = H, \quad (100)$$

se um mapa quadrático como em (73) for considerado. Para a prova de (100) veja [7]. Em relação a (100), tiramos a média de (99) e escolhemos $\bar{K} = KH$ com $K > 0$ e a hessiana

H desconhecida do mapa estático, tal que

$$U_{\text{av}}(t) = KH\vartheta_{\text{av}}(t) + KH \int_0^D (D - y)u_{\text{av}}(y, t)dy. \quad (101)$$

Conseqüentemente, aplicando a estimativa da média do gradiente e da hessiana (100) em (101), obtemos

$$U_{\text{av}}(t) = KG_{\text{av}}(t) + K\hat{H}_{\text{av}} \int_0^D (D - y)u_{\text{av}}(y, t)dy. \quad (102)$$

Devido a razões técnicas na aplicação do teorema da média para sistemas de dimensão infinita ([24]) na prova de estabilidade que segue, introduzimos um filtro passa baixa no controlador. Finalmente, temos a lei de controle de dimensão infinita média para compensar o processo de difusão

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ K \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^D (D - y)u(y, t)dy \right] \right\}, \quad (103)$$

onde, $c > 0$, é escolhido posteriormente. Por conveniência de notação, misturamos o domínio de tempo e frequência em (103), onde o filtro passa baixa atua como um operador $\{\cdot\}$. A lei de realimentação (103) depende da informação completa do estado da EDP $u(x, t)$, $x \in [0, D]$. Como mostraremos depois, podemos escrever a dinâmica do erro (81)–(84) como um sistema de dimensão infinita incluindo $U(t)$ como um estado, devido ao filtro passa baixa introduzido. Conseqüentemente, (103) é um controlador de realimentação de estado completo.

2.2.2 Sistema de malha fechada

Primeiramente, colocando (90) em (74), tal que a saída do mapa estático seja dada em termos de $\vartheta(t)$, temos

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2} (\vartheta(t) + a \sin(\omega t))^2. \quad (104)$$

Continuamos inserindo (104) no gradiente (92) e na estimativa da hessiana (91) e depois as equações resultantes na lei de controle baseada na média (104), com isso obtemos

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[y^* + \frac{H}{2} \vartheta^2(t) + Ha \sin(\omega t) \vartheta(t) + \frac{Ha^2}{2} \sin^2(\omega t) \right] \times \left[\frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D (D-y)u(y,t)dy \right] \right\}. \quad (105)$$

Finalmente, substituindo (105) em (84), podemos escrever o sistema em malha fechada (81) - (84) como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0,t), \quad (106)$$

$$\partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), \quad x \in [0, D], \quad (107)$$

$$\partial_x u(0,t) = 0, \quad (108)$$

$$u(D,t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K [Hf_1(t) + H\vartheta(t) + \sin(\omega t)f_2(t) - \cos(2\omega t)f_3(t) - \sin(3\omega t)f_4(t) + \cos(4\omega t)f_5(t)] \right\}, \quad (109)$$

onde $f_1(t) = \int_0^D (D-y)u(y,t)dy$, $f_2(t) = (2y^* + H\vartheta^2(t) + 4\vartheta(t)f_1(t) + 3a^2H/4)/a$, $f_3(t) = 8y^*f_1(t)/a^2 + H\vartheta(t) + 2H + 4H\vartheta^2(t)f_1(t)/a^2$, $f_4(t) = 4H\vartheta(t)f_1(t)/a + Ha/4$ e $f_5(t) = Hf_1(t)$.

2.3 Análise de estabilidade e convergência

O seguinte teorema sumariza a propriedade de estabilidade e convergência do sistema de malha fechada (106)-(109) e é provado nesta seção.

Teorema 2.1 *Para $c > 0$ suficientemente grande, existe algum $\bar{\omega}(c) > 0$, tal que $\forall \omega > \bar{\omega}$, o sistema de malha fechada (106)-(109) com estados $\vartheta(t)$, $u(x,t)$, tenha uma única solução exponencialmente estável periódica em t de período $\Pi := 2\pi/\omega$, determinada por $\vartheta^\Pi(t)$, $u^\Pi(x,t)$, satisfazendo $\forall t \geq 0$:*

$$\left(|\vartheta^\Pi(t)|^2 + \|u^\Pi(t)\|^2 + \|\partial_x u^\Pi(t)\|^2 + |u^\Pi(D,t)|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (110)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O} \left(|a|e^{\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega \right), \quad (111)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O} (|a| + 1/\omega), \quad (112)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O} (|a|^2 + 1/\omega^2). \quad (113)$$

Para esclarecer como é provada a estabilidade e convergência para vizinhança do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$, respectivamente, é apresentada a estrutura da prova na Figura 10.

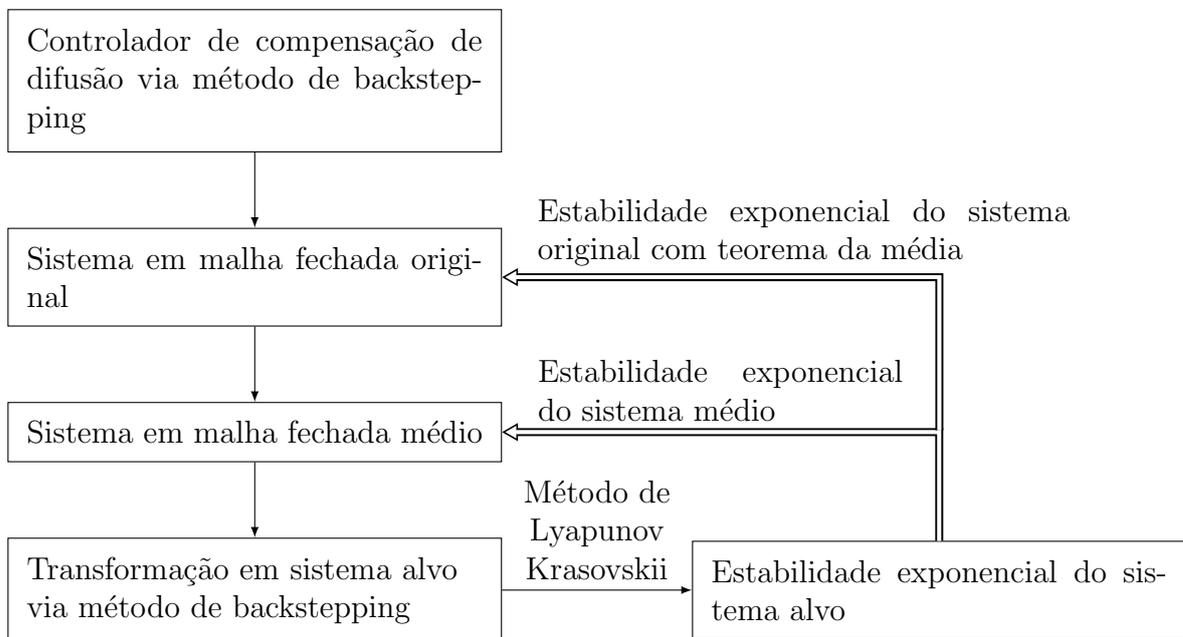


Figura 10: Estrutura do projeto do controlador e prova da estabilidade do sistema em malha fechada.

O primeiro passo, desenvolver o controlador de compensação de difusão, já foi feito como apresentado na seção anterior. Portanto, começamos com o sistema original em malha fechada, o qual, para aplicar o teorema da média, expandimos todas as equações. Utilizando a transformação backstepping, primeiramente mostra-se, no sistema resultante, sua estabilidade fazendo uso de funções de Lyapunov Krasovskii adequada. A estabilidade do sistema médio em malha fechada é concluída devido a invertibilidade da transformação feita inicialmente. Invocando o teorema da média para sistemas de dimensões infinitas, o Teorema 1.2, prova a estabilidade exponencial dos sistemas originais de malha fechada. Finalmente, podemos mostrar a convergência de $(\theta(t), \Theta(t), y(t))$ para uma vizinhança

do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$ para $t \rightarrow \infty$.

Prova 2.1 *Estruturada do Passo 1 ao 6 abaixo: Primeiro, nos Passos 1 a 4, mostramos a estabilidade exponencial do sistema de malha fechada médio de (106)-(109) através da transformação backstepping. Então invocamos o teorema da média para sistemas de dimensões infinitas ([24]) no Passo 5 para mostrar a estabilidade exponencial do sistema de malha fechada original (106)-(109). Finalmente, no Passo 6 mostramos a convergência de $(\theta(t), \Theta(t), y(t))$ para a região do extremo de $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$.*

Passo 1: *Sistema de malha fechada média*

A versão média do sistema (106)-(109) para ω grande é

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (114)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_{xx} u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (115)$$

$$\partial_x u_{av}(0, t) = 0, \quad (116)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -c u_{av}(D, t) + \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^D (D - y) u_{av}(y, t) dy \right], \quad (117)$$

onde o filtro passa baixa é representado no espaço de estado. Para derivar (114)-(117), os termos em (109) que dependem de seno e cosseno com argumento $k\omega$ para $k = 1, \dots, 4$, são substituídos por zero.

Passo 2: *Transformação backstepping no sistema alvo*

A transformação backstepping (veja [16])

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - KH \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^x (x - y) u_{av}(y, t) dy \right], \quad (118)$$

mapeia o sistema de malha fechada médio (114)-(117) no sistema alvo exponencialmente estável (estabilidade mostrada no Passo 3)

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = KH\vartheta_{av}(t) + w(0, t), \quad (119)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_{xx} w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (120)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0, \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w(D, t) = & -cw(D, t) - KHw(D, t) \\ & - (KH)^2 e^{KHD} \left[\int_0^D (e^{-KH y} - 1) w(y, t) dy + \vartheta_{av}(t) \right]. \end{aligned} \quad (122)$$

O sistema alvo (119)-(122) pode ser derivado através da aplicação da transformada backstepping inversa (veja [16])

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) + KHe^{KHx}\vartheta_{av}(t) + KH \int_0^x (e^{KH(x-y)} - 1) w(y, t) dy, \quad (123)$$

no sistema de malha fechada média (114)-(117). Adicionalmente tomando-se a derivada do tempo da transformação backstepping (118) junto com (117) e sua inversa (123), chegamos a (122).

Passo 3: Estabilidade exponencial do sistema alvo

Considere a função Lyapunov-Krasovskii

$$\Upsilon(t) = \frac{\vartheta_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \|w(t)\|^2 + \frac{b}{2} \|\partial_x w(t)\|^2 + \frac{d}{2} w^2(D, t), \quad (124)$$

onde $a, b, d > 0$ a serem escolhidos mais tarde. Definimos $\lambda := -KH$ com $\lambda > 0$. Calculando a derivada do tempo de (124), associada com a solução do sistema alvo (119)-(122) e com ajuda da integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) = & -\lambda \vartheta_{av}^2(t) + \vartheta_{av}(t)w(0, t) \\ & + aw(D, t)\partial_x w(D, t) - a\|\partial_x w(t)\|^2 \\ & + b\partial_x w(D, t)\partial_t w(D, t) - b\|\partial_{xx} w(t)\|^2 \\ & + dw(D, t)\partial_t w(D, t). \end{aligned} \quad (125)$$

Após extensos cálculos, aplicando as desigualdades de Young, Poincaré, Agmon e Cauchy-Schwarz frequentemente e escolhendo $a = (c - \lambda)/(8D\lambda^3)$, $b = 1/(8D\lambda^3)$, $d = 1$, temos que

$$\dot{\Upsilon}(t) \leq -\frac{\lambda}{4}\vartheta_{av}^2(t) + (c_1^* - c)w^2(D, t) + (c_2^* - c)\|\partial_x w(t)\|^2 - \frac{1}{32D\lambda^3}\|\partial_{xx}w(t)\|^2, \quad (126)$$

com

$$c_1^* = \frac{3}{2}\lambda^3 + \lambda + \frac{1 + 2D}{\lambda} + 2D\lambda\|e^{-\lambda(D-y)} - 1\|^2, \quad (127)$$

$$c_2^* = \lambda + 8D\lambda^3 \left[\frac{4D^2 + 1}{\lambda} + 4D^2\lambda\|e^{-\lambda(D-y)} - 1\|^2 \right]. \quad (128)$$

Consequentemente, de (126), se c é escolhido tal que $c > \max\{c_1^*, c_2^*\}$, obtemos para $\mu > 0$

$$\dot{\Upsilon}(t) \leq -\mu\Upsilon(t). \quad (129)$$

Então, o sistema alvo (119)-(122) é exponencialmente estável no sentido da norma \mathcal{H}_1

$$(\vartheta_{av}^2(t) + \|w(t)\|^2 + \|\partial_x w(t)\|^2 + w^2(D, t))^{1/2}, \quad (130)$$

isto é, na variável transformada (ϑ_{av}, w) .

Passo 4: Estimativa da estabilidade exponencial \mathcal{H}_1 do sistema de malha fechada médio

Definimos

$$\Psi(t) = \vartheta_{av}^2(t) + \|u_{av}(t)\|^2 + \|\partial_x u_{av}(t)\|^2 + u_{av}^2(D, t). \quad (131)$$

Em seguida, existe um limite superior e inferior do funcional Lyapunov-Krasovskii (124) em relação a $\Psi(t)$, de modo que

$$\rho\Psi(t) \leq \Upsilon(t) \leq \bar{\rho}\Psi(t), \quad \text{onde } \rho = \tau\sigma, \quad \bar{\rho} = \bar{\tau}\bar{\sigma}, \quad (132)$$

com

$$\underline{\sigma} = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right\}, \quad \bar{\sigma} = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right\}, \quad (133)$$

e

$$\underline{\tau} = 1 / \max \{ \delta_2 + \epsilon_3 + \zeta_3 + 1, \delta_1 + \epsilon_1 + \zeta_2, \epsilon_2, \zeta_1 \}, \quad (134)$$

$$\bar{\tau} = \max \{ \alpha_2 + \gamma_3 + 1, \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_2, \beta_2, \gamma_1 \}, \quad (135)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \xi_1, \xi_2$ e ξ_3 são definidos no Apêndice. A equação (132), junto com a estabilidade exponencial do sistema alvo (129), implica

$$\Psi(t) \leq \frac{\bar{\rho}}{\rho} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (136)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial do sistema de malha fechada médio (114)-(117) no sentido da norma \mathcal{H}_1 $\Psi^{1/2}(t)$ na variável (ϑ_{av}, u_{av}) .

Passo 5: *Invocando o teorema da média para sistemas de dimensões infinita*

O teorema da média para sistemas de dimensões infinitas ([24]) reivindica que os pressupostos sejam satisfeitos da seguinte forma: O sistema de malha fechada deve estar na forma

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t) + J(\omega t, z(t)), \quad (137)$$

onde $z(t) \in \mathcal{X} := \mathcal{H}_1([0, D])$ é o vetor de estado de dimensão infinita, Γ gera um semigrupo analítico e a não linearidade $J : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ com $t \mapsto J(t, z)$ é diferenciável Fréchet em z , fortemente contínuo e periódico em y , uniformemente com respeito a z no conjunto compacto de \mathcal{X} . Pela transformação de estado de (106) - (109) com $v(x, t) = u(x, t) - U(t)$,

obtemos no sistema de malha fechada com condições de fronteira homogêneas

$$\dot{\vartheta}(t) = v(0, t) + U(t), \quad (138)$$

$$\partial_t v(x, t) = \partial_{xx} v(x, t) - \phi(\vartheta, v, U, t), \quad x \in [0, D], \quad (139)$$

$$\partial_x v(0, t) = 0, \quad (140)$$

$$v(D, t) = 0, \quad (141)$$

$$\dot{U}(t) = \phi(\vartheta, v, U, t), \quad (142)$$

com

$$\phi(\vartheta, v, U, t) = -cU(t) + cK \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^D (D - y)(v(y, t) + U(t)) dy \right]. \quad (143)$$

Em seguida escrevemos o sistema de EDP (139)-(141) como uma equação evolucionária (veja [19]) no espaço Banach \mathcal{X}

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}V(t) - \tilde{\phi}(\vartheta, V, U, t), \quad t > 0, \quad (144)$$

onde $V(t)$ é a função que pertence ao espaço Banach \mathcal{X} . Além disso, \mathcal{A} é a realização da derivada de segunda ordem com uma condição de limite Dirichlet e Neumann em \mathcal{X} com

$$\mathcal{A}\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (145)$$

e o domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{X} : \varphi, \frac{d}{dx}\varphi \in \mathcal{X} \text{ are a.c., } \frac{d^2}{dz^2}\varphi \in \mathcal{X}, \frac{d}{dz}\varphi(0) = 0, \varphi(D) = 0 \right\}, \quad (146)$$

onde a.c. significa absoluto contínuo. Para expressar $v(0, t)$ na EDO (138) em termos de $V(t)$, apresentamos o operador linear de limite $\mathcal{B} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{B}V(t) := v(0, t). \quad (147)$$

Além disso, definimos os operadores lineares $\alpha^\top : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ como

$$\begin{aligned}\alpha^\top V(t) &:= \int_0^D (D-y)v(y,t)dy, \\ \beta\zeta &:= [\beta_1, \beta_2, \dots]^\top \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R} \\ \text{sendo } \beta_k &= \int_0^D \psi_k(x)dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{D}} \frac{2D}{\pi(2k-1)} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{148}$$

onde $\psi_k(x) = \sqrt{2/D} \cos(\pi/2(2k-1)x/D)$, $k = 1, 2, \dots$, são autofunções de \mathcal{A} . Finalmente, o sistema de malha fechada com vetor de estado de dimensão infinita $z(t) = [\vartheta(t) \ V(t) \ U(t)]^\top$ pode ser reescrito como (137) com

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B} & 1 \\ 0 & \mathcal{A} & c\beta \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad J(\omega t, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -c\beta K [G(t) + \hat{H}(t)g(z)] \\ cK [G(t) + \hat{H}(t)g(z)] \end{bmatrix},\tag{149}$$

onde $g(z) = \frac{1}{2}D^2U(t) + \alpha^\top V(t)$. Como \mathcal{A} é um operador setorial, por consequência gera um semigrupo analítico ([20]), \mathcal{B} é limitado por \mathcal{A} ($\|\mathcal{B}V(t)\| \leq 4D\sqrt{D}\|\mathcal{A}V(t)\|$) e β , c são limitados, Γ gera um semigrupo analítico através do teorema do operador matricial em [23]. Além disso, $J(\omega t, z)$ em (149) é diferenciável Fréchet em z , fortemente contínuo e periódico em t , uniformemente com respeito a z . Portanto, todos os pressupostos para aplicar o teorema de média para sistemas de dimensões infinitas em [24] estão satisfeitos e o sistema de malha fechada médio é exponencialmente estável. Assim, o sistema de malha fechada original (311)-(314) tem uma solução exponencialmente estável periódica $z^\Pi(t)$ que satisfaz (110).

Passo 6: *Convergência para região de extremo*

Aplicando as desigualdades de Agmon, Poincaré e Young no lado esquerdo de (76), junto com (76)-(79), temos

$$\tilde{\theta}^2(t) \leq 3\vartheta(t)^2 + (4D+1)\|\bar{\alpha}_x\|^2.\tag{150}$$

Tomando a derivada no tempo de

$$\tilde{\Upsilon}(t) = \frac{\mu}{16D} \|\bar{\alpha}_x(t)\|^2 + \frac{1}{2} \vartheta^2(t) + \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|u_x(t)\|^2 + \frac{1}{2} U(t)^2, \quad (151)$$

junto com a estabilidade exponencial do sistema original, temos que

$$\dot{\tilde{\Upsilon}} \leq -\mu \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{64D^3} \right\} \tilde{\Upsilon}, \quad \mu > 0. \quad (152)$$

Por isso, existe algum $M > 0$, tal que

$$\|\bar{\alpha}_x(t)\|^2 \leq M e^{-kt} \quad \text{com} \quad k = \mu \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{64D^3} \right\}. \quad (153)$$

Com (150) e (153) temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3|\vartheta(t)|^2\}. \quad (154)$$

Igualmente, (154) pode ser escrito em termos da solução periódica $\vartheta^{\text{II}}(t)$ como segue

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3|\vartheta(t) + \vartheta^{\text{II}}(t) - \vartheta^{\text{II}}(t)|^2\}. \quad (155)$$

Ao aplicar a desigualdade de Young, obtemos

$$|\vartheta(t) + \vartheta^{\text{II}}(t) - \vartheta^{\text{II}}(t)|^2 \leq \sqrt{2} (|\vartheta(t) - \vartheta^{\text{II}}(t)|^2 + |\vartheta^{\text{II}}(t)|^2), \quad (156)$$

e pelo teorema da média [24], temos $\vartheta(t) - \vartheta^{\text{II}}(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Por isso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3\sqrt{2}|\vartheta^{\text{II}}(t)|^2\}. \quad (157)$$

Juntamente com (110) e (157), obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega). \quad (158)$$

Uma vez que, como visto em (89), $S(t)$ é da ordem $\mathcal{O}\left(|a|e^{\sqrt{\omega/2}}\right)$, de (75) obtemos $\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)$, e juntamente com (75) obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}\left(|a|e^{\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega\right). \quad (159)$$

A convergência do atuador propagado $\Theta(t)$ para o otimizador Θ^* é muito mais fácil de provar. Usando (90) e tomando o valor absoluto, tem-se

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a \sin(\omega(t))|. \quad (160)$$

Como na prova da convergência do parâmetro $\theta(t)$ para a entrada ótima θ^* acima, escrevemos (160) em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$ e seguimos os mesmos passos aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente pelo teorema da média ([24]). Assim, juntamente com (110), finalmente conseguimos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega). \quad (161)$$

Para mostrar a convergência da saída $y(t)$ do mapa estático para o valor ótimo y^* , substituímos $\Theta(t) - \Theta^*$ em (74) por (90) e tomamos o valor absoluto

$$|y(t) - y^*| = \left| \frac{H}{2} [\vartheta(t) + a \sin(\omega(t))]^2 \right|. \quad (162)$$

Expandindo o termo quadrático em (162) e aplicando a desigualdade de Young à equação resultante, tem-se $|y(t) - y^*| = |H [\vartheta(t)^2 + a^2 \sin^2(\omega t)]|$. Como antes, adicionamos a solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$, aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente pelo teorema da média ([24]). Assim, novamente com (110), temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2). \quad (163)$$

Finalmente, provamos o Teorema 2.1. □

2.4 Simulações

Simulações numéricas ilustram a propriedade de estabilidade e convergência da busca por extremo com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão. Considere um mapa estático quadrático como em (73), com hessiana $H = -2$, otimizador $\Theta^* = 2$ e valor ótimo $y^* = 5$. O comprimento do domínio é definido sendo $D = 1$. Os parâmetros do sinal dither e do controlador projetados são escolhidos como $\omega = 10\text{rad/s}$, $a = 0.2$, $c = 10$ e $K = 0.2$. Os resultados da simulação de malha fechada (106)-(109) são ilustrados na Figura 11.

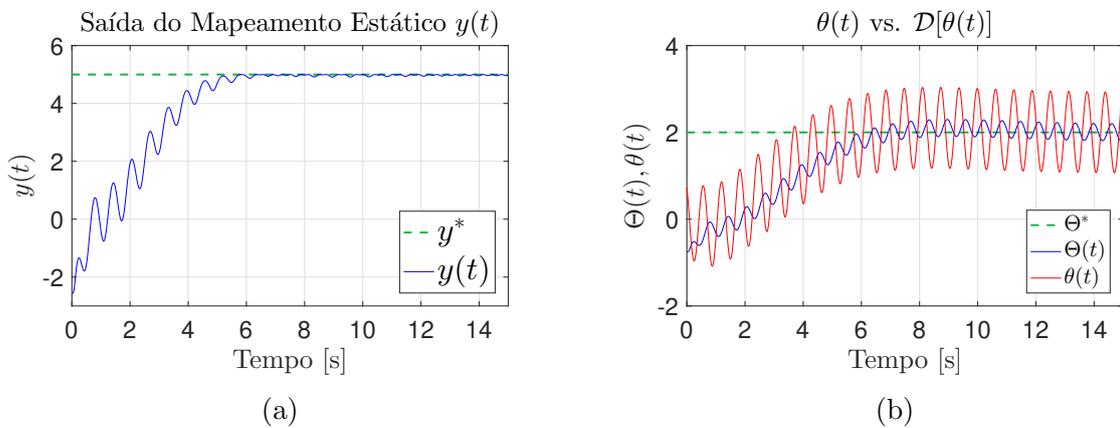


Figura 11: Controle por busca extremal com atuação dinâmica governado por EDP de difusão com controlador compensador (103) e sinal de perturbação (89) : (a) mapa estático $y(t)$; (b) parâmetros $(\theta(t), \Theta(t))$.

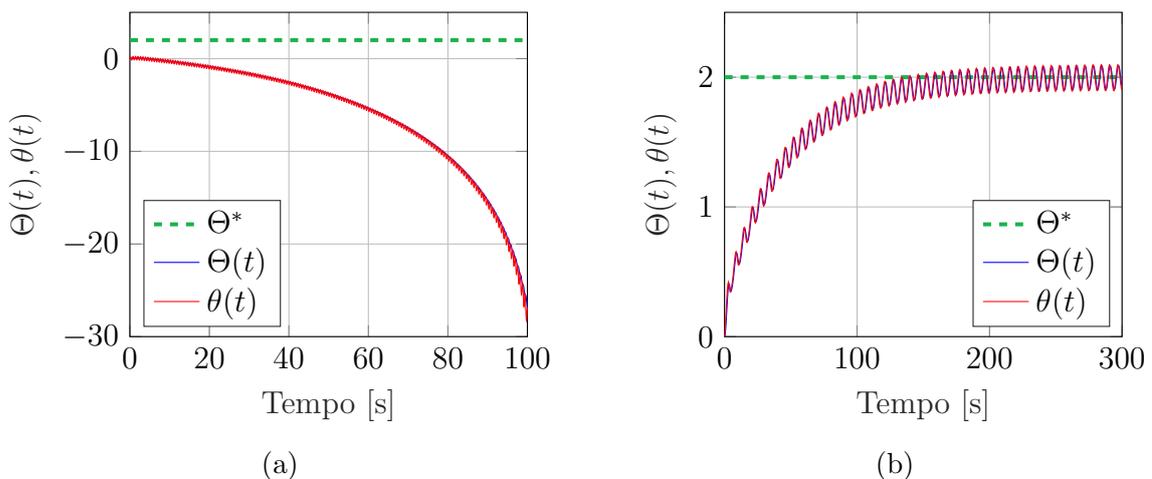


Figura 12: Controle por busca extremal básico sem compensação com ganho adaptativo K e sinal de perturbação (16) : (a) instabilidade para ω grande; (b) convergência lenta para ω pequeno.

Observamos que cada variável (θ, Θ, y) converge para a região ótima $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$. A maior região de convergência de $\theta(t)$, como indicado em (111) e observado na Figura 11, surge do deslocamento significativo em altas frequências do domínio da difusão. O desempenho aprimorado pelo controlador projetado (103) e o sinal de perturbação adaptado (89) podem ser vistos comparando-se a simulação resultante do controle por busca extremal básico com adaptação do ganho K e perturbação do sinal (16), com a atuação dinâmica governada pela EDP de difusão, conforme ilustrado na Figura 12. Por um lado, se a frequência ω é a mesma que na simulação da Figura 11, observamos a instabilidade de $\Theta(t)$ no Θ^* , como ilustrado na Figura 12 (a). Por outro lado, como mostrado em [4], para frequências baixas $\omega = 1.0\text{rad/s}$, tão baixa quanto o menor autovalor do processo de difusão, a velocidade de convergência fica muito menor do que o resultado na Figura 11, veja Figura 12 (b). Assim, nosso controlador por busca extremal proposto representa uma melhoria do controle por busca extremal básico na presença de dinâmica de atuação governada por EDP de difusão.

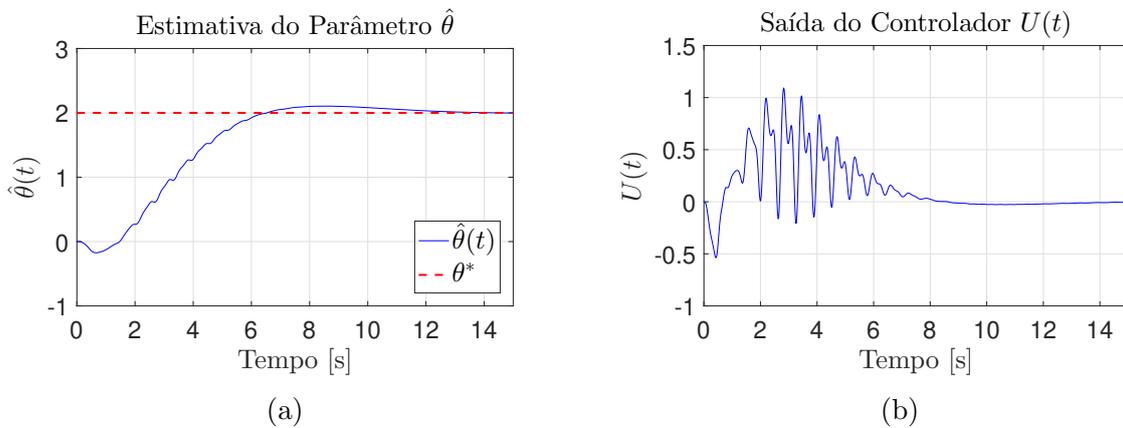


Figura 13: Representação em (a) do sinal $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ e em (b) mostra-se a resposta do controlador $U(t)$.

Na Figura 13a, é possível observar a convergência do sinal $\hat{\theta}(t)$ ao seu valor ótimo θ^* e ao lado, na Figura 13b, observamos a atenuação do sinal de controle à medida que a saída do mapeamento tende à vizinhança de seu valor ótimo y^* .

2.5 Avaliação de sensibilidade

O sistema em questão possui três parâmetros projetáveis: a , ω e K , dos quais a influência dos dois primeiros fora mostrada e provada em (111) - (113) e nos passos seguintes. É importante compreender a influência de cada um deles para que a resposta $y(t)$ do modelo convirja para o extremo do mapeamento. Sendo assim, foi realizado um conjunto de testes de sensibilidade onde, em cada caso, variou-se o valor de um dos parâmetros para observar a influência do mesmo para a saída do mapeamento. Os outros parâmetros são mantidos em seus valores utilizados na simulação feita inicialmente, assim como as condições iniciais. Os diferentes valores utilizados no estudo foram obtidos calculando os percentuais 40, 60, 80, 120, 140 e 160% em cima do valor utilizado na simulação.

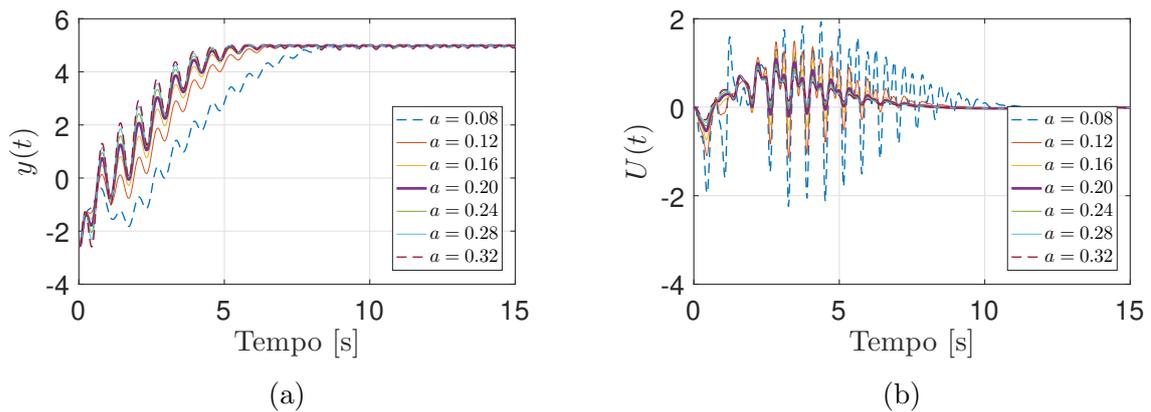


Figura 14: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro a .

É possível observar nos gráficos da Figura 14a que conforme aumenta-se o valor do parâmetro a , a tendência é de que a saída $y(t)$ alcance a vizinhança do extremo da função mais rapidamente quando comparamos com o valor de a baixo ($a = 0.08$ e $a = 0.32$). Porém, lembrando que quanto maior o valor de a , segundo mostra (111) - (113), maior será o erro $|\theta(t) - \theta^*|$, $|\Theta(t) - \Theta^*|$ e $|y(t) - y^*|$. Além disso, na Figura 14b, observa-se que quanto maior o valor de a , maior a amplitude do sinal de controle.

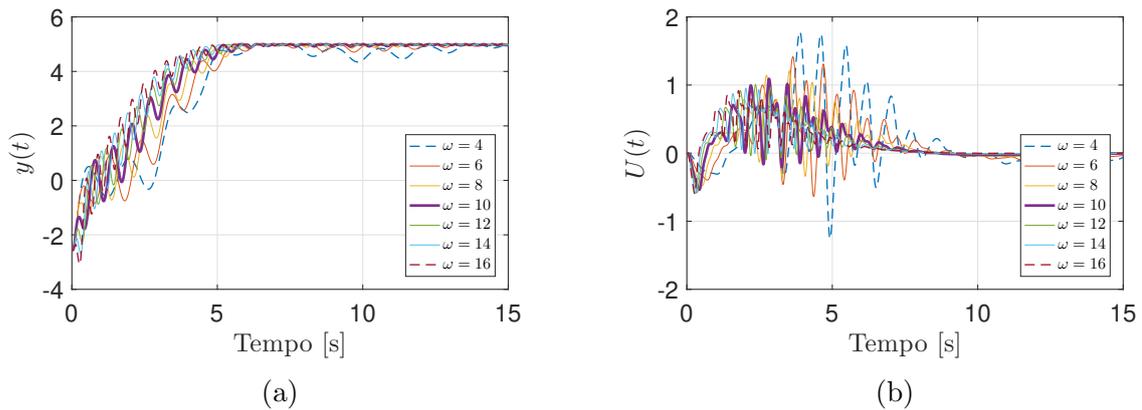


Figura 15: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω .

É possível observar no gráfico da Figura 15a que, conforme aumenta-se o valor do parâmetro ω , a tendência é de que a saída $y(t)$ alcance a vizinhança do extremo da função mais rapidamente quando comparamos com o valor de ω baixo ($\omega = 4$ e $\omega = 16$). Lembrando também que quanto menor o valor de ω , segundo mostra (111) - (113), maior será o erro $|\theta(t) - \theta^*|$, $|\Theta(t) - \Theta^*|$ e $|y(t) - y^*|$. Além disso, na Figura 15b, observa-se que quanto maior o valor de ω , maior a amplitude do sinal de controle.

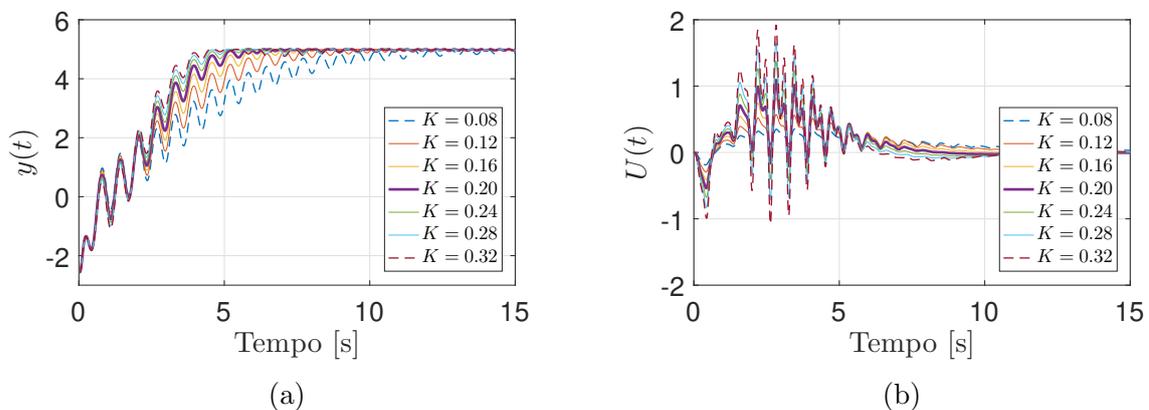


Figura 16: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro K .

Agora, fazendo a análise para o parâmetro K na Figura 16a e Figura 16b, que não está correlacionado com (111) - (113), mas sim a (103), vemos que, como esperado, ao elevarmos seu valor temos um aumento nos picos da saída do controlador que leva a um alcance de $y(t)$ a vizinhança do extremo da função mais rapidamente quando comparamos com o valor de K baixo ($K = 0.08$ e $K = 0.32$). Também, é possível observar, na Figura 16b, que quanto maior o valor de K , maior a amplitude do sinal de controle.

Além desses três parâmetros que são escolhidos pelo projetista, cabe também analisar a influência da escolha da condição inicial $\hat{\theta}(0)$ que é adicionado ao sinal $S(t)$. Para isso, foi realizado um conjunto de testes de sensibilidade onde o valor da condição inicial foi variado para observar a influência do mesmo na saída do mapeamento. Os outros parâmetros são mantidos em seus valores utilizados na simulação feita inicialmente. Os diferentes valores utilizados no estudo foram obtidos expandindo o valor utilizado na simulação original tanto para positivo quanto para negativo ao passo de uma unidade.

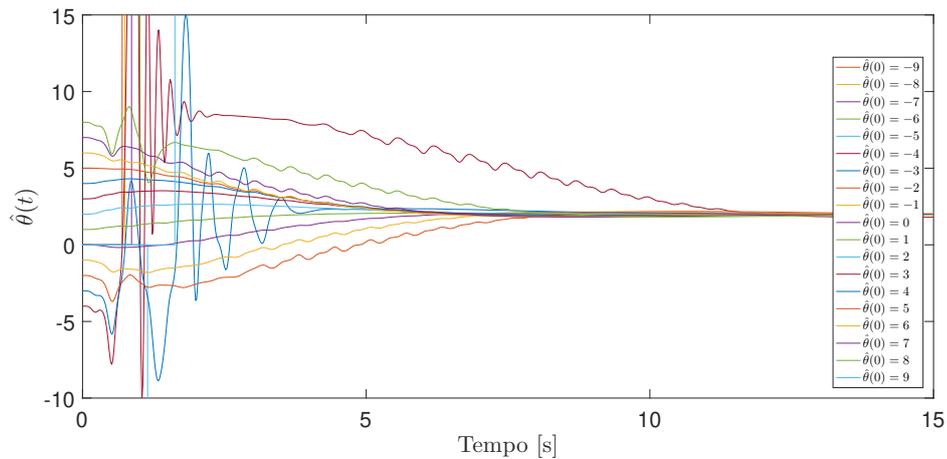


Figura 17: Representação de $\hat{\theta}(t)$ quando varia-se o valor da condição inicial $\hat{\theta}(0)$.

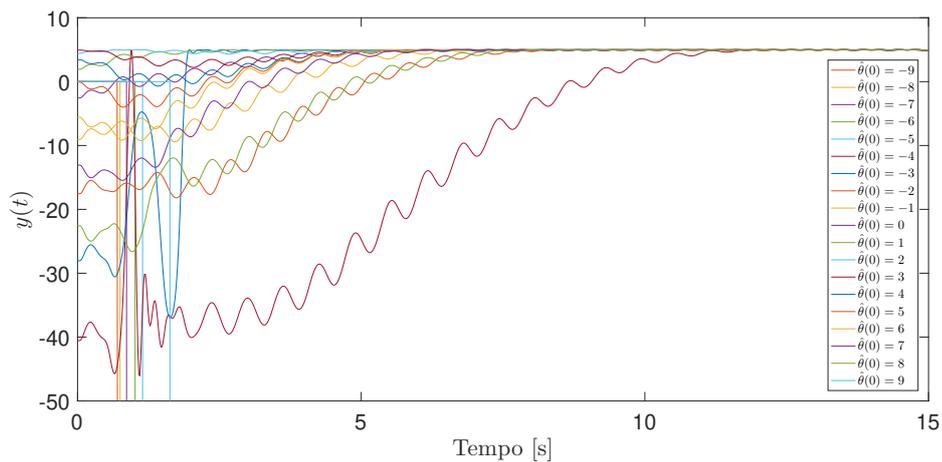


Figura 18: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial $\hat{\theta}(0)$.

Foi observado neste experimento, Figura 17 e Figura 18, que a operacionalidade deste controlador para estes parâmetros em questão limita-se a variar a condição inicial $\hat{\theta}(0)$ de -4 a 8 . Os pontos dentro da faixa operacional tendem a convergir para o valor

ótimo estipulado como $y^* = 5$ e $\theta^* = 2$. As retas verticais que passam dos limites do eixo das ordenadas são a representação das curvas geradas quando designado valor a $\hat{\theta}(0)$ fora da faixa de operação de -4 a 8 .

3 BUSCA EXTREMAL ESCALAR PARA EDP DE DIFUSÃO UTILIZANDO ALGORITMO DE NEWTON

No capítulo que segue, publicado e apresentado no congresso Congresso Brasileiro de Automática 2018 [30], é projetado um algoritmo de busca extremal escalar para mapeamentos estáticos com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão. Em particular, é considerado o algoritmo baseado em Newton [7], ao invés do algoritmo baseado em gradiente, visto no capítulo anterior. O algoritmo de Newton oferece vantagens consideráveis uma vez que pode atingir melhor/mais rápida convergência do que o algoritmo baseado em gradiente, com uma velocidade independente da hessiana desconhecida do mapeamento. O compensador para a dinâmica de atuação é projetado através da transformação *backstepping* de dimensão infinita realimentando a estimativa do gradiente e da inversa da hessiana do mapeamento estático a ser maximizado. A equação diferencial de Riccati estima a inversa da hessiana. Computar algebricamente a estimativa direta da inversa da hessiana é suscetível à singularidade, enquanto que empregar o filtro Riccati remove essa dificuldade.

A análise de estabilidade é realizada de tal forma que o sistema alvo transformado associado ao sistema em malha fechada é exponencialmente estável. Então, o teorema da média para sistemas de dimensão infinita é aplicado com sucesso à EDP parabólica do sistema médio via análise de semigrupos, enquanto que em [13] o sistema foi descrito como uma equação diferencial funcional (*Functional Differential Equation* – FDE). Por fim, a convergência para uma pequena vizinhança do extremo é provada. Simulações numéricas são realizadas para ilustrar as propriedades de estabilidade e convergência do sistema em malha fechada.

3.1 Declaração do problema

3.1.1 Dinâmica de atuação e saída

Consideramos dinâmica de atuação, as quais são descritas por um processo de difusão, por exemplo, a equação do calor com atuador $\theta(t)$ e o atuador de propagação

$\Theta(t)$ dado por

$$\Theta(t) = \alpha(0, t), \quad (164)$$

$$\partial_t \alpha(x, t) = \partial_{xx} \alpha(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (165)$$

$$\partial_x \alpha(0, t) = 0, \quad (166)$$

$$\alpha(D, t) = \theta(t), \quad (167)$$

onde o comprimento D do domínio é conhecido. A medida é definida pela entrada do mapeamento estático desconhecido (164), tal que

$$y(t) = Q(\Theta(t)). \quad (168)$$

Por uma questão de simplicidade assumimos o seguinte:

Hipótese 3.1 *O mapeamento estático não-linear desconhecido é quadrático, por exemplo,*

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta - \Theta^*)^2, \quad (169)$$

onde além da constante $\Theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$ começarem desconhecidos, o $H < 0$ escalar é a hessiana desconhecida do mapeamento estático.

Consequentemente, a saída do mapeamento estático é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^2. \quad (170)$$

Combinando a dinâmica de atuação acima e o esquema básico da busca extremal, adaptando ainda mais o esquema proposto em [13], teremos a busca extremal em malha fechada com dinâmica de atuação governada por um sistema de EDP de difusão sob controlador de compensação de difusão desconhecido é mostrado na Figura 19.

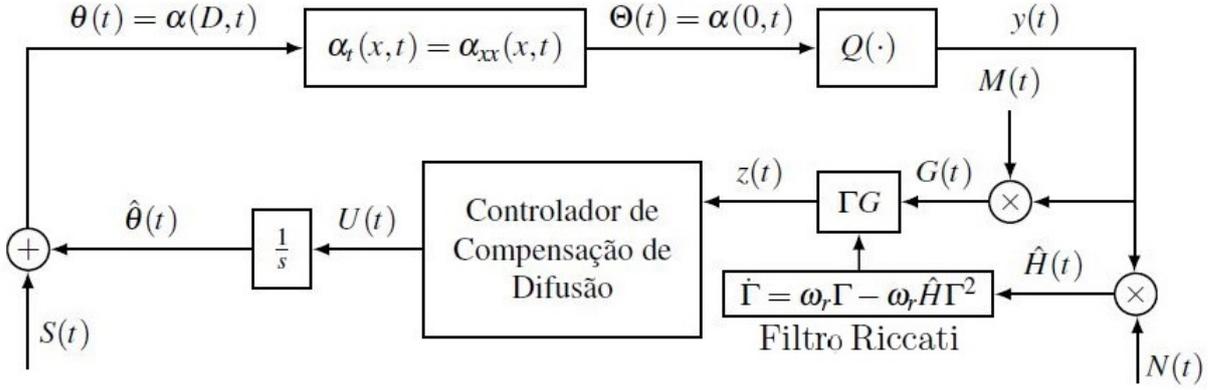


Figura 19: Malha de busca extremal baseada em algoritmo de Newton com dinâmica de atuação governada por EDP de difusão.

3.1.2 Sinais e sistemas

Como no esquema básico do controle por busca extremal, definimos a entrada ótima desconhecida θ^* de $\theta(t)$ com respeito ao mapeamento estático e ao processo de difusão, com a relação $\Theta^* = \theta^*$. Como nosso objetivo é achar a entrada ótima desconhecida θ^* , definimos o erro de estimação

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad (171)$$

onde $\hat{\theta}(t)$ é a estimação de θ^* . Para tornar (171) relevante com o otimizador do mapeamento estático Θ^* , apresentamos o erro de estimação propagado $\vartheta(t) := \hat{\Theta}(t) - \Theta^*$ através do domínio de difusão

$$\vartheta(t) := \bar{\alpha}(0, t), \quad (172)$$

$$\partial_t \bar{\alpha}(x, t) = \partial_{xx} \bar{\alpha}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (173)$$

$$\partial_x \bar{\alpha}(0, t) = 0, \quad (174)$$

$$\bar{\alpha}(D, t) = \tilde{\theta}(t). \quad (175)$$

Da malha de controle na Figura 19 temos

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t). \quad (176)$$

Tomando a derivada do tempo de (172)-(175) e com ajuda de (171) e (176), a dinâmica do erro propagada pode ser escrita como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (177)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (178)$$

$$\partial_x u(0, t) = 0, \quad (179)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (180)$$

onde $u(x, t) := \bar{\alpha}_t(x, t)$ e $\dot{\theta}(t) = \hat{\theta}(t)$, desde que θ^* seja constante. Como na busca extremal sem atuação através do domínio de difusão, o sinal de perturbação $S(t)$ deve somar $a \sin(\omega t)$ em $\Theta(t)$, portanto compensa o processo de difusão. Conseqüentemente, $a \sin(\omega t)$ com amplitude de perturbação a e frequência ω é aplicada como segue:

$$S(t) := \beta(D, t), \quad (181)$$

$$\partial_t \beta(x, t) = \partial_{xx} \beta(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (182)$$

$$\partial_x \beta(0, t) = 0, \quad (183)$$

$$\beta(0, t) = a \sin(\omega t). \quad (184)$$

As equação (181)-(184) descrevem um problema de geração de trajetória como em [12]. A solução explícita de (181) é dada por

$$\begin{aligned} S(t) = & \frac{1}{2} a e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}} D} \sin \left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2}} D \right) \\ & + \frac{1}{2} a e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}} D} \sin \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}} D \right). \end{aligned} \quad (185)$$

A relação entre o erro de estimação propagado $\vartheta(t)$, a entrada propagada $\Theta(t)$, e o otimizador do mapeamento estático Θ^* é dada por

$$\vartheta(t) + a \sin(\omega t) = \Theta(t) - \Theta^*, \quad (186)$$

que pode ser facilmente comprovado, considerando $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ juntamente com as soluções de (164)-(167), (172)-(175) e (181)-(184). Nos falta definir o sinal de perturbação $N(t)$ que é usado para estimar a hessiana, multiplicando-o pela saída $y(t)$ do mapeamento

estático. Em [7], a estimativa da hessiana é descrita como

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad \text{com} \quad N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (187)$$

Observe que o sinal de perturbação $M(t)$, para estimar o gradiente, é o mesmo que no controle por busca extremal básico (veja (17)), tal que

$$G(t) = M(t)y(t). \quad (188)$$

Definimos o sinal

$$z(t) = \Gamma(t)G(t). \quad (189)$$

onde Γ é atualizada de acordo com a seguinte equação diferencial de Riccati [7]:

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \hat{H} \Gamma^2, \quad (190)$$

com $\omega_r > 0$ sendo uma constante projetada. A equação (190) possibilita que seja gerada a estimativa da inversa da hessiana, evitando inversões da estimativa da hessiana que sejam zero durante o período de transiente. A estimativa do erro da inversa da hessiana pode ser definido como

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}, \quad (191)$$

e sua equação dinâmica é escrita de (190) e (191) como

$$\dot{\tilde{\Gamma}}(t) = \omega_r (\tilde{\Gamma} + H^{-1}) [1 - \hat{H}(\tilde{\Gamma} + H^{-1})]. \quad (192)$$

3.2 Sistema de controle em malha fechada

3.2.1 Controlador de compensação de difusão

Consideramos a cascata de EDP-EDO (177)-(180). Como em [16] usamos a transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u(x, t) - \int_0^x q(x, y)u(y, t)dy - \gamma(x)\vartheta(t), \quad (193)$$

com o ganho kernels

$$q(x, y) = \bar{K}(x - y) \quad \text{e} \quad \gamma(x) = \bar{K}, \quad (194)$$

que transformam (177)-(180) no sistema alvo

$$\dot{\vartheta}(t) = \bar{K}\vartheta(t) + w(0, t), \quad (195)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_{xx}w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (196)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0, \quad (197)$$

$$w(D, t) = 0, \quad (198)$$

com $\bar{K} < 0$. Como o sistema alvo (195)-(198) é exponencialmente estável (veja [16]), o controlador que compensa o processo de difusão pode ser obtido através da avaliação da transformação *backstepping* (193) para $x = D$ como

$$U(t) = \bar{K}\vartheta(t) + \bar{K} \int_0^D (D - y)u(y, t)dy. \quad (199)$$

No entanto, a lei de controle proposta em (199) não é diretamente aplicável, porque não temos medição de $\vartheta(t)$. Assim sendo, introduzimos um importante resultado de [7]: a versão média do gradiente (188) e a estimativa da hessiana (187) são calculadas para

$$G_{\text{av}}(t) = H\vartheta_{\text{av}}(t), \quad \hat{H}_{\text{av}} = H, \quad (200)$$

se um mapeamento quadrático como em (169) for considerado. Para a prova de (200) veja [7]. Além disso, de (200) e $z(t)$ de (189), podemos verificar que

$$z_{\text{av}}(t) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \Gamma M(\lambda) y d\lambda = \Gamma_{\text{av}}(t) H \vartheta_{\text{av}}(t), \quad (201)$$

onde $\Pi := 2\pi/\omega$, $\Gamma_{\text{av}}(t)$ e $\vartheta_{\text{av}}(t)$ representa a versão média de $\Gamma(t)$ e $\vartheta(t)$, respectivamente. Então, a equação (201) pode ser escrita em termos de $\tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) = \Gamma_{\text{av}}(t) - H^{-1}$ como

$$z_{\text{av}}(t) = \vartheta_{\text{av}}(t) + \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) H \vartheta_{\text{av}}(t). \quad (202)$$

O segundo termo do lado direito de (202) é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{\text{av}}, \vartheta_{\text{av}})$, conseqüentemente, a linearização de $\Gamma_{\text{av}}(t)$ em H^{-1} resulta na versão linearizada de (201) dada por

$$z_{\text{av}}(t) = \vartheta_{\text{av}}(t). \quad (203)$$

Em relação a (200), tiramos a média de (199) e escolhemos $\bar{K} = -K$ com $K > 0$ e a hessiana H desconhecida do mapeamento estático, tal que

$$U_{\text{av}}(t) = -KH\vartheta_{\text{av}}(t) - K \int_0^D (D - \sigma) u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma. \quad (204)$$

Conseqüentemente, aplicando a estimativa da média do gradiente e da hessiana (200) em (204), obtemos

$$U_{\text{av}}(t) = -Kz_{\text{av}}(t) - K \int_0^D (D - \sigma) u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma. \quad (205)$$

Devido a razões técnicas na aplicação do teorema da média para sistemas de dimensão infinita [24] na prova de estabilidade que segue, introduzimos um filtro passa baixa no controlador. Finalmente, temos a lei de controle de dimensão infinita média para compensar o processo de difusão

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[z(t) + \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (206)$$

onde $c > 0$ é escolhido posteriormente. Por conveniência de notação, misturamos o domínio de tempo e frequência em (206), onde o filtro passa baixa atua como um operador $\{\cdot\}$.

3.2.2 Sistema em malha fechada

Primeiramente, colocando (186) em (170), tal que a saída do mapeamento estático seja dada em termos de $\vartheta(t)$, temos

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2} (\vartheta(t) + a \sin(\omega t))^2. \quad (207)$$

Continuamos inserindo (207) no gradiente (188) e na estimativa da hessiana (187) e depois as equações resultantes na lei de controle baseada na média (206), com isso obtemos

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ K \left[y^* + \frac{H}{2} \vartheta^2(t) + Ha \sin(\omega t) \vartheta(t) + \frac{Ha^2}{2} \sin^2(\omega t) \right] \times \left[\Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) \right] - K \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \quad (208)$$

Finalmente, substituindo (208) em (180), podemos escrever o sistema em malha fechada (177) - (180) como

$$\dot{\vartheta}(t) = u(0, t), \quad (209)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_{xx} u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (210)$$

$$\partial_x u(0, t) = 0, \quad (211)$$

$$\begin{aligned} u(D, t) &= \dots \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[y^* + \frac{H}{2} \vartheta^2(t) + Ha \sin(\omega t) \vartheta(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \times \left[\Gamma(t) \frac{2}{a} \sin(\omega t) \right] - K \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[\Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \vartheta^2(t) \sin(\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\Gamma(t) H \sin^2(\omega t) \vartheta(t) + \Gamma(t) a H \sin^3(\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ -K \left[\Gamma(t) y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) + \Gamma(t) \frac{H}{a} \vartheta^2(t) \sin(\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Gamma(t) H \vartheta(t) - \Gamma(t) H \cos(2\omega t) \vartheta(t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3aH}{4} \Gamma(t) \sin(\omega t) - \frac{aH}{4} \Gamma(t) \sin(3\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^D (D - \sigma) u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (212) \end{aligned}$$

3.3 Análise de estabilidade e convergência

O seguinte teorema sumariza a propriedade de estabilidade e convergência do sistema em malha fechada (209)-(212) e é provado nesta seção.

Teorema 3.1 *Considere o sistema da Figura 19 com o sistema dinâmico sendo representado pelo mapeamento não-linear quadrático (170) em cascata com a dinâmica de atuação governada pela EDP de difusão em (164) - (167). Para $c > 0$ suficientemente grande, existe algum $\bar{\omega}(c) > 0$, tal que $\forall \omega > \bar{\omega}$, o sistema em malha fechada (192) e (209)-(212) com estados $\tilde{\Gamma}(t)$, $\vartheta(t)$, $u(x, t)$, tenha uma única solução exponencialmente estável periódica em t de período $\Pi := 2\pi/\omega$, determinada por $\tilde{\Gamma}^\Pi(t)$, $\vartheta^\Pi(t)$, $u^\Pi(x, t)$, satisfazendo*

$\forall t \geq 0$:

$$\left(\left| \tilde{\Gamma}^{\Pi}(t) \right|^2 + |\vartheta^{\Pi}(t)|^2 + \|u^{\Pi}(t)\|^2 + \|\partial_x u^{\Pi}(t)\|^2 + |u^{\Pi}(D, t)|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (213)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O} \left(|a| e^{\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega \right), \quad (214)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega), \quad (215)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2). \quad (216)$$

Para esclarecer como é provada a estabilidade e convergência para vizinhança do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$, respectivamente, é apresentada a estrutura da prova na Figura 20.

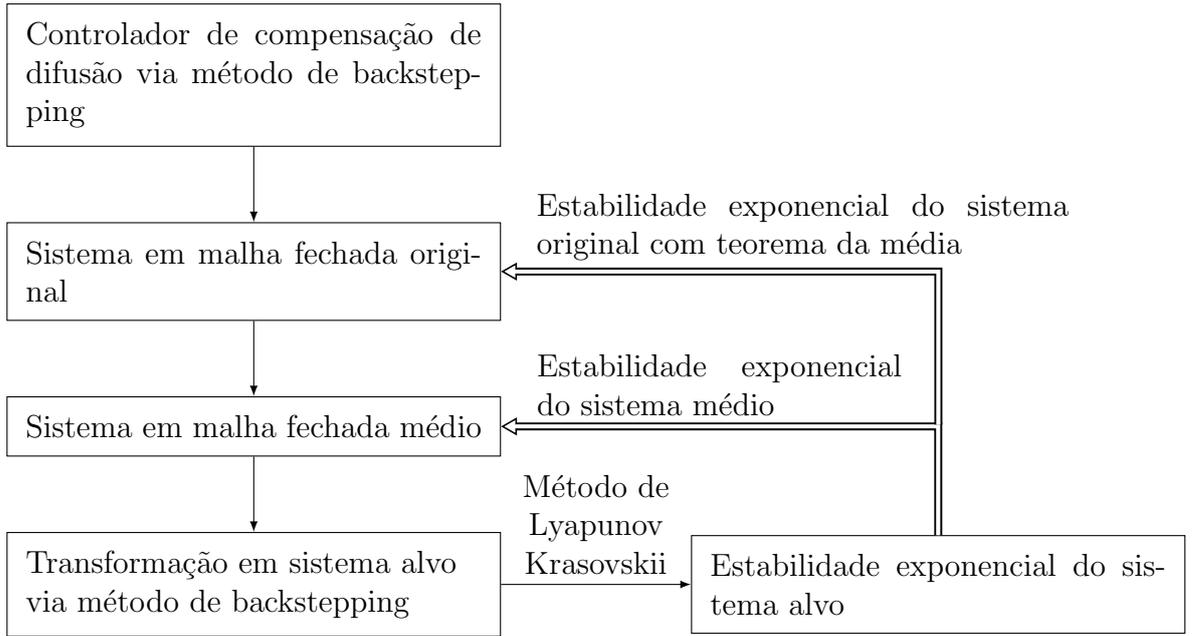


Figura 20: Estrutura do projeto do controlador e prova da estabilidade do sistema em malha fechada.

O primeiro passo, desenvolver o controlador de compensação de difusão, já foi feito como apresentado na seção anterior. Portanto, começamos com o sistema original em malha fechada, o qual, para aplicar o teorema da média, expandimos todas as equações. Utilizando a transformação backstepping, primeiramente mostra-se, no sistema resultante, sua estabilidade fazendo uso de funções de Lyapunov Krasovskii adequada. A estabilidade do sistema médio em malha fechado é concluída devido a invertibilidade da transformação

feita inicialmente. Invocando o teorema da média para sistemas de dimensões infinitas, o Teorema 1.3, prova a estabilidade exponencial dos sistemas originais de malha fechada. Finalmente, podemos mostrar a convergência de $(\theta(t), \Theta(t), y(t))$ para uma vizinhança do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$ para $t \rightarrow \infty$.

Prova 3.1 *Estruturada do **Passo 1** ao **6** abaixo.*

Passo 1: *Sistema em malha fechada médio*

A versão média do sistema (209)-(212) para ω grande é

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (217)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_{xx} u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (218)$$

$$\partial_x u_{av}(0, t) = 0, \quad (219)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -cu_{av}(D, t) - cK \left[\underbrace{\Gamma_{av}(t)H\vartheta_{av}(t)}_{z_{av}(t)} + \int_0^D (D - \sigma)u_{av}(\sigma, t)d\sigma \right], \quad (220)$$

onde o filtro passa baixa é representado no espaço de estado. Aplicando-se a teoria da média, podemos descrever (217)-(220), onde os termos em (212) dependentes das funções seno e cosseno com argumento $k\omega (= k2\pi/\Pi)$ tem média zero para $k = 1, \dots, 4$, e portanto são substituídos por zero.

De (201), (202) e (203), a versão média linearizada (local) do sistema (217)-(220) para ω suficientemente grande é

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = u_{av}(0, t), \quad (221)$$

$$\partial_t u_{av}(x, t) = \partial_{xx} u_{av}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (222)$$

$$\partial_x u_{av}(0, t) = 0, \quad (223)$$

$$\frac{d}{dt} u_{av}(D, t) = -cu_{av}(D, t) - cK \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^D (D - \sigma)u_{av}(\sigma, t)d\sigma \right]. \quad (224)$$

Por outro lado, o modelo médio para o erro de estimação da inversa da hessiana em (192) é

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t) - \omega_r H \tilde{\Gamma}_{av}^2(t), \quad (225)$$

como

$$\hat{H}_{av} = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\lambda) y d\lambda = H, \quad (226)$$

e sua versão linearizada envolta de $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = 0$ é dada por

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t), \quad (227)$$

que é exponencialmente estável para $\omega_r > 0$.

Passo 2: Transformação backstepping no sistema alvo

A transformação backstepping (veja [16])

$$w(x, t) = u_{av}(x, t) - KH \left[\vartheta_{av}(t) + \int_0^x (x-y) u_{av}(y, t) dy \right] \quad (228)$$

mapeia o sistema em malha fechada médio (221)-(224) no sistema alvo exponencialmente estável (estabilidade mostrada no Passo 3)

$$\dot{\vartheta}_{av}(t) = -K \vartheta_{av}(t) + w(0, t), \quad (229)$$

$$\partial_t w(x, t) = \partial_{xx} w(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (230)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0, \quad (231)$$

$$\begin{aligned} \partial_t w(D, t) &= -cw(D, t) + Kw(D, t) \\ &- K^2 \left[\int_0^D \left(e^{-K(D-\sigma)} - 1 \right) w(\sigma, t) d\sigma + e^{-KD} \vartheta_{av}(t) \right]. \end{aligned} \quad (232)$$

O sistema alvo (229)-(232) pode ser descrito através da aplicação da transformada backstepping inversa (veja [16])

$$u_{av}(x, t) = w(x, t) - Ke^{-Kx} \vartheta_{av}(t) - K \int_0^x \left(e^{-K(x-\sigma)} - 1 \right) w(\sigma, t) d\sigma, \quad (233)$$

no sistema em malha fechada médio (221)-(224). Adicionalmente tomando-se a derivada do tempo da transformação backstepping (228) junto com (224) e sua inversa (233), chegamos a (232).

Passo 3: *Estabilidade exponencial do sistema alvo*

Considere a função Lyapunov-Krasovskii

$$\Upsilon(t) = \frac{\vartheta_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2}\|w(t)\|^2 + \frac{b}{2}\|\partial_x w(t)\|^2 + \frac{d}{2}w^2(D, t), \quad (234)$$

onde $a, b, d > 0$ serão escolhidos adiante. Definimos $\lambda := -K$ com $\lambda > 0$. Calculando a derivada do tempo de (234), associada com a solução do sistema alvo (229)-(232) e com ajuda da integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \dot{\Upsilon}(t) = & -\lambda\vartheta_{av}^2(t) + \vartheta_{av}(t)w(0, t) \\ & + aw(D, t)\partial_x w(D, t) - a\|\partial_x w(t)\|^2 \\ & + b\partial_x w(D, t)\partial_t w(D, t) - b\|\partial_{xx} w(t)\|^2 \\ & + dw(D, t)\partial_t w(D, t). \end{aligned} \quad (235)$$

Aplicando as desigualdades de Young, Poincaré, Agmon e Cauchy-Schwarz em (235) e considerando que $a = (c - \lambda)/(8D\lambda^3)$, $b = 1/(8D\lambda^3)$, $d = 1$, temos

$$\dot{\Upsilon}(t) \leq -\frac{\lambda}{4}\vartheta_{av}^2(t) + (c_1^* - c)w^2(D, t) + (c_2^* - c)\|\partial_x w(t)\|^2 - \frac{1}{32D\lambda^3}\|\partial_{xx} w(t)\|^2, \quad (236)$$

com

$$c_1^* = \frac{3}{2}\lambda^3 + \lambda + \frac{1 + 2D}{\lambda} + 2D\lambda\|e^{-\lambda(D-y)} - 1\|^2, \quad (237)$$

$$c_2^* = \lambda + 8D\lambda^3 \left[\frac{4D^2 + 1}{\lambda} + 4D^2\lambda\|e^{-\lambda(D-y)} - 1\|^2 \right]. \quad (238)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré

$$\|\partial_x w(t)\|^2 \leq 2D\partial_x w(0, t)^2 + 4D^2\|\partial_{xx} w(t)\|^2, \quad (239)$$

ao último termo em (236), e lembrando que $\partial_x w(0, t) = 0$, tem-se

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\lambda}{4}[\vartheta_{av}(t)]^2 - (c - c_1^*)w^2(D, t) - (c - c_2^*)\|\partial_x w(t)\|^2 - \frac{1}{128D^3\lambda^3}\|\partial_{xx} w(t)\|^2. \quad (240)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré (segundo caso) [12]

$$\|w(t)\|^2 \leq 2w(D,t)^2 + 4D^2\|\partial_x w(t)\|^2, \quad (241)$$

ao termo resultante $-\frac{1}{128D^3\lambda^3}\|\partial_x w(t)\|^2$, obtemos

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\lambda}{4}[\vartheta_{av}(t)]^2 - \frac{1}{512D^5\lambda^3}\|w(t)\|^2 - (c - c_2^*)\|\partial_x w(t)\|^2 - (c - c_3^*)w^2(D,t). \quad (242)$$

com $c_3^* = c_1^* + \frac{1}{256D^5\lambda^3}$. Consequentemente, de (236), se c é escolhido tal que $c > \max\{c_1^*, c_2^*\}$, obtemos para $\mu > 0$

$$\dot{\Upsilon}(t) \leq -\mu\Upsilon(t). \quad (243)$$

Então, o sistema alvo (229)-(232) é exponencialmente estável no sentido da norma \mathcal{H}_1

$$(\vartheta_{av}^2(t) + \|w(t)\|^2 + \|\partial_x w(t)\|^2 + w^2(D,t))^{1/2}, \quad (244)$$

isto é, na variável transformada (ϑ_{av}, w) .

Passo 4: Estimativa da estabilidade exponencial \mathcal{H}_1 do sistema em malha fechada médio

Definimos

$$\Psi(t) = \vartheta_{av}^2(t) + \|u_{av}(t)\|^2 + \|\partial_x u_{av}(t)\|^2 + u_{av}^2(D,t). \quad (245)$$

Em seguida, existe um limite superior e inferior do funcional Lyapunov-Krasovskii (234) em relação a $\Psi(t)$, de modo que

$$\rho\Psi(t) \leq \Upsilon(t) \leq \bar{\rho}\Psi(t), \quad \text{com } \rho = \underline{\tau}\sigma, \quad \bar{\rho} = \bar{\tau}\bar{\sigma}, \quad (246)$$

com

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\}, \quad \bar{\sigma} = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right\}, \quad (247)$$

τ e $\bar{\tau}$ apropriados [12]. A equação (246), junto com a estabilidade exponencial do sistema alvo (243), implica

$$\Psi(t) \leq \frac{\bar{\rho}}{\rho} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (248)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial do sistema em malha fechada médio (320)-(323) no sentido da norma \mathcal{H}_1 $\Psi^{1/2}(t)$ na variável (ϑ_{av}, u_{av}) .

Passo 5: *Invocando o teorema da média para sistemas de dimensões infinita*

O teorema da média para sistemas de dimensões infinitas [24] reivindica que alguns pressupostos sejam satisfeitos. O sistema em malha fechada deve estar na forma

$$\dot{Z}(t) = FZ(t) + J(\omega t, Z(t)), \quad (249)$$

onde $Z(t) \in \mathcal{X} := \mathcal{H}_1([0, D])$ é o vetor de estado de dimensão infinita. F gera um semigrupo analítico. E, além disso, a não-linearidade $J : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ com $t \mapsto J(t, Z)$ é diferenciável Fréchet em Z , fortemente contínuo e periódico em t , uniformemente com respeito a Z no conjunto compacto de \mathcal{X} . Pela transformação de estado de (209) - (212) com $v(x, t) = u(x, t) - U(t)$, obtemos no sistema em malha fechada com condições de fronteira homogêneas

$$\dot{\vartheta}(t) = v(0, t) + U(t), \quad (250)$$

$$\partial_t v(x, t) = \partial_{xx} v(x, t) - \phi(\vartheta, v, U, t), \quad x \in [0, D], \quad (251)$$

$$\partial_x v(0, t) = 0, \quad (252)$$

$$v(D, t) = 0, \quad (253)$$

$$\dot{U}(t) = \phi(\vartheta, v, U, t), \quad (254)$$

com

$$\phi(\vartheta, v, U, t) = -cU(t) - cK \left[z(t) + \int_0^D (D - \sigma)(v(\sigma, t) + U(t)) d\sigma \right]. \quad (255)$$

Em seguida, escrevemos o sistema de EDP (251)-(253) na forma de uma equação evolucionária (veja [19]) no espaço Banach \mathcal{X}

$$\dot{V}(t) = \mathcal{A}V(t) - \tilde{\phi}(\vartheta, V, U, t), \quad t > 0, \quad (256)$$

onde $V(t)$ é a função que pertence ao espaço Banach \mathcal{X} . Além disso, \mathcal{A} é a realização da derivada de segunda ordem com uma condição de limite Dirichlet e Neumann em \mathcal{X} com

$$\mathcal{A}\varphi := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (257)$$

e o domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{X} : \varphi, \frac{d}{dx}\varphi \in \mathcal{X} \text{ é a.c.}, \frac{d^2}{dz^2}\varphi \in \mathcal{X}, \frac{d}{dz}\varphi(0) = 0, \varphi(D) = 0 \right\}, \quad (258)$$

onde a.c. significa absoluto contínuo. Para expressar $v(0, t)$ na EDO (250) em termos de $V(t)$, apresentamos o operador linear de limite $\mathcal{B} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{B}V(t) := v(0, t). \quad (259)$$

Além disso, definimos os operadores lineares $\alpha^\top : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ como

$$\begin{aligned} \alpha^\top V(t) &:= \int_0^D (D - \sigma)v(\sigma, t)d\sigma, \\ \beta\zeta &:= [\beta_1, \beta_2, \dots]^\top \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R} \\ \text{com } \beta_k &= \int_0^D \psi_k(x)dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{D}} \frac{2D}{\pi(2k-1)} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (260)$$

onde $\psi_k(x) = \sqrt{2/D} \cos(\pi/2(2k-1)x/D)$, $k = 1, 2, \dots$, são autofunções de \mathcal{A} . Finalmente, o sistema em malha fechada com vetor de estado de dimensão infinita $Z(t) =$

$[\vartheta(t) \ V(t) \ U(t)]^\top$ pode ser reescrito como (249) com

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B} & 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A} & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_r \end{bmatrix}, \quad (261)$$

$$J(\omega t, Z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -c\beta K [z(t) + g(Z)] \\ -cK [z(t) + g(Z)] \\ \omega_r H^{-1} - \omega_r \hat{H}(t) \left(\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1} \right)^2 \end{bmatrix}, \quad (262)$$

onde $g(Z) = \frac{1}{2}D^2U(t) + \alpha^\top V(t)$. Como \mathcal{A} é um operador setorial, por consequência gera um semigrupo analítico [20], \mathcal{B} é limitado por \mathcal{A} ($\|\mathcal{B}V(t)\| \leq 4D\sqrt{D}\|\mathcal{A}V(t)\|$) e β , c , ω_r são limitados, F gera um semigrupo analítico através do teorema do operador matricial em [23]. Além disso, $J(\omega t, Z)$ em (261) é diferenciável Fréchet em Z , fortemente contínuo e periódico em t , uniformemente com respeito a Z . Portanto, todos os pressupostos para aplicar o teorema de média para sistemas de dimensões infinitas em [24] estão satisfeitos e o sistema em malha fechada médio é exponencialmente estável. Assim, o sistema em malha fechada original (209)-(212) tem uma solução exponencialmente estável periódica $Z^\Pi(t)$ que satisfaz (213).

Passo 6: Convergência para região de extremo

Aplicando a desigualdade de Agmon, Poincaré e Young no LHS de (172), junto com (172)-(175), temos

$$\tilde{\theta}^2(t) \leq 3\vartheta(t)^2 + (4D + 1)\|\bar{\alpha}_x\|^2. \quad (263)$$

Tomando a derivada do tempo de $\tilde{\Upsilon}(t) = \frac{\mu}{16D}\|\bar{\alpha}_x(t)\|^2 + \frac{1}{2}\vartheta^2(t) + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x(t)\|^2 + \frac{1}{2}U(t)^2$ junto com a estabilidade exponencial do sistema original, sustenta-se que $\dot{\tilde{\Upsilon}} \leq -\mu \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{64D^3}\right\} \tilde{\Upsilon}$ com $\mu > 0$. Por isso, existe algum $M > 0$, tal que

$$\|\bar{\alpha}_x(t)\|^2 \leq Me^{-kt} \quad \text{com } k = \mu \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{64D^3}\right\}. \quad (264)$$

Com (263) e (264) temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3|\vartheta(t)|^2\}. \quad (265)$$

Igualmente, (265) pode ser escrito em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$ como segue

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3|\vartheta(t) + \vartheta^\Pi(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2\}. \quad (266)$$

Ao aplicar a desigualdade de Young, obtemos

$$|\vartheta(t) + \vartheta^\Pi(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 \leq \sqrt{2} (|\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t)|^2 + |\vartheta^\Pi(t)|^2), \quad (267)$$

e pelo teorema da média [24], temos $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Por isso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3\sqrt{2}|\vartheta^\Pi(t)|^2\}. \quad (268)$$

Juntamente com (213) e (268), obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega). \quad (269)$$

Uma vez que $\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t)$ de (281) e Figura 19 e $S(t)$ é da ordem $\mathcal{O}(|a|e^{\sqrt{\omega/2}})$, como mostrado em (185), finalmente chegamos a (269)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(|a|e^{\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega). \quad (270)$$

A convergência do atuador propagado $\Theta(t)$ para o otimizador Θ^* é muito mais fácil de provar. Usando (186) e tomando o valor absoluto, tem-se

$$|\Theta(t) - \Theta^*| = |\vartheta(t) + a \sin(\omega(t))|. \quad (271)$$

Da mesma forma como provamos da convergência do parâmetro $\theta(t)$ para a entrada ótima θ^* , podemos escrever (271) em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$ e então seguimos os mesmos passos aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente a medida que $t \rightarrow \infty$ pelo teorema da média [24]. Assim, juntamente com (213), finalmente

conseguimos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega). \quad (272)$$

Para mostrar a convergência da saída $y(t)$ do mapeamento estático para o valor ótimo y^* , substituímos $\Theta(t) - \Theta^*$ em (280) por (186) e tomamos o valor absoluto

$$|y(t) - y^*| = \left| \frac{H}{2} [\vartheta(t) + a \sin(\omega(t))]^2 \right|. \quad (273)$$

Expandindo o termo quadrático em (273) e aplicando a desigualdade de Young à equação resultante, tem-se $|y(t) - y^*| = |H [\vartheta(t)^2 + a^2 \sin^2(\omega t)]|$. Como antes, podemos reescrever a equação em termos da solução periódica $\vartheta^\Pi(t)$, aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta(t) - \vartheta^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente a medida que $t \rightarrow \infty$ pelo teorema da média [24]. Assim, de (213), temos (216). \square

3.4 Simulações

Para fazer uma comparação justa entre os dois métodos, todos os parâmetros devem ser escolhidos da mesma forma [7], exceto o ganho K . Antes de selecionar K , investigamos o desempenho do esquema baseado em gradiente versus o esquema baseado em Newton. A taxa de convergência inicial para o esquema baseado em Newton é governada pela variável $-K_n\Gamma(t)H$. Como visto no Capítulo 2, onde é mostrado o esquema baseado em gradiente, a convergência do mapeamento para o extremo depende de K_gH . Isto significa que, para ter uma comparação justa entre os dois métodos, devemos selecionar K_g e K_n de forma que $K_g = -K_n\Gamma(0)$, onde K_g é a representação do ganho K para o método baseado em gradiente e K_n é a representação do ganho K para o método baseado em Newton.

Considere um mapeamento estático quadrático como em (169), com hessiana $H = -0.2$, otimizador $\Theta^* = 2$, e valor ótimo $y^* = 5$. O comprimento do domínio é determinado como $D = 1$. Os parâmetros do sinal de perturbação e da proposta busca extremal baseada em Newton são escolhidos como $\omega = 10\text{rad/s}$, $a = 0.2$, $c = 10$, e $K = 0.2$. Além disso, a estimativa de $H^{-1} = -5$ é dada pela solução da equação de Riccati (190), a qual foi implementada com $\omega_r = 0.5\text{rad/s}$ e condição inicial $\Gamma(0) = -2$. Os resultados da simulação de malha fechada são ilustrados na Figura 21 e na Figura 22. Observamos que cada variável (θ, Θ, y) converge para região ótima $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$. A maior região de convergência de $\theta(t)$, como declarado em (214) e observado na Figura 21a, surgem da significativa variação em altas frequências do domínio da difusão. A convergência da hessiana é mostrada na Figura 21b. Em particular, a estimação exata de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ nos permite cancelar a hessiana H e portanto garante a taxas de convergência que possam ser arbitrariamente designadas pelo usuário. A performance otimizada pelo controlador projetado (206) e o sinal de perturbação adaptado (185) podem ser vistos comparando com o resultado da simulação de busca extremal baseado em gradiente proposto em [29], ilustrado na Figura 22. Como esperado, o algoritmo de Newton converge para o extremo mais rápido do que o esquema baseado no método gradiente, mesmo na presença da dinâmica de atuação governada por EDP's de difusão.

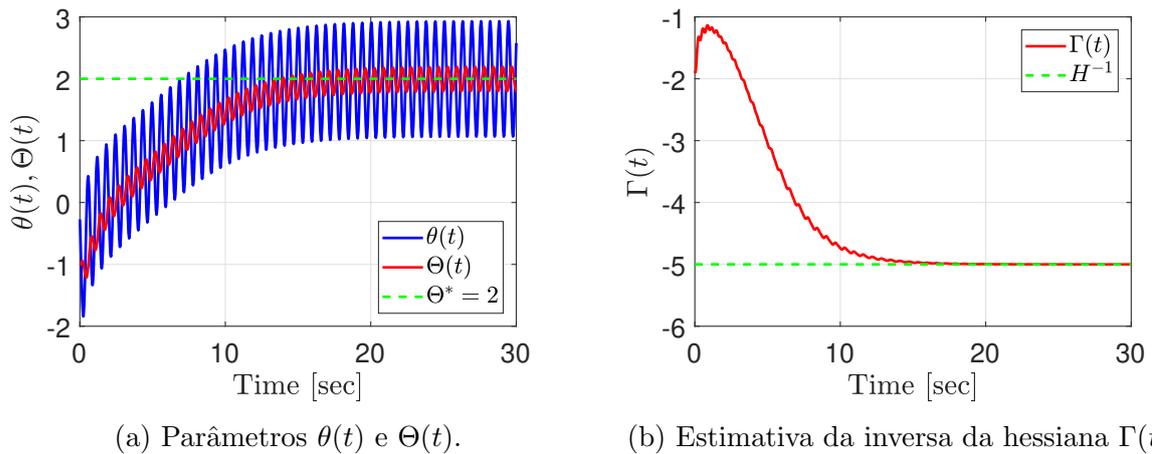


Figura 21: Busca extremal baseada no algoritmo de Newton com uma EDP de difusão em sua dinâmica de atuação.

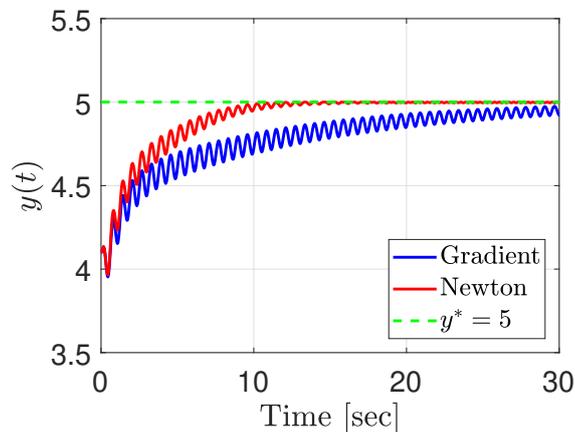


Figura 22: Busca extremal baseada no algoritmo de Newton versus algoritmo de gradiente: tempo de resposta da saída $y(t)$ sujeito ao atuador EDP de difusão com coeficiente de difusão $D = 1$.

3.5 Avaliação de sensibilidade

O sistema em questão possui três parâmetros projetáveis: a , ω e K , dos quais a influência dos dois primeiros fora mostrada e provada em (214) - (216) e nos passos seguintes. É importante compreender a influência de cada um deles para que a resposta $y(t)$ do modelo convirja para o extremo do mapeamento. Sendo assim, foi realizado um conjunto de testes de sensibilidade onde em cada caso variou-se o valor de um dos parâmetros para observar a influência do mesmo para a saída do mapeamento. Os outros parâmetros são mantidos em seus valores utilizados na simulação feita inicialmente, assim como as condições iniciais. Os diferentes valores utilizados no estudo foram obtidos calculando os percentuais 40, 60, 80, 120, 140 e 160% em cima do valor utilizado na simulação.

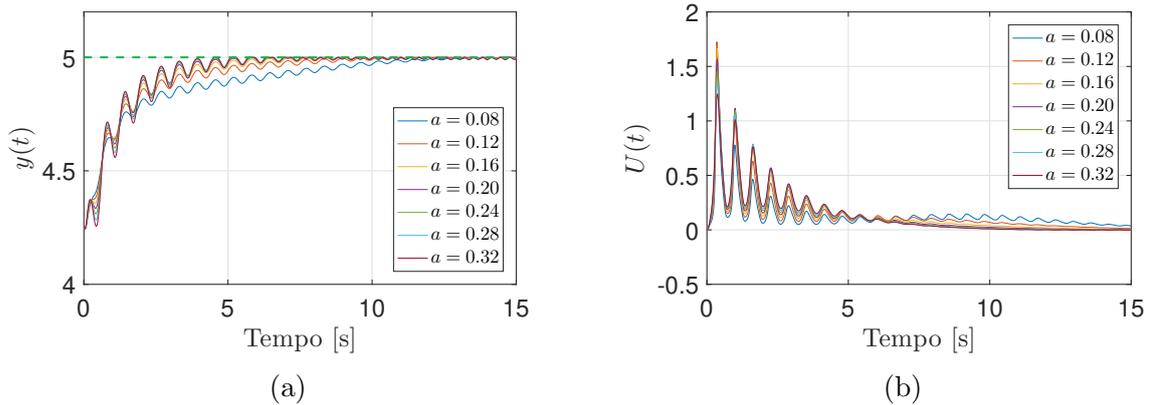


Figura 23: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro a .

É possível observar, nos gráficos da Figura 23a, que conforme aumenta-se o valor do parâmetro a , a tendência é de que a saída $y(t)$ alcance a vizinhança do extremo da função mais rapidamente quando comparamos com o valor de a baixo ($a = 0.08$ e $a = 0.32$). Porém, lembrando que quanto maior o valor de a , segundo mostra (214) - (216), maior será o erro $|\theta(t) - \theta^*|$, $|\Theta(t) - \Theta^*|$ e $|y(t) - y^*|$. Além disso, na Figura 23b, observa-se que quanto maior o valor de a , maior a amplitude do sinal de controle.

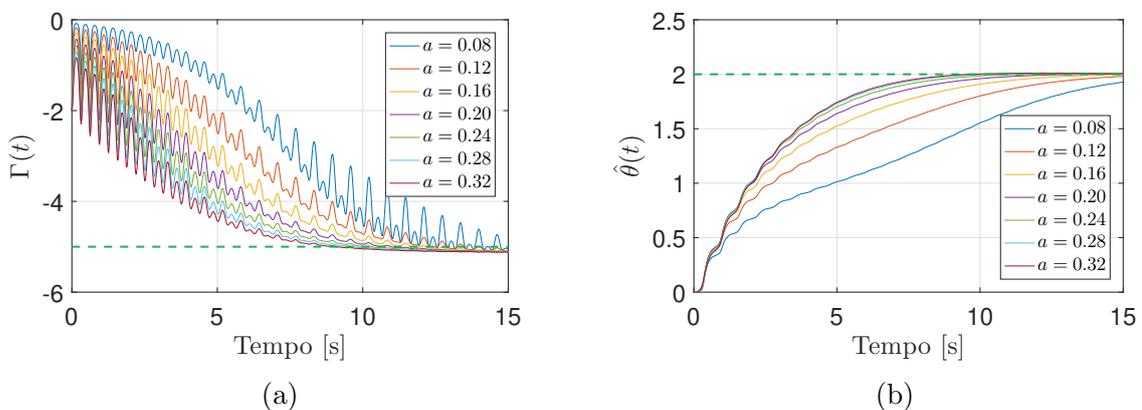


Figura 24: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro a .

Assim como a variação de a afeta os sinais $y(t)$ e $U(t)$, por consequência ele também possui influência na estimação de $\hat{\theta}(t)$, como mostra a Figura 24b, onde observamos que quanto menor o valor de a , mais lenta a convergência para θ^* . O parâmetro em estudo também impacta na estimação da inversa da hessiana $\Gamma(t)$, na Figura 24a, que quanto menor o valor de a , mais lenta a convergência para $\Gamma(t) = H^{-1} = -5$.

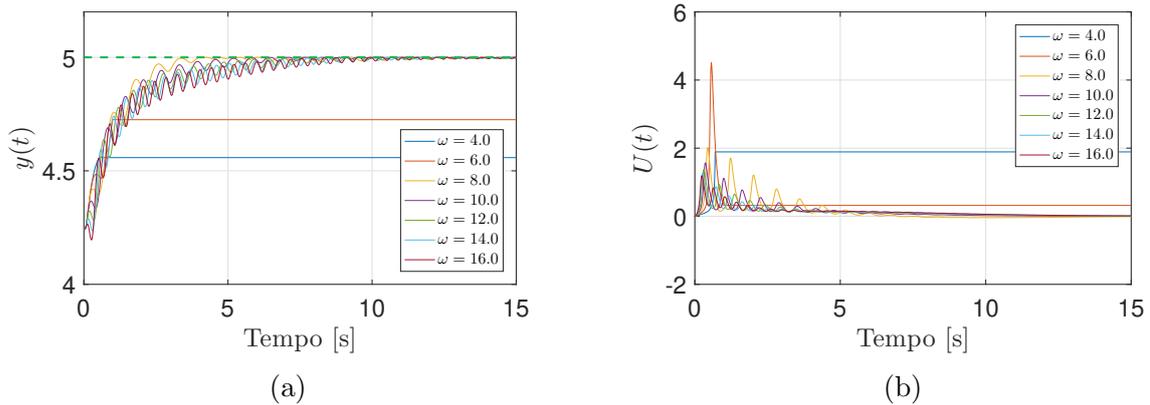


Figura 25: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω .

É possível observar nos gráficos da Figura 25a, que conforme aumenta-se o valor do parâmetro ω , a tendência é de que a saída $y(t)$ alcance a vizinhança do extremo da função mais lentamente quando comparamos com o valor de ω baixo ($\omega = 8$ e $\omega = 16$). Lembrando também que quanto menor o valor de ω , segundo mostra (214) - (216), maior será o erro $|\theta(t) - \theta^*|$, $|\Theta(t) - \Theta^*|$ e $|y(t) - y^*|$ e por isso, na Figura 25b, observa-se que quanto menor o valor de ω , maior a amplitude do sinal de controle. Na Figura 26, ainda observamos que para valores menores que $\omega = 8$, o controle é interrompido, porém nem $y(t)$ nem $U(t)$ são responsáveis pela parada na simulação.

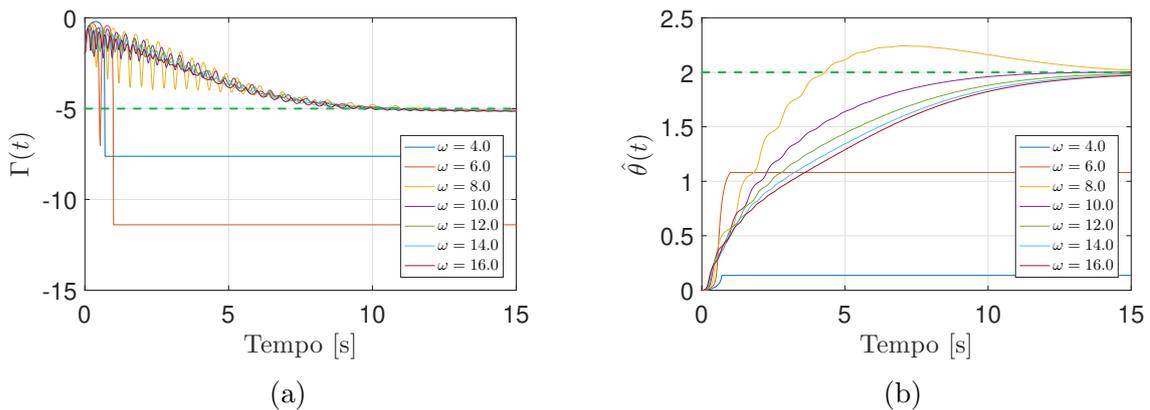


Figura 26: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω .

Assim como a variação de ω afeta os sinais $y(t)$ e $U(t)$, por consequência ele também possui influência na estimação de $\hat{\theta}(t)$, como mostra a Figura 26b, onde observamos que o valor ótimo para a convergência dentre os valores testados é de $\omega = 10$, levando mais rapidamente o sinal para θ^* . O parâmetro em estudo também impacta na estimação da inversa da hessiana $\Gamma(t)$, na qual também é observável na Figura 26a, que quanto menor o valor de ω , maior a amplitude da variação do sinal que converge para $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1} = -5$. Na Figura 26a, para $\omega = 4$ e $\omega = 6$, o sinal de $\Gamma(t)$ tende a $-\infty$ e faz com que a simulação pare e podemos com isso considerar o impacto direto de ω em $\Gamma(t)$.

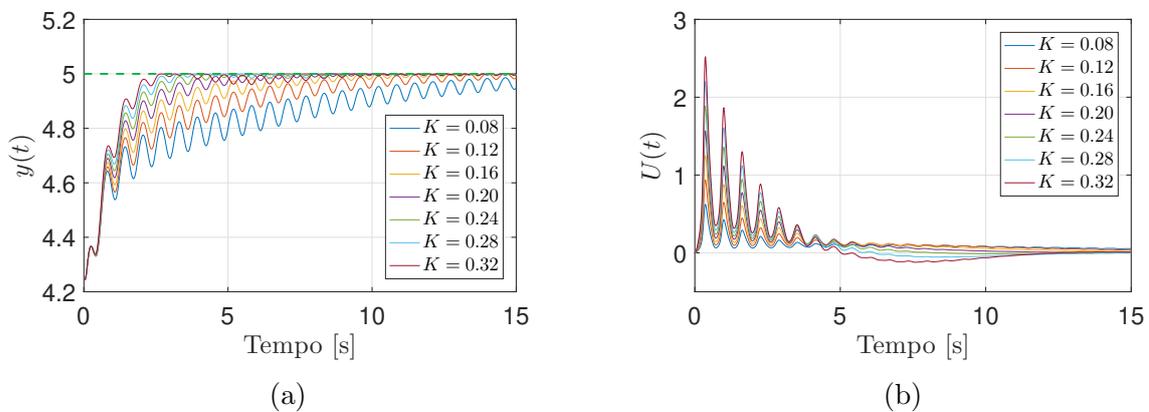


Figura 27: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro K .

Agora, fazendo a análise para o parâmetro K , na Figura 27a e Figura 27b, que não está correlacionado com (214) - (216), mas sim a (206), vemos que, como esperado, ao elevarmos seu valor temos um aumento na amplitude do sinal de saída do controlador (Figura 27b) que leva a um alcance de $y(t)$ a vizinhança do extremo da função mais rapidamente (Figura 27a) quando comparamos com o valor de K baixo ($K = 0.08$ e $K = 0.32$).

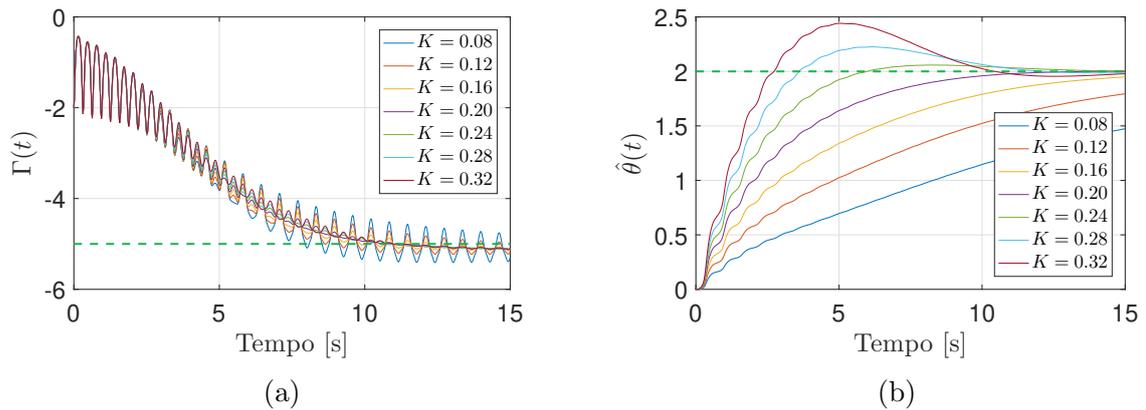


Figura 28: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro K .

Na Figura 28, é apresentada a influência de variarmos o valor de K em $\Gamma(t)$ e $\hat{\theta}(t)$. A Figura 28a mostra que quanto menor o valor de K maior a região de oscilação entre o extremo da função ($H^{-1} = -5$). Já na Figura 28b, vemos que há um distanciamento entre os sinais $\hat{\theta}(t)$ e que, quanto menor K , mais lenta a convergência para $\theta^* = 2$.

Além destes valores que também foram analisados no caso do Capítulo 2, podemos também estudar a influência da escolha do valor da condição inicial de $\theta(0)$, $\Gamma(0)$ e ω_r . Onde, os dois últimos são relacionados ao filtro Riccati inserido para o projeto do método de Newton e o $\theta(0)$ já estava presente na análise do capítulo anterior.

Durante as simulações variando a condição inicial de $\theta(0)$, para valores menores que -3 , foi observado que o sinal $\Gamma(t)$, durante sua estimação, apresentava problemas numéricos pela sua divergência a $-\infty$. Para solucionar este problema, foi posto em seu integrador uma saturação, apenas para valores menores que zero, de -50 e -200 . Saturações inferiores a estas causam distorções no sinal de controle impossibilitando a convergência dos parâmetros para a vizinhança de seus valores ótimos.

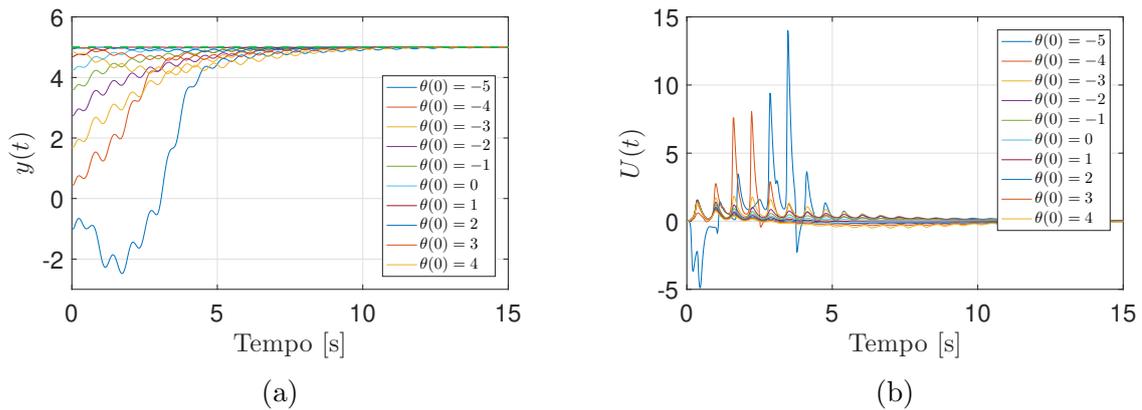


Figura 29: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -50.

É possível observar na Figura 29a que, quanto menor o valor da condição inicial, mais afastado fica do valor ótimo e mais tempo toma-se para convergência da saída do mapeamento ao seu valor ótimo. Na Figura 29b, vemos os picos do controlador para o caso de $\theta(0) = -5$ e $\theta(0) = -4$ devido aos valores extremos de Γ .

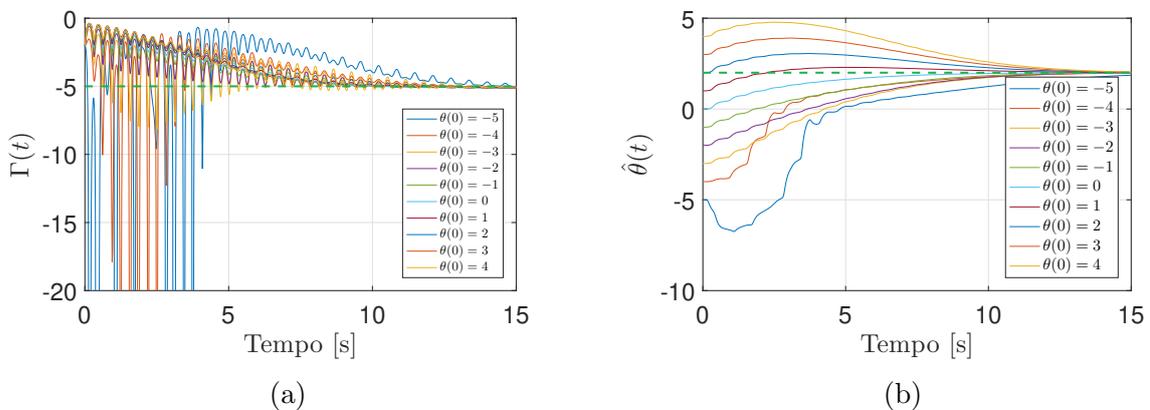


Figura 30: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -50.

Na Figura 30a, fica nítido que as variações numéricas de $\Gamma(t)$ coincidem com as variações drásticas do controlador $U(t)$ na Figura 29b. Podemos também distinguir as curvas de $\hat{\theta}(t) = -5$ e $\hat{\theta}(t) = -4$ das demais, na Figura 30b, pelo seu comportamento anômalo frente as demais cujo padrão de convergência é nítido, variando apenas devido a escolha da condição inicial $\theta(0)$.

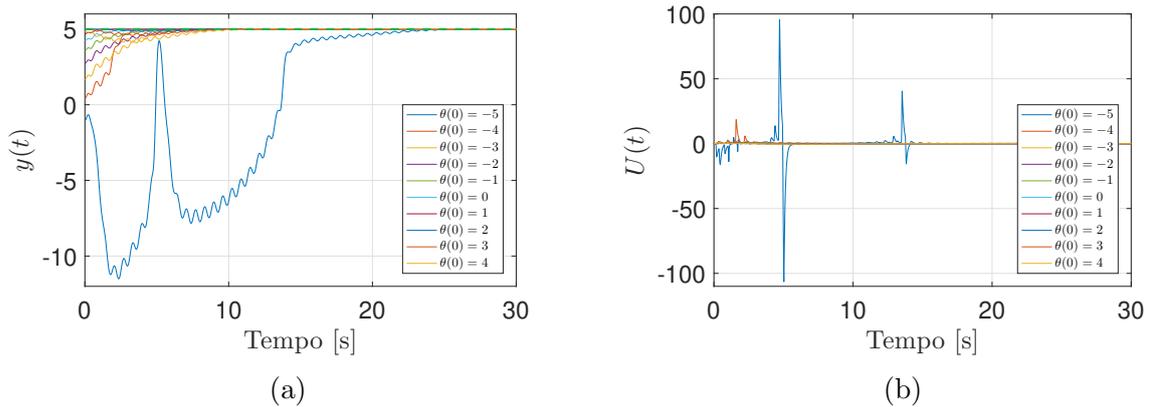


Figura 31: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -200.

Para observarmos o impacto de diminuirmos o valor da saturação de -50 para -200 , a Figura 31 mostra a convergência do sinal $y(t)$ e $U(t)$ diferentemente da Figura 29.

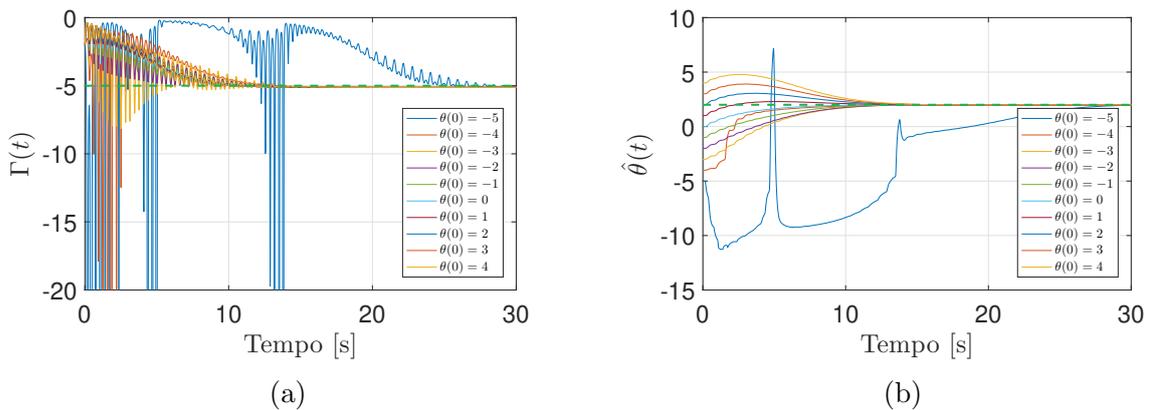


Figura 32: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\theta(0)$. Saturação de Γ em -200.

Assim como quando comparamos a variação dos sinais $y(t)$ e $U(t)$ entre a Figura 31 e Figura 29, podemos observar a variação dos sinais $\Gamma(t)$ e $\hat{\theta}(t)$ entre a Figura 32 e a Figura 30.

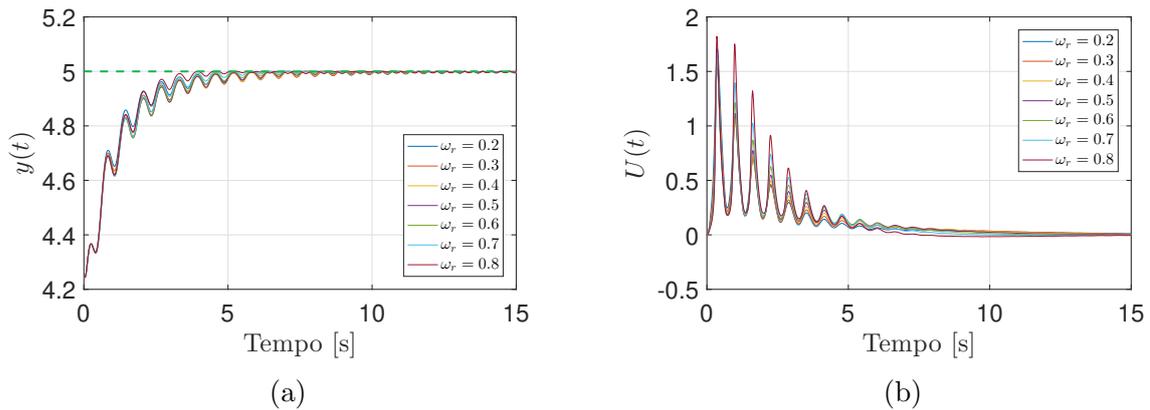


Figura 33: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω_r .

Aplicando as mesmas variações percentuais (40, 60, 80, 120, 140 e 160%) para o valor de ω_r , percebe-se que, para o sinal de saída do mapeamento, há pouco impacto conforme Figura 33a, assim como para o sinal de controle $U(t)$, visto na Figura 33b.

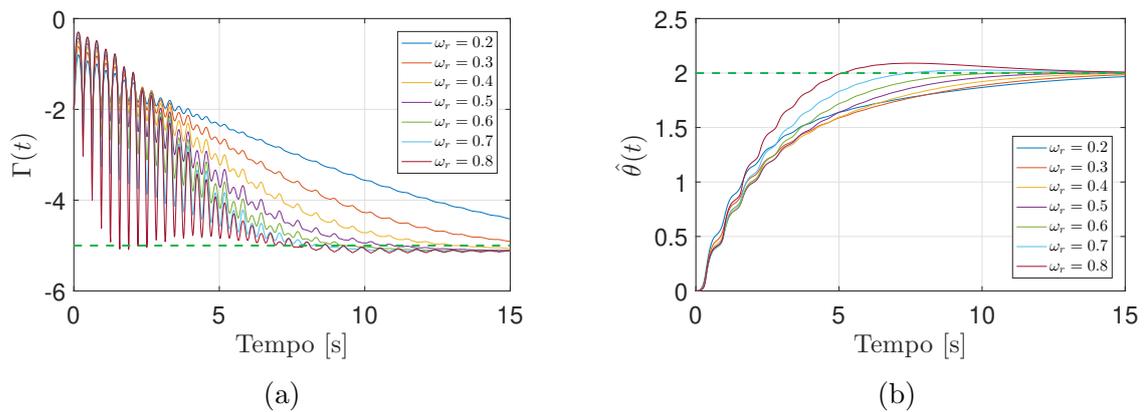


Figura 34: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro ω_r . Saturação de Γ em -50.

O impacto no sinal de $\Gamma(t)$ devido a variação de ω_r , como esperado, foi de que, quanto menor seu valor, mais lento fica a estimação de H^{-1} , observamos esta relação na Figura 34a. Assim como para $\Gamma(t)$, observamos na Figura 34b, que quanto maior ω_r , mais rápido o sinal $\hat{\theta}(t)$ chega a vizinhança de θ^* .

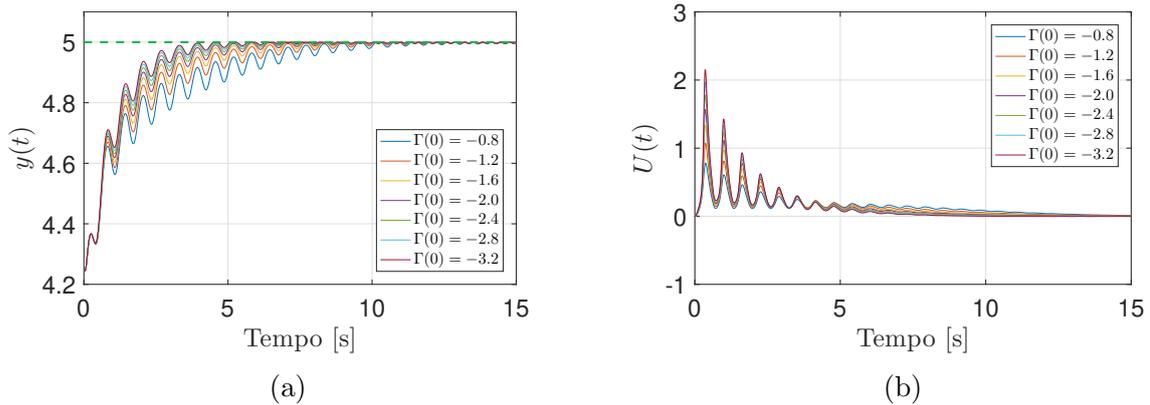


Figura 35: Representação da saída do mapeamento (a) e do sinal de controle (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\Gamma(0)$.

Fazendo a análise do impacto que a variação de $\Gamma(0)$ tem sob os sinais $y(t)$ e $U(t)$, observamos na Figura 35a que, ao diminuirmos seu valor inicial, fazemos com que a taxa de convergência do sinal de saída seja menor quando comparamos com valores maiores. Já na Figura 35b, observamos que o impacto é proporcional, quando observamos a amplitude do sinal de controle, ou seja, quando aumentamos o valor de $\Gamma(0)$ aumentamos a amplitude de $U(t)$.

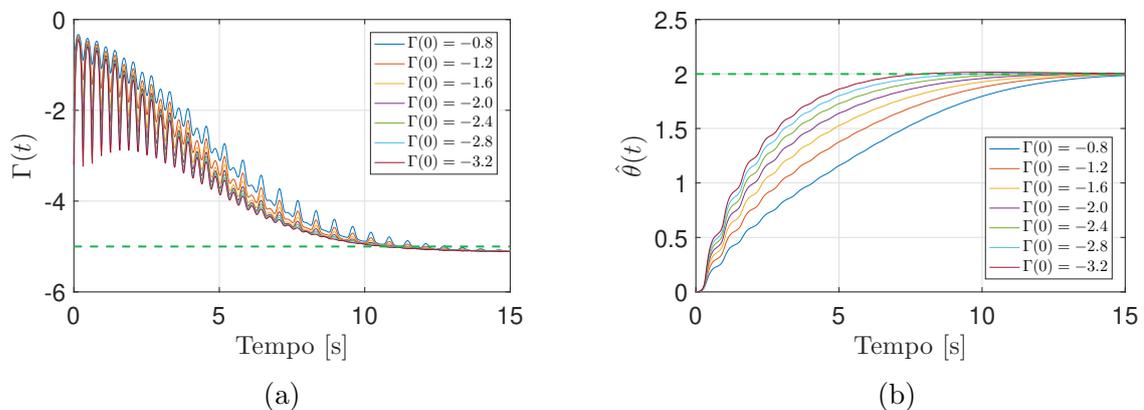


Figura 36: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a) e do sinal de $\hat{\theta}(t)$ a ser somado a perturbação $S(t)$ (b) quando varia-se o valor do parâmetro $\Gamma(0)$.

O impacto no sinal de $\Gamma(t)$ devido a variação de seu estado inicial, como esperado, foi de que quanto menor seu valor, mais rapidamente atenua-se a curva convergindo para seu valor ótimo. Observamos este comportamento na Figura 36a. Já para a estimação de θ^* , quanto menor o valor inicial de $\Gamma(t)$, mais rápido o sinal $\hat{\theta}(t)$ converge para a vizinhança de seu valor ótimo, fato este que observamos na Figura 36b.

4 BUSCA EXTREMAL MULTIVARIÁVEL PARA EDP'S DE DIFUSÃO COM COEFICIENTES DE DIFUSÃO DISTINTOS UTILIZANDO ALGORITMO DE NEWTON

4.1 Introdução

A primeira tentativa, a fim de considerar sistemas dinâmicos mais gerais, foi feita na referência de [13], onde a busca extremal foi estendida para equações diferenciais funcionais (EDFs) cuja definição pode ser encontrada em [31]. Atrasos múltiplos e distintos nos sinais de entrada, bem como na variável de saída, foram representados por EDPs de transporte [28]. Ambas as versões multivariáveis da otimização baseada em gradiente e Newton foram rigorosamente consideradas [13]. A disponibilidade dos funcionais de Lyapunov para o preditor de realimentação distribuído através de uma nova transformação de *backstepping* [32] permitiu a análise de estabilidade do sistema de realimentação completo sob atrasos com uma representação em cascata das equações EDO-EDP e a lei de controle infinito-dimensional.

Conforme discutido em [13], os resultados foram dados para mapeamentos estáticas e a extensão para incluir dinâmicas bastante gerais parece ser um problema em aberto. Para uma classe mais ampla de sistemas baseados em PDE, precisamos de resultados de média [24] que sejam diretamente aplicáveis ao nosso cenário de dimensão infinita e que ainda nos permitam provar a estabilidade de mapeamentos com parâmetros distribuídos. O primeiro passo para esse objetivo foi dado em [29], onde a busca extremal baseada no algoritmo de gradiente foi aplicado em mapeamentos estáticos escalares com dinâmica de atuação governada por uma única difusão PDE [16]. Embora essa abordagem tenha aberto a possibilidade de lidar com um tipo diferente de PDE, ela impôs uma limitação crítica de considerar apenas mapas com uma entrada e uma saída. De fato, a expansão da estrutura de gradiente na busca extremal para mapas multiparamétricos sob PDEs distintos nos caminhos de atuação parece ser de difícil tratamento.

Tendo em mente as barreiras delineadas acima, apresentamos uma solução para o problema multivariado acima mencionado usando o algoritmo de busca extremal baseada em Newton [7]. O método de Newton efetivamente diagonaliza o mapeamento multivariado e permite a controladores de difusão descentralizados para cada canal de entrada do mapeamento. Graças a este recurso de descentralização, podem ser consideradas na

dinâmica de atuação múltiplas e distintas EDPs de difusão, cada uma com seu próprio domínio espacial. De fato, uma classe mais ampla de EDPs de reação-advectão-difusão (RAD) ou mesmo as EDPs de transporte hiperbólico anteriores com múltiplos domínios espaciais usados para caracterizar atrasos distintos também podem aparecer nos caminhos de atuação do mapa. Em outras palavras, a natureza da dinâmica nos caminhos de atuação também pode ser modelada por EDPs de classes diferentes.

Como na literatura para EDOs [7], a estimativa baseada na média da inversa da hessiana, de um mapeamento não linear, realizada por um filtro de Riccati elimina a dependência da hessiana para o controle de fronteira das cascatas de EDP em nossa estrutura, desacoplando o problema multivariável. Além disso, cada elemento do vetor com sinais periódicos de oscilação é escolhido individualmente, como no problema de geração de trajetória [12], com parâmetros distintos de amplitude e frequência.

A análise segue a mesma base matemática originalmente proposta em [13], mas agora tendo em mente que lidamos com um número de sistemas baseados em EDP's desacopladas e distintas. Expandimos essa linha de análise para uma classe mais ampla de EDP's em vez de sistemas com atrasos, mostrando adequadamente a sequência de etapas para calcular a média em dimensões infinitas [24], metodologia de *backstepping* e funcionais de Lyapunov [12]. A estabilidade exponencial local para o sistema em malha fechada é garantida, assim como a convergência para uma pequena vizinhança do ponto extremo. Resultados consistentes de simulação são fornecidos para apoiar os desenvolvimentos teóricos.

4.2 Declaração do problema

4.2.1 Dinâmica de atuação

Consideramos a dinâmica de atuação de um sistema multivariável, descrito por um processo de difusão, por exemplo, a equação do calor com atuador $\theta(t)$ e o atuador de propagação $\Theta(t)$ dado por

$$\Theta_i(t) = \alpha_i(0, t), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (274)$$

$$\partial_t \alpha_i(x, t) = \partial_{xx} \alpha_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (275)$$

$$\partial_x \alpha_i(0, t) = 0, \quad (276)$$

$$\alpha_i(D_i, t) = \theta_i(t), \quad (277)$$

onde o comprimento D_i do domínio é conhecido. A medida é definida pela entrada do mapeamento estático desconhecido (275) tal que

$$y(t) = Q(\Theta(t)), \quad \Theta(t) = [\Theta_1(t), \dots, \Theta_n(t)]^T. \quad (278)$$

Para o caso multivariável, também consideramos que o mapeamento estático não-linear desconhecido é quadrático, como fora utilizado nos capítulos passados,

$$Q(\Theta) = y^* + \frac{1}{2}(\Theta - \Theta^*)^T H(\Theta - \Theta^*). \quad (279)$$

onde, além da constante $\Theta^* \in \mathbb{R}^n$ e $y^* \in \mathbb{R}$ começarem desconhecidos, a matriz $H < 0$ é a hessiana desconhecida do mapeamento estático.

Conseqüentemente, a saída do mapeamento estático é dada por

$$y(t) = y^* + \frac{1}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^T H(\Theta(t) - \Theta^*). \quad (280)$$

Combinando a dinâmica de atuação acima e o esquema descrito no capítulo anterior, a busca extremal em malha fechada com dinâmica de atuação governada por um sistema de EDP de difusão sob controlador de compensação de difusão desconhecido fica na forma da Figura 37.

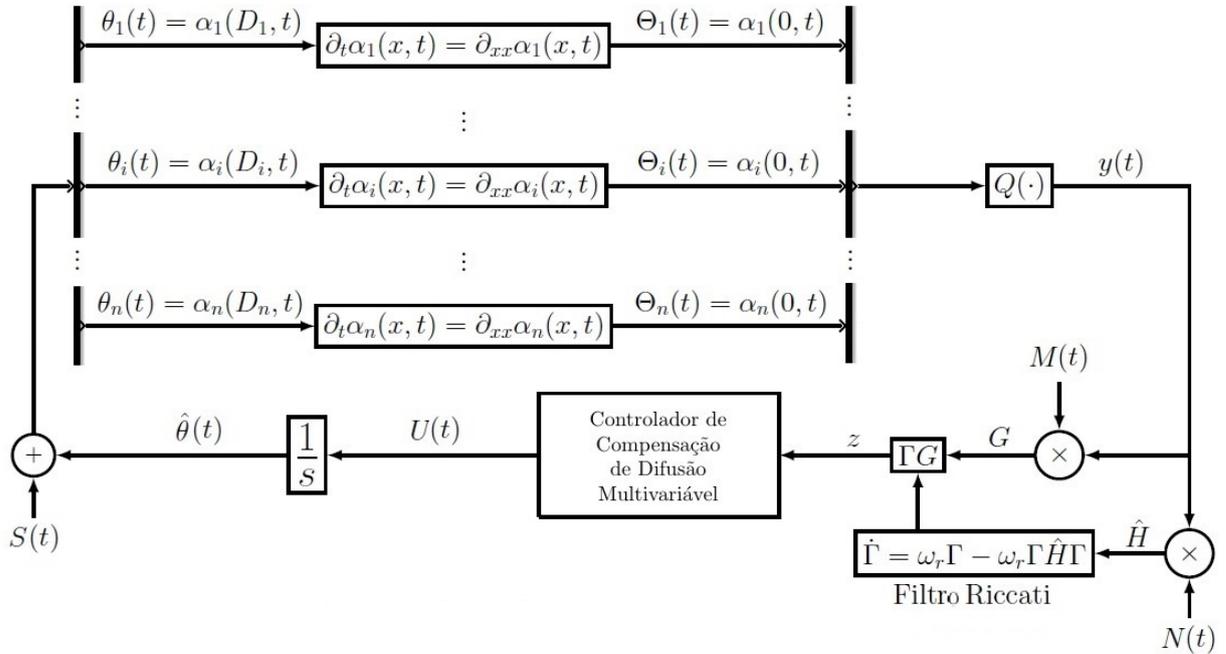


Figura 37: Diagrama de bloco de busca extremal multivariável baseado em Newton com distintas EDP's de difusão na dinâmica de atuação.

4.2.2 Sinais e sistemas

Como no esquema básico do controle por busca extremal, definimos a entrada ótima desconhecida θ^* de $\theta(t)$ com respeito ao mapeamento estático e ao processo de difusão, com relação $\Theta^* = \theta^*$. Como nosso objetivo é achar a entrada ótima desconhecida θ^* , definimos o erro de estimação

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^*, \quad \tilde{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t) - \theta_i^*, \quad (281)$$

onde o $\tilde{\theta}(t)$ é a estimação de θ^* . Para tornar (281) relevante com o otimizador do mapeamento estático Θ^* , apresentamos o erro de estimação propagado $\vartheta(t) := \tilde{\Theta}(t) - \Theta^*$ através do domínio de difusão

$$\vartheta_i(t) := \bar{\alpha}_i(0, t), \quad (282)$$

$$\partial_t \bar{\alpha}_i(x, t) = \partial_{xx} \bar{\alpha}_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (283)$$

$$\partial_x \bar{\alpha}_i(0, t) = 0, \quad (284)$$

$$\bar{\alpha}_i(D_i, t) = \tilde{\theta}_i(t). \quad (285)$$

Da malha de controle da Figura 37, temos

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t), \quad (286)$$

onde

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = U_i(t), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (287)$$

Tomando a derivada do tempo do sistema (282) - (285) e fazendo uso das equações (281) e (287), a dinâmica do erro propagada pode ser escrita como

$$\dot{\vartheta}_i(t) = u_i(0, t), \quad (288)$$

$$\partial_t u_i(x, t) = \partial_{xx} u_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (289)$$

$$\partial_x u_i(0, t) = 0, \quad (290)$$

$$u_i(D_i, t) = U_i(t), \quad (291)$$

onde $u(x, t) := \bar{\alpha}_i$ e $\dot{\hat{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t)$, desde que θ^* seja constante. Como na busca extremal sem atuação através do domínio de difusão, o sinal de perturbação $S(t)$ deve somar a $a \sin(\omega t)$ em $\Theta(t)$, compensando assim o processo de difusão. Consequentemente, $a \sin(\omega t)$ com amplitude de perturbação a e frequência ω é aplicado como segue:

$$S_i(t) := \beta_i(D_i, t), \quad (292)$$

$$\partial_t \beta_i(x, t) = \partial_{xx} \beta_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (293)$$

$$\partial_x \beta_i(0, t) = 0, \quad (294)$$

$$\beta_i(0, t) = a_i \sin(\omega_i t), \quad (295)$$

onde a solução explícita de (292) - (295) para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ é dada por

$$S_i(t) = \frac{1}{2}a_i e^{\sqrt{\frac{\omega_i}{2}}D_i} \sin\left(\omega_i t + \sqrt{\frac{\omega_i}{2}}D_i\right) + \frac{1}{2}a_i e^{-\sqrt{\frac{\omega_i}{2}}D_i} \sin\left(\omega_i t - \sqrt{\frac{\omega_i}{2}}D_i\right). \quad (296)$$

Nos falta definir os sinais de perturbação $N(t)$ para o caso multivariável, que é usado para estimar a hessiana, multiplicando-o pela saída $y(t)$ do mapeamento estático. Temos a estimativa da hessiana descrita como

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t), \quad (297)$$

e os elementos da matrix $n \times n$ de $N(t)$ para gerar a estimativa da hessiana é dado por:

$$N_{i,i}(t) = \frac{16}{a_i^2} \left(\sin^2(\omega_i t) - \frac{1}{2} \right), \quad (298)$$

$$N_{i,j}(t) = \frac{4}{a_i a_j} \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t), \quad i \neq j, \quad (299)$$

com amplitudes de perturbação a_i diferentes de zero e frequências $\omega_i \neq \omega_j$. As frequências ω_i 's podem ser selecionadas como

$$\omega_i = \omega'_i \omega = \mathcal{O}(\omega), \quad i \in 1, 2, \dots, n, \quad (300)$$

onde ω é uma constante positiva e ω'_i é um número racional.

Observe que o sinal dither $M(t)$, para estimar o gradiente, é o mesmo do controle por busca extremal básico e mostrado no capítulo anterior, tal que:

$$G(t) = M(t)y(t), \quad (301)$$

onde,

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \cdots \frac{2}{a_n} \sin(\omega_n t) \right]^T. \quad (302)$$

Além disso, definimos o sinal

$$z(t) = \Gamma(t)G(t), \quad (303)$$

onde Γ é atualizado de acordo com a seguinte equação diferencial de Riccati:

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \Gamma \hat{H} \Gamma, \quad (304)$$

onde $\omega_r > 0$ é uma constante projetada. A equação (304) possibilita que seja gerada a estimativa da inversa da hessiana, evitando inversões da estimativa da hessiana que sejam zero durante o período transiente. Com isso, a estimativa do erro da inversa da hessiana pode ser definido como:

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}. \quad (305)$$

4.3 Sistema de controle em malha fechada

4.3.1 Controlador de compensação de difusão via estimação da inversa da hessiana

Utilizando a mesma análise do capítulo escalar, chegamos a seguinte equação de controle para o caso multivariável

$$U_i(t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i \left[z_i(t) + \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) u_i(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (306)$$

onde $c_i > 0$ e $k_i > 0$.

Simbolizamos a norma espacial $\mathcal{L}_2[0, D]$ da variável de estado da EDP $u_i(x, t)$ como $\|u_i(t)\|_{\mathcal{L}_2([0, D_i])}^2 := \int_0^{D_i} u_i^2(x, t) dx$, onde, por simplicidade, retiramos o índice $\mathcal{L}_2([0, D_i])$, portanto, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_2([0, D_i])}$, se não especificado de outra forma.

Teorema 4.1 Considere o sistema da Figura 37 com o mapeamento sendo representado pela função quadrática não-linear das equações (278)–(280) e múltiplos canais de entrada com dinâmicas de atuação governadas por EDP's de difusão distintas de acordo com as equações (274)–(277). Existe $c^* > 0$ tal que, $\forall c_i \geq c^*$, $\exists \omega^*(c_i) > 0$ tal que, $\forall \omega > \omega^*$, o sistema de malha fechada (288)–(291) com lei de controle U_i em (306) e variáveis de estado definidas como $\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}$, $\vartheta_i(t)$, $u_i(x, t)$ e $i \in 1, 2, \dots, n$, possuem uma única solução periódica exponencialmente estável em t de período $\Pi = 2\pi \times \text{LCM}\{1/\omega_i\}$,

simbolizado por $\tilde{\Gamma}^\Pi(t)$, $\vartheta_i^\Pi(t)$, $u_i^\Pi(x, t)$, satisfazendo $\forall t \geq 0$:

$$\left(\left| \tilde{\Gamma}^\Pi(t) \right|^2 + \sum_{i=1}^n |\vartheta_i^\Pi(t)|^2 + \|u_i^\Pi(t)\|^2 + \|\partial_x u_i^\Pi(t)\|^2 + |u_i^\Pi(D_i, t)|^2 \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (307)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O} \left(|a| e^{D\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega \right), \quad (308)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega), \quad (309)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2), \quad (310)$$

onde $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T$ e $D = \max(D_i)$.

Para esclarecer como é provada a estabilidade e convergência para vizinhança do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$, respectivamente, é apresentada a estrutura da prova na Figura 38.



Figura 38: Estrutura do projeto do controlador e prova da estabilidade do sistema em malha fechada.

O primeiro passo, desenvolver o controlador de compensação de difusão, já foi feito como apresentado na seção anterior. Portanto, começamos com o sistema original em malha fechada, o qual, para aplicar o teorema da média, expandimos todas as equações. Utilizando a transformação backstepping, primeiramente mostra-se, no sistema resultante, sua estabilidade fazendo uso de funções de Lyapunov Krasovskii adequada. A estabilidade

do sistema médio em malha fechado é concluída devido a invertibilidade da transformação feita inicialmente. Invocando o teorema da média para sistemas de dimensões infinitas, o Teorema 1.3, prova a estabilidade exponencial dos sistemas originais de malha fechada. Finalmente, podemos mostrar a convergência de $(\theta(t), \Theta(t), y(t))$ para uma vizinhança do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$ para $t \rightarrow \infty$.

Prova 4.1 *A demonstração é feita a seguir nos **Passos 1 a 8**.*

Passo 1: Equações do sistema em malha fechada

Substituindo (306) em (291), podemos reescrever (288)–(291) como

$$\dot{\vartheta}_i(t) = u_i(0, t), \quad (311)$$

$$\partial_t u_i(x, t) = \partial_{xx} u_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (312)$$

$$\partial_x u_i(0, t) = 0, \quad (313)$$

$$u_i(D_i, t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i \left[z_i(t) + \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) u_i(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (314)$$

Passo 2: Equação dinâmica para a estimativa do erro da inversa da hessiana

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1}$$

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = \omega_r(\tilde{\Gamma} + H^{-1})[I_{n \times n} - \hat{H}(\tilde{\Gamma} + H^{-1})]. \quad (315)$$

Passo 3: Modelo médio do sistema em malha fechada

Realizando análises da média de $z(t) = [z_1(t), \dots, z_n(t)]^T$ definidas em (303), podemos verificar que

$$z_{\text{av}}(t) = \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi \Gamma M(\lambda) y d\lambda = \Gamma_{\text{av}}(t) H \vartheta_{\text{av}}(t), \quad (316)$$

$$\vartheta_{\text{av}}(t) = [\vartheta_1^{\text{av}}(t), \dots, \vartheta_n^{\text{av}}(t)]^T, \quad (317)$$

onde $\Gamma_{\text{av}}(t)$ e $\vartheta_{\text{av}}(t)$ denotam a versão média de $\Gamma(t)$ e $\vartheta(t)$, respectivamente.

Então, a equação (316) pode ser escrita em termos de $\tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) = \Gamma_{\text{av}}(t) - H^{-1}$ como

$$z_{\text{av}}(t) = \vartheta_{\text{av}}(t) + \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) H \vartheta_{\text{av}}(t). \quad (318)$$

O segundo termo no lado direito de (318) é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{\text{av}}, \vartheta_{\text{av}})$, portanto, a linearização de $\Gamma_{\text{av}}(t)$ em H^{-1} resulta na versão linearizada de (316) dado por

$$z_{\text{av}}(t) = \vartheta_{\text{av}}(t). \quad (319)$$

De (319), a versão média linearizada do sistema (311)-(314) para ω grande é

$$\dot{\vartheta}_i^{\text{av}}(t) = u_i^{\text{av}}(0, t), \quad (320)$$

$$\partial_t u_i^{\text{av}}(x, t) = \partial_{xx} u_i^{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (321)$$

$$\partial_x u_i^{\text{av}}(0, t) = 0, \quad (322)$$

$$\frac{d}{dt} u_i^{\text{av}}(D_i, t) = -c_i u_i^{\text{av}}(D_i, t) - c_i k_i \left[\vartheta_i^{\text{av}}(t) + \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) u_i^{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (323)$$

onde o filtro passa baixa é representado no espaço de estado. Por outro lado, o modelo médio para a estimativa do erro da inversa da Hessiana em (315) é

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) - \omega_r \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t) H \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t), \quad (324)$$

visto que

$$\hat{H}_{\text{av}} = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\lambda) y d\lambda = H, \quad (325)$$

e sua versão linearizada é dada por

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{\text{av}}(t). \quad (326)$$

Passo 4: Transformação *backstepping*, sua inversa e o sistema alvo

Considere a transformação de *backstepping* de dimensão infinita do estado da PDE

$$w_i(x, t) = u_i^{\text{av}}(x, t) + k_i \left(\vartheta_i^{\text{av}}(t) + \int_0^x (x - \sigma) u_i^{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right), \quad (327)$$

o qual mapeia o sistema (320)–(323) no sistema alvo:

$$\dot{\vartheta}_i^{\text{av}}(t) = -k_i \vartheta_i^{\text{av}}(t) + w_i(0, t), \quad (328)$$

$$\partial_t w_i(x, t) = \partial_{xx} w_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (329)$$

$$\partial_x w_i(0, t) = 0, \quad (330)$$

$$w_i(D_i, t) = -\frac{1}{c_i} \partial_t u_i^{\text{av}}(D_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (331)$$

Usando (327) para $x = D_i$ e o fato de que $u_i^{\text{av}}(D_i, t) = U_i^{\text{av}}(t)$, de (331) obtemos (323), i.e.,

$$U_i^{\text{av}}(t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i \left[\vartheta_i^{\text{av}}(t) + \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) u_i^{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (332)$$

É facilmente observado que

$$\partial_t w_i(D_i, t) = \partial_t u_i^{\text{av}}(D_i, t) + k_i u_i^{\text{av}}(D_i, t), \quad (333)$$

onde $\partial_t u_i^{\text{av}}(D_i, t) = \dot{U}_i^{\text{av}}(t)$. A inversa de (327) é dada por

$$u_i^{\text{av}}(x, t) = w_i(x, t) - k_i \left[e^{-k_i x} \vartheta_i^{\text{av}}(t) + \int_0^x (e^{-k_i(x-\sigma)} - 1) w_i(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (334)$$

Inserindo (331) e (334) em (333), obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t w_i(D_i, t) &= -c_i w_i(D_i, t) + k_i w_i(D_i, t) \\ &\quad - k_i^2 \left[e^{-k_i D_i} \vartheta_i^{\text{av}}(t) + \int_0^{D_i} (e^{-k_i(D_i-\sigma)} - 1) w_i(\sigma, t) d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (335)$$

Passo 5: Funcional de Lyapunov-Krasovskii

A estabilidade exponencial do sistema como um todo é estabelecida com o funcional de Lyapunov

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t), \quad (336)$$

onde $V_i(t)$ são os funcionais

$$V_i(t) = \frac{1}{2} [\vartheta_i^{\text{av}}(t)]^2 + \frac{a_i}{2} \|w_i(t)\|^2 + \frac{b_i}{2} \|\partial_x w_i(t)\|^2 + \frac{d_i}{2} w_i^2(D_i, t), \quad (337)$$

para cada subsistema em (328)–(331) e $a_i, b_i, d_i > 0$ sendo constantes apropriadas a serem escolhidas, $\forall i = 1, \dots, n$.

Definimos $\lambda_i := k_i$ com $\lambda_i > 0$ por construção. Calculando a derivada do tempo de (337), associada com a solução do sistema alvo (328)–(331), relacionando (335), e com ajuda de integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) = & -\lambda_i[\vartheta_i^{av}(t)]^2 + \vartheta_i^{av}(t)w_i(0, t) \\ & + a_i w_i(D_i, t)\partial_x w_i(D_i, t) - a_i \|\partial_x w_i(t)\|^2 \\ & + b_i \partial_x w_i(D_i, t)\partial_t w_i(D_i, t) - b_i \|\partial_{xx} w_i(t)\|^2 \\ & + d_i w_i(D_i, t)\partial_t w_i(D_i, t). \end{aligned} \quad (338)$$

Após extensos cálculos, aplicando desigualdades de Young, Poincaré, Agmon e Cauchy-Schwarz com frequência e escolhendo $a_i = (c_i - \lambda_i)/(8D_i\lambda_i^3)$, $b_i = 1/(8D_i\lambda_i^3)$, $d_i = 1$, temos que

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\lambda_i}{4}[\vartheta_i^{av}(t)]^2 + (c_1^* - c_i)w_i^2(D_i, t) + (c_2^* - c_i)\|\partial_x w_i(t)\|^2 - \frac{1}{32D_i\lambda_i^3}\|\partial_{xx} w_i(t)\|^2, \quad (339)$$

com

$$c_1^* = \frac{3}{2}\lambda_i^3 + \lambda_i + \frac{1 + 2D_i}{\lambda_i} + 2D_i\lambda_i\|e^{-\lambda_i(D_i-\sigma)} - 1\|^2, \quad (340)$$

$$c_2^* = \lambda_i + 8D_i\lambda_i^3 \left[\frac{4D_i^2 + 1}{\lambda_i} + 4D_i^2\lambda_i\|e^{-\lambda_i(D_i-\sigma)} - 1\|^2 \right]. \quad (341)$$

Fazendo uso da desigualdade de Poincaré

$$\|\partial_x w_i(t)\|^2 \leq 2D_i\partial_x w_i(0, t)^2 + 4D_i^2\|\partial_{xx} w_i(t)\|^2, \quad (342)$$

ao último termo de (339), e lembrando que $\partial_x w_i(0, t) = 0$, tem-se

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\lambda_i}{4}[\vartheta_i^{av}(t)]^2 - (c_i - c_1^*)w_i^2(D_i, t) - (c_i - c_2^*)\|\partial_x w_i(t)\|^2 - \frac{1}{128D_i^3\lambda_i^3}\|\partial_{xx} w_i(t)\|^2. \quad (343)$$

Fazendo uso novamente da desigualdade de Poincaré (segundo caso)

$$\|w_i(t)\|^2 \leq 2w_i(D, t)^2 + 4D_i^2 \|\partial_x w_i(t)\|^2, \quad (344)$$

ao termo resultante $-\frac{1}{128D_i^3\lambda_i^3} \|\partial_x w_i(t)\|^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{\lambda_i}{4} [\vartheta_i^{av}(t)]^2 - (c_i - c_1^*)w_i^2(D_i, t) - (c_i - c_2^*) \|\partial_x w_i(t)\|^2 \\ & - \frac{1}{512D_i^5\lambda_i^3} \|w_i(t)\|^2 + \frac{1}{256D_i^5\lambda_i^3} w_i^2(D_i, t). \end{aligned} \quad (345)$$

Finalmente, definindo

$$c_3^* = c_1^* + \frac{1}{256D_i^5\lambda_i^3}, \quad (346)$$

e rearrumando os termos, podemos escrever

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{\lambda_i}{4} [\vartheta_i^{av}(t)]^2 - \frac{1}{512D_i^5\lambda_i^3} \|w_i(t)\|^2 - (c_i - c_2^*) \|\partial_x w_i(t)\|^2 - (c_i - c_3^*)w_i^2(D_i, t). \quad (347)$$

Consequentemente, de (343), se c_i é escolhido tal que $c_i > \max\{c_2^*, c_3^*\}$, obtemos

$$\dot{V}_i(t) \leq -\mu_i V_i(t) \quad \text{ou} \quad \dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \quad (348)$$

para $\mu_i > 0$ e $\mu = \min(\mu_i)$. Portanto, o sistema alvo é exponencialmente estável no sentido da norma de \mathcal{H}_1

$$\left(\sum_{i=1}^n [\vartheta_i^{av}(t)]^2 + \int_0^{D_i} w_i^2(x, t) dx + \int_0^{D_i} \partial_x w_i^2(x, t) dx + w_i^2(D_i, t) \right)^{1/2}, \quad (349)$$

ou na forma compacta

$$(\vartheta_{av}^2(t) + \|w(t)\|^2 + \|\partial_x w(t)\|^2 + w^2(D, t))^{1/2}, \quad (350)$$

isto é, na variável transformada (ϑ_{av}, w) .

Passo 6: Estimativa de estabilidade exponencial (na norma \mathcal{H}_1) para sistema médio (320)–(323)

Para obter estabilidade exponencial no sentido da norma

$$\Upsilon(t) \triangleq \left(|\vartheta_{\text{av}}(t)|^2 + \sum_{i=1}^n \int_0^{D_i} [u_i^{\text{av}}(x, t)]^2 + [\partial_x u_i^{\text{av}}(x, t)]^2 dx + [u_i^{\text{av}}(D_i, t)]^2 \right)^{1/2}, \quad (351)$$

precisamos mostrar que existem números positivos α_1 e α_2 tal que

$$\alpha_1 \Upsilon(t)^2 \leq V(t) \leq \alpha_2 \Upsilon(t)^2. \quad (352)$$

Isso é simples de estabelecer usando (327), (334), (336), (337) e empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e outros cálculos, como na prova do Teorema 2.1. (Krstić, 2009).

Consequentemente, com (348), temos

$$\left(|\vartheta_{\text{av}}(t)|^2 + \sum_{i=1}^n \int_0^{D_i} [u_i^{\text{av}}(x, t)]^2 + [\partial_x u_i^{\text{av}}(x, t)]^2 dx + [u_i^{\text{av}}(D_i, t)]^2 \right) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \left(|\vartheta_{\text{av}}(0)|^2 + \sum_{i=1}^n \int_0^{D_i} [u_i^{\text{av}}(x, 0)]^2 + [\partial_x u_i^{\text{av}}(x, 0)]^2 dx + [u_i^{\text{av}}(D_i, 0)]^2 \right), \quad (353)$$

que completa a prova de estabilidade exponencial na variável original $(\vartheta_{\text{av}}, u_{\text{av}})$.

Passo 7: Invocando o teorema da média

O teorema da média para sistemas de dimensão infinita (Hale & Lunel, 1990) afirma que o sistema de malha fechada tem que estar na forma

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + F(\omega t, Z(t)), \quad (354)$$

onde $Z(t) \in \mathcal{X} := \mathcal{H}_1([0, D])$ é o vetor de estado de dimensão infinita. Por transformação de estado de (311)–(314) com $v_i(x, t) = u_i(x, t) - U_i(t)$, obtemos o sistema em malha

fechada com condições de contorno homogêneo

$$\dot{v}_i(t) = v_i(0, t) + U_i(t), \quad (355)$$

$$\partial_t v_i(x, t) = \partial_{xx} v_i(x, t) - \phi_i(\vartheta_i, v_i, U_i, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (356)$$

$$\partial_x v_i(0, t) = 0, \quad (357)$$

$$v_i(D_i, t) = 0, \quad (358)$$

$$\dot{U}_i(t) = \phi_i(\vartheta_i, v_i, U_i, t), \quad (359)$$

com

$$\phi_i(\vartheta_i, v_i, U_i, t) = -c_i U_i(t) - c_i k_i \left[z_i(t) + \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) (v_i(\sigma, t) + U_i(t)) d\sigma \right]. \quad (360)$$

A seguir escrevemos o sistema de EDP (356)-(358) como uma equação evolucionária (Lunardi, 1995) no espaço Banach \mathcal{X} :

$$\dot{V}_i(t) = \mathcal{A}_i V_i(t) - \tilde{\phi}_i(\vartheta_i, V_i, U_i, t), \quad t > 0, \quad (361)$$

onde $V_i(t)$ é uma função vetorial de dimensão infinita que pertence ao espaço Banach \mathcal{X} . Além disso, \mathcal{A}_i é a realização da derivada de segunda ordem com uma condição de limite de Dirichlet e Neumann em \mathcal{X} com

$$\mathcal{A}_i \varphi_i := \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}, \quad (362)$$

e o domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_i) = \left\{ \varphi_i \in \mathcal{X} : \varphi_i, \frac{d}{dx} \varphi_i \in \mathcal{X} \text{ são c.a.}, \frac{d^2}{dx^2} \varphi_i \in \mathcal{X}, \frac{d}{dx} \varphi_i(0) = 0, \varphi_i(D_i) = 0 \right\}, \quad (363)$$

onde c.a. significa contínuo absoluto. Para expressar $v_i(0, t)$ na EDO (355) em termos de $V_i(t)$, introduzimos o operador de contorno linear $\mathcal{B}_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{B}_i V_i(t) := v_i(0, t). \quad (364)$$

Além disso, definimos os operadores lineares $\alpha^\top : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\beta_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ como

$$\begin{aligned}\alpha^\top V_i(t) &:= \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) v_i(\sigma, t) d\sigma, \\ \beta_i \zeta &:= [(\beta_i)_1, (\beta_i)_2, \dots]^\top \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{R} \\ \text{com } (\beta_i)_k &= \int_0^{D_i} \psi_k^{[i]}(x) dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{D_i}} \frac{2D_i}{\pi(2k-1)} (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, \infty,\end{aligned}\tag{365}$$

onde $\psi_k^{[i]}(x) = \sqrt{2/D_i} \cos(\pi/2(2k-1)x/D_i)$ são as autofunções de \mathcal{A}_i e $\tilde{\phi}_i(\vartheta_i, V_i, U_i, t)$ em (361) podem ser escritas como

$$\tilde{\phi}_i(\vartheta_i, V_i, U_i, t) = -c_i \beta_i U_i(t) - c_i \beta_i k_i \left[z_i(t) + \left(\frac{1}{2} D_i^2 U_i(t) + \alpha^\top V_i(t) \right) \right].\tag{366}$$

Finalmente, tendo em conta o $\tilde{\Gamma}$ -dinâmica dada em (315), o sistema em malha fechada com vetor de estado de dimensão infinita $Z(t) = [Z_1(t) \dots Z_n(t) \tilde{\Gamma}(t)]^\top$ pode ser reescrito como em (354):

$$\dot{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & A_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_r \end{bmatrix}}_A Z + \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(\omega t, Z_1) \\ \vdots \\ F_n(\omega t, Z_n) \\ \omega_r H^{-1} - \omega_r [\tilde{\Gamma} + H^{-1}] \hat{H}(t) [\tilde{\Gamma} + H^{-1}] \end{bmatrix}}_{F(\omega t, Z(t))}\tag{367}$$

com $Z_i(t) = [\vartheta_i(t) \ V_i(t) \ U_i(t)]^\top$, $i = 1, \dots, n$,

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B}_i & 1 \\ 0 & \mathcal{A}_i & -c_i \beta_i \\ 0 & 0 & -c_i \end{bmatrix}, \quad F_i(\omega t, Z_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_i \beta_i k_i [z_i(t) + g_i(Z_i)] \\ -c_i k_i [z_i(t) + g_i(Z_i)] \end{bmatrix},\tag{368}$$

e $g_i(Z_i) = \frac{1}{2} D_i^2 U_i(t) + \alpha^\top V_i(t)$. Note que os sinais $z_i(t)$ e $\hat{H}(t)$ são funções explícitas de ωt por construção uma vez que $\omega_i = \mathcal{O}(\omega)$ de acordo com (300). Uma vez que o operador A em (367) gera um semigrupo analítico pelo teorema da matriz do operador em (Nagel, 1989) e $F(\omega t, Z)$ é Fréchet diferenciável em Z , fortemente contínua e periódica em t , uniformemente em relação a Z , portanto, todas as suposições para aplicar o teorema da

média para sistemas de dimensões infinitas por Hale & Lunel (1990) são satisfeitas (ver Apêndice).

A solução do sistema em malha fechada original em (311)-(314) comporta-se como o sistema médio, onde a equação da média do sistema original em malha fechada (311)-(314) e (315) é dada por

$$\dot{Z}_{av} = AZ_{av} + F_0(Z_{av}) \quad \text{com} \quad F_0(Z_{av}) = \lim_{\Pi \rightarrow 0} \frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi F(\tau, Z_{av}) d\tau. \quad (369)$$

Juntamente com a estabilidade exponencial local do sistema médio que mostramos em (353) e para o equilíbrio $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = 0$ de (326), existe uma solução periódica exponencialmente estável $Z^\Pi(t)$ com $\|Z^\Pi(t)\| \leq \mathcal{O}(1/\omega)$ do sistema original (311)-(314) e (315). Assim, o sistema em malha fechada original tem uma solução periódica exponencialmente estável $Z^\Pi(t)$ que satisfaz (307) para ω suficientemente grande e $\tilde{\Gamma}^\Pi(t)$, $\vartheta_i^\Pi(t)$, $u_i^\Pi(x, t)$ sendo as soluções periódicas de $\tilde{\Gamma}(t)$, $\vartheta_i(t)$, $u_i(x, t)$ com período $\Pi = 2\pi \times \text{LCM}\{1/\omega_i\}$.

Passo 8: Convergência assintótica para uma vizinhança do extremo $(\theta^*, \Theta^*, y^*)$

Primeiro, considere o sistema EDP (282)–(285). Pela desigualdade de Agmon, Poincaré e Young,

$$\bar{\alpha}_i(D_i, t)^2 \leq \max_{x \in [0, D_i]} |\bar{\alpha}_i(x, t)|^2 \leq \bar{\alpha}_i(0, t)^2 + 2\|\bar{\alpha}_i(t)\| \|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\|, \quad (370)$$

$$\|\bar{\alpha}_i(t)\|^2 \leq \bar{\alpha}_i(0, t)^2 + 4D_i \|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\|^2, \quad (371)$$

$$2\|\bar{\alpha}_i(t)\| \|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\| \leq \|\bar{\alpha}_i(t)\|^2 + \|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\|^2, \quad (372)$$

temos

$$\bar{\alpha}_i(D_i, t)^2 \leq 3\bar{\alpha}_i(0, t)^2 + (4D_i + 1) \|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\|. \quad (373)$$

Ao substituir os valores de fronteira (282) e (285) em (373), chegamos a

$$\tilde{\theta}_i^2(t) \leq 3\vartheta_i(t)^2 + (4D_i + 1) \|\partial_x \bar{\alpha}_i\|^2. \quad (374)$$

Como próximo passo, introduzimos o funcional Lyapunov-Krasovskii

$$\Lambda_1(t) = \frac{1}{2} \|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\|^2, \quad (375)$$

e mostrarmos a estabilidade exponencial $\partial_x \bar{\alpha}_i(x, t)$. Tomando a derivada de tempo de (375) junto com (283) e (284), tem-se

$$\dot{\Lambda}_1(t) = \partial_x \bar{\alpha}_i(D_i, t) \partial_t \bar{\alpha}_i(D_i, t) - \|\partial_{xx} \bar{\alpha}_i(t)\|^2. \quad (376)$$

Usando a desigualdade de Young, Agmon e Poincaré novamente e a identidade $\partial_t \bar{\alpha}_i(D_i, t) = \dot{\theta}_i(t) = U_i(t)$, tal que (376) é dada por

$$\dot{\Lambda}_1(t) \leq -\frac{1}{2} \|\partial_{xx} \bar{\alpha}_i(t)\|^2 + 2D_i U_i(t)^2. \quad (377)$$

Do **Passo 6** sabemos que o sistema em malha fechada original (311)-(314) é exponencialmente estável no sentido da norma \mathcal{H}_1 com o funcional Lyapunov-Krasovskii

$$\Lambda_2(t) = \frac{1}{2} |\vartheta_i(t)|^2 + \frac{1}{2} \|u_i(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x u_i(t)\|^2 + \frac{1}{2} U_i(t)^2, \quad (378)$$

onde

$$\dot{\Lambda}_2(t) \leq -\mu_i \Lambda_2(t) \quad (379)$$

vale para $\mu_i > 0$. Considere o funcional de Lyapunov-Krasovskii composto $\Lambda_i = \frac{\mu_i}{8D_i} \Lambda_1 + \Lambda_2$. Então, por (377)-(379), tem-se

$$\dot{\Lambda}_i(t) \leq -\mu_i \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{64D_i^3} \right\} \Lambda_i, \quad (380)$$

o que produz $M > 0$ para

$$\|\partial_x \bar{\alpha}_i(t)\|^2 \leq M e^{-kt} \quad \text{with} \quad k = \mu_i \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{64D_i^3} \right\}. \quad (381)$$

Com (374) e (381), temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3|\vartheta_i(t)|^2\}. \quad (382)$$

A equação (382) pode ser escrita em termos da solução periódica $\vartheta_i^\Pi(t)$ como

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{3|\vartheta_i(t) + \vartheta_i^\Pi(t) - \vartheta_i^\Pi(t)|^2\}. \quad (383)$$

Aplicando a desigualdade de Young e um pouco de álgebra, equação (383) pode ser reescrita como

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ 3\sqrt{2} (|\vartheta_i(t) - \vartheta_i^\Pi(t)|^2 + |\vartheta_i^\Pi(t)|^2) \right\}. \quad (384)$$

Do Teorema 1.3 (veja o apêndice), sabemos $\vartheta_i(t) - \vartheta_i^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente a medida que $t \rightarrow \infty$. Consequentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i(t)|^2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ 3\sqrt{2} |\vartheta_i^\Pi(t)|^2 \right\}. \quad (385)$$

Com (307) e (385), obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega). \quad (386)$$

Usando a definição de $\tilde{\theta}(t)$ em (281) e a relação $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$, temos

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t). \quad (387)$$

Uma vez que $S(t)$ é da ordem $\mathcal{O}\left(|a|e^{D\sqrt{\omega/2}}\right)$ com $D = \max(D_i)$, como mostrado em (296), e junto com (386) e (387), finalmente obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}\left(|a|e^{D\sqrt{\omega/2}} + 1/\omega\right). \quad (388)$$

A convergência do atuador propagado $\Theta(t)$ para o otimizador Θ^* é muito mais fácil de provar. A relação entre o erro de estimativa propagado $\vartheta(t)$, a entrada propagada $\Theta(t)$ e

o otimizador do mapeamento estático Θ^* é dada por

$$\vartheta_i(t) + a_i \sin(\omega_i t) = \Theta_i(t) - \Theta_i^*, \quad (389)$$

que pode ser facilmente comprovado, considerando $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ juntamente com as soluções de (274)-(277), (282)-(285) e (292)-(295).

Assim, usando (389) e tomando o valor absoluto, temos

$$|\Theta_i(t) - \Theta_i^*| = |\vartheta_i(t) + a_i \sin(\omega_i(t))|. \quad (390)$$

Como na prova de convergência do parâmetro $\theta(t)$ para o parâmetro ótimo θ^* acima, escrevemos (390) em termos da solução periódica $\vartheta_i^\Pi(t)$ e siga os mesmos passos aplicando a desigualdade de Young e $\vartheta_i(t) - \vartheta_i^\Pi(t) \rightarrow 0$ exponencialmente a medida que $t \rightarrow \infty$ pelo Teorema 1.3 . Consequentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta_i(t) - \Theta_i^*| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \sqrt{2} \vartheta_i^\Pi(t) + a_i \sin(\omega_i t) \right|, \quad (391)$$

e finalmente com (307)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*| = \mathcal{O}(|a| + 1/\omega). \quad (392)$$

Para mostrar a convergência da saída $y(t)$ do mapa estático para o valor ideal y^* , reescrevemos (280) como

$$y(t) - y^* = +\frac{1}{2}(\Theta(t) - \Theta^*)^T H(\Theta(t) - \Theta^*). \quad (393)$$

Aplicando a desigualdade de Rayleigh à função quadrática em (393), obtemos

$$|y(t) - y^*| \leq \lambda_{\max}(H) |\Theta(t) - \Theta^*|^2, \quad (394)$$

onde $\lambda_{\max}(H)$ denota o maior autovalor de H . Consequentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \lambda_{\max}(H) \limsup_{t \rightarrow \infty} |\Theta(t) - \Theta^*|^2. \quad (395)$$

Finalmente, substituindo (392) em (395) e aplicando a desigualdade de Young ao resul-

tado, temos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2). \quad (396)$$

Finalmente, provamos o Teorema 4.1. □

Comentário 4.1 Observe o termo $\exp\left(D\sqrt{\omega/2}\right)$ em (308), que ocorre devido a suavização da magnitude em altas frequências, que deve ser compensado por $S(t)$ diminuindo as amplitudes a_i em (296). Assim, a amplitude de $S(t)$ e $\theta(t)$, respectivamente, aumentam conforme a frequência de perturbação ω e os coeficientes de difusão (D_i) aumentam.

4.4 Simulações

Para que seja possível avaliar o desenvolvimento teórico deste capítulo, realizamos a simulação, de um mapeamento quadrático estático, conforme segue abaixo:

$$Q(\Theta) = 5 + \frac{1}{2} (2\Theta_1^2 + 4(\Theta_2 - 1)^2 + 4\Theta_1(\Theta_2 - 1)) , \quad (397)$$

no qual o ponto extremo é definido de acordo com $\Theta^* = (0, 1)$ e $y^* = 5$. A hessiana do mapeamento é definida como

$$H = - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} , \quad (398)$$

e sua inversa é

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} . \quad (399)$$

Para este caso faremos uma simulação de grau 2 ($n = 2$), onde a equação do controlador é dada por

$$U_i(t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i \left[z_i(t) + \int_0^{D_i} (D_i - \sigma) u_i(\sigma, t) d\sigma \right] \right\} . \quad (400)$$

Conforme desenvolvimento teórico, consideramos que $M(t)$ e $N(t)$ são da seguinte forma:

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \\ \frac{2}{a_2} \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix} , \quad (401)$$

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_{11}(t) & N_{12}(t) \\ N_{21}(t) & N_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{a_1^2} (\sin^2(\omega_1 t) - \frac{1}{2}) & \frac{4}{a_1 a_2} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \\ \frac{4}{a_2 a_1} \sin(\omega_2 t) \sin(\omega_1 t) & \frac{16}{a_2^2} (\sin^2(\omega_2 t) - \frac{1}{2}) \end{bmatrix} . \quad (402)$$

O controlador de compensação de difusão (400) pode ser reescrito como $U_1(t)$ e $U_2(t)$, mostrado na sequência:

$$U_1(t) = \frac{c_1}{s + c_1} \left\{ -k_1 \left[z_1(t) + \int_0^{D_1} (D_1 - \sigma) u_1(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (403)$$

$$U_2(t) = \frac{c_2}{s + c_2} \left\{ -k_2 \left[z_2(t) + \int_0^{D_2} (D_2 - \sigma) u_2(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (404)$$

O sinal de oscilação aditivo $S(t)$ sendo conforme 296 fica como

$$S_1(t) = \frac{1}{2} a_1 e^{\sqrt{\frac{\omega_1}{2}} D_1} \sin \left(\omega_1 t + \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} D_1 \right) + \frac{1}{2} a_1 e^{-\sqrt{\frac{\omega_1}{2}} D_1} \sin \left(\omega_1 t - \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} D_1 \right), \quad (405)$$

e

$$S_2(t) = \frac{1}{2} a_2 e^{\sqrt{\frac{\omega_2}{2}} D_2} \sin \left(\omega_2 t + \sqrt{\frac{\omega_2}{2}} D_2 \right) + \frac{1}{2} a_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega_2}{2}} D_2} \sin \left(\omega_2 t - \sqrt{\frac{\omega_2}{2}} D_2 \right). \quad (406)$$

Neste exemplo, usamos filtros passa baixa e passa alta para melhorar o desempenho do controlador, como de costume em projetos de busca extremal. Foram considerados os seguintes parâmetros para esta simulação: $c_{1,2} = 10$, $k_{1,2} = 0,17$, $a_{1,2} = 0,05$, $\omega = 10$, $\omega_1 = 5\omega$, $\omega_2 = 7\omega$, $D_1 = 1,2$, $D_2 = 1$, $\omega_h = \omega_l = \frac{\omega}{10}$, $\omega_r = 0,5$, $\theta_1(0) = -1$, $\theta_2(0) = 3,5$, $\Gamma_{1,1}(0) = -1/100$, $\Gamma_{1,2}(0) = \Gamma_{2,1}(0) = 0$ e $\Gamma_{2,2}(0) = -2/100$.

As figuras a seguir apresentam as variáveis relevantes para busca extremal: Figura 39 apresenta a resposta temporal dos parâmetros $\theta(t)$, Figura 40 o sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$, Figura 41 mostra a saída $y(t)$ e por fim, a Figura 42 nos mostra a estimativa da hessiana $\hat{H} = N(t)y(t)$ convergindo ao valor estipulado (398) no desenvolvimento desta simulação.

Como esperado, o algoritmo de Newton para busca extremal multivariável converge para o extremo mais rápido do que o esquema baseado no método gradiente, assim como no caso escalar mostrado no Capítulo 2.

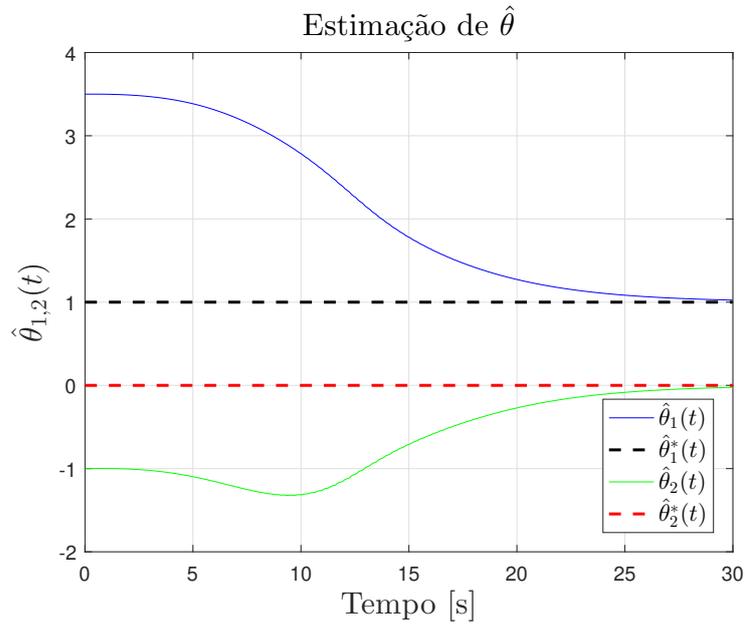


Figura 39: Convergência dos parâmetros estimados $\hat{\theta}(t)$ aos seus valores ideais conforme estipulado.

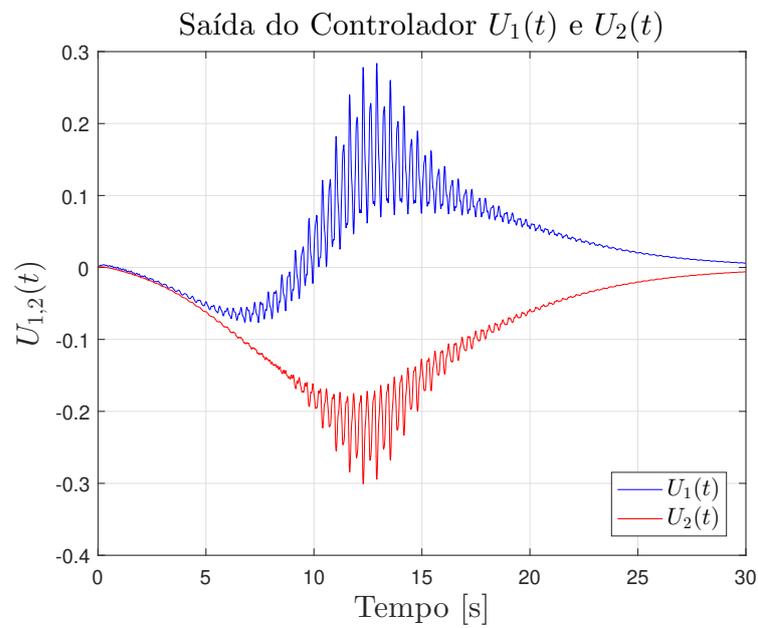


Figura 40: Sinal de controle $U(t)$, onde $U_1(t)$ representa o sinal para controle do primeiro sistema e $U_2(t)$ do segundo.

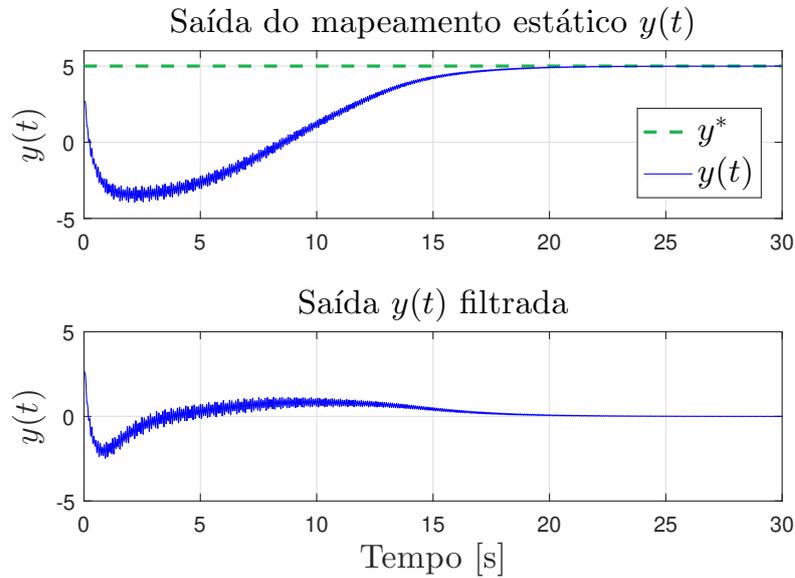


Figura 41: Em (a) sinal de saída $y(t)$ convergindo ao valor ótimo estipulado no mapeamento. Em (b) sinal da saída $y(t)$ filtrado.

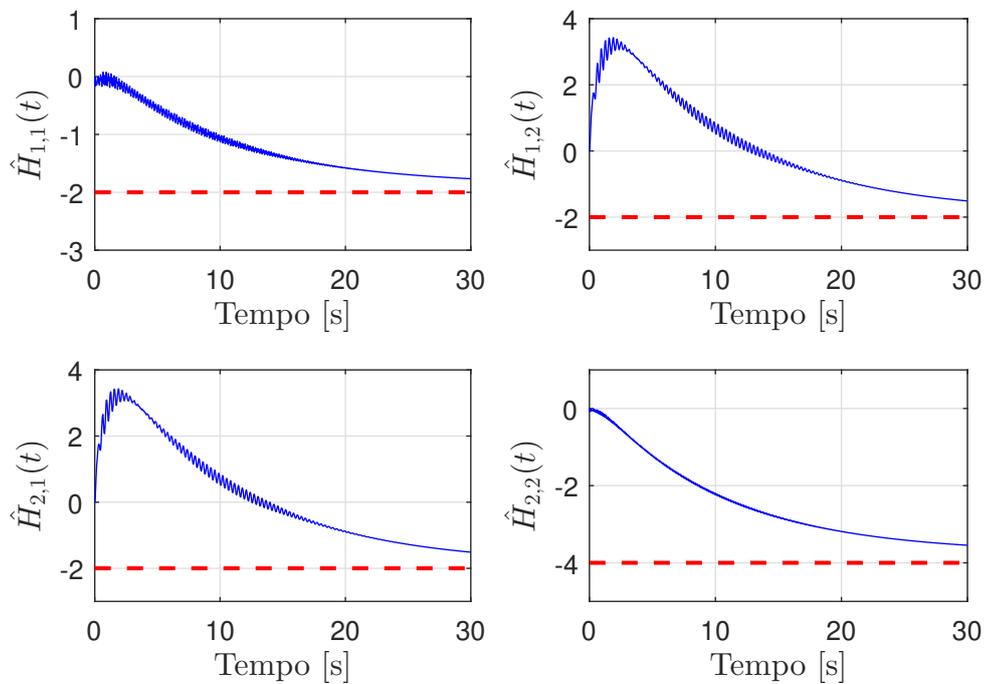


Figura 42: Convergência dos valores da estimação da matriz hessiana (398): (a) $H_{1,1} = -2$, (b) $H_{1,2} = -2$, (c) $H_{2,1} = -2$ e (d) $H_{2,2} = -4$.

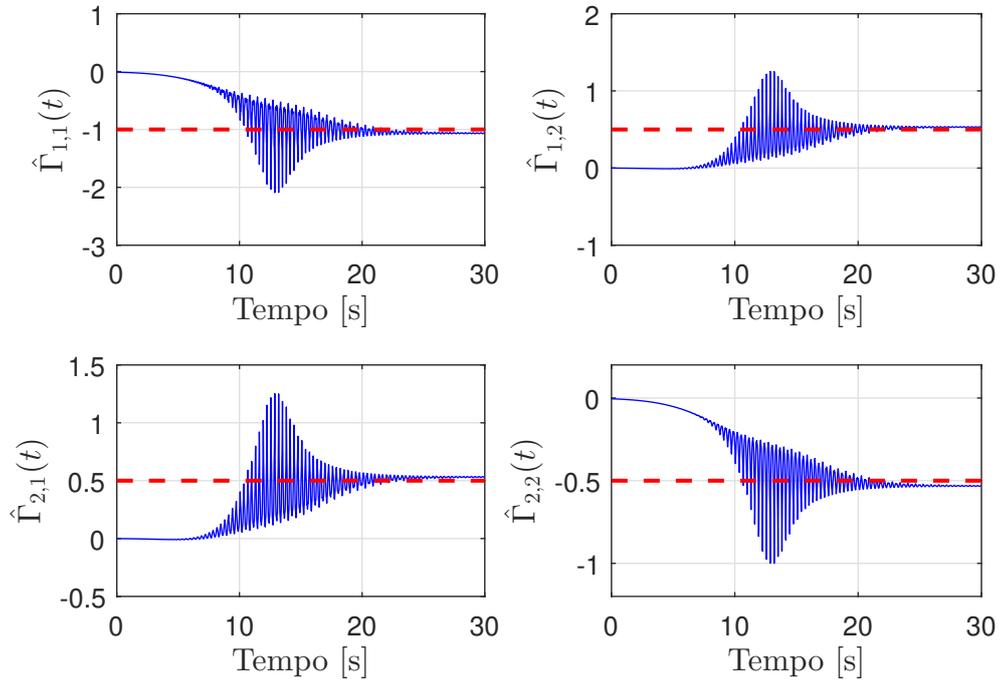


Figura 43: Convergência dos valores da estimação da matriz de (399): (a) $\Gamma_{1,1} \rightarrow -1$, (b) $\Gamma_{1,2} \rightarrow 0,5$, (c) $\Gamma_{2,1} \rightarrow 0,5$ e (d) $\Gamma_{2,2} \rightarrow -0,5$.

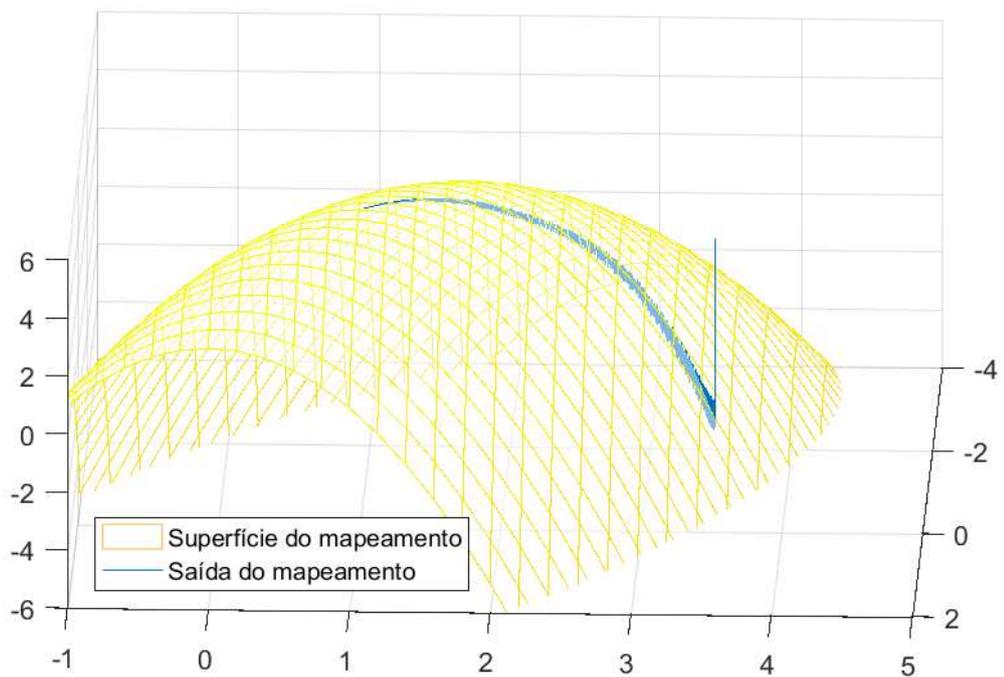


Figura 44: Convergência da saída do mapeamento sob a superfície do mesmo.

4.5 Avaliação de sensibilidade

O sistema em questão possui três parâmetros projetáveis: a , ω e k , dos quais a influência dos dois primeiros fora mostrada e provada em (308) - (310) e nos passos seguintes. É importante compreender a influência de cada um deles para que a resposta $y(t)$ do modelo convirja para o extremo do mapeamento. Sendo assim, foi realizado um conjunto de testes de sensibilidade onde em cada caso variou-se o valor de um dos parâmetros para observar a influência do mesmo para a saída do mapeamento. Os outros parâmetros são mantidos em seus valores utilizados na simulação feita inicialmente, assim como as condições iniciais. Os diferentes valores utilizados no estudo foram obtidos calculando os percentuais 40, 60, 80, 120, 140 e 160% em cima do valor utilizado na simulação.

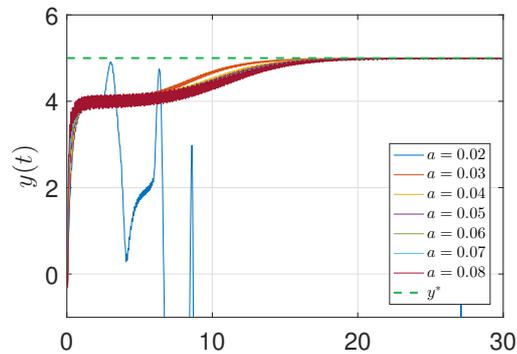


Figura 45: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor do parâmetro a .

É possível observar no gráfico da Figura 45 que conforme aumenta-se o valor do parâmetro a , a tendência é de que a saída $y(t)$ alcance a vizinhança do extremo da função mais rapidamente quando comparamos com o valor de a baixo ($a = 0.03$ e $a = 0.08$). Porém, lembrando que quanto maior o valor de a , segundo mostra (308) - (310), maior será o erro $|\theta(t) - \theta^*|$, $|\Theta(t) - \Theta^*|$ e $|y(t) - y^*|$.

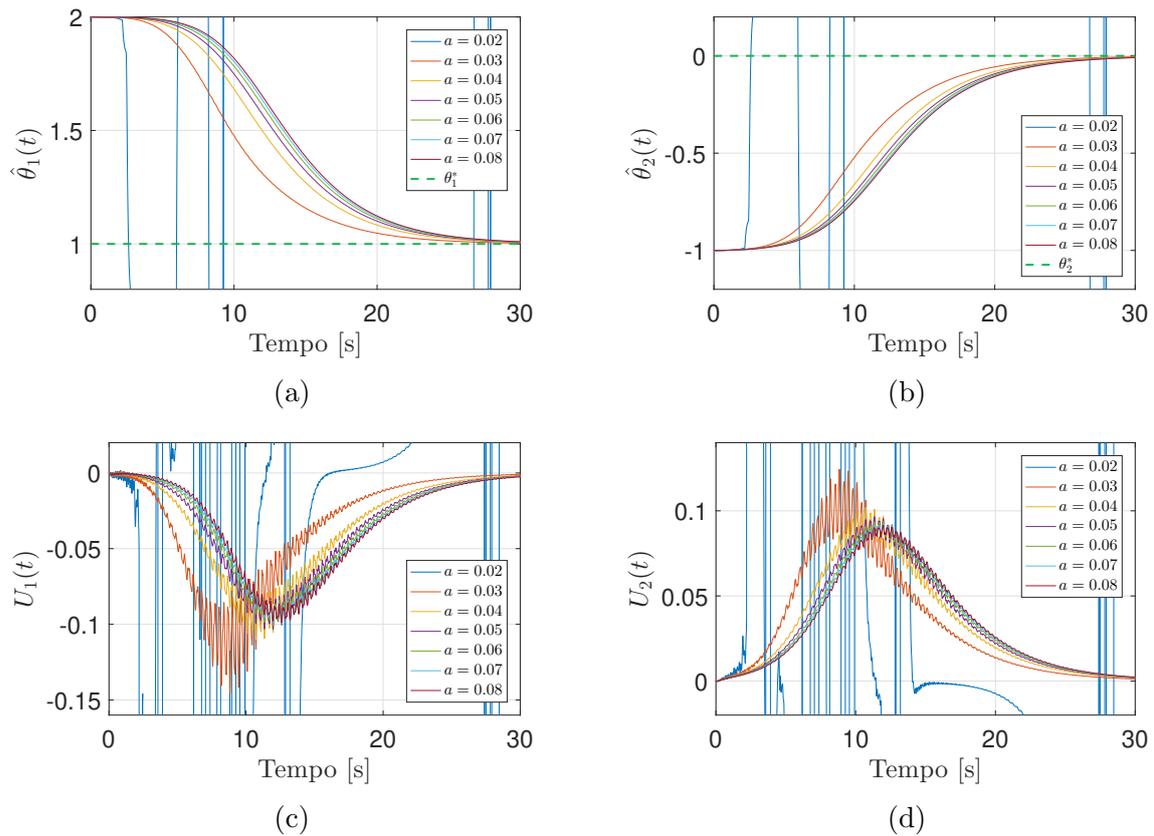


Figura 46: Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro a ; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro a .

Na Figura 46, em (a) e (b) observamos que quanto maior o valor de a , mais lenta a convergência para θ^* . Já em (c) e (d) observa-se que quanto menor o valor de a , maior a amplitude do sinal de controle.

Na Figura 47, mostra-se a convergência da matriz $\Gamma(t)$ aos valores da matriz H^{-1} . Nas simulação variando o parâmetro a , para $a = 0.02$ a integração em Γ apresentou uma oscilação muito brusca que ocasionou a falha do controlador e por consequência, a saída do mapeamento e nenhum outro parâmetro da planta convergiu para a vizinhança de seu valor ótimo.

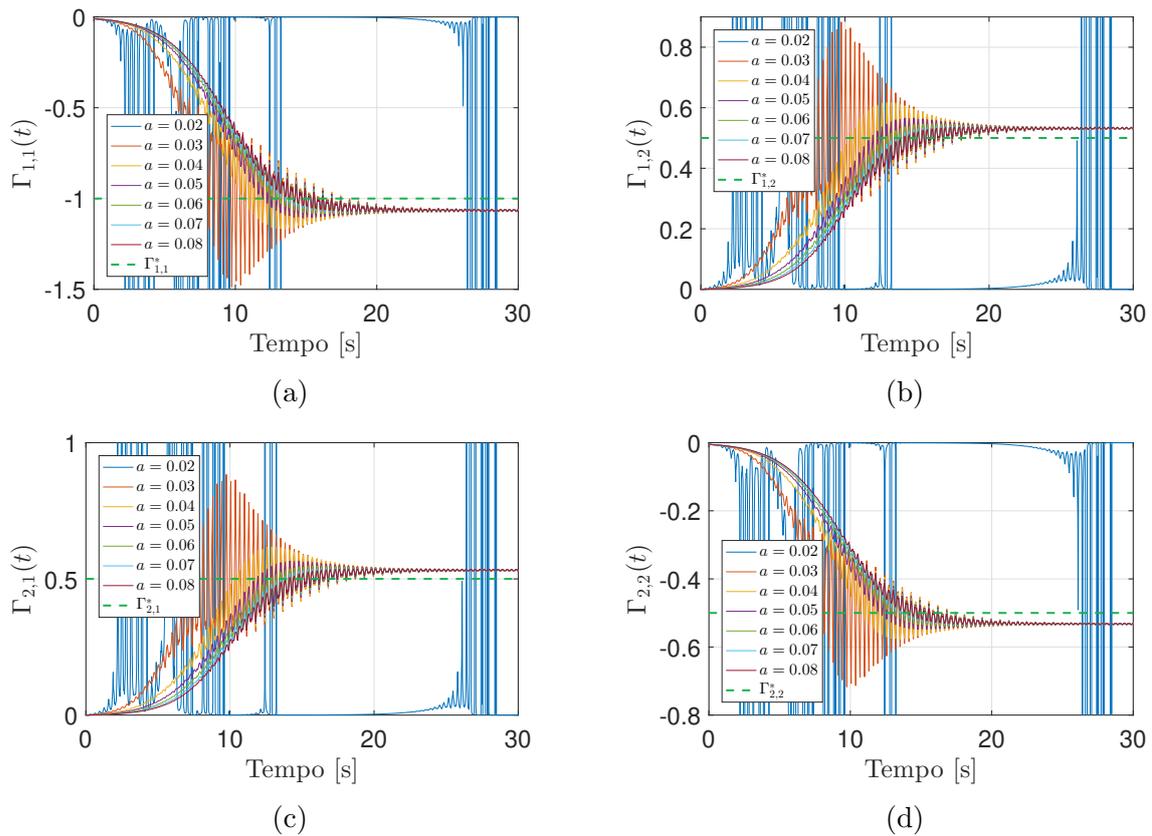


Figura 47: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação de a .

Nos gráficos seguintes são analisados os sinais da planta de acordo com as variações de ω , lembrando apenas que $\omega_1 = 5 \times \omega$ e $\omega_2 = 7 \times \omega$, no entanto, nos gráficos será mostrado apenas o valor de base (ω).

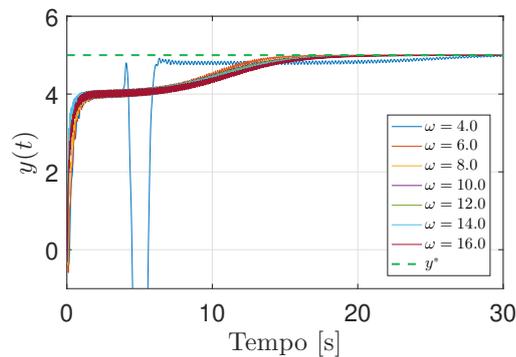


Figura 48: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor do parâmetro ω .

É possível observar nos gráficos da Figura 48 que conforme aumenta-se o valor do parâmetro ω , a tendência é de que a saída $y(t)$ alcance a vizinhança do extremo da função mais lentamente quando comparamos com o valor de ω baixo ($\omega = 6$ e $\omega = 16$).

Lembrando também que quanto menor o valor de ω , segundo mostra (308) - (310), maior será o erro $|\theta(t) - \theta^*|$, $|\Theta(t) - \Theta^*|$ e $|y(t) - y^*|$.

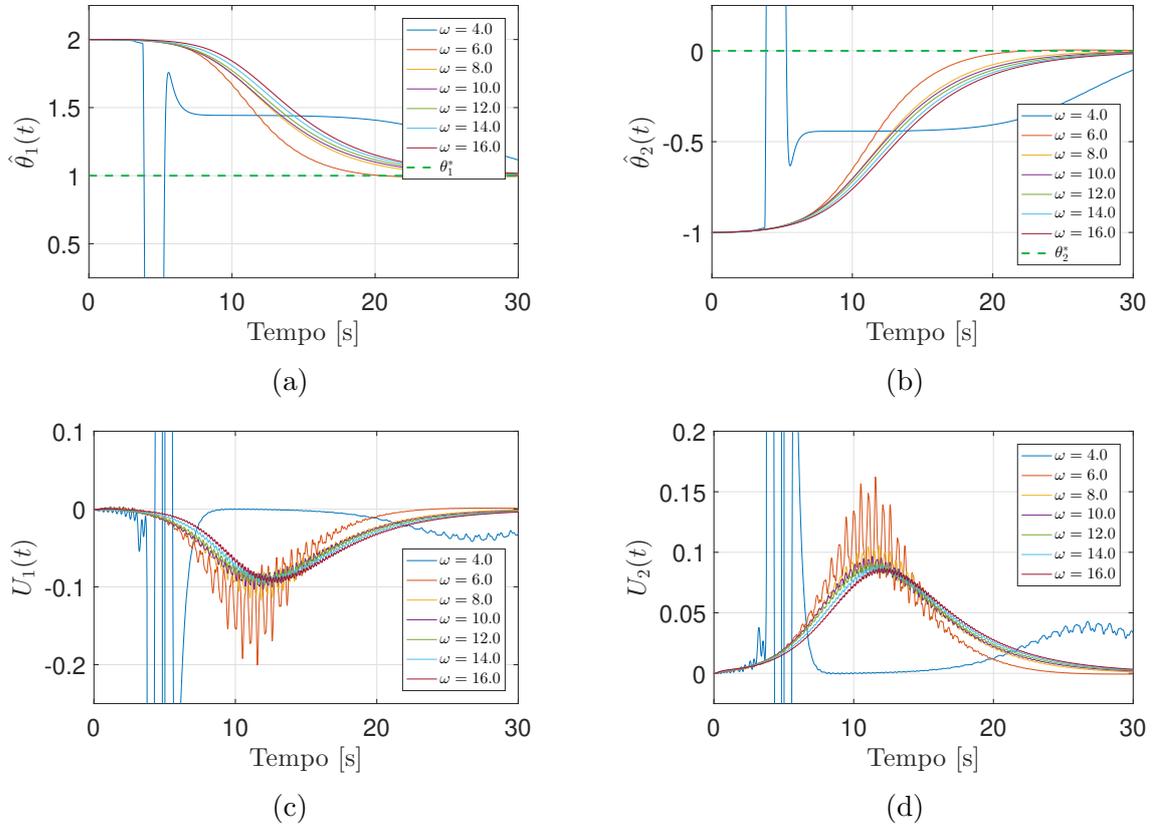


Figura 49: Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro ω ; Em (c) e (d), mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro ω .

Na Figura 49, em (a) e (b) observamos que quanto maior o valor de ω , mais lenta a convergência para θ^* . Já em (c) e (d), observa-se que quanto menor o valor de ω , maior a amplitude do sinal de controle.

Na Figura 50, mostra-se a convergência da matriz $\Gamma(t)$ aos valores da matriz H^{-1} . Na simulação onde variamos o parâmetro ω , quando temos $\omega = 4.0$, observamos uma curva fora do padrão. O motivo para isso se dá por conta da integração que realiza o cálculo de $\Gamma(t)$ que gerou uma resposta de grande amplitude, a qual acabou sendo limitada pela configuração de saturação do mesmo, tal oscilação fez com que o controlador por sua vez também gerasse respostas com amplitudes altas, mas por fim, é possível observar que o sinal de saída da planta, na Figura 48, acaba convergindo para a vizinhança do valor ótimo do mapeamento. Os outros parâmetros observados também mostram-se convergindo aos seus valores ótimos determinados para $\omega = 4.0$.

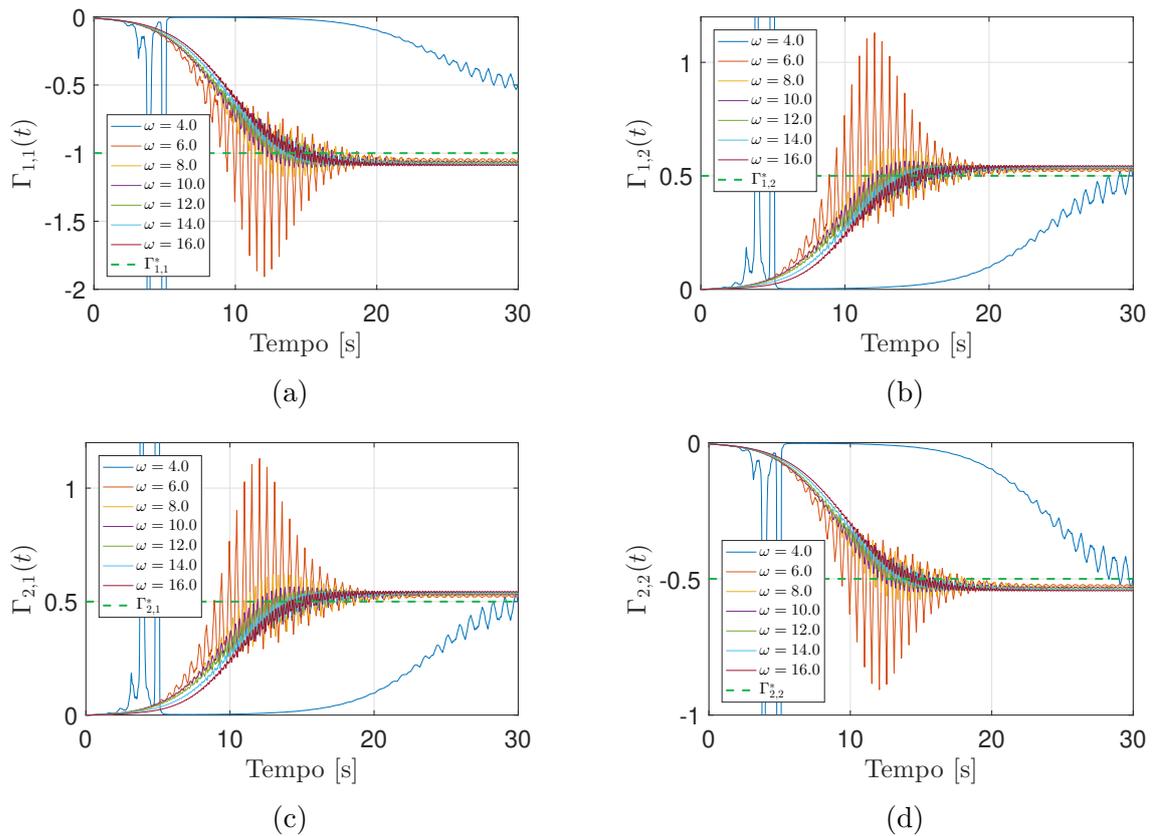


Figura 50: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação de ω .

Nos gráficos seguintes, são analisados os sinais da planta de acordo com as variações de k_i , lembrando apenas que nas simulações que estamos realizando, $k_1 = k_2 = k$ e, portanto na legenda dos gráficos usaremos a simbologia k para especificação de valores.

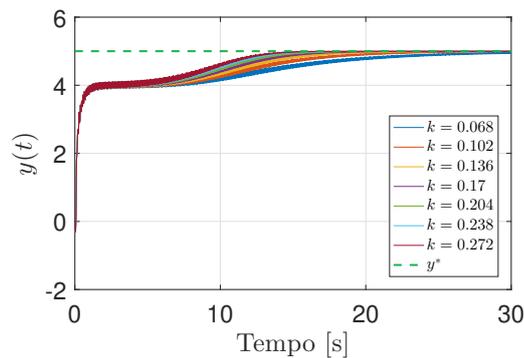


Figura 51: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor do parâmetro k .

Agora, fazendo a análise para o parâmetro k na Figura 51, que não está correlacionado com (308) - (310), mas sim a (403) e (404), vemos que, como esperado, ao reduzirmos seu valor temos um aumento no tempo que o sinal $y(t)$ demora para convergir

a vizinhança de seu valor ótimo, isso quando comparamos com o valor de k mais alto ($k = 0.068$ e $k = 0.272$).

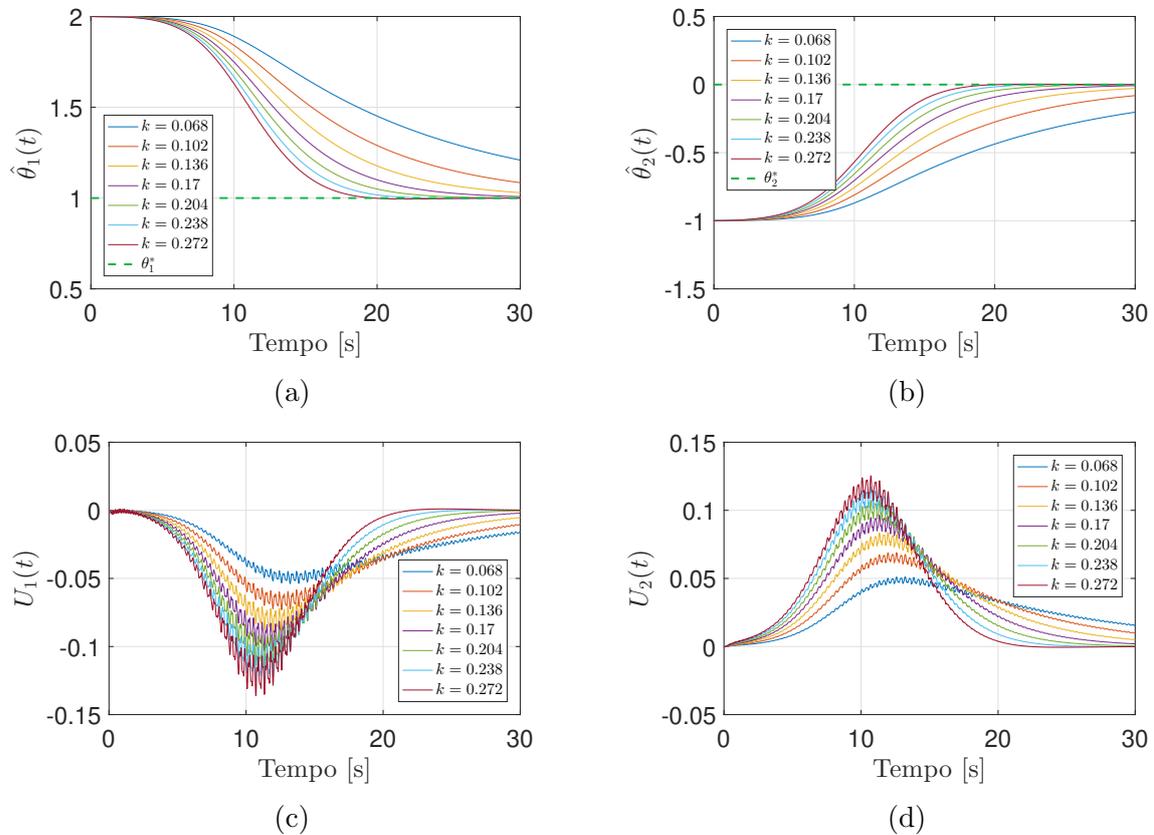


Figura 52: Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro k ; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro k .

Na Figura 52, em (a) e (b), observamos que quanto maior o valor de k , mais rápida a convergência para θ^* , assim como em (c) e (d), onde também observa-se que quanto maior o valor de k , maior a amplitude do sinal de controle e mais rapidamente o sinal é atenuando.

Na Figura 53, mostra-se a convergência da matriz $\Gamma(t)$ aos valores da matriz H^{-1} . Nesta, é possível observamos que o comportamento do sinal pouco é afetado pela variação de k , porém ao inspecionarmos mais de perto observamos que a amplitude do sinal Γ fica maior quando comparamos ao diminuirmos o valor de k ($k = 0.068$ e $k = 0.272$).

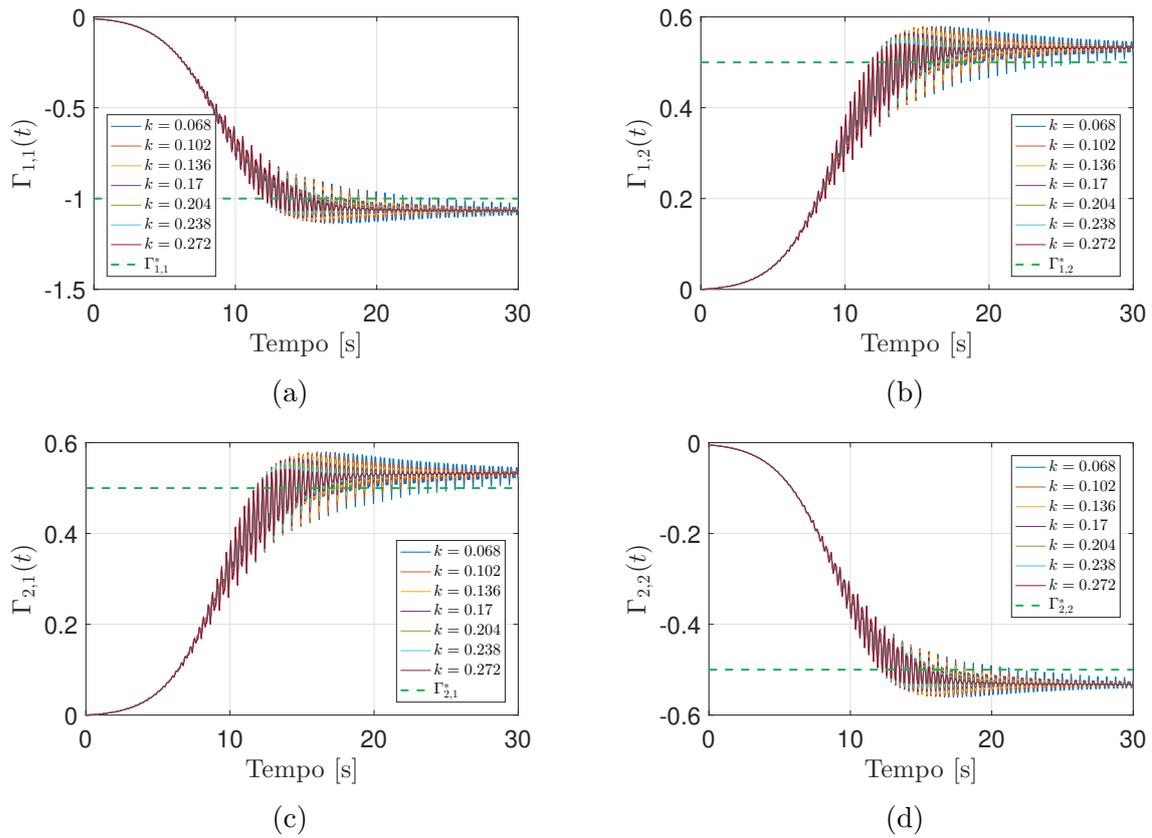


Figura 53: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação de k .

Assim como no Capítulo 3, podemos também estudar a influência da escolha do valor da condição inicial de $\theta(0)$, $\Gamma(0)$ e ω_r . Onde os dois últimos são relacionados ao filtro Riccati inserido para o projeto do método de Newton e o $\theta(0)$ já estava presente no projeto do método de gradiente do Capítulo 2.

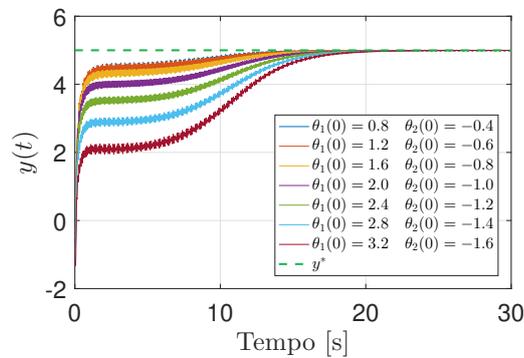


Figura 54: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$.

Para o gráfico na Figura 54, onde variamos a condição inicial $\theta(0)$, quanto menor o valor do módulo da condição inicial, mais tempo toma-se para convergência da saída do mapeamento ao seu valor ótimo.

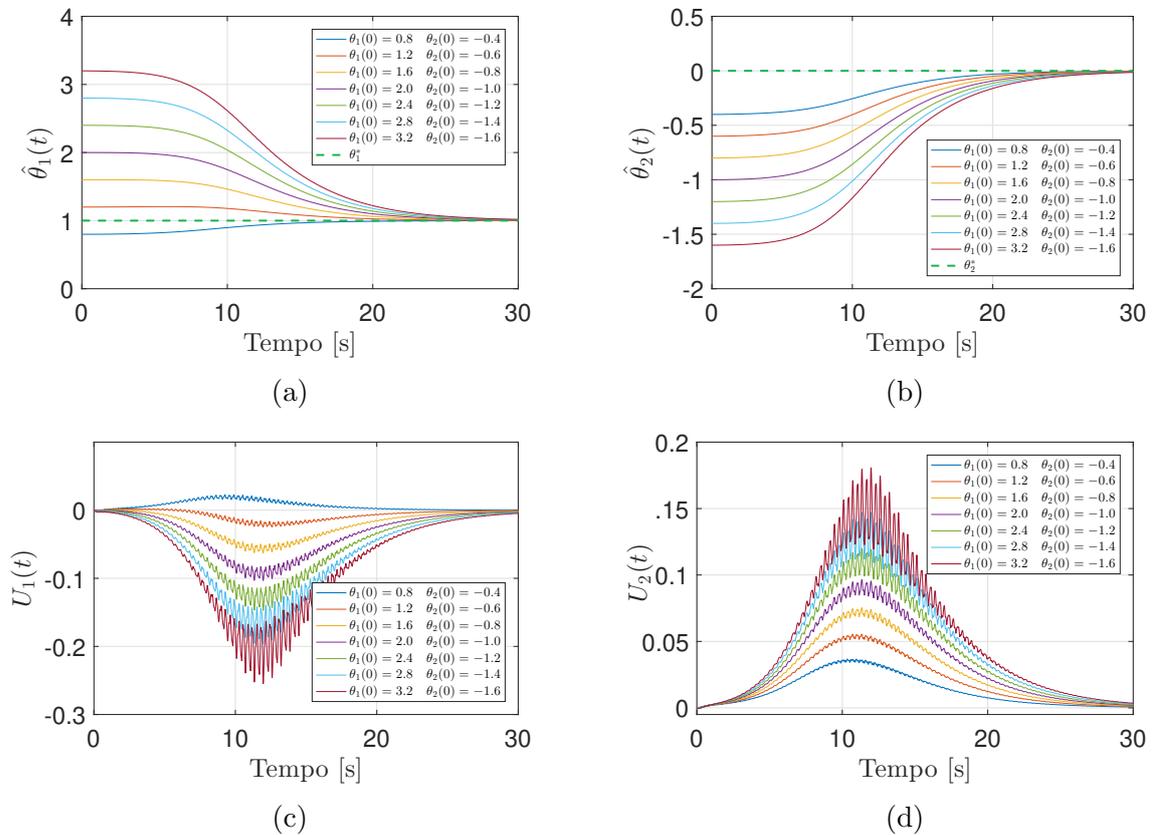


Figura 55: Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor de suas respectivas condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$.

Na Figura 55 (a) e (b), vemos que independente da variação da condição inicial, dentro da porcentagem estipulada, a estimação de $\hat{\theta}_{1,2}$ é feita com sucesso. Na Figura 55 (c) e (d), observamos que a variação realizada possui influência no sinal de controle e vemos que, ao elevarmos o módulo das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$, maior o pico em que chega o sinal e maior a amplitude do mesmo no momento de pico.

Na Figura 56, observamos que todos os sinais de $\Gamma(t)$ com o tempo acabam convergindo a vizinhança de seu valor ótimo e que a variação, da condição inicial de $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$ impacta apenas na amplitude do sinal durante o período em que o atuador está atuando, e claro, quanto maior o módulo das iniciais de controle, maior tende a ser a amplitude do sinal.

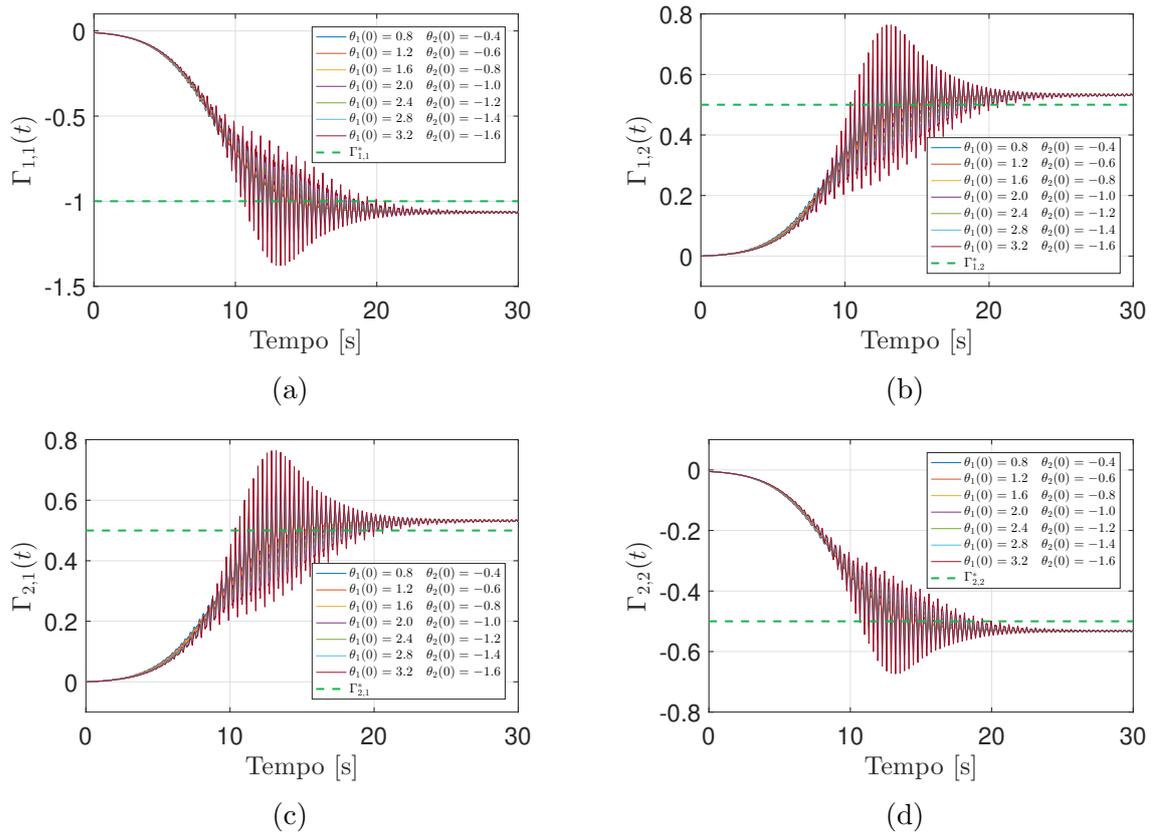


Figura 56: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$.

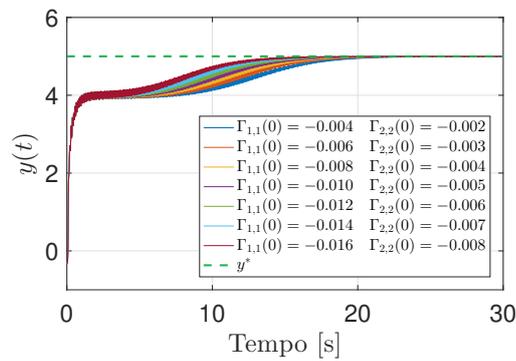


Figura 57: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial da matriz Γ .

Para o gráfico na Figura 57, onde variamos o condição inicial da matriz Γ , quanto maior o valor do módulo da condição inicial, menos tempo toma-se para convergência da saída do mapeamento ao seu valor ótimo.

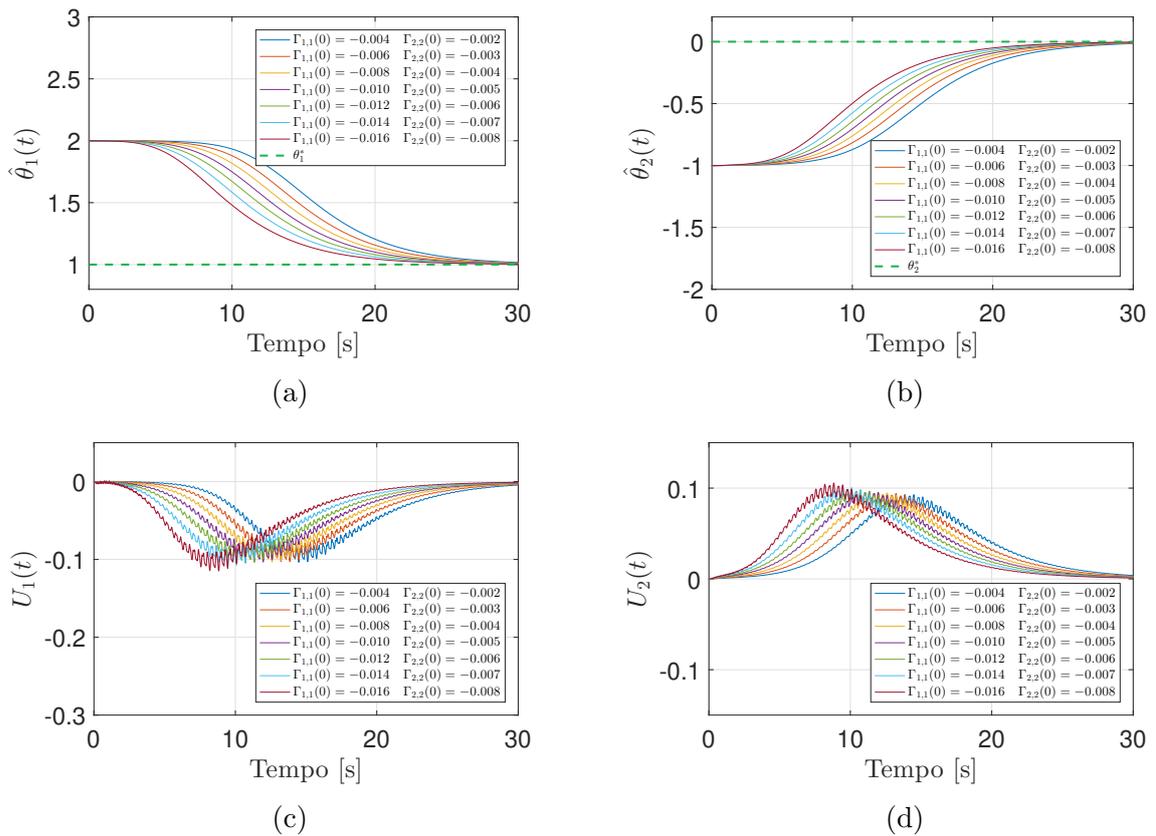


Figura 58: Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor de suas respectivas condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor das condições iniciais $\theta_1(0)$ e $\theta_2(0)$.

Na Figura 58 (a) e (b), vemos que, independente da variação da condição inicial, dentro da porcentagem estipulada, a estimação de $\hat{\theta}_{1,2}$ é feita com sucesso e que, quanto maior o valor do módulo da condição inicial, menos tempo toma-se para convergência. Na Figura 58 (c) e (d), observamos que a variação realizada possui influência no sinal de controle e vemos que, quanto maior o valor do módulo da condição inicial, menos tempo toma-se para sua atenuação e que não há muito impacto na amplitude do sinal nem varia-se muito o pico do sinal em seu maior módulo.

Na Figura 59, observamos que todos os sinais de $\Gamma(t)$ com o tempo acabam convergindo a vizinhança de seu valor ótimo e que a variação da condição inicial da matriz Γ impacta no tempo de convergência.

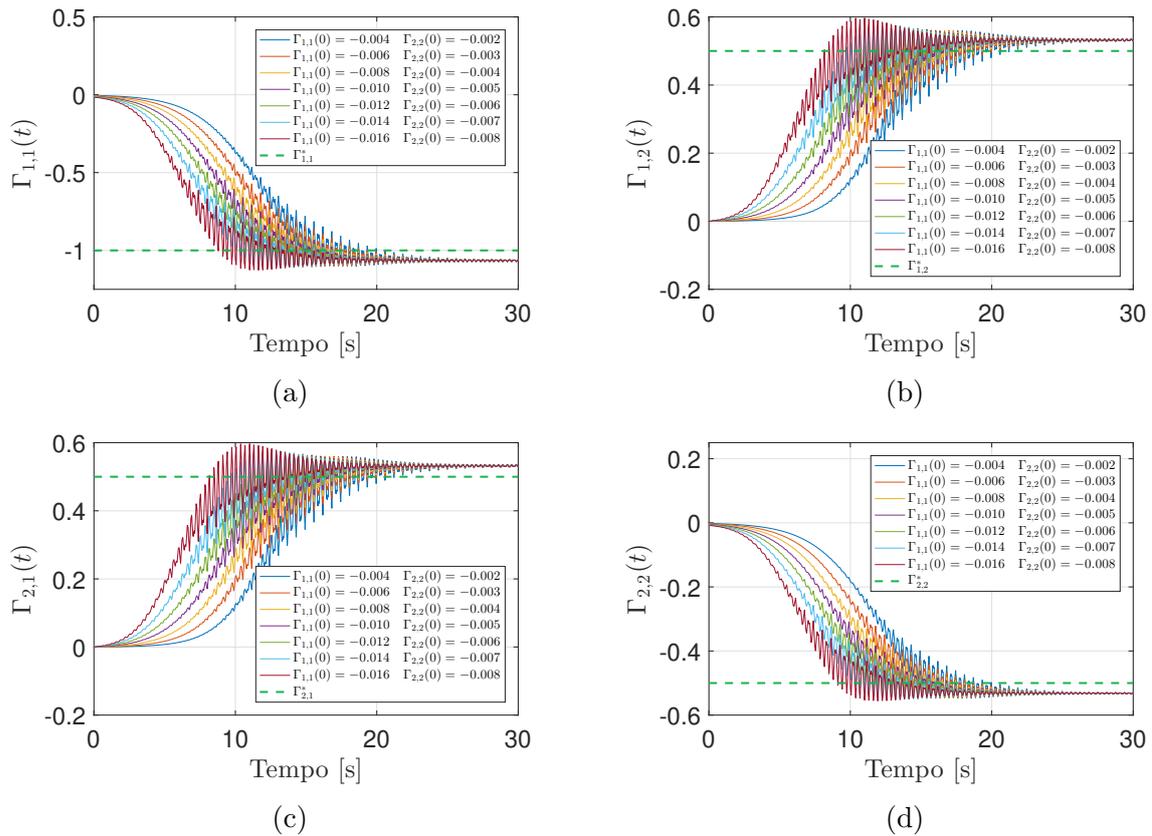


Figura 59: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função da variação das condições iniciais da matriz Γ .

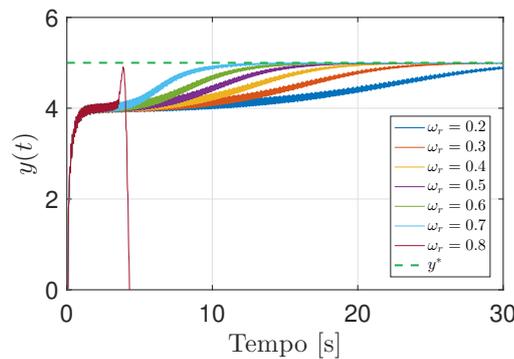


Figura 60: Representação da saída do mapeamento quando varia-se o valor da condição inicial da matriz ω_r .

Para o gráfico na Figura 60, onde variamos o parâmetro ω_r , quanto maior seu valor, menos tempo toma-se para convergência da saída do mapeamento ao seu valor ótimo. Porém observa-se que em $\omega_r = 0.8 \text{ rad/s}$ o sinal não mais converge a seu valor ótimo e isso refletir-se-á nos próximos gráficos que serão apresentados.

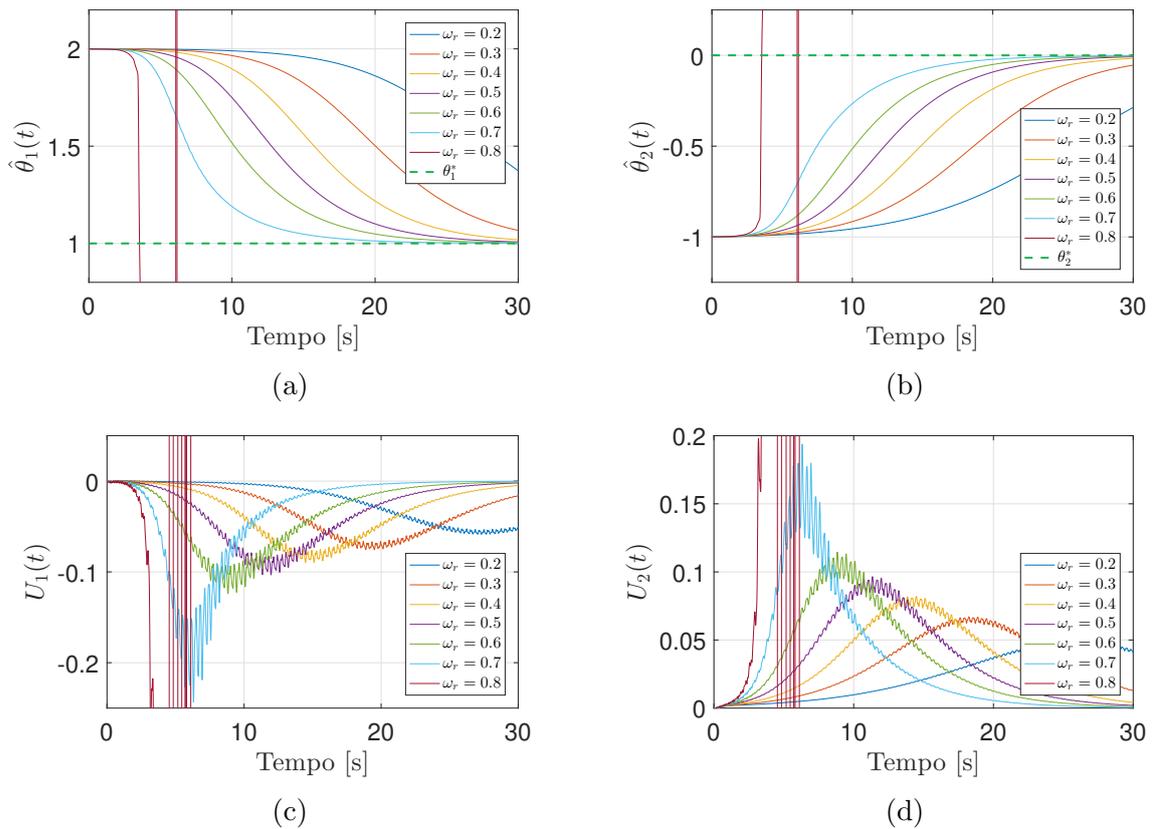
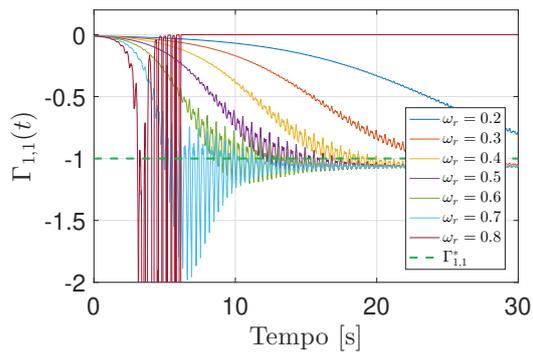


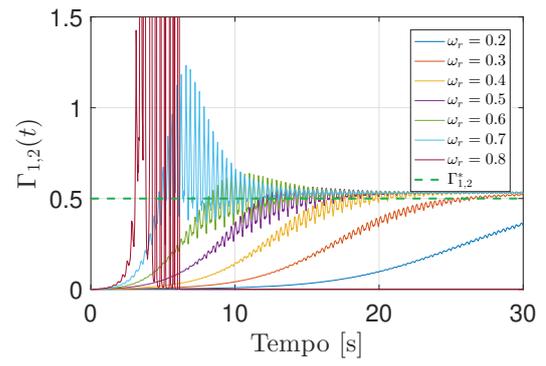
Figura 61: Em (a) e (b) mostramos a representação da estimação de $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro ω_r do filtro Riccati; Em (c) e (d) mostramos a saída do sinal de controle $U_1(t)$ e $U_2(t)$ quando varia-se o valor do parâmetro ω_r do filtro Riccati.

Na Figura 61 (a) e (b), vemos que há grande influência de ω_r no tempo em que o parâmetro $\theta(t)$ leva para convergir ao seu valor ótimo. Na Figura 61 (c) e (d), também observamos que ω_r impacta no valor do módulo que alcança o sinal de controle, no tempo que toma-se para que ele atenuie e também em sua amplitude durante o período de oscilação. Nela também observamos a oscilação quando setado $\omega_r = 0.8\text{rad/s}$ e que explica-se o motivo pelo qual a saída da planta não convergiu ao seu valor ótimo assim como $\hat{\theta}_1(t)$ e $\hat{\theta}_2(t)$.

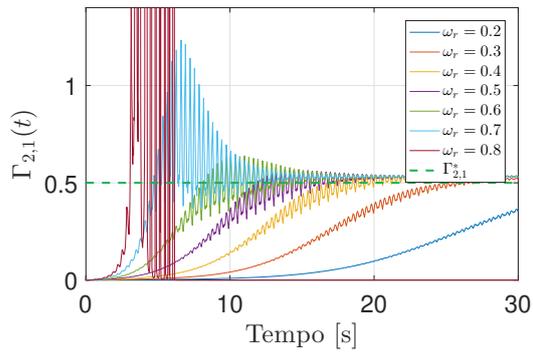
Na Figura 62, observamos que ω_r impacta no valor do módulo que alcança o sinal, no tempo que toma-se para que ele atenuie e também em sua amplitude durante o período de oscilação. Nesta também observamos a oscilações aos extremos da saturação do integrador quando setado $\omega_r = 0.8\text{rad/s}$ e que por conta disso ocorre o mostrado posteriormente.



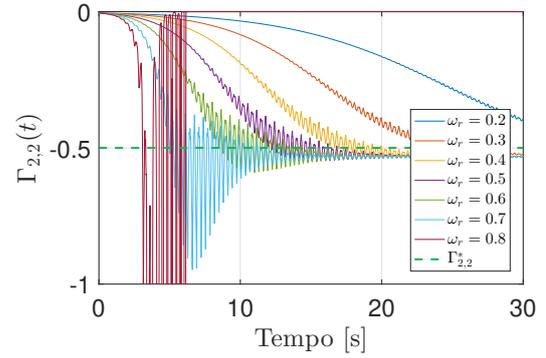
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 62: Representação da estimação de $\Gamma(t) \rightarrow H^{-1}$ (a), (b), (c) e (d) em função do valor do parâmetro ω_r do filtro Riccati.

CONCLUSÃO

Capítulo 2

Neste capítulo, tratamos da busca extremal para EDP utilizando algoritmo de gradiente escalar. Mostramos neste a prova de estabilidade e convergência do conceito de controle adaptativo por busca extremal baseado em modelo parcial para mapas estáticos com atuação dinâmica governada por EDP de difusão. No caso, a atuação dinâmica é conhecida, por isso que dizemos ser baseado em um modelo parcialmente conhecido. O controlador baseado na média para compensar a atuação dinâmica é projetado através do método de *backstepping* e é alimentado com o gradiente e a hessiana do mapa estático, baseados em perturbações. O sinal de perturbação também leva em consideração a atuação dinâmica para compensa-lo. Finalmente, foi mostrado, através de simulação numérica, a estabilidade exponencial e a convergência para o extremo. A convergência para o extremo é apenas local e depende da hessiana do mapeamento, por isso é importante a escolha dos valores iniciais.

Capítulo 3

Neste capítulo, apresentamos o projeto de busca extremal baseado em Newton para mapeamentos estáticos escalares com dinâmica de atuação governada por EDP's de difusão. No caso, a atuação dinâmica também deve ser conhecida, com isso dizemos ser baseado em um modelo parcialmente conhecido. Contudo, por utilizarmos neste capítulo o algoritmo de Newton como base, a taxa de convergência do sistema é independente dos parâmetros do mapeamento desconhecido, particularmente, sua hessiana (diferente de projetos baseados em gradiente Capítulo 2). A lei média de controle, para compensar a dinâmica de atuação, foi construída via metodologia *backstepping* e empregou estimativas do mapeamento estático baseadas nas perturbações do gradiente e da inversa da hessiana. O sinal de perturbação também levou em conta a dinâmica de atuação e compensou-a. Por fim, a estabilidade exponencial local e a convergência para uma pequena vizinhança do extremo desejado foram garantidas. O exemplo da simulação confirma o desenvolvimento

teórico apresentado. Com esta metodologia, a convergência para o extremo não mais depende da hessiana do mapeamento e além disso, apresenta uma taxa de convergência maior, fazendo com que o sistema seja estabilizado em torno da vizinhança com mais agilidade quando comparado com o exemplo do Capítulo 2.

Além disso, ao longo do desenvolvimento deste trabalho, o conteúdo deste capítulo foi publicado e apresentado no Congresso Brasileiro de Automática (CBA) [30], evidenciando para o caso escalar, a vantagem entre os métodos de busca extremal utilizando algoritmo de Newton vs. algoritmo de gradiente, apresentando as análises e resultados conforme esta dissertação.

Capítulo 4

Foi proposto, então, no Capítulo 4, um algoritmo de busca extremal multivariável para um mapeamento com múltiplas entradas conectadas em cascata com distintos sistemas de EDP através de seus múltiplos caminhos de atuação. Esta contribuição generaliza nossos resultados anteriores limitados a equações diferenciais funcionais (sistemas atrasados) para um cenário mais amplo de equações diferenciais parciais, abrangendo a classe de equações de difusão múltiplas (cada uma com domínio espacial distinto) e sistemas hiperbólicos de primeira ordem.

Basicamente, nossa abordagem baseada em Newton efetivamente diagonaliza o mapeamento e permite controladores de fronteira descentralizados para cada canal de entrada com dinâmicas de atuação distintas. Em seguida, realizamos a análise de estabilidade para múltiplas PDEs desacopladas devido a cada dinâmica de entrada separada empregando a metodologia de *backstepping* em EDP combinada com os funcionais Lyapunov individuais para as equações médias em malha fechada. Invocando teoremas de média apropriados para sistemas de dimensão infinita, concluímos a estabilidade exponencial local e a convergência assintótica para uma pequena vizinhança do extremo desconhecido.

Além das partes teóricas abordadas em cada capítulo, nesta dissertação foi possível observar para cada um dos três diferentes métodos de abordagem, a real influência de cada parâmetro e escolha de condição inicial, ora sendo uma comprovação apenas do que já havia sido dito e provado anteriormente ora mostrando a influência que a escolha de condições iniciais tem sobre o resultado final mostrando a abrangência do controlador.

Trabalhos futuros

Um dos principais objetivos aqui é que sejam feitas novas pesquisas e mais desenvolvimentos para a melhoria dos algoritmos de busca extremal na sequência das discussões apresentadas recentemente em [13] sobre as dificuldades de obter projetos apropriados e análise de estabilidade rigorosa na presença de uma classe geral de sistemas dinâmicos, não necessariamente governados por equações diferenciais ordinárias. Por exemplo, a extensão para incluir de forma generalizada a dinâmica em cascata de EDO-EDP juntamente com o mapa multivariável estático, parece ser um problema aberto devido à falta de resultados de perturbação singulares adequados para sistemas EDP o que permitiria comprovar a estabilidade na presença de dinâmicas baseadas em EDO. Assim, isso ainda representa um tópico interessante para futuras investigações.

APÊNDICE A

Provas

A.1 Prova de desigualdades utilizadas

Desigualdade de Poincaré

Desejamos provar

$$\|w(t)\|^2 \leq 2w(D, t)^2 + 4D^2\|w_x(t)\|^2. \quad (\text{A.1})$$

Prova:

$$\begin{aligned} \int_0^D w(x, t)^2 dx &= [2xw(x, t)]_{x=0}^D - 2 \int_0^D xw(x, t)w_x(x, t) dx \\ &= Dw(D, t)^2 - 2 \int_0^D xw(x, t)w_x(x, t) dx \\ &\leq w(D, t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^D w(x, t)^2 dx + 2 \int_0^D x^2 w_x(x, t)^2 dx, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Young na última linha. Por meio de alguns cálculos simples e do limite superior $\int_0^D x^2 w_x(x, t)^2 \leq 2D^2\|w_x(t)\|^2$ chegamos em (A.1).

Adicionalmente gostaríamos de provar

$$\|w(t)\|^2 \leq 2Dw(0, t)^2 + 4D^2\|w_x(t)\|^2. \quad (\text{A.2})$$

Prova:

$$\int_0^D w(x, t)^2 dx = [(x - D)2w(x, t)]_{x=0}^D - 2 \int_0^D (x - D)w(x, t)w_x(x, t) dx$$

siga os mesmos passos da prova anterior e chegamos a (A.2).

Desigualdade de Agmon (Caso 1)

Desejamos provar

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(0, t)^2 + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\|. \quad (\text{A.3})$$

Prova:

Temos

$$\int_0^x w(x, t) w_x(x, t) dx = \frac{1}{2} (w(x, t)^2 - w(0, t)^2).$$

Assim, conseguimos

$$\begin{aligned} w(x, t)^2 &= w(0, t)^2 + 2 \int_0^x w(x, t) w_x(x, t) dx \\ &\leq w(0, t)^2 + 2 \int_0^x |w(x, t)| |w_x(x, t)| dx, \end{aligned}$$

onde pegamos o valor absoluto e usamos a desigualdade triangular. Finalmente tomando o máximo com respeito a $x \in [0, D]$ da última equação e chegamos a (A.3).

Adicionalmente gostaríamos de provar

$$\max_{x \in [0, D]} |w(x, t)|^2 \leq w(D, t)^2 + 2\|w(t)\| \|w_x(t)\|. \quad (\text{A.4})$$

Prova:

Temos

$$\int_x^D w(x, t) w_x(x, t) dx = \frac{1}{2} (w(D, t)^2 - w(x, t)^2)$$

siga os mesmos passos da prova anterior e chegamos a (A.4).

Desigualdade de Agmon (Caso 2)

Desejamos provar

$$w(0, t)^2 \leq \frac{D+1}{D} \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2. \quad (\text{A.5})$$

Prova:

Observando a integral

$$-\int_0^x w(x, t)w_x(x, t)dx = \frac{1}{2} (w(0, t)^2 - w(x, t)^2)$$

e pela desigualdade de Young temos

$$\frac{1}{2} (w(0, t)^2 - w(x, t)^2) \leq \frac{1}{2} \int_0^x w(x, t)^2 + w_x^2(x, t)dx \leq \frac{1}{2} (\|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2).$$

Integrando a equação acima no domínio espacial tem-se

$$\frac{1}{2} \int_0^D (w(0, t)^2 - w(x, t)^2) dx = \frac{1}{2} Dw(0, t)^2 - \frac{1}{2} \|w(t)\|^2 \leq D (\|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2)$$

e chegamos a (A.5).

Adicionalmente gostaríamos de provar

$$w(D, t)^2 \leq \frac{D+1}{D} \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2. \quad (\text{A.6})$$

Prova:

Observando a integral

$$\int_x^D w(x, t)w_x(x, t)dx = \frac{1}{2} (w(D, t)^2 - w(x, t)^2)$$

siga os mesmos passos da prova anterior e chegamos a (A.6).

A.2 Provas de estabilidade - Prova do sistema alvo (95)-(98)

Desejamos provar a estabilidade exponencial do sistema alvo (95)-(98) fazendo uso do funcional de Lyapunov Krasovskii

$$W(t) = \frac{1}{2}\vartheta^2(t) + \frac{1}{2}(D^2 + 2) \int_0^D w^2(x, t) dx. \quad (\text{A.7})$$

Prova:

Fazendo o cálculo da derivada com respeito ao tempo de (A.7), integrando por partes e inserindo em (95) - (98), temos

$$\dot{W}(t) = \vartheta^2(t) \left(\bar{K} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}w^2(0, t) - (D^2 + 2)\|w_x(t)\|^2,$$

com a desigualdade de Young (66), escolhendo $\gamma = 2$ e (98) chegamos em

$$\dot{W}(t) \leq \vartheta^2(t) \left(\bar{K} + \frac{1}{2} \right) - \|w_x(t)\|^2.$$

Escolhendo $\bar{K} < -1/2$ mostra-se a estabilidade exponencial.

REFERÊNCIAS

- [1] LEBLANC, M. Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de fréquence élevée. *Revue Generale de l'Electricite*, 1922.
- [2] KAZAKEVICH, V. Technique of automatic control of different processes to maximum or to minimum. *Avtorskoe svidetelstvo, (USSR Patent)*, , n. 66335, 1943.
- [3] DRAPER, C. S.; LI, Y. T. *Principles of optimalizing control systems and an application to the internal combustion engine*. American Society of Mechanical Engineers, 1951.
- [4] KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.
- [5] ARIYUR, K. B.; KRSTIĆ, M. *Real-time optimization by extremum-seeking control*. John Wiley & Sons, 2003.
- [6] GUAY, M.; DOCHAIN, D.; PERRIER, M.; HUDON, N. Flatness-based extremum-seeking control over periodic orbits. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 10, p. 2005–2012, 2007.
- [7] MIROSLAV KRSTIĆ E DRAGAN NEŠIĆ, A. G. Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, v. 48, n. 8, p. 1759–1767, 2012.
- [8] SCHEINKER, A.; KRSTIĆ, M. Model-free stabilization by extremum seeking, 2016.
- [9] TAN, Y.; MOASE, W.; MANZIE, C.; NEŠIĆ, D.; MAREELS, I. Extremum seeking from 1922 to 2010. In: . c2010. p. 14–26.
- [10] KRSTIĆ, M.; SMYSHLYAEV, A. Backstepping boundary control for first-order hyperbolic pdes and application to systems with actuator and sensor delays. *Systems & Control Letters*, v. 57, n. 9, p. 750–758, 2008.
- [11] KRSTIĆ, M. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 2, p. 287–303, 2010.

- [12] KRSTIĆ, M.; SMYSHLYAEV, A. *Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs*. SIAM, 2008. v. 16.
- [13] OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 4, p. 1911–1926, 2017.
- [14] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. SIAM, 2005.
- [15] WANG, F.; WANG, H.; XU, K.; WU, J.; JIA, X. Characterizing information diffusion in online social networks with linear diffusive model. In: . c2013. p. 307–316.
- [16] KRSTIĆ, M. Compensating actuator and sensor dynamics governed by diffusion PDEs. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 5, p. 372–377, May 2009.
- [17] WINKIN, J. J.; DOCHAIN, D.; LIGARIUS, P. Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors. *Automatica*, v. 36, n. 3, p. 349 – 361, 2000.
- [18] KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [19] LUNARDI, A. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Progress in nonlinear differential equations and their applications. Basel, Boston: Birkhäuser, 1995.
- [20] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2012. v. 44.
- [21] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Lecture notes in mathematics. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1981.
- [22] ENGEL, K.-J.; NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [23] NAGEL, R. Towards a “matrix theory” for unbounded operator matrices. *Mathematische Zeitschrift*, v. 201, n. 1, p. 57–68, 1989.
- [24] HALE, J.; LUNEL, S. V. E. O. Averaging in infinite dimensions. *J. Integral Equations Appl 2.4*, v. 2, n. 4, p. 463–494, 1990.
- [25] BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear programming*. Athena scientific Belmont, 1999.

- [26] KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIC, P.; MORSE, A. A toolkit for nonlinear feedback design. *Systems & Control Letters*, v. 18, n. 2, p. 83 – 92, 1992.
- [27] KRSTIĆ, M. Compensation of infinite-dimensional actuator and sensor dynamics. *IEEE Control Systems*, v. 30, n. 1, p. 22–41, 2010.
- [28] KRSTIĆ, M. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and pde systems*. Springer, 2009.
- [29] FEILING, J.; KOGA, S.; KRSTIĆ, M.; OLIVEIRA, T. R. Gradient extremum seeking for static maps with actuation dynamics governed by diffusion PDEs. *Automatica*, v. 95, n. 9, p. 197–206, 2018.
- [30] OLIVEIRA, T. R.; ALBUQUERQUE, P. Z. Busca extremal baseada no algoritmo de newton para uma classe de equações diferenciais parciais de difusão. *Congresso Brasileiro de Automática (CBA) João Pessoa*, 2018.
- [31] HALE, J.; LUNEL, S. V. *Introduction to functional differential equations*. Applied Mathematical Sciences, 1999.
- [32] TSUBAKINO, D.; KRSTIĆ, M.; OLIVEIRA, T. R. Exact predictor feedbacks for multi-input LTI systems with distinct input delays. *Automatica*, v. 71, n. 09, p. 143–150, 2016.