Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Faculdade de Engenharia

Leonardo Ribeiro Marinho

Análise completa das fibras de Bragg de núcleo oco

Rio de Janeiro
2013

Leonardo Ribeiro Marinho

Análise Completa das Fibras de Bragg de Núcleo Oco

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Comunicações Ópticas.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Romeiro Sapienza

Rio de Janeiro

2013

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

M339 MARINHO, Leonardo Ribeiro.
Análise completa das fibras de Bragg de núcleo oco / Leonardo Ribeiro Marinho. - 2013.
110fls.: il.

Orientador: Antônio Romeiro Sapienza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica. 2. Fibras óticas - Dissertações. I. Sapienza, Antônio Romeiro. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 666.189.21:666.22

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Leonardo Ribeiro Marinho

Análise Completa das Fibras de Bragg de Núcleo Oco

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Comunicações Ópticas.

Aprovado em: 17 de Dezembro de 2013

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Antônio Romeiro Sapienza (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. Arismar Cerqueira Sodré Junior
Instituto Nacional de Telecomunicações - INATEL

Prof. Dr. Lisandro Lovisolo
Faculdade de Engenharia - UERJ

Rio de Janeiro

2013

AGRADECIMENTOS

Em teoria, todos possuem o total conhecimento de que a realização de um Mestrado Acadêmico não é uma tarefa simples, exigindo muito mais esforço do que a graduação, além de maiores abdicações. Como todo aluno, imaginei que eu pudesse conduzir o curso sem gerar grandes atritos e preocupações para as pessoas ao meu redor. A prática, no entanto, tratou de manter a teoria intacta.

Desta forma, aproveito o espaço não apenas para agradecer, mas também me desculpar a todas as pessoas que, de alguma forma, privei da minha presença em momentos de confraternização. Algumas vezes, por minha causa, estes momentos nem ao menos chegaram a ocorrer. Tenho certeza que todos compreendem a situação, e agradeço aqui a compreensão.

Aos meus pais e familiares, agradeço a todo crédito e confiança depositada em mim. Tenham certeza de que, sem o apoio de todos vocês, eu não teria chegado até aqui.

Ao meu professor e orientador, Antônio Sapienza, agradeço não somente aos ensinamentos e à experiência na área científica passados a mim. Agradeço também à paciência que teve em orientar um aluno com uma vida tão corrida, dividida entre o trabalho e o mestrado. A explicação que dou para isso é que, por trás da relação entre orientador e aluno, sem dúvida alguma há uma grande amizade.

Por fim, um agradecimento especial à minha esposa Cirlene Marinho, que por inúmeras vezes viu-se na situação de assumir todos os compromissos da casa para que eu pudesse me dedicar ao mestrado. Uma digna demonstração de companheirismo. Obviamente, não foi tão simples quanto pode parecer, mas o amor que temos um pelo outro superou e superará todas as nossas dificuldades.

A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original

Albert Einstein

RESUMO

MARINHO, Leonardo Ribeiro. *Análise Completa das Fibras de Bragg de Núcleo Oco.* 2013. 97f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2013.

A evolução nos sistemas digitais de comunicação está intrinsicamente relacionada ao desenvolvimento da tecnologia de fibras ópticas. Desde a sua criação, na década de 60, inúmeras pesquisas vem sendo realizadas com o intuito de aumentar a capacidade de informação transmitida, por meio da redução da atenuação, controle da dispersão cromática e eliminação das não-linearidades. Neste contexto, as Fibras de Bragg surgem como uma estrutura de grande potencialidade para se minimizar tais inconvenientes. As fibras de Bragg possuem um mecanismo de operação diferente em relação às fibras tradicionais de suportar os modos confinados. Nelas, o núcleo possui um baixo índice de refração, e a casca é constituída por anéis dielétricos de diferentes índices de refração, alocados alternadamente. Para uma fibra de Bragg com núcleo oco, como a considerada neste trabalho, há perdas decorrentes dos modos de fuga. Portanto, a análise da dispersão destas estruturas se situa no plano complexo, tornando-a muito difícil. Esta dissertação será fundamentada em uma estratégia imprescindível à análise dos modos transversais TE_{0m}, TM_{0m} e dos híbridos. Os resultados encontrados são validados confrontando-os com os obtidos na literatura. O trabalho discutirá as perdas e dispersões dos modos citados, e os resultados obtidos poderão nortear as pesquisas das fibras de Bragg.

Palavras-chave: Fibras de Bragg. Equações de Helmholtz. Modos TE_{0m}, TM_{0m} e híbridos. Modos de Fuga. Dispersão e perdas.

ABSTRACT

The evolution of digital communication systems is intrinsically related to the development of optical fiber technology. Since its creation in the 1960s, many studies have been conducted in order to increase the system capacity, such as the attenuation reduction, chromatic dispersion control and elimination of nonlinearities. In this context, Bragg fibers appear as a structure with great potential to mitigate these drawbacks. Bragg fibers have a different operational mechanism with respect to traditional fibers to support the confined modes. Their core has a low refractive index, and the cladding consists of dielectric rings of different refractive indices, allocated alternately. For a Bragg fiber with hollow core, as considered in this paper, there are losses due to the occurrence of leaky modes. Therefore, the dispersion analysis of these structures falls in the complex plane, making it even harder. This dissertation will be based on a strategy essential to the analysis of transverse modes: TE_{0m}, TM_{0m} and hybrids. The found results have been validated by comparing them with those obtained in the literature. The paper discusses the losses and dispersions of the mentioned modes, and the results obtained will serve to guide the research on Bragg fibers.

Keywords: Bragg fibers. Helmholtz equation. TE_{0m}, TM_{0m} and hybrid modes. Leaky modes. Dispersion and losses.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1: Rede de difração. 17

Figura 1-2: Lei de Bragg. 18

Figura 1-3: Grade de Bragg em Fibra Óptica. 19

Figura 1-4: Distribuição transversal de campo do modo fundamental de um típico guia de onda de Bragg. 21

Figura 1-5: Geometria da Fibra de Bragg. 22

Figura 1-6: Perfil do índice de refração. 23

Figura 1-7: Seção transversal de uma fibra “furada”. A cor preta representa a sílica, e a cor branca representa o ar. 24

Figura 1-8: Comprimento de onda dentro da banda fotônica. 25

Figura 1-9: Comprimento de onda fora da banda fotônica. 25

Figura 2-1: Seção transversa da BF, onde r_p e η_p são o raio da fronteira e o índice de refração da região p que compõe a estrutura de Bragg, respectivamente. Sendo η_0 o índice de refração e r_1 o raio, ambos no núcleo. 30

Figura 2-2: Esquema das imposições das condições de fronteiras aos respectivos campos eletromagnéticos. 34

Figura 2-3: Modos Híbridos (HEM_{nm}) relacionados aos raios helicoidais. 58

Figura 3-1: Comparação de Real(n_{eff}). 90

Figura 3-2: Valores estimados e calculados para os modos TE_{01} e TE_{02}. 90

Figura 3-3: Comparação das perdas. 91

Figura 3-4: Relação entre o comportamento do $Real(nef)$ e as perdas. 92

Figura 3-5: $Real(nef)$ dos modos TM_{01} e TM_{02}. 93

Figura 3-6: Imag(nef) dos modos TM_{01} e TM_{02}. 94

Figura 3-7: Modo TE_{01}, λ = 1μm, n_{eff} = 0,8910671-j1,423x10^{-8} 95

Figura 3-8: Modo TE_{02}, λ = 1μm, n_{eff} = 0,7921-j1,814x10^{-3}.....95

Figura 3-9: Modo TM_{01}, λ = 0,825μm, n_{eff} = 0,8462-j2,241x10^{-6}. 96

Figura 3-10: Valores calculados e estimados, para as duas polarizações dos modos híbridos. 96

Figura 3-11: Perdas das duas polarizações dos modos híbridos. 97

Figura 3-12: $Real(nef)$ do modo TE_{01} para três valores de raios. 98

Figura 3-13: Perdas do modo TE_{01} para três valores de raios. 98

Figura 3-14: $Real(nef)$ do modo TE_{01} para estrutura com 32 anéis. 99

Figura 3-15: Perdas do modo TE_{01} para estrutura com 32 anéis. 100

Figura 3-16: $Real(nef)$ do modo TE_{01} para estrutura com 64 anéis. 101

Figura 3-17: Perdas do modo TE_{01} para estrutura com 64 anéis. 101

LISTA DE SIGLAS

BF	Fibras de Bragg (*Bragg Fibers*)
HEM	Híbrido Eletromagnético
PBGF	Photonic Bandgap Fibers
RIT	Reflexão Interna Total
TE	Transversal Elétrico
TEM	Transversal Eletromagnético
TM	Transversal Magnético

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 12

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DAS FIBRAS DE BRAGG 16

2 MODELO MATEMÁTICO 28

2.1 Modo TM_{0m} 28
2.1.1 Formalismo do Modo TM_{0m} 28
2.1.2 Campos Eletromagnéticos do Modo TM_{0m} 31
2.1.3 Matrizes de Transmissão 34
2.1.3.1 Fronteiras Internas ($r_1 \leq r \leq r_{N-1}$) 34
2.1.3.2 Fronteira Externa ($r = r_N$) 36
2.1.4 Equação de Dispersão dos Modos TM_{0m} 39
2.1.5 Representação das Componentes (E_z,H_φ) do Modo TM_{0m} 40
2.1.5.1 Primeiro Enfoque 41
2.1.5.2 Segundo Enfoque 42

2.2 Modo TE_{0m} 43
2.2.1 Formalismo do Modo TE_{0m} 43
2.2.2 Campos Eletromagnéticos do Modo TE_{0m} 44
2.2.3 Matrizes de Transmissão 46
2.2.3.1 Fronteiras Internas ($r_1 \leq r_l \leq r_{(n-1)}$) 46
2.2.3.2 Fronteira Externa ($r_1 = r_N$) 49
2.2.4 Equação de Dispersão dos Modos TE_{0m} 51
2.2.5 Representação das Componentes (H_z, E_φ) do modo TE_{0m} 52

2.3 Modos Híbridos (HEM_{nm}, $n \neq 0$) 54
2.3.1 Primeiro Formalismo dos Modos HEM_{nm} (1HEM) 58
2.3.1.1 Campos Eletromagnéticos 59
2.3.1.2 Matrizes de Transmissão 63
2.3.2 Segundo Formalismo dos Modos HEM_{nm} (2HEM) 71
2.3.2.1 Campos Eletromagnéticos 71
2.3.2.2 Matrizes de Transmissão 75
2.3.3 Equação de Dispersão dos Modos Híbridos (HEM_{nm}) 81

3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DISPERSÃO E RESULTADOS OBTIDOS 84

3.1 Estratégia Fundamental para a Análise dos Modos da Fibra de Bragg 84
3.1.1 Estimativa do Real(n_{ef}) para os Modos TE_{0m} e TM_{0m} (n = 0) 85
3.1.2 Modos Híbridos 86
3.1.2.1 Primeira Polarização ($1HEM_{nm}$) 86

3.1.2.2 Segunda Polarização ($2HEM_{nm}$) 88

3.2 Resultados da Análise 89

CONCLUSÃO 103

REFERÊNCIAS 105

APÊNDICE – SIMULAÇÕES 109

ARTIGOS SUBMETIDOS RELACIONADOS A ESTE TRABALHO 110

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da tecnologia de fibras ópticas foi um grande passo na revolução das comunicações globais e da tecnologia de informação. Durante a segunda metade do século XX, percebeu-se que o aumento de várias ordens de grandeza nas taxas e distâncias de transmissão apenas seria possível se ondas ópticas fossem utilizadas como portadoras do sinal. (AGRAWAL, 2002).

Em 1966, sugeriu-se que as fibras ópticas poderiam ser a melhor opção para o transporte destas ondas, uma vez que elas eram capazes de guiar a luz de forma similar ao transporte de elétrons em fios de cobre. (KAO; HOCKHAM, 1966). O principal obstáculo, entretanto, advinha do fato que as fibras disponíveis nos anos 60 possuíam perdas da ordem de 1000 dB/km. A partir daí, o avanço mais significativo ocorreu na década de 70, com o surgimento das fibras ópticas com baixa atenuação, que possibilitaram as comunicações de longa distância e com elevada largura de banda. (KAPRON; KECK; MAURER, 1970).

Desde o início do novo milênio, efetuaram-se mudanças consideráveis na indústria de telecomunicações, que geraram profundas implicações ao estilo de vida da sociedade. Devido à contínua e crescente demanda por mais capacidade e eficiência nas redes de comunicações, a adequação das indústrias de telecomunicações tornou-se imprescindível à nova realizade. (RAMASWAMI; SIVARAJAN; SASAKI, 2010)

Esta demanda é alimentada por diversos fatores. O enorme crescimento da Internet, por exemplo, tanto em termos de número de clientes quanto do período de utilização, exige um aumento na largura de banda dos usuários. O tráfego da rede mundial de computadores tem crescido rapidamente durante muitos anos, e as estimativas mostram uma duplicação a cada três ou quatro meses. (KAMINOW; LI, 2002).

Há, entretanto, outros tipos de serviços que também necessitam do crescente desenvolvimento dos sistemas ópticos. O aumento das demandas nas companhias

de telecomunicações exige a contínua expansão de seus *backbones*, que atualmente são estruturados em redes ópticas. Sistemas atuais para oferta de serviços conhecidos como *triple play* (telefone, TV e internet) utilizam tecnologias FTTX (como o *Fiber to the Home* ou o *Fiber to the Building*), que também fazem uso das fibras ópticas.

Neste cenário, destacam-se, também, as redes de comunicações de longas distâncias, que fazem uso de cabos submarinos. Neste ínterim, vários sistemas WDM foram implantados através dos oceanos Atlântico e Pacífico entre os anos de 1998 e 2001, em resposta ao aumento do tráfego na Internet. (AGRAWAL, 2002).

O acréscimo de sistemas instalados obrigou que as taxas de transmissão evoluíssem de forma exponencial. A utilização de vários canais simultâneos permitiu transmissões de informações surpreendentes, na ordem dos Terabits/s. (ITO, 2004). A evolução tecnológica empregada no desenvolvimento das fibras ópticas possibilitou a implementação de dispositivos apropriados ao processamento óptico na própria fibra. Assim, reduziram-se as perdas de inserção e houve ganhos na qualidade de processamento.

Percebe-se que os sistemas tendem a se tornarem mais robustos, rápidos e confiáveis, exigindo, portanto, tecnologias cada vez mais sofisticadas na indústria das telecomunicações. Neste cenário, as fibras ópticas desempenham um papel fundamental, e a busca de tecnologias que possibilitem aumentar a capacidade de transmissão, aliada à redução da atenuação e das distorções do sinal nas fibras, ainda serão tema de muitas pesquisas.

A redução da atenuação em fibras ópticas para valores abaixo dos atingidos atualmente (0,2 dB/km) é de importância fundamental aos sistemas atuais de telecomunicações, sugerindo novos projetos de fibra. Um dos que possuem grande potencial para uma redução drástica das perdas é a fibra de Bragg (BF – *Bragg Fibers*). (DORAN; BLOW, 1983).

O objetivo deste trabalho consiste na análise completa das fibras de Bragg com núcleo oco. As fibras de Bragg, importante campo de pesquisa, visam integrar os sistemas ópticos de capacidades superiores de transmissão de dados.

Nesta dissertação, será abordada a análise da dispersão das BF, que se situam no plano complexo, e que exige uma certa estratégia para ser concretizada. Esta estratégia é imprescindível à análise dos modos transversais TE_{0m} e TM_{0m}, assim como aos modos híbridos.

Serão efetuadas simulações computacionais para vários comprimentos de ondas, e os gráficos dos resultados calculados serão confrontados com os obtidos na literatura. Como algumas avaliações realizadas não foram divulgadas por outros autores, deve-se ter em conta, neste caso, um tratamento mais criterioso.

As fibras de Bragg são mais eficientes que as fibras disponíveis no mercado, como será evidenciado nas seções posteriores. Portanto, um contínuo estudo e desenvolvimento da tecnologia com estas estruturas será de grande valia para os futuros sistemas de comunicações ópticas.

Esta dissertação contém três capítulos, além de uma introdução e uma conclusão. Neles, as fibras de Bragg de núcleo oco serão analisadas detalhadamente. A teoria é desenvolvida minuciosamente, permitindo simulações computacionais e previsões para aplicações futuras.

No primeiro capítulo, será descrita a teoria de uma rede de difração de Bragg, princípio básico da fibra de Bragg, quando, então, serão apresentados os princípios e as características da estrutura das fibras de núcleo oco, foco principal deste trabalho.

No segundo capítulo desenvolve-se rigorosamente o formalismo matemático para se analisar os modos TE_{0m}, TM_{0m} e HEM_{nm} nas fibras de Bragg. O teorema da dualidade mostrou-se ser de grande utilidade na obtenção das formulações TE e TM, assim como a propriedade da linearidade, do modo TE e TM, na elaboração do formalismo do modo híbrido. Os modos híbridos analisados são referenciados por $1HEM_{nm}$ (primeira polarização) e $2HEM_{nm}$ (segunda polarização, ortogonal à primeira), que são degenerados.

No terceiro capítulo, obtém-se os resultados (perdas e dispersões) de diferentes estruturas de Bragg pela teoria desenvolvida neste trabalho, que ao serem confrontados com aqueles publicados na literatura, mostraram-se em excelente concordância.

Finalmente, na conclusão desta dissertação, será abordado a relevância dos resultados obtidos, além de serem apontadas algumas sugestões para investigações em trabalhos futuros.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DAS FIBRAS DE BRAGG

1.1 Definição e Origem

Os guias de onda podem ser considerados o *backbone* dos sistemas de telecomunicações e da optoeletrônica moderna. Existem atualmente dois tipos de guias de onda, metálico e dielétrico, que são utilizados em dois regimes distintos do espectro eletromagnético. Para frequências de rádio, o cabo coaxial metálico é de maior predominância. Neste tipo de guia, todo o campo eletromagnético está confinado entre dois cilindros metálicos coaxiais. O modo eletromagnético fundamental de um cabo coaxial é o transverso eletromagnético (TEM), o qual possui uma simetria radial na distribuição do campo, além de uma relação linear entre a frequência e o vetor de onda. Com isso, o modo TEM apresenta duas propriedades: Primeiro, a simetria radial implica que não é preciso se preocupar com possíveis rotações da polarização do campo após atravessar o guia de onda; e em segundo, a relação linear assegura que um pulso de diferentes frequências irá manter a sua forma original durante a propagação ao longo do guia de ondas. (IBANESCU et al, 2000).

A principal desvantagem de um guia de ondas coaxial metálico é o fato de não poder ser utilizado com sinais ópticos, devido à impossibilidade de se confeccionar estruturas metálicas de dimensões do comprimento de onda óptico. Por esta razão, a propagação de sinais ópticos é restrita à utilização de materiais dielétricos. No entanto, devido às diferenças nas condições de contorno dos campos eletromagnéticos nas superfícies metálicas e dielétricas, não é possível excitar o modo TEM em materiais puramente dielétricos.

As fibras de Bragg (BF – *Bragg Fibers*) caracterizam-se como uma ótima alternativa para a condução de sinais ópticos em guias de onda dielétricos ao mesmo tempo em que possibilitam a eliminação de problemas de absorção,

dispersão por modos de polarização e não linearidades, os quais são inerentes das fibras ópticas tradicionais. (OUYANG; XU; YARIV, 2001).

O princípio básico presente na teoria das fibras de Bragg está nas grades de difração. Estas grades, também chamadas de redes de difração, define-se como um conjunto uniforme de pontos onde ocorre o espalhamento de ondas ópticas, com deslocamento de fase. (RAMASWAMI; SIVARAJAN; SASAKI, 2010).

De acordo com o princípio de Huygens, citado em Lindell (1996), cada ponto de espalhamento representa uma fonte secundária de ondas esféricas. Estas ondas esféricas secundárias interferem entre si de forma construtiva ou destrutiva, dependendo da relação entre comprimentos de onda. A Figura 1-1 ilustra este fenômeno. Uma abordagem completa sobre o formalismo matemático empregado nas grades de difração pode ser encontrado em Hecht (2001) e em Ramaswami, Sivarajan e Sasaki (2010).

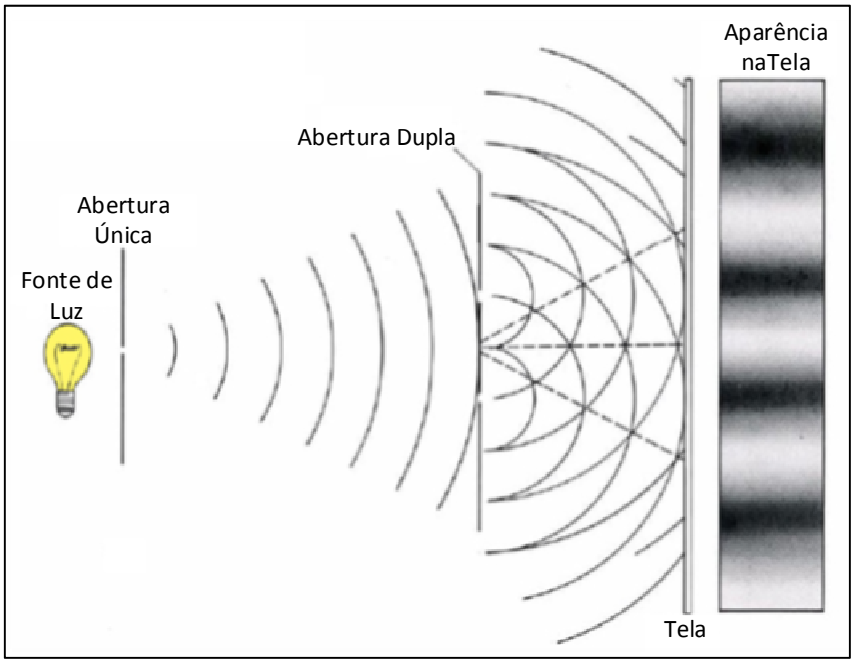

Figura 1-1: Rede de difração[1].

A partir deste conceito de grades de difração, surgiu uma estrutura que, atualmente, é amplamente utilizada em sistemas de comunicações ópticas: a grade ou rede de difração de Bragg. Este nome provém do cientista William Henry Bragg, que junto com seu filho Lawrence, entre 1913 e 1914, realizou uma importante e

[1] Disponível em <http://www.askamathematician.com>. Acesso em 13/10/2013.

significativa pesquisa a respeito da análise de estruturas cristalinas por meio de raios-X. Por estes estudos, ambos receberam o prêmio Nobel em 1915[2].

A Figura 1-2 contribui para a compreensão dos estudos realizados por William Bragg. Em suas pesquisas, constatou-se que, quando os raios-x são espalhados a partir de uma estrutura cristalina, os picos de intensidade na onda dispersada são observados mediante as seguintes condições: quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de espalhamento; e quando a diferença de comprimento da trajetória é igual a um número inteiro de comprimentos de onda.

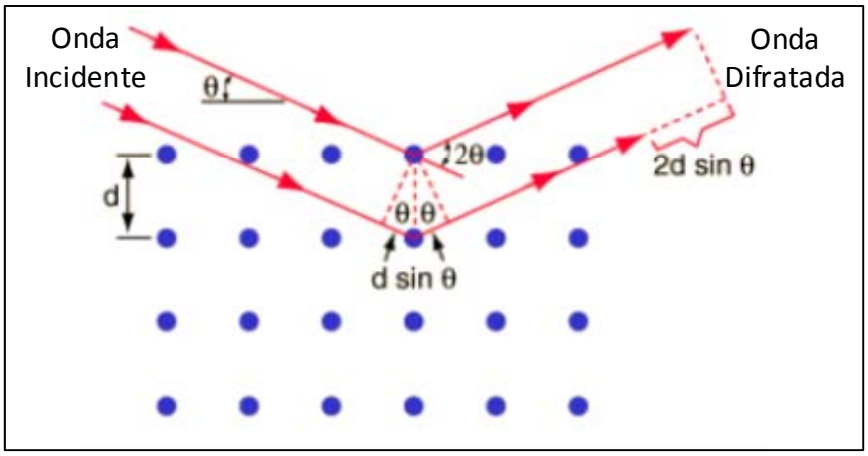

Figura 1-2: Lei de Bragg[3].

Portanto, a equação que descreve a lei de Bragg é dada por:

$$m\lambda = 2dsen\theta \qquad (1\text{-}1)$$

Onde m é um inteiro (m = 1, 2, 3, ...), λ é o comprimento de onda dos raios incidentes e d é o espaçamento entre camadas atômicas no cristal.

Considerando o caso de incidência perpendicular à grade (θ = π/2), utilizando-se a lei de Bragg é possível concluir que as reflexões ocorrerão apenas nos seguintes comprimentos de onda. (RAMASWAMI; SIVARAJAN; SASAKI, 2010):

$$m\lambda_{Bragg} = 2n_{eff}\Lambda \qquad (1\text{-}2)$$

Onde Λ representa o período da grade de difração, e n_{eff}, o índice de refração efetivo do modo; m é um inteiro, que representa a ordem da difração de Bragg.

[2] Biografia de Bragg. Disponível em <http://www.nobelprize.org>. Acesso em 13/10/2013.
[3] Disponível em < http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/bragg.html >. Acesso em 13/10/2013.

As grades de difração de Bragg em fibras ópticas foram originadas dos conceitos expostos anteriormente, as quais são obtidas com a introdução de uma variação periódica no índice de refração do núcleo da fibra, ao longo do seu comprimento. Neste caso, a luz incide perpendicularmente à grade. Na prática, a eficiência de reflexão diminui à medida que o comprimento de onda da onda incidente se afasta do comprimento de onda de Bragg. Assim, se vários comprimentos de onda são transmitidos em uma grade de Bragg, o comprimento de onda Bragg é refletido, enquanto que os outros comprimentos de onda são transmitidos. (RAMASWAMI; SIVARAJAN; SASAKI, 2010).

A Figura 1-3 representa o funcionamento de uma grade de Bragg aplicada em uma seção do núcleo de uma fibra óptica. O período da grade de difração (Λ) deve ser projetado de tal forma a gerar a reflexão do comprimento de onda desejado. Como pode ser observado na figura, o espectro transmitido é exatamente o incidente subtraído do comprimento de onda refletido na grade de Bragg.

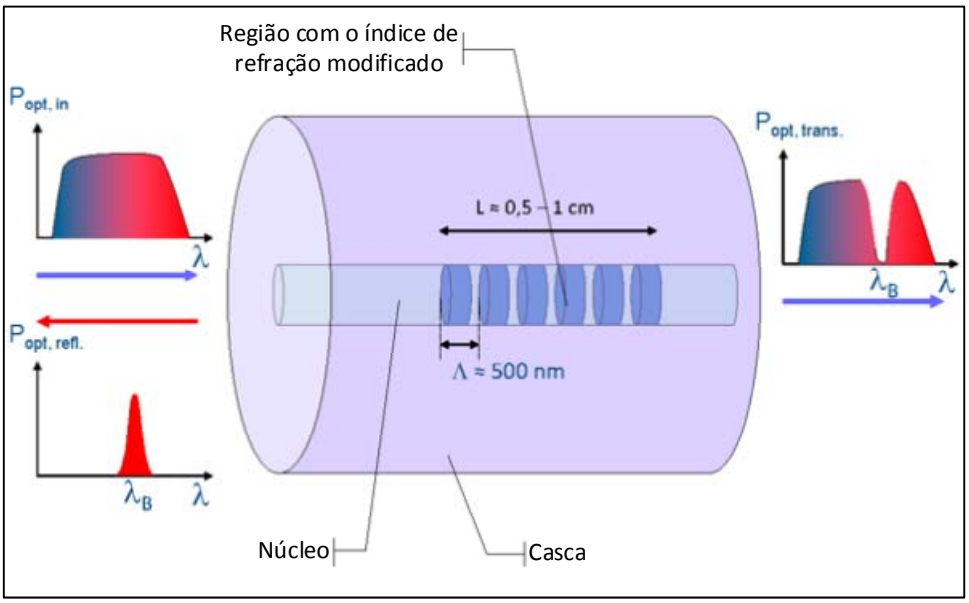

Figura 1-3: Grade de Bragg em Fibra Óptica[4].

As grades de difração de Bragg possuem diversas aplicações em sistemas ópticos. Dentre eles, a extração e adição de canais WDM, filtros e compensadores de dispersão. (OUYANG; XU; YARIV, 2002). A abordagem completa das grades de difração de Bragg não faz parte do escopo desta dissertação. Entretanto, estes

[4] Disponível em < http://spie.org >. Acesso em 13/10/2013.

conceitos apresentados formam a base do princípio de funcionamento de um guia de onda de Bragg, uma vez que estes mesmos fenômenos de difração e reflexão são utilizados para manter o confinamento dos modos transversais na propagação da onda no interior do núcleo da fibra.

1.2 Guias de Onda de Bragg

Os denominados guias de onda de Bragg consistem em um núcleo com baixo índice de refração, e uma casca cujo índice aumenta e diminui alternadamente. Entretanto, esta estrutura foi inicialmente proposta para um guia de onda plano, e apenas alguns anos depois o mesmo conceito foi utilizado para guias de onda cilíndricos.

Considerando uma configuração de placas dielétricas, sabe-se que estes guias de onda ópticos são capazes de suportar modos confinados sem perdas, desde que o índice de refração da camada interna exceda os índices dos meios delimitadores. Esta condição é necessária para se obter uma constante de propagação transversal que corresponda a um desvanecimento do campo modal no meio circundante.

A possibilidade de utilização da reflexão de Bragg a fim de obter uma propagação sem perdas em ambiente confinado, aplicado em placas com uma constante dielétrica mais baixa do que a dos meios circundantes, foi inicialmente proposta e analisada em Yeh e Yariv (1976). Tais situações surgem quando o meio interior é o ar, por exemplo.

Na pesquisa realizada por Yeh e Yariv (1976), foi apresentado que, em princípio, uma propagação com menores perdas é possível quando as placas nas fronteiras possuem índices periódicos e maiores do que o meio de transmissão. A Figura 1-4 ilustra um guia de onda composto de um meio com baixo índice (neste caso, o ar) separando dois meios periódicos finitos, além de sua distribuição de campo. Nas análises realizadas nesta referência, constata-se que, para o completo decaimento da onda no meio delimitador, necessita-se de pelo menos 10 células com variações periódicas no índice.

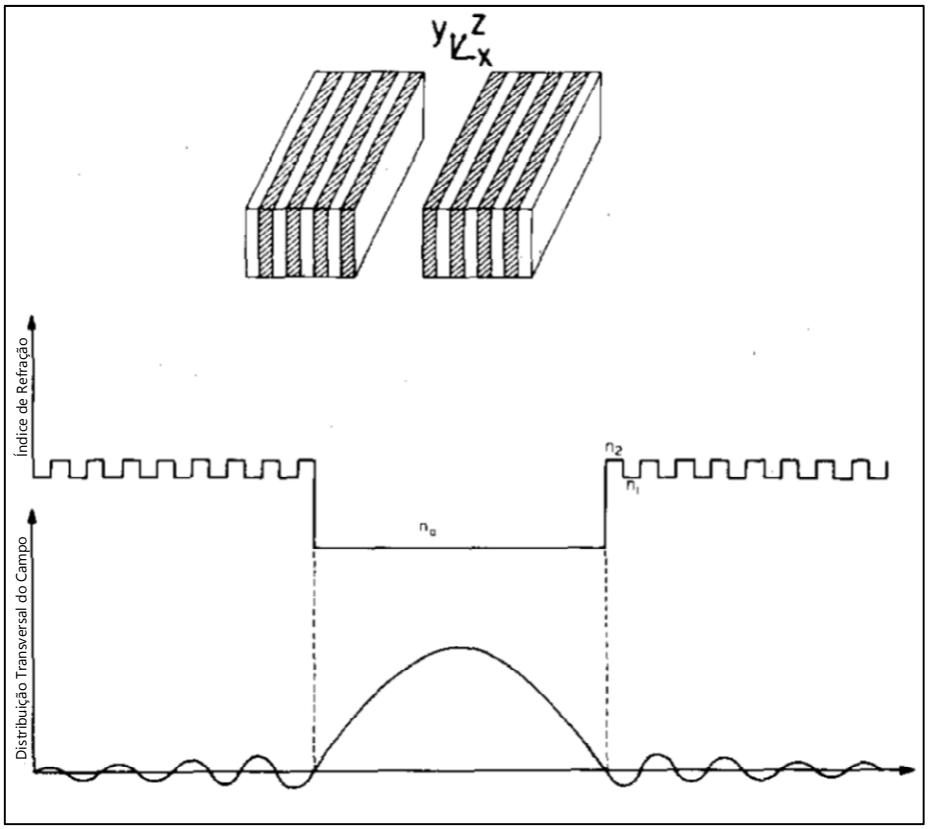

Figura 1-4: Distribuição transversal de campo do modo fundamental de um típico guia de onda de Bragg.

Estes estudos foram fundamentais para mostrar que guias de onda utilizando os princípios de reflexão de Bragg nas fronteiras podem suportar modos de propagação confinados e com baixas perdas, além de utilizar um núcleo com baixo índice de refração. A partir destes estudos, advieram as pesquisas com as Fibras de Bragg, que são o foco principal desta dissertação.

1.3 Fibras Ópticas de Bragg

O estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em guias de ondas dielétricos simetricamente cilíndricos tornou-se cada vez mais importante na comunicação por fibras ópticas. Uma fibra dielétrica é capaz de suportar os modos confinados desde que o índice de refração do núcleo seja maior do que a da casca. Isso garante o decaimento evanescente do sinal óptico enquanto o raio tende para o infinito. E para efetuar a análise destas estruturas, é possível fazê-lo aplicando as funções seno e cosseno ou através das funções de Bessel – como feito em Kawanishi e Izutsu (2000) – de ambas as espécies.

O guia de onda cilíndrico de Bragg, ou Fibra de Bragg, foi incialmente proposto em Yeh e Yariv (1978). A característica principal desta fibra é que os modos confinados ocorrem em um núcleo com baixo índice de refração, desde que este núcleo esteja revestido por uma casca que alterne baixos e altos índices de refração. Ou seja, o princípio de condução é semelhante ao guia de onda plano, conforme descrito na seção anterior.

A geometria da Fibra de Bragg é ilustrada na Figura 1-5. A luz é confinada no núcleo por reflexão de Bragg através das camadas alternadas da casca, cuja configuração se aproxima uma rede de Bragg. Fibras de Bragg têm recebido muita atenção recentemente devido às interessantes propriedades modais e de dispersão, aliado também aos avanços nas técnicas de fabricação. (ARGYROS, 2002).

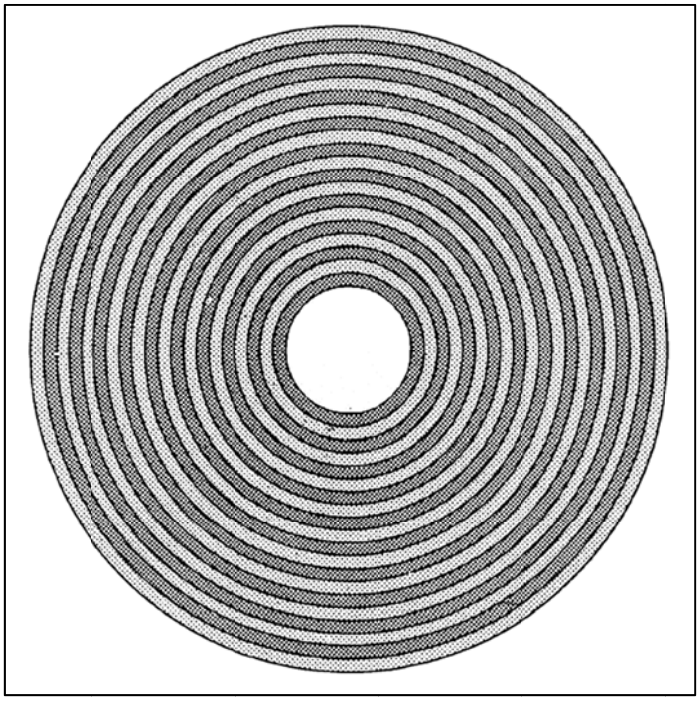

Figura 1-5: Geometria da Fibra de Bragg.

A seguir, na Figura 1-6, é apresentado o perfil do índice de refração em uma seção transversal da fibra de Bragg. (ARGYROS, 2002). Em geral, estas fibras podem ser descritas por sete parâmetros: n_{co}, n_1, n_2, r_{CO}, d_1, d_2 e N, sendo estes os índices de refração do núcleo, os índices alternados da casca, o raio do núcleo, a espessura das camadas da casca e o número de camadas, respectivamente. Os valores descritos na figura são meramente ilustrativos.

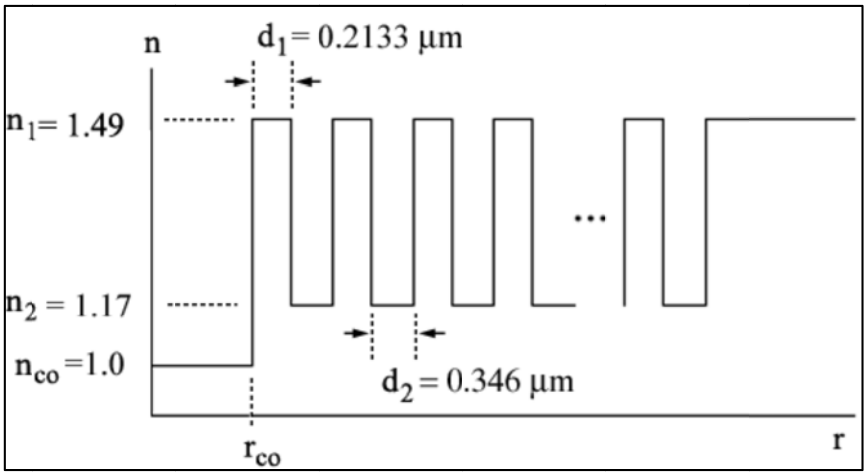

Figura 1-6: Perfil do índice de refração.

1.3.1 Fibras de Bragg de Núcleo Oco

Para ser guiada ao longo da fibra óptica, a luz deve ser confinada no núcleo central através da reflexão da casca que a cobre. Todas as fibras convencionais guiam a luz por meio desta que é chamada de reflexão interna total (RIT), exigindo que o núcleo possua um índice de refração maior que a casca.

A utilização da RIT não provoca outras perdas além daquelas causadas por absorção intrínseca e perdas por espalhamento geradas pelo próprio material com o qual a fibra é desenvolvida. Entretanto, até mesmo estas perdas (além de outras causadas por deficiências do material da fibra) poderiam ser, em grande parte, evitadas se a luz fosse aplicada em um núcleo oco. Porém, esta condição é impraticável com a RIT, já que não seria possível fabricar uma casca com um material sólido que possua índice de refração inferior ao do ar. (CREGAN et al, 1999).

Sendo assim, as fibras de núcleo oco surgem como uma opção adequada para esta questão. Todavia, dado o fato de que as fibras de Bragg utilizam reflexões externas, estas estruturas possuem modos de fuga de forma inerente, tornando-as altamente capazes de suportar vários modos transversais distintos. Portanto, poderiam apresentar fortes características de fibras multimodo.

Uma BF, conforme já mencionado, funciona baseada nas reflexões que ocorrem entre os anéis que compõem a casca. Entretanto, parte do sinal óptico que

é refletido pode propagar-se para fora da estrutura, o que faz com que o valor das perdas totais diminuam nos anéis, criando espectros de atenuação com bandas. (MARTINS, 2009). Tal efeito contribui para a propagação de outros modos na fibra além do fundamental.

Portanto, para o comprimento de onda de interesse, deve-se buscar minimizar o fluxo externo à estrutura (devidos aos modos de fuga), permitindo que a fibra transporte apenas o modo fundamental (e, desta forma, operando como uma fibra monomodo). Logo, a configuração dos anéis de Bragg deve ser realizado de tal forma que apenas o modo fundamental, no determinado comprimento de onda, esteja dentro da banda fotônica da fibra. (ABEELUCK et al, 2002). Por esta razão, as fibras de Bragg são também denominadas fibras de banda fotônica (PBGF – *Photonic Bandagap Fibers*).

Duas classes principais de fibras têm surgido utilizando bandas fotônicas: fibras de cristais fotônicos "furadas" que utilizam uma periodicidade transversal bidimensional (conforme a Figura 1-7), e fibras de Bragg de anéis concêntricos (Figura 1-5), que utilizam uma periodicidade unidimensional, sendo esta última o foco deste trabalho. (JOHNSON et al, 2001; LITCHINITSER et al, 2002).

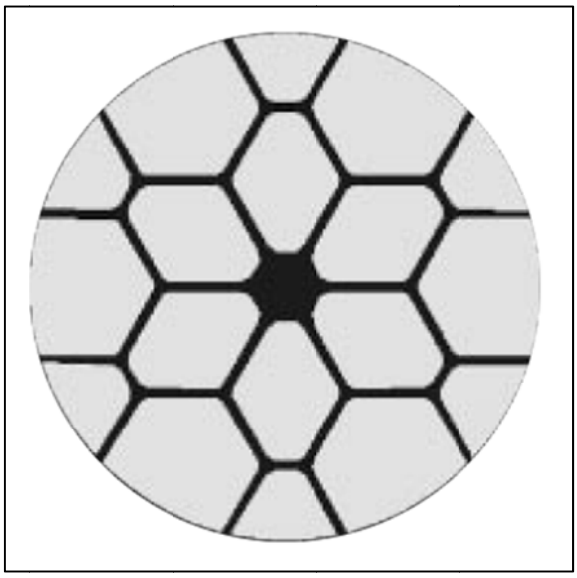

Figura 1-7: Seção transversal de uma fibra “furada”. A cor preta representa a sílica, e a cor branca representa o ar.

A onda incidente em uma PBGF é parcialmente refletida em cada uma das camadas dos anéis da casca. Estas ondas refletidas estão em fase e reforçam umas

às outras. A partir daí, elas combinam-se com a onda incidente e produzem uma onda estacionária que não se propaga através da estrutura. A Figura 1-8 ilustra esta situação.

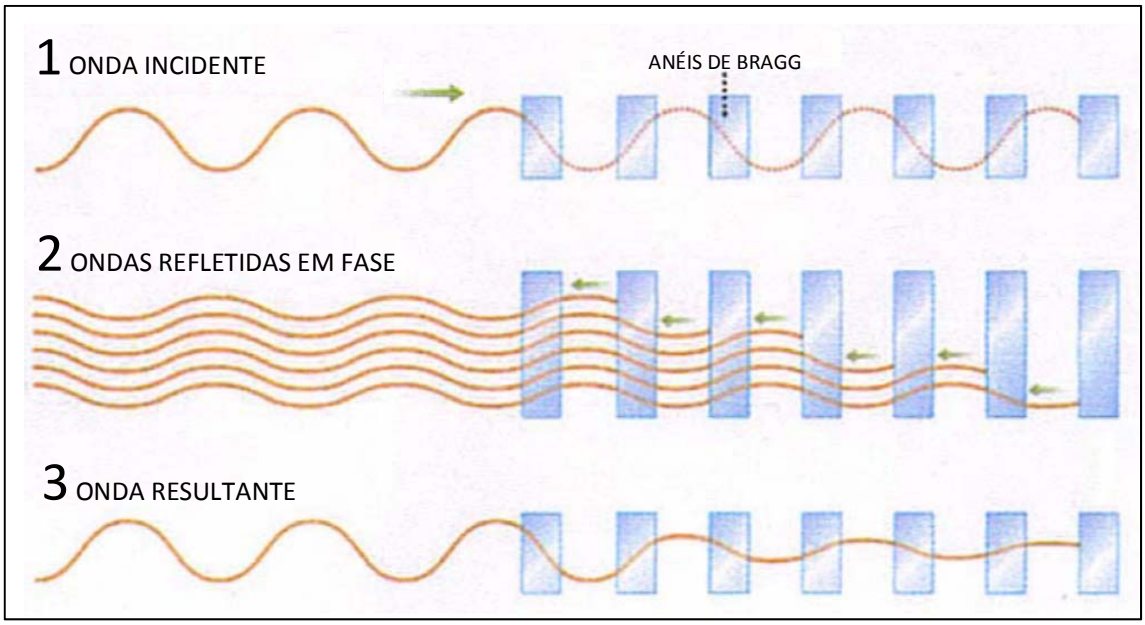

Figura 1-8: Comprimento de onda dentro da banda fotônica.

Em um comprimento de onda fora da banda fotônica, ocorre o efeito apresentado na Figura 1-9. As ondas refletidas estão fora de fase, e consequentemente cancelam-se umas com as outras. Por consequência, a luz se propaga através da estrutura apenas com uma sutil atenuação.

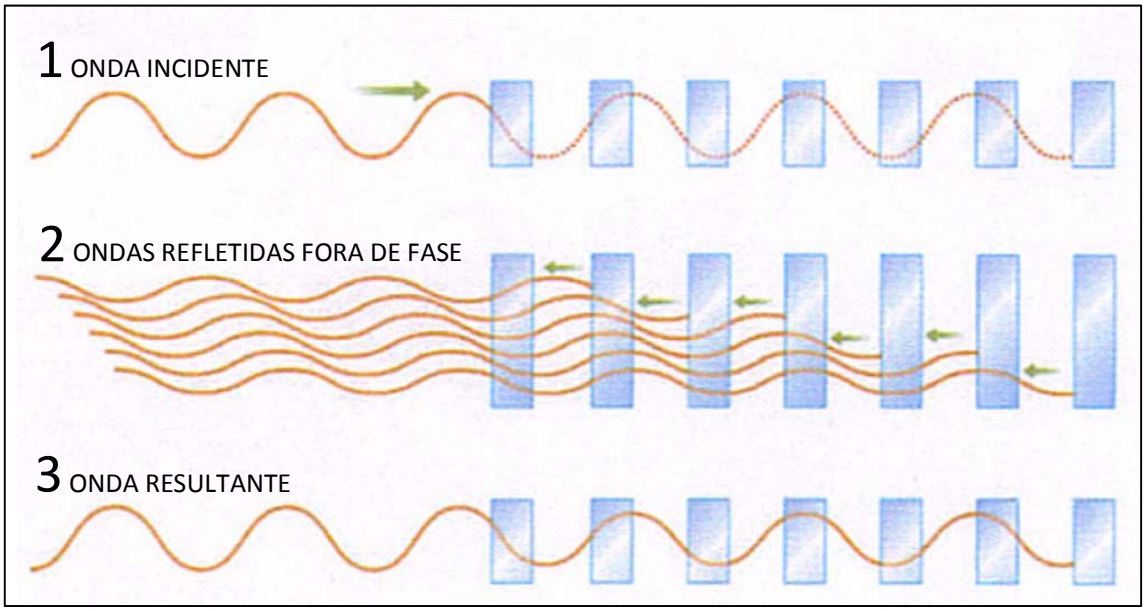

Figura 1-9: Comprimento de onda fora da banda fotônica.

Quando a fibra de Bragg está operando na banda fotônica, a intensidade do campo nos anéis decai exponencialmente, o que significa que o confinamento do campo pode ser aprimorado por meio da adição de novas camadas. Logo, a configuração ideal requer um número infinito de anéis. Isto implica que, em uma estrutura prática, com um número finito de camadas, todos os modos são, em algum grau, de fuga. Além disso, conforme citado em Doran e Blow (1983), as BF suportam uma quantidade infinita de modos, no qual todos possuem perdas. Entretanto, se em algum intervalo de frequências as perdas de um desses modos é significativamente menor que os demais, então a fibra é considerada, de fato, monomodo. (STERKE; BASSETT; STREET, 1994).

Desta forma, uma vez satisfeitas as condições da banda fotônica, as BF tornam-se extremamente úteis, já que passam a apresentar-se como uma alternativa para as atuais transmissões em fibras ópticas na área das telecomunicações. Dentre as vantagens mais relevantes, estão a ausência de perdas por absorção, sendo possível reduzir a atenuação da fibra para valores abaixo de 0,2 dB/km (valor presente nas fibras de telecomunicações atuais) e a redução das não linearidades, tal como o Espalhamento Raman Estimulado (através do aumento da potência de limiar onde iniciam-se os efeitos não lineares), segundo Vienne et al (2003); além do controle da dispersão devido à condução da luz no núcleo de ar e à manipulação das regiões periódicas que formam os anéis da casca. (ABEELUCK et al, 2002).

1.3.2 Metodologia de Análise das Fibras de Bragg

Conforme já citado, as fibras de Bragg começaram a ser estudadas na década de 70. (YEH; YARIV, 1978). Desde então, a literatura sobre este tema tem sido vasta. Entre as inúmeras abordagens empregadas na análise das fibras de Bragg estão o método assintótico, citados em Xu e Yariv (2003) e por Xu et al (2002), Galerkin, citado em Guo e Albin (2004), método dos elementos finitos, citado em Cucinotta et al (2002), Uranus e Hoekstra (2004) e Brechet et al (1999) e o método da matriz de transferência, como em Guo e Albin (2004) e Argyros (2002).

Para uma fibra de Bragg com núcleo oco, como a considerada neste trabalho, há perdas decorrentes dos modos de fuga, como comentado na seção anterior.

Portanto, a análise completa da dispersão destas estruturas se situa no plano complexo, tornando-a muito difícil.

Para a solução deste problema da dispersão no plano complexo, este trabalho segue, de uma forma geral, a abordagem baseada na sub-rotina DZANLY, presente na biblioteca de rotinas matemáticas do IMSL Fortran, com base no método de Müller. Trata-se de uma generalização do Método da Secante, e consiste da aplicação de iterações a fim de obter os zeros de uma função complexa invariável. (VNI, [199-?]).

Um dos problemas que podem ocorrer ao aplicar o Método da Secante em polinômios é a possibilidade deste polinômio conter raízes complexas mesmo quando todos os coeficientes são números reais. Caso a aproximação inicial seja um número real, todas as aproximações subsequentes também serão números reais. Uma maneira de contornar este problema é começar com uma aproximação inicial complexa e realizar todos os cálculos utilizando aritmética complexa. Uma descrição mais detalhada do Método de Müller, além de sua comparação com o Método da Secante, pode ser encontrada em Burden e Faires (2009).

Além do Método de Müller, este trabalho também abordará o Método da Falsa Posição (também conhecido como *Regula Falsi*). Este método gera aproximações tal como o método da Secante, mas inclui um teste para garantir que a raiz estará sempre incluída entre sucessivas iterações. (BURDEN; FAIRES, 2009). Um exemplo prático da aplicação desta técnica pode ser encontrado em Gardiol (1970).

Sendo assim, utilizando as técnicas apresentadas, este trabalho apresenta uma estratégia para o cálculo, no plano complexo, da dispersão dos modos transversais TE_{0m} e TM_{0m}. Tal estratégia é também aplicada aos modos híbridos. Toda a formulação matemática utilizada a fim de obter as equações de dispersão dos modos serão apresentadas na próxima seção.

2 MODELO MATEMÁTICO

Nesta seção, serão apresentadas as análises dos modos TM_{0m}, TE_{0m}, e HEM_{nm}, as quais foram utilizadas para a modelagem das fibras de Bragg investigadas neste trabalho.

Como o modo TE_{0m} é dual do TM_{0m}, ou vice versa, será desenvolvido apenas o formalismo do modo TM_{0m}, já que o do modo TE_{0m} é obtido a partir do primeiro pelo Teorema da Dualidade. (BALANIS, 1997).

2.1 Modo TM_{0m}

2.1.1 Formalismo do Modo TM_{0m}

Considera-se a excitação temporal $e^{(jwt)}$, e portanto, a onda direta se expressa por $e^{(-j\beta z)}$. O eixo da BF é o da coordenada "z".

O modo TM_{0m}, assim como o TE_{0m}, são caracterizados por simetria angular n=0 (não há variação angular). Por conseguinte, os campos eletromagnéticos dependem unicamente das coordenadas r e z.

A formulação do modo TM_{0m} tem por base a componente longitudinal E_z (r,ϕ), que satisfaz a equação de Helmholtz no sistema de coordenada polar (r,ϕ,z). (COLLIN, 1979). Ou seja:

$$\nabla^2 E_{z_p} + k_p^2 E_{z_p} = 0$$

p = 0, 1, 2, 3, ... , N (regiões que compõem a BF, sendo *p*=0 a região do núcleo).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial(rE_{z_p})}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 E_{z_p}}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\partial^2 E_{z_p}}{\partial z^2} + k_p^2 E_{z_p} = 0 \qquad (1)$$

Pelo método da separação das variáveis:

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = R_p(r)\phi_p(\varphi)Z_p(z) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), tem-se a equação de Helmholtz que governa os três modos HEM_{nm}, TE_{0m} e TM_{0m}.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rR_p(r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi_p(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{d^2 Z_p(z)}{dz^2} = -k_p^2 \qquad (3)$$

A solução de (3) se expressa:

$$Z(z) = e^{-j\beta z};\ \phi(\varphi) = \{^{\cos(n\varphi)}_{\mathrm{sen}(n\varphi)} \tag{4}$$

Idênticas para todas as regiões dielétricas *p* = 0, 1, 2, 3, ... , N.

O comportamento radial é regido pela equação de Bessel ordinária:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_p}{dr}\right) + \left[{k_{Tp}}^2 - \left(\frac{n}{r}\right)^2\right] R_p(r) = 0 \tag{5}$$

Sendo k_{Tp} o número de onda transversal da região *p* = 0, 1, 2, 3, ... , N.

Onde ${k_{Tp}}^2 = {k_p}^2 - \beta^2$

Substituindo (4) em (2), tem-se:

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = R_p(r)\begin{Bmatrix}\cos(n\varphi)\\ \mathrm{sen}(n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \tag{6}$$

O campo longitudinal procurado é caracterizado pelas funções ordinárias de Bessel que solucionam a Eq. 5. São elas:

$$B(r,\varphi,z) = J_n(k_T r), Y_n(k_T r), {H_n}^{(1)}(k_T r), {H_n}^{(2)}(k_T r) \tag{7}$$

Por meio da Eq. 7, tem-se que o comportamento radial, do respectivo campo longitudinal, é constituído por uma onda estacionária circular, $J_n(k_T r)$, e outra que flui radialmente, propagando-se do núcleo para a região externa, ${H_n}^{(2)}(k_T r)$. Logo, o campo longitudinal do modo TM_{nm}, referente à região "*p*" da estrutura, será:

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(A_p J_n(k_{Tp} r) + B_p {H_n}^{(2)}(k_{Tp} r)\right)\begin{Bmatrix}\cos(n\varphi)\\ \mathrm{sen}(n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \tag{8}$$

Substituindo em (8) a função de Hankel de 2ª espécie pelas funções ordinárias de Bessel de 1ª e 2ª espécie, ${H_n}^{(2)}(k_T r) = J_n(k_T r) - jY_n(k_T r)$, tem-se uma segunda expressão equivalente para o campo E_{z_p}:

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(A_p J_n(k_{Tp} r) + B_p Y_n(k_{Tp} r)\right)\begin{Bmatrix}\cos(n\varphi)\\ \mathrm{sen}(n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta z} \tag{9}$$

O modo TM e TE não apresentam variações angulares, então, n=0.

Portanto, o modo TM_{0m} tem por base, em cada região dielétrica, o campo elétrico longitudinal $E_{z_p}(r,z)$.

Para “*p* = 0, 1, 2, 3, ... , (N-1)”, sendo “*p* = 0” o núcleo e “*p* = (N-1)” a última região dielétrica relacionada à célula de Bragg (vide Figura 2-1), temos:

$$E_{z_p}(r,z) = \left[A_p J_0\left(k_{Tp} r\right) + B_p Y_0\left(k_{Tp} r\right)\right] e^{-j\beta_{0m} z} \tag{10.1}$$

Para o núcleo, $B_0 = 0$.

Para “*p* = N”, região dielétrica externa:

$$E_{z_p}(r,z) = \left[A_N H_0{}^{(1)}(k_{TN} r) + B_N H_0{}^{(2)}(k_{TN} r)\right] e^{-j\beta_{0m} z} \tag{10.2}$$

Na região externa só existe onda que se propaga afastando-se do núcleo, então A_N=0.

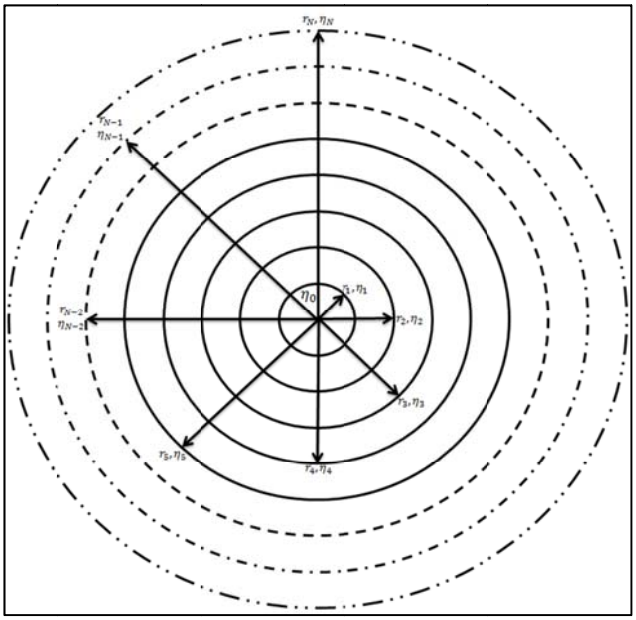

Figura 2-1: Seção transversa da BF, onde r_p e η_p são o raio da fronteira e o índice de refração da região *p* que compõe a estrutura de Bragg, respectivamente. Sendo η_0 o índice de refração e r_1 o raio, ambos no núcleo.

O modo TM_{0m} será formulado pela Eq.10 ($E_z \neq 0$, $H_z = 0$).

Para as regiões internas ($0 \leq \ell \leq$ (N-1)):

$$E_z(r,z) = [A_l J_0(k_{Tl} r) + B_l Y_0(k_{Tl} r)] e^{-j\beta z} \tag{11.1}$$

No núcleo, $\ell = 0$, sendo implícito $B_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N):

$$E_z(r,z) = \left[A_N H_0{}^{(1)}(k_{TN}r) + B_N H_0{}^{(2)}(k_{TN}r)\right]e^{-j\beta z} \tag{11.2}$$

Sendo implícito que $A_N = 0$.

$$\vec{E}_{Tl}(r,z) = \frac{-j\beta}{k_l{}^2}\nabla_T E_{Zl}(r,z) \tag{11.3}$$

$$\vec{H}_{Tl}(r,z) = \frac{-jw\varepsilon_0\eta_l{}^2}{k_l{}^2}(\vec{z} \wedge \nabla_T E_{Zl}) \tag{11.4}$$

Onde $\nabla_T = \frac{\partial}{\partial r}\vec{r}$, já que $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

$$k_{Tl}{}^2 = \left(k_l{}^2 - \beta^2\right) = k_0{}^2\left(\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2\right) \tag{12.1}$$

$$\frac{w\varepsilon_0\eta_l{}^2}{k_l{}^2} = \left(\frac{w\varepsilon_0}{k_0}\right)\frac{\eta_l{}^2}{k_0\left(\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2\right)} = \frac{\eta_l{}^2}{Z_0 k_0\left(\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2\right)} \tag{12.2}$$

Onde $Z_0 = 120\pi$.

2.1.2 Campos Eletromagnéticos do Modo TM_{0m}

As componentes dos campos elétrico e magnético referentes ao modo TM_{0m} são obtidas pelas Eqs. (11) e (12).

Para as regiões internas ($0 \leq \ell \leq (N-1)$):

$$E_{Zl}(r,z) = [A_l J_0(k_l r) + B_l Y_0(k_l r)]e^{-j\beta z} \tag{13.1}$$

$$E_{rl}(r,z) = \frac{j\beta}{k_l}[A_l J_1(k_l r) + B_l Y_1(k_l r)]e^{-j\beta z} \tag{13.2}$$

$$H_{\varphi l}(r,z) = \frac{j\eta_l{}^2}{Z_0\sqrt{\left(\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2\right)}}[A_l J_1(k_l r) + B_l Y_1(k_l r)]e^{-j\beta z} \tag{13.3}$$

$H_{z\ell} = H_{r\ell} = E_{\phi\ell} = 0$. No núcleo, $\ell = 0$ e implícito $B_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N):

$$E_{ZN}(r,z) = \left[A_N {H_0}^{(1)}(k_N r) + B_N {H_0}^{(2)}(k_N r)\right] e^{-j\beta z} \tag{13.4}$$

$$E_{rl}(r,z) = \frac{j\beta}{k_l}\left[A_N {H_1}^{(1)}(k_N r) + B_N {H_1}^{(2)}(k_N r)\right] e^{-j\beta z} \tag{13.5}$$

$$H_{\varphi l}(r,z) = \frac{j{\eta_N}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}}\left[A_N {H_1}^{(1)}(k_N r) + B_N {H_1}^{(2)}(k_N r)\right] e^{-j\beta z} \tag{13.6}$$

Sendo implícito $A_N = 0$.

Nas Eqs. 13, foi utilizada a identidade: ${J_0}'(k_{Tl} r) = -J_1(k_{Tl} r)$

Definem-se:

$k_{Tl} = k_0\sqrt{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}$, onde: $\eta_{ef} = Real(\eta_{ef}) - jIm(\eta_{ef})$

Logo: $\frac{w\varepsilon_0 {\eta_l}^2}{k_l} = \left(\frac{w\varepsilon_0}{k_0}\right)\frac{{\eta_l}^2}{\sqrt{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}} = \frac{{\eta_l}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}}$

As componentes dos campos elétrico e magnético que satisfazem as condições nas respectivas fronteiras, E_z e H_ϕ, são, pelas Eqs 13, expressas matricialmente conforme indicado a seguir.

Para as regiões internas (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$\begin{pmatrix} E_{zl} \\ H_{\varphi l} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_0(k_l r) & Y_0(k_l r) \\ \frac{j{\eta_l}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}} J_1(k_l r) & \frac{j{\eta_l}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}} Y_1(k_l r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} \tag{14}$$

Para a região externa (ℓ = N):

$$\begin{pmatrix} E_{zN} \\ H_{\varphi N} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_0{}^{(1)}(k_N r) & H_0{}^{(2)}(k_N r) \\ \dfrac{j\eta_N{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_N{}^2 - \eta_{ef}{}^2)}} H_1{}^{(1)}(k_N r) & \dfrac{j\eta_N{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_N{}^2 - \eta_{ef}{}^2)}} H_1{}^{(2)}(k_N r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} \quad (15)$$

Para simplificar, as respectivas matrizes serão referenciadas por:

Para as regiões internas (0 ≤ ℓ ≤ (N-1); $r_1 \leq r \leq r_{(N-1)}$):

$$m[l]_{(r)} = \begin{bmatrix} J_0(k_l r) & Y_0(k_l r) \\ \dfrac{j\eta_l{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2)}} J_1(k_l r) & \dfrac{j\eta_l{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2)}} Y_1(k_l r) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Logo: $\begin{pmatrix} E_{zl} \\ H_{\varphi l} \end{pmatrix} = m[l]_{(r)} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix}$

Na região do núcleo, é subentendido que $B_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N; $r \geq r_N$):

$$m[N]_{(r)} = \begin{bmatrix} H_0{}^{(1)}(k_N r) & H_0{}^{(2)}(k_N r) \\ \dfrac{j\eta_N{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_N{}^2 - \eta_{ef}{}^2)}} H_1{}^{(1)}(k_N r) & \dfrac{j\eta_N{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_N{}^2 - \eta_{ef}{}^2)}} H_1{}^{(2)}(k_N r) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Portanto: $\begin{pmatrix} E_{zN} \\ H_{\varphi N} \end{pmatrix} = m[N]_{(r)} \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix}$

Sendo implícito $A_N = 0$.

Nas Eqs. 14 e 15, foi omitido o fator $e^{(-j\beta z)}$.

2.1.3 Matrizes de Transmissão

Nas fronteiras entre dois dielétricos, as componentes tangenciais dos campos, de ambas as regiões, são idênticas. Esta condição exige que, numa fronteira $r = r_l$, vide Figura 2-2, as componentes dos respectivos campos satisfaçam a relação:

$$\begin{pmatrix} E_{z(l-1)} \\ H_{\varphi(l-1)} \end{pmatrix}_{(r=r_l)} = \begin{pmatrix} E_{z(l)} \\ H_{\varphi(l)} \end{pmatrix}_{(r=r_l)} \tag{18}$$

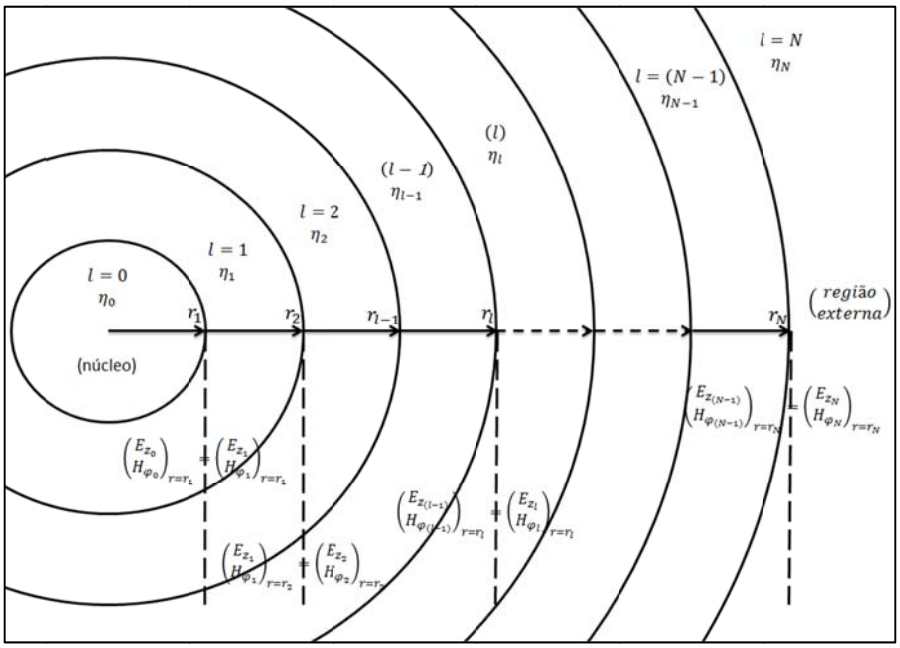

Figura 2-2: Esquema das imposições das condições de fronteiras aos respectivos campos eletromagnéticos.

2.1.3.1 Fronteiras Internas ($r_1 \leq r \leq r_{N-1}$)

A Eq. 18 estabelece as relações entre os coeficientes dos campos das regiões contíguas e as respectivas fronteiras que compõem a BF ($r_1 \leq r \leq r_{N-1}$).

$$m[l-1]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} A_{(l-1)} \\ B_{(l-1)} \end{pmatrix} = m[l]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} A_{(l)} \\ B_{(l)} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Pela Eq. 19 pode-se encontrar os coeficientes da região mais afastada do núcleo em função da anterior, ou vice-versa.

Considerando a fronteira r = r_ℓ:

$$\begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = \left(m[l]_{(r=r_l)}\right)^{-1} m[l-1]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} A_{(l-1)} \\ B_{(l-1)} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Pela Eq. 14 temos $\left(m[l]_{(r=r_l)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} J_0(k_l r_l) & Y_0(k_l r_l) \\ \frac{j\eta_l{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_l{}^2-\eta_{ef}{}^2)}} J_1(k_l r_l) & \frac{j\eta_l{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_l{}^2-\eta_{ef}{}^2)}} Y_1(k_l r_l) \end{bmatrix}^{-1}$

Portanto;

$$\left(m[l]_{(r=r_l)}\right)^{-1} = \left(\frac{-\pi(k_l r_l)}{2}\right) \begin{bmatrix} Y_1(k_l r_l) & \frac{jZ_0\sqrt{(\eta_l{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}{\eta_l{}^2} Y_0(k_l r_l) \\ -J_1(k_l r_l) & \frac{-jZ_0\sqrt{(\eta_l{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}{\eta_l{}^2} J_0(k_l r_l) \end{bmatrix} \tag{21}$$

Na Eq. 21, utilizou-se o *Wronskian* W(J,Y), conforme Hartman (1964):

$$J_{V+1}(z)Y_V(z) - J_V(z)Y_{V+1}(z) = \frac{2}{\pi z}$$

$$J_1(z)Y_0(z) - J_0(z)Y_1(z) = \frac{2}{\pi z}$$

Ou seja, na Eq. 21: $\frac{1}{J_0(k_l r_l)Y_1(k_l r_l) - Y_0(k_l r_l)J_1(k_l r_l)} = \frac{\pi(k_l r_l)}{-2}$

Substituindo as Eqs. 21 e 14 em 20, tem-se a matriz que relaciona os coeficientes entre as duas regiões fronteiriças a r = r_ℓ.

$$\begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = m[(l),(l-1)]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} A_{(l-1)} \\ B_{(l-1)} \end{pmatrix} \tag{22}$$

A matriz $\boldsymbol{m}[(\boldsymbol{l}),(\boldsymbol{l}-\mathbf{1})]_{(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_l)}$ é conhecida por matriz de transferência entre as regiões [(ℓ), (ℓ -1)] em r = r_ℓ.

Para simplificar a representação da matriz de transmissão na Eq. 22, definem-se:

$$\delta = (l-1) \qquad \eta_\delta = \eta_{(l-1)}$$

$$J_{0\delta} = J_\delta(k_\delta r_l) \qquad -Y_{0\delta} = Y_0(k_\delta, r_l)$$

$$J_{1l} = J_1(k_l, r_l) \qquad Y_{1l} = Y_1(k_l, r_l)$$

$$\left(\frac{k_l}{k_\delta}\right) = \sqrt{\frac{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}{\left({\eta_{(l-1)}}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}}$$

Então:

$$m[l,\delta]_{(r=r_l)} = \left(\frac{-\pi(k_l r_l)}{2}\right)\begin{bmatrix} J_{0\delta}Y_{1l} - \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)\left(\frac{\eta_\delta}{\eta_l}\right)^2 J_{1\delta}Y_{0l} & Y_{0\delta}Y_{1l} - \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)\left(\frac{\eta_\delta}{\eta_l}\right)^2 Y_{1\delta}Y_{0l} \\ -J_{0\delta}J_{1l} + \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)\left(\frac{\eta_\delta}{\eta_l}\right)^2 J_{1\delta}J_{0l} & -Y_{0\delta}J_{1l} + \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)\left(\frac{\eta_\delta}{\eta_l}\right)^2 Y_{1\delta}J_{0l} \end{bmatrix} \tag{23}$$

A matriz de transmissão na Eq. 23 é reescrita mais detalhadamente da seguinte forma:

$$m[l,(l-1)]_{(r=r_l)} = \left(\frac{-\pi(k_l r_l)}{2}\right)\begin{bmatrix} m_{11}(r_l) & m_{12}(r_l) \\ m_{21}(r_l) & m_{22}(r_l) \end{bmatrix} \tag{24}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} m_{11}(r_l) &= J_0(k_{l-1}, r_l)Y_1(k_l, r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_1(k_{l-1}, r_l)Y_0(k_l, r_l) \\ m_{12}(r_l) &= Y_0(k_{l-1}, r_l)Y_1(k_l, r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 Y_1(k_{l-1}, r_l)Y_0(k_l, r_l) \\ m_{21}(r_l) &= -J_0(k_{l-1}, r_l)J_1(k_l, r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_1(k_{l-1}, r_l)J_0(k_l, r_l) \\ m_{22}(r_l) &= -Y_0(k_{l-1}, r_l)J_1(k_l, r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 Y_1(k_{l-1}, r_l)J_0(k_l, r_l) \end{aligned} \tag{25}$$

2.1.3.2Fronteira Externa ($r = r_N$)

O relacionamento dos coeficientes da região externa (*p* = N) e os do último dielétrico da célula de Bragg (*p* = N-1) é obtido adaptando-se as componentes (E_z,H_ϕ) de ambas as regiões, na fronteira $r = r_N$.

A Eq. 18 em $r = r_N$ se expressa:

$$\begin{pmatrix} E_{z_{(N-1)}} \\ H_{\varphi_{(N-1)}} \end{pmatrix}_{(r=r_N)} = \begin{pmatrix} E_{z_N} \\ H_{\varphi_N} \end{pmatrix}_{(r=r_N)} \tag{26}$$

Substituindo as Eqs. 16 e 17 na Eq. 26:

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \left(m[N]_{(r=r_N)}\right)^{-1} m[N-1]_{(r=r_N)} \begin{pmatrix} A_{(N-1)} \\ B_{(N-1)} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Onde $m[N]_{(r=r_N)}$ é a Eq. 17, e $m[N-1]_{(r=r_N)}$ é a Eq. 16, da seguinte forma:

$$\left(m[N]_{(r=r_N)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} H_0{}^{(1)}(k_N r_N) & H_0{}^{(2)}(k_N r_N) \\ \frac{j\eta_N{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}} H_1{}^{(1)}(k_N r_N) & \frac{j\eta_N{}^2}{Z_0\sqrt{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}} H_1{}^{(2)}(k_N r_N) \end{bmatrix}^{-1}.$$

onde:

$$\left(m[N]_{(r=r_N)}\right)^{-1} = \left(\frac{-j\pi(k_N r_N)}{4}\right) \begin{bmatrix} H_1{}^{(2)}(k_N r_N) & \frac{jZ_0\sqrt{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}{\eta_N{}^2} H_0{}^{(2)}(k_N r_N) \\ -H_1{}^{(1)}(k_N r_N) & \frac{-jZ_0\sqrt{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}{\eta_N{}^2} H_0{}^{(1)}(k_N r_N) \end{bmatrix} \tag{28}$$

Na Eq. 28, usou-se o Wronskian W(H_0,H_1).

$$H_{V+1}{}^{(1)}(z)H_V{}^{(2)}(z) - H_{V+1}{}^{(2)}(z)H_V{}^{(1)}(z) = -\frac{4j}{\pi z}$$

$$H_1{}^{(1)}(z)H_0{}^{(2)}(z) - H_1{}^{(2)}(z)H_0{}^{(1)}(z) = -\frac{4j}{\pi z}$$

Então: $\frac{1}{H_1{}^{(1)}(Z)H_0{}^{(2)}(Z)-H_0{}^{(1)}(Z)H_1{}^{(2)}(Z)} = \frac{\pi z}{4j} = -\frac{j\pi z}{4}$

Substituindo as Eqs. 28 e 16 na Eq. 20, tem-se a matriz de transmissão em r = r_N.

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \left(m[N,(N-1)]_{(r=r_N)}\right) \begin{pmatrix} A_{(N-1)} \\ B_{(N-1)} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Para simplificar a representação da matriz de transmissão, Eq. 29, definem-se:

$$\begin{aligned} q &= (N-1) & \eta_q &= \eta_{(N-1)} \\ J_{0q} &= J_0(k_{N-1}r_N) & J_{1q} &= J_1(k_{N-1}, r_N) \\ Y_{0q} &= Y_0(k_{N-1}, r_N) & Y_{1q} &= Y_1(k_{N-1}, r_N) \end{aligned} \tag{30}$$

$$H_{0N}{}^{(1)} = H_0{}^{(1)}(k_N, r_N) \qquad H_{1N}{}^{(1)} = H_1{}^{(1)}(k_N, r_N)$$
$$H_{0N}{}^{(2)} = H_0{}^{(2)}(k_N, r_N) \qquad H_{1N}{}^{(2)} = H_1{}^{(2)}(k_N, r_N)$$

Pelas Eqs. 27 e 29, temos:

$$\left(m[N,(N-1)]_{(r=r_N)}\right) = \left(m[N]_{(r=r_N)}\right)^{-1} m[N-1]_{(r=r_N)} \tag{31}$$

Substituindo as Eq. 28 e 16 na Eq. 31, e considerando as notações abreviadas nas Eqs. 30:

$$\left(m[N,N-1]_{(r=r_N)}\right) = \left(\frac{-j\pi(k_N r_N)}{4}\right)\begin{bmatrix} H_{1N}{}^{(2)} & \dfrac{jZ_0\sqrt{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}{\eta_N{}^2}H_{0N}{}^{(2)} \\ -H_{1N}{}^{(1)} & \dfrac{-jZ_0\sqrt{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}{\eta_N{}^2}H_{0N}{}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{0q} & Y_{0q} \\ \left(\dfrac{j(\eta_{N-1})^2 J_{1q}}{Z_0\sqrt{(\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}\right) & \left(\dfrac{j(\eta_{N-1})^2 Y_{1q}}{Z_0\sqrt{(\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}\right) \end{bmatrix} \tag{32}$$

Portanto, a matriz de transmissão $m[N,(N-1)]_{(r=r_N)}$, na Eq. 29, é escrita da seguinte forma:

$$[N,(N-1)]_{(r=r_N)} = \left(\frac{-j\pi(k_N r_N)}{4}\right)\begin{bmatrix} J_{0q}H_{1N}{}^{(2)} - \left(\dfrac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\dfrac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 J_{1q}H_{0N}{}^{(2)} & Y_{0q}H_{1N}{}^{(2)} - \left(\dfrac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\dfrac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 Y_{1q}H_{0N}{}^{(2)} \\ -J_{0q}H_{1N}{}^{(1)} + \left(\dfrac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\dfrac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 J_{1q}H_{0N}{}^{(1)} & -Y_{0q}H_{1N}{}^{(1)} + \left(\dfrac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\dfrac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 Y_{1q}H_{0N}{}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Onde: q = (N – 1) e $\left(\boldsymbol{\frac{k_N}{k_{N-1}}}\right) = \sqrt{\boldsymbol{\frac{(\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2)}{(\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2)}}}$

A matriz de transmissão é reescrita mais detalhadamente:

$$\left(m[N,(N-1)]_{(r=r_N)}\right) = \left(\frac{-j\pi(k_N r_N)}{4}\right)\begin{bmatrix} m_{11}(r_N) & m_{12}(r_N) \\ m_{21}(r_N) & m_{22}(r_N) \end{bmatrix} \tag{34}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} m_{11}(r_N) &= J_0(k_{N-1}, r_N)H_1{}^{(2)}(k_N, r_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 J_1(k_{N-1}, r_N)H_0{}^{(2)}(k_N, r_N) \\ m_{12}(r_N) &= Y_0(k_{N-1}, r_N)H_1{}^{(2)}(k_N, r_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 Y_1(k_{N-1}, r_N)H_0{}^{(2)}(k_N, r_N) \end{aligned} \tag{35}$$

$$m_{21}(r_N) = -J_0(k_{N-1}, r_N)H_1{}^{(1)}(k_N, r_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 J_1(k_{N-1}, r_N)H_0{}^{(1)}(k_N, r_N)$$

$$m_{22}(r_N) = -Y_0(k_{N-1}, r_N)H_1{}^{(1)}(k_N, r_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 Y_1(k_{N-1}, r_N)H_0{}^{(1)}(k_N, r_N)$$

2.1.4 Equação de Dispersão dos Modos TM_{0m}

A equação de dispersão dos modos TM_{0m} é obtida relacionando-se os coeficientes da região externa (A_N, B_N) aos do núcleo (A_0, B_0).

Consideremos uma BF constituída por N regiões, mais o núcleo (*p* = 0), portanto N fronteiras, tal como a Figura 2-2. A interdependência entre os coeficientes dos campos da região externa (A_N, B_N) e os do núcleo (A_0, B_0) é estabelecida pelos produtos sequenciais das matrizes de transmissão da fronteira externa (r_N) até a que limita o núcleo (r_1), ou seja:

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = m[0, N]\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Onde:

$$m[0, N] = m[N, (N-1)]_{(r=r_N)} \cdot m[(N-1), (N-2)]_{(r=r_{N-1})} \dots m[2,1]_{(r=r_2)} \cdot m[1,0]_{(r=r_1)} \tag{37}$$

A matriz $m[N, (N-1)]_{(r=r_N)}$ é calculada pelas Eqs. 34 e 35. As demais são obtidas pelas Eqs. 24 e 25.

A Eq. 37 estabelece a relação entre os coeficientes dos campos das regiões limítrofes da BF (externa e núcleo). Substituindo-a na Eq. 36, tem-se:

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m^{TM}(1,1) & m^{TM}(1,2) \\ m^{TM}(2,1) & m^{TM}(2,2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

A Eq. 38 se desacopla, já que, na região externa, $A_N = 0$, e no núcleo, $B_0 = 0$.

Considerando-se estas hipóteses na Eq.38, obtém-se duas expressões independentes:

$$0 = m^{TM}(1,1)A_0 \tag{39}$$

$$B_N = m^{TM}(2,1)A_0 \tag{40}$$

A Eq. 39 é a equação de dispersão dos modos TM_{0m}, pois sua solução exige o cálculo da função F^{TM}, descrita abaixo:

$$m^{TM} = 0 \quad \Rightarrow \quad F^{TM}\big(k_0, \eta_{ef}(k_0)\big) = 0 \tag{41}$$

2.1.5 Representação das Componentes (E_z,H_φ) do Modo TM_{0m}

As componentes (E_z,H_ϕ) exigem muita atenção na análise das BF, pois estas são as responsáveis pelo vetor de Poynting radial. A dissipação da potência que flui ao longo da estrutura relaciona-se à constante de atenuação pelo termo imaginário do índice efetivo dos respectivos modos TM_{0m}, conforme descrito na expressão abaixo:

$$\eta_{ef} = Real\big(\eta_{ef}\big) - jImag\big(\eta_{ef}\big)$$

A representação das referidas componentes em função do raio transversal da BF são descritas pelas Eqs. 13, considerando que $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$.

Para a região do núcleo (0 ≤ r ≤ $\boldsymbol{r_1}$, ℓ = 0):

$$E_{Z0}(r,z) = A_0 J_0(k_0 r) e^{-j\beta z}$$

$$H_{\varphi 0}(r,z) = \left(\frac{{\eta_0}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_0}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}}\right) A_0 J_1(k_0 r) e^{-j\left(\beta z - \frac{\pi}{2}\right)} \tag{42}$$

Para as regiões internas à BF ($\boldsymbol{r_1}$ ≤ r ≤ $\boldsymbol{r_N}$, 1 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$E_{Zl}(r,z) = \big(A_l J_0(k_l r) + B_l Y_0(k_l r)\big) e^{-j\beta z} \tag{43}$$

$$H_{\varphi l}(r,z) = \left(\frac{{\eta_l}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}}\right)\left(A_l J_1(k_l r) + B_l Y_1(k_l r)\right)e^{-j\left(\beta z - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Para as regiões externas (r ≥ $\boldsymbol{r_N}$, ℓ = N, A_N = 0):

$$E_{ZN}(r,z) = B_N {H_0}^{(2)}(k_N r)e^{-j\beta z}$$

$$H_{\varphi N}(r,z) = \left(\frac{{\eta_N}^2}{Z_0\sqrt{\left({\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2\right)}}\right) B_N {H_1}^{(2)}(k_N r)e^{-j\left(\beta z - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (44)$$

Desta forma, a representação das respectivas componentes (E_z,H_ϕ) são descritos a partir do cálculo dos coeficientes (A_ℓ, B_ℓ) das regiões explicitadas nas Eqs. 42, 43 e 44.

Há dois enfoques para se calcular estes coeficientes. Estipula-se, no núcleo, A_0 = 1, caracterizando gráficos normalizados.

2.1.5.1 Primeiro Enfoque

Parte-se do núcleo em direção à região externa, seguindo os passos apresentados a seguir.

- Primeiro Passo: No núcleo (0 ≤ r ≤$\boldsymbol{r_1}$, A_0 = 1, B_0 = 0), as componentes (E_z,H_ϕ) são descritas pelas Eqs. 42.
- Segundo Passo: Nas regiões fronteiriças ao núcleo ($\boldsymbol{r_1}$≤ r ≤ $\boldsymbol{r_2}$, ℓ = 1), os coeficientes da região contígua ao núcleo são obtidos pela matriz de transmissão da fronteira r = r_1 (Eqs. 22, 24 e 25) e pelos coeficientes do núcleo (A_0 = 1, B_0 = 0), da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = m^{TM}[(l=1),(l=0)]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Os coeficientes (A_1, B_1) são calculados, e as componentes (E_{z1},$H_{\phi 1}$) em ($\boldsymbol{r_1}$ ≤ r ≤ $\boldsymbol{r_2}$) serão descritas pelas Eqs. 43.

- Terceiro Passo: Nas regiões Internas à BF (($\boldsymbol{r_2}$≤ r ≤$\boldsymbol{r_{N-1}}$), 2 ≤ ℓ ≤ (N - 1)), os coeficientes (A_ℓ, B_ℓ) são calculados sequencialmente pelas Eqs. 22, 24 e 25, e os coeficientes da região anterior ($A_{\ell-1}$, $B_{\ell-1}$) serão dados por:

$$\begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = m^{TM}[(l),(l-1)]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} A_{l-1} \\ B_{l-1} \end{pmatrix}$$

Conhecendo-se (A_ℓ, B_ℓ), as componentes ($E_{z\ell}$,$H_{\phi\ell}$) em ($\boldsymbol{r_l}$ ≤ r ≤ $\boldsymbol{r_{l+1}}$) são descritas graficamente pelas Eqs. 43.

- Quarto Passo: Nas regiões externas (r ≥ $\boldsymbol{r_N}$, ℓ = N, A_N = 0), as componentes (E_{zN},$H_{\phi N}$) em r ≥ r_N são descritas graficamente pelas Eqs. 44, a partir do cálculo do coeficiente B_N, pois A_N = 0. O coeficiente é encontrado pela matriz de transmissão $m^{TM}[(N),(N-1)]_{(r=r_N)}$, nas Eqs. 29, 34 e 35, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ B_N \end{pmatrix} = m^{TM}[(N),(N-1)]_{(r=r_N)} \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \end{pmatrix}$$

2.1.5.2Segundo Enfoque

Parte-se da região externa em direção ao núcleo.

Pela hipótese da normalização dos gráficos, A_0 = 1, e pela Eq. 40, tem-se o coeficiente da região externa: $B_N = m^{TM}(2,1)$.

As componentes (E_{zN},$H_{\phi N}$) são descritas pela Eq. 44.

Na região fronteiriça à região externa (($\boldsymbol{r_{N-1}}$ ≤ r ≤ $\boldsymbol{r_N}$), ℓ = (N - 1)), utilizando o mesmo raciocínio do primeiro enfoque, as componentes (E_z,H_ϕ) são descritas pelas Eqs. 43 e 44, e os coeficientes são descritos pela inversa da matriz de transmissão $m^{TM}[(N),(N-1)]_{(r=r_N)}$, nas Eqs. 22, 24 e 25. Ou seja:

$$\begin{pmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \end{pmatrix} = \left[m^{TM}[(N),(N-1)]_{(r=r_N)} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_N \end{pmatrix}$$

E assim sequencialmente até a fronteira do núcleo ($r \geq r_1$).

Este enfoque exige que, em cada fronteira, a inversa da matriz de transmissão seja conhecida.

2.2 Modo TE_{0m}

2.2.1 Formalismo do Modo TE_{0m}

A análise do modo TE_{0m} é dual a do modo TM_{0m}. Portanto, a análise do respectivo modo será efetuada, nesta seção, aplicando-se o Teorema da Dualidade ao formalismo do modo TM_{0m}, desenvolvido na seção anterior.

Pelo Teorema da Dualidade, os dois modos se relacionam da seguinte forma:

Modo TM_{0m}	$\xrightarrow{Dualidade}$	Modo TE_{0m}
$\vec{H}$	$\longrightarrow$	$\vec{E}$
$\vec{E}$	$\longrightarrow$	$-\vec{H}$
μ	$\longrightarrow$	ϵ
ϵ	$\longrightarrow$	μ
Z_0	$\longrightarrow$	$Y_0 = {}^{1}/_{Z_0}$
β	$\longrightarrow$	β
$k_l = K_{Tl}$	$\longrightarrow$	$k_l = K_{Tl}$
(A_l, B_l)	$\longrightarrow$	$(-C_l, -D_l)$

Aplicando-se o Teorema da Dualidade na Eq. 10, têm-se as equações básicas da formulação do modo TE_{0m}, ($H_z \neq 0$, $E_z = 0$), vide Figura 2-1.

Para as regiões internas ($0 \leq \ell \leq (N-1)$):

$$H_{Zl}(r,z) = \left(C_l J_0(k_{Tl} r) + D_l Y_0(k_{Tl} r)\right) e^{-j\beta z} \tag{45.1}$$

No núcleo, ℓ = 0, sendo implícito D_0 = 0.

Para a região externa (ℓ = N):

$$H_{ZN}(r,z) = \left(C_N {H_0}^{(1)}(k_{TN} r) + D_N {H_0}^{(2)}(k_{TN} r)\right) e^{-j\beta z} \tag{45.2}$$

Sendo implícito C_N = 0.

$$\vec{H}_{Tl}(r,z) = \frac{-j\beta_{0m}}{{k_l}^2} \nabla_T H_{Zl}(r,z) \tag{45.3}$$

$$\vec{E}_{Tl}(r,z) = \frac{jw\mu_0}{{k_l}^2} (\vec{z} \wedge \nabla_T H_{Zl}) \tag{45.4}$$

Onde: $k_l = k_{Tl} = k_0\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}$ e $\nabla^2 H_{Zl}(r,z) + {\mathrm{k}_l}^2 H_{Zl}(r,z) = 0$.

Sendo ℓ = 0, 1, 2, 3, ... , N.

2.2.2 Campos Eletromagnéticos do Modo TE_{0m}

As componentes dos campos elétrico e magnético do modo TE_{0m} são duais das do modo TM_{0m}, e portanto, aplicando o Teorema da Dualidade nas Eqs. 11 e 12, têm-se as equações básicas da formulação do respectivo modo, ou seja:

Para as regiões internas (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)), (ℓ = 0, núcleo da BF, implícito D_0 = 0)

$$\begin{gathered} H_{Zl}(r,z) = \left(C_l J_0(k_l r) + D_l Y_0(k_l r)\right) e^{-j\beta z} \\ H_{rl}(r,z) = \frac{j\beta}{k_l}\left(C_l J_1(k_l r) + D_l Y_1(k_l r)\right) e^{-j\beta z} \\ H_{\varphi l}(r,z) = 0 \end{gathered} \tag{46.1}$$

$$E_{zl}(r,z) = 0$$
$$E_{rl}(r,z) = 0$$
$$E_{\varphi l}(r,z) = \frac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}}\left(C_l J_1(k_l r) + D_l Y_1(k_l r)\right)e^{-j\beta z} \tag{46.2}$$

Para a região externa (ℓ = N), sendo implícito $C_N = 0$:

$$H_{ZN}(r,z) = \left(C_N {H_0}^{(1)}(k_N r) + D_N {H_0}^{(2)}(k_N r)\right)e^{-j\beta z}$$
$$H_{rN}(r,z) = \frac{j\beta}{k_N}\left(C_N {H_1}^{(1)}(k_N r) + D_N {H_1}^{(2)}(k_N r)\right)e^{-j\beta z} \tag{46.3}$$
$$E_{\varphi N}(r,z) = \frac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}}\left(C_N {H_1}^{(1)}(k_N r) + D_N {H_1}^{(2)}(k_N r)\right)e^{-j\beta z}$$

As componentes eletromagnéticas que satisfazem as condições nas respectivas fronteiras (H_z, E_ϕ) são, pela Eq. 46, expressas matricialmente da seguinte forma:

Para as regiões internas ($0 \leq \ell \leq (N-1)$):

$$\begin{pmatrix} H_{zl} \\ E_{\varphi l} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_0(k_l r) & Y_0(k_l r) \\ \frac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} J_1(k_l r) & \frac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} Y_1(k_l r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_l \\ D_l \end{bmatrix} \tag{47}$$

Para a região externa (ℓ = N):

$$\begin{pmatrix} E_{zN} \\ H_{\varphi N} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} {H_0}^{(1)}(k_N r) & {H_0}^{(2)}(k_N r) \\ \frac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}} {H_1}^{(1)}(k_N r) & \frac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}} {H_1}^{(2)}(k_N r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_N \\ D_N \end{bmatrix} \tag{48}$$

Observa-se que $\sqrt{\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2} = \left(\frac{K_{Tl}}{K_0}\right)$ é invariante na dualidade.

Nas Eqs. 47 e 48, o fator $\boldsymbol{e^{-j\beta z}}$ foi omitido.

$\overline{m}[l]_r$é a matriz referente à Eq. 47 (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$\begin{pmatrix} E_{zl} \\ H_{\varphi l} \end{pmatrix} = \overline{m}[l]_r \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}$$

$\overline{m}[N]_r$é a matriz referente à Eq. 48 (ℓ = N):

$$\begin{pmatrix} E_{zN} \\ H_{\varphi N} \end{pmatrix} = \overline{m}[N]_r \begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix}$$

2.2.3 Matrizes de Transmissão

Aplicando as condições que os campos elétrico e magnético tem que satisfazer, nas respectivas fronteiras, a equação dual da Eq. 18 será:

$$\begin{pmatrix} H_{z(l-1)} \\ E_{\varphi(l-1)} \end{pmatrix}_{(r=r_l)} = \begin{pmatrix} H_{zl} \\ E_{\varphi l} \end{pmatrix}_{(r=r_l)} \tag{49}$$

A seguir, as matrizes de transmissão de cada região constituinte da BF são calculadas pelo Teorema da Dualidade.

2.2.3.1Fronteiras Internas ($r_1 \leq r_l \leq r_{(n-1)}$)

Pela Eq. 20:

$$\begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} = \left(\overline{m}[l]_{(r=r_l)}\right)^{-1} \overline{m}[l-1]_{(r=r_l)} \begin{pmatrix} C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{pmatrix} \tag{50}$$

Onde:

$$\left(\overline{m}[l]_{(r=r_l)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} J_0(k_l r_l) & Y_0(k_l r_l) \\ \dfrac{-jZ_0 J_1(k_l r_l)}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} & \dfrac{-jZ_0 Y_1(k_l r_l)}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} \end{bmatrix}^{-1} = \left(\frac{-\pi k_l r_l}{2}\right) \begin{bmatrix} Y_1(k_l r_l) & \dfrac{-j\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2} Y_0(k_l r_l)}{Z_0} \\ -J_1(k_l r_l) & \dfrac{j\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2} J_0(k_l r_l)}{Z_0} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Na Eq. 51, fez-se uso do Wronskian $J_1(z)Y_0(z) - J_0(z)Y_1(z) = \frac{2}{\pi z}$:

$$\overline{m}[l-1]_{(r=r_l)} = \begin{bmatrix} J_0(k_{l-1} r_l) & Y_0(k_{l-1} r_l) \\ \dfrac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_{l-1}}^2 - {\eta_{ef}}^2}} J_1(k_{l-1} r_l) & \dfrac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_{l-1}}^2 - {\eta_{ef}}^2}} Y_1(k_{l-1} r_l) \end{bmatrix} \quad (52)$$

Substituindo as Eqs. 51 e 52 na Eq. 50, obtém-se as matrizes de transmissão referentes às respectivas fronteiras internas:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} = \left(\overline{m}[l,(l-1)]_{(r=r_l)}\right) \begin{pmatrix} C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{pmatrix} \\ \overline{m}[l,(l-1)]_{(r=r_l)} = \left(\overline{m}[l]_{(r=r_l)}\right)^{-1} \overline{m}[\,l-1]_{(r=r_l)} \end{gathered} \quad (53)$$

Para simplificar a escrita da matriz de transmissão na Eq. 53, são definidos os seguintes parâmetros:

$$\delta = (l-1) \qquad \eta_\delta = \eta_{(l-1)}$$

$$J_{0\delta} = J_0(k_\delta r_l) \qquad -Y_{0\delta} = Y_0(k_\delta, r_l)$$

$$J_{1l} = J_1(k_l, r_l) \qquad Y_{1l} = Y_1(k_l, r_l)$$

Então:

$$\overline{m}[l,\delta]_{(r=r_l)} = \left(\frac{-\pi k_l r_l}{2}\right)\begin{bmatrix} J_{0\delta}Y_{1l} - \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)J_{1\delta}Y_{0l} & J_{0\delta}Y_{1l} - \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)Y_{1\delta}Y_{0l} \\ -J_{0\delta}Y_{1l} + \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)J_{1\delta}J_{0l} & -Y_{0\delta}J_{1l} + \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right)Y_{1\delta}J_{0l} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Observa-se que a matriz de transmissão do modo TE_{0m} é a matriz de transmissão do modo TM_{0m} sob o Teorema da Dualidade.

Eq. 23(modo TM_{0m}) $\overrightarrow{Dualidade}$ Eq. 54 (modo TE_{0m})

$$\left(\frac{k_l}{k_\delta}\right) \longrightarrow \left(\frac{k_l}{k_\delta}\right) = \sqrt{\frac{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}{{\eta_{l-1}}^2 - {\eta_{ef}}^2}}$$

$$\frac{\epsilon_{rl}}{\epsilon_{r(l-1)}} = \left(\frac{\eta_l}{\eta_{l-1}}\right)^2 \longrightarrow \left(\frac{\eta_l}{\eta_{l-1}}\right)^2 = \left(\frac{\mu_{rl}}{\mu_{r(l-1)}}\right) = 1$$

Como pode ser verificado, o fator $\left(\frac{k_l}{k_\delta}\right) = \sqrt{\frac{{\eta_l}^2-{\eta_{ef}}^2}{{\eta_{l-1}}^2-{\eta_{ef}}^2}}$ é invariante na aplicação do Teorema da Dualidade.

A matriz de transmissão (Eq. 54) é reescrita mais detalhadamente da seguinte forma:

$$\overline{m}[l,(l-1)]_{(r=r_l)} = \left(\frac{-\pi k_l r_l}{2}\right)\begin{bmatrix} \overline{m_{11}}_{(r_l)} & \overline{m_{12}}_{(r_l)} \\ \overline{m_{21}}_{(r_l)} & \overline{m_{22}}_{(r_l)} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \overline{m_{11}}(r_l) &= J_0(k_{l-1},r_l)Y_1(k_l,r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)J_1(k_{l-1},r_l)Y_0(k_l,r_l) \\ \overline{m_{12}}(r_l) &= Y_0(k_{l-1},r_l)Y_1(k_l,r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)Y_1(k_{l-1},r_l)Y_0(k_l,r_l) \\ \overline{m_{21}}(r_l) &= -J_0(k_{l-1},r_l)J_1(k_l,r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)J_1(k_{l-1},r_l)J_0(k_l,r_l) \\ \overline{m_{22}}(r_l) &= -Y_0(k_{l-1},r_l)J_1(k_l,r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)Y_1(k_{l-1},r_l)J_0(k_l,r_l) \end{aligned} \quad (56)$$

2.2.3.2Fronteira Externa ($r_1 = r_N$)

A matriz de transmissão referente à fronteira externa, $r = r_N$, relaciona os coeficientes dos campos da região ℓ = N com os da última célula de Bragg, ℓ = (N-1).

O dual da Eq. 26 exprime a imposição das condições da fronteira, $r = r_N$, nos campos eletromagnéticos de ambas as regiões:

$$\begin{pmatrix} H_{zN} \\ E_{\varphi N} \end{pmatrix}_{(r=r_N)} = \begin{pmatrix} H_{z(N-1)} \\ E_{\varphi(N-1)} \end{pmatrix}_{(r=r_N)} \tag{57}$$

Os coeficientes dos campos das referidas regiões se relacionam pela Eq. 50:

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = \left(\overline{m}[N]_{(r=r_N)}\right)^{-1} \overline{m}[N-1]_{(r=r_N)} \begin{pmatrix} C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{pmatrix} \tag{58}$$

Através da Eq. 52, temos:

$$\overline{m}[N-1]_{(r=r_N)} = \begin{bmatrix} J_0(k_{N-1}r_N) & Y_0(k_{N-1}r_N) \\ \dfrac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_{(N-1)}}^2 - {\eta_{ef}}^2}} J_1(k_{N-1}r_N) & \dfrac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_{(N-1)}}^2 - {\eta_{ef}}^2}} Y_1(k_{N-1}r_N) \end{bmatrix} \tag{59}$$

E através da Eq. 48, temos:

$$\overline{m}[N]_{(r=r_l)} = \begin{bmatrix} {H_0}^{(1)}(k_N r_l) & {H_0}^{(2)}(k_N r_l) \\ \dfrac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}} {H_1}^{(1)}(k_N r_l) & \dfrac{-jZ_0}{\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}} {H_1}^{(2)}(k_N r_l) \end{bmatrix} \tag{60}$$

Cuja inversa é dada por:

$$\overline{m}[N]^{-1} = \left(\frac{-j\pi k_N r_N}{4}\right) \begin{bmatrix} {H_1}^{(2)}(k_N r_N) & \dfrac{-j\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}}{Z_0} {H_0}^{(2)}(k_N r_N) \\ -{H_1}^{(1)}(k_N r_N) & \dfrac{j\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}}{Z_0} {H_0}^{(1)}(k_N r_N) \end{bmatrix} \tag{61}$$

Na Eq. 61 foi utilizado o Wronskian: $H_0{}^{(1)}(z)H_1{}^{(2)}(z) - H_1{}^{(1)}(z)H_0{}^{(2)}(z) = \frac{-j\pi z}{4}$

Substituindo as Eqs. 60 e 61 na Eq. 58, tem-se a matriz de transmissão da fronteira externa, r = r_N, entre as regiões (N) e (N-1):

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = \left(\overline{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)}\right)\begin{pmatrix} C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{pmatrix} \tag{62}$$

Para simplificar a escritura da matriz de transmissão, da Eq. 62, usam-se os parâmetros abreviados definidos nas Eqs. 30.

Através da Eq. 58:

$$\overline{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} = \left(\overline{m}[N]_{(r=r_N)}\right)^{-1}\overline{m}[N-1]_{(r=r_N)} \tag{63}$$

Substituindo as matrizes das Eqs. 59 e 61 na Eq. 63, a matriz de transmissão é expressa pelos parâmetros abreviados das Eqs. 30, que definem-se pelo produto de duas matrizes:

$$\overline{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} = \left(\frac{-j\pi k_N r_N}{4}\right)\begin{bmatrix} H_{1N}{}^{(2)} & \frac{-j\sqrt{\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2}}{Z_0}H_{0N}{}^{(2)} \\ -H_{1N}{}^{(1)} & \frac{j\sqrt{\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2}}{Z_0}H_{0N}{}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{J_{0q}}{-jZ_0} & \frac{Y_{0q}}{-jZ_0} \\ \frac{}{\sqrt{\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2}}J_{1q} & \frac{}{\sqrt{\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2}}Y_{1q} \end{bmatrix} \tag{64}$$

Onde $q = (N-1)$

A Eq. 64 se escreve na notação abreviada:

$$\overline{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} = \left(\frac{-j\pi k_N r_N}{4}\right)\begin{bmatrix} J_{0q}H_{1N}{}^{(2)} - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)J_{1q}H_{0N}{}^{(2)} & Y_{0q}H_{1N}{}^{(2)} - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)Y_{1q}H_{0N}{}^{(2)} \\ -J_{0q}H_{1N}{}^{(1)} + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)J_{1q}H_{0N}{}^{(1)} & -Y_{0q}H_{1N}{}^{(1)} + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)Y_{1q}H_{0N}{}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{65}$$

Onde $\left(\frac{\boldsymbol{k_N}}{\boldsymbol{k_{N-1}}}\right) = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2}}{\boldsymbol{\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2}}}$.

A matriz de transmissão, Eq. 65, é reescrita mais detalhadamente da seguinte forma:

$$\overline{m}[N,(N-1)] = \left(\frac{-j\pi k_N r_N}{4}\right)\begin{bmatrix}\overline{m}_{11}(r_N) & \overline{m}_{12}(r_N)\\ \overline{m}_{21}(r_N) & \overline{m}_{22}(r_N)\end{bmatrix} \tag{66}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\overline{m_{11}}(r_N) &= J_0(k_{N-1},r_N)H_1{}^{(2)}(k_N,r_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)J_1(k_{N-1},r_N)H_0{}^{(2)}(k_N,r_N)\\
\overline{m_{12}}(r_N) &= Y_0(k_{N-1},r_N)H_1{}^{(2)}(k_N,r_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)Y_1(k_{N-1},r_N)H_0{}^{(2)}(k_N,r_N)\\
\overline{m_{21}}(r_N) &= -J_0(k_{N-1},r_N)H_1{}^{(1)}(k_N,r_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)J_1(k_{N-1},r_N)H_0{}^{(1)}(k_N,r_N)\\
\overline{m_{22}}(r_N) &= -Y_0(k_{N-1},r_N)H_1{}^{(1)}(k_N,r_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)Y_1(k_{N-1},r_N)H_0{}^{(1)}(k_N,r_N)
\end{aligned} \tag{67}$$

Observa-se que a matriz de transmissão do modo TE_{0m}, em $r = r_N$ (Eq. 67), é a matriz de transmissão do modo TM_{0m} (Eq. 35), sob o Teorema da Dualidade.

O fator $\left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right) = \left(\frac{k_{T(N)}}{k_{T(N-1)}}\right) = \sqrt{\frac{\eta_N{}^2-\eta_{ef}{}^2}{\eta_{N-1}{}^2-\eta_{ef}{}^2}}$ é invariante na aplicação da dualidade.

2.2.4 Equação de Dispersão dos Modos TE_{0m}

A equação de dispersão do modo TE_{0m} é obtida com o mesmo procedimento usado no cálculo da dispersão do modo TM_{0m}, Eqs. 39 e 41.

Sendo assim, calculam-se as interdependências entre os coeficientes da região externa e os do núcleo, pelos produtos sequenciais das matrizes de transmissão da fronteira externa (r_N) com a que limita o núcleo (r_1):

$$\begin{pmatrix}C_N\\ D_N\end{pmatrix} = \overline{m}[0,N]\begin{pmatrix}C_0\\ D_0\end{pmatrix} \tag{68}$$

Onde:

$$\overline{m}[0,N] = \overline{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)}\overline{m}[(N-1),(N-2)]_{(r=r_{N-1})}\ldots\overline{m}[2,1]_{(r=r_2)}\overline{m}[1,0]_{(r=r_1)} \tag{69}$$

A matriz $\overline{m}[N,(N-1)]$ é calculada pelas Eqs. 66 e 67. As demais são obtidas pelas Eqs. 55 e 56.

A Eq. 69 estabelece a relação entre os coeficientes dos campos das regiões limítrofes da BF. Substituindo-a na Eq. 68:

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{m}^{TE}(1,1) & \overline{m}^{TE}(1,2) \\ \overline{m}^{TE}(2,1) & \overline{m}^{TE}(2,2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

A Eq. 70 se desacopla, já que, na região externa, $C_N = 0$, e no núcleo, $D_0 = 0$. Este fato é comprovado através das Eqs. 45 ou 46.

Estas duas hipóteses, levadas à Eq. 70, derivam duas equações independentes:

$$0 = \overline{m}^{TE}[1,1]C_0 \tag{71}$$

$$D_N = \overline{m}^{TE}[2,1]C_0 \tag{72}$$

A Eq. 71 é a equação de dispersão do modo TE_{0m}, a qual soluciona-se por meio da resolução da função F^{TE}, conforme apresentado abaixo:

$$\overline{m}^{TE} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F^{TE}\left(k_0, \eta_{ef}(k_0)\right) = 0 \tag{73}$$

A Eq. 72 é redundante, pois o cálculo do coeficiente D_N pode ser efetuado admitindo-se $C_0 = 1$ (campos normalizados), pelos produtos sequenciais das matrizes de transmissão da região externa em direção ao núcleo, como estabelecido no segundo enfoque do item 2.1.5.2.

2.2.5 Representação das Componentes (H_z, E_φ) do modo TE_{0m}

A representação das respectivas componentes (H_z, E_ϕ) em função do raio transversal da BF são descritos pelas Eqs. 46, considerando $-\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Para a região do núcleo ($0 \leq r \leq r_1$), ($\ell = 0$), ($D_0 = 0$):

$$H_{z_0}(r,z) = C_0 J_0(k_0 r) e^{-j\beta z}$$
$$E_{\varphi_0}(r,z) = \frac{Z_0}{\sqrt{{\eta_0}^2 - {\eta_{ef}}^2}} C_0 J_1(k_0 r) e^{-j\left(\beta z + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{74}$$

Para as regiões internas à BF ($r_1 \leq r \leq r_N$), ($1 \leq \ell \leq (N-1)$):

$$H_{z_l}(r,z) = \left(C_l J_0(k_l r) + D_l Y_0(k_l r)\right) e^{-j\beta z}$$
$$E_{\varphi_l}(r,z) = \frac{Z_0}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} \left(C_l J_1(k_l r) + D_l Y_1(k_l r)\right) e^{-j\left(\beta z + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{75}$$

Para as regiões externas ($r \geq r_N$), ($\ell = N$), ($C_N = 0$):

$$H_{z_N}(r,z) = D_N {H_0}^{(2)}(k_N r) e^{-j\beta z}$$
$$E_{\varphi_N}(r,z) = \frac{Z_0}{\sqrt{{\eta_N}^2 - {\eta_{ef}}^2}} D_N {H_1}^{(2)}(k_N r) e^{-j\left(\beta z + \frac{\pi}{2}\right)} \tag{76}$$

De acordo com o item 2.1.5, e considerando a menor complexidade nos desenvolvimentos matemáticos, a representação das componentes transversais do modo TE_{0m} serão apenas descritos pelo primeiro enfoque: Partindo-se do núcleo em direção à região externa.

As descrições gráficas das respectivas componentes (H_z, E_ϕ) seguem os mesmos passos compreendidos no item 2.1.5, ou seja:

- Primeiro Passo: No núcleo ($0 \leq r \leq r_1$, $C_0 = 1$, $D_0 = 0$), as componentes ($\boldsymbol{H_{z_0}}, \boldsymbol{E_{\varphi_0}}$) são descritas pelas Eqs. 74.
- Segundo Passo: Nas regiões fronteiriças ao núcleo ($r_1 \leq r \leq r_2$, $\ell = 1$), os coeficientes da região contígua ao núcleo são obtidos pela matriz de transmissão da fronteira $r = r_1$ (Eqs. 53, 55 e 56) e pelos coeficientes do núcleo ($C_0 = 1$, $D_0 = 0$). Conhecendo-se os coeficientes (C_1, D_1), as componentes ($\boldsymbol{H_{z_1}}, \boldsymbol{E_{\varphi_1}}$) em ($r_1 \leq r \leq r_2$) serão descritas graficamente pelas Eqs. 75.
- Terceiro Passo: Nas regiões Internas à BF (($r_2 \leq r \leq r_{N-1}$), $2 \leq \ell \leq (N - 1)$), os coeficientes (C_ℓ, D_ℓ) são calculados sequencialmente pelas Eqs. 53, 55 e 56, e pelos coeficientes da região anterior ($C_{\ell-1}$, $D_{\ell-1}$):

$$\begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} = \overline{m}[(l),(l-1)] \begin{pmatrix} C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{pmatrix}$$

  Conhecendo (C_ℓ, D_ℓ), as componentes ($E_{z\ell}$,$H_{\phi\ell}$) em ($r_\ell \leq r \leq r_{\ell+1}$) são descritas graficamente pelas Eqs. 75.

- Quarto Passo: Nas regiões externas ($r \geq \boldsymbol{r_N}$, $\ell = N$, $C_N = 0$), as componentes (E_{zN},$H_{\phi N}$) em $r \geq r_N$ são descritas graficamente pelas Eqs. 76, já que $C_N = 0$, empreendido pela matriz de transmissão $\overline{m}[(N),(N-1)]_{(r=r_N)}$, nas Eqs. 62, 66 e 67, da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ D_N \end{pmatrix} = \overline{m}[(N),(N-1)]_{(r=r_N)} \begin{pmatrix} C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{pmatrix}$$

2.3 Modos Híbridos (HEM_{nm}, $n \neq 0$)

Os modos híbridos são aqueles excitados com ambas as componentes longitudinais ($E_z \neq 0$ e $H_z \neq 0$).

Como os meios constituintes da estrutura são lineares, é válido o princípio da superposição. Portanto, o formalismo dos modos HEM_{nm} se resume na combinação linear dos modos TE e TM (HEM = TE + TM), expressa pelas equações citadas a seguir.

Equações de Helmholtz, que devem ser satisfeitas simultaneamente:

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_{z_p}(r,\varphi,z) + k_p^2 E_{z_p}(r,\varphi,z) = 0 \\ \nabla^2 H_{z_p}(r,\varphi,z) + k_p^2 H_{z_p}(r,\varphi,z) = 0 \end{aligned} \tag{77}$$

As componentes transversais dos campos é uma combinação linear das do modo TM (Eq. 11) e do modo TE (Eq. 45). Considerando a onda direta $\boldsymbol{e}^{(-j\boldsymbol{\beta z})_{nm}}$:

$$\begin{aligned} E_{T_p}(r,\varphi,z) = \frac{-j\beta_{nm}}{{k_p}^2}\nabla_{\mathrm{T}} E_{z_p}(r,\varphi,z) + \frac{j\omega\mu_0}{{k_p}^2}\left(\vec{\mathrm{z}} \wedge \nabla_{\mathrm{T}} H_{z_p}(r,\varphi,z)\right) \\ H_{T_p}(r,\varphi,z) = \frac{-j\beta_{nm}}{{k_p}^2}\nabla_{\mathrm{T}} H_{z_p}(r,\varphi,z) - \frac{j\omega\varepsilon_0{\eta_p}^2}{{k_p}^2}\left(\vec{\mathrm{z}} \wedge \nabla_{\mathrm{T}} E_{z_p}(r,\varphi,z)\right) \end{aligned} \tag{78}$$

As respectivas regiões dielétricas são dadas por (p = 0, 1, 2, 3, ... , N). Já (p = 0) corresponde ao núcleo da BF e (p = N) à região dielétrica externa.

O termo $k_p = k_{T_p} = k_0\sqrt{{\eta_p}^2 - {\eta_{ef}}^2}$ representa o número de onda transversal.

Os campos que satisfazem as Eqs. 77 são os das Eqs. 9 (modo TM_{nm}) e 45 (modo TE_{nm}), para n ≠ 0.

Para a região do núcleo e anéis dielétricos (0 ≤ p ≤ (N-1)):

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(A_p J_n(k_p r) + B_p Y_n(k_p r)\right)\begin{Bmatrix}\cos(n\varphi)\\ \mathrm{sen}(n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta_{nm}z}$$

$$H_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(C_p J_n(k_p r) + D_p Y_n(k_p r)\right)\begin{Bmatrix}\mathrm{sen}(n\varphi)\\ \cos(n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta_{nm}z}$$

Para a região externa (*p* = N):

$$E_{z_N}(r,\varphi,z) = \left(A_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + B_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right)\begin{Bmatrix}\cos(n\varphi)\\ \mathrm{sen}(n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta_{nm}z}$$

$$H_{z_N}(r,\varphi,z) = \left(C_N H_n{}^{(1)}(k_p r) + D_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right)\begin{Bmatrix}\mathrm{sen}(n\varphi)\\ \cos n\varphi)\end{Bmatrix} e^{-j\beta_{nm}z}$$

Sendo implícito $A_N = C_N = 0$.

Há, portanto, duas formulações ortogonais a serem consideradas:

- Primeiro Formalismo:

Para a região do núcleo e anéis dielétricos (0 ≤ *p* ≤ (N-1)):

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(A_p J_n\left(k_p r\right) + B_p Y_n(k_p r)\right)\cos(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z}$$
$$H_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(C_p J_n\left(k_p r\right) + D_p Y_n(k_p r)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z} \quad (79.1)$$

Para a região externa (*p* = N):

$$E_{z_N}(r,\varphi,z) = \left(A_N {H_n}^{(1)}(k_N r) + B_N {H_n}^{(2)}(k_N r)\right)\cos(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z}$$
$$H_{z_N}(r,\varphi,z) = \left(C_N {H_n}^{(1)}\left(k_p r\right) + D_N {H_n}^{(2)}(k_N r)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z} \quad (79.2)$$

- Segundo Formalismo (ortogonal ao primeiro):

Para a região do núcleo e anéis dielétricos (0 ≤ *p* ≤ (N-1)):

$$E_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(A_p J_n\left(k_p r\right) + B_p Y_n(k_p r)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z}$$
$$H_{z_p}(r,\varphi,z) = \left(C_p J_n\left(k_p r\right) + D_p Y_n(k_p r)\right)\cos(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z} \quad (80.1)$$

Para a região externa (*p* = N):

$$E_{z_N}(r,\varphi,z) = \left(A_N {H_n}^{(1)}(k_N r) + B_N {H_n}^{(2)}(k_N r)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z}$$
$$H_{z_N}(r,\varphi,z) = \left(C_N {H_n}^{(1)}\left(k_p r\right) + D_N {H_n}^{(2)}(k_N r)\right)\cos(n\varphi)e^{-j\beta_{nm}z} \quad (80.2)$$

As funções radiais das duas formulações são idênticas, e o que as diferencia são as funções angulares, onde o $\cos(n\varphi)$ de uma delas é substituído pelo $\mathrm{sen}(n\varphi)$ e vice-versa, como mostram as Eqs. 79 e 80.

Nas duas formulações está implícito que, para o núcleo, *p* = 0 ($B_0 = D_0 = 0$), e para a região externa, *p* = N ($A_N = C_N = 0$).

A condição dos modos HEM_{nm} dependerem da variável angular (n ≠ 0) acarreta que, no eixo da BF, $\lim_{r\to 0} J_n(k_{T0}r) = 0$. Logo, não existem campos elétrico e magnético pelo eixo da fibra, r = 0, que caracteriza a propriedade básica dos referidos modos. Por esta propriedade se compreende a razão dos modos HEM_{nm} serem referenciados, na teoria do raio, aos raios helicoidais.

A Figura 2-3 mostra a trajetória do vetor número de onda transversal na propagação de um modo híbrido, em uma fibra óptica em degrau. (SNYDER; LOVE, 1983). De acordo com esta figura, fica evidente que os modos HEM_{nm} são caracterizados por raios helicoidais ao longo da fibra. Este raciocínio se adequa aos modos híbridos da BF, ao contrário dos modos TM_{0m} e TE_{0m} (n = 0), formulados nos itens 2.1 e 2.2, que não dependem da variável angular. Esta condição implica que $\lim_{r\to 0} J_0(k_0 r) = 1$, e então estes modos cortam o eixo da fibra, sendo caracterizados, portanto, pelos raios meridionais.

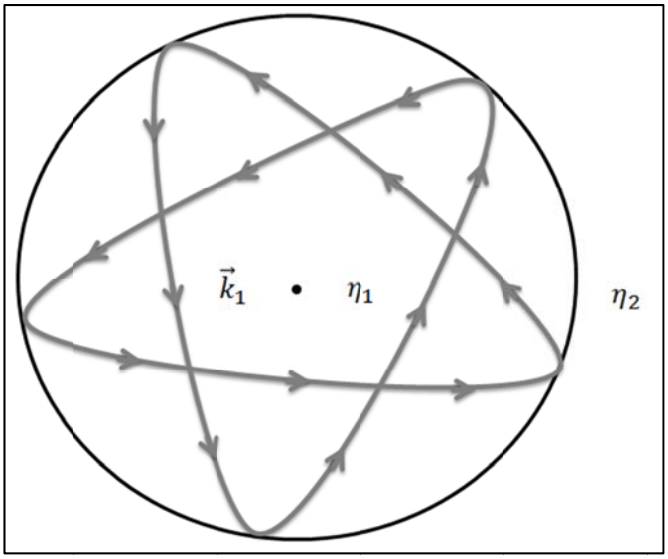

Figura 2-3: Modos Híbridos (HEM_{nm}) relacionados aos raios helicoidais.

2.3.1 Primeiro Formalismo dos Modos HEM_{nm} (1HEM)

Este formalismo é regido pelos campos longitudinais, $\left[E_{z_p}(\cos(n\varphi)), H_{z_p}(\mathrm{sen}(n\varphi))\right]$, expressos pelas Eqs. 79.

2.3.1.1 Campos Eletromagnéticos

As componentes dos campos elétrico e magnético da primeira formulação são obtidas substituindo-se na Eq. 78 as componentes longitudinais da Eq. 79.

Para a região do núcleo e anéis dielétricos (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$
\begin{aligned}
E_{z_l}(r,\varphi,z) &= (A_l J_n(k_l r) + B_l Y_n(k_l r))\cos(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
H_{z_l}(r,\varphi,z) &= (C_l J_n(k_l r) + D_l Y_n(k_l r))\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
E_{r_l} &= -j\left[\frac{\beta}{k_l}\left(A_l J_n{}'(k_l r) + B_l Y_n{}'(k_l r)\right) + \left(\frac{\omega\mu_0}{k_l}\right)\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(C_l J_n(k_l r) + D_l Y_n(k_l r)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
E_{\varphi_l} &= j\left[\frac{\beta}{k_l}\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(A_l J_n(k_l r) + B_l Y_n(k_l r)\right) + \left(\frac{\omega\mu_0}{k_l}\right)\left(C_l J_n{}'(k_l r) + D_l Y_n{}'(k_l r)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
H_{r_l} &= -j\left[\left(\frac{\omega\varepsilon_0\eta_l{}^2}{k_l}\right)\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(A_l J_n(k_l r) + B_l Y_n(k_l r)\right) + \frac{\beta}{k_l}\left(C_l J_n{}'(k_l r) + D_l Y_n{}'(k_l r)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
H_{\varphi_l} &= -j\left[\left(\frac{\omega\varepsilon_0\eta_l{}^2}{k_l}\right)\left(A_l J_n{}'(k_l r) + B_l Y_n{}'(k_l r)\right) + \frac{\beta}{k_l}\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(C_l J_n(k_l r) + D_l Y_n(k_l r)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z}
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Sendo implícito que $B_0 = D_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N):

$$
\begin{aligned}
E_{z_N}(r,\varphi,z) &= \left(A_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + B_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right)\cos(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
H_{z_N}(r,\varphi,z) &= \left(C_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + D_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
E_{r_N} &= -j\left[\frac{\beta}{k_N}\left(A_N H_n{}^{(1)\prime}(k_N r) + B_N H_n{}^{(2)\prime}(k_N r)\right) + \left(\frac{\omega\mu_0}{k_N}\right)\left(\frac{n}{k_N r}\right)\left(C_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + D_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
E_{\varphi_N} &= j\left[\frac{\beta}{k_N}\left(\frac{n}{k_N r}\right)\left(A_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + B_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right) + \left(\frac{\omega\mu_0}{k_N}\right)\left(C_N H_n{}^{(1)\prime}(k_N r) + D_N H_n{}^{(2)\prime}(k_N r)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
H_{r_N} &= -j\left[\left(\frac{\omega\varepsilon_0\eta_N{}^2}{k_N}\right)\left(\frac{n}{k_N r}\right)\left(A_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + B_N H_n{}^{(2)}(k_N r)\right) + \frac{\beta}{k_N}\left(C_N H_n{}^{(1)\prime}(k_N r) + D_N H_n{}^{(2)\prime}(k_N r)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z} \\
H_{\varphi_N} &= -j\left[\left(\frac{\omega\varepsilon_0\eta_N{}^2}{k_N}\right)\left(A_N H_n{}^{(1)\prime}(k_N r) + B_N H_n{}^{(2)\prime}(k_N r)\right) + \frac{\beta}{k_N}\left(\frac{n}{k_N r}\right)\left(C_N H_n{}^{(1)}(k_N r) + D_N H_n{}^{(2)}(k_l r)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z}
\end{aligned}
\tag{82}
$$

Sendo implícito que $A_N = C_N = 0$.

As Eqs. 81 e 82 são escritas mais sucintamente pelos seguintes parâmetros:

$$k_l = k_0\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}$$

$$\gamma_l = k_l r = k_0\left(\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}\right)r = 2\pi\left(\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}\right)\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

$$Z_l = \frac{\omega\mu_0}{k_l} = \frac{\omega\mu_0}{k_0}\frac{1}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} = \frac{Z_0 k_0}{k_l} = \frac{Z_0}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}} \qquad (83)$$

$$y_l = \frac{\omega\varepsilon_0}{k_l}{\eta_l}^2 = \left(\frac{k_0}{Z_0}\right)\frac{{\eta_l}^2}{k_l} = \frac{1}{Z_0}\frac{{\eta_l}^2}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}}$$

$$\beta_l = \frac{\beta}{k_l} = \frac{\eta_{ef}}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}}$$

Onde: $Z_0 = 120\pi$.

Observa-se que a análise é feita em função do raio elétrico ($\boldsymbol{r}/\boldsymbol{\lambda}$) da estrutura.

As Eqs. 81 e 82 são, a seguir, expressas mais sucintamente, omitindo-se o termo $\boldsymbol{e^{-j\beta z}}$.

Para a região do núcleo e anéis dielétricos (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$E_{z_l} = (A_l J_n(\gamma_l) + B_l Y_n(\gamma_l))\cos(n\varphi)$$

$$H_{z_l} = (C_l J_n(\gamma_l) + D_l Y_n(\gamma_l))\mathrm{sen}(n\varphi)$$

$$E_{r_l} = -j\left[\beta_l\left(A_l {J_n}'(\gamma_l) + B_l {Y_n}'(\gamma_l)\right) + \left(\frac{nZ_l}{\gamma_l}\right)\left(C_l J_n(\gamma_l) + D_l Y_n(\gamma_l)\right)\right]\cos(n\varphi)$$

$$E_{\varphi_l} = j\left[\left(\frac{n\beta_l}{\gamma_l}\right)\left(A_l J_n(\gamma_l) + B_l Y_n(\gamma_l)\right) + Z_l\left(C_l {J_n}'(\gamma_l) + D_l {Y_n}'(\gamma_l)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi) \qquad (84)$$

$$H_{r_l} = -j\left[\left(\frac{ny_l}{\gamma_l}\right)\left(A_l J_n(\gamma_l) + B_l Y_n(\gamma_l)\right) + \beta_l\left(C_l {J_n}'(\gamma_l) + D_l {Y_n}'(\gamma_l)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)$$

$$H_{\varphi_l} = -j\left[y_l\left(A_l {J_n}'(\gamma_l) + B_l {Y_n}'(\gamma_l)\right) + \frac{n\beta_l}{\gamma_l}\left(C_l J_n(\gamma_l) + D_l Y_n(\gamma_l)\right)\right]\cos(n\varphi)$$

Sendo implícito que $B_0 = D_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N):

$$
\begin{aligned}
E_{z_N} &= \left(A_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\cos(n\varphi) \\
H_{z_N} &= \left(C_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\mathrm{sen}(n\varphi) \\
E_{r_N} &= -j\left[\beta_N\left(A_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right) + \left(\frac{nZ_N}{\gamma_N}\right)\left(C_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\right]\cos(n\varphi) \\
E_{\varphi_N} &= j\left[\frac{n\beta_N}{\gamma_N}\left(A_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right) + Z_N\left(C_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi) \\
H_{r_N} &= -j\left[\frac{ny_N}{\gamma_N}\left(A_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right) + \beta_N\left(C_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi) \\
H_{\varphi_N} &= -j\left[y_N\left(A_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right) + \frac{n\beta_N}{\gamma_N}\left(C_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\right]\cos(n\varphi)
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Sendo implícito que $A_N = C_N = 0$.

As componentes dos campos, nas Eqs. 84 e 85, que satisfazem as condições nas respectivas fronteiras, são expressas matricialmente conforme apresentado a seguir.

Para as regiões internas (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$
\begin{bmatrix} E_{z_l} \\ E_{\varphi_l} \\ H_{z_l} \\ H_{\varphi_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) & Y_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) & 0 & 0 \\ \frac{jn\beta_l}{\gamma_l} J_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & \frac{jn\beta_l}{\gamma_l} Y_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & jZ_l J_n{}'(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & jZ_l Y_n{}'(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) \\ 0 & 0 & J_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & Y_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) \\ -jy_l J_n{}'(\gamma_l)\cos(n\varphi) & -jy_l Y_n{}'(\gamma_l)\cos(n\varphi) & \frac{-jn\beta_l}{\gamma_l} J_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) & \frac{-jn\beta_l}{\gamma_l} Y_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix}
\tag{86}
$$

Sendo implícito que $B_0 = D_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N):

$$\begin{bmatrix} E_{z_N} \\ E_{\varphi_N} \\ H_{z_N} \\ H_{\varphi_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_n{}^{(1)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & 0 & 0 \\ \frac{jn\beta_N}{\gamma_N} H_n{}^{(1)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & \frac{jn\beta_N}{\gamma_N} H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & jZ_N H_n{}^{(1)'}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & jZ_N H_n{}^{(2)'}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) \\ 0 & 0 & H_n{}^{(1)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) \\ -jy_N H_n{}^{(1)'}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & -jy_N H_n{}^{(2)'}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & \frac{-jn\beta_N}{\gamma_N} H_n{}^{(1)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & \frac{-jn\beta_N}{\gamma_N} H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} \quad (87)$$

Sendo implícito que $A_N = C_N = 0$.

Para simplificar a notação, as respectivas matrizes serão referenciadas da seguinte forma:

$\overline{\overline{m}}[l]_r$ é a matriz referente à Eq. 86.

$\overline{\overline{m}}[N]_r$ é a matriz referente à Eq. 87.

Portanto:

Para as regiões internas (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$\begin{bmatrix} E_{z_l} \\ E_{\varphi_l} \\ H_{z_l} \\ H_{\varphi_l} \end{bmatrix} = \overline{\overline{m}}[l]_{(r)} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} \quad (88)$$

Para a região externa (ℓ = N):

$$\begin{bmatrix} E_{z_N} \\ E_{\varphi_N} \\ H_{z_N} \\ H_{\varphi_N} \end{bmatrix} = \overline{\overline{m}}[N]_{(r)} \begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} \quad (89)$$

2.3.1.2Matrizes de Transmissão

As matrizes de transmissão dos modos híbridos, referentes às fronteiras da BF, são calculadas impondo as condições que os campos eletromagnéticos devem satisfazer nas referidas fronteiras, ou seja:

$$\begin{bmatrix} E_{z_l} \\ E_{\varphi_l} \\ H_{z_l} \\ H_{\varphi_l} \end{bmatrix}_{(r=r_l)} = \begin{bmatrix} E_{z_{(l-1)}} \\ E_{\varphi_{(l-1)}} \\ H_{z_{(l-1)}} \\ H_{\varphi_{(l-1)}} \end{bmatrix}_{(r=r_l)} \tag{90}$$

As matrizes de transmissão relacionam os coeficientes dos campos contíguos às respectivas fronteiras.

Para as regiões internas ($r_1 \leq r \leq r_{(N-1)}$):

Substituindo a Eq. 88 na Eq. 90, temos:

$$\begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} = \left[\bar{\bar{m}}[l]_{(r=r_l)}\right]^{-1} \bar{\bar{m}}[l-1]_{(r=r_l)} \begin{bmatrix} A_{l-1} \\ B_{l-1} \\ C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{bmatrix} \tag{91}$$

A Eq. 86 caracteriza a matriz $\bar{\bar{m}}$ $[\ell]$, cuja inversa, calculada através do software MAPLE, é dada por:

$$\left[\bar{\bar{m}}[l]_{(r=r_l)}\right]^{-1} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} \frac{Y_n{}'}{\cos(n\varphi)} & 0 & \frac{n\beta_l Y_n}{Y_l \gamma_l \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{-jY_n}{Y_l \cos(n\varphi)} \\ \frac{-J_n{}'}{\cos(n\varphi)} & 0 & \frac{-n\beta_l J_n}{Y_l \gamma_l \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{jJ_n}{Y_l \cos(n\varphi)} \\ \frac{n\beta_l y_n}{Z_l \gamma_l \cos(n\varphi)} & \frac{jy_n}{Z_l \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{Y_n{}'}{\operatorname{sen}(n\varphi)} & 0 \\ \frac{-n\beta_l J_n}{Z_l \gamma_l \cos(n\varphi)} & \frac{-jJ_n}{Z_l \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{-J_n{}'}{\operatorname{sen}(n\varphi)} & 0 \end{bmatrix} \tag{92}$$

Onde:

$$W = [J_n(\gamma_l)Y_n{}'(\gamma_l) - Y_n(\gamma_l)J_n{}'(\gamma_l)]_{r=r_l} \tag{93}$$

O valor de W, assim como os das derivadas das Funções de Bessel, são calculados pelas relações de recorrências:

$$\begin{aligned} J_n{}' &= \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1}) \\ Y_n{}' &= \frac{1}{2}(Y_{n-1} - Y_{n+1}) \end{aligned} \tag{94}$$

Utilizando o Wronskian:

$$J_{n+1}(z)Y_n(z) - J_n(z)Y_{n+1}(z) = \frac{2}{\pi z} \tag{95}$$

Substituindo na Eq. 93 as relações de recorrências (Eqs. 94), temos: $W = \frac{J_n}{2}(J_{n-1} - Y_{n+1}) - \frac{Y_n}{2}(J_{n-1} - Y_{n+1})$

Com um simples algebrismo, “W” é expresso em função dos Wronskians:

$$W = \frac{1}{2}[(J_{n+1}Y_n - Y_{n+1}J_n) + (J_nY_{n-1} - Y_nJ_{n-1})] \tag{96}$$

Reconhecendo na Eq. 96 os Wronskians estabelecidos na Eq. 95, onde $Z = \gamma_l = (k_l r_l) = 2\pi\sqrt{\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2}\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)$, tem-se:

$$W(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi z} + \frac{2}{\pi z}\right) = \frac{2}{\pi z} = \frac{2}{\pi(k_l r_l)} \tag{97}$$

Substituindo na Eq. 97, $(k_l r_l) = 2\pi\sqrt{\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2}\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)$, vide Eq. 83, obtemos:

$$W_{[\gamma_l(r=r_l)]} = \frac{2}{\pi(k_l r_l)} = \frac{1}{\pi^2\sqrt{\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2}\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)} \tag{98}$$

A matriz de transmissão na fronteira interna, r = r_ℓ , limítrofe entre as regiões (ℓ - 1) e (ℓ), é deduzida substituindo-se na Eq. 91 as matrizes estabelecidas nas Eqs. 92 e 86.

$$\begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} = \bar{\bar{m}}[l,(l-1)]_{(r=r_l)} \begin{bmatrix} A_{l-1} \\ B_{l-1} \\ C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{bmatrix} \tag{99}$$

Onde:

$$\bar{\bar{m}}[l,(l-1)]_{(r=r_l)} = \frac{\pi(k_l r_l)}{2} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \tag{100}$$

Os respectivos termos da matriz da Eq. 100 são:

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_n(k_{l-1}r_l)Y_n{}'(k_l r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_n{}'(k_{l-1}r_l)Y_n(k_l r_l) \\ m_{12} &= Y_n(k_{l-1}r_l)Y_n{}'(k_l r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 Y_n{}'(k_{l-1}r_l)Y_n(k_l r_l) \\ m_{13} &= nY_n(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \\ m_{14} &= nY_n(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \end{aligned} \tag{101.1}$$

$$\begin{aligned} m_{21} &= -J_n{}'(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_n(k_l r_l)J_n{}'(k_{l-1}r_l) \\ m_{22} &= -J_n{}'(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_n(k_l r_l)Y_n{}'(k_{l-1}r_l) \\ m_{23} &= -nJ_n(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \\ m_{24} &= -nJ_n(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \end{aligned} \tag{101.2}$$

$$m_{31} = nY_n(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{32} = nY_n(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{33} = Y_n{}'(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)Y_n(k_l r_l)J_n{}'(k_{l-1}r_l) \tag{101.3}$$

$$m_{34} = Y_n{}'(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)Y_n(k_l r_l)Y_n{}'(k_{l-1}r_l)$$

$$m_{41} = -nJ_n(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{42} = -nJ_n(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{43} = -J_n{}'(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)J_n(k_l r_l)J_n{}'(k_{l-1}r_l) \tag{101.4}$$

$$m_{44} = -J_n{}'(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)J_n(k_l r_l)Y_n{}'(k_{l-1}r_l)$$

Os termos das Eqs.101 são obtidos pelas expressões na Eq. 83, ou seja:

$$k_l r_l = 2\pi\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)$$

$$k_{l-1} r_l = 2\pi\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)$$

$$\left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right) = \sqrt{\frac{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}{{\eta_{l-1}}^2 - {\eta_{ef}}^2}} \tag{102}$$

$$\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Y_l}\right] = \frac{60}{{\eta_l}^2\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)}\left[\left(\frac{\eta_{ef}}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}}\right)\left(1 - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)^2\right)\right]$$

$$\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right] = \frac{1}{240\pi^2\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)}\left[\left(\frac{\eta_{ef}}{\sqrt{{\eta_l}^2 - {\eta_{ef}}^2}}\right)\left(1 - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)^2\right)\right]$$

Observa-se que:

$$\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l}-\frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]=\left(\frac{\eta_l}{120\pi}\right)^2\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l}-\frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Y_l}\right]$$

$$\left(\frac{\eta_l}{120\pi}\right)^2=\left(\frac{\eta_l{}^2}{1{,}421\times10^5}\right)$$

Portanto, é suficiente calcular somente um dos dois termos entre parênteses.

As expressões das Eqs. 102 substituídas nas respectivas parcelas da Eq. 101, completa a dedução da matriz de transmissão nas primeiras interfaces, referente ao primeiro formalismo.

Fica evidente a propriedade da combinação linear dos modos TM_{0m} e TE_{0m} na formulação do modo HEM_{nm} ao se considerar: n = 0, $J_0{}'=-J_1$ e $Y_0{}'=-Y_1$ nas Eqs. 101.

Com estas especificações, a matriz de transmissão do modo híbrido, Eqs. 100 e 101, se desacopla nas dos modos TM_{0m} e TE_{0m}, como mostra a Eq. 103 a seguir.

$$\bar{\bar{m}}[l,(l-1)]=\left(\frac{-\pi k_l r_l}{2}\right)\begin{bmatrix}\overbrace{\begin{matrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{matrix}}^{\text{TM}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}\bar{m}_{11}(r_l) & \bar{m}_{12}(r_l)\\ \bar{m}_{21}(r_l) & \bar{m}_{22}(r_l)\end{matrix}}_{\text{TE}}\end{bmatrix} \qquad (103)$$

A submatriz m^{TM} da Eq. 103 é a própria matriz de transmissão do modo TM_{0m} (Eqs. 24 e 25), e a submatriz $\bar{m}^{TE}$ se identifica ao do modo TE_{0m} (Eqs. 55 e 56).

Para a região externa ($r = r_N$):

A matriz de transmissão referente à fronteira externa r = r_N (vide Figura 2-1), é obtida impondo aos campos eletromagnéticos as condições que devem ser satisfeitas na última fronteira da estrutura de Bragg (vide Figura 2-2):

$$\begin{bmatrix} E_{z_N} \\ E_{\varphi_N} \\ H_{z_N} \\ H_{\varphi_N} \end{bmatrix}_{(r=r_N)} = \begin{bmatrix} E_{z_{(N-1)}} \\ E_{\varphi_{(N-1)}} \\ H_{z_{(N-1)}} \\ H_{\varphi_{(N-1)}} \end{bmatrix}_{(r=r_N)} \tag{103}$$

Substituindo as matrizes das Eqs. 86 e 87 na Eq. 103, tem-se uma relação entre os coeficientes dos campos das regiões contíguas à respectiva fronteira:

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} = \left[(\overline{\overline{m}}[N])_{(r=r_N)}\right]^{-1} (\overline{\overline{m}}[N-1]) \begin{bmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{bmatrix} \tag{104}$$

A matriz $(\overline{\overline{m}}[N-1])_{(r=r_N)}$ é dada pela Eq. 86, e $\left[(\overline{\overline{m}}[N])_{(r=r_N)}\right]^{-1}$ é dada pela inversa da Eq. 87, considerando em ambas que r = r_N.

$$\left[\overline{\overline{m}}[N]_{(r=r_N)}\right]^{-1} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} \frac{-H_n{}^{(2)'}(\gamma_N)}{\cos(n\varphi)} & 0 & \frac{-n\beta_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)}{\gamma_N Y_N \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{H_n{}^{(2)}(\gamma_N)}{y_N \cos(n\varphi)} \\ \frac{H_n{}^{(1)'}(\gamma_N)}{\cos(n\varphi)} & 0 & \frac{n\beta_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N)}{\gamma_N Y_N \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{-jH_n{}^{(1)}(\gamma_N)}{y_N \cos(n\varphi)} \\ \frac{-n\beta_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)}{Z_N \gamma_N \cos(n\varphi)} & \frac{-jH_n{}^{(2)}(\gamma_N)}{Z_N \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{-H_n{}^{(2)}(\gamma_N)}{\operatorname{sen}(n\varphi)} & 0 \\ \frac{n\beta_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N)}{Z_N \gamma_N \cos(n\varphi)} & \frac{jH_n{}^{(1)}(\gamma_N)}{Z_N \operatorname{sen}(n\varphi)} & \frac{H_n{}^{(1)'}(\gamma_N)}{\operatorname{sen}(n\varphi)} & 0 \end{bmatrix} \tag{105}$$

Onde:

$$\begin{gathered} W = H_n{}^{(1)'}(z) H_n{}^{(2)}(z) - H_n{}^{(1)}(z) H_n{}^{(2)'}(z) \\ z = (k_n r_n) \end{gathered} \tag{106}$$

Substituindo na Eq. 106 as relações de recorrências das Funções de Hankel:

$$H_n{}^{(2)'} = \frac{1}{2}\left[H_{n-1}{}^{(2)} - H_{n+1}{}^{(2)}\right]$$

$$H_n{}^{(1)'} = \frac{1}{2}\left[H_{n-1}{}^{(1)} - H_{n+1}{}^{(1)}\right]$$

Lembrando o Wronskian entre as funções de Hankel:

$$H_{n+1}{}^{(1)}(z)H_n{}^{(2)}(z) = H_n{}^{(1)}(z)H_{n+1}{}^{(2)}(z) = \frac{-j4}{\pi z}$$

Com um simples algebrismo, a Eq. 106 é expressa pela soma de dois Wronskians:

$$W = \frac{1}{2}\left[-\left(H_{n+1}{}^{(1)}(z)H_n{}^{(2)}(z) - H_n{}^{(1)}(z)H_{n+1}{}^{(2)}(z)\right) - \left(H_n{}^{(1)}(z)H_{n-1}{}^{(2)}(z) - H_{n-1}{}^{(1)}(z)H_n{}^{(2)}(z)\right)\right]$$

Portanto: $W = \frac{1}{2}\left(\frac{j4}{\pi z} + \frac{j4}{\pi z}\right) = \frac{j4}{\pi z}$

Para $z = k_N r_N$, temos:

$$\frac{1}{W} = \left(\frac{-j\pi k_N r_N}{4}\right) = \frac{-j}{2}\pi^2\left(\sqrt{\eta_N{}^2 - \eta_{ef}{}^2}\right)\left(\frac{r_N}{\lambda}\right) \tag{107}$$

A matriz de transmissão referente à fronteira externa, r = r_N, Eq. 104, é escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} = \bar{\bar{m}}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} \begin{bmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{m}}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} = \left(\frac{j\pi k_N r_N}{4}\right)\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \tag{108}$$

Os termos da matriz da Eq. 108 são multiplicados por (-1), já que o Wronskian substituído na Eq. 108 foi $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{W}} = \left(\frac{\boldsymbol{j\pi k_N r_N}}{\mathbf{4}}\right)$, vide a Eq. 107. Portanto, os respectivos termos da Eq. 108 são:

$$
\begin{aligned}
m_{11} &= J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N) \\
m_{12} &= Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N) \\
m_{13} &= nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right] \\
m_{14} &= nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right]
\end{aligned}
\tag{109.1}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{21} &= -J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)'}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N) \\
m_{22} &= -Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)'}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N) \\
m_{23} &= -nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right] \\
m_{24} &= -nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right]
\end{aligned}
\tag{109.2}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{31} &= nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right] \\
m_{32} &= nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right] \\
m_{33} &= J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right){J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N) \\
m_{34} &= Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right){Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)
\end{aligned}
\tag{109.3}
$$

$$m_{41} = -nJ_n(\gamma_{N-1})H_n{}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right]$$

$$m_{42} = -nY_n(\gamma_{N-1})H_n{}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right]$$

$$m_{43} = -J_n(\gamma_{N-1})H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)J_n{}'(\gamma_{N-1})H_n{}^{(1)}(\gamma_N) \qquad (109.4)$$

$$m_{44} = -Y_n(\gamma_{N-1})H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)Y_n{}'(\gamma_{N-1})H_n{}^{(1)}(\gamma_N)$$

Os parâmetros (γ_ℓ, β_ℓ, z_ℓ, y_ℓ; ℓ = N, (N-1)) são os definidos nas expressões da Eq. 83, então:

$$\left(\frac{y_{N-1}}{y_N}\right) = \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_N}{\eta_{N-1}}\right)^2; \quad \left(\frac{z_N}{z_{N-1}}\right) = \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)$$

2.3.2 Segundo Formalismo dos Modos HEM_{nm} (2HEM)

Este formalismo, que se fundamenta nos campos longitudinais $\left[E_{z_p}\left(sen(n\varphi)\right); H_{z_p}\left(cos(n\varphi)\right)\right]$, tem por base o primeiro formalismo, com o cos(nϕ) no lugar do sen(nϕ) e vice-versa, vide as Eqs. 79 e 80.

O desenvolvimento é idêntico ao do primeiro formalismo. Portanto, ele será apresentado diretamente, omitindo-se as explicações redundantes dos itens que o compõem.

2.3.2.1 Campos Eletromagnéticos

As componentes dos campos elétrico e magnético, da segunda formulação, são obtidas substituindo-se na Eq. 78 as componentes longitudinais da Eq. 80, referente à $E_{z_p}\mathrm{sen}(n\varphi)$ e $H_{z_p}\cos(n\varphi)$.

Para a região do núcleo e anéis dielétricos (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$E_{z_l}(r,\varphi,z) = (A_l J_n(k_l r) + B_l Y_n(k_l r))\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z}$$

$$H_{z_l}(r,\varphi,z) = (C_l J_n(k_l r) + D_l Y_n(k_l r))\cos(n\varphi)e^{-j\beta z}$$

$$E_{r_l} = -j\left[\frac{\beta}{k_l}\left(A_l J_n{}'(k_l r) + B_l Y_n{}'(k_l r)\right) - \left(\frac{w\mu_0}{k_l}\right)\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(C_l J_n(k_l r) + D_l Y_n(k_l r)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z}$$

$$E_{\varphi_l} = j\left[-\frac{\beta}{k_l}\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(A_l J_n(k_l r) + B_l Y_n(k_l r)\right) + \left(\frac{w\mu_0}{k_l}\right)\left(C_l J_n{}'(k_l r) + D_l Y_n{}'(k_l r)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z} \qquad (110)$$

$$H_{r_l} = -j\left[-\left(\frac{w\varepsilon_0\eta^2}{k_l}\right)\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(A_l J_n(k_l r) + B_l Y_n(k_l r)\right) + \frac{\beta}{k_l}\left(C_l J_n{}'(k_l r) + D_l Y_n{}'(k_l r)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z}$$

$$H_{\varphi_l} = -j\left[\left(\frac{w\varepsilon_0\eta^2}{k_l}\right)\left(A_l J_n{}'(k_l r) + B_l Y_n{}'(k_l r)\right) - \frac{\beta}{k_l}\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(C_l J_n(k_l r) + D_l Y_n(k_l r)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)\, e^{-j\beta z}$$

Sendo implícito que $B_0 = D_0 = 0$.

Observando os campos eletromagnéticos da primeira formulação (Eq. 81) e da segunda (Eq. 110), percebe-se que a segunda formulação pode ser deduzida da primeira sob as seguintes substituições:

Primeiro Formalismo		Segundo Formalismo
(Eq. 81)	$\longrightarrow$	(Eq. 110)
$\cos(n\varphi)$	$\longrightarrow$	$\mathrm{sen}(n\varphi)$
$\mathrm{sen}(n\varphi)$	$\longrightarrow$	$\cos(n\varphi)$
$\left(\frac{n}{k_l r}\right)$	$\longrightarrow$	$\left(\frac{-n}{k_l r}\right)$

(111)

Portanto:

$$n \longrightarrow -n$$

Para a região externa (ℓ = N):

Substituindo na Eq. 82 as relações entre os dois formalismos, expressas na Eq. 111, têm-se os campos eletromagnéticos referentes à região externa do segundo formalismo:

$$E_{z_l}(r,\varphi,z) = \left(A_l H_n{}^{(1)}(k_l r) + B_l H_n{}^{(2)}(k_l r)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z}$$
$$H_{z_l}(r,\varphi,z) = \left(C_l H_n{}^{(1)}(k_l r) + D_l H_n{}^{(2)}(k_l r)\right)\cos(n\varphi)e^{-j\beta z}$$
$$E_{r_l} = -j\left[\frac{\beta}{k_l}\left(A_l H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_l) + B_l H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_l)\right) - \left(\frac{w\mu_0}{k_l}\right)\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(C_l H_n{}^{(1)}(\gamma_l) + D_l H_n{}^{(2)}(\gamma_l)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z}$$
$$E_{\varphi_l} = j\left[\frac{-\beta}{k_l}\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(A_l H_n{}^{(1)}(\gamma_l) + B_l H_n{}^{(2)}(\gamma_l)\right) + \left(\frac{w\mu_0}{k_l}\right)\left(C_l H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_l) + D_l H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_l)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z} \quad (112)$$
$$H_{r_l} = -j\left[-\left(\frac{w\varepsilon_0\eta^2}{k_l}\right)\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(A_l H_n{}^{(1)}(\gamma_l) + B_l H_n{}^{(2)}(\gamma_l)\right) + \frac{\beta}{k_l}\left(C_l H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_l) + D_l H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_l)\right)\right]\cos(n\varphi)e^{-j\beta z}$$
$$H_{\varphi_l} = -j\left[\left(\frac{w\varepsilon_0\eta^2}{k_l}\right)\left(A_l H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_l) + B_l H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_l)\right) + \frac{-\beta}{k_l}\left(\frac{n}{k_l r}\right)\left(C_l H_n{}^{(1)}(\gamma_l) + D_l H_n{}^{(2)}(\gamma_l)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)e^{-j\beta z}$$

Sendo implícito que $A_N = C_N = 0$.

Com auxílio dos parâmetros indicados na Eq. 83, os respectivos campos (Eqs. 110 e 112) são expressos suscintamente, apropriados à linguagem de máquina. Conforme já citado, a linguagem adotada neste trabalho foi a FORTRAN.

Para a região do núcleo e anéis dielétricos ($0 \leq \ell \leq (N-1)$):

$$E_{z_l} = (A_l J_n(\gamma_l) + B_l Y_n(\gamma_l))\mathrm{sen}(n\varphi)$$
$$H_{z_l} = (C_l J_n(\gamma_l) + D_l Y_n(\gamma_l))\cos(n\varphi)$$
$$E_{r_l} = -j\left[\beta_l\left(A_l J_n{}'(\gamma_l) + B_l Y_n{}'(\gamma_l)\right) - \left(\frac{nZ_l}{\gamma_l}\right)\left(C_l J_n(\gamma_l) + D_l Y_n(\gamma_l)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)$$
$$E_{\varphi_l} = j\left[\left(\frac{-n\beta_l}{\gamma_l}\right)\left(A_l J_n(\gamma_l) + B_l Y_n(\gamma_l)\right) + Z_l\left(C_l J_n{}'(\gamma_l) + D_l Y_n{}'(\gamma_l)\right)\right]\cos(n\varphi) \quad (113)$$
$$H_{r_l} = -j\left[\left(\frac{-ny_l}{\gamma_l}\right)\left(A_l J_n(\gamma_l) + B_l Y_n(\gamma_l)\right) + \beta_l\left(C_l J_n{}'(\gamma_l) + D_l Y_n{}'(\gamma_l)\right)\right]\cos(n\varphi)$$
$$H_{\varphi_l} = -j\left[y_l\left(A_l J_n{}'(\gamma_l) + B_l Y_n{}'(\gamma_l)\right) - \frac{n\beta_l}{\gamma_l}\left(C_l J_n(\gamma_l) + D_l Y_n(\gamma_l)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)$$

Para a região externa (ℓ = N):

$$E_{z_N} = \left(A_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\mathrm{sen}(n\varphi)$$
$$H_{z_N} = \left(C_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\cos(n\varphi)$$
$$E_{r_N} = -j\left[\beta_N\left(A_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right) - \left(\frac{nZ_N}{\gamma_N}\right)\left(C_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)$$
$$E_{\varphi_N} = j\left[\frac{-n\beta_N}{\gamma_N}\left(A_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right) + Z_N\left(C_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right)\right]\cos(n\varphi) \qquad (114)$$
$$H_{r_N} = -j\left[\frac{-ny_N}{\gamma_N}\left(A_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right) + \beta_N\left(C_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right)\right]\cos(n\varphi)$$
$$H_{\varphi_N} = -j\left[y_N\left(A_N H_n{}^{(1)\prime}(\gamma_N) + B_N H_n{}^{(2)\prime}(\gamma_N)\right) - \frac{n\beta_N}{\gamma_N}\left(C_N H_n{}^{(1)}(\gamma_N) + D_N H_n{}^{(2)}(\gamma_N)\right)\right]\mathrm{sen}(n\varphi)$$

Nas Eqs. 113 e 114, foi omitido o fator $\boldsymbol{e^{-j\beta z}}$.

As componentes dos campos eletromagnéticos (Eqs. 113 e 114) que satisfazem as condições de fronteiras são expressas matricialmente da seguinte forma:

Para as regiões internas (0 ≤ ℓ ≤ (N-1)):

$$\begin{bmatrix} E_{z_l} \\ E_{\varphi_l} \\ H_{z_l} \\ H_{\varphi_l} \end{bmatrix} = \widetilde{m}[l]_{(r)} \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} \qquad (115)$$

Onde:

$$\widetilde{m}[l]_{(r)} = \begin{bmatrix} J_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & Y_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & 0 & 0 \\ \frac{-jn\beta_l}{\gamma_l}J_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) & \frac{-jn\beta_l}{\gamma_l}Y_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) & jZ_l J_n{}'(\gamma_l)\cos(n\varphi) & jZ_l Y_n{}'(\gamma_l)\cos(n\varphi) \\ 0 & 0 & J_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) & Y_n(\gamma_l)\cos(n\varphi) \\ -jy_l J_n{}'(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & -jy_l Y_n{}'(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & \frac{jn\beta_l}{\gamma_l}J_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) & \frac{jn\beta_l}{\gamma_l}Y_n(\gamma_l)\mathrm{sen}(n\varphi) \end{bmatrix} \qquad (116)$$

Sendo implícito que $B_0 = D_0 = 0$.

Para a região externa (ℓ = N):

$$\begin{bmatrix} E_{z_N} \\ E_{\varphi_N} \\ H_{z_N} \\ H_{\varphi_N} \end{bmatrix} = \widetilde{m}[N]_{(r)} \begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} \tag{117}$$

Onde:

$$\widetilde{m}[N]_{(r)} = \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & H_n^{(2)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & 0 & 0 \\ \frac{-jn\beta_N}{\gamma_N} H_n^{(1)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & \frac{-jn\beta_N}{\gamma_N} H_n^{(2)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & jZ_N H_n^{(1)'}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & jZ_N H_n^{(2)'}(\gamma_N)\cos(n\varphi) \\ 0 & 0 & H_n^{(1)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) & H_n^{(2)}(\gamma_N)\cos(n\varphi) \\ -jy_N H_n^{(1)'}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & -jy_N H_n^{(2)'}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & \frac{jn\beta_N}{\gamma_N} H_n^{(1)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) & \frac{jn\beta_N}{\gamma_N} H_n^{(2)}(\gamma_N)\mathrm{sen}(n\varphi) \end{bmatrix} \tag{118}$$

Sendo implícito que $A_N = C_N = 0$.

2.3.2.2Matrizes de Transmissão

As matrizes de transmissão nas respectivas fronteiras $r_1 \leq r \leq r_N$, vide Figura 2-1, são estabelecidas com auxílio das Eqs. 91, 117 e 118.

Para as regiões internas ($r_1 \leq r \leq r_{(N-1)}$):

Pela Eq. 91:

$$\begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} = \left[\widetilde{m}[l]_{(r=r_l)}\right]^{-1} \widetilde{m}[l-1]_{(r=r_l)} \begin{bmatrix} A_{l-1} \\ B_{l-1} \\ C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{bmatrix} \tag{119}$$

A Eq. 116 caracteriza a matriz $\widetilde{m}[l]_{(r=r_l)}$, cuja inversa, calculada através do software MAPLE, é dada por:

$$\left[\widetilde{m}[l]_{(r=r_l)}\right]^{-1} = \frac{1}{W}\begin{bmatrix} \frac{Y_n{}'(\gamma_l)}{\mathrm{sen}(n\varphi)} & 0 & \frac{-n\beta_l Y_n(\gamma_l)}{y_l\gamma_l\cos(n\varphi)} & \frac{-jY_n(\gamma_l)}{y_l\mathrm{sen}(n\varphi)} \\ \frac{-J_n{}'(\gamma_l)}{\mathrm{sen}(n\varphi)} & 0 & \frac{n\beta_l J_n(\gamma_l)}{y_l\gamma_l\cos(n\varphi)} & \frac{jJ_n(\gamma_l)}{y_l\mathrm{sen}(n\varphi)} \\ \frac{-n\beta_l y_n(\gamma_l)}{Z_l\gamma_l\mathrm{sen}(n\varphi)} & \frac{jy_n(\gamma_l)}{Z_l\cos(n\varphi)} & \frac{Y_n{}'(\gamma_l)}{\cos(n\varphi)} & 0 \\ \frac{n\beta_l J_n(\gamma_l)}{Z_l\gamma_l\mathrm{sen}(n\varphi)} & \frac{-jJ_n(\gamma_l)}{Z_l\cos(n\varphi)} & \frac{-J_n{}'(\gamma_l)}{\cos(n\varphi)} & 0 \end{bmatrix} \quad (120)$$

Onde:

$$W\left[\gamma_{l_{(r=r_l)}}\right] = J_n(\gamma_l)Y_n{}'(\gamma_l) - J_n{}'(\gamma_l)Y_n(\gamma_l)$$

Pelas relações de recorrências das derivadas das funções ordinárias de Bessel (Eq. 94) e pelo Wronskian (Eq. 95):

$$J_{n+1}(z)Y_n(z) - J_n(z)Y_{n+1}(z) = \frac{2}{\pi z}$$

Tem-se $\gamma_l = k_l r_l$

$$W\left[\gamma_{l_{(r=r_l)}}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(J_{n+1}(\gamma_l)Y_n(\gamma_l) - J_n(\gamma_l)Y_{n+1}(\gamma_l)\right) + \left(J_n(\gamma_l)Y_{n-1}(\gamma_l) - J_{n-1}(\gamma_l)Y_n(\gamma_l)\right)\right]$$

Portanto:

$$W\left[\gamma_{l_{(r=r_l)}}\right] = \frac{2}{\pi(k_l r_l)} \quad (121)$$

A Eq. 121 pode ser mais explícita. De acordo com a Eq. 98, obtemos:

$$W\left[\gamma_{l_{(r=r_l)}}\right] = \frac{2}{\pi(k_l r_l)} = \frac{1}{\pi^2\sqrt{\eta_l{}^2 - \eta_{ef}{}^2}\left(\frac{r_l}{\lambda}\right)} \quad (122)$$

Observamos que a matriz inversa $\left[\overline{m}[l]_{(r=r_l)}\right]^{-1}$, Eq. 120, referente à segunda formulação, é deduzida prontamente da inversa da primeira formulação (Eq. 92), trocando-se sen(nϕ) pelo cos(nϕ) e vice-versa, e (n) por (-n), como esperado.

A matriz de transmissão da fronteira r = r_ℓ, limítrofe entre as regiões internas (ℓ) e (ℓ - 1), é deduzida substituindo-se na Eq.119 as matrizes estabelecidas nas Eqs. 116 e 120.

$$\begin{bmatrix} A_l \\ B_l \\ C_l \\ D_l \end{bmatrix} = \widetilde{m}[l,(l-1)]_{(r=r_l)} \begin{bmatrix} A_{l-1} \\ B_{l-1} \\ C_{l-1} \\ D_{l-1} \end{bmatrix} \tag{123}$$

Onde:

$$\widetilde{m}[l,(l-1)]_{(r=r_l)} = \left(\frac{\pi(k_l r_l)}{2}\right) \begin{bmatrix} \overline{m}_{11} & \overline{m}_{12} & \overline{m}_{13} & \overline{m}_{14} \\ \overline{m}_{21} & \overline{m}_{22} & \overline{m}_{23} & \overline{m}_{24} \\ \overline{m}_{31} & \overline{m}_{32} & \overline{m}_{33} & \overline{m}_{34} \\ \overline{m}_{41} & \overline{m}_{42} & \overline{m}_{43} & \overline{m}_{44} \end{bmatrix} \tag{124}$$

Os respectivos termos da matriz da Eq. 124 são:

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_n(k_{l-1}r_l)Y_n{}'(k_l r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_n{}'(k_{l-1}r_l)Y_n(k_l r_l) \\ m_{12} &= Y_n(k_{l-1}r_l)Y_n{}'(k_l r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 Y_n{}'(k_{l-1}r_l)Y_n(k_l r_l) \\ m_{13} &= -nY_n(k_l r_l)J_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \\ m_{14} &= -nY_n(k_l r_l)Y_n(k_{l-1}r_l)\left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \end{aligned} \tag{125.1}$$

$$m_{21} = -J_n{}'(k_l r_l) J_n(k_{l-1} r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_n(k_l r_l) J_n{}'(k_{l-1} r_l)$$

$$m_{22} = -J_n{}'(k_l r_l) Y_n(k_{l-1} r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right)\left(\frac{\eta_{l-1}}{\eta_l}\right)^2 J_n(k_l r_l) Y_n{}'(k_{l-1} r_l)$$

$$m_{23} = n J_n(k_l r_l) J_n(k_{l-1} r_l) \left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right] \tag{125.2}$$

$$m_{24} = n J_n(k_l r_l) Y_n(k_{l-1} r_l) \left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{y_l}\right]$$

$$m_{31} = -n Y_n(k_l r_l) J_n(k_{l-1} r_l) \left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{32} = -n Y_n(k_l r_l) Y_n(k_{l-1} r_l) \left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{33} = Y_n{}'(k_l r_l) J_n(k_{l-1} r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right) Y_n(k_l r_l) J_n{}'(k_{l-1} r_l) \tag{125.3}$$

$$m_{34} = Y_n{}'(k_l r_l) Y_n(k_{l-1} r_l) - \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right) Y_n(k_l r_l) Y_n{}'(k_{l-1} r_l)$$

$$m_{41} = n J_n(k_l r_l) J_n(k_{l-1} r_l) \left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{42} = n J_n(k_l r_l) Y_n(k_{l-1} r_l) \left[\left(\frac{\beta_l}{\gamma_l} - \frac{\beta_{l-1}}{\gamma_{l-1}}\right)\frac{1}{Z_l}\right]$$

$$m_{43} = -J_n{}'(k_l r_l) J_n(k_{l-1} r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right) J_n(k_l r_l) J_n{}'(k_{l-1} r_l) \tag{125.4}$$

$$m_{44} = -J_n{}'(k_l r_l) Y_n(k_{l-1} r_l) + \left(\frac{k_l}{k_{l-1}}\right) J_n(k_l r_l) Y_n{}'(k_{l-1} r_l)$$

É importante destacar a semelhança entre as matrizes de transmissão do primeiro (Eq.120) e segundo (Eq. 125) formalismos. O único fator que os difere é o termo (n), em um, o qual passa a ser (-n), no outro.

Esta relação é também verificada na matriz de transmissão da fronteira externa, $r = r_N$, entre o último anel dielétrico (ℓ = N-1) e a região externa (ℓ = N).

Assim, a matriz de transmissão referente à fronteira externa do segundo formalismo será obtida pelo do primeiro formalismo (Eqs. 108 e 109), substituindo neste, o termo (n) por (-n).

Seja:

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} = \widetilde{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} \begin{bmatrix} A_{N-1} \\ B_{N-1} \\ C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{bmatrix} \tag{126}$$

Onde:

$$\widetilde{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} = \left(\frac{j\pi k_N r_N}{4}\right) \begin{bmatrix} \overline{m}_{11} & \overline{m}_{12} & \overline{m}_{13} & \overline{m}_{14} \\ \overline{m}_{21} & \overline{m}_{22} & \overline{m}_{23} & \overline{m}_{24} \\ \overline{m}_{31} & \overline{m}_{32} & \overline{m}_{33} & \overline{m}_{34} \\ \overline{m}_{41} & \overline{m}_{42} & \overline{m}_{43} & \overline{m}_{44} \end{bmatrix} \tag{127}$$

Os respectivos termos da matriz da Eq. 127 são:

$$\begin{aligned} m_{11} &= J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N) \\ m_{12} &= Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N) \\ m_{13} &= -nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right] \\ m_{14} &= -nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right] \end{aligned} \tag{128.1}$$

$$m_{21} = -J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)'}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)$$

$$m_{22} = -Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)'}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 {Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)$$

$$m_{23} = nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right] \tag{128.2}$$

$$m_{24} = nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{y_N}\right]$$

$$m_{31} = -nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right]$$

$$m_{32} = -nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right]$$

$$m_{33} = J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right){J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N) \tag{128.3}$$

$$m_{34} = Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)'}(\gamma_N) - \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right){Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(2)}(\gamma_N)$$

$$m_{41} = nJ_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right]$$

$$m_{42} = nY_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)\left[\left(\frac{\beta_N}{\gamma_N} - \frac{\beta_{N-1}}{\gamma_{N-1}}\right)\frac{1}{Z_N}\right]$$

$$m_{43} = -J_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)'}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right){J_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N) \tag{128.4}$$

$$m_{44} = -Y_n(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)'}(\gamma_N) + \left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right){Y_n}'(\gamma_{N-1}){H_n}^{(1)}(\gamma_N)$$

Os parâmetros (γ_ℓ, β_ℓ, z_ℓ, y_ℓ; ℓ = N, (N-1)) são os definidos nas expressões da Eq. 83, então:

$$\left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right)\left(\frac{\eta_{N-1}}{\eta_N}\right)^2 = \left(\frac{y_{N-1}}{y_N}\right)$$

$$\left(\frac{k_N}{k_{N-1}}\right) = \left(\frac{z_{N-1}}{z_N}\right)$$

2.3.3 Equação de Dispersão dos Modos Híbridos (HEM_{nm})

As equações de dispersão dos modos HEM_{nm} (primeira e segunda formulações) são inferidas com o mesmo raciocínio pertinente ao modo TM_{0m} (item 2.1.4): os coeficientes dos campos da região externa (A_N, B_N, C_N, D_N) são relacionados aos do núcleo (A_0, B_0, C_0, D_0) pelos produtos sequenciais das matrizes de transmissão da fronteira externa (r_N) que limita o núcleo (r_1).

Seja:

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \\ C_N \\ D_N \end{bmatrix} = M^{HEM}[0,N] \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \\ D_0 \end{bmatrix} \tag{129}$$

Para a primeira formulação:

$$M^{HEM}[0,N] = \overline{\overline{m}}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} \cdot \overline{\overline{m}}[(N-1),(N-2)]_{(r=r_{N-1})} \ldots \overline{\overline{m}}[2,1]_{(r=r_2)} \cdot \overline{\overline{m}}[1,0]_{(r=r_1)} \tag{130}$$

A matriz $\overline{\overline{m}}[N,(N-1)]_{(r=r_N)}$, referente à fronteira externa, é calculada pelas Eqs. 108 e 109. As demais matrizes (regiões internas, $r_{N-1} \leq r \leq r_1$) são obtidas pelas Eqs. 100 e 101.

De acordo com o segundo formalismo (2HEM):

$$M^{HEM}[0,N] = \widetilde{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)} \cdot \widetilde{m}[(N-1),(N-2)]_{(r=r_{N-1})} \dots \widetilde{m}[2,1]_{(r=r_2)} \cdot \widetilde{m}[1,0]_{(r=r_1)} \quad (131)$$

A matriz $\widetilde{m}[N,(N-1)]_{(r=r_N)}$, referente à fronteira externa, é calculada pelas Eqs. 127 e 128. As demais matrizes (regiões internas, $r_{N-1} \leq r \leq r_1$) são obtidas pelas Eqs. 124 e 125.

A matriz da Eq. 129 estabelece, para ambas formulações, o seguinte arranjo:

$$M^{HEM}[0,N] = \begin{bmatrix} M^{HEM}{}_{11} & M^{HEM}{}_{12} & M^{HEM}{}_{13} & M^{HEM}{}_{14} \\ M^{HEM}{}_{21} & M^{HEM}{}_{22} & M^{HEM}{}_{23} & M^{HEM}{}_{24} \\ M^{HEM}{}_{31} & M^{HEM}{}_{32} & M^{HEM}{}_{33} & M^{HEM}{}_{34} \\ M^{HEM}{}_{41} & M^{HEM}{}_{42} & M^{HEM}{}_{43} & M^{HEM}{}_{44} \end{bmatrix} \quad (132)$$

Levando a Eq. 132 na Eq. 129 e considerando as hipóteses de que, no núcleo, $B_0 = D_0 = 0$, e na região externa $A_N = C_N = 0$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_N \\ 0 \\ D_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{HE}{}_{11} & M^{HE}{}_{12} & M^{HE}{}_{13} & M^{HE}{}_{14} \\ M^{HE}{}_{21} & M^{HE}{}_{22} & M^{HE}{}_{23} & M^{HE}{}_{24} \\ M^{HE}{}_{31} & M^{HE}{}_{32} & M^{HE}{}_{33} & M^{HE}{}_{34} \\ M^{HE}{}_{41} & M^{HE}{}_{42} & M^{HE}{}_{43} & M^{HE}{}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ C_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (133)$$

A matriz da Eq. 133 fornece:

$$\begin{bmatrix} M^{HEM}{}_{11} & M^{HEM}{}_{13} \\ M^{HEM}{}_{31} & M^{HEM}{}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (134)$$

A Eq. 134 terá solução diferente da trivial, se e somente se, o determinante da respectiva matriz se anular. Então:

$$det\begin{bmatrix} M^{HEM}{}_{11} & M^{HEM}{}_{13} \\ M^{HEM}{}_{31} & M^{HEM}{}_{33} \end{bmatrix} = 0 \tag{135}$$

A Eq. 135 é a equação de dispersão dos modos híbridos (HEM_{nm}), primeira e segunda formulação.

3 SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE DISPERSÃO E RESULTADOS OBTIDOS

Há inúmeras alternativas para a solução numérica da equação de dispersão no plano complexo. Neste trabalho, conforme já informado, se fará uso do método da Falsa Posição e da sub-rotina DZANLY (baseada no método de Müller). O primeiro método foi programado, e o segundo faz parte da biblioteca IMSL Fortran. Os detalhes referentes à programação, bem como o hardware utilizado e tempo de duração das execuções estão descritos no APÊNDICE. O objetivo da aplicação do método da falsa posição foi para que o uso da teoria desenvolvida, neste trabalho, não ficasse atrelada à biblioteca IMSL do Fortran.

Nesta seção, será apresentada a estratégia utilizada na solução da equação de dispersão das fibras de Bragg. Em seguida, serão divulgados os gráficos das análises efetuadas, sendo os mesmos comparados com os encontrados na literatura.

A estratégia apresentada é imprescindível à escolha correta dos valores, no plano complexo, da solução procurada.

3.1 Estratégia Fundamental para a Análise dos Modos da Fibra de Bragg

Como há inúmeros candidatos para a solução das equações de dispersão dos modos em uma fibra de Bragg, torna-se extremamente complicado encontrar o valor correto sem qualquer estimativa inicial. E esta estimativa pode ser feita através da estratégia descrita a seguir.

Todos os modos que se propagam na fibra de Bragg satisfazem, como em todo guia de onda, as condições de ressonância transversa, que, para as fibras de Bragg, correspondem aos comprimentos de onda nos quais as perdas de propagação são mínimas. Assim, nestes comprimentos de onda de perdas mínimas,

as camadas dielétricas das células de Bragg refletem fortemente a energia radial, e a estrutura pode ser modelada por um núcleo ressonante com borda metálica. Portanto, a estimativa pode ser facilmente realizada aplicando a condição de que a componente angular do campo elétrico (E_ϕ) deve se anular na fronteira do núcleo, caso do modo TE_{0m}, assim como a componente radial magnética (H_r) para o modo TM_{0m}.

3.1.1 Estimativa do Real(n_{ef}) para os Modos TE_{0m} e TM_{0m} (n = 0)

A estimativa do $Real(n_{ef})$ relacionado aos modos TE_{0m} e TM_{0m} é efetuada pela nulidade, na fronteira do núcleo ($r = r_1$), das componentes:

$$TE_{0m}: \overrightarrow{E_\varphi}(r = r_1) = \frac{jA_0\beta}{k_{T0}} J_1(k_{T0}r_1)e^{-j\beta z}\overrightarrow{a_\varphi} = 0$$

$$TM_{0m}: \overrightarrow{H_r}(r = r_1) = \frac{jC_0\beta}{k_{T0}} J_1(k_{T0}r_1)e^{-j\beta z}\overrightarrow{a_r} = 0$$

Onde:

$\beta = k_0\eta_{ef}$

$\eta_{ef} = Real(\eta_{ef}) - jImag(\eta_{ef})$: Índice efetivo do respectivo modo.

$k_{T0} = k_0\sqrt{{\eta_0}^2 - {\eta_{ef}}^2}$: Número de onda transversal do núcleo.

$\eta_0 = 1$: Índice de refração do núcleo oco.

$r = r_1$: Raio do núcleo.

Considera-se Real(n_{ef})>>Imag(n_{ef}), e portanto:

$$k_{T0} = k_0\sqrt{1 - Real^2(\eta_{ef})} \tag{3-1}$$

As estimativas dos modos TE_{0m} e TM_{0m} são condicionadas à:

$$J_1(k_{T0}r_1) = 0 \tag{3-2}$$

Onde $k_{T0}r_1 = \chi_{1m}$, sendo χ_{1m} a m-ésima raiz da função de Bessel de primeira ordem. Cada raiz corresponde a diferentes estimativas dos modos TE_{0m}.

Utilizando a equação 3-2, uma boa estimativa para a condição de núcleo oco, onde $\eta_0 = 1$, será:

$$Real(n_{ef}(\lambda)) \simeq \sqrt{1 - \left(\frac{\chi_{1m}}{2\pi}\frac{\lambda}{r_1}\right)^2} \tag{3-3}$$

O primeiro modo TE_{01} ocorre em χ_{11} = 3.832:

$$Real(n_{ef}(\lambda)) \simeq \sqrt{1 - 0.372\left(\frac{\lambda}{r_1}\right)^2} \tag{3-4}$$

Estima-se o $Real(n_{ef})$ do modo TM_{0m} pelo valor obtido da equação de dispersão do referido modo, menor e mais próximo do modo TE_{0m}.

3.1.2 Modos Híbridos

Para os modos híbridos, há duas polarizações a serem consideradas.

3.1.2.1 Primeira Polarização ($1HEM_{nm}$)

Para este modo, a estimativa é realizada anulando-se, em $r = r_1$, a componente angular do campo elétrico (Eq. 2-81), com B_0=D_0=0. Desta forma:

$$A_0\left(\frac{n\beta_{nm}}{k_{T0}r_1}\right)J_n(k_{T0}r_1) + (Z_0k_0)C_0J_n{}'(k_{T0}r_1) = 0 \tag{3-5}$$

Utilizando a identidade de Bessel na Eq. 3-5, temos:

$$J_n{}'(k_{T0}r_1) = -\frac{n}{k_{T0}r_1}J_n(k_{T0}r_1) + J_{n-1}(k_{T0}r_1) \tag{3-6}$$

A Eq. 3-6 é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{n}{k_{T0}r_1}\left(\frac{A_0}{Z_0C_0}\frac{\beta_{nm}}{k_0} - 1\right)J_n(k_{T0}r_1) + J_{n-1}(k_{T0}r_1) = 0 \tag{3-7}$$

A partir da consideração inicial ${\beta_{nm}}/{k_0} = Real(n_{ef})$, e fazendo $A_0 = {(Z_0C_0)}/{\eta_0}$, que é uma escolha razoável, a Eq. 3-7 é expressa como:

$$J_{n-1}(k_{T0}r_1) = \frac{n}{(k_{T0}r_1)}\left(1 - \frac{Real(n_{ef})}{\eta_0}\right)J_n(k_{T0}r_1) \tag{3-8}$$

Substituindo, na Eq. 3-8, a condição inicial $(k_{T0}r_1)$, a equação resultante para a estimativa do modo 1HEM$_{nm}$ será:

$$J_{n-1}(k_{T0}r_1) = \frac{nJ_n(k_{T0}r_1)}{2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda}\right)\eta_0}\sqrt{\frac{1 - \frac{Real(n_{ef}(\lambda))}{\eta_0}}{1 + \frac{Real(n_{ef}(\lambda))}{\eta_0}}} \tag{3-9}$$

Para comprimentos de onda próximos das menores perdas no domínio de interesse, $Real(n_{ef}) \simeq \eta_0$, e consequentemente $[Real(n_{ef})/\eta_0] \simeq 1$, e o lado direito da eq. 3-9 é descartado. A equação mais simples para a estimativa de $Real(n_{ef}(\lambda))$ para o modo 1HEM$_{nm}$ será:

$$J_{n-1}(k_{T0}r_1) = 0 \tag{3-10}$$

Portanto:

$$Real(n_{ef}(\lambda)) \simeq \sqrt{{\eta_0}^2 - \left(\frac{\chi_{[(n-1),m]}}{2\pi}\frac{\lambda}{r_1}\right)^2} \tag{3-11}$$

Onde $\chi_{[(n-1),m]}$ é a m-ésima raiz da função de Bessel de ordem (n-1).

Para a estrutura de núcleo oco, $\eta_0 = 1$, o modo 1HEM$_{11}$=HEM$_{11}$ requer que $\chi_{01} = 2{,}405$, logo:

$$Real\left(n_{ef}(\lambda)\right) = \sqrt{1 - 0.1465\left(\frac{\lambda}{r_1}\right)^2} \tag{3-12}$$

3.1.2.2Segunda Polarização (2HEM$_{nm}$)

A componente angular do campo elétrico na segunda polarização é obtida pela Eq. 2-81, alterando a constante "*n*" pelo valor "-*n*". As funções de Bessel são mantidas sem alterações. Sendo assim, a Eq. 3-5 é reescrita da seguinte forma:

$$A_0\left(\frac{-n\beta_{nm}}{k_{T0}r_1}\right)J_n(k_{T0}r_1) + (Z_0k_0)C_0{J_n}'(k_{T0}r_1) = 0 \tag{3-13}$$

Uma escolha razoável é considerar que $A_0 = {-Z_0C_0}/{\eta_0}$, tornando a equação da segunda polarização (Eq. 3-13) idêntica à primeira polarização (Eq. 3-8), pois as duas polarizações são caracterizadas por modos degenerados.

A estimativa para a segunda polarização é, portanto, calculada pela mesma equação da primeira polarização, conforme as Eqs. 3-9 e 3-11.

3.2 Resultados da Análise

Para validar o modelo das fibra de Bragg de núcleo oco desenvolvido neste trabalho, os resultados obtidos foram comparados com os encontrados na literatura. (ARGYROS, 2002). A fibra de Bragg possui as mesmas características descritas na Figura 1-5 e na Figura 1-6, ou seja: índice de refração do núcleo (n_0 = 1); índice de refração das células de Bragg (n_1 = 1,49, n_2 = 1,17); índice de refração da casca (η_N = 1,49); raio do núcleo (r_0 = 1,3278 μm); larguras das células de Bragg (d_1 = 0,2133 μm, d_2 = 0,3460 μm); número de células de Bragg (N = 16). As perdas dos modos foram calculadas conforme Guo e Albin (2004), através da seguinte expressão:

$$Loss(\lambda) = \frac{4\pi}{\lambda l_n(10)} Imag(n_{ef}) = \frac{54.57}{\lambda} Imag(n_{ef}) \cdot 10^6 \left[\frac{dB}{m}\right] \qquad (3\text{-}14)$$

Um modo qualquer na banda fotônica da BF apresenta um comprimento de onda associado a perdas mínimas, devido às reflexões do campo nas células de Bragg. Ao variar o comprimento de onda, as reflexões tornam-se menos intensas, produzindo perdas maiores. Portanto, as perdas de um modo na banda fotônica serão representados por uma curva parabólica; além disso, a parte real do n_{ef} varia lentamente próximo ao comprimento de onda de menor perda.

O modo TE_{01} possui $\chi_{11} = 3{,}832$, sendo então estimado pela Eq. 3-4, ou seja, $Real(n_{ef}) = \sqrt{1 - 0{,}211\lambda^2}$. Enquanto que, para o modo TE_{02}, $\chi_{12} = 0{,}7016$, sendo estimado pela Eq. 3-3 e resultando em $Real(n_{ef}) = \sqrt{1 - 0{,}7072\lambda^2}$.

A Figura 3-1 confronta os resultados de $Real(n_{ef})$, para os modos TE_{01} e TE_{02}, calculados pela rotina DZANLY e o método da falsa posição, com os da referência em Argyros (2002). É possível observar que a concordância entre os resultados é muito boa.

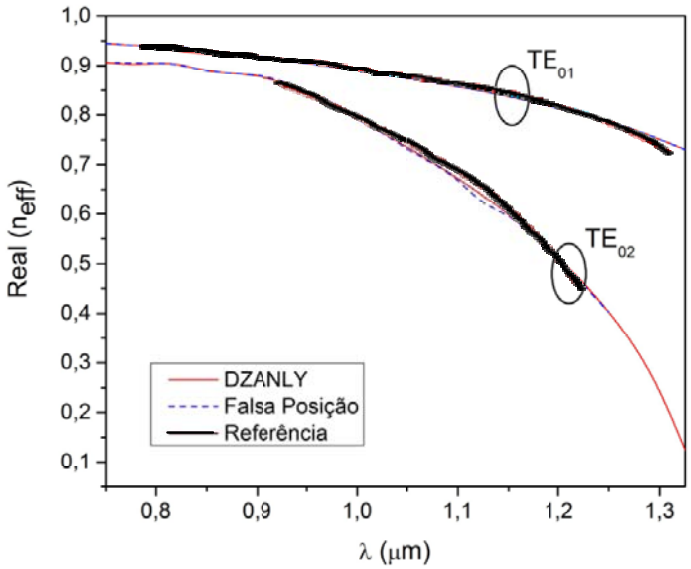

Figura 3-1: Comparação de Real(n_{eff}).

A seguir, é apresentada a comparação entre os valores estimados e os calculados através da sub-rotina DZANLY e o método da falsa posição, para os modos TE_{01} e TE_{02}.

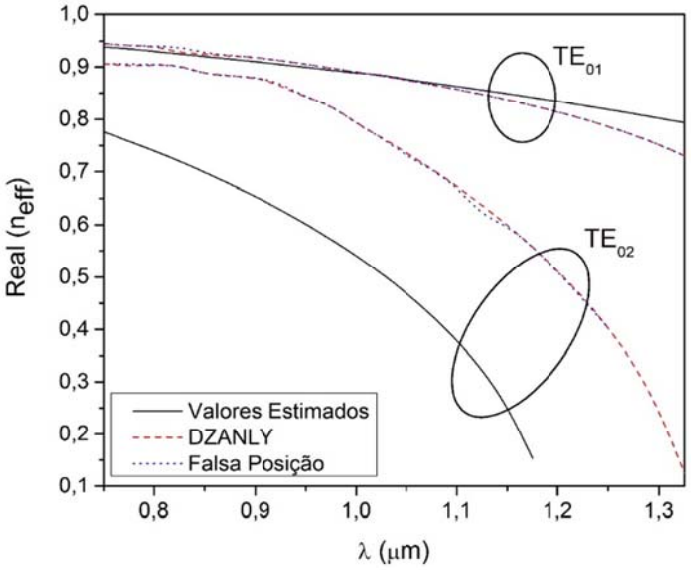

Figura 3-2: Valores estimados e calculados para os modos TE_{01} e TE_{02}.

A Figura 3-2 mostra que apenas o modo TE01 está na banda fotônica da fibra de Bragg. Conclui-se que a estratégia de orientar a curva de $Real(n_{ef})$ através da estimativa na Eq. 3-4 é válida para os modos que jazem na banda fotônica da

estrutura. Na presente análise, há apenas o modo TE_{01}, como é mostrado na Figura 3-3. Os resultados para o modo TE_{01} mostrado na Figura 3-1 e na Figura 3-2, obtidos pela rotina DZANLY e o método da Falsa Posição, apresentam-se com uma margem de erro menor que 2%.

Na Figura 3-3 comparam-se os resultados das perdas dos mesmos modos. Para o modo TE_{02}, vê-se uma máxima diferença de cerca de 12% entre o resultado encontrado com a rotina DZANLY e o método da falsa posição, apesar das curvas exibirem o mesmo comportamento. Para o modo fundamental TE_{01}, a diferença entre os resultados é menor que 2%. A comparação com os resultados encontrados em Argyros (2002) também foi bastante adequada.

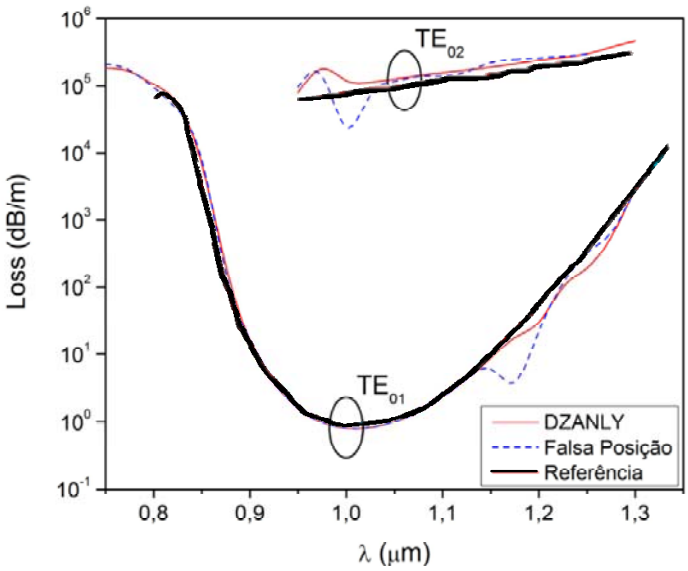

Figura 3-3: Comparação das perdas.

A Figura 3-3 confirma que o modo TE_{02} representa um modo de fuga. O mesmo encontra-se fora da banda fotônica, devido às suas perdas não apresentarem um ponto mínimo referente à máxima reflexão. Este fato explica as fortes perdas do modo e também a discrepância entre os valores estimados e os calculados (conforme a Figura 3-2), concluindo-se então que esta estratégia é aplicável apenas nos modos presentes na banda fotônica.

Considerando o modo TE01, ao comparar as curvas de $Real(n_{ef})$, na Figura 3-2, com a curva de perdas, Figura 3-3, é possível observar um comportamento

singular entre ambas: enquanto o valor estimado do $Real(n_{ef})$ é menor do que o calculado pelas simulações, as perdas diminuem. No ponto de interseção entre o $Real(n_{ef})$ estimado e o obtido da simulação, a curva de perdas atinge o valor mínimo, e começa a aumentar conforme o $Real(n_{ef})$ estimado fica maior do que o encontrado com a simulação. Na Figura 3-4 é apresentada a relação entre comportamento do $Real(n_{ef})$ e as perdas, considerando as simulações com a sub-rotina DZANLY. A linha tracejada indica o ponto a partir do qual o valor estimado do $Real(n_{ef})$ passa a ficar maior do que o obtido com o simulador.

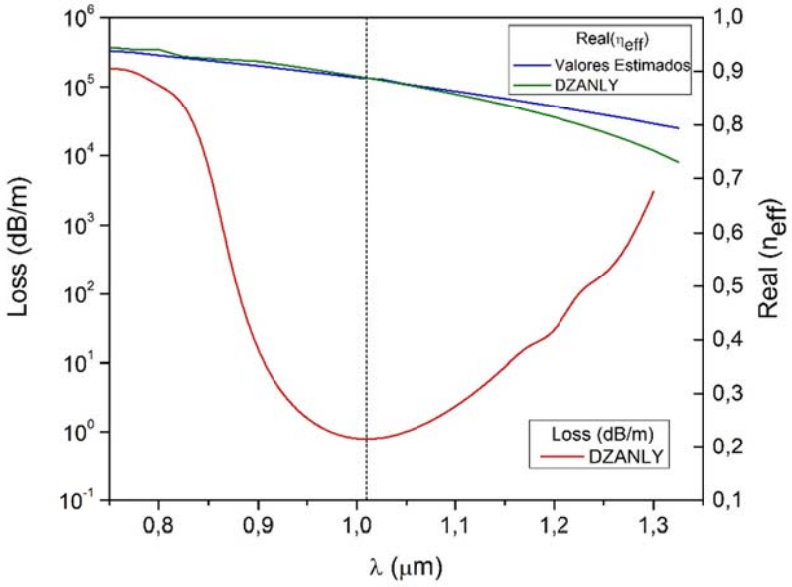

Figura 3-4: Relação entre o comportamento do $Real(n_{ef})$ e as perdas.

Conforme ilustrado nos gráficos, a concordância entre os resultados obtidos pelo modelo apresentado neste trabalho e os encontrados em Argyros (2002) é bastante satisfatória. Além disso, foi também comparado o resultado do n_{ef} obtido com a estratégia adotada neste trabalho, no comprimento de onda $\lambda = 1\mu m$ (que é o ponto de menor perda no modo TE_{01}), com os resultados extraídos de Guo e Albin (2004), onde foram utilizados os métodos da matriz de transferência e o método assintótico. A Tabela 1 apresenta os resultados, os quais também mostraram-se muito bons.

Tabela 1: Comparação entre os índices de refração efetivos.

Modo	Estratégia deste trabalho	Referência	
		Matriz de Transferência	Método Assintótico
TE_{01}	0,891067 - j1,4230x10^{-8}	0,8910672175 - j1,422605x10^{-8}	0,9091900 – j0,686126 x10^{-8}
TE_{02}	0,792975 - j1,8140x10^{-3}	0,7920859031 - j1,819323x10^{-3}	0,7869166 – j3,556000 x10^{-3}

Os modos TM_{01} e TM_{02} também foram investigados, apenas pela rotina DZANLY. Os resultados na Figura 3-5 ($Real(n_{ef})$), e na Figura 3-6 (perdas), indicam claramente que ambos os modos estão fora da banda fotônica, resultando em fortes perdas. Argyros (2002) não mostra os resultados destes modos, apenas menciona que ambos apresentam altas perdas.

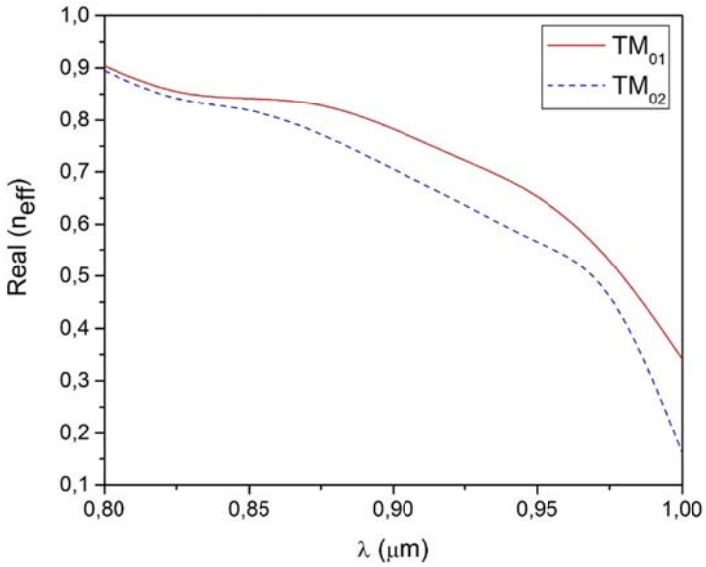

Figura 3-5: $Real(n_{ef})$ dos modos TM_{01} e TM_{02}.

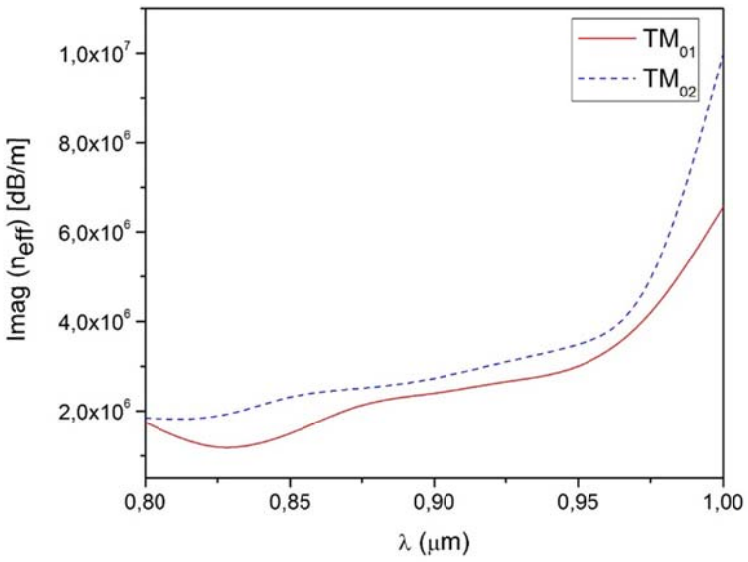

Figura 3-6: Imag(n_{ef}) dos modos TM_{01} e TM_{02}.

A Figura 3-6 deixa claro que os modos TM_{01} e TM_{02} estão fora da banda fotônica da fibra de Bragg, já que estes gráficos não apresentam as exigências requeridas em comprimentos de onda referentes à perda mínima, λ = 0,825 μm. Neste comprimento de onda, a curva na Figura 3-5 exibe uma rápida variação.

As componentes dos campos normalizadas (Hz, Eφ) estão mostradas na Figura 3-7 (modo TE_{01}, λ = 1 μm), Figura 3-8 (modo TE_{02}, λ = 1 μm), e Figura 3-9 (modo TM_{01}, λ = 0,825 μm). Estas figuras indicam claramente que apenas o modo TE_{01} é bem confinado nas células de Bragg, devido às fortes reflexões destas células.

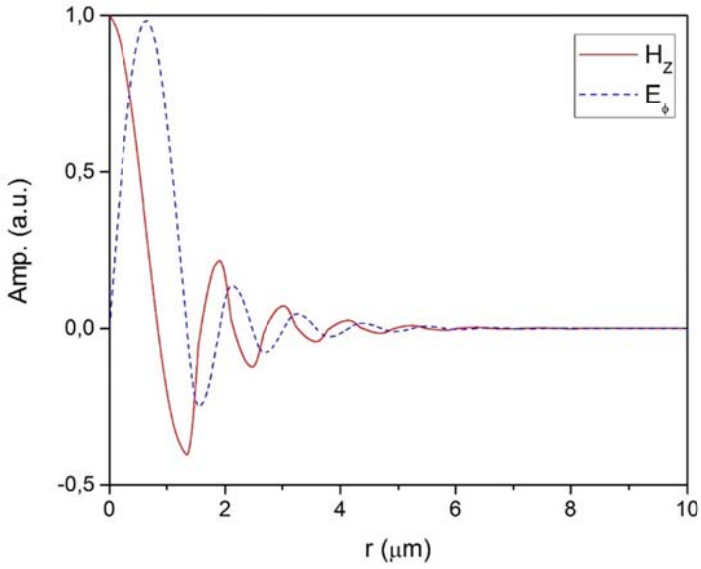

Figura 3-7: Modo TE_{01}, λ = 1μm, n_{eff} = 0,8910671-j1,423x10^{-8}.

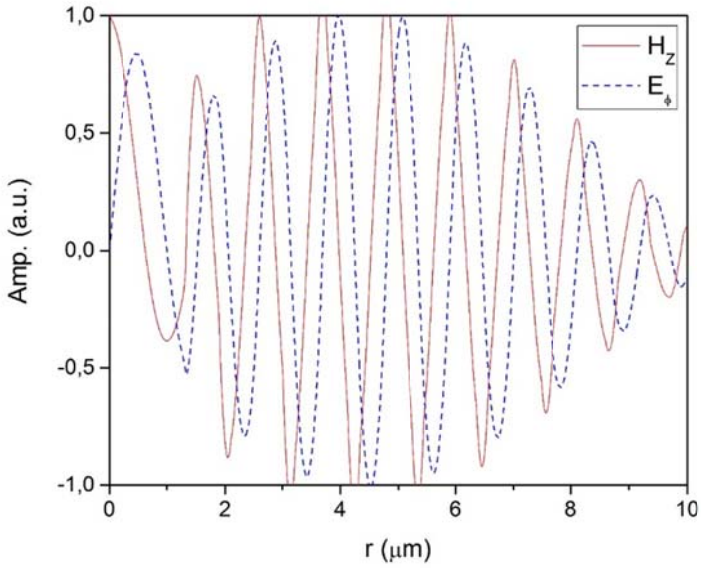

Figura 3-8: Modo TE_{02}, λ = 1μm, n_{eff} = 0,7921-j1,814x10^{-3}.

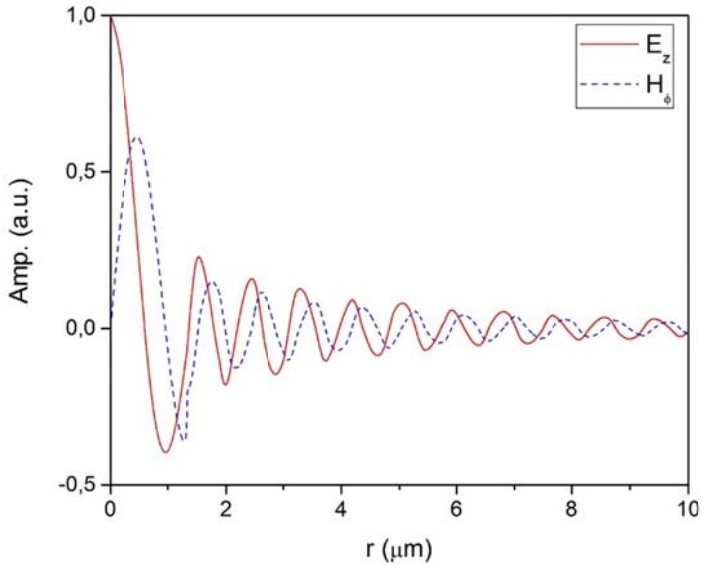

Figura 3-9: Modo TM_{01}, λ = 0,825μm, n_{eff} = 0,8462-j2,241x10^{-6}.

A Figura 3-10 ilustra os valores calculados e os estimados das duas polarizações dos modos híbridos, $1HEM_{11}$ e $2HEM_{11}$. Os valores estimados são calculados pela Eq. 3-12, para $\chi_{01} = 2{,}405$, $Real(n_{ef}) = \sqrt{1 - 0{,}08311\lambda^2}$. Na Figura 3-11 são obtidas as perdas destes modos. Ambos os resultados indicam que as duas polarizações correspondem a modos degenerados.

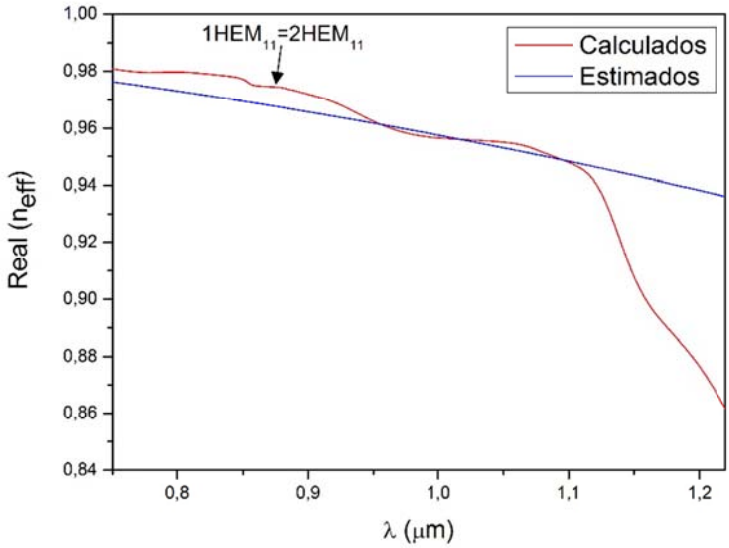

Figura 3-10: Valores calculados e estimados, para as duas polarizações dos modos híbridos.

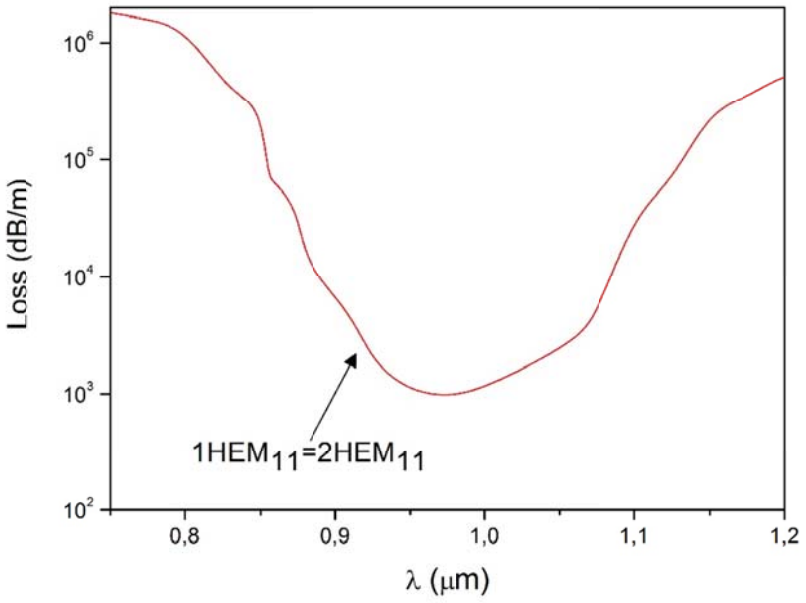

Figura 3-11: Perdas das duas polarizações dos modos híbridos.

Portanto, de acordo com os resultados obtidos, observa-se que a estrutura analisada apresentou fortes perdas para os modos TM, híbridos, e também para o modo TE_{02}. Pela Figura 3-1 (índice para o modo TE_{01}), e Figura 3-10 (índice para os modos híbridos), percebe-se que o primeiro modo deveria ser o híbrido; porém, devido às fortes perdas, o modo fundamental é o TE_{01}, e a fibra é considerada monomodal.

A seguir, uma análise mais detalhada é realizada para o modo fundamental TE_{01}, considerando diferentes valores para o núcleo oco: r_c = 1,3278, 1,8278 e 2,3278 μm.

O $Real(n_{ef})$ e as perdas (Imag(n_{ef})) são ilustradas na Figura 3-12 e na Figura 3-13. Através do gráfico da Figura 3-13, fica claro que as perdas e o comprimento de onda de menos perda diminui conforme o raio aumenta.

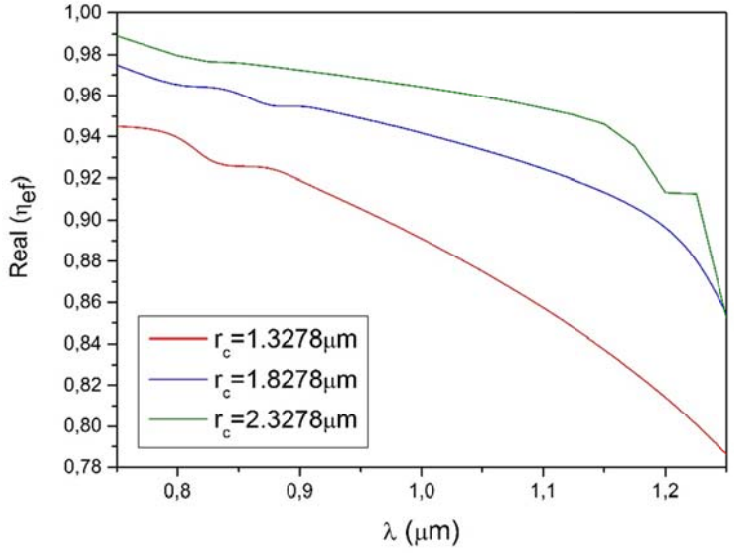

Figura 3-12: $Real(n_{ef})$ do modo TE_{01} para três valores de raios.

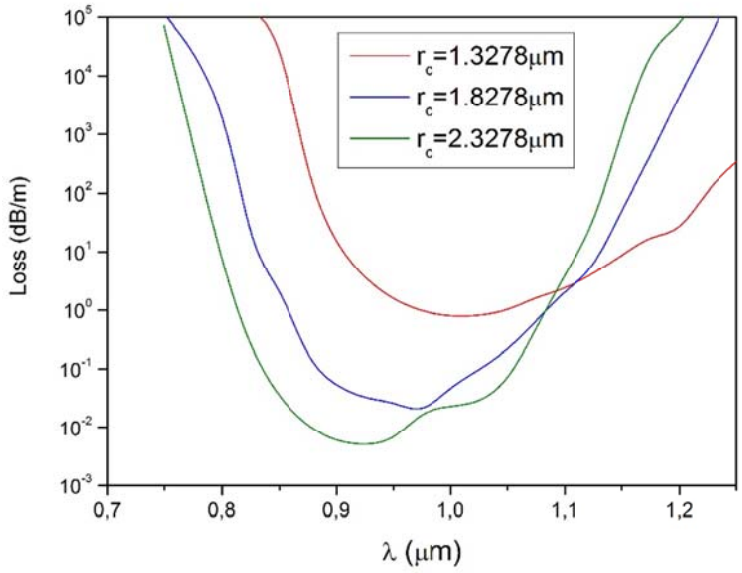

Figura 3-13: Perdas do modo TE_{01} para três valores de raios.

Vale ressaltar que os resultados encontrados estão em perfeito acordo com os esperados pela teoria. Como já foi abordado, próximo aos comprimentos de onda em que as perdas são mínimas, a BF é modelada como um núcleo ressonante com fronteira metálica, tal como um guia de onda circular oco. Sendo assim, se o raio do núcleo aumenta, o $Real\left(n_{ef}(\lambda)\right)$, na Eq. 3-4, também aumenta. Consequentemente,

o comprimento de onda na máxima reflexão ($\lambda_{min} = \lambda_0/n_{ef}$, com menor perda) diminui.

Além disso, deve ser também considerado que, aumentando o raio do núcleo, o raios dos anéis também aumenta. Consequentemente, a estrutura tende a comportar-se como um plano de placas dielétricas. Logo, as perdas na BF diminuirão.

Foi também efetuada uma análise da estrutura aumentando-se a quantidade de anéis para 32. Os demais parâmetros foram mantidos sem alteração. A Figura 3-15 apresenta o gráfico de perdas nesta configuração, para o modo TE_{01}. Comparando com o gráfico da Figura 3-13, é possível observar que, no comprimento de onda onde as reflexões são maiores, as perdas atingem um valor razoavelmente menor do que na estrutura com 16 anéis.

No entanto, a Figura 3-14, que ilustra o comportamento de $Real(n_{ef})$, apresentou um comportamento ligeiramente diferente da estrutura com 16 anéis. É possível observar que, a partir do comprimento de onda de menor perda, as curvas decaem de forma mais rápida. Este fato parece indicar que, dependendo do aumento na quantidade de anéis, até mesmo o modo fundamental tende a sair da banda fotônica da fibra.

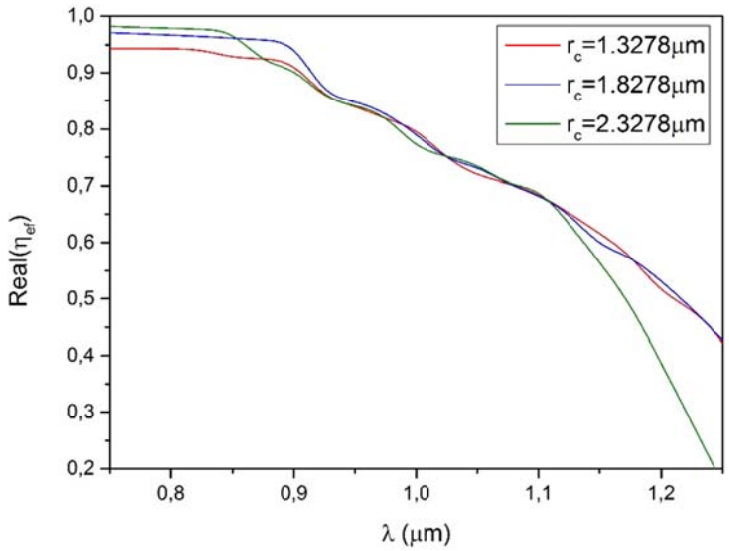

Figura 3-14: $Real(n_{ef})$ do modo TE_{01} para estrutura com 32 anéis.

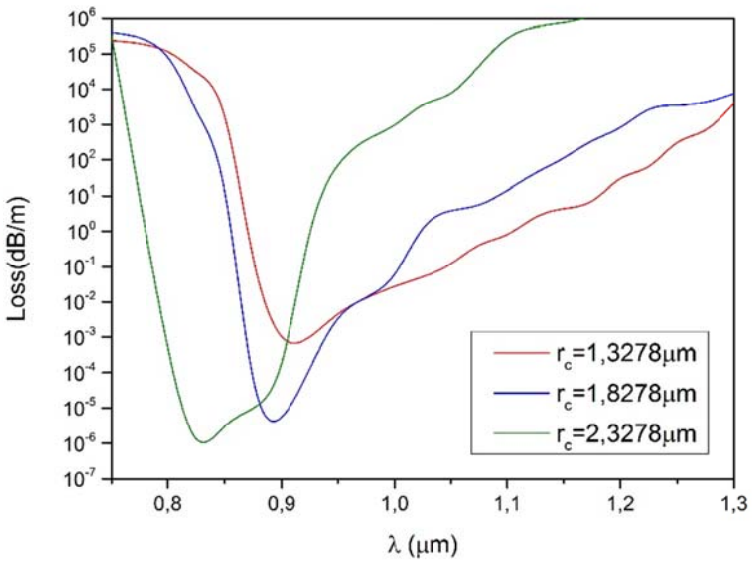

Figura 3-15: Perdas do modo TE_{01} para estrutura com 32 anéis.

Na Figura 3-16 e na Figura 3-17 são investigados o comportamento da estrutura dobrando novamente a quantidade de camadas da casca, ou seja, de 32 para 64 anéis. Nesta configuração, as simulações geraram valores desproporcionais aos apresentados até o momento. Acredita-se que esta anomalia seja devido a não convergência do método, causado, possivelmente, por erros de arredondamentos.

Como pode ser verificado nos gráficos, a estrutura com o menor raio foi a que apresentou a menor perda, diferente dos resultados obtidos até então. O terceiro raio que vinha sendo utilizado, 2,3278μm, não resultou em valores convergentes no simulador Fortran, indicando que o mesmo, possivelmente, ficou fora da banda fotônica da estrutura com 64 anéis.

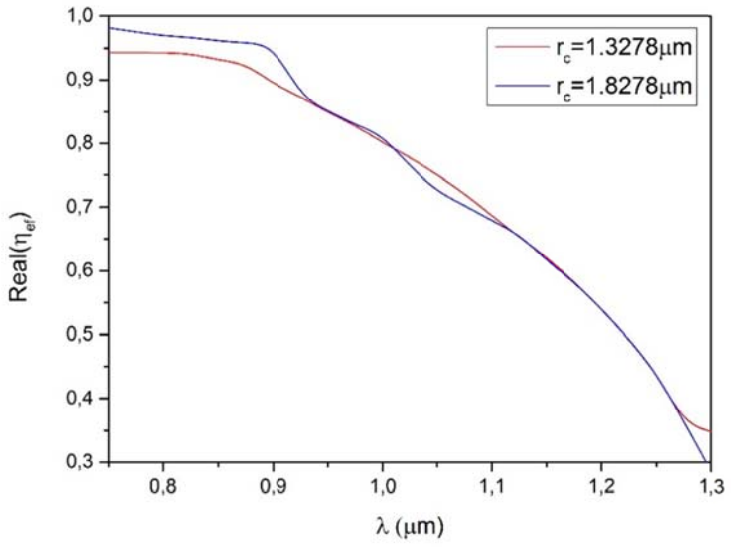

Figura 3-16: $Real(n_{ef})$ do modo TE_{01} para estrutura com 64 anéis.

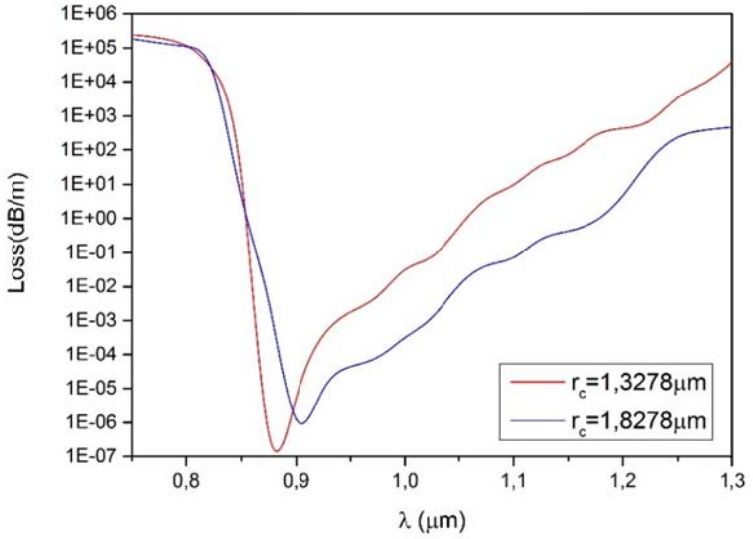

Figura 3-17: Perdas do modo TE_{01} para estrutura com 64 anéis.

Portanto, os resultados ilustrados nos gráficos obtidos com as simulações indicam que a escolha dos parâmetros da fibra, como raio do núcleo e quantidade de anéis, devem ser escolhidos com rigoroso critério. Conforme apresentado, o aumento no número de camadas da casca geram curvas de perdas e de índices de refração efetivos incompatíveis com a teoria apresentada neste trabalho. Este fato aponta para a necessidade de uma investigação mais criteriosa em estruturas com

maior número de anéis, a qual será proposta para trabalhos futuros na próxima seção.

CONCLUSÃO

A presente dissertação abordou uma análise rigorosa das fibras de Bragg de núcleo oco. O estudo foi motivado pela necessidade de se prover uma estratégia que facilitasse as investigações dos modos de Bragg no plano complexo. Sem esta estratégia, a análise destes modos torna-se inviável.

Com o modelo teórico deste trabalho, foram analisadas a dispersão e as perdas de diferentes fibras de Bragg. Constataram-se, com o aumento do raio do núcleo, várias características importantes, tais como: o decréscimo de perdas assim como o deslocamento do comprimento de onda no ponto da perda mínima. O comportamento das componentes longitudinais e transversais dos campos elétrico e magnético foram também levantados. Os resultados encontrados foram validados pela comparação com os dos outros métodos publicados na literatura.

Um fator importante que foi constatado teoricamente é o fato do modo fundamental, nestas estruturas, ser o híbrido. Entretanto, devido às suas excessivas perdas, como as dos modos TM, o modo fundamental é considerado o TE_{01}. A estrutura, portanto, caracteriza-se como um guia monomodal. E dada as características das perdas, a fibra de Bragg atua intrinsicamente como um filtro passa-faixa.

Para completar a análise, foram consideradas fibras com 16, 32 e 64 anéis, com raios distintos. Com 64 anéis, percebeu-se uma anomalia no comportamento esperado das perdas.

A solução da equação não linear das dispersões dos modos TE_{0m}, TM_{0m} e híbridos, no plano complexo, foi obtida pela sub-rotina DZANLY e pelo método da falsa posição. O método da falsa posição foi programado para que a análise não ficasse atrelada à biblioteca do Fortran. Ambos os métodos funcionaram satisfatoriamente.

Pelo modelo teórico e simulações computacionais apresentados nesta dissertação, confirma-se a importância das fibras de Bragg. A busca pelo aumento da capacidade, resultante de transmissões com menores perdas e dispersões, podem ser possíveis com o uso destes modelos de fibras ópticas.

Para trabalhos futuros, sugere-se o projeto de fibras de Bragg (dimensão do núcleo e das células, número de anéis, etc.) em que as mínimas perdas ocorram em comprimentos de onda em torno de 1550 nm, próprios dos atuais *Lasers* empregados em sistemas ópticos de alta capacidade.

REFERÊNCIAS

ABEELUCK, A. K; LITCHINITSER, N. M.; HEADLEY, C.; EGGLETON, B. J. *Analysis of spectral characteristics of photonic bandgap waveguides*. Optics Express, Somerset, NJ, v. 10, n. 23, pp.1320-1333, 2002.

AGRAWAL, G. P. *Fiber-Optic Communication Systems*. 3 ed, Rochester, NY, John Wiley & Sons, 2002.

ARGYROS, A. *Guided modes and loss in Bragg fibres*. Optics Express, Australia, v. 10, n. 24, pp. 1411-1417, 2002.

BALANIS, C. A. *Antenna Theory*. 2 ed., Arizona, John Wiley & Sons, 1997.

BRECHET, F; MARCOU, J.; PAGNOUX, D.; ROY, P. *Complete analysis of the characteristics of propagation into photonic crystal fibers, by the finite element method*. Academic Press, pp. 181-191, 1999.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 9 ed., Boston, MA, Brooks/Cole, 2009.

COLLIN, R. E. *Engenharia de Microondas*. Tradução de Álvaro Augusto A. de Salles. Rio de Janeiro, RJ, Guanabara Dois, 1979.

CREGAN, R. F.; MANGAN, B. J.; KNIGHT, J. C.; BIRKS, T. A.; RUSSELL, P. ST. J.; ROBERTS, P. J.; ALLAN, D. C. *Single-mode photonic band gap guidance of light in air*. Science, v 285, pp. 1537-1539, Washington, DC, 1999.

CUCINOTTA, A.; et al. *Holey fiber analysis through the finite-element method*. IEEE Photonics Technology Letters, v. 14, n. 11, pp. 1530-1532, 2002.

DORAN, N. J.; BLOW, K. J. *Cylindrical bragg fibers*: A design and feasibility study for optical communication. Journal of Lightwave Technology, v. 1, n. 4, pp. 588-590, 1983.

GARDIOL, F. E. *Anisotropic slabs in rectangular waveguides*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, v. Mtt-is, n. 8, pp. 461-467, 1970.

GUO, S.; ALBIN, S. *Comparative analysis of Bragg fibers*. Optics Express, v. 12, n. 1, pp. 198-207, 2004.

HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. Baltimore, John Wiley & Sons, 1964.

HECHT, E. *Optics*. 4 ed., San Francisco, CA, Addison Wesley, 2001.

IBANESCU, M.; FINK, Y; FAN, S.; THOMAS, E. L.; JOANNOPOULOS, J. D. *An All-Dielectric Coaxial Waveguide*. Science, v. 289, pp. 415-419, 2000.

ITO, T. *Transmission of 1.6Tb/s (40 x 40 Gb/s) over 1,200km and three OADMs using 200-km SMF doubled-span with remotely pumped optical amplification*. Proc. of Conference on Optical Fiber Communications (OFC 2004), v. 2, pp. 83–85, 2004.

JOHNSON, S. G.; IBANESCU, M.; SKOROBOGATIY, M.; WEISBERG, O.; ENGENESS, T. D.; SOLJACIC, M.; JACOBS, S. A.; JOANNOPOULOS, J. D.; FINK, Y. *Low-loss asymptotically single-mode propagation in large-core OmniGuide fibers*. Optics Express, v. 9, n. 13, pp. 748-779, 2001.

KAMINOW, I.; LI, T. *Optical Fiber Telecommunications IV-B*: Systems and Impairments. Academic Press, 2002.

KAO, K. C.; HOCKHAM, G. A. *Dielectric-fibre surface waveguides for optical frequencies*. Proc. IEE, v. 113, n. 7, pp. 1151-1158, 1966.

KAPRON, F. P.; KECK, D. B.; MAURER, R. D. *Radiation losses in glass optical waveguides*. Applied Physics Letters, v. 17, n. 423, pp. 423-425, 1970.

KAWANISHI, T.; IZUTSU, M. *Coaxial periodic optical waveguide*. Optics Express, v. 7, n. 1, pp. 10-22, 2000.

LINDELL, I. V. *Huygens' principle in electromagnetics*. IEE Proc-Sci. Meas. Technol., v. 143, n. 2, pp. 103-105, 1996.

LITCHINITSER, N. M.; ABEELUCK, A. K.; HEADLEY, C.; EGGLETON, B. J. *Antiresonant reflecting photonic crystal optical waveguides*. Optics Letters, v. 27, n. 18, pp. 1592-1594, 2002.

MARTINS, A. F. M. *Estudo de fibras ópticas sujeitas a curvaturas apertadas*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Física) – Departamento de Física, Universidade de Aveiro, Aveiro, 2009.

OUYANG, G.; XU, Y.; YARIV, A. *Comparative study of air-core and coaxial Bragg fibers: single-mode transmission and dispersion characteristics*. Optics Express, v. 9, n. 13, pp. 733-747, 2001.

OUYANG, G.; XU, Y.; YARIV, A. *Theoretical study on dispersion compensation in air-core Bragg fibers*. Optics Express, v. 10, n. 17, pp. 899-908, 2002.

RAMASWAMI, R.; SIVARAJAN, K. N.; SASAKI, G. H. *Optical Networks*: A Practical Perspective. 3 ed., Morgan Kaufmann, 2010.

SNYDER, A. W.; LOVE, J. D. *Optical Waveguide Theory*. Londres, Chapman and Hall, 1983.

STERKE, C. M.; BASSETT, I. M.; STREET, A. G. *Differential losses in Bragg fibers*. Journal of Applied Physics, v. 76, n. 2, pp. 680-688, 1994.

URANUS, H.P.; HOEKSTRA, H.J.W.M. *Modelling of microstructured waveguides using a finite-element-based vectorial mode solver with transparent boundary conditions*. Optics Express, v. 12, n. 12, pp. 2795-2809, 2004.

VIENNE, G.; XU, Y.; JAKOBSEN, C.; DEYERL, H. J.; HANSEN, T. P.; LARSEN, B. H.; JENSEN, J. B.; SORENSEN, T.; TERREL, M.; HUANG, Y.; LEE, R.; MORTENSEN, N. A.; BROENG, J.; SIMONSEN, H.; BJARKLEV, A.; YARIV, A. *First demonstration of air-silica Bragg fiber*. Optical Society of America, 2003.

VISUAL NUMERICS INC (VNI). *IMSL Fortran 90 MP Library*: Function catalog, [199-?].

XU, Y.; OUYANG, G. X.; LEE, R. K.; YARIV, A. *Asymptotic matrix theory of bragg fibers*. Journal of Lightwave Technology, v. 20, n. 3, pp. 428-440, 2002.

U, Y.; YARIV, A. *Asymptotic analysis of silicon based Bragg fibers*. Optics Express, v. 11, n. 9, pp. 1039-1049, 2003.

YEH, P.; YARIV, A. *Bragg reflection waveguides*. Optics Communications, v. 19, n. 3, pp. 427-430, 1976.

YEH, P.; YARIV, A.; MAROM, E. *Theory of Bragg fiber*. Journal of Optical Society of America, v. 68, n. 9, pp. 1196-1201, 1978.

APÊNDICE – Simulações

Os simuladores utilizados neste trabalho foram desenvolvidos utilizando-se a linguagem de programação FORTRAN, sendo compilados nos softwares PGI Visual Fortran e Microsoft Visual Studio.

O hardware no qual os simuladores foram executados era caracterizado por um processador Intel Core 2 Duo, *clock* de 2 GHz, 4 GB de memória RAM. Foi utilizado o sistema operacional Windows 7 Home Premium SP1, na versão 64 bits.

Os tempos de execução até a obtenção dos resultados variaram de maneira proporcional à quantidade de anéis da estrutura. Ou seja, o aumento no número de anéis acarretava em um maior tempo de execução.

Para a análise da fibra com 16 anéis de Bragg, o tempo de execução, para cada comprimento de onda foi, em média, de 5 minutos. Com 32 anéis, este tempo médio era elevado para 10 minutos. Já na estrutura de 64 anéis, para cada comprimento de onda, o tempo de execução era em torno de 20 minutos.

Vale ressaltar que, tanto para o modelo de simulador utilizando o método da falsa posição quanto o que utilizava o método DZANLY, os tempo de execução medidos foram equivalentes.

ARTIGOS PUBLICADOS RELACIONADOS A ESTE TRABALHO

SAPIENZA, A. R.; MARINHO, L. R.; SOUZA, J. R. *Strategy for the analysis of loss bragg fibers*. XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBrT, 2012.

SAPIENZA, A. R.; MARINHO, L. R.; SOUZA, J. R. *Estratégia fundamentada nos modos transversais para análise das perdas em fibras de bragg*. Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica, MOMAG, 2012.

SAPIENZA, A. R.; MARINHO, L. R. *A key strategy to estimate the dispersions of the bragg fibers*. International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC, 2013.