



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

**Centro de Tecnologia e Ciências**

**Faculdade de Engenharia**

**Gabriel Tavares de Melo**

**Controle por Modo Deslizante Adaptativo para Perturbações  
com Limitantes Desconhecidos**

**Rio de Janeiro**

**2017**

Gabriel Tavares de Melo

**Controle por Modo Deslizante Adaptativo para Perturbações com  
Limitantes Desconhecidos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientadores:

Prof. Dr. José Paulo V. S. da Cunha

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

M528 Melo, Gabriel Tavares de.  
Controle por modo deslizante adaptativo para perturbações com  
limitantes desconhecidos / Gabriel Tavares de Melo. – 2017.  
101f.

Orientadores: José Paulo Vilela Soares da Cunha e Tiago Roux de  
Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica - Teses. 2. Controle por modo deslizante-  
Teses. 3. Controle automático- Teses. 4. Sistemas adaptativos- Teses. I.  
Cunha, José Paulo Vilela Soares da. II. Oliveira, Tiago Roux. III.  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro. IV. Título.

CDU 681.51

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Gabriel Tavares de Melo

**Controle por Modo Deslizante Adaptativo para Perturbações com  
Limitantes Desconhecidos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 19 de Dezembro de 2017

Banca Examinadora:

---

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc. (Orientador)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ

---

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Programa de Engenharia Elétrica - COPPE/UFRJ

---

Prof. Alessandro Rosa Lopes Zachi, D.Sc.

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - CEFET/RJ

Rio de Janeiro

2017

## AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem a sua presença e misericórdia, este trabalho não seria possível. À minha mãezinha, que esteve do meu lado em todos os momentos, me provendo de todo o amor que precisei. Ao meu pai, pelo apoio e suporte. A Metatron, Miguel, Rafael, Gabriel e todos os anjos e seres de luz que me acompanharam de perto antes e durante este trabalho, e continuarão me acompanhando. Aos meus orientadores José Paulo e Tiago Roux, pelo acolhimento e por tanto me ajudarem a lidar com minhas questões pessoais ao longo deste trabalho. E a todos os meus amigos e familiares, pelo incentivo e carinho.

*“É preciso que eu suporte duas ou três larvas  
se quiser conhecer as borboletas.”*

Antoine de Saint-Exupéry

## RESUMO

**MELO**, Gabriel Tavares de. *Controle por Modo Deslizante Adaptativo para Perturbações com Limitantes Desconhecidos*. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2017.

Nesta Dissertação realiza-se um estudo comparativo de diferentes metodologias encontradas na literatura acerca da adaptação dos ganhos de modulação em controle por modo deslizante, em sistemas sujeitos a perturbações. São realizadas simulações das mesmas, comentários sobre o funcionamento e listados seus pontos positivos e negativos. É apresentada uma nova metodologia de ganho adaptativo, baseada no conceito de controle equivalente estendido, capaz de eliminar o efeito de perturbações não-suaves. Resultados experimentais em um sistema eletromecânico são exibidos. Também é apresentada outra nova metodologia, baseada em funções de monitoração. Diferentemente da literatura existente, esta estratégia é capaz de garantir um rastreamento prático utilizando-se apenas de realimentação de saída. Simulações ilustram o desempenho das novas metodologias apresentadas.

Palavras-chave: Controle por Modo Deslizante; Perturbações Desconhecidas; Controle Adaptativo; Eliminação de Perturbações.

## ABSTRACT

**MELO**, Gabriel Tavares de. *Adaptive Sliding Mode Control for Disturbances with Unknown Bounds*. 101 f. Dissertation (Master's Degree in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, Rio de Janeiro State University (UERJ), Rio de Janeiro, 2017.

In this thesis, a comparative study of different methodologies found in the literature regarding switching gain adaptation in sliding mode control in the presence of disturbances is presented. Simulations of these methodologies are presented, as well as their advantages and disadvantages. A novel adaptive gain methodology based on the extended equivalent control concept, capable of rejecting non-smooth disturbances is presented, including experimental results. A new methodology based on monitoring functions is also presented. Differently from other adaptive algorithms, this strategy requires no information about the state variables, only output-feedback is assumed. Simulations illustrate the performance of the new methodologies presented.

Keywords: Sliding Mode Control; Unknown Disturbances; Adaptive Control; Disturbance Rejection.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema para a construção da solução pelo método de Filippov. ....	25
Figura 2 - Representação do deslizamento: (a) ideal e (b) com <i>chattering</i> . Extraída de (SLOTINE; LI, 1991). ....	30
Figura 3 - Simulação do sistema de controle a estrutura variável (1.31)–(1.33), na ausência de perturbações: (a) estado $x_1(t)$ ; (b) estado $x_2(t)$ ; (c) sinal de controle $u(t)$ . ....	31
Figura 4 - Plano de fase do sistema (1.31)–(1.33) submetido a diferentes condições iniciais. ....	32
Figura 5 - Simulação do sistema de controle a estrutura variável (1.31)–(1.33), na presença de perturbação $d(t) = 0,5\text{sen}(t)$ : (a) estado $x_1(t)$ ; (b) estado $x_2(t)$ ; (c) sinal de controle $u(t)$ ; (d) módulo da perturbação $d(t)$ e ganho de modulação $\rho$ . ....	33
Figura 6 - Simulação do sistema de controle a estrutura variável (1.31)–(1.33), na presença de perturbação $d(t) = 1,2\text{sen}(t)$ : (a) estado $x_1(t)$ ; (b) estado $x_2(t)$ ; (c) sinal de controle $u(t)$ ; (d) módulo da perturbação $d(t)$ e ganho de modulação $\rho$ . ....	34
Figura 7 - Desempenho da estratégia em (HUANG; KUO; CHANG, 2008) para perturbação senoidal: (a) função de chaveamento $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ ; (c) ganho de modulação $K(t)$ e módulo da perturbação $ a(t) $ . ....	37
Figura 8 - Desempenho da estratégia em (HUANG; KUO; CHANG, 2008) para perturbação senoidal na presença de ruído de medição do estado: (a) função de chaveamento $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ ; (c) ganho de modulação $K(t)$ e módulo da perturbação $ a(t) $ ....	38
Figura 9 - Desempenho da estratégia em (PLESTAN et al., 2010) para perturbação senoidal $a(t) = 2\text{sen}(0,5t)$ : (a) função de chaveamento $\sigma(x(t), t)$ ; (b) função de chaveamento $\sigma(x(t), t)$ ( <i>zoom</i> ); (c) sinal de controle $u(t)$ ; (d) função de modulação $K(t)$ e módulo da perturbação $ a(t) $ . ....	40

Figura 10- Desempenho da estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998) para perturbação senoidal $d(t) = \text{sen}(t)$ : (a) estado $x(t)$ e trajetória $x_d(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ ; (c) parcela descontínua $u_d(t)$ do sinal de controle. ....	49
Figura 11- Desempenho da estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013) para perturbação senoidal $a(t) = \text{sen}(t)$ : (a) estado $x(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ ; (c) função de modulação $k(t)$ e módulo da perturbação $ a(t) $ . ....	51
Figura 12- Desempenho da estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) (caso $a_1$ conhecido) para perturbação senoidal $a(t) = \text{sen}(t)$ : (a) variável de deslizamento $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ ; (c) ganho de modulação $(k(t)+\eta)$ e módulo da perturbação $ a(t) $ . ....	57
Figura 13- Desempenho da estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) (caso $a_1$ desconhecido) para perturbação senoidal $a(t) = \text{sen}(t)$ : (a) variável de deslizamento $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ ; (c) ganho de modulação $(k(t) + \eta)$ e módulo da perturbação $ a(t) $ . ....	58
Figura 14- Diagrama de blocos do controlador por modo deslizante adaptativo proposto. Adaptado de (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016). ....	65
Figura 15- Desempenho da estratégia para perturbação suave $d(t) = 3\text{sen}(2t)$ : (a) estado $x(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ e controle médio $u_{av}(t)$ ; (c) função de modulação $\varrho(t)$ e módulo da perturbação $ d(t) $ . ....	71
Figura 16- Desempenho da estratégia para perturbação não suave dente de serra, com amplitude 3 e frequência 0,5 Hz: (a) estado $x(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ e controle médio $u_{av}(t)$ ; (c) função de modulação $\varrho(t)$ e módulo da perturbação $ d(t) $ . ....	72
Figura 17- Desempenho da estratégia para perturbação não suave: (a) estado $x(t)$ ; (b) sinal de controle $u(t)$ e controle médio $u_{av}(t)$ ; (c) função de modulação $\varrho(t)$ e módulo da perturbação $ d(t) $ . ....	73
Figura 18- Servomotor utilizado para implementação prática da estratégia. ....	74
Figura 19- Experimento com servomotor: condição inicial não nula. Sinal de controle $u(t)$ em (a), posição angular $\theta(t)$ em (b). ....	75
Figura 20- Experimento com servomotor: efeito da perturbação. Sinal de controle $u(t)$ em (a), posição angular $\theta(t)$ em (b). ....	76

Figura 21 - Ilustração do chaveamento da função de monitoração em (5.19). Adaptada de (OLIVEIRA; PEIXOTO; HSU, 2010). .....	83
Figura 22 - Diagrama de blocos da estratégia por modo deslizante adaptativo baseada em funções de monitoração.....	84
Figura 23 - Desempenho da estratégia para perturbação descontínua $d(t) = 5 \text{sen}(t) + \mathcal{U}(t - 10) - \mathcal{U}(t - 20)$ : (a) Saídas $y(t)$ da planta e $y_m(t)$ do modelo. (b) Convergência de $y(t)$ para $y_m(t)$ ( <i>zoom</i> ). .....	88
Figura 24 - Módulo do erro de rastreamento $ e_0(t) $ e função de monitoração $\varphi_m(t)$ . .	88
Figura 25 - Evolução temporal da função $\beta(k, t)$ e módulo da perturbação $ d(t) $ . ....	89
Figura 26 - Sinal de controle $u(t)$ e controle ideal de casamento $u^*(t)$ . .....	89
Figura 27 - Função de modulação $f(t)$ e módulo do controle ideal de casamento $ u^*(t) $ , interpretado como perturbação total de entrada. ....	90
Figura 28 - Sinal de controle $u(t)$ e sinal de controle de casamento ideal $u^*(t)$ quando uma função $\beta$ classe $\mathcal{K}$ é utilizada, ao invés de uma de classe $\mathcal{KL}$ . Objetivos de controle alcançados ao custo de um sinal de controle com maior amplitude que o necessário. ....	91
Figura 29 - Desempenho da estratégia para perturbação descontínua exibida no Capítulo 4: (a) Saídas $y(t)$ da planta e $y_m(t)$ do modelo. (b) Convergência de $y(t)$ para $y_m(t)$ ( <i>zoom</i> ). ....	91
Figura 30 - Evolução temporal da função $\beta(k, t)$ e módulo da perturbação $ d(t) $ . Perturbação com descontinuidades. ....	92
Figura 31 - Função de modulação $f(t)$ e norma do controle ideal de casamento $ u^*(t) $ , interpretado como perturbação total de entrada. ....	92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Quadro comparativo das estratégias baseadas em <i>controle equivalente</i> presentes na literatura. ....	59
Tabela 2 - Novo quadro comparativo das estratégias baseadas em <i>controle equivalente</i> presentes na literatura.....	77

## LISTA DE SIGLAS

ACTA	<i>Adaptive Continuous Twisting Algorithm</i>
BIBO	<i>Bounded-Input Bounded-Output</i>
FOAF	<i>First-Order Approximation Filter</i>
HOSM	<i>Higher Order Sliding Mode</i>
ISS	<i>Input-to-State Stable</i>
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i>
MRAC	<i>Model Reference Adaptive Control</i>
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i>
SMC	<i>Sliding Mode Control</i>
SOSM	<i>Second-Order Sliding Mode</i>
TA	<i>Twisting Algorithm</i>
VS-MRAC	<i>Variable Structure Model Reference Adaptive Control</i>
VSC	<i>Variable Structure Control</i>

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
1	<b>CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES</b> .....	19
1.1	<b>Notação e Definições</b> .....	20
1.2	<b>O Sistema</b> .....	22
1.3	<b>Superfície de Deslizamento</b> .....	22
1.3.1	<u>Condição de Existência do Modo Deslizante</u> .....	23
1.3.2	<u>Método de Filippov</u> .....	24
1.3.3	<u>Método do Controle Equivalente</u> .....	25
1.3.3.1	Controle Equivalente Estendido .....	26
1.3.3.2	Invariância .....	27
1.4	<b>Lei de Controle</b> .....	28
1.5	<b><i>Chattering</i></b> .....	29
1.6	<b>Exemplo</b> .....	31
1.7	<b>Conclusões</b> .....	33
2	<b>ESTRATÉGIAS BASEADAS NO AUMENTO PURO OU AUMENTO E DIMINUIÇÃO DE GANHOS</b> .....	35
2.1	<b>Estratégia em (HUANG; KUO; CHANG, 2008)</b> .....	35
2.1.1	<u>Resultados de Simulação</u> .....	36
2.1.2	<u>Notas Acerca da Estratégia</u> .....	37
2.2	<b>Estratégia em (PLESTAN et al., 2010)</b> .....	39
2.2.1	<u>Resultados de Simulação</u> .....	39
2.3	<b>Estratégia em (BARTOLINI et al., 2013)</b> .....	40
2.3.1	<u>Notas Acerca da Estratégia</u> .....	43
2.4	<b>Outras Estratégias</b> .....	43
2.5	<b>Conclusões</b> .....	44
3	<b>ESTRATÉGIAS BASEADAS EM CONTROLE EQUIVALENTE</b> .....	46
3.1	<b>Estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998)</b> .....	46
3.1.1	<u>Lei de Controle</u> .....	47

3.1.2	<u>Resultados de Simulação</u> .....	48
3.2	<b>Estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013)</b> .....	49
3.2.1	<u>Resultados de Simulação</u> .....	51
3.3	<b>Estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016)</b> .....	52
3.3.1	<u>Formulação Quando o Limitante <math>a_1</math> é Conhecido</u> .....	54
3.3.2	<u>Formulação Quando o Limitante <math>a_1</math> é Desconhecido</u> .....	55
3.3.3	<u>Resultados de Simulação</u> .....	56
3.4	<b>Conclusões</b> .....	57
4	<b>ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLE EQUIVALENTE ESTENDIDO</b> .....	60
4.1	<b>Exemplo Introdutório (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)</b> .....	60
4.1.1	<u>Controle Médio</u> .....	62
4.2	<b>Formulação do Problema</b> .....	63
4.2.1	<u>Lei de Controle</u> .....	64
4.3	<b>Resultado Principal</b> .....	66
4.4	<b>Notas Acerca da Estratégia</b> .....	68
4.4.1	<u>Estabilidade</u> .....	68
4.4.2	<u>Caso Particular: Perturbações Periódicas</u> .....	69
4.4.3	<u>Realimentação de Saída (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)</u> .....	69
4.4.4	<u>Dinâmica Interna Não ISS (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)</u> .....	70
4.4.5	<u>Algoritmo <i>Twisting</i> Adaptativo (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)</u> .....	70
4.5	<b>Resultados de Simulação</b> .....	70
4.6	<b>Resultados Experimentais</b> .....	72
4.7	<b>Conclusões</b> .....	75
5	<b>NOVA ABORDAGEM BASEADA EM FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO</b> .....	78
5.1	<b>Formulação do Problema</b> .....	78
5.1.1	<u>Parametrização do Controle e Limitante da Perturbação</u> .....	79
5.1.2	<u>Lei de Controle</u> .....	81
5.1.3	<u>Função de Monitoração</u> .....	82
5.2	<b>Resultado Principal</b> .....	84
5.3	<b>Resultados de Simulação</b> .....	87

5.4	<b>Conclusões</b> .....	93
	<b>CONCLUSÕES FINAIS</b> .....	94
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	96

## INTRODUÇÃO

O controle por modo deslizante adaptativo é um tema que tem recebido muita atenção nos últimos anos. Porém, observa-se que muito dos trabalhos publicados nesta área até os dias de hoje concentram seus esforços em sistemas sujeitos à perturbações com limitantes *conhecidos*. Este é um grande problema em sistemas de controle por modo deslizante, uma vez que, em implementações práticas, a amplitude do sinal de controle está diretamente relacionada a um fenômeno indesejável, conhecido por *chattering*. Em outras palavras, ao se escolher ganhos muito conservadores (altos), na tentativa de tornar os sistemas mais imunes a perturbações, aumenta-se a ocorrência do mencionado fenômeno.

Para facilitar o entendimento, é conveniente dividir as abordagens existentes de controle por modo deslizante adaptativo em três grupos:

- 1) Estratégias que se baseiam em ganhos da função de modulação que sempre crescem (ou permanecem constantes). Destacam-se os trabalhos (YAN; HSU; XIUXIA, 2006; OLIVEIRA et al., 2014; MORENO et al., 2016);
- 2) Estratégias que se baseiam no aumento e diminuição de ganhos da função de modulação. Destacam-se os trabalhos (HUANG; KUO; CHANG, 2008; PLESTAN et al., 2010; BARTOLINI et al., 2013; ESTRADA; PLESTAN; ALLOUCHE, 2013);
- 3) Estratégias que exploram as características do controle equivalente para projetar suas leis adaptativas. Destacam-se os trabalhos (BARTOSZEWICZ, 1998; UTKIN; POZNYAK, 2013; EDWARDS; SHTESEL, 2016).

O grupo 1 acima representa uma estratégia conservadora. Observa-se que, para perturbações limitadas (ainda que apresentem limitante desconhecido), o crescimento exclusivo do ganho de modulação faz com que o limitante da perturbação seja majorado, a partir de algum instante de tempo. Deste instante em diante, o modo deslizante poderá ser mantido indefinidamente. Porém, este grupo de estratégias apresenta uma desvantagem inerente: a redução da amplitude da perturbação não acarreta a redução do valor do ganho de modulação da lei de controle, aumentando a intensidade do *chattering*.

O grupo 2 acima é uma evolução natural do primeiro: introduz-se a possibilidade do ganho de modulação decrescer, quando houver uma redução na amplitude da perturbação. Na prática, porém, tais estratégias acabam por apresentar um comportamento indesejável:

o modo deslizante é atingido e perdido sucessivas vezes, conforme a perturbação oscila, o que prejudica o desempenho do sistema.

O grupo 3 acima revela uma nova fronteira de possibilidades: o uso do controle equivalente. Através deste, uma vez atingido um modo deslizante, é possível obter uma estimativa precisa da perturbação. Se esta decresce, o controle equivalente também o faz. Em outras palavras, é possível obter uma função de modulação menos conservadora adaptando-a conforme o comportamento do controle equivalente, melhorando o desempenho do sistema e mitigando o efeito do *chattering*. Contudo, um problema comum é que o controle equivalente não pode ser implementado na prática, devido a, entre outros fatores, não se conhecer o modelo do sistema com exatidão. Felizmente, é possível estimar o controle equivalente por meio do *controle médio* (UTKIN, 1992).

Ressalta-se que é possível que existam estratégias que misturam características de mais de uma categoria acima. Existem ainda outras formas de algoritmo de controle por modo deslizante adaptativo que não podem ser enquadradas em nenhum grupo acima: um exemplo é o uso de redes neurais recorrentes (FEI; LU, 2017).

### **Controle a Estrutura Variável com Modo Deslizante**

O controle a estrutura variável com modo deslizante é um método de controle robusto e eficiente para se controlar sistemas não-lineares, mesmo com a presença de incertezas, que podem ser causadas por dinâmicas não-modeladas, variações nos parâmetros da planta ou simplificações de plantas complexas (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

O controle a estrutura variável caracteriza-se pela utilização de um conjunto de leis de controle, chaveadas de acordo com uma regra de decisão (função de chaveamento), mudando assim a estrutura do sistema em malha fechada. Desta maneira, é possível combinar propriedades úteis de cada uma das estruturas do sistema realimentado. Adicionalmente, podem ser obtidas novas propriedades que não são inerentes a nenhuma das estruturas utilizadas, por exemplo, um sistema assintoticamente estável pode ser constituído de duas estruturas instáveis (NUNES, 2004).

A partir do controle a estrutura variável, é possível obter trajetórias que descrevem um novo tipo de movimento, denominado *modo deslizante* (UTKIN, 1978). Neste tipo de movimento, as funções de chaveamento são projetadas para garantir a atratividade de uma superfície no espaço de estado, denominada *superfície de deslizamento*, e garantir

que um modo deslizante nela ocorra.

Os sistemas com controle a estrutura variável por modo deslizante oferecem vantagens significativas, tais como: estabilidade global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas, bom comportamento transitório, insensibilidade a não-linearidades da planta e a variações de parâmetros (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

Uma das maiores desvantagens do controle por modo deslizante de primeira ordem em certas aplicações é o uso direto de ações de controle descontínuas. Em implementações reais, a lei de controle descontínua, juntamente com dinâmicas não modeladas e frequência de chaveamento finita, podem produzir oscilações rápidas nas saídas do sistema. Este efeito é conhecido como o fenômeno *chattering* (KUNUSCH; PULESTON; MAYOSKY, 2012).

## **Objetivo deste Trabalho**

O objetivo deste trabalho é propor novas abordagens de controle por modo deslizante adaptativo e/ou reformular as já existentes, com o foco no tratamento de perturbações com limitantes desconhecidos. Também é um objetivo realizar um estudo comparativo da literatura existente acerca do referido tema.

## **Organização da Dissertação**

No Capítulo 1 serão introduzidos os conceitos básicos sobre controle a estrutura variável e controle por modo deslizante, necessários ao entendimento desta dissertação.

No Capítulo 2 serão revisitadas estratégias de controle por modo deslizante adaptativo presentes na literatura, baseados no aumento puro ou que mesclam aumentos e diminuições de ganhos de modulação.

No Capítulo 3 será feito trabalho semelhante ao realizado no capítulo anterior com estratégias que utilizam as propriedades do controle equivalente no processo de adaptação de ganhos de modulação.

No Capítulo 4 será apresentado um algoritmo de controle por modo deslizante adaptativo recentemente desenvolvido, baseado no conceito de controle equivalente estendido (apresentado no Capítulo 1). Tal algoritmo foi proposto originalmente em (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016) e (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2018). Nesta dissertação é apresentada uma prova de estabilidade reformulada, novos detalhes acerca de seu funcionamento e,

pela primeira vez, resultados experimentais, em um sistema eletromecânico (servomotor).

No Capítulo 5 será proposto um novo algoritmo de controle por modo deslizante adaptativo, desta vez baseado no uso de funções de monitoração, conceito já conhecido na literatura.

Ao final desta dissertação serão apresentadas as conclusões finais, as contribuições deste trabalho, bem como serão propostas sugestões de trabalhos futuros.

## 1 CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES

O Controle a Estrutura Variável (*Variable Structure Control - VSC*) é uma forma de controle não linear. Caracteriza-se, em termos simples, por possuir uma lei de controle que muda deliberadamente ao longo do processo, de acordo com regras predefinidas e com o estado do sistema. Surgiu na antiga União Soviética, por volta dos anos 1960, graças ao trabalho pioneiro de Emel'yanov e Barbashin. Porém, estas ideias só foram divulgadas para o resto do mundo em meados dos anos 1970, com a publicação de um livro por Itkis (1976) e um artigo por Utkin (1977), ambos em inglês. O mesmo é usado com sucesso desde então em diversos tipos de sistemas, tais como os não lineares, multivariáveis, estocásticos e modelos em tempo discreto (HUNG; GAO; HUNG, 1993). Destacam-se as aplicações práticas em sistemas mecânicos e elétricos, tais como: controle de velocidade de motores de indução (LI; HONG; YANG, 2009), controle de conversores DC-DC (CARDIM et al., 2009), controle de vazão de uma bomba peristáltica (MELO; CUNHA; AMARAL, 2016), etc.

Os sistemas de Controle a Estrutura Variável são caracterizados por uma conjunto de leis de controle e uma regra de decisão. Esta regra, comumente denominada função de chaveamento (do inglês *switching function*), possui como entrada alguma medida do comportamento atual do sistema e produz como saída o controlador de retroalimentação particular a ser usado naquele instante de tempo. O resultado é um sistema de estrutura variável, ou seja, uma combinação de subsistemas em que cada um destes possui uma estrutura de controle fixa, que é válida para regiões específicas de operação (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

O mais conhecido método baseado em VSC é o Controle por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control - SMC*). Uma relevante característica do Controle por Modo Deslizante é a capacidade de gerar algoritmos de controle robustos que são invariantes sob certas condições. Em termos simples, o conceito de invariância indica que o sistema é capaz de permanecer insensível a certos tipos de perturbações e incertezas (DRAŽENOVIĆ, 1969). Outra vantagem que merece ser citada é a redução de ordem da dinâmica do sistema (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

O crescente interesse em controle de sistemas incertos e sujeitos a perturbações nas últimas décadas fez o SMC se tornar uma opção atrativa. Os benefícios e vantagens do

uso de SMC em sistemas eletromecânicos, por exemplo, são extensivamente explorados na literatura, tal como em (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999).

Desta forma: o projeto de um controlador por modo deslizante divide-se em dois passos:

- (a) Projeto de uma superfície de deslizamento (no espaço de estado) tal que o sistema, uma vez em modo deslizante, desenvolva uma trajetória desejada;
- (b) Projeto de uma lei de controle que obedeça as condições de existência do modo deslizante e torne a superfície de deslizamento atrativa.

### 1.1 Notação e Definições

Neste trabalho, serão utilizadas as seguintes notações e definições:

- A norma Euclidiana de um vetor  $x$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $A$  são denotadas por  $|x|$ , ou  $|A|$ , respectivamente.
- Quando expressamente indicado no texto,  $|x|$  poderá denotar também o vetor valor absoluto (elemento a elemento) do vetor  $x$ , ou seja:  $|x| := [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|]^T$ .
- A norma  $\mathcal{L}_\infty$  de um sinal  $x(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida como em (DESOER; VIDYASAGAR, 1975) e (CUNHA, 2004), sendo descrita por:

$$\|x_{t,t_*}\| := \sup_{t_* \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\| .$$

- A matriz  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .
- A matriz  $A^T$  denota a matriz transposta de  $A$ .
- O espectro de uma matriz  $A$  é denotado por  $\lambda_i[A]$ .
- A função sinal é denotada por  $\text{sgn}(\cdot)$ .
- O símbolo “ $s$ ” representa tanto a variável complexa de Laplace quanto o operador diferencial “ $d/dt$ ”, de acordo com o contexto.

- Tal como em (IOANNOU; SUN, 1996) e (HSU; LIZARRALDE; ARAÚJO, 1997), a saída  $y$  de um filtro linear e invariante no tempo com função de transferência  $H(s)$  e entrada  $u$  é dada por  $y = H(s)u$ .
- Como definido em (KAILATH, 1980), um sistema linear é dito externamente estável ou BIBO-estável (*bounded-input bounded-output*) quando uma entrada limitada,  $u(t) < M_1, -\infty < -T \leq t < \infty$ , produz uma saída limitada  $y(t) < M_2, -T \leq t < \infty$ .
- A definição de Filippov (1964) é assumida para a solução no domínio do tempo de sistemas descontínuos. Observa-se que o sinal de controle  $u$  não é necessariamente uma função de  $t$  no sentido habitual quando um modo deslizante ocorre. Para evitar confusão,  $u(t)$  representa funções localmente integráveis que são equivalentes a  $u$ , no sentido do *controle equivalente* (UTKIN, 1978), ao longo de qualquer solução de Filippov  $z(t)$  do sistema em malha fechada. Ressalta-se que o sinal  $z(t)$  é, *por definição*, absolutamente contínuo. Portanto, ao longo de qualquer solução,  $u$  pode ser substituído por  $u(t)$  no lado direito das equações diferenciais que governarem o sistema. Embora o controle equivalente  $u(t) = u_{\text{eq}}(t)$  não seja disponível diretamente, o sinal de saída de sistemas lineares e invariantes no tempo com funções de transferência estritamente próprias  $G(s)$  é dado por  $y(t) = G(s)u = G(s)u(t) = G(s)u_{\text{eq}}(t)$ .
- As operações de convolução  $h(t) * u(t)$ , com  $h(t)$  representando a resposta ao impulso de um sistema linear e invariante no tempo com função de transferência  $H(s)$ , serão eventualmente representadas, por simplicidade, como  $H(s) * u$ .
- O grau relativo de um sistema é numericamente igual à quantidade de vezes que a saída  $y(t)$  deste sistema precisa ser diferenciada em relação ao tempo, até que a entrada  $u$  apareça explicitamente na expressão analítica desta última diferenciação.
- Funções classe  $\mathcal{K}$  e classe  $\mathcal{KL}$  são definidas como em (KHALIL, 1996):
  - Uma função contínua  $\alpha(r) : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$  é dita pertencente à classe  $\mathcal{K}$  se a mesma é estritamente crescente e  $\alpha(0) = 0$ ;
  - Uma função contínua  $\beta(r, s) : [0, a) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é dita pertencente à classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $s$  fixado, o mapeamento  $\beta(r, s)$  pertence à classe  $\mathcal{K}$  com respeito a  $r$  e, para cada  $r$  fixado, o mapeamento  $\beta(r, s)$  é decrescente em relação a  $s$  e  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  conforme  $s \rightarrow +\infty$ .

- Um sistema na forma geral

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u), & x \in \mathbb{R}^n, & u \in \mathbb{R}^m, \\ y &= h(x), & y \in \mathbb{R}^p,\end{aligned}\tag{1.1}$$

é dito ser estável da entrada para o estado (*Input-to-State Stable* - ISS), se existirem  $\beta \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma \in \mathcal{K}$  (também referido como ganho ISS), tais que para todo  $x_0, u \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\forall t \in [0, t_{max})$ :

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u_t\|).\tag{1.2}$$

- A função degrau unitário é denotada por  $\mathcal{U}(t)$ .

## 1.2 O Sistema

São considerados na maior parte deste trabalho sistemas não lineares da forma:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(x, t)u(t),\tag{1.3}$$

na qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados e  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle. Os campos vetoriais  $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$  e  $B(x, t) \in \mathbb{R}^n$  são assumidos contínuos, com derivadas contínuas e limitados em relação a  $x$  e  $t$ . Um sistema na forma descrita em (1.3) é comumente referido na literatura como sistema *afim no controle* (CLELLAND; MOSELEY; WILKENS, 2009).

## 1.3 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento é uma região do espaço de estados onde o sistema possui um comportamento predefinido e estável (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988). Seja a função de chaveamento mencionada anteriormente dada por  $\sigma(x(t))$ . A superfície de deslizamento é definida como o lugar geométrico onde  $\sigma(x(t)) = 0$ . Um exemplo de função de chaveamento comumente encontrado na literatura é dada por:

$$\sigma(x(t)) = Sx(t) = 0,\tag{1.4}$$

na qual  $S \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é a matriz da superfície de deslizamento. No caso acima, a superfície assume a forma de um hiperplano. Porém, outros tipos de superfície de deslizamento

poderiam ser considerados, inclusive variantes no tempo, ou seja, da forma  $\sigma(x(t), t)$ , como em (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988).

Dadas estas informações, uma função de chaveamento  $\sigma$  pode ser entendida, intuitivamente, como uma forma de mensurar o quanto o vetor de estado  $x(t)$  está afastado da superfície de deslizamento em um dado instante de tempo. Tal raciocínio é muito útil na compreensão do funcionamento de sistemas SMC.

### 1.3.1 Condição de Existência do Modo Deslizante

Após o projeto de uma superfície de deslizamento que atenda aos requisitos necessários, o próximo passo seria desenvolver uma lei de controle que torne esta superfície atrativa. Para que isto ocorra, as seguintes condições devem ser satisfeitas (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \dot{\sigma} < 0; \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \dot{\sigma} > 0, \quad (1.5)$$

ou seja, quando  $\sigma$  tender a zero pela esquerda, sua derivada temporal deve ser decrescente e, quando  $\sigma$  tender a zero pela direita, sua derivada temporal deve ser crescente, criando assim uma região atrativa para  $\sigma(x(t))$  em alguma vizinhança da superfície de deslizamento. As condições em (1.5) podem ser reunidas e escritas mais convenientemente na forma

$$\sigma \dot{\sigma} < 0, \quad (1.6)$$

conhecida como *condição de alcançabilidade*. Uma condição mais restritiva para a existência do modo deslizante é a  $\eta$ -*condição de alcançabilidade*, que é dada por (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

$$\sigma \dot{\sigma} < -\eta |\sigma|, \quad (1.7)$$

na qual  $\eta > 0$  é uma constante arbitrária. Diferentemente da condição em (1.6), esta condição garante que uma vez que  $\sigma$  atinge a origem, nela permanecerá e isto ocorrerá em tempo finito.

### 1.3.2 Método de Filippov

Seja um sistema em uma forma mais geral que em (1.3):

$$\dot{x} = F(x(t), t), \quad (1.8)$$

na qual  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A condição de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais é baseada na condição de Lipschitz, bastante conhecida na literatura. De acordo com ela, para um sistema como o mostrado em (1.8), caso seja possível encontrar uma *constante de Lipschitz*  $L$  tal que seja satisfeita a relação (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

$$|F(x_1, t) - F(x_2, t)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (1.9)$$

$\forall x_1, x_2 \in D, \forall t \geq 0$ , então a equação diferencial possui solução única em um domínio  $D$ . A utilização de chaveamento entre distintas estruturas no controle a estrutura variável resulta em equações com lado direito descontínuo, sendo impossível encontrar uma constante de Lipschitz que garanta a unicidade de solução para o sistema.

O método de Filippov (1964) se notabilizou como uma abordagem para resolver este problema. Este conceito constrói uma solução que é a “média” das soluções obtidas ao se tentar atingir o ponto de descontinuidade por diferentes direções. Se  $x_0$  é um ponto de descontinuidade na superfície  $\mathcal{S}$  e  $F_-(x_0, t)$  e  $F_+(x_0, t)$  representam os limites de  $F(x_0, t)$  quando o ponto  $x_0$  é aproximado por direções opostas do plano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $x_0$ , então a solução é obtida pela combinação linear convexa (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)F_-(x, t) + \alpha F_+(x, t), \quad (1.10)$$

na qual o escalar  $0 < \alpha < 1$  é tal que o vetor

$$F_a := (1 - \alpha)F_- + \alpha F_+ \quad (1.11)$$

é tangente à superfície  $\mathcal{S}$ . A Figura 1 mostra esquematicamente a construção da solução pelo método de Filippov.

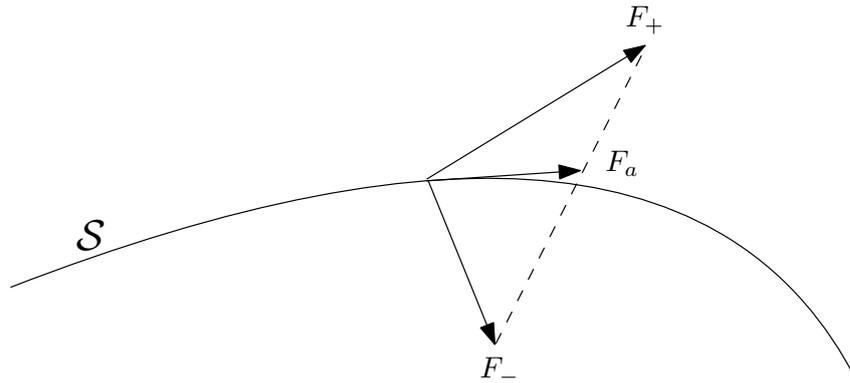


Figura 1 - Esquema para a construção da solução pelo método de Filippov.

### 1.3.3 Método do Controle Equivalente

O método do controle equivalente proposto por Utkin (1977) é uma ferramenta para se analisar o comportamento de um sistema que entra em modo deslizante, ou seja, quando o estado do sistema entra na superfície de deslizamento  $\sigma(x(t)) = 0$  e nela permanece. O sinal de controle equivalente  $u_{eq}$  é a ação de controle necessária para manter um modo deslizante ideal nesta superfície (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

Suponha que em um sistema dado por (1.3) seja aplicado um sinal de controle que atenda à condição de alcançabilidade em (1.7). Desta forma, o sistema entrará em modo deslizante a partir de algum tempo finito  $t_0$ , sendo válidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x(t)) &= 0, \\ \sigma(x(t)) &= 0, \quad \forall t \geq t_0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Realizando-se a derivação parcial em relação ao tempo no termo  $\sigma(x(t)) = 0$  em (1.12) obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = 0.\tag{1.13}$$

Substituindo (1.3) em (1.13), resulta em:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(x, t) + B(x, t)u_{eq}] = 0,\tag{1.14}$$

na qual o controle equivalente  $u_{eq}$  poderá ser encontrado resolvendo-se (1.14).

Assumindo que o produto matricial  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x, t)$  seja inversível para todos os valores

de  $x$  e  $t$ , então é possível resolver (1.14), da qual se obtém:

$$u_{\text{eq}} = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t). \quad (1.15)$$

Uma vez que a condição inicial  $x(t_0)$  satisfaça  $\sigma(x(t_0)) = 0$ , é possível substituir (1.15) em (1.3), o que leva a:

$$\dot{x} = \left[ I - B(x, t) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(x, t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.16)$$

que descreve a dinâmica do sistema sobre a superfície de deslizamento. Nota-se também que (1.16) resulta em um movimento livre, ou seja, independente da ação de controle  $u$ .

No caso particular em que a superfície de deslizamento é tal como aquela dada por (1.4), tem-se:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = S. \quad (1.17)$$

Com isso, a dinâmica do sistema em modo deslizante (1.16) pode ser reescrita na forma:

$$\dot{x} = \left[ I - B(x, t) [SB(x, t)]^{-1} S \right] f(x, t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.18)$$

### 1.3.3.1 Controle Equivalente Estendido

Como visto na seção anterior, o método do controle equivalente possui validade apenas durante a existência de um modo deslizante. É possível generalizar este conceito, obtendo uma expressão válida para todo o tempo, independente da presença do modo deslizante. Tal método é conhecido por *controle equivalente estendido* (HSU; COSTA, 1996; HSU et al., 2002), denotado ao longo deste trabalho por  $u_{\text{xreq}}$ . Seja um sistema tal como em (1.3) e uma função de chaveamento da forma  $\sigma(x(t), t)$  (note que a mesma pode ser variante no tempo). Realizando-se a derivação total de  $\sigma$  em relação ao tempo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{d\sigma}{dt} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Substituindo-se (1.3) em (1.19), resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\partial\sigma}{\partial x} [f(x, t) + B(x, t)u_{\text{xeq}}(t)] + \frac{\partial\sigma}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\sigma}{\partial x} f(x, t) + \frac{\partial\sigma}{\partial x} B(x, t)u_{\text{xeq}}(t) + \frac{\partial\sigma}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Assumindo que o produto matricial  $\frac{\partial\sigma}{\partial x} B(x, t)$  seja inversível para todos os valores de  $x$  e  $t$ , então é possível resolver (1.20), da qual se obtém a expressão para o controle equivalente estendido  $u_{\text{xeq}}$ :

$$u_{\text{xeq}} = - \left[ \frac{\partial\sigma}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial\sigma}{\partial x} f(x, t) - \frac{d}{dt}\sigma(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}\sigma(x, t) \right]. \quad (1.21)$$

A expressão acima é bem definida, uma vez que a solução  $x(t)$  é absolutamente contínua por definição e, portanto, possui derivadas em quase todos seus pontos. Dado que um sistema entre em modo deslizante em um instante de tempo  $t = t_0$ , e nele permaneça para todo  $t \geq t_0$ , observa-se que  $u_{\text{xeq}}$  em (1.21) é idêntico a  $u_{\text{eq}}$  em (1.15) para todo  $t \geq t_0$  e igual ao sinal de controle  $u$  aplicado na planta para  $t < t_0$ . Este conceito permite explorar novas estratégias de controle, como será visto no Capítulo 4.

Convém ressaltar que, originalmente, nas referências (HSU; COSTA, 1996) e (HSU et al., 2002) já mencionadas, a expressão para o controle equivalente estendido foi publicada com erros tipográficos e, portanto, aparece de maneira diferente da demonstrada nesta dissertação, na equação (1.21). Em trabalhos que se seguiram estes erros já foram corrigidos, como em (CUNHA, 2004, Seção 1.2.4.2).

### 1.3.3.2 Invariância

Uma das vantagens do uso do SMC é a sua robustez, ou *invariância*, a um certo tipo de perturbação  $d(t)$ . Considere o sistema em (1.3) submetido a uma perturbação  $d(t) \in \mathbb{R}$  (SHTESSEL et al., 2014):

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u(t) + d(t). \quad (1.22)$$

Aplicando-se as condições descritas em (1.12) para a planta sujeita à perturbação

em (1.22), é possível obter a seguinte expressão para o controle equivalente:

$$u_{\text{eq}} = - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t) - \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} d(t). \quad (1.23)$$

Substituindo o controle equivalente (1.23) em (1.22), a dinâmica do sistema sujeito à perturbação na presença de modo deslizante,  $\forall t \geq t_0$ , é dada por:

$$\dot{x} = \left[ I - B(t, x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] f(t, x) + \left[ I - B(t, x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] d(t). \quad (1.24)$$

Caso a perturbação  $d(t)$  seja da seguinte forma:

$$d(t) = B(x, t) d'(t), \quad (1.25)$$

na qual  $d'(t) \in \mathbb{R}$  é uma perturbação desconhecida, então a segunda parcela do lado direito da equação (1.24) pode ser recalculada (SHTESSSEL et al., 2014):

$$\begin{aligned} \left[ I - B(t, x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] d(t) &= \left[ I - B(t, x) \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial x} B(t, x) \right]^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] B(x, t) d'(t), \\ &= B(x, t) d'(t) - B(x, t) d'(t), \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Logo, a dinâmica em (1.24) se reduz à do sistema sem perturbação dada em (1.18), o que mostra que o sistema, uma vez em modo deslizante, é insensível a perturbações  $d(t)$  da forma mostrada em (1.25), que são conhecidas na literatura como *perturbações casadas com a entrada de controle*.

#### 1.4 Lei de Controle

Como visto no começo deste capítulo, uma vez projetada a superfície de deslizamento, a próxima etapa do projeto é desenvolver uma lei de controle que obedeça as condições de existência do modo deslizante. Uma lei de controle comum na literatura é dada por:

$$u = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(\sigma(t)), \quad (1.27)$$

na qual  $\varrho(t) > 0 \forall t$  é conhecida como *função de modulação*, e  $\text{sgn}(\cdot)$  é a função sinal. Para exemplificarmos o atendimento das condições de existência do modo deslizante, considere um integrador sujeito a uma perturbação casada com a entrada de controle:

$$\dot{x} = u(t) + d(t). \quad (1.28)$$

A variável de deslizamento é definida como em (1.4), com  $S = 1$ . Aplicando a condição dada em (1.7) para um sinal de controle dado por (1.27):

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} &= \sigma(u(t) + d(t)) \\ &= \sigma(-\varrho(t) \text{sgn}(\sigma) + d(t)) \\ &= |\sigma| \text{sgn}(\sigma)(-\varrho(t) \text{sgn}(\sigma) + d(t)) \\ &= |\sigma|(d(t) \text{sgn}(\sigma) - \varrho(t)). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Logo, uma vez que a desigualdade

$$\varrho(t) > |d(t)| + \eta \quad (1.30)$$

seja satisfeita a partir de um tempo inicial arbitrário, a condição em (1.7) será satisfeita.

Vale ressaltar que, para plantas mais complexas, a lei de controle em (1.27) pode ser adicionada de um sinal de controle contínuo  $u_c(t)$ , que controlaria o sistema em condições nominais (DECARLO; ŽAK; MATTHEWS, 1988). Tal sinal possibilitaria o uso de um menor ganho de modulação ao sinal de controle, desta forma reduzindo o efeito de *chattering*.

## 1.5 *Chattering*

Em termos ideais, um modo deslizante existe se, e somente se, a condição  $\sigma(x(t)) = 0, \forall t \geq t_0$ , para algum instante inicial  $t_0$ . Tal condição pressupõe um sinal de controle com chaveamentos com frequência infinita.

Em sistemas físicos, estão presentes diversos fenômenos complicadores, tais como: atritos não lineares, histerese, atrasos, etc. Sistemas controlados por computador possuem o efeito da amostragem no tempo. Tais imperfeições impedem que o sinal de controle possua frequência infinita. Devido a este fato, a trajetória do estado do sistema, em vez

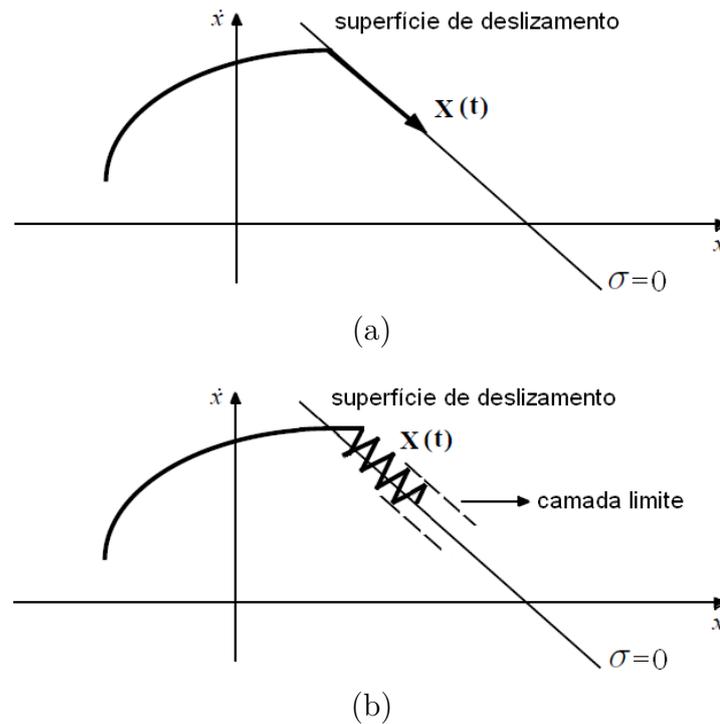


Figura 2 - Representação do deslizamento: (a) ideal e (b) com *chattering*. Extraída de (SLOTINE; LI, 1991).

de percorrer a superfície de deslizamento, oscila em uma vizinhança desta. Esta oscilação é denominada *chattering* (trepidação). A Figura 2 ilustra este comportamento.

Diversas abordagens já foram propostas para se mitigar ou eliminar o fenômeno *chattering*. Algumas delas são:

- A introdução de uma camada limite no controlador, fazendo com que o estado do sistema não esteja restrito à superfície de deslizamento, mas seja permitido percorrer uma vizinhança deste, conforme proposto em (SLOTINE; SASTRY, 1983; SLOTINE, 1984)
- O uso de sistemas de controle por modo deslizante de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes - HOSM*). Entre eles, destaca-se o *super-twisting algorithm* (SHTESSEL et al., 2014).
- O uso de observador assintótico na malha de controle, conforme proposto em (BONDAREV et al., 1985).
- A diminuição da amplitude do sinal de controle, conforme estudado em (UTKIN; LEE, 2006).

## 1.6 Exemplo

Para ilustrar os conceitos apresentados, considera-se um sistema de segunda ordem composto de um duplo integrador, aqui definido em espaço de estado, como proposto em (SOKAL, 2010):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (1.31)$$

O sinal de controle é uma função chaveada definida como

$$u = -\rho \operatorname{sgn}(\sigma(x)), \quad (1.32)$$

na qual  $\rho$  é uma constante positiva. A superfície de deslizamento é definida como em (1.4), onde:

$$S = [m \ 1], \quad (1.33)$$

na qual  $m \in \mathbb{R}$  é um parâmetro de projeto, que define a inclinação da superfície de deslizamento  $\sigma(x(t)) = 0$ . Por simplicidade, ao longo desta seção toma-se  $m = 1$ .

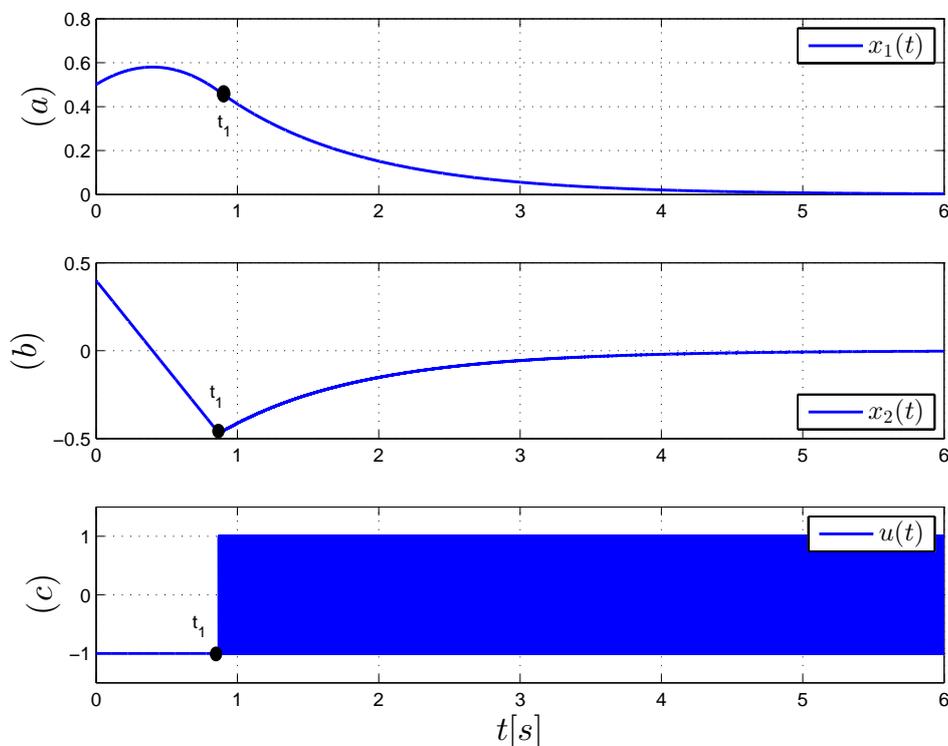


Figura 3 - Simulação do sistema de controle a estrutura variável (1.31)–(1.33), na ausência de perturbações: (a) estado  $x_1(t)$ ; (b) estado  $x_2(t)$ ; (c) sinal de controle  $u(t)$ .

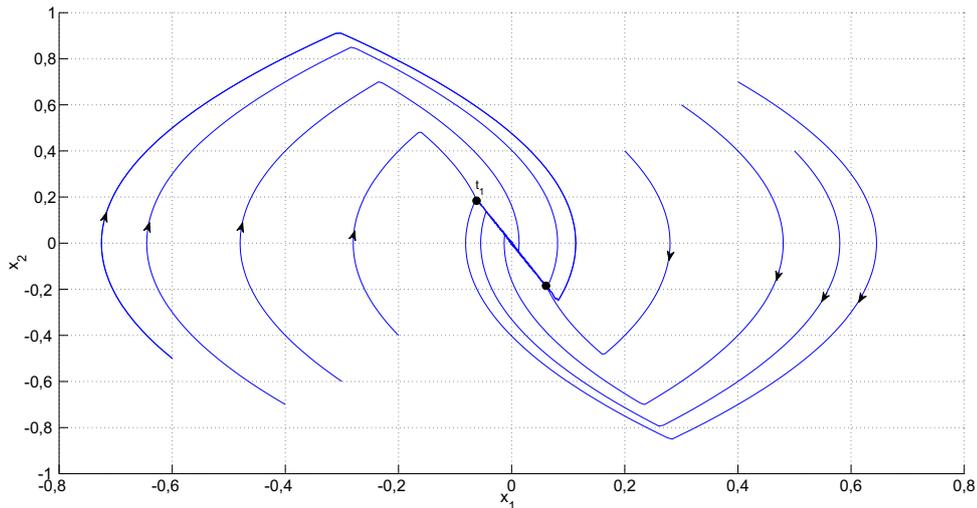


Figura 4 - Plano de fase do sistema (1.31)–(1.33) submetido a diferentes condições iniciais.

A Figura 3 mostra o comportamento do sistema (1.31) ao se aplicar o controle a estrutura variável dado pelas leis em (1.32) e (1.33), com  $\varrho = 1$ . No instante  $t_1$ , o estado alcança a superfície de deslizamento e, deste momento em diante ( $t \geq t_1$ ), o sinal de controle passa a chavear entre os valores  $+\varrho$  e  $-\varrho$ , conforme (1.32), com o objetivo de manter o estado na superfície  $\sigma(x(t)) = 0$ . Quando o modo de deslizamento é atingido, o sistema se comporta como um sistema de ordem reduzida (primeira ordem), e sua resposta tende a zero exponencialmente.

Ao se submeter o sistema (1.31) a diferentes condições iniciais, obtém-se o plano de fase dado na Figura 4. É possível observar que o vetor de estado  $x(t)$  é conduzido para a superfície de deslizamento (basta observar o sentido das setas), o que mostra a atratividade dessa superfície, mesmo com o sistema sendo submetido a condições iniciais distintas.

A Figura 5 mostra uma simulação da mesma estrutura anterior, após a introdução de uma perturbação de entrada  $d(t) = 0,5 \sin(t)$ . Observa-se que o valor de  $\varrho$  é grande o suficiente para ser um limitante de  $|d(t)|$ , ou seja, a condição em (1.30) é verificada. Uma vez atingido o deslizamento, o mesmo é mantido indefinidamente. A Figura 6 exibe a simulação para uma perturbação  $d(t) = 1,2 \sin(t)$ . Neste caso, a condição em (1.30) não é satisfeita. Como é possível observar, não se obtém um modo deslizante de forma permanente, sendo o mesmo atingido e perdido sucessivas vezes. Estes dois últimos exemplos numéricos ilustram o funcionamento de um modo deslizante em relação à ação de perturbações, e a necessidade do ajuste de ganho do sinal de controle em função do

comportamento destas.

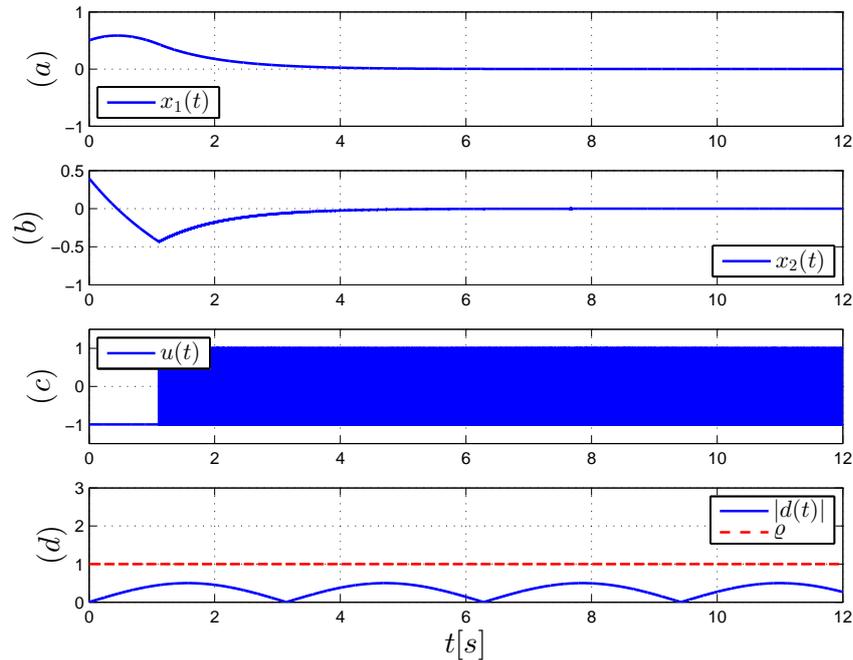


Figura 5 - Simulação do sistema de controle a estrutura variável (1.31)–(1.33), na presença de perturbação  $d(t) = 0,5 \sin(t)$ : (a) estado  $x_1(t)$ ; (b) estado  $x_2(t)$ ; (c) sinal de controle  $u(t)$ ; (d) módulo da perturbação  $d(t)$  e ganho de modulação  $\rho$ .

## 1.7 Conclusões

Neste capítulo foram introduzidos conceitos sobre controle por modo deslizante. As propriedades de redução de ordem do sistema e robustez a perturbações casadas são fatores de destaque desta metodologia. O fenômeno do *chattering* atrapalha o desempenho em implementações físicas de sistemas SMC, sendo necessário mitigar seus efeitos. A diminuição de ganhos do sinal de controle (função de modulação) é uma delas, o que é um dos motivos para o desenvolvimento de estratégias para sua adaptação.

Nos Capítulos 2 e 3 serão analisadas metodologias presentes na literatura para adaptação dos ganhos de modulação. Nos Capítulos 4 e 5, serão introduzidas e estudadas novas abordagens para tal.

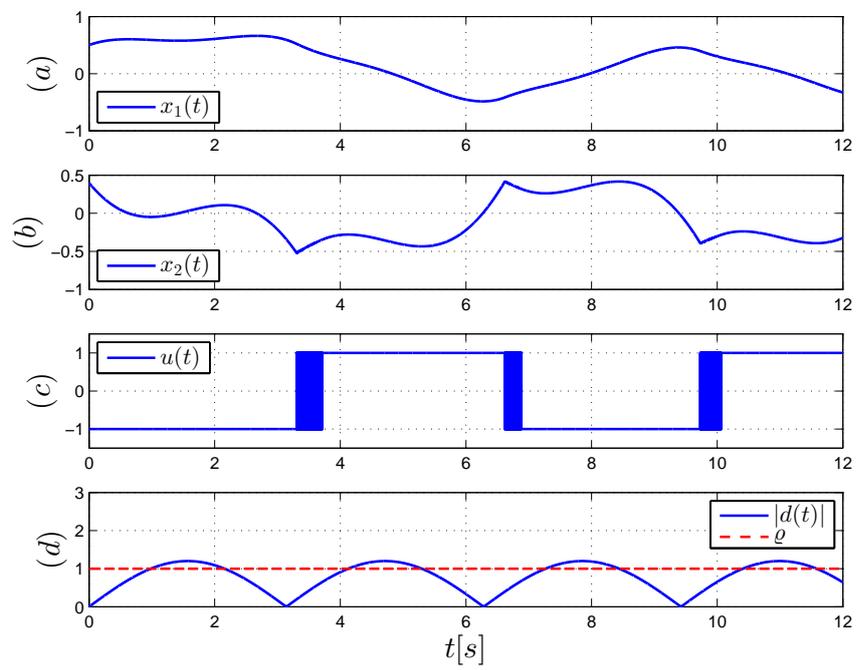


Figura 6 - Simulação do sistema de controle a estrutura variável (1.31)–(1.33), na presença de perturbação  $d(t) = 1,2 \sin(t)$ : (a) estado  $x_1(t)$ ; (b) estado  $x_2(t)$ ; (c) sinal de controle  $u(t)$ ; (d) módulo da perturbação  $d(t)$  e ganho de modulação  $\rho$ .

## 2 ESTRATÉGIAS BASEADAS NO AUMENTO PURO OU AUMENTO E DIMINUIÇÃO DE GANHOS

É natural que, ao se pensar em controle por modo deslizante adaptativo, a primeira tentativa para lidar com o problema seja o aumento dos ganhos de modulação, até que um modo deslizante seja atingido. Tal raciocínio é intuitivo, pois ganhos maiores tornariam o sistema capaz de resistir a perturbações com amplitudes maiores. Porém, com um aumento exacerbado, e portanto conservador, tal ganho poderia se tornar excessivamente alto, resultando em maior efeito de *chattering*.

Algumas estratégias conjugam aumentos e diminuições sucessivas de ganhos de modulação, de acordo com algum critério estabelecido (baseados, por exemplo, no comportamento da função de chaveamento, ou nos efeitos causados pela perturbação). A possibilidade de haver diminuição do ganho de modulação reduz as chances de o mesmo se tornar muito grande (mitigando a ocorrência de *chattering*). Contudo, em termos práticos, tais diminuições podem vir a causar um excessivo número de perdas de deslizamento, o que poderia prejudicar muito o desempenho do sistema.

Este capítulo mostrará exemplos de estratégias presentes na literatura que se utilizam dos mecanismos descritos (somente aumentos ou aumentos e diminuições conjuntas do ganho de modulação).

### 2.1 Estratégia em (HUANG; KUO; CHANG, 2008)

Seja o sistema (HUANG; KUO; CHANG, 2008 apud PLESTAN et al., 2010)

$$\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad (2.1)$$

no qual  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado e  $u(t) \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle. As funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são suaves e limitadas para todo  $x \in \mathcal{X}$ . Além disto, a função  $f(x)$  contém um termo referente a perturbações não mensuráveis e  $g(x(t)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}$  (ou seja, o sistema em (2.1) é dito ser *controlável*  $\forall x \in \mathcal{X}$ ). O objetivo de controle consiste em forçar uma função de chaveamento  $\sigma(x(t), t)$  para zero. Supõe-se aqui que  $\sigma$  admite grau relativo

unitário em relação a  $u$ . Assim, é possível obter:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot g(x) \cdot u. \quad (2.2)$$

Sejam  $\psi(x(t), t)$  e  $\gamma(x(t), t)$  definidas como:

$$\begin{aligned} \Psi(x(t), t) &:= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot f(x), \\ \Gamma(x(t), t) &:= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot g(x) \cdot u. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Logo, a partir de (2.2) e (2.3):

$$\dot{\sigma} = \Psi(x(t), t) + \Gamma(x(t), t) \cdot u. \quad (2.4)$$

É assumido também que as funções  $\Psi(x(t), t)$  e  $\Gamma(x(t), t)$  obedecem as seguintes desigualdades:

$$|\Psi| \leq \Psi_M, 0 < \Gamma_m \leq \Gamma \leq \Gamma_M, \quad (2.5)$$

na qual as constantes  $\Psi_M$ ,  $\Gamma_m$  e  $\Gamma_M$  existem, porém não são conhecidas.

É provado em (HUANG; KUO; CHANG, 2008) que, para o sistema em (2.1) e função de chaveamento  $\sigma(x(t), t)$  com dinâmica tal como a definida em (2.4) e (2.5), controlado pela lei:

$$u = -K(t) \operatorname{sgn}(\sigma(x(t), t)), \quad (2.6)$$

cuja lei adaptativa para  $K(t)$  é dada por:

$$\dot{K}(t) = \bar{K} \cdot |\sigma(x(t), t)|, \quad (2.7)$$

na qual  $\bar{K} > 0$  e  $K(0) > 0$ , existe um tempo finito  $t_F \geq 0$  tal que um modo deslizante é estabelecido no sistema  $\forall t \geq t_F$ .

### 2.1.1 Resultados de Simulação

A Figura 7 mostra uma simulação das leis de controle (2.6) e (2.7) para a planta em (2.1), com  $f(x(t)) = 0$ ,  $g(x(t)) = 1$  (um integrador) e  $\sigma(t) = x(t)$ , sujeita a uma perturbação de entrada  $a(t) = 8 \operatorname{sen}(t)$ . São usados os seguintes parâmetros:  $x(0) = 2$ ,

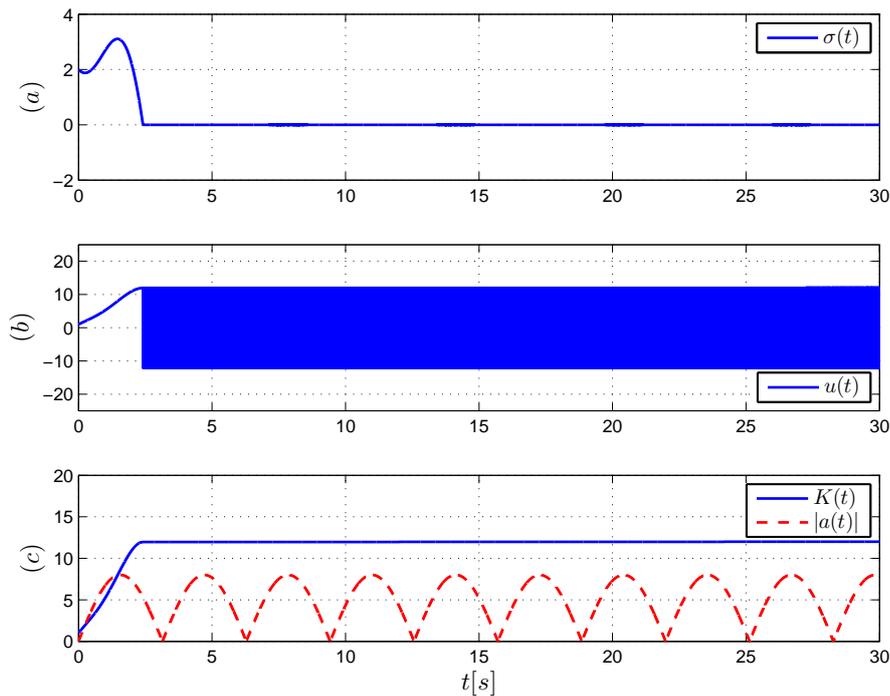


Figura 7 - Desempenho da estratégia em (HUANG; KUO; CHANG, 2008) para perturbação senoidal: (a) função de chaveamento  $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$ ; (c) ganho de modulação  $K(t)$  e módulo da perturbação  $|a(t)|$ .

$\bar{K} = 2$  e  $K(0) = 1$ . É possível observar a natureza monotonicamente crescente de  $K(t)$ , que, após superar o limitante da perturbação, leva o sistema a entrar em modo deslizante, e nele permanecer, uma vez que a condição  $K(t) > |a(t)|$  é mantida a partir de então. Conforme se depreende da equação (2.7), na presença do deslizamento, o ganho  $K(t)$  se mantém constante, uma vez que  $|\sigma(t)| \equiv 0$ .

### 2.1.2 Notas Acerca da Estratégia

O princípio básico da estratégia em questão, isto é, o aumento do ganho de modulação proporcionalmente à distância entre a função de chaveamento  $\sigma$  e a origem, é conhecido há bastante tempo na literatura de estabilização adaptativa (ILCHMANN; OWENS, 1990). Em outras palavras, o ganho do controlador é aumentado até que o sinal de erro tenda a zero.

Tal estratégia apresenta sensibilidade a ruídos e outras não idealidades (tais como aquelas introduzidas por controladores de tempo discreto), sendo somente aplicável a um modo deslizante *ideal*. Observa-se que, em um modo deslizante *real*, o ganho de modulação

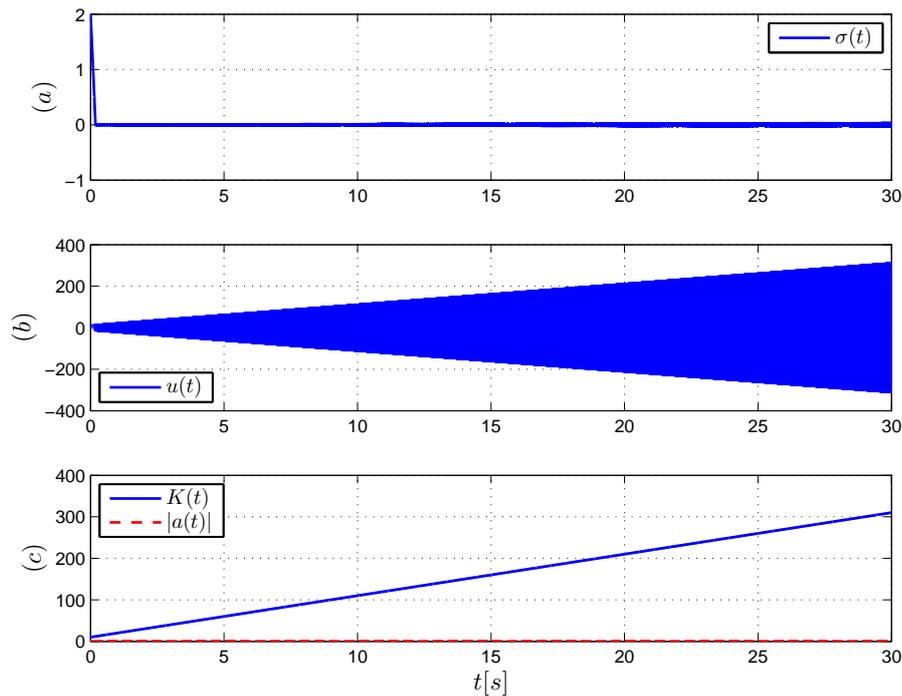


Figura 8 - Desempenho da estratégia em (HUANG; KUO; CHANG, 2008) para perturbação senoidal na presença de ruído de medição do estado: (a) função de chaveamento  $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$ ; (c) ganho de modulação  $K(t)$  e módulo da perturbação  $|a(t)|$

$K(t)$  sempre crescerá monotonicamente, tendendo ao infinito, dada a impossibilidade da condição  $\sigma \equiv 0$  ser verificada, pois a função de chaveamento desliza em uma vizinhança da superfície de deslizamento.

Para ilustrar o problema descrito, repete-se aqui a simulação mostrada na seção anterior, desta vez somado-se um ruído de medição  $r(t) = 0,01 \sin(100t)$  em  $\sigma(t)$ , o que representaria algo comum em uma implementação prática (Figura 8). Os demais parâmetros permanecem os mesmos da simulação anterior. Conforme esperado, é possível observar que tal ruído de medição induz um crescimento indiscriminado em  $K(t)$ , que tende ao infinito.

Uma solução para o problema acima é a inclusão de uma zona morta (DIAS, 2017, pp. 44) em (2.7), ou seja, incluir uma pequena vizinhança de  $\sigma(t) = 0$  na qual a derivada  $\dot{K}(t)$  seja anulada, o que é algo aceitável em se tratando de um modo deslizante *real*.

Outrossim, a natureza unicamente crescente do ganho de modulação favorece a ocorrência de *chattering*, uma vez que o ganho poderá permanecer em um nível desnecessariamente alto mesmo quando a perturbação retornar a níveis baixos.

Muitas soluções para os problemas apresentados na estratégia acima foram propostas em trabalhos posteriores, dando origem a novos esquemas de controle. A estratégia exibida na seção a seguir é uma delas.

## 2.2 Estratégia em (PLESTAN et al., 2010)

Seja o sistema em (2.1), com função de chaveamento  $\sigma(x(t), t)$  de dinâmica tal como a definida em (2.4) e (2.5). Adota-se então a lei de controle vista na seção anterior, (2.6), porém com o seguinte mecanismo adaptativo para  $K(t)$ :

$$\dot{K} = \begin{cases} \bar{K} \cdot |\sigma(x(t), t)| \cdot \text{sgn}(|\sigma(x(t), t)| - \epsilon), & \text{se } K > \mu, \\ \mu, & \text{se } K \leq \mu, \end{cases} \quad (2.8)$$

na qual  $\bar{K} > 0$ ,  $K(0) > 0$ ,  $\epsilon > 0$  e  $\mu > 0$ . O parâmetro  $\mu$  (de valor reduzido) é introduzido para forçar  $K(t)$  a assumir apenas valores positivos. O artigo (PLESTAN et al., 2010) prova que, para a planta, a função de chaveamento e a lei de controle descritas acima, existe  $t_F > 0$  tal que um modo deslizante real é estabelecido  $\forall t > t_F$  (isto é,  $|\sigma(x(t), t)| < \delta$ ,  $\forall t \geq t_F$ ), com:

$$\delta = \sqrt{\epsilon^2 + \frac{\Psi_M^2}{\bar{K}\Gamma_m}}. \quad (2.9)$$

Também é proposto em (PLESTAN et al., 2010) um mecanismo de adaptação para  $\epsilon$ , para o caso de controladores de tempo discreto, de modo a evitar instabilidade ou baixa precisão para o sistema de controle em malha fechada. Tal mecanismo de adaptação é dado por:

$$\epsilon(t) = 4 K(t) T_e, \quad (2.10)$$

na qual  $T_e$  é o período de amostragem do controlador.

### 2.2.1 Resultados de Simulação

A Figura 9 mostra uma simulação das leis adaptativas (2.6), (2.8) e (2.10), aplicadas a uma planta como em (2.1), com  $f(x(t)) = 0$  e  $g(x(t)) = 1$  (um integrador) e condição inicial  $x(0) = 0, 1$ . Utiliza-se a função de chaveamento  $\sigma(t) = x(t)$  e uma perturbação de entrada  $a(t) = 2 \text{sen}(0,5t)$ . Os demais parâmetros são dados por  $\bar{K} = 100$ ,  $K(0) = 1$ ,

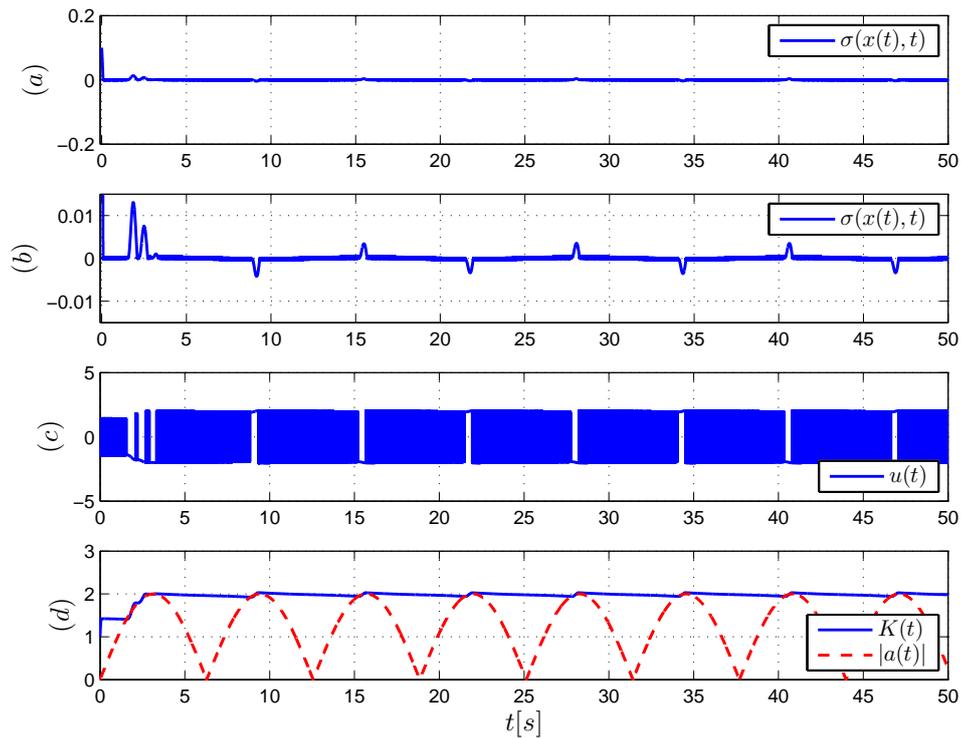


Figura 9 - Desempenho da estratégia em (PLESTAN et al., 2010) para perturbação senoidal  $a(t) = 2\text{sen}(0,5t)$ : (a) função de chaveamento  $\sigma(x(t), t)$ ; (b) função de chaveamento  $\sigma(x(t), t)$  (zoom); (c) sinal de controle  $u(t)$ ; (d) função de modulação  $K(t)$  e módulo da perturbação  $|a(t)|$ .

$\mu = 0,01$  e período de amostragem do controlador de 0,1 milissegundo.

Observa-se que o deslizamento é atingido rapidamente, e depois perdido e atingido novamente sucessivas vezes. Ainda assim, a função de chaveamento mantém-se em uma vizinhança pequena em torno da origem, o que poderia ser considerado satisfatório em uma aplicação real.

### 2.3 Estratégia em (BARTOLINI et al., 2013)

Seja um sistema dinâmico na forma:

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (2.11)$$

na qual  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $a, b$  e  $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  são funções suaves desconhecidas,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $n$  pode também ser incerto (seu valor não será explicitamente usado),  $t \geq 0$ .

A função de chaveamento  $\sigma(t, x)$  possui grau relativo unitário, isto é, o sinal de

controle aparece explicitamente na expressão de  $\dot{\sigma}$  (ISIDORI, 1989), que é da forma:

$$\dot{\sigma} = \psi(t, x) + \varphi(t, x)u, \quad (2.12)$$

na qual  $\psi(t, x)$  e  $\varphi(t, x)$  são funções suaves. É suposto que, para certos valores das constantes  $\psi_d, \psi_m, \varphi_m, \varphi_M, \varphi_d > 0$  as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$|\dot{\psi}/\psi| \leq \psi_d \text{ com } |\psi| \geq \psi_m, \quad |\dot{\psi}| \leq \psi_{dm} \text{ com } |\psi| \leq \psi_m, \quad \varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_M, \quad |\dot{\varphi}/\varphi| \leq \varphi_d. \quad (2.13)$$

Apenas  $\psi_d$  e  $\varphi_d$  são supostas conhecidas. Assume-se que desigualdades em (2.13) sejam satisfeitas independentemente dos valores do sinal de controle, o que é verdade, por exemplo, se  $(\partial\psi/\partial x)b = (\partial\varphi/\partial x)b = 0$ , ou se as incertezas são determinadas por fatores externos ao sistema. A ideia é que, com  $\psi$  grande, sua derivada logarítmica é limitada por  $\psi_d$ . Ao mesmo tempo, a derivada logarítmica  $\dot{\psi}/\psi$  possa ser bastante grande se  $\psi$  é pequeno. Desta forma, a dinâmica de  $\psi$  ao redor de zero é destacada como o caso  $|\psi| \leq \psi_m$ , e  $|\dot{\psi}| \leq \psi_{dm}$  é então assumido. O algoritmo proposto não depende dos valores de  $\psi_m$  e  $\psi_{dm}$ . Assim, é razoável escolher os parâmetros  $\psi_m$  e  $\psi_{dm}$  de maneira a minimizar  $\psi_d$ . Por exemplo, a função  $\psi = \text{sen}(t)$  é descrita por dois conjuntos de parâmetros  $\psi_m = 0,5$ ,  $\psi_d = 2$ ,  $\psi_{dm} = 1$  e por  $\psi_m = 0,01$ ,  $\psi_d = 100$ ,  $\psi_{dm} = 1$ . Para  $\psi = e^t - 1$ , ambos os conjuntos de parâmetros  $\psi_m = 10$ ,  $\psi_d = 2$ ,  $\psi_{dm} = 10$  e  $\psi_m = 1$ ,  $\psi_d = 3$ ,  $\psi_{dm} = 5$  podem ser escolhidos.

Escolhe-se a lei de controle:

$$u = -K \text{sgn}(\sigma). \quad (2.14)$$

Uma vez que o valor de  $\psi/\varphi$  pode ser ilimitado, nenhum valor para  $K$  resolveria o problema descrito.

A abordagem proposta é a adaptação do coeficiente  $K$  (função de modulação). A ideia é aumentar  $K$  até (aproximadamente) um modo deslizante  $\sigma \equiv 0$  ser detectado. Então,  $K$  é gradualmente reduzido até que o modo deslizante seja perdido (devido a magnitude do ganho de controle ser insuficiente). No momento em que o modo deslizante é perdido, o coeficiente  $K$  é aumentado em um impulso, de forma a prover a imediata restauração da convergência. Posteriormente, é reduzido gradualmente até que o modo deslizante seja perdido novamente. E assim o processo se repete sucessivamente. Com

isso, um modo deslizante *real* (UTKIN, 1992) é mantido indefinidamente. Devido à descontinuidade intrínseca do sinal de controle, a natureza descontínua de  $K$  não compromete o desempenho do sistema. A realização desta ideia vem a seguir.

Seja  $\tau > 0$  um período de amostragem. É sabido que, na ausência de erros de medição, um modo deslizante de primeira ordem possui precisão proporcional a  $\tau$ . Introduce-se então um critério para a detecção de um modo deslizante real de primeira ordem  $\sigma \approx 0$ . São escolhidos um número natural  $N_t$  e uma constante  $\mu > 0$ . Seja  $t \in [t_i, t_{i+1})$ , e define-se:

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \forall t_j \in [t - N_t\tau, t] : |\sigma(t_j)| \leq \mu K(t_j)\tau, \\ -1 & \text{se } \forall t_j \in [t - N_t\tau, t] : |\sigma(t_j)| > \mu K(t_j)\tau, \end{cases} \quad (2.15)$$

na qual  $t_j$  são os instantes de amostragem,  $t_0 = 0$ . O critério para detecção de um modo deslizante de primeira ordem é considerado satisfeito se  $\alpha = 1$ .

Em se tratando da constante  $K$ , uma condição suficiente para a convergência de  $\sigma$  para zero é  $K > \sup|\psi/\varphi|$ . Introduce-se as constantes  $K_{mm}$ ,  $K_m$ ,  $q$ , que satisfazem:

$$K_m \geq K_{mm} > 0, \quad q > 1. \quad (2.16)$$

Seja então a lei adaptativa gradual para  $K$  da forma:

$$\dot{K} = \begin{cases} -\alpha\lambda K, & \text{se } K > K_m, \\ -\alpha\lambda_m, & \text{se } K_{mm} < K \leq K_m, \\ \lambda_m, & \text{se } K \leq K_{mm}, \end{cases} \quad K(0) \geq K_{mm}, \quad (2.17)$$

na qual  $\lambda$ ,  $\lambda_m$  são parâmetros de adaptação positivos. Portanto,  $K$  nunca é menor que  $K_{mm}$ , que é escolhido arbitrariamente pequeno. Adicionalmente, um incremento instantâneo é implementado a cada instante de tempo  $t_i$  caso o critério para a existência de modo deslizante seja violado, isto é, passe de verdadeiro para falso no instante:

$$K(t_i) = \begin{cases} qK(t_i - 0) & \text{se } \alpha(t_{i-1}) = 1 \text{ e } \alpha(t_i) = -1, \\ K(t_i - 0) & \text{se } \alpha(t_{i-1}) \neq 1 \text{ ou } \alpha(t_i) \neq -1. \end{cases} \quad (2.18)$$

É provado em (BARTOLINI et al., 2013) que, escolhendo-se  $\lambda > \varphi_d + \psi_d$ , para qualquer

$\mu$  suficientemente grande e  $N_t \geq 2$  suficientemente grande (escolhido com base em  $\mu$ ), existe algum  $q_* > q$  que, com  $\tau$  suficientemente pequeno, torne o parâmetro  $K(t)$  um máximo local, que nunca excede  $\max(q_*|\psi|/\varphi, K_{mm})$  no mesmo tempo  $t$ . A precisão  $|\sigma| \leq \eta_1 \tau K(t)$ ,  $|\dot{\sigma}| \leq \eta_2 K(t)$  é estabelecida em tempo finito. As constantes  $\eta_1$  e  $\eta_2$  dependerão apenas dos parâmetros do algoritmo e das hipóteses assumidas.

### 2.3.1 Notas Acerca da Estratégia

Observa-se que esta estratégia apresenta muitas semelhanças com aquela proposta em (PLESTAN et al., 2010): ambas utilizam-se das características de um modo deslizante *real* para a detecção do surgimento ou perda do deslizamento, e desta forma desencadear mecanismos de mudança do ganho de modulação.

Esta estratégia apresenta uma adaptação em três estágios para o ganho de modulação  $K$  (ver equação (2.17)), e não mais em dois, como em (PLESTAN et al., 2010) (ver equação (2.8)). Além disso, apresenta um mecanismo mais complexo e eficiente de detecção da existência de um modo deslizante, o que melhora o desempenho da estratégia em relação à anterior. Outra vantagem é o fato de a estratégia em (BARTOLINI et al., 2013) permitir incertezas não limitadas.

## 2.4 Outras Estratégias

Diversos trabalhos científicos empregam as ideias centrais deste capítulo. em contextos ligeiramente diversos do escopo desta dissertação (controle por modo deslizante de ordem superior, controle adaptativo por modelo de referência, controle vetorial unitário, etc). São exemplos os trabalhos:

- O artigo (YAN; HSU; XIUXIA, 2006) exhibe uma estratégia de Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control* - VS-MRAC) para plantas com incertezas e grau relativo unitário. Algumas novidades apresentadas são a garantia de tempo de transiente, sobrepassagem e erro de estado estacionário pré-especificados, bem como a não necessidade de conhecimento do sinal do ganho de alta frequência da planta. O mecanismo por trás desta estratégia adapta o ganho do sinal de controle chaveado de forma monotonicamente crescente.

- O artigo (OLIVEIRA et al., 2014) propõe uma estratégia de controle baseado em SMC e funções de monitoração para o controle de manipuladores robóticos através de câmeras não calibradas. Tal estratégia é capaz de lidar com as incertezas presentes na calibração das mesmas, bem como remove uma restrição clássica dos esquemas anteriores: o ângulo de desalinhamento da câmera pertencer a um intervalo estrito. A estratégia possui uma função monotonicamente crescente como parte integrante da função de monitoração (um dos pontos centrais do mecanismo adaptativo), e a partir da mesma é formado o ganho de modulação, que pode aumentar ou diminuir, de acordo com o comportamento da referida função.
- O artigo (MORENO et al., 2016) propõe um algoritmo *twisting* adaptativo contínuo (*Adaptive Continuous Twisting Algorithm - ACTA*). Este algoritmo é capaz de compensar os efeitos de uma perturbação com derivada limitada em tempo finito. Também é capaz de manter suas características de convergência para perturbações com limitante de sua derivada desconhecido. Diferentemente dos algoritmos *twisting* contínuos tradicionais, que possuem quatro ganhos a serem sintonizados (sendo, portanto, de sintonia mais complexa), este conta com um único ganho, que é adaptado de forma monotonicamente crescente.
- O artigo (ESTRADA; PLESTAN; ALLOUCHE, 2013) propõe um controlador por modo deslizante adaptativo de segunda ordem. Um modo deslizante de segunda ordem *prático*, (isto é, não ideal), é obtido, mesmo na presença de perturbações limitadas com limitante desconhecido. Possui como vantagens o não uso da derivada da variável de deslizamento (função de chaveamento), um requisito comum em estratégias do tipo, e que representa um problema em implementações práticas, devido a presença de ruídos. Tal estratégia apresenta um ganho de modulação adaptativo que pode crescer e decrescer, em função do comportamento da variável de deslizamento.

## 2.5 Conclusões

Neste capítulo foi revisada a literatura de controle por modo deslizante adaptativo baseada em crescimento puro ou crescimento e decrescimento de ganhos de modulação. Como visto, as estratégias baseadas no aumento puro possuem como principal desvantagem serem conservadoras, ao passo que aquelas que permitem também o decrescimento

de ganhos possuem o inconveniente de sofrerem sucessivas perdas do deslizamento.

No capítulo a seguir, serão revistas estratégias que exploram uma nova fronteira de possibilidades: o uso do *controle equivalente*, através do qual é possível estimar o comportamento da perturbação.

### 3 ESTRATÉGIAS BASEADAS EM CONTROLE EQUIVALENTE

Por possibilitar a estimação do comportamento da perturbação, o uso do controle equivalente introduz uma nova fronteira de possibilidades nos controladores adaptativos. Este capítulo mostrará algumas das principais estratégias presentes na literatura que utilizam esse mecanismo.

#### 3.1 Estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998)

Seja o seguinte sistema de uma entrada e uma saída (*Single-input single-output - SISO*), possivelmente não linear e variante no tempo :

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + b u(t) + d(t), \quad (3.1)$$

no qual  $\mathbf{x} = [x \dot{x} \dots x^{(n-1)}]^T$  é o vetor de estado,  $d(t)$  é uma perturbação desconhecida,  $f(\mathbf{x}, t)$  é uma função conhecida do tempo e do vetor de estados  $\mathbf{x}$  e  $b \neq 0$  é uma constante conhecida. O sistema é designado para seguir a trajetória dada por  $x_d(t)$ . Define-se então o erro de rastreamento  $\dot{e} = x - x_d$  e o vetor de estado da equação do erro:

$$\mathbf{e} = [e \dot{e} \dots e^{(n-1)}]^T = [e_1 e_2 \dots e_n]^T. \quad (3.2)$$

O propósito do algoritmo em (BARTOSZEWICZ, 1998) é propor uma estratégia que utiliza modo deslizante para levar o erro de rastreamento do sistema a zero (ou seja, garantir um rastreamento exato de trajetória). Além disso, deseja-se atenuar os efeitos de *chattering*, sem comprometer o desempenho do sistema.

No referido trabalho é assumido que o módulo da perturbação  $|d(t)|$  é limitado por uma constante conhecida  $D$ , ou seja,  $|d(t)| < D \quad \forall t > t_0$ , onde  $t_0$  é um instante de tempo inicial. Além disso, o valor inicial  $d(t_0)$  da perturbação obedece a seguinte relação:

$$-D \leq d_1 < d(t_0) < d_2 \leq D, \quad (3.3)$$

na qual  $d_1$  e  $d_2$  são constantes conhecidas. Também é assumido que a perturbação  $d(t)$  é suave, ou seja, existe uma constante  $\delta$  (possivelmente muito grande) tal que, para todo

instante de tempo  $t \geq t_0$ , é válida a seguinte relação:

$$|\dot{d}(t)| < \delta. \quad (3.4)$$

São definidas as seguintes constantes:

$$d_0 := \frac{d_1 + d_2}{2}; \quad k := \frac{d_2 - d_1}{2}. \quad (3.5)$$

Define-se então uma superfície de deslizamento  $\sigma(e(t), t)$  (possivelmente não linear e/ou variante no tempo) de tal forma que:

$$\sigma(\mathbf{e}(t_0), t_0) = 0, \quad (3.6)$$

isto é, o vetor de estado do erro  $\mathbf{e}(t_0)$  pertence à superfície de deslizamento no instante  $t = t_0$ . Isto será possível se uma superfície de deslizamento variante no tempo adaptável às condições iniciais for utilizada, ou caso seja implementado um modo deslizante integral em um espaço de estado estendido. Neste último caso, a planta controlada é aumentada de um estado extra:

$$e_0(t) = C + \int_{t_0}^t e_1(\tau) d\tau, \quad (3.7)$$

na qual  $C$  é uma constante que pode ser apropriadamente selecionada de forma a forçar o sistema a satisfazer a condição em (3.6). Este feito pode ser realizado na prática, dado que nenhuma diferenciação a mais é necessária.

### 3.1.1 Lei de Controle

Uma vez que  $\frac{\partial \sigma}{\partial e_n} \neq 0$ , a seguinte lei de controle foi proposta:

$$u = u_0 + u_d + u_c, \quad (3.8)$$

na qual

$$u_0 = b^{-1} x_d^{(n)} - b^{-1} f - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial e_n} \cdot b \right)^{-1} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial e_1} \cdot e_2 + \frac{\partial \sigma}{\partial e_2} \cdot e_3 + \dots + \frac{\partial \sigma}{\partial e_{n-1}} \cdot e_n + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \quad (3.9)$$

é um termo numericamente semelhante ao controle equivalente, válido na ausência de perturbações,

$$u_d = -\frac{k}{b} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial e_n}\right) \quad (3.10)$$

é um termo descontínuo e  $u_c$  é um termo contínuo de compensação governado pela seguinte equação diferencial:

$$u_c + \tau \dot{u}_c = K u_d, \quad (3.11)$$

a qual possui uma condição inicial  $u_c(t_0) = -\frac{d_0}{b}$ . Além disso,  $\tau$  e  $k$  são constantes estritamente positivas.

O referido trabalho (BARTOSZEWICZ, 1998) prova que, uma vez satisfeita a relação

$$K \geq \frac{D + \tau \sigma}{k} - 1, \quad (3.12)$$

então, para o sistema (3.1), controlado de acordo com as leis (3.8)-(3.11) a condição de alcançabilidade  $\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial t} < 0$  é satisfeita  $\forall t \geq t_0$ , garantindo a existência de um modo deslizante.

### 3.1.2 Resultados de Simulação

A Figura 10 mostra uma simulação das leis adaptativas em (3.8)-(3.11) aplicadas a uma planta como em (3.1), com  $f(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $b = 1$  (um integrador),  $\sigma(t) = e(t)$ , condições iniciais nulas e uma perturbação senoidal  $d(t) = \operatorname{sen}(t)$ . A trajetória escolhida é  $x_d(t) = 2 \operatorname{sen}(0,5t)$ , e os demais parâmetros são dados por  $K = 10$ ,  $k = 0,1$  e  $\tau = 0,001$  s. Observa-se que, desta forma, tem-se  $u_0 = \dot{x}_d$  em (3.9). Tais parâmetros satisfazem a desigualdade em (3.12). É possível verificar que o sistema opera em modo deslizante desde o instante inicial, e tal modo é mantido para todo  $t \geq 0$ . O sinal de controle possui componentes contínuas e descontínuas (ver equação (3.8)), de tal maneira que a parte contínua do controlador predomina sobre a parte descontínua, permitindo que esta última possua uma amplitude reduzida. Com isso, consegue-se reduzir o efeito de *chattering*.

Ressalta-se aqui que não há resultados de simulação da estratégia no artigo (BARTOSZEWICZ, 1998). Também não foram encontradas simulações da mesma em outras publicações. Portanto, esta dissertação é o primeiro trabalho a apresentar simulações da estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998).

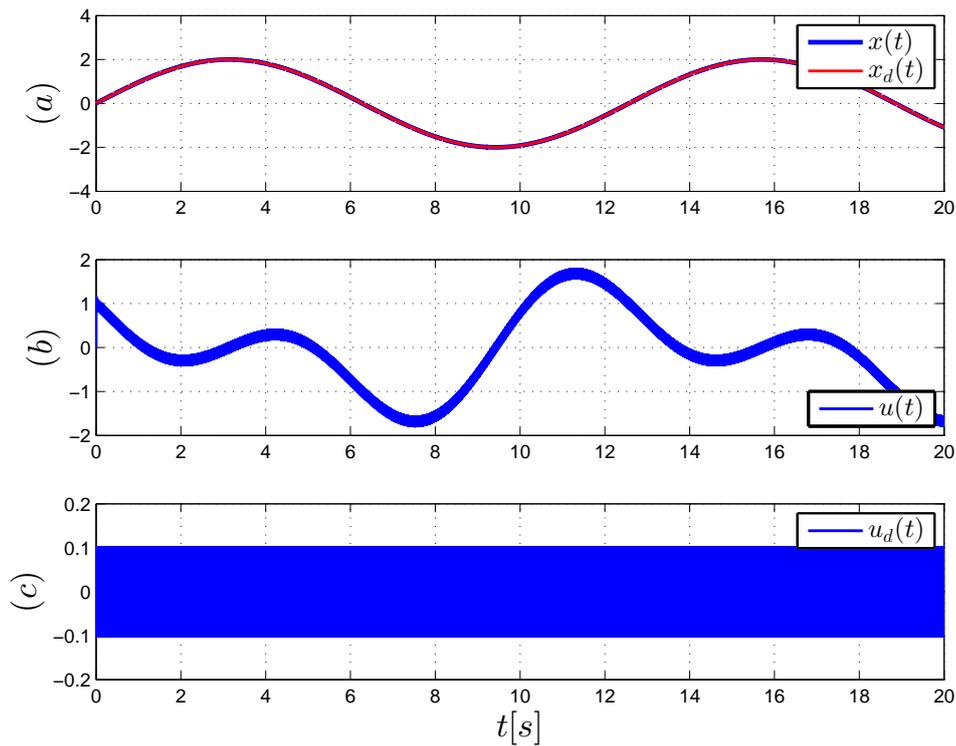


Figura 10 - Desempenho da estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998) para perturbação senoidal  $d(t) = \text{sen}(t)$ : (a) estado  $x(t)$  e trajetória  $x_d(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$ ; (c) parcela descontínua  $u_d(t)$  do sinal de controle.

### 3.2 Estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013)

Seja o sistema de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t) + u(t); \\ u &= -k \text{sgn}(x(t)), k > 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

na qual  $a(t)$  é uma perturbação e  $u(t)$  é o sinal de controle. São conhecidas constantes  $a_+$  e  $A$  que obedecem as relações  $0 < |a(t)| \leq a_+$  e  $|\dot{a}(t)| \leq A$ . A perturbação  $a(t)$  é desconhecida.

É possível observar que  $k > a_+$  é uma condição suficiente para a existência de um modo deslizante. Porém, se o parâmetro  $a(t)$  varia, o ganho  $k$  pode ser decrescido e, desta forma, a amplitude do *chattering* se torna menor. O objetivo do referido trabalho (UTKIN; POZNYAK, 2013) é decrescer  $k$  para o menor valor possível, preservando o modo deslizante, dado que  $a(t)$  é desconhecido.

Com a ocorrência de um modo deslizante,  $x(t)$  é conduzido para a origem, e o controle  $u(t)$  pode ser substituído pelo controle equivalente  $u_{eq}$  (ver Seção 1.3.3), para o qual o lado direito da equação (3.13) é igual a zero, ou seja,

$$\dot{x}(t) = 0 = a(t) + u_{eq}, \quad (3.14)$$

que resulta em

$$k(t)[\text{sgn}(x(t))]_{eq} = a(t). \quad (3.15)$$

A função  $[\text{sgn}(x(t))]_{eq}$  pode ser entendida como um valor médio, ou uma componente lenta da função descontínua  $\text{sgn}(x(t))$  que chaveia em alta frequência, podendo ser obtida por um filtro passa baixa para atenuar componentes de alta frequência de  $x(t)$  (UTKIN, 1992). Observa-se, por causa da lei de formação da função  $\text{sgn}(x(t))$ , o valor médio desta função está limitado ao intervalo  $[-1, 1]$ .

A ideia por trás do mecanismo de adaptação é a seguinte: após o início do modo deslizante o parâmetro  $[\text{sgn}(x(t))]_{eq}$  deve ser decrescido até tornar-se próximo de 1. Por um lado, a condição  $k(t) > a(t)$  deve ser verificada. Por outro lado, a amplitude do *chattering* é proporcional a  $k(t)$ . Desta forma, o objetivo do processo de adaptação se torna claro: o ganho  $k$  deve tender a  $a(t)/\alpha$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ , sendo uma constante muito próxima de 1. Assim, é proposto o seguinte algoritmo para adaptação do ganho  $k$ :

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varrho k(t) \text{sgn}(\delta(t)) - M[k(t) - k^+]_+ + M[\mu - k(t)]_+ \\ \delta(t) &:= |[\text{sgn}(x(t))]_{eq}| - \alpha, \quad \alpha \in (0, 1), \\ [z]_+ &:= \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 0 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}, \quad M > \varrho k^+, k^+ > a^+, \varrho > 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

no qual  $\mu$  e  $k^+$  representam um intervalo para a variação de  $k$ , ou seja,  $k$  pode variar entre o intervalo  $[\mu, k^+]$ , com  $\mu$  representando um valor mínimo para  $k$ .

É provado no referido artigo (UTKIN; POZNYAK, 2013) que, uma vez que a relação  $\varrho > \frac{A}{\alpha\mu}$  seja satisfeita, então o algoritmo adaptativo em (3.16) é capaz de fazer o sistema (3.13) entrar em modo deslizante em um tempo finito  $t_f$ , dado por:

$$t_f = \frac{k^+}{\alpha\mu\varrho - A} |\sigma(0)|. \quad (3.17)$$

### 3.2.1 Resultados de Simulação

A Figura 11 mostra uma simulação das leis adaptativas em (3.16) aplicadas ao sistema em (3.13) com condição inicial  $x(0) = 2$  e sujeito a uma perturbação senoidal  $a(t) = \text{sen}(t)$ . São usados os seguintes parâmetros:  $k^+ = 3$ ,  $\varrho = 6$ ,  $M = 20$  e  $\alpha = 0,9$ . O sinal  $[\text{sgn}(x(t))]_{eq}$  foi estimado pelo filtro passa-baixa  $\tau\dot{z} + z = \text{sgn}(x(t))$ , com  $z(0) = 0$  e  $\tau = 0,01$  s. É possível observar que, após um período inicial de cerca de 1,5 segundos, o ganho  $k(t)$  se torna um majorante pouco conservador para o módulo da perturbação  $a(t)$ , garantindo o deslizamento e mitigando a eventual ocorrência de *chattering* em implementações práticas.

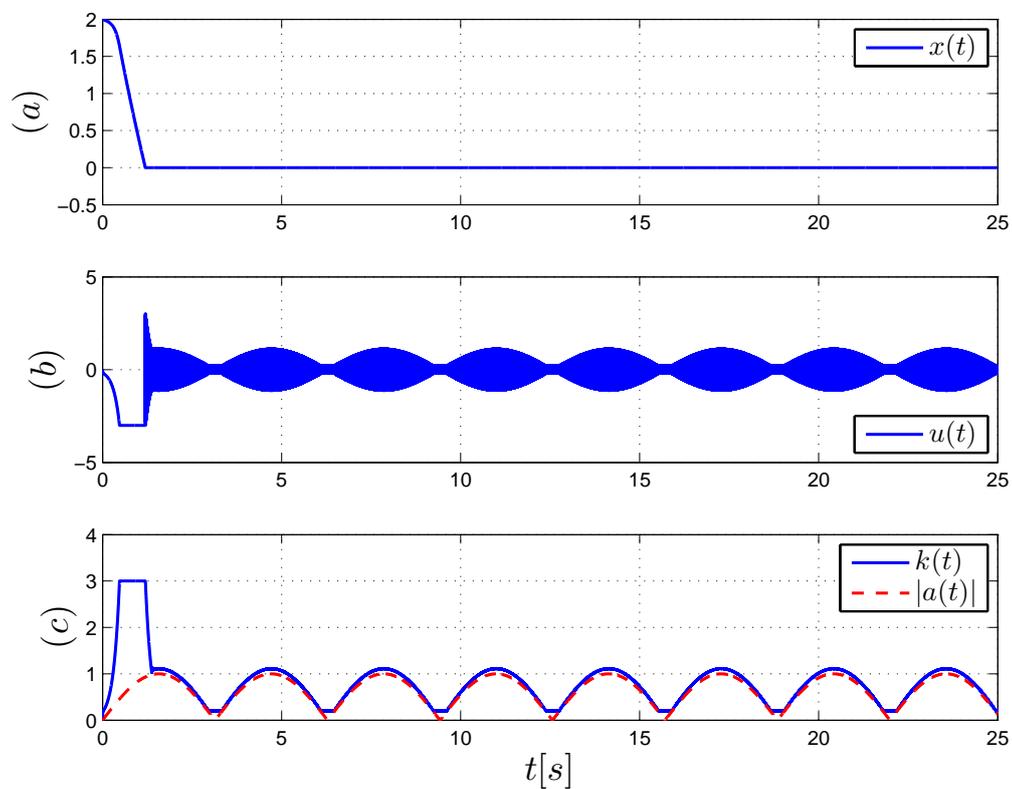


Figura 11 - Desempenho da estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013) para perturbação senoidal  $a(t) = \text{sen}(t)$ : (a) estado  $x(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$ ; (c) função de modulação  $k(t)$  e módulo da perturbação  $|a(t)|$ .

### 3.3 Estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016)

Considere inicialmente um sistema de modo deslizante de primeira ordem, no qual a dinâmica da variável de deslizamento (função de chaveamento) é dada por:

$$\dot{\sigma}(t) = a(t) + u(t), \quad (3.18)$$

na qual  $\sigma \in \mathbb{R}$  representa a função de chaveamento a ser forçada a tomar o valor zero em tempo finito,  $u(t)$  representa a entrada de controle escalar a ser manipulada e  $a(t)$  é uma perturbação. Aqui será assumido que  $a(t)$  é desconhecida, mas os limitantes superiores para seu módulo e o módulo de sua derivada temporal existem e são finitos, ou seja,  $|a(t)| < a_0$  e  $|\dot{a}(t)| < a_1$ .

Considere a lei de controle:

$$u(t) = -(k(t) + \eta)\text{sgn}(\sigma(t)), \quad (3.19)$$

na qual  $\eta$  é uma constante positiva e  $k(t)$  é um termo escalar variável no tempo que satisfaz um esquema adaptativo, que será definido a seguir. O objetivo é selecionar  $k(t)$  tão pequeno quanto possível de forma a garantir que ocorra deslizamento em (3.18). Observa-se que uma condição suficiente para que isto ocorra é que:

$$k(t) > |a(t)|, \quad (3.20)$$

a qual garante que a  $\eta$ -condição de alcançabilidade  $\sigma\dot{\sigma} < -\eta|\sigma|$ , vista na Seção 1.3.1, seja satisfeita. Durante o modo deslizante  $\sigma(t) \equiv 0$ , o controle equivalente  $u_{\text{eq}}$ , que é formalmente obtido resolvendo-se a equação algébrica  $\dot{\sigma} = 0$  quando  $\sigma = 0$ , deve satisfazer:

$$u_{\text{eq}} = -a(t), \quad (3.21)$$

para cancelar a perturbação. Consequentemente, durante o modo deslizante,  $|u_{\text{eq}}| = |a(t)|$ . Embora o controle equivalente seja concebido como uma abstração para permitir a análise do modo deslizante de ordem reduzida, uma boa aproximação para o mesmo pode ser obtida em tempo real pela filtragem, por meio de um filtro passa-baixa, do sinal  $u(t)$

(UTKIN, 1992). Desta forma, uma vez que  $\tilde{u}_{\text{eq}}(t)$  satisfaça:

$$\dot{\tilde{u}}_{\text{eq}} = \frac{1}{\tau}(-k(t) + \eta)\text{sgn}(\sigma(t)) - \tilde{u}_{\text{eq}}(t), \quad (3.22)$$

na qual  $\tau > 0$  é uma (pequena) constante de tempo, então o valor de  $|\tilde{u}_{\text{eq}}(t) - u_{\text{eq}}(t)|$  pode ser feito pequeno, bastando para isso que se escolha um valor de  $\tau$  suficientemente pequeno. Em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) é assumido que existem escalares  $1 > \epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_0 > 0$  tais que a relação

$$\left| |\tilde{u}_{\text{eq}}(t)| - |u_{\text{eq}}(t)| \right| < \epsilon_1 |u_{\text{eq}}(t)| + \epsilon_0 \quad (3.23)$$

é satisfeita para todo tempo após um instante inicial  $t_{\text{eq}}$ , permitindo desta forma a (rápida) dissipação dos efeitos da condição inicial do filtro. A equação (3.23) é uma suposição a respeito da precisão da estimativa de  $u_{\text{eq}}$  e depende da largura de banda  $\frac{1}{\tau}$  do filtro. Para um dado  $t_{\text{eq}}$  e  $\tau$ , estimativas de  $\epsilon_0$  e  $\epsilon_1$  podem ser obtidas de tal forma a garantir que a relação em (3.23) é válida. Além disto, em um sistema de engenharia, informações sobre a largura de banda da perturbação podem ser exploradas para que seja escolhido um valor de  $\tau$  a fim de garantir um nível de precisão apropriado. O controle equivalente será utilizado para construir o algoritmo adaptativo para  $k(t)$ . Para introduzir uma “margem de segurança”, o objetivo será garantir que seja válida a relação

$$k(t) > \frac{1}{\alpha} |\tilde{u}_{\text{eq}}(t)| + \epsilon, \quad (3.24)$$

na qual  $0 < \alpha < 1$  e  $\epsilon > 0$  são escalares a serem escolhidos pelo projetista (dependendo de  $\epsilon_0$  e  $\epsilon_1$ ) escolhidos de forma a garantir que a estimativa  $\tilde{u}_{\text{eq}}(t)$  satisfaça:

$$\frac{1}{\alpha} |\tilde{u}_{\text{eq}}(t)| + \epsilon/2 > |u_{\text{eq}}(t)|. \quad (3.25)$$

Define-se uma variável de erro:

$$\delta(t) = k(t) - \frac{1}{\alpha} |\tilde{u}_{\text{eq}}(t)| - \epsilon. \quad (3.26)$$

Observa-se que se  $\delta = 0$ , então  $k(t) = \frac{1}{\alpha} |\tilde{u}_{\text{eq}}(t)| + \epsilon > |u_{\text{eq}}(t)| = |a(t)|$ . Desta forma, no que se segue, o problema de manter o modo deslizante transforma-se no problema de

forçar  $\delta(t) \rightarrow 0$ , ou ao menos suficientemente próximo de zero, de tal sorte que a relação  $k(t) + \eta > |a(t)|$  possa ser verificada.

O elemento de controle adaptativo  $k(t)$  é definido explicitamente como:

$$\dot{k}(t) = -\varrho(t)\text{sgn}(\delta(t)), \quad (3.27)$$

na qual  $\varrho(t)$  é um escalar variante no tempo. Este escalar possui uma interpretação física: representa um limitante superior para a taxa de mudança da perturbação. No referido trabalho (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) assume-se que  $\varrho(t)$  possui a estrutura:

$$\varrho(t) = r_0 + r(t), \quad (3.28)$$

na qual  $r_0$  é um escalar positivo fixo. A evolução de  $r(t)$  também satisfará uma equação diferencial (isto é, uma lei adaptativa) que será descrita a seguir. Detalhes precisos a respeito da lei adaptativa para  $r(t)$  proposta em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) dependem das hipóteses feitas a respeito do conhecimento de  $a_1$  (o limitante para  $|\dot{a}(t)|$ ). Em particular, duas camadas de adaptação ocorrem. Uma camada está relacionada com a magnitude do sinal chaveado  $k(t)$  na lei de controle. A taxa na qual  $k(t)$  pode variar depende do parâmetro variante no tempo  $r(t)$ , que por sua vez adapta-se de forma a garantir que a relação  $r(t) + r_0 > |\dot{a}(t)|$  seja válida. Esta é a segunda camada de adaptação. Esta segunda camada evidencia a necessidade de conhecer previamente o limitante  $a_1$ . Ressalta-se que este esquema de adaptação em duas camadas é o ponto chave do trabalho (EDWARDS; SHTESSEL, 2016). Duas situações serão consideradas: a primeira, quando  $a_1$  é conhecido, e a segunda, quando este limitante não é conhecido.

### 3.3.1 Formulação Quando o Limitante $a_1$ é Conhecido

Neste caso, assume-se que  $a_0$  é desconhecido (porém finito), mas  $a_1$  é conhecido, isto é, o valor considerado “o pior caso” da taxa de variação da perturbação  $a(t)$  é conhecido. Define-se:

$$e(t) = qa_1/\alpha - r(t), \quad (3.29)$$

na qual o escalar  $q > 1$  é uma margem de segurança para garantir que  $|\frac{d}{dt}(\tilde{u}_{\text{eq}}(t))| < qa_1$ . Uma vez que (conforme assumido nesta subseção)  $a_1$  é conhecido, logo  $e(t)$  também o é,

podendo ser utilizado para formar as leis de adaptação. Define-se:

$$\dot{r}(t) = \gamma|\delta(t)| + r_0\sqrt{\gamma}\operatorname{sgn}(e(t)), \quad (3.30)$$

na qual  $\gamma > 0$  é um escalar de projeto e  $\delta(t)$  é definido como em (3.22).

É provado em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) que, para o sistema em (3.18), sujeito à perturbação  $a(t)$  que satisfaz  $|a(t)| < a_0$  e  $|\dot{a}(t)| < a_1$ , dados  $a_0$  e  $a_1$  finitos e  $a_1$  conhecido, a lei de controle em (3.19), explorando as leis adaptativas dadas por (3.27) e (3.30), força  $\sigma(t) = 0$  em tempo finito, e conseqüentemente um modo deslizante pode ser mantido. Além disto, os ganhos  $\varrho(t)$  e  $k(t)$  em (3.27) e (3.28) permanecem limitados. Resumidamente, a prova consiste em utilizar-se da função de *Lyapunov*

$$V = \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2\gamma}e^2 \quad (3.31)$$

nas dinâmicas de  $\dot{\delta}(t)$  e  $\dot{e}(t)$  para mostrar que  $\delta(t)$  e  $e(t)$  tornam-se nulos em tempo finito, desta forma garantindo que a relação

$$k(t) = \frac{1}{\alpha}|\tilde{u}_{\text{eq}}(t)| + \epsilon > |u_{\text{eq}}(t)| = |a(t)| \quad (3.32)$$

seja verdadeira, o que é uma condição suficiente para a existência e manutenção de um modo deslizante.

### 3.3.2 Formulação Quando o Limitante $a_1$ é Desconhecido

Neste caso, assume-se que ambos os limitantes  $a_0$  e  $a_1$  são desconhecidos (porém finitos). Uma vez que  $a_1$  é desconhecido, a variável  $e(t)$  descrita anteriormente é também desconhecida, e o esquema adaptativo em (3.30) não pode ser utilizado. Em vez disso, define-se:

$$\dot{r}(t) = \begin{cases} \gamma|\delta(t)|, & \text{se } |\delta(t)| > \delta_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}, \quad (3.33)$$

na qual  $\delta_0 > 0$  é um escalar de projeto. Desta forma, a nova formulação passará a incluir as leis (3.27), (3.28) e (3.33).

É provado no artigo (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) que, para o sistema em (3.18), sujeito à perturbação  $a(t)$  que satisfaz  $|a(t)| < a_0$  e  $|\dot{a}(t)| < a_1$ , dados  $a_0$  e  $a_1$  finitos e

desconhecidos, dado que  $\epsilon$  é escolhido tal que a seguinte relação é satisfeita:

$$\frac{1}{4}\epsilon^2 > \delta_0^2 + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{qa_1}{\alpha} \right)^2 \quad (3.34)$$

para qualquer dado valor  $\delta_0$  e  $a_1$ , então a lei de controle em (3.19), explorando as leis adaptativas dadas por (3.27) e (3.33), força  $\sigma(t) < \epsilon/2$  em tempo finito e, conseqüentemente, um modo deslizante pode ser mantido. Além disto, os ganhos  $\varrho(t)$  e  $k(t)$  em (3.27) e (3.28) permanecem limitados.

Ressalta-se aqui uma aparente contradição do artigo (EDWARDS; SHTESSEL, 2016), para a formulação abordada nesta seção. De acordo com a prova de estabilidade exibida no artigo, o limitante  $a_1$  da derivada da perturbação é suposto desconhecido. Porém, esta prova depende da escolha de um valor para o parâmetro  $\epsilon$  tal que a desigualdade em (3.34) seja satisfeita. Uma vez que o lado direito desta desigualdade se torna maior a medida que  $a_1$  aumenta, por mais que se escolham os demais parâmetros  $\gamma$ ,  $\delta_0$ ,  $q$  e  $\alpha$  de maneira conservadora, nunca se poderá garantir que a relação seja verdadeira para qualquer valor de  $a_1$ .

### 3.3.3 Resultados de Simulação

A Figura 12 mostra uma simulação da lei de controle (3.19) e das leis adaptativas (3.22), (3.26)-(3.28) aplicadas ao sistema em (3.18), com condição inicial nula e sujeito a uma perturbação  $a(t) = \text{sen}(t)$ . Trata-se da formulação em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) na qual o limitante  $a_1$  é conhecido. São usados os seguintes parâmetros:  $\eta = 0,1$ ,  $\alpha = 0,9$ ,  $\epsilon = 0,1$ ,  $r_0 = 0,1$ ,  $q = 1,1$ ,  $\gamma = 0,1$  e  $\tau = 0,001$  s. É possível observar que, após um período inicial de cerca de 4 segundos, o ganho  $k(t) + \eta$  se torna um majorante pouco conservador para o módulo da perturbação  $a(t)$ , garantindo o deslizamento e mitigando a eventual ocorrência de *chattering* em implementações práticas.

A Figura 13 mostra uma simulação da lei de controle (3.19) e das leis adaptativas (3.22), (3.26)-(3.30) e (3.33) aplicadas ao sistema em (3.18), com condição inicial nula e sujeito a uma perturbação  $a(t) = \text{sen}(t)$ . Trata-se da formulação em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) na qual o limitante  $a_1$  é desconhecido. São usados os seguintes parâmetros:  $\eta = 0,1$ ,  $\alpha = 0,9$ ,  $\epsilon = 0,1$ ,  $r_0 = 0,1$ ,  $q = 1,1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta_0 = 0,2$  e  $\tau = 0,001$  s. Em comparação ao caso anterior (Figura 12 - caso  $a_1$  conhecido), é possível notar que, para se obter

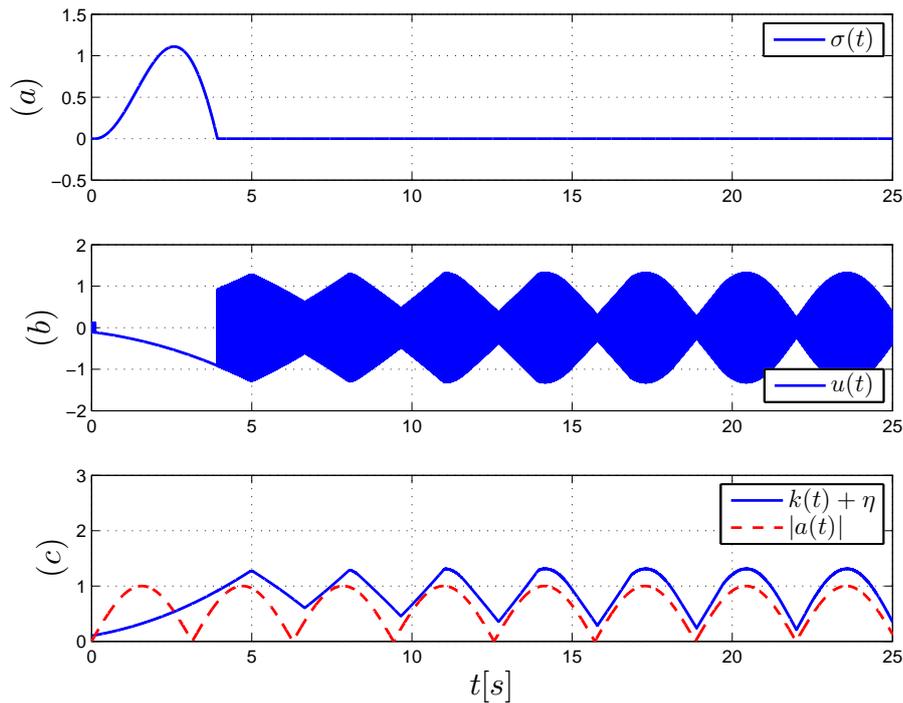


Figura 12 - Desempenho da estratégia em (EDWARDS; SHTESEL, 2016) (caso  $a_1$  conhecido) para perturbação senoidal  $a(t) = \text{sen}(t)$ : (a) variável de deslizamento  $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$ ; (c) ganho de modulação  $(k(t) + \eta)$  e módulo da perturbação  $|a(t)|$ .

um desempenho semelhante, é necessário o uso de parâmetros mais conservadores (por exemplo, o ganho  $\gamma$  foi aumentado de 0,1 para 3). Esta é a contrapartida que surge ao se relaxar a hipótese do conhecimento do valor de  $a_1$ .

### 3.4 Conclusões

A Tabela 1 apresenta uma comparação das estratégias revistas ao longo deste capítulo. Para melhor visualização, as características consideradas boas ou positivas de um dado trabalho são marcadas com o símbolo “☺”, bem como as consideradas ruins ou negativas foram marcadas com o símbolo “☹”.

De modo geral, a estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998) é a que apresenta, em termos absolutos, menores valores de ganhos no sinal de controle, o que em tese resultaria em pouco efeito de *chattering* em implementações práticas. Porém, a referida estratégia é a mais conservadora em termos de hipóteses, necessitando-se conhecer não somente os limitantes da perturbação e de sua derivada, mas também informações sobre o valor inicial da mesma.

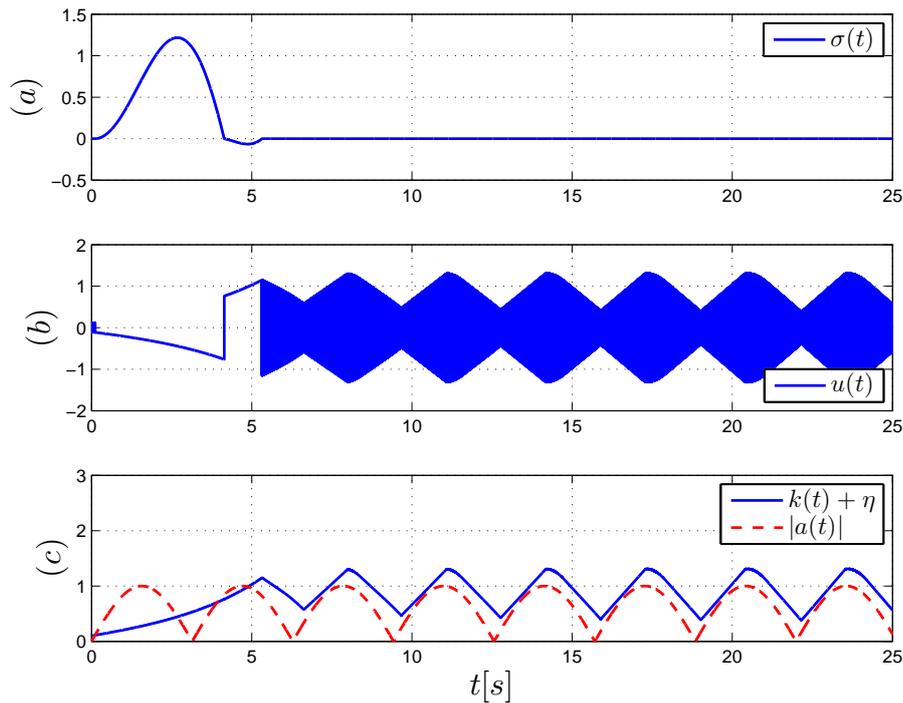


Figura 13 - Desempenho da estratégia em (EDWARDS; SHTESEL, 2016) (caso  $a_1$  desconhecido) para perturbação senoidal  $a(t) = \text{sen}(t)$ : (a) variável de deslizamento  $\sigma(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$ ; (c) ganho de modulação  $(k(t) + \eta)$  e módulo da perturbação  $|a(t)|$ .

A estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013) possui relativa simplicidade de implementação e bom desempenho, como visto na simulação realizada. Como desvantagens claras, merecem ser citadas a necessidade do conhecimento de limitantes para a perturbação e sua derivada.

As estratégias em (EDWARDS; SHTESEL, 2016) trazem como novidade a eliminação das desvantagens das estratégias anteriores (conhecimento dos limitantes). Porém, como desvantagem citam-se a grande complexidade (esquema de controle adaptativo em duas “camadas”, com grande quantidade de parâmetros a serem determinados ou projetados). Outro ponto negativo é a necessidade, em alguns casos, do uso de parâmetros muito altos ou conservadores para que o esquema funcione (vide, por exemplo, a desigualdade em (3.34)), o que contradiz a natureza adaptativa em questão, fazendo o esquema agir de forma semelhante aos mostrados no capítulo anterior.

Tabela 1 - Quadro comparativo das estratégias baseadas em *controle equivalente* presentes na literatura.

	Informação sobre valor inicial da perturbação?	Admite perturbações não suaves?	Limitante da perturbação conhecido?	Limitante da derivada da perturbação conhecido?	Admite incertezas na planta?
Estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998)	Sim ☹	Não ☹	Sim ☹	Sim ☹	Não ☹
Estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013)	Não ☺	Não ☹	Sim ☹	Sim ☹	Sim ☺
Estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) (caso $a_1$ conhecido)	Não ☺	Não ☹	Não ☺	Sim ☹	Não ☹
Estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) (caso $a_1$ desconhecido)	Não ☺	Não ☹	Não ☺	Não ☺	Não ☹

## 4 ABORDAGEM BASEADA EM CONTROLE EQUIVALENTE ESTENDIDO

No Capítulo 3 foram abordadas estratégias adaptativas presentes na literatura que se aproveitam das características do controle equivalente. Neste capítulo, é apresentada uma recente abordagem baseada no controle equivalente estendido (como visto na Seção 1.3.3.1) para lidar com perturbações de limitantes desconhecidos em plantas não lineares. Algumas vantagens em comparação a resultados anteriores presentes na literatura são a sua simplicidade e a possibilidade de resistir a perturbações não suaves.

Vale ressaltar que esta estratégia já foi preliminarmente apresentada no artigo (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016) e no capítulo de livro (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2018). Este capítulo complementa o conteúdo dos trabalhos acima, apresentando eventuais modificações e uma nova prova da estabilidade do algoritmo, bem como novas informações acerca de seu funcionamento.

### 4.1 Exemplo Introdutório (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)

Para ilustrar o funcionamento da estratégia, considere uma planta constituída de um integrador, tal como em (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016):

$$\dot{x} = u + d(t), \quad (4.1)$$

na qual  $d(t)$  é uma perturbação de entrada contínua por partes e uniformemente limitada por uma constante desconhecida  $\bar{d} > 0$  de tal forma que  $|d(t)| \leq \bar{d}$ ,  $\forall t > 0$ . Admite-se que não é necessário existir um limitante para  $|\dot{d}(t)|$ .

A lei de controle aplicada no referido sistema é dada por

$$u = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(x), \quad (4.2)$$

na qual  $\varrho(t)$  é uma função de modulação adaptativa, que é definida com o objetivo de levar o estado  $x$  à origem em tempo finito, pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{\varrho} = -\gamma_f \varrho + c_f |u_{\text{xseq}}|, \quad \varrho(0) > 0, \quad (4.3)$$

cujas constantes  $c_f$  e  $\gamma_f$  satisfazem:

$$c_f > \gamma_f > 0. \quad (4.4)$$

O sinal  $u_{\text{xeq}}$  é o *controle equivalente estendido* (visto na seção 1.3.3.1), que será inicialmente suposto conhecido com o propósito de simplificar a apresentação dos conceitos.

Resumidamente, o controle equivalente estendido possui as seguintes características:

- Na ausência de modo deslizante, tem-se que  $|u_{\text{xeq}}(t)| = \varrho(t)$ , em quase todo o tempo (tal conclusão obtém-se a partir de (4.2) e da definição de controle equivalente estendido).
- Na presença de modo deslizante,  $|u_{\text{xeq}}(t)| = |d(t)|$  (como visto na Seção 1.3.3.1, neste caso o controle equivalente estendido é o próprio controle equivalente  $u_{\text{eq}}$ . Como  $\dot{x} = 0$  em (4.1), tem-se que  $u_{\text{xeq}} = u_{\text{eq}} = -d(t)$ ).

Desta forma, antes do modo deslizante ser atingido, a seguinte expressão é válida:

$$\dot{\varrho} = (c_f - \gamma_f) \varrho. \quad (4.5)$$

Como  $c_f - \gamma_f > 0$ ,  $\varrho$  cresce exponencialmente, até superar o limitante da perturbação ( $\varrho(t) \geq \bar{d}$ ) em algum instante de tempo finito, de tal modo que a superfície de deslizamento  $x \equiv 0$  é alcançada.

Dado que o modo deslizante é alcançado, a adaptação é dada pelo filtro ISS em (4.3), com a entrada sendo a estimativa de  $|d(t)|$  dada pelo controle equivalente, isto é,  $|u_{\text{eq}}(t)| = |d(t)|$ . A função de modulação é a solução de (4.3), dada por

$$\varrho(t) = e^{-\gamma_f t} \varrho(0) + c_f e^{-\gamma_f t} * |u_{\text{xeq}}(t)|. \quad (4.6)$$

Se

$$c_f e^{-\gamma_f t} * |d(t)| > |d(t)|, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.7)$$

então conclui-se de (4.6) e  $\varrho(0) > 0$  que  $\varrho(t) > |d(t)|$ , o que é uma condição suficiente para a existência de modo deslizante, como visto na Seção 1.3.1.

Na lei adaptativa proposta, caso a amplitude da perturbação  $d(t)$  diminua, então

$\varrho(t)$  também diminuirá, devido ao termo  $-\gamma_f \varrho$  presente na lei de adaptação (4.3), que age como um “fator de esquecimento”. Este fato representa, notadamente, uma vantagem sobre as estratégias anteriores (YAN; HSU; XIUXIA, 2006; OLIVEIRA et al., 2014; MORENO et al., 2016), baseadas em ganhos não decrescentes.

Para ilustrar uma classe de perturbações que verificam a desigualdade (4.7), assumamos que a derivada temporal  $\frac{d|d(t)|}{dt}$  existe em quase todo o tempo. Se, em um instante de tempo  $t^* \geq 0$ , a função de modulação verifica a desigualdade  $\varrho(t^*) > |d(t^*)|$  e existe um modo deslizante, então  $|u_{\text{eq}}(t^*)| = |d(t^*)|$ . Uma condição suficiente para manter  $\varrho(t^* + \varepsilon) > |d(t^* + \varepsilon)|$  ( $\varepsilon \rightarrow 0+$ ) é  $\dot{\varrho}(t) \geq \frac{d|d(t)|}{dt}$  quando  $t = t^*$ . Portanto, de (4.3), obtém-se  $\dot{\varrho}(t) = -\gamma_f \varrho(t) + c_f |u_{\text{eq}}(t)| \geq \frac{d|d(t)|}{dt}$ . Uma vez que  $\varrho(t^*) \geq |d(t^*)| = |u_{\text{eq}}(t^*)|$ , a desigualdade anterior é implicada por  $-\gamma_f |d(t)| + c_f |d(t)| \geq \frac{d|d(t)|}{dt}$  quando  $t = t^*$ . Desta forma, a seguinte desigualdade pode ser obtida:

$$\frac{1}{|d(t)|} \frac{d|d(t)|}{dt} = \frac{d[\ln |d(t)|]}{dt} \leq c_f - \gamma_f \quad (> 0). \quad (4.8)$$

Desta desigualdade, conclui-se que algumas classes de perturbações não suaves, e mesmo perturbações exponencialmente crescentes satisfazendo

$$|d(t)| < d_0 e^{(c_f - \gamma_f)t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.9)$$

$d_0 > 0$ , poderiam ser consideradas, uma vez que os coeficientes em (4.4) sejam escolhidos adequadamente. Perturbações  $d(t)$  contínuas por partes com  $|d(t)|$  contínuo e  $\frac{d|d(t)|}{dt}$  definido em quase todos os pontos pertencem a esta classe, como por exemplo: sinais dente-de-serra e onda quadrada.

#### 4.1.1 Controle Médio

Em geral, o controle equivalente estendido  $u_{\text{xreq}}$  é um sinal não disponível para a implementação do controle. Porém, em sistemas afins no controle (Seção 1.2), o mesmo coincide com uma componente de baixa frequência do sinal de controle  $u$ , na presença de modo deslizante. O *controle médio*, denotado por  $u_{\text{av}}$ , pode ser estimado através da aplicação do sinal de controle em um filtro com constante de tempo  $\tau > 0$  pequena o bastante se comparada com a componente lenta de  $u$ , mas grande o bastante para filtrar

o chaveamento de alta frequência em  $u$  (UTKIN, 1992). Desta forma, o filtro passa baixa

$$\tau \dot{u}_{av} = -u_{av} + u, \quad (4.10)$$

fornece o controle médio, que serve como uma estimativa de  $u_{xeq}$ . Por conveniência, este filtro será denominado *filtro de média*.

## 4.2 Formulação do Problema

Considera-se um sistema não-linear na forma normal (KHALIL, 2002):

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi, t), \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r, \\ \dot{\xi}_r &= f(x, t) + g(x, t)[u + d(t)], \end{aligned} \quad (4.11)$$

na qual  $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$ ,  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_r]^T \in \mathbb{R}^r$  e  $x = [\eta^T, \xi^T]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $f(x, t) \in \mathbb{R}$  é um termo não-linear dependente do estado,  $d(t) \in \mathbb{R}$  é uma perturbação de entrada, e  $g(x, t) > \underline{g} > 0$  é o ganho de entrada. Com o intuito de satisfazer a condição de fase mínima, a função não linear  $f_0(\eta, \xi, t)$  é assumida ser ISS com respeito a  $\xi$ .

A primeira hipótese assumida a respeito da perturbação  $d(t)$  é a seguinte:

**(H4.1)** A perturbação de entrada  $d(t)$  é assumida ser desconhecida, integrável localmente e possuir módulo limitado por  $|d(t)| \leq \bar{d}$ ,  $\forall t$ , na qual  $\bar{d} \geq 0$  é um escalar não conhecido. Assume-se conhecido apenas um escalar  $\bar{d}_0 \geq |d(0)|$ . Além disso, existem constantes *conhecidas*  $c_f > \gamma_f > 0$  e  $\tau > 0$  tais que, para qualquer condição inicial  $\varrho(0) > d(0)$  conhecida:

$$|d(t)| \leq c_f e^{-\gamma_f t} * \left| \tau^{-1} e^{-\frac{t}{\tau}} * d(t) \right|, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.12)$$

A desigualdade (4.12) pode ser obtida a partir de (4.7) pela inclusão do efeito do filtro de média (4.10). Ressalta-se aqui que esta hipótese difere da assumida nos já men-

cionados trabalhos (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016) e (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2018), por incluir também o conhecimento do limitante  $\bar{d}_0$  para o valor inicial  $|d(0)|$  da perturbação. Tal informação possibilitará, como será visto adiante, através de hipóteses adicionais, a satisfação da condição de alcançabilidade  $\sigma\dot{\sigma} < -|\eta|\sigma$  desde o início da ação de controle.

#### 4.2.1 Lei de Controle

Primeiramente, define-se a seguinte variável de deslizamento de grau relativo unitário:

$$\sigma = S\xi, \quad S = [s_0, s_1, \dots, s_{r-1}], \quad (4.13)$$

onde  $S$  é escolhida de tal forma que o polinômio  $s_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + s_1\lambda + s_0$  seja Hurwitz. Sem perda de generalidade, fixa-se  $s_{r-1} = 1$  para obter um polinômio mônico.

Calculando-se  $\dot{\sigma}$ , é obtido:

$$\dot{\sigma} = f_\sigma(x, t) + g(x, t) [u + d(t)], \quad (4.14)$$

com  $f_\sigma(x, t) = \sum_{i=0}^{r-2} s_i \xi_{i+2} + f(x, t)$ .

A lei de controle é dada por:

$$u = u_c + u_s, \quad (4.15)$$

$$u_c = -\frac{f_\sigma(x, t)}{g(x, t)}, \quad (4.16)$$

$$u_s = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (4.17)$$

É possível observar que  $u_c$  é uma parcela contínua do sinal de controle. A mesma tem a finalidade de cancelar dinâmicas internas da planta, ao passo que  $u_s$  é a parcela responsável pelo chaveamento característico de sistemas de controle por modo deslizante.

Uma vez que não é conhecido um limitante superior para a perturbação  $d(t)$ , tal como assumido na hipótese **(H4.1)**, aplica-se a seguinte função de modulação adaptativa:

$$\dot{\varrho} = -\gamma_f \varrho + c_f (|u_{av}| + \delta), \quad \varrho(0) \geq 0, \quad (4.18)$$

$$\tau \dot{u}_{av} = -u_{av} + u_s, \quad (4.19)$$

onde  $\tau > 0$  é a constante de tempo do filtro de média, e  $\delta > 0$  é uma constante que garante

um nível mínimo desejado para inicialização em condições iniciais nulas (ou seja, caso  $\varrho(0) = 0$ ). A Figura 14 exibe um diagrama da estratégia de controle.

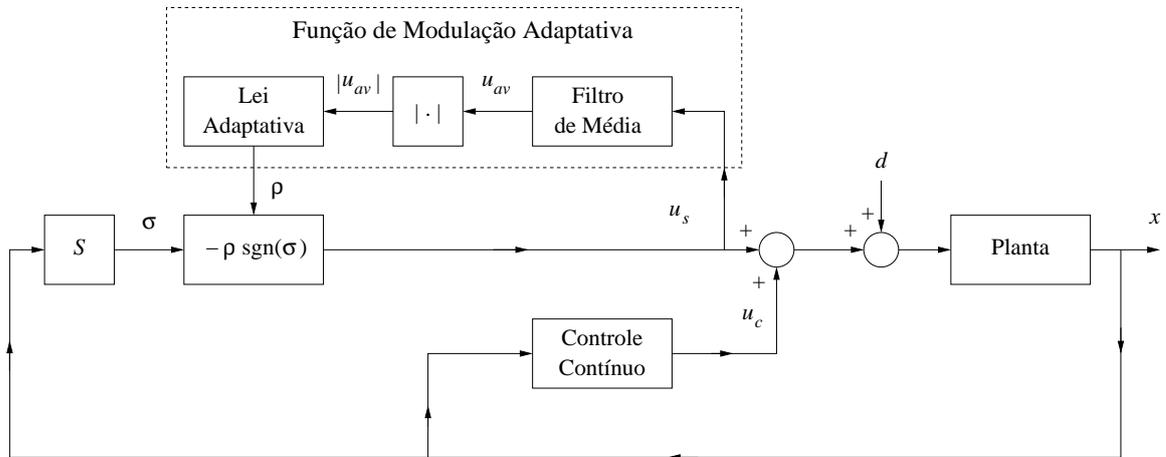


Figura 14 - Diagrama de blocos do controlador por modo deslizante adaptativo proposto. Adaptado de (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016).

A partir da solução para  $\varrho(t)$  na equação (4.18), formulam-se as seguintes hipóteses adicionais:

**(H4.2)** É conhecido  $h > 0$  suficientemente grande tal que, para  $\varrho(0) = \bar{d}_0 + h$  na lei de controle (4.18), seja válida a seguinte relação:

$$|d(t)| < \varrho(t) \quad \forall t \leq t_m, \quad (4.20)$$

na qual  $t_m > 0$  representa o primeiro instante de tempo  $t > 0$  no qual  $\varrho(t_m) = \varrho(0)$ .

**(H4.3)** Para os respectivos valores de  $c_f$  e  $\gamma_f$  que satisfazem a hipótese **(H4.1)**, o crescimento de  $d(t)$  é limitado exponencialmente por

$$|d(t)| < |d(0)|e^{(c_f - \gamma_f)(t - t_m)}, \quad (4.21)$$

A hipótese **(H4.2)** garante que o uso de um valor inicial  $\varrho(0)$  suficientemente alto fará com que o ganho de modulação  $\varrho(t)$  seja capaz de majorar o módulo da perturbação  $|d(t)|$ , ao menos durante um (bastante curto) intervalo de tempo  $0 \leq t < t_m$ . A hipótese **(H4.3)** é inspirada no resultado mostrado em (4.9).

### 4.3 Resultado Principal

**Teorema 1** *Seja a planta não linear em (4.11), na qual a perturbação casada e desconhecida  $d(t)$  satisfaz as hipóteses (H4.1) – (H4.3). Assume-se que os estados da planta são disponíveis e a lei de controle  $u$  é dada por (4.15)–(4.17), com função de modulação  $\varrho$  definida em (4.18)–(4.19) e variável de deslizamento  $\sigma$  definida em (4.13). Então, a condição de alcançabilidade  $\sigma\dot{\sigma} < -|\eta|\sigma$  é satisfeita  $\forall t \geq 0$ , fazendo com que a superfície de deslizamento  $\sigma = 0$  seja alcançada em tempo finito e o sistema em malha fechada seja uniformemente globalmente exponencialmente estável, no sentido de que o vetor de estados  $x = [\eta^T, \xi^T]^T$  converge exponencialmente para a origem.*

A prova será dividida em três partes:

**Parte 1: Condição de alcançabilidade e modo deslizante.** O primeiro termo em (4.15) cancela as não linearidades presentes no sistema que poderiam causar escape em tempo finito. Portanto, os sinais do sistema em malha fechada serão *regulares*, ou seja, terão crescimento limitado exponencialmente (SASTRY; BODSON, 1989).

Conforme visto na Seção 1.3.1, a condição  $\sigma\dot{\sigma} < -|\eta|\sigma$  é suficiente para garantir que um modo deslizante seja atingido em tempo finito. É garantido também que, quando  $\sigma$  atinge a origem, nela permanece, não sendo possível sua mudança de sinal (EDWARDS; SPURGEON, 1998). É possível mostrar que, para o sistema em questão, tal condição de alcançabilidade é satisfeita quando:

$$\varrho(t) > |d(t)| \quad \forall t \geq 0. \quad (4.22)$$

**Parte 2: Condição de alcançabilidade antes da existência de modo deslizante.** A partir de (4.17) - (4.19), tem-se por solução de  $\varrho(t)$ :

$$\begin{aligned} \varrho(t) &= e^{-\gamma_f t} \varrho(0) + c_f e^{-\gamma_f t} * \left[ \left| \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} * u(t) \right| + \delta \right], \quad \varrho(0) \geq 0, \\ &= e^{-\gamma_f t} \varrho(0) + c_f e^{-\gamma_f t} * \left[ \left| \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} * (-\varrho(t) \operatorname{sgn}(\sigma(t))) \right| + \delta \right], \quad \varrho(0) \geq 0, \\ &= e^{-\gamma_f t} \varrho(0) + c_f e^{-\gamma_f t} * \left[ \left| \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} * (\varrho(t) \operatorname{sgn}(\sigma(t))) \right| + \delta \right], \quad \varrho(0) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Supondo, sem perda de generalidade, e apenas para fins de simplificação, que  $\delta = 0$ ,

de (4.23) a solução de  $\varrho(t)$  será:

$$\varrho(t) = e^{-\gamma_f t} \varrho(0) + c_f e^{-\gamma_f t} * \left[ \left[ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} * (\varrho(t) \operatorname{sgn}(\sigma(t))) \right] \right], \quad \varrho(0) \geq 0. \quad (4.24)$$

Caso  $\sigma(t)$  mantenha o mesmo sinal durante a fase de alcançabilidade, ou seja, antes do sistema entrar em modo deslizante, então o termo  $\operatorname{sgn}(\sigma(t))$  se torna uma constante, e de (4.24) tem-se:

$$\varrho(t) = e^{-\gamma_f t} \varrho(0) + c_f e^{-\gamma_f t} * \left[ \left[ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} * \varrho(t) \right] \right], \quad \varrho(0) \geq 0. \quad (4.25)$$

É possível observar que o primeiro termo em (4.25) é o efeito da condição inicial  $\varrho(0)$ , que decai a zero exponencialmente (em geral, este efeito torna-se desprezível em um curto intervalo de tempo). O segundo termo, uma vez que é mantida a relação  $c_f > \gamma_f > 0$ , conforme hipótese **(H4.1)**, é um termo exponencialmente crescente. Portanto,  $\varrho(t)$  é uma função inicialmente decrescente, possuindo um ponto de mínimo, e que cresce exponencialmente após este ponto de mínimo (quando a taxa de crescimento do segundo termo de (4.25) se torna maior que a taxa de decrescimento do primeiro termo). Define-se por  $t_m$  o instante de tempo onde  $\varrho(t) = \varrho(0)$  em (4.25), no qual a função  $\varrho(t)$  já se encontra em crescimento exponencial (geralmente um valor muito pequeno, pois o efeito da condição inicial em  $\varrho(t)$  torna-se desprezível rapidamente).

Em vista do fato acima, a hipótese **(H4.2)** é suficiente para garantir que a  $\eta$ -condição de alcançabilidade, mencionada na **Parte 1** desta prova, seja atendida durante o intervalo  $0 \leq t < t_m$ . Uma vez que  $d(t)$  também obedece à hipótese **(H4.3)** acima, então é verificada a relação  $\varrho(t) > |d(t)|$  para  $t \geq t_m$ , o que implica na  $\eta$ -condição de alcançabilidade ser satisfeita também durante este intervalo, pois tal hipótese acarreta que  $d(t)$  é limitada exponencialmente, nunca sendo capaz de superar o crescimento exponencial de  $\varrho(t)$ . Desta forma, um modo deslizante é atingido em tempo finito, em um instante  $t_s$ .

**Parte 3: Condição de alcançabilidade a partir da existência de modo deslizante.** Na presença de um modo deslizante, no sistema considerado, é possível verificar que  $|u_{av}| = \left| \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} * d(t) \right|$ . Logo, a partir da hipótese **(H4.1)**, é possível concluir que  $\varrho(t) > |d(t)| \quad \forall t \geq t_s$  e o modo deslizante é mantido indefinidamente.

Uma vez que  $\sigma$  é uma variável de grau relativo unitário em relação à saída  $u$  em (4.11), é possível aplicar uma transformação inversível e reescrevê-lo em uma particular

forma normal de grau relativo unitário (UTKIN, 1992) tal que todas as variáveis de estado do sistema não linear transformado são exponencialmente ISS em relação a  $\sigma$ . Desta forma, o vetor de estados  $x = [\eta^T, \xi^T]^T$  tende exponencialmente a zero quando  $\sigma = 0$ , o que mostra que o sistema é globalmente assintoticamente estável.  $\square$

Destaca-se aqui que, no já referido capítulo de livro (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2018), a prova da estabilidade global do esquema foi realizada assumindo-se a disponibilidade do controle equivalente estendido para medição. Tal fato resulta em uma prova menos complexa, não sendo necessário assumir as hipóteses **(H4.2)** e **(H4.3)** aqui assumidas, bem como o conhecimento do limitante  $\bar{d}_0$  para o valor inicial da perturbação na hipótese **(H4.1)**. Porém, na grande maioria das situações práticas, o controle equivalente estendido não é possível de ser medido ou avaliado diretamente, e sua estimação através de um filtro de média introduz uma nova dinâmica no sistema que não deve ser ignorada, sob pena de, eventualmente, impedir o sistema de atingir um modo deslizante.

Outro ponto que merece ser salientado é o seguinte: apesar de a hipótese sobre o conhecimento do valor inicial da perturbação parecer algo muito restritivo, tal afirmação mostra-se injustificada. Muitos trabalhos na área utilizam-se de hipóteses semelhantes, ou ainda mais restritivas. Por exemplo, o trabalho (BARTOSZEWICZ, 1998), conforme visto na Seção 3.1 desta dissertação, assume hipótese semelhante a respeito do conhecimento do valor inicial da perturbação. O artigo (SHTESSEL; MORENO; FRIDMAN, 2017), apesar de propor um algoritmo *twisting* adaptativo capaz de lidar com perturbações sem limitante conhecido, assume em uma de suas hipóteses o conhecimento de constantes positivas  $\alpha^*$  e  $\epsilon_0$  que obedeçam à relação  $\alpha^* - \epsilon_0 > 2D$ , na qual  $D$  representaria o majorante da perturbação em questão.

## 4.4 Notas Acerca da Estratégia

### 4.4.1 Estabilidade

Vale ressaltar que os resultados sobre a estabilidade da estratégia mostrados na seção anterior são suficientes, porém não estritamente necessários. Para uma perturbação  $d(t)$  com características pouco oscilatórias (ou seja, com pouco conteúdo em alta frequência em seu espectro), a função de modulação  $\varrho(t)$  não possuirá seu crescimento significativamente afetado pelo efeito do filtro de média, bem como de chaveamentos da

função  $\text{sgn}(\sigma)$ . Com isto, desde que seja possível verificar a condição  $\varrho(t) > |d(t)|$  para todo  $t$  a partir de um instante de tempo inicial, então será possível verificar o mesmo resultado acerca da estabilidade, independentemente das hipóteses **(H4.2)** e **(H4.3)** serem satisfeitas ou não.

É perceptível na hipótese **(H4.1)** que, quanto menores os valores de  $\gamma_f$ ,  $\tau$  e maior o valor de  $c_f$ , maior será a robustez do sistema, porém, mais conservador será o esquema. Observa-se que o filtro  $c_f/(s + \gamma_f)$  responsável por criar um majorante para o módulo da perturbação  $|d(t)|$  tenderá ao comportamento de um integrador caso  $\gamma_f \rightarrow 0$ , eliminando o fator de esquecimento do esquema e implicando no crescimento monotônico do ganho de modulação.

#### 4.4.2 Caso Particular: Perturbações Periódicas

Aqui comenta-se um fato interessante para o caso particular envolvendo perturbações periódicas. Tais sinais são de interesse em sistemas físicos, pois podem resultar, dentre outras causas, de vibrações mecânicas.

Considerando-se que o módulo de uma perturbação periódica  $d(t)$  é também um sinal periódico, logo o sinal  $|d(t)|$  pode ser entendido, matematicamente, como um somatório de um valor constante (valor médio), uma senoide de frequência fundamental e suas senoides harmônicas. Na presença de modo deslizante, o filtro dado por  $c_f/(s + \gamma_f)$ , em regime permanente, possui característica de um filtro passa-baixa, introduzindo um ganho  $|c_f/\gamma_f|$  para o valor médio de  $|d(t)|$  e atenuando as senoides de frequência fundamental e harmônicas. Com o conhecimento do valor médio de  $|d(t)|$  e seu valor máximo (valor de pico), independente da forma de onda considerada, o fato acima torna facilitada a estimação de constantes  $c_f$  e  $\gamma_f$  que satisfaçam as hipóteses da estratégia.

#### 4.4.3 Realimentação de Saída (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)

A generalização das ferramentas aqui introduzidas para o caso onde é suposta apenas realimentação de saída ainda é possível uma vez que seja aplicado um diferenciador global baseado em modo deslizante de ordem superior com ganhos dinâmicos recentemente desenvolvidos em (OLIVEIRA; ESTRADA; FRIDMAN, 2015). Como de costume, a ideia é definir o sinal de saída  $y = \xi_1$  de grau relativo  $r$  e trocar suas derivadas de ordem superior  $\xi_2 = \dot{y}$ ,  $\xi_3 = \ddot{y}, \dots$ ,  $\xi_r = y^{(r-1)}$  por suas estimativas  $\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots, \hat{\xi}_r$  obtidas através do

diferenciador exato (LEVANT, 2003). A análise de estabilidade é simples, uma vez que a convergência em tempo finito do diferenciador com ganhos dinâmicos é demonstrada e o princípio da separação é cumprido de forma independente (LEVANT; LIVNE, 2012).

#### 4.4.4 Dinâmica Interna Não ISS (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)

Considere  $r = 1$  e  $\xi = \xi_1$  em (4.11), e assumamos que a dinâmica interna  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi, t)$  é linear e invariante no tempo de tal forma que poderia ser escrita como  $\dot{\eta} = A_0\eta + B_0\xi$ . Então, a abordagem proposta pode ser estendida a sistemas com dinâmica zero não ISS ( $A_0$  não Hurwitz) (BAEV; SHTESSEL; SHKOLNIKOV, 2008) através da redefinição da variável de deslizamento  $\sigma = \xi - K\eta$ , tal como em (GONZALEZ; MORENO; FRIDMAN, 2012). Assumindo-se que o par  $(A_0, B_0)$  é controlável, quando as variáveis de estado estão restritas ao lugar geométrico  $\sigma = 0$ , o modelo de ordem reduzida torna-se  $\dot{\eta} = (A_0 + B_0K)\eta$ , que é exponencialmente estável para uma matriz de realimentação apropriada  $K^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Uma vez que  $\eta \rightarrow 0$ , a convergência de  $\xi$  para zero pode também ser demonstrada. A única mudança necessária nas leis de controle propostas é a modificação do termo  $f_\sigma(x, t)$ , que aparece em (4.14) e (4.15) para  $f_\sigma(x, t) = f(x, t) - K(A_0\eta + B_0\xi)$ .

#### 4.4.5 Algoritmo *Twisting* Adaptativo (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)

O primeiro e mais simples algoritmo de modo deslizante de segunda ordem (*Second-Order Sliding Mode* - SOSM) é o *twisting algorithm* (TA) (MORENO et al., 2016). Para (4.11) com  $r = 2$ , uma versão adaptativa do algoritmo twisting seria dada por:

$$u = -a(t)\text{sgn}(\xi_2) - b(t)\text{sgn}(\xi_1), \quad b(t) \geq 2a(t), \quad (4.26)$$

na qual  $a(t) = \varrho(t)$  em (4.18)–(4.19) é definida analogamente para satisfazer  $\varrho(t) \geq |d(t)|$ . O algoritmo twisting proposto garantiria a convergência exata em tempo finito de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , isto é, existe  $T > 0$  tal que  $\xi_1(t) = \xi_2(t) = 0, \forall t > T$ .

### 4.5 Resultados de Simulação

Aqui são mostrados resultados de simulações para diferentes tipos de perturbações, utilizando como planta um integrador. Desta forma, tem-se nas leis de controle (4.15)–

(4.17) os valores de  $f_\sigma(x, t) = 0$  e  $g(x, t) = 1$ . Na variável de deslizamento em (4.13) foi utilizado  $S = 1$ . A planta possui condições iniciais  $x(0) = 2$ .

Os parâmetros utilizados nas leis adaptativas (4.18)–(4.19) são:  $\delta = 0,01$ ,  $c_f = 1,8$ ,  $\gamma_f = 0,9$  rad/s e  $\tau = 0,01$  s.

Na Figura 15 observa-se o desempenho da estratégia para uma perturbação senoidal. Utiliza-se aqui  $h = 2,5$ , e como neste caso  $|d(0)| = 0$ , logo  $\varrho(0) = 2,5$ . É possível observar que a desigualdade  $\varrho(t) > |d(t)|$  é obedecida  $\forall t$ , e o estado da planta tende a zero em tempo finito. Na Figura 16 observa-se o desempenho da estratégia para uma perturbação não suave do tipo dente de serra.

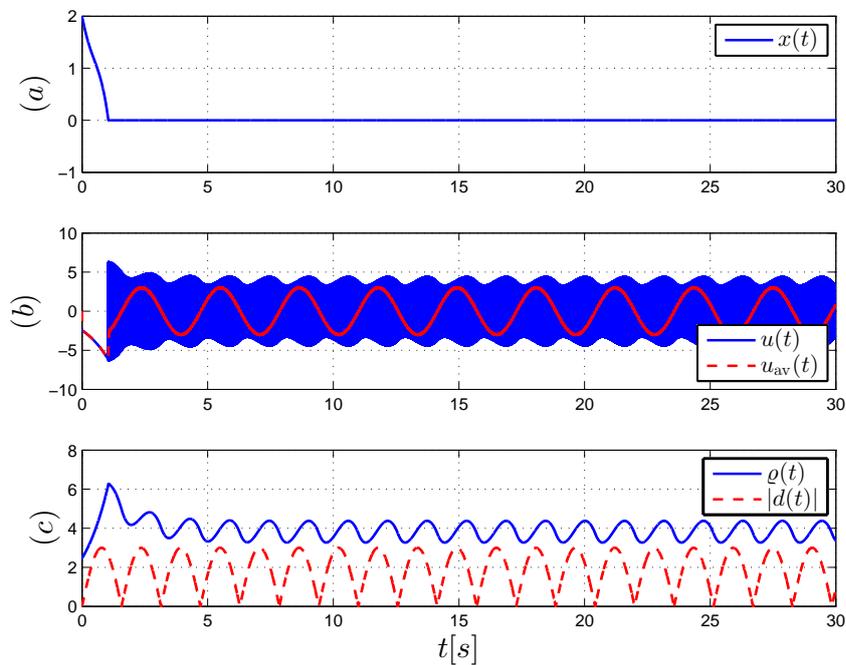


Figura 15 - Desempenho da estratégia para perturbação suave  $d(t) = 3 \text{ sen}(2t)$ : (a) estado  $x(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$  e controle médio  $u_{av}(t)$ ; (c) função de modulação  $\varrho(t)$  e módulo da perturbação  $|d(t)|$ .

Por último, na Figura 17 analisa-se o caso de uma perturbação não suave que não obedece a hipótese **(H4.1)**. O valor de  $\varrho(t)$  é crescente desde  $t = 0$ , até que o sistema entra em modo deslizante no instante  $t \approx 0,6$  s. A perturbação se mantém em um nível estático, até  $t = 10$  s, quando atinge instantaneamente o valor zero, mantendo-se neste valor por 10 segundos. Durante este intervalo, a lei de adaptação por trás de  $\varrho(t)$  age como um fator de esquecimento (uma vez que não há perturbação) até atingir o valor mínimo  $\delta = 0,01$ . No instante  $t = 20$  s, a perturbação possui uma descontinuidade do

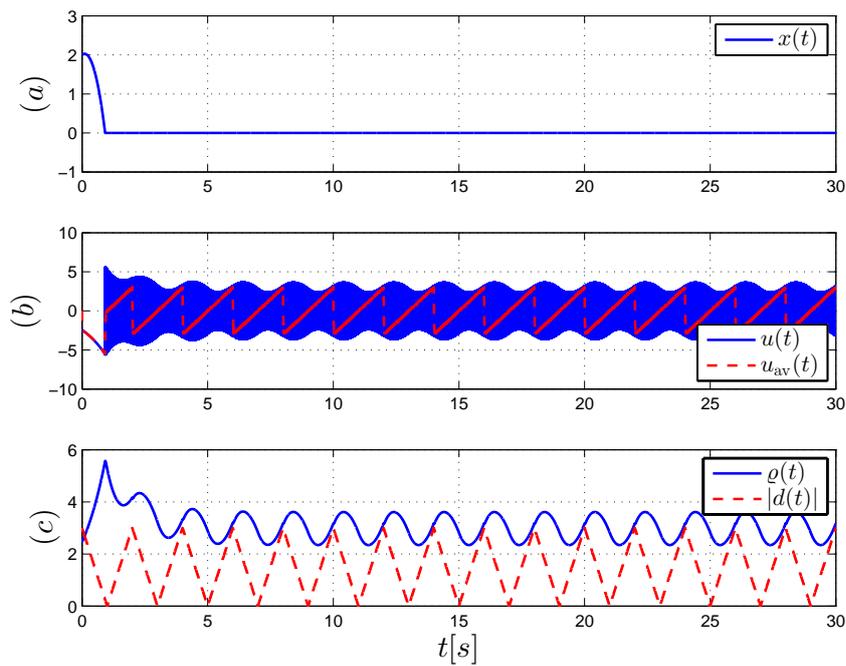


Figura 16 - Desempenho da estratégia para perturbação não suave dente de serra, com amplitude 3 e frequência 0,5 Hz: (a) estado  $x(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$  e controle médio  $u_{av}(t)$ ; (c) função de modulação  $\rho(t)$  e módulo da perturbação  $|d(t)|$ .

tipo degrau, o que leva o sistema a sair do modo deslizante, e o estado  $x(t)$  a divergir da origem, retornando à mesma após novo crescimento exponencial de  $\rho(t)$ .

#### 4.6 Resultados Experimentais

O algoritmo proposto foi implementado em um servomotor, fabricado pela empresa *Quanser Consulting*, modelo *SRV-02* (Figura 18). O mesmo é constituído de um motor DC, uma caixa de redução, engrenagens e um potenciômetro (que mede a posição angular do motor através de um divisor de tensão). O objetivo é o controle da posição angular  $\theta$  da haste do servomotor.

A interface do sistema com o computador empregado para a realização do controle utiliza um conversor  $A/D$  e um conversor  $D/A$  com resolução de 12 *bits* e tensões de entrada e de saída na faixa de  $-5V$  a  $+5V$ . O sinal de controle  $u(t)$  atua na tensão aplicada à armadura do servomotor. Na saída do conversor  $D/A$ , existe um amplificador de potência, capaz de prover a corrente necessária à alimentação do servomotor.

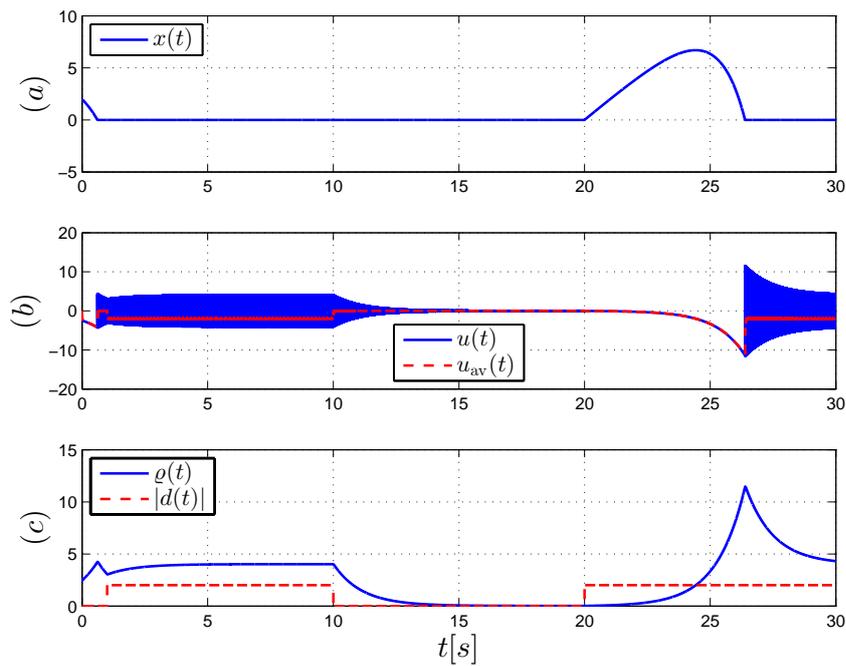


Figura 17 - Desempenho da estratégia para perturbação não suave: (a) estado  $x(t)$ ; (b) sinal de controle  $u(t)$  e controle médio  $u_{av}(t)$ ; (c) função de modulação  $\varrho(t)$  e módulo da perturbação  $|d(t)|$ .

O sistema foi modelado, resultando no seguinte espaço de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{K_T K_e}{J R_a} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_T}{J R_a} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

no qual  $K_T$  é a constante de proporcionalidade do torque em relação à corrente de armadura (em  $\frac{N \cdot m}{A}$ ),  $K_e$  é a constante de proporcionalidade da tensão de armadura em relação à velocidade angular de rotação (em  $\frac{V}{\text{rad} \cdot s}$ ),  $J$  é o momento de inércia do rotor (em  $kg \cdot m^2$ ), e  $R_a$  é o valor da resistência de armadura do motor (em  $\Omega$ ).

Utilizando-se dos dados disponíveis no manual do referido equipamento (APKA-



Figura 18 - Servomotor utilizado para implementação prática da estratégia.

RIAN, 1995), a partir de (4.27) obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -37,4 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 66,4 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

O sistema modelado em (4.28) foi então controlado utilizando-se as leis de controle (4.15)-(4.19), com superfície de deslizamento dada por  $\sigma(t) = 15\theta + \dot{\theta}$  e os demais parâmetros dados por  $c_f = 12$ ,  $\gamma_f = 10$  rad/s,  $\tau = 0,01$  s e  $\delta = 0,1$ . A medição do estado  $\theta$  (posição angular do rotor) foi realizada através de um sensor resistivo (um potenciômetro, conforme mencionado anteriormente). O estado  $\dot{\theta}$  (velocidade angular do rotor) não pôde ser medido diretamente, por não se dispor na ocasião de sensor específico para tal. Porém, este estado foi estimado através de filtragem da posição angular  $\theta$ , utilizando-se de um filtro com características de derivador em baixas frequências, com função de transferência  $s/(0,01s + 1)$ . A simplicidade das leis adaptativas do esquema proporcionaram uma facilitada implementação.

O algoritmo de controle foi codificado num diagrama de blocos através do software *Simulink/MATLAB* 5.2, sendo gerado um programa executável através do software *WinCon*, sistema de aquisição de dados e controle da fabricante do servomotor. O período de amostragem utilizado pelo sistema é de 1 milissegundo.

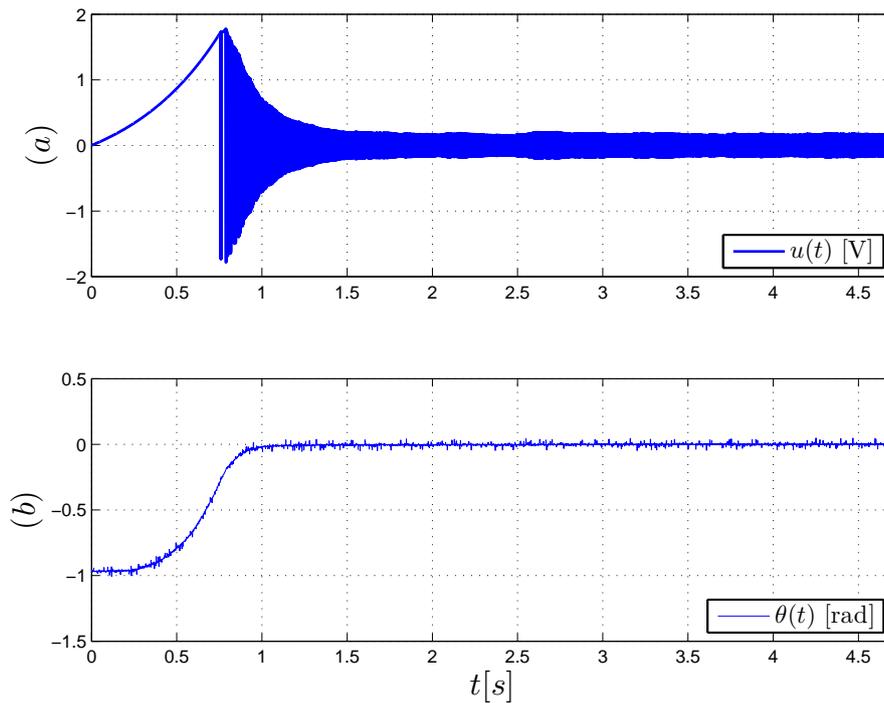


Figura 19 - Experimento com servomotor: condição inicial não nula. Sinal de controle  $u(t)$  em (a), posição angular  $\theta(t)$  em (b).

Em um primeiro experimento, o motor foi inicializado com uma condição inicial não nula ( $\theta$  aproximadamente  $-0,95$  radianos). O algoritmo funciona bem e leva o ângulo  $\theta$  para zero (a menos de um pequeno ruído de medição) em aproximadamente 1 segundo, como é possível ver na Figura 19.

Em um segundo experimento (Figura 20), o motor já se encontrava em deslizamento e foi submetido a uma perturbação (um forte empurrão em sua haste). O motor perde o deslizamento por alguns instantes, recuperando-o logo em seguida. Tal fato mostra que, para este caso, os valores de  $c_f$  e  $\gamma_f$  não foram corretamente escolhidos para tornar a hipótese **(H4.1)** verdadeira. Isso revela uma dificuldade de realizar a implementação prática do algoritmo: quando não se conhece nenhuma informação sobre a forma de onda da perturbação, a escolha adequada dos parâmetros se torna difícil.

#### 4.7 Conclusões

Um controlador por modo deslizante adaptativo, baseado no conceito de *controle equivalente estendido* foi proposto em (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016). O mesmo é baseado nos conceitos de controle equivalente estendido e controle médio. Os pontos fortes

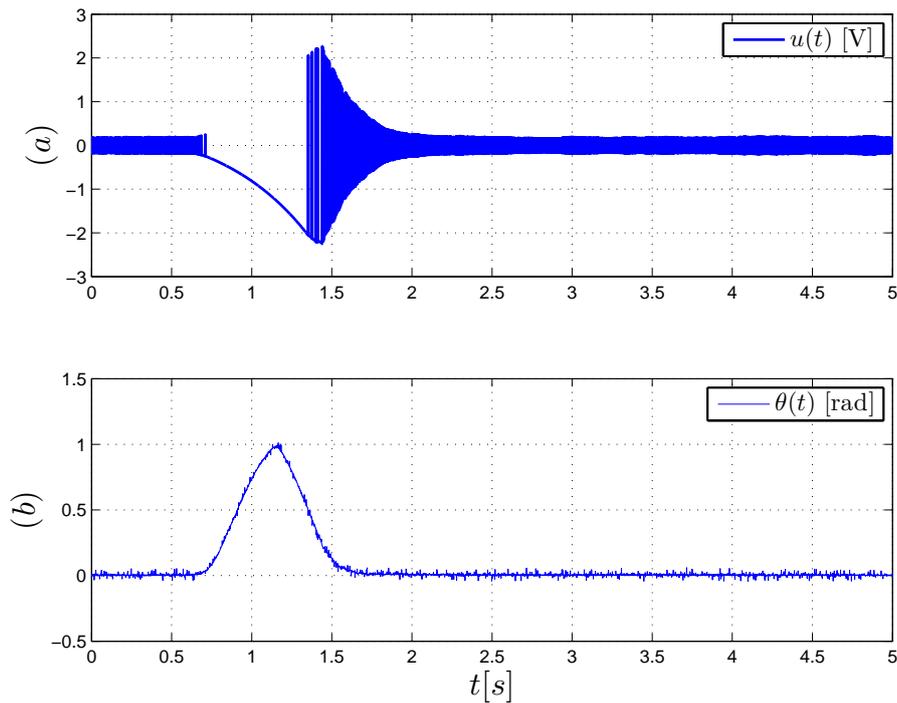


Figura 20 - Experimento com servomotor: efeito da perturbação. Sinal de controle  $u(t)$  em (a), posição angular  $\theta(t)$  em (b).

da estratégia são o desconhecimento de limitantes da perturbação, bem como de sua derivada, e da possibilidade de resistir a perturbações não suaves. Ressalta-se também sua simplicidade de implementação. Neste capítulo foi avaliada sistematicamente a estabilidade da estratégia, e seu desempenho foi mostrado através de simulações, bem como de resultados experimentais. A Tabela 2 amplia o comparativo presente no Capítulo 3, incluindo esta nova estratégia.

Para determinado tipo de perturbação, a estratégia em geral não apresenta bom desempenho (perturbações que permanecem em “repouso” por período prolongado e instantaneamente assumem valores altos - ver Figura 17). No próximo capítulo, será mostrada uma estratégia capaz de obter melhor desempenho neste cenário.

Tabela 2 - Novo quadro comparativo das estratégias baseadas em *controle equivalente* presentes na literatura.

	Informação sobre valor inicial da perturbação?	Admite perturbações não suaves?	Limitante da perturbação conhecido?	Limitante da derivada da perturbação conhecido?	Admite incertezas na planta?
Estratégia em (BARTOSZEWICZ, 1998)	Sim ☹	Não ☹	Sim ☹	Sim ☹	Não ☹
Estratégia em (UTKIN; POZNYAK, 2013)	Não ☺	Não ☹	Sim ☹	Sim ☹	Sim ☺
Estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) (caso $a_1$ conhecido)	Não ☺	Não ☹	Não ☺	Sim ☹	Não ☹
Estratégia em (EDWARDS; SHTESSEL, 2016) (caso $a_1$ desconhecido)	Não ☺	Não ☹	Não ☺	Não ☺	Não ☹
Nova Abordagem: Controle Equivalente Estendido (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016)	Sim ☹	Sim ☺	Não ☺	Não ☺	Não ☹

## 5 NOVA ABORDAGEM BASEADA EM FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO

No Capítulo 4 foi proposto um novo esquema de controle por modo deslizante adaptativo que explorava o controle equivalente estendido (Seção 1.3.3.1). Neste capítulo, será proposto um novo esquema de controle por modo deslizante adaptativo, baseado no uso de uma função de monitoração. Este novo esquema também é capaz de lidar com perturbações de limitantes desconhecidos. Será considerado um sistema linear e incerto, além de uma classe geral de perturbações não suaves.

Funções de monitoração já foram propostas em trabalhos anteriores na literatura para se solucionar uma variedade de problemas, tais como: direção de controle desconhecida (YAN et al., 2008; OLIVEIRA et al., 2007) e busca extremal (HSU; OLIVEIRA; CUNHA, 2014). Neste capítulo, funções de monitoração serão utilizadas como uma ferramenta para a adaptação de uma função de modulação. Desta forma, as perturbações podem ser majoradas e, simultaneamente, será possível mitigar a ocorrência de *chattering*.

Esta estratégia apresenta menos restrições que algumas presentes na literatura. Por exemplo, não é necessário o conhecimento do limitante da derivada da perturbação, como em (UTKIN; POZNYAK, 2013; EDWARDS; SHTESSSEL, 2016). Além disso, trata-se de uma abordagem entrada/saída, não sendo necessário medir ou conhecer os estados da planta.

### 5.1 Formulação do Problema

Considere um sistema incerto SISO linear e invariante no tempo (*Linear Time-invariant* - LTI):

$$y = G_p(s)[u + d(t)], \quad (5.1)$$

na qual  $u$  é a entrada de controle,  $y$  é a saída,  $d(t)$  é a perturbação de entrada e

$$G_p(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)},$$

onde  $N_p(s)$  e  $D_p(s)$  polinômios mônicos de ordem  $m$  e  $n$ , respectivamente.

O sistema deve atender às seguintes hipóteses:

**(H5.1)**  $G_p(s)$  é um sistema de fase mínima e seus parâmetros são desconhecidos, porém pertencentes a um conjunto compacto.

**(H5.2)** Os graus  $m$  e  $n$  de  $N_p(s)$  e  $D_p(s)$ , respectivamente, são constantes conhecidas e o sistema possui grau relativo unitário ( $n^* = n - m = 1$ ).

As hipóteses acima **(H5.1)**–**(H5.2)** são muito semelhantes às comumente encontradas na literatura de controle adaptativo (IOANNOU; SUN, 1996). Serão consideradas as seguintes hipóteses adicionais:

**(H5.3)** O sinal do ganho de alta frequência  $k_p \neq 0$  é conhecido.

**(H5.4)** A perturbação  $d(t)$  é contínua por partes e satisfaz  $|d(t)| \leq \bar{d} < +\infty$ ,  $\forall t \geq 0$ , na qual  $\bar{d} > 0$  é uma constante *desconhecida*.

O modelo de referência é dado por:

$$y_m = M(s)r = \frac{k_m}{s + a_m}r, \quad k_m > 0, \quad a_m > 0, \quad (5.2)$$

na qual o sinal de referência  $r(t)$  é assumido contínuo por partes e uniformemente limitado. O objetivo do controle é alcançar a convergência do erro para uma pequena vizinhança da origem do espaço de estados. Em particular, o erro de rastreamento

$$e_0(t) = y(t) - y_m(t) \quad (5.3)$$

deve tender pelo menos assintoticamente para uma pequena vizinhança da origem, realizando um rastreamento *prático*, porém não necessariamente exato.

### 5.1.1 Parametrização do Controle e Limitante da Perturbação

Considerando a abordagem usual de controle adaptativo por modelo de referência (*Model Reference Adaptive Control* - MRAC) (IOANNOU; SUN, 1996), o erro de saída  $e_0$  satisfaz (HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994):

$$e_0 = k^* M(s)[u - u^*], \quad (5.4)$$

na qual  $k^* = k_p/k_m$ ,

$$u^* := \theta^{*T} \omega - W_d(s) * d, \quad (5.5)$$

é o controle que realiza o “casamento” ideal da planta com o modelo de referência na presença de  $d(t)$  (CUNHA et al., 2003). O *vetor regressor*  $\omega$  é composto pelos estados dos filtros de entrada/saída, pela saída da planta  $y$  e pelo sinal de referência  $r$ :

$$\omega := \begin{bmatrix} \omega_1 & y & \omega_2 & r \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (5.6)$$

De acordo com (IOANNOU; SUN, 1996), os filtros de entrada e saída são dados por:

$$\dot{\omega}_1 = F\omega_1 + gu, \quad \dot{\omega}_2 = F\omega_2 + gy, \quad (5.7)$$

com  $F \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  e  $g \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ . O *vetor de parâmetros ideais*  $\theta^* = [\theta_1^{*T} \ \theta_0^* \ \theta_2^{*T} \ 1/k^*]^T$  é desconhecido mas é limitado elemento a elemento por um vetor constante  $\bar{\theta}^T$  conhecido, ou seja (HSU; ARAÚJO; COSTA, 1994),

$$\bar{\theta}_i \geq |\theta_i^*|, \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n\}. \quad (5.8)$$

A função de transferência  $W_d(s)$  é própria, estável e dada por:

$$W_d(s) = [k^* M(s)]^{-1} \bar{W}_d(s), \quad (5.9)$$

na qual  $\bar{W}_d(s)$  é a função de transferência de malha fechada da perturbação de entrada  $d(t)$  para a saída  $e_0(t)$  (HSU; LIZARRALDE; ARAÚJO, 1997).

O sinal  $u^*$  será considerado como uma perturbação total de entrada a ser cancelada pela lei de controle por modo deslizante. Portanto, para o projeto da mesma, será necessário o conhecimento de um limitante superior deste sinal. Caso o limitante  $\bar{d}$  em **(H5.4)** fosse conhecido, dado que  $W_d$  é uma função de transferência própria e BIBO-estável e que  $d(t)$  satisfaz a hipótese **(H5.4)**, seria possível aplicar (HSU; COSTA; CUNHA, 2003, Lema 2) à convolução  $W_d(s) * d(t)$  e encontrar constantes positivas  $c_d$  e  $\gamma_d$  tais que  $|W_d(s) * d(t)| \leq \hat{d}_1(t)$ , onde  $\hat{d}_1$  é definido por:

$$\hat{d}_1(t) := \bar{d} + c_d e^{-\gamma_d t} * \bar{d}. \quad (5.10)$$

Porém, dado que o limitante  $\bar{d}$  de fato não é conhecido, a seguinte lei adaptativa é proposta:

$$\hat{d}(t) = \beta(k, t) + c_d e^{-\gamma_d t} * \beta(k, t). \quad (5.11)$$

Esta lei é baseada em (5.10), onde o limitante desconhecido  $\bar{d}$  é substituído por uma função  $\beta(k, t)$  classe  $\mathcal{KL}$  apropriada, e  $k \in \mathbb{N}$  representa o número do chaveamento de uma função de monitoração (a ser definida posteriormente). A função  $\beta(k, t)$  cresce monotonicamente com o número de chaveamentos  $k$  e decresce com o tempo, após cada chaveamento, de uma forma determinada. A cada novo chaveamento, a função  $\beta(k, t)$ , agindo conjuntamente com o filtro de aproximação de primeira ordem (*First-Order Approximation Filter* - FOAF) de função de transferência  $c_d/(s + \gamma_d)$ , será capaz de produzir um limitante para a perturbação  $d(t)$  pelo menos durante algum intervalo de tempo. A união de todos os intervalos de tempo onde isto ocorre (ou seja, onde  $d(t)$  é majorado pela saída do FOAF) é denotada por  $T^+$ . Logo, de (5.5),  $u^*$  satisfaz

$$|u^*(t)| \leq \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}(t), \quad \forall t \in T^+. \quad (5.12)$$

O conjunto aqui nomeado  $T^-$  corresponde ao conjunto complementar de  $T^+$ , isto é,  $T^+ \cup T^- = [0, \infty)$  e  $T^+ \cap T^- = \emptyset$ .

### 5.1.2 Lei de Controle

Lembrando que o sinal do ganho de alta frequência  $k_p$  é conhecido (vide hipótese **(H5.3)**), a lei de controle é definida por:

$$u = -f(t) \operatorname{sgn}(k_p) \operatorname{sgn}(e_0). \quad (5.13)$$

De acordo com (5.4), a função de modulação  $f(t)$  é projetada para majorar o controle de “casamento” ideal  $u^*$ , que é considerado uma perturbação total de entrada em (5.4). É possível observar que, de (5.12), uma escolha para  $f(t)$  que atende o requisito  $f(t) \geq |u^*(t)|$  é:

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}(t) + \delta, \quad (5.14)$$

na qual  $\delta > 0$  é uma constante arbitrária. Utilizando-se de (HSU; LIZARRALDE; ARAÚJO, 1997, Lema 1), esta função de modulação garante que o erro de saída  $e_0(t)$  tende a zero,  $\forall t \in T^+$ . De (5.2)–(5.4), é possível mostrar que o erro de saída  $e_0(t)$  é a solução da equação diferencial:

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + k_p[u(t) - u^*(t)] + \pi(t), \quad (5.15)$$

na qual  $\pi(t)$  representa um termo de transiente devido às condições iniciais do subsistema observável e não controlável da realização não mínima  $(A_c, b_c, h_c^T)$  de  $M(s)$  em (5.4), usada na teoria de MRAC (IOANNOU; SUN, 1996). Portanto, de (5.13)–(5.14) e (5.5), observando que  $\text{sgn}(u - u^*) = -\text{sgn}(e_0)$ , se  $f(t) > |u^*(t)|$ ,  $\forall t \geq \bar{t}_0$ , então utilizando o *Teorema da Comparação* (FILIPPOV, 1964),  $|e_0|$  seria limitada pela solução da seguinte equação diferencial:

$$\dot{\xi}(t) = -a_m \xi(t) + \pi(t), \quad \forall t \in [\bar{t}_0, \infty), \quad \xi(\bar{t}_0) = e_0(\bar{t}_0), \quad (5.16)$$

isto é, tem-se:

$$|e_0(t)| \leq |\xi(t)| \leq e^{-a_m(t-\bar{t}_0)} |e_0(\bar{t}_0)| + c_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \forall t \geq [\bar{t}_0, \infty), \quad (5.17)$$

onde  $\bar{t}_0$  representa algum tempo inicial, e  $|e^{-a_m t} * \pi(t)| \leq c_0 e^{-\lambda_0 t}$ , para uma constante positiva desconhecida  $c_0$  dependente das condições iniciais das variáveis de estado e  $\lambda_0$  uma constante conhecida satisfazendo  $0 < \lambda_0 < \min\{-\text{Re}(\lambda_i[A_c])\}$  (IOANNOU; SUN, 1996, pp. 346).

### 5.1.3 Função de Monitoração

Baseado em (5.17), considere a função auxiliar  $\varphi_k$  definida a seguir:

$$\varphi_k(t) = e^{-a_m(t-t_k)} |e_0(t_k)| + a(k) e^{-\lambda_0 t}, \quad (5.18)$$

na qual  $t \in [t_k, \infty)$ ,  $a(k)$  é uma sequência positiva monotonicamente crescente qualquer,  $k \in \mathbb{N}$ , e  $t_0 = 0$ .

A *função de monitoração*  $\varphi_m$  pode ser definida como:

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) (c [0, \infty)). \quad (5.19)$$

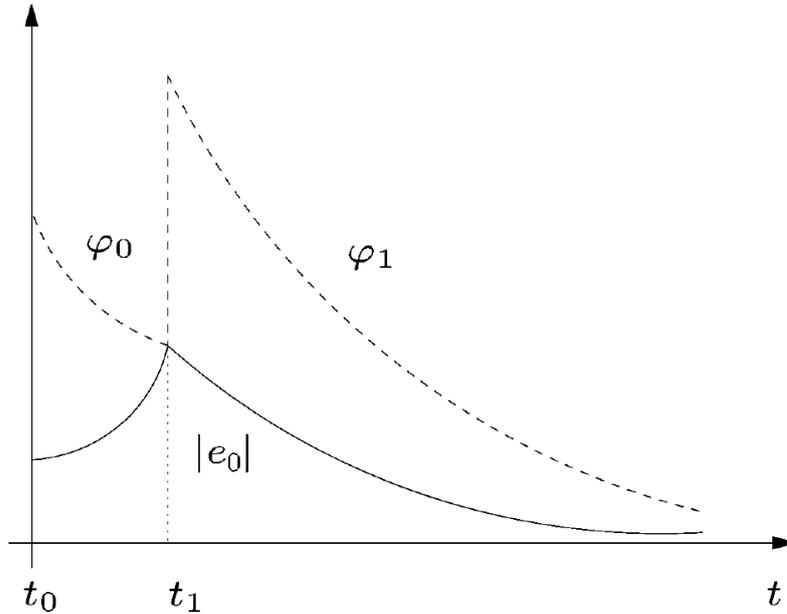


Figura 21 - Ilustração do chaveamento da função de monitoração em (5.19). Adaptada de (OLIVEIRA; PEIXOTO; HSU, 2010).

A motivação por trás da introdução de  $\varphi_m$  é o fato de a função  $\pi(t)$  em (5.15) não ser passível de medição. Lembrando que a desigualdade (5.17) é válida quando a desigualdade  $f(t) > |u^*|$  é satisfeita, é natural tomar  $\xi(t)$  como uma referência acerca do modo deslizando. Em outras palavras,  $\xi$  serve para detectar se o modo deslizando está sendo perdido e o erro de rastreamento está aumentando, de tal sorte que  $k$  em  $\beta(k, t)$  precise ser incrementado (ver equação (5.11)). Porém, como  $\pi(t)$  é um sinal não disponível, é necessário o uso de  $\varphi_m$  para substituí-lo, e provocar o chaveamento de  $\varphi_m$ . Observa-se que, de (5.19), sempre é válida a relação  $|e_0(t_k)| < \varphi_k(t_k)$  quando  $t = t_k$ . Portanto, o tempo de chaveamento  $t_k$  é bem definido (para  $k \geq 0$ ):

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{t > t_k : |e_0(t)| = \varphi_k(t)\}, & \text{se existir,} \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.20)$$

A Figura 21 ilustra o processo de chaveamento descrito pelas equações (5.19) e (5.20). A medida que o erro de rastreamento  $e_0$  cresce e se torna igual ao valor da função de monitoração  $\varphi_m$ , esta realiza um novo chaveamento, e o valor de  $k$  é incrementado, com o intuito de promover a redução do erro de rastreamento. O processo se repete indefinidamente, mantendo o erro de rastreamento em uma pequena vizinhança da origem.

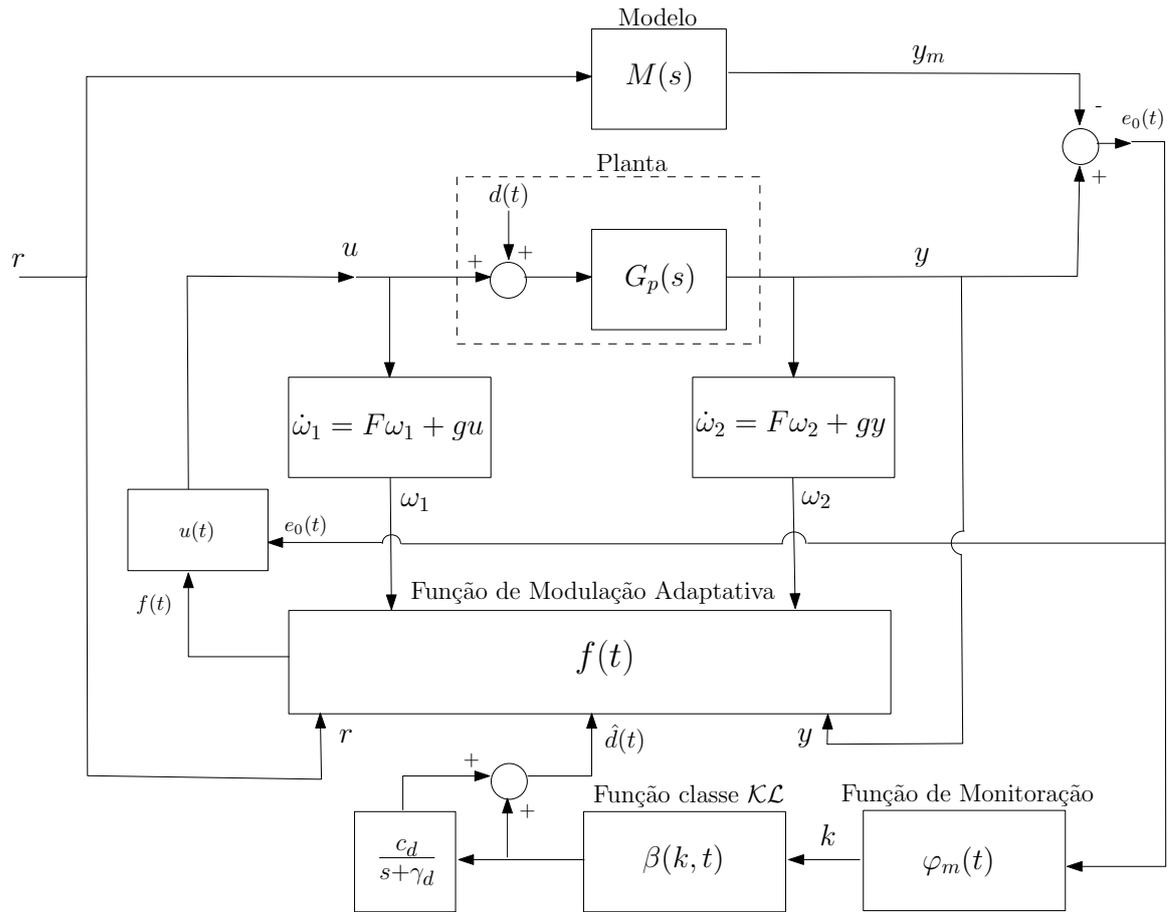


Figura 22 - Diagrama de blocos da estratégia por modo deslizante adaptativo baseada em funções de monitoração.

O sistema de controle completo encontra-se retratado na Figura 22.

## 5.2 Resultado Principal

O teorema a seguir apresenta resultados preliminares acerca do rastreamento prático objetivado por esta abordagem. Embora o conjunto residual definitivo ainda não seja completamente caracterizado, é possível determinar que o erro de rastreamento se torna suficientemente pequeno com a escolha de uma função  $\beta(k, t)$  classe  $\mathcal{KL}$  apropriada em (5.11), aplicada à função de modulação em (5.14) (YAN; HSU; XIUXIA, 2006). Este ponto ainda é fruto de investigação atualmente.

**Teorema 2** *Assuma que as hipóteses (H5.1)–(H5.4) são válidas. Considere o sistema definido por (5.1), o modelo de referência dado por (5.2), a lei de controle (5.13) com a função de modulação dada em (5.14) e a lei adaptativa (5.11), bem como a função de monitoração (5.19). Então, um rastreamento prático é alcançado, isto é, o erro  $e_0(t)$*

definido em (5.3) converge para uma pequena vizinhança da origem.

Se uma função  $\beta(k)$  classe  $\mathcal{K}$  fosse utilizada em (5.11), ao invés de uma de classe  $\mathcal{KL}$  (como assumida anteriormente), seria possível verificar, a partir da hipótese **(H5.4)** e (5.17) que, após um número finito  $k_i$  de chaveamentos, o sinal  $\hat{d}(t)$  se tornaria maior que  $\bar{d}$ , servindo como um limitante para este. Logo, seria verificável a condição em (5.12) para  $t \geq t_{k_i}$ . Adicionalmente, para  $k_i$  suficientemente grande,  $a(k_i)e^{-\lambda_0 t}$  em (5.18) permitiria  $\varphi_k(t)$  ser um limitante válido para  $\xi$  em (5.17) uma vez que

$$|e^{-a_m t} * \pi(t)| \leq c_0 e^{-\lambda_0 t} < a(k_i) e^{-\lambda_0 t},$$

consequentemente, nenhum novo chaveamento da função de monitoração ocorreria depois disso. Logo, a norma do erro de rastreamento  $|e_0|$  convergiria para zero ao menos exponencialmente, dado que a função de monitoração (5.18)–(5.19) converge exponencialmente quando o processo de chaveamento para. Além disso, o modo deslizante  $e_0 = 0$  seria alcançado em tempo finito, pois a condição  $\dot{e}_0 e_0 < -\delta |e_0|$  pode ser obtida, com  $\delta > 0$  definida em (5.14).

A utilização de uma função  $\beta(k, t)$  classe  $\mathcal{KL}$ , ao invés de uma de classe  $\mathcal{K}$ , apenas introduz um fator de esquecimento no esquema descrito acima. De acordo com (YAN; HSU; XIUXIA, 2006), é sempre possível encontrar uma sequência crescente de chaveamento para  $\beta(k, t)$  até que o erro de rastreamento entre em qualquer conjunto residual pré-especificado. Como  $\beta(k, t)$  sempre decresce com o tempo, a função de monitoração chaveia repetidas vezes, sempre que necessário, com o intuito de fazer  $\varphi_k(t) > |e_0(t)|$ . Se o filtro definido por  $c_d, \gamma_d$  em (5.11) é projetado para gerar um majorante válido para  $d(t)$  a partir de  $\beta(k, t)$ , então o modo deslizante  $e_0 = 0$  é perdido apenas durante pequenos intervalos de tempo ( $t \in T^-$ ), e logo em seguida recuperado após um número finito de chaveamentos sucessivos da função de monitoração. Logo, conforme  $t \rightarrow +\infty$ , a função de monitoração nunca para de chavear (a menos que  $d(t)$  atinja o valor zero e nele permaneça), nunca se permitindo ao erro  $e_0(t)$  crescer além de um valor residual pré especificado, posto que os intervalos de tempo pertencentes a  $T^-$  podem ser feitos arbitrariamente pequenos de tal forma que a função de monitoração (5.18) assume valores muito pequenos para longos intervalos  $T^+$ .

Dado que a perturbação e o sinal de referência são uniformemente limitados (não

podendo, portanto, escapar em tempo finito), logo o erro nunca poderá distanciar-se significativamente da origem.  $\square$

**Nota 1** (*Reinicialização da Função de Monitoração*): O termo  $\beta(k, t)$  em (5.14) possui um papel chave para a majoração da perturbação desconhecida  $d(t)$  em (5.5). Este permite que a desigualdade  $f(t) > |u^*(t)|$  seja satisfeita conforme o número de chaveamentos  $k$  aumenta. Todavia, já que  $\beta(k, t) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , dentro de qualquer intervalo fixo de tempo, pode ser necessário um mecanismo de reinicialização de  $k$ , de tempos em tempos, para evitar que as amplitudes dos sinais dentro do controlador atinjam valores muito altos conforme  $t \rightarrow +\infty$ .

Em algumas aplicações práticas, a despeito do fato de a perturbação  $d(t)$  possuir limitante desconhecido (considerando  $t \in [0, \infty)$ ), ela pode tender a algum valor específico ou possuir algum limitante superior após algum tempo finito (por exemplo, quando a perturbação possuir uma natureza de um transitório, que logo após passa a um valor de estado estacionário). Para esta situação, é possível estabelecer o seguinte corolário:

**Corolário 1** *No Teorema 2, caso a perturbação  $d(t)$  possua a seguinte propriedade adicional:*

$$|d(t)| < d_l, \quad \forall t \in [t_l, \infty) \quad (5.21)$$

então poderá ser estabelecida uma nova função de modulação a partir de (5.14):

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}(t) + \left(1 + \frac{c_d}{\gamma_d}\right) d_l + \delta, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.22)$$

Então, um rastreamento exato é obtido e  $e_0(t)$  permanece na origem após um tempo finito. Além disso,  $\hat{d}(t) \rightarrow 0$ ,  $\forall t > t_l$ , diminuindo a amplitude do sinal de controle  $u(t)$  necessária para manter a condição de alcançabilidade do modo deslizante.

É possível observar que, para  $t < t_l$ , o Teorema 2 pode ser utilizado de tal forma que pelo menos um rastreamento prático é obtido durante este intervalo de tempo. Para todo  $t \geq t_l$ , a nova função de modulação (5.22) implica que  $f(t) > |u^*|$  é satisfeito e o modo deslizante  $e_0 = 0$  é necessariamente alcançado em algum instante de tempo finito, e o chaveamento da função de monitoração cessa. Daí em diante, o erro de rastreamento torna-se nulo e o rastreamento exato global é obtido. Uma vez que o termo  $d_l$  é grande o bastante para garantir que  $f(t) > |u^*|$ ,  $\forall t \geq t_l$ , e a função  $\beta(k, t)$  decai quando o processo

de chaveamento para ( $k$  é mantido fixo), logo  $\hat{d}(t)$  em (5.11) tende a zero, resultando na redução da amplitude do sinal de controle  $u(t)$ .  $\square$

### 5.3 Resultados de Simulação

Apresenta-se uma simulação para ilustrar as propriedades do esquema de controle adaptativo introduzido neste capítulo. Como em exemplos anteriores, consideramos uma planta constituída de um integrador:  $G_p(s) = 1/s$ , com condição inicial  $y(0) = 2$ . O modelo de referência utilizado é dado por  $M(s) = 1/s + 1$ . O sinal de referência é escolhido como  $r(t) = \text{sen}(0,5t)$ . Para ilustrar bem as características do esquema, a perturbação escolhida aqui é dada por um sinal senoidal adicionado de um pulso:  $d(t) = 5 \text{sen}(t) + \mathcal{U}(t - 10) - \mathcal{U}(t - 20)$ , onde  $\mathcal{U}(t)$  é a função degrau unitário. Portanto, trata-se de uma perturbação não suave.

Neste exemplo, não há a presença dos filtros de entrada/saída  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , pois a planta possui ordem  $n = 1$ . Os parâmetros ideais  $\theta_0^* = -1$  e  $1/k^* = 1$  levam a  $\theta^{*T}\omega = -y + r$ . Desta forma, foram escolhidos  $\bar{\theta}^T|\omega(t)| = |y| + |r|$  e  $\delta = 0,01$  em (5.14).

A natureza discretizada de simulações computacionais podem levar a existências de resíduos e ruídos no erro  $e_0(t)$ , que, por sua vez, podem ocasionar chaveamentos espúrios da função de monitoração. Para eliminar este problema foi feita uma modificação em (5.18)–(5.19):

$$\varphi_k(t) = e^{-a_m(t-t_k)}|e_0(t_k)| + a(k)e^{-\lambda_0 t} + \epsilon \quad (5.23)$$

onde  $\epsilon > 0$  é uma constante arbitrariamente pequena. Nesta simulação,  $\epsilon = 0,01$ . Os parâmetros restantes utilizados foram:  $a(k) = k + 1$ ,  $a_m = \lambda_0 = 1$ ,  $c_d = 2$ ,  $\gamma_d = 2$ ,  $\beta(k, t) = (10k + 1)e^{-3t/(10k+1)}$ .

Na Figura 23 é possível visualizar que o rastreamento inicia-se aproximadamente no instante  $t = 0,2s$ , e permanece em uma estreita vizinhança da trajetória de referência apesar da ação da perturbação. A Figura 24 exhibe os chaveamentos da função de monitoração. Como dito anteriormente, toda vez que o módulo do erro de rastreamento  $|e_0|$  começa a crescer, a função de monitoração chaveia.

É possível ver na Figura 25, neste exemplo específico de simulação, que a função  $\beta(k, t)$  escolhida não consegue limitar a perturbação  $d(t)$  na maior parte do tempo, mas o FOAF definido por  $c_d, \gamma_d$  em (5.11) é conservador o suficiente para gerar um limitante

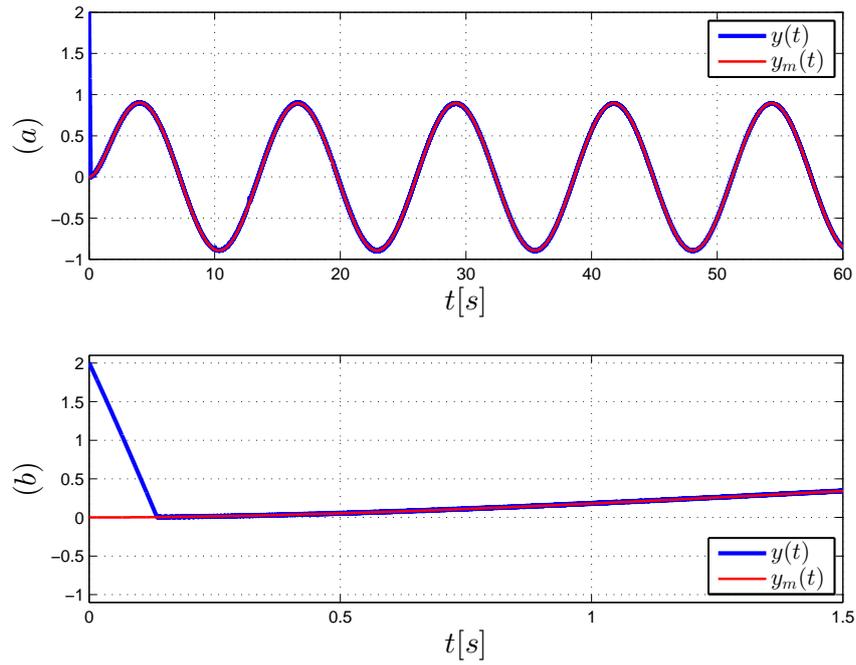


Figura 23 - Desempenho da estratégia para perturbação descontínua  $d(t) = 5 \text{sen}(t) + \mathcal{U}(t - 10) - \mathcal{U}(t - 20)$ : (a) Saídas  $y(t)$  da planta e  $y_m(t)$  do modelo. (b) Convergência de  $y(t)$  para  $y_m(t)$  (zoom).

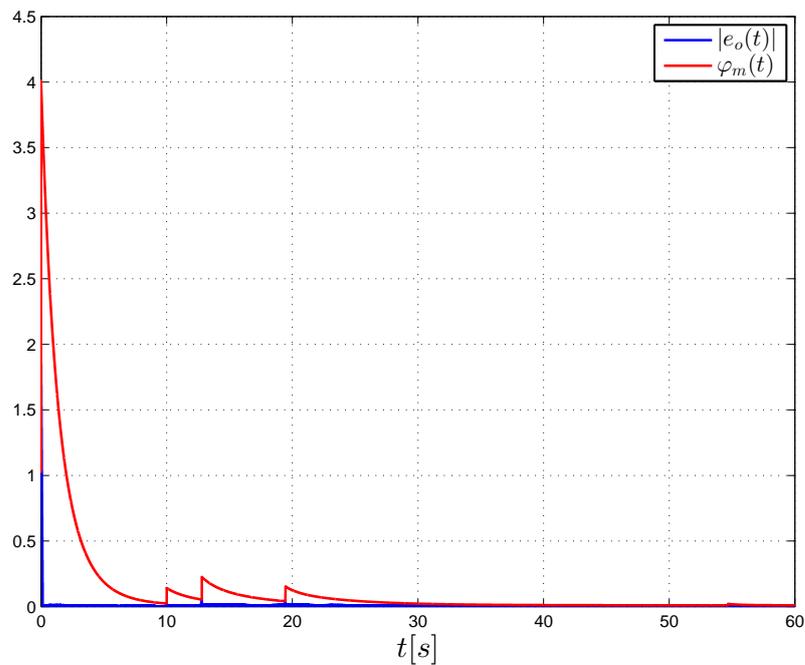


Figura 24 - Módulo do erro de rastreamento  $|e_0(t)|$  e função de monitoração  $\varphi_m(t)$ .

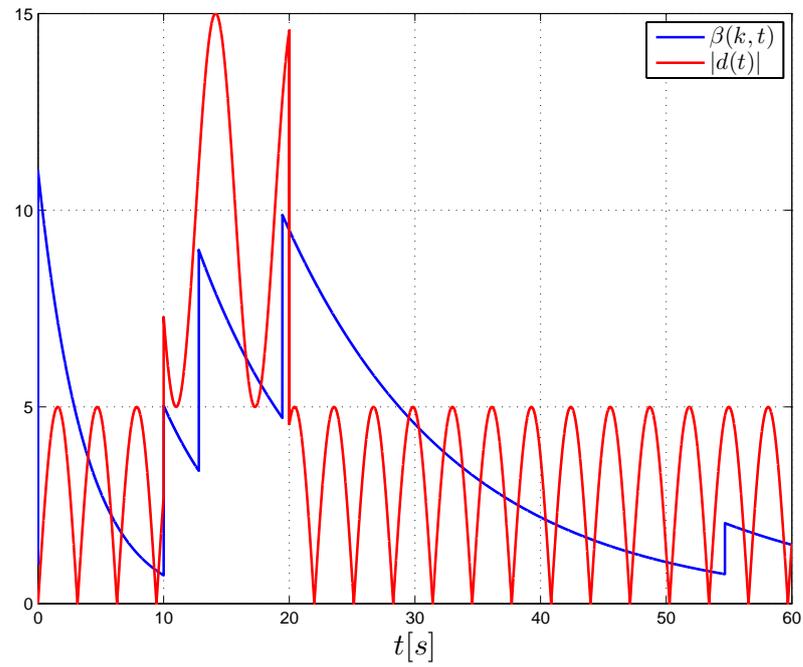


Figura 25 - Evolução temporal da função  $\beta(k, t)$  e módulo da perturbação  $|d(t)|$ .

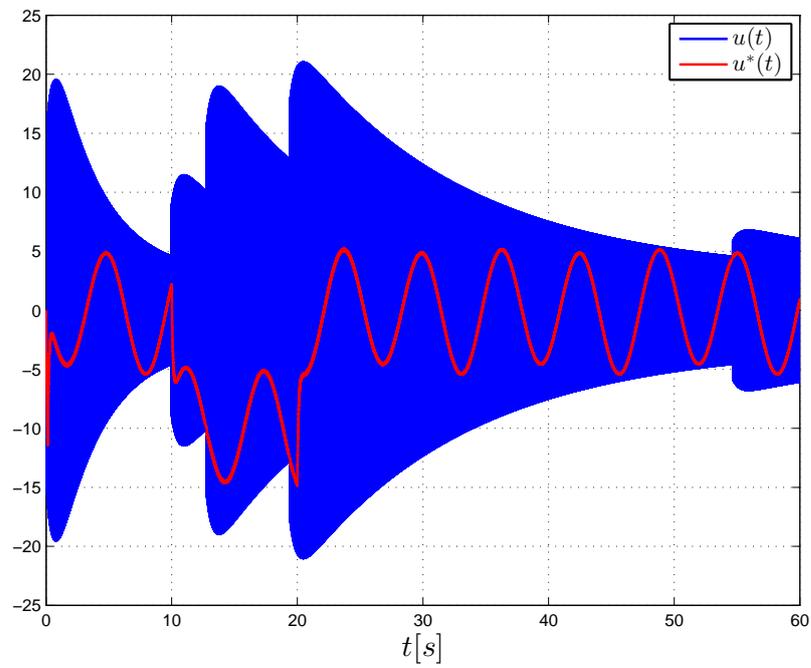


Figura 26 - Sinal de controle  $u(t)$  e controle ideal de casamento  $u^*(t)$ .

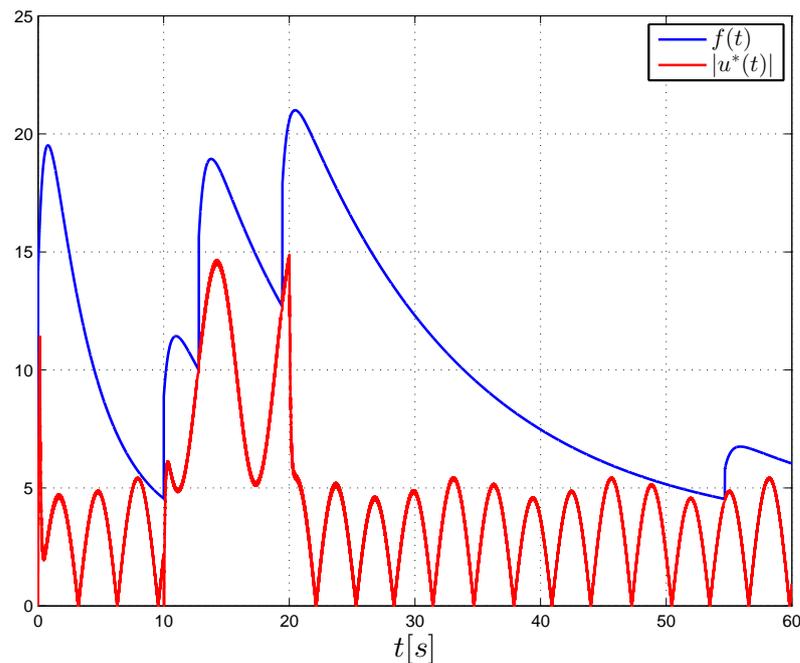


Figura 27 - Função de modulação  $f(t)$  e módulo do controle ideal de casamento  $|u^*(t)|$ , interpretado como perturbação total de entrada.

superior para a perturbação total de entrada  $u^*$ , isto é,  $f(t) > |u^*|$  (ver Figura 27).

Na Figura 26 observa-se através do sinal  $u$  que o modo deslizante é perdido apenas em intervalos curtos, e a amplitude do chaveamento varia de acordo com a necessidade imposta pelo sinal  $u^*$ , desta forma mitigando a ocorrência de *chattering*.

Para fins de comparação, é apresentada uma nova simulação com os mesmos parâmetros utilizados no caso anterior, trocando-se apenas a função  $\beta(k, t)$  para  $\beta(k, t) = 3k + 1$  (uma função classe  $\mathcal{K}$ , ao invés de classe  $\mathcal{KL}$ ). Na Figura 28 é possível observar que, quando a perturbação retorna a um nível baixo, a modulação mantém-se em um nível desnecessariamente alto. Este sinal de controle propiciaria um maior efeito de *chattering* em situações práticas.

Por último, mostra-se uma simulação da estratégia do presente capítulo com a perturbação utilizada no Capítulo 4, no qual não fora obtido bom desempenho. Na Figura 29 é possível ver que a perda de deslizamento não acarreta em grandes desvios no rastreamento. A Figura 30 mostra a evolução da função  $\beta(k, t)$  e da norma da perturbação  $|d(t)|$  neste caso. Também é observado na Figura 31 que o tempo total de perda de deslizamento utilizando esta estratégia é muito menor que a estratégia do capítulo anterior (Figura 17)

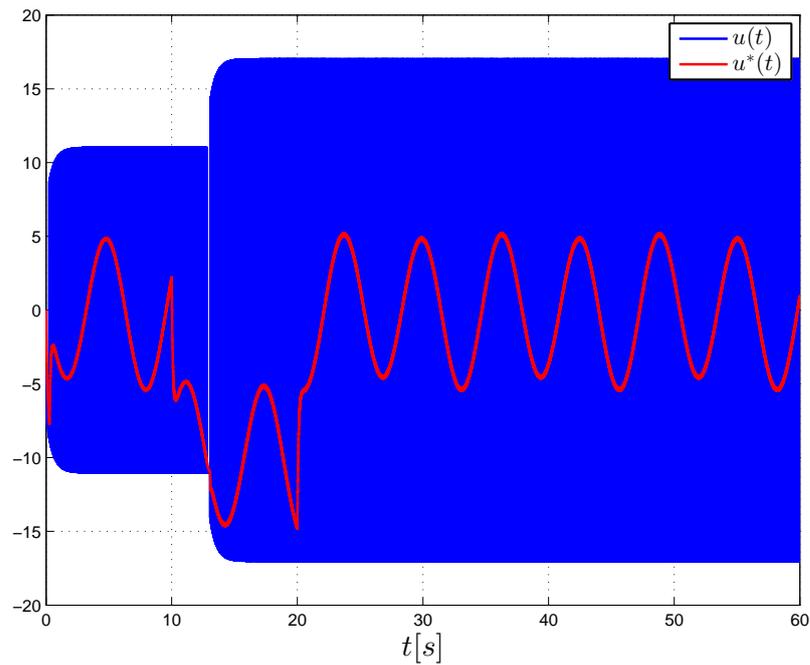


Figura 28 - Sinal de controle  $u(t)$  e sinal de controle de casamento ideal  $u^*(t)$  quando uma função  $\beta$  classe  $\mathcal{K}$  é utilizada, ao invés de uma de classe  $\mathcal{KL}$ . Objetivos de controle alcançados ao custo de um sinal de controle com maior amplitude que o necessário.

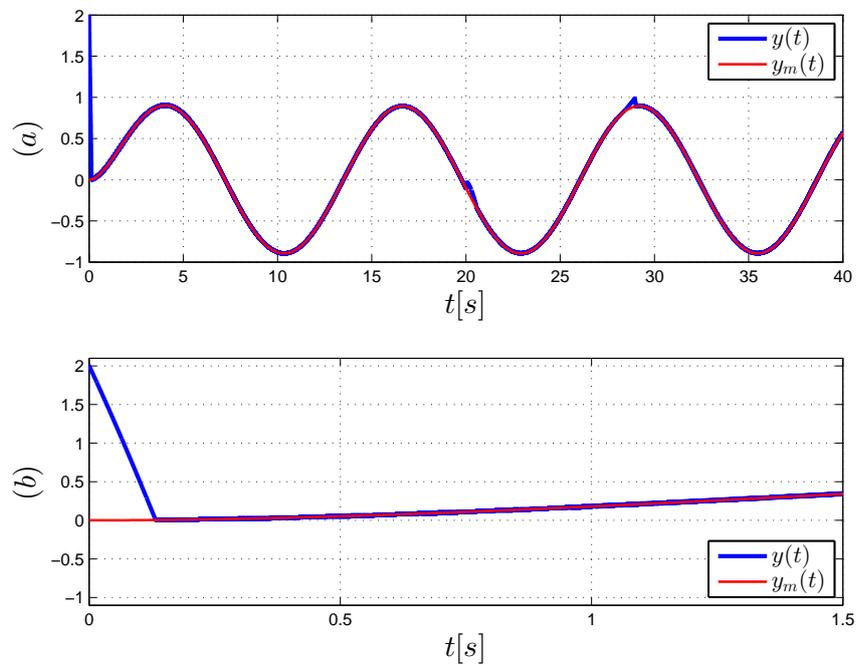


Figura 29 - Desempenho da estratégia para perturbação descontínua exibida no Capítulo 4: (a) Saídas  $y(t)$  da planta e  $y_m(t)$  do modelo. (b) Convergência de  $y(t)$  para  $y_m(t)$  (zoom).

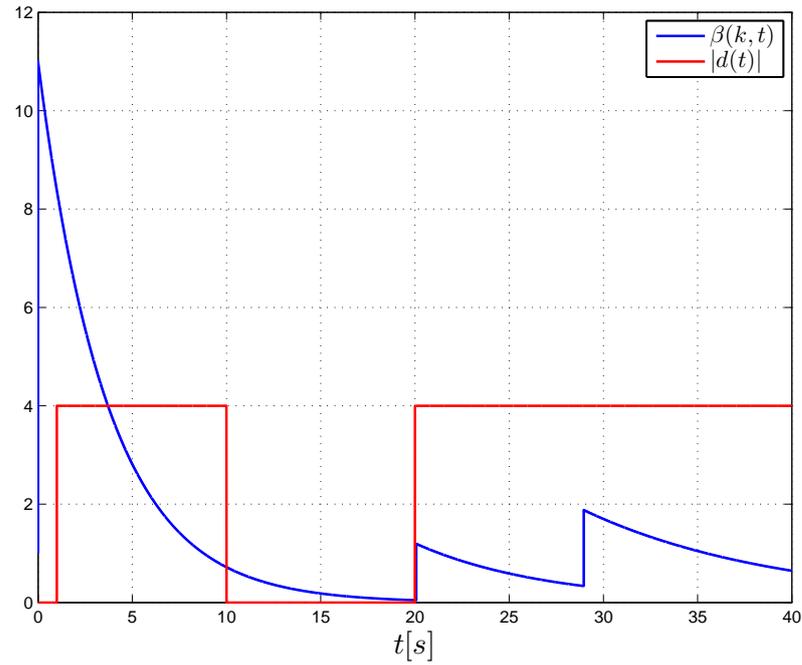


Figura 30 - Evolução temporal da função  $\beta(k, t)$  e módulo da perturbação  $|d(t)|$ . Perturbação com descontinuidades.

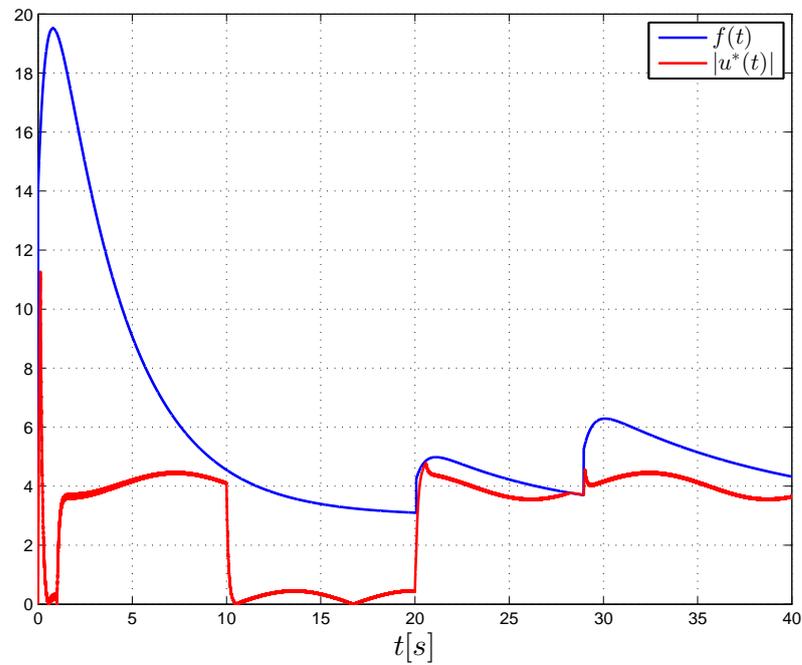


Figura 31 - Função de modulação  $f(t)$  e norma do controle ideal de casamento  $|u^*(t)|$ , interpretado como perturbação total de entrada.

## 5.4 Conclusões

Uma novo controlador por modo deslizante adaptativo capaz de lidar com perturbações não suaves com limitante desconhecido foi proposto. Este é baseado em uma função de monitoração, que atua como uma ferramenta para a adaptação do ganho de uma função de modulação. Foram garantidas a supressão de perturbação e estabilidade global com rastreamento prático de trajetória usando apenas realimentação de saída (ou seja, sem assumir o conhecimento dos estados da planta). A característica decrescente da função de modulação resulta na mitigação do fenômeno *chattering*, conforme ilustrado nas simulações realizadas.

O conteúdo deste capítulo foi publicado no artigo (OLIVEIRA et al., 2017), apresentado no evento *20<sup>th</sup> World Congress of the International Federation of Automatic Control* (IFAC 2017), em Toulouse, França. Também foi publicado no capítulo de livro (HSU et al., 2018).

## CONCLUSÕES FINAIS

Ao se acompanhar o estudo comparativo realizado nesta dissertação (Capítulos 2 e 3), é possível constatar que não há como se determinar a melhor estratégia dentre as apresentadas. A escolha da estratégia mais adequada dependeria de uma série de fatores acerca do sistema a ser controlado, tais como: classe de sistema não-linear a que pertence, presença de incertezas na planta, conhecimento de limitantes sobre a perturbação, complexidade de implementação do controlador, tolerância à perda de deslizamento, etc. Ainda assim, observa-se uma clara vantagem das estratégias baseadas em controle equivalente em relação às estratégias baseadas em crescimento monotônico ou crescimento e decréscimo de ganhos. Estas são capazes de, na presença de um modo deslizante, estimar o comportamento da perturbação e adaptar o ganho de modulação de maneira a sobrepujar seus efeitos. Tal fato pode permitir a manutenção de um modo deslizante indefinidamente, o que dificilmente ocorre nas estratégias anteriores.

Nesta dissertação, foram mostradas duas novas abordagens de controle por modo deslizante adaptativo para sistemas sujeitos à perturbações com limitante desconhecido, sendo uma baseada em *controle equivalente estendido* (Capítulo 4) (que já fora preliminarmente proposta na literatura) e outra em *função de monitoração* (Capítulo 5).

A seguir, são listadas as principais contribuições deste trabalho.

### **Nova Abordagem Baseada em Controle Equivalente Estendido**

Esta estratégia fora preliminarmente proposta no artigo (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2016) e no capítulo de livro (OLIVEIRA; CUNHA; HSU, 2018). A mesma é voltada para uma classe de plantas não-lineares, garantindo estabilidade global. Possui implementação simples e garante a manutenção de um modo deslizante, mesmo na presença de perturbações *não suaves*.

Nesta dissertação, foi complementado o estudo dos trabalhos acima, introduzindo-se eventuais modificações, reformulando-se a prova de estabilidade da estratégia e apresentando mais detalhes acerca de seu funcionamento. Também foi realizada, pela primeira vez, a implementação da estratégia em um sistema eletromecânico (servomotor).

## Nova Abordagem Baseada em Função de Monitoração

A estratégia foi desenvolvida para uma certa classe de sistemas lineares, invariantes no tempo e incertos. Seu funcionamento é baseado em uma *função de monitoração*, que serve como ferramenta para adaptação do ganho de modulação. Tal estratégia é capaz de lidar com perturbações de limitantes desconhecidos.

A estratégia possui como principais características relevantes:

- Admite uma classe bastante ampla de perturbações *não suaves*, o que é algo pouco comum na literatura existente.
- A supressão dos efeitos da perturbação, bem como rastreamento global são obtidos utilizando realimentação de saída, não necessitando da medição dos estados da planta.

O conteúdo deste capítulo foi publicado no artigo (OLIVEIRA et al., 2017), apresentado no *20<sup>th</sup> World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC 2017)*, em Toulouse, França. Também foi publicado no capítulo de livro (HSU et al., 2018).

## Trabalhos Futuros

São propostas para a continuidade deste trabalho:

1. A eliminação do conhecimento de um majorante inicial para a perturbação, para a estratégia baseada em *controle equivalente estendido*.
2. A generalização da estratégia baseada em *controle equivalente estendido* para controladores de tempo discreto ou baseados em modo deslizante de ordem superior.
3. A caracterização do conjunto residual definitivo de erro, para a estratégia baseada em *função de monitoração*, de maneira semelhante ao que é feito em (YAN; HSU; XIUXIA, 2006).

## REFERÊNCIAS

- APKARIAN, J. A comprehensive and modular laboratory for control systems design and implementation. Quanser Consulting, 1995.
- BAEV, S.; SHTESSEL, Y.; SHKOLNIKOV, I. Nonminimum-phase output tracking in causal systems using higher-order sliding modes. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, v. 18, n. 4–5, p. 454–467, March 2008.
- BARTOLINI, G.; LEVANT, A.; PLESTAN, F.; TALEB, M.; PUNTA, E. Adaptation of sliding modes. *IMA J. Mathematical Control and Information*, v. 30, n. 3, p. 285–300, September 2013.
- BARTOSZEWICZ, A. A new technique to compensate for disturbance in sliding mode control systems. In: *Proc. 24th Conf. IEEE Industrial Electronics Soc.* Aachen: [s.n.], 1998. v. 3, p. 1708–1711.
- BONDAREV, A. G.; BONDAREV, S. A.; KOSTYLEVA, N. E.; UTKIN, V. I. Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Autom. Remote Control*, v. 46, n. 6, p. 679–684, 1985. Pt. 1.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-structure control design of switched systems with an application to a dc–dc power converter. *IEEE Trans. Ind. Electronics*, IEEE, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009.
- CLELLAND, J. N.; MOSELEY, C. G.; WILKENS, G. R. Geometry of control-affine systems. *Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications*, National Academy of Sciences of Ukraine, v. 5, 2009.
- CUNHA, J. P. V. S. *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*. Tese (Doutorado) — Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Março 2004.
- CUNHA, J. P. V. S.; HSU, L.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 48, n. 12, p. 2245–2250, 2003.

- DECARLO, R. A.; ŽAK, S. H.; MATTHEWS, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, v. 76, n. 3, p. 212–232, 1988.
- DESOER, C. A.; VIDYASAGAR, M. *Feedback Systems: Input-Output Properties*. New York: Academic Press, 1975.
- DIAS, M. S. G. *Discrete time sliding mode control strategies applied to a multiphase brushless DC machine*. Kassel: Kassel University Press GmbH, 2017.
- DRAŽENOVIĆ, B. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, Elsevier, v. 5, n. 3, p. 287–295, 1969.
- EDWARDS, C.; SHTESSEL, Y. B. Adaptive continuous higher order sliding mode control. *Automatica*, v. 65, p. 183–190, March 2016.
- EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. London: Taylor & Francis Ltd., 1998.
- ESTRADA, A.; PLESTAN, F.; ALLOUCHE, B. An adaptive version of a second order sliding mode output feedback controller. In: *Proc. European Contr. Conf.* Zurich, Switzerland: [s.n.], 2013. p. 3228–3233.
- FEI, J.; LU, C. Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, IEEE, n. 99, p. 1–12, 2017.
- FILIPPOV, A. F. Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, p. 199–231, 1964.
- GONZALEZ, T.; MORENO, J. A.; FRIDMAN, L. Variable gain super-twisting sliding mode control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 8, p. 2100–2105, August 2012.
- HSU, L.; ARAÚJO, A. D.; COSTA, R. R. Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 39, n. 1, p. 4–21, 1994.
- HSU, L.; COSTA, R. R. Adaptive control with sliding modes: theory and applications. In: *Minicourse Proc. XI Congresso Brasileiro de Automática*. São Paulo: [s.n.], 1996. p. 39–60.

- HSU, L.; COSTA, R. R.; CUNHA, J. P. V. S. Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems. *Asian J. Contr.*, v. 5, n. 4, p. 543–556, December 2003.
- HSU, L.; CUNHA, J. P. V. S.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F. Multivariable output-feedback sliding mode control. In: YU, X.; XU, J.-X. (Ed.). *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. p. 283–313.
- HSU, L.; LIZARRALDE, F.; ARAÚJO, A. D. New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control: design and stability analysis. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 42, n. 3, p. 386–393, March 1997.
- HSU, L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Extremum seeking control via monitoring function and time-scaling for plants of arbitrary relative degree. In: *Proc. 13<sup>th</sup> Int. Workshop on Variable Structure Sys.* Nantes: [s.n.], 2014. p. 1–6.
- HSU, L.; OLIVEIRA, T. R.; MELO, G. T.; CUNHA, J. P. V. S. Adaptive sliding mode control using monitoring functions. In: CLEMPNER, J. B.; YU, W. (Ed.). *New Perspectives and Applications of Modern Control Theory: In Honor of Alexander S. Poznyak*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 269–285.
- HUANG, Y.-J.; KUO, T.-C.; CHANG, S.-H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 38, n. 2, p. 534–539, 2008.
- HUNG, J. Y.; GAO, W.; HUNG, J. C. Variable structure control: a survey. *IEEE Trans. Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, p. 2–22, 1993.
- ILCHMANN, A.; OWENS, D. H. Adaptive stabilization with exponential decay. *Systems & Contr. Letters*, v. 14, p. 437–443, 1990.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust Adaptive Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. 2nd. ed. New York: Springer, 1989.
- ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. New York: Wiley, 1976.
- KAILATH, T. *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.

- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 2<sup>nd</sup>. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3<sup>rd</sup>. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.
- KUNUSCH, C.; PULESTON, P.; MAYOSKY, M. *Sliding-Mode control of PEM fuel cells*. London: Springer Science & Business Media, 2012.
- LEVANT, A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, p. 924–941, 2003.
- LEVANT, A.; LIVNE, M. Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 4, p. 1076–1080, April 2012.
- LI, J.; HONG, Z.; YANG, W. Application of variable structure theory to direct field-oriented induction motor speed controllers. In: IEEE. *Intelligent Systems and Applications, 2009. ISA 2009. International Workshop on*. Wuhan, 2009. p. 1–4.
- MELO, G. T.; CUNHA, J. P. V. S.; AMARAL, J. F. M. Controle a estrutura variável da vazão de uma bomba peristáltica. In: *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática*. Vitória – ES: [s.n.], 2016. p. 2390–2395.
- MORENO, J. A.; NEGRETE, D. Y.; TORRES-GONZÁLEZ, V.; FRIDMAN, L. Adaptive continuous twisting algorithm. *Int. J. Contr.*, v. 89, n. 9, p. 1798–1806, 2016.
- NUNES, E. V. L. *Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior com Estabilidade Global*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Maio 2004.
- OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S.; HSU, L. Adaptive sliding mode control for disturbances with unknown bounds. In: *Proc. 14<sup>th</sup> Int. Workshop on Variable Structure Sys*. Nanjing, Jiangsu, China: [s.n.], 2016. p. 59–64.
- OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S.; HSU, L. Adaptive sliding mode control based on the extended equivalent control concept for disturbances with unknown bounds. In: LI, S. et al. (Ed.). *Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 149–163.

OLIVEIRA, T. R.; ESTRADA, A.; FRIDMAN, L. M. Global exact differentiator based on higher-order sliding modes and dynamic gains for globally stable output-feedback control. In: *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*. Osaka, Japan: [s.n.], 2015. p. 4109–4114.

OLIVEIRA, T. R.; LEITE, A. C.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Overcoming limitations of uncalibrated robotics visual servoing by means of sliding mode control and switching monitoring scheme. *Asian J. Contr.*, v. 16, n. 3, p. 752–764, May 2014.

OLIVEIRA, T. R.; MELO, G. T.; HSU, L.; CUNHA, J. P. V. S. Monitoring functions applied to adaptive sliding mode control for disturbance rejection. In: *Proceedings of the 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*. Toulouse, France: [s.n.], 2017. p. 2739–2744.

OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; HSU, L. Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 55, n. 4, p. 1028–1034, 2010.

OLIVEIRA, T. R.; PEIXOTO, A. J.; NUNES, E. V. L.; HSU, L. Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes. *Int. J. Adaptive Contr. Signal Process.*, v. 21, n. 8/9, p. 692–707, 2007.

PLESTAN, F.; SHTESSEL, Y.; BREGEAULT, V.; POZNYAK, A. New methodologies for adaptive sliding mode control. *Int. J. Contr.*, v. 83, n. 9, p. 1907–1919, 2010.

SASTRY, S.; BODSON, M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.

SHTESSEL, Y.; EDWARDS, C.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A. *Sliding Mode Control and Observation*. New York: Springer, 2014.

SHTESSEL, Y. B.; MORENO, J. A.; FRIDMAN, L. M. Twisting sliding mode control with adaptation: Lyapunov design, methodology and application. *Automatica*, Elsevier, v. 75, p. 229–235, 2017.

SLOTINE, J.; LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

SLOTINE, J.-J. E. Sliding controller design for nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, v. 40, p. 421–434, 1984.

SLOTINE, J.-J. E.; SASTRY, S. S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *Int. J. Contr.*, v. 38, p. 465–492, 1983.

SOKAL, G. J. *Posicionamento Dinâmico Utilizando Controle a Estrutura Variável e Servovisão*. Dissertação (Mestrado), Rio de Janeiro, Julho 2010.

UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. London: Taylor & Francis Ltd., 1999.

UTKIN, V.; LEE, H. The chattering analysis. *Proc. Power Electronics and Motion Control Conf.*, Portoroz, Slovenia, p. 2014–2019, September 2006.

UTKIN, V. I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 22, n. 2, p. 212–222, 1977.

UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moscow: MIR Publishers, 1978.

UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

UTKIN, V. I.; POZNYAK, A. S. Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: equivalent control method. *Automatica*, v. 49, n. 1, p. 39–47, January 2013.

YAN, L.; HSU, L.; COSTA, R. R.; LIZARRALDE, F.. A variable structure model reference robust control without a prior knowledge of high frequency gain sign. *Automatica*, v. 44, n. 4, p. 1036–1044, 2008.

YAN, L.; HSU, L.; XIUXIA, S. A variable structure MRAC with expected transient and steady-state performance. *Automatica*, v. 42, n. 5, p. 805–813, May 2006.