



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

George Carneiro dos Santos

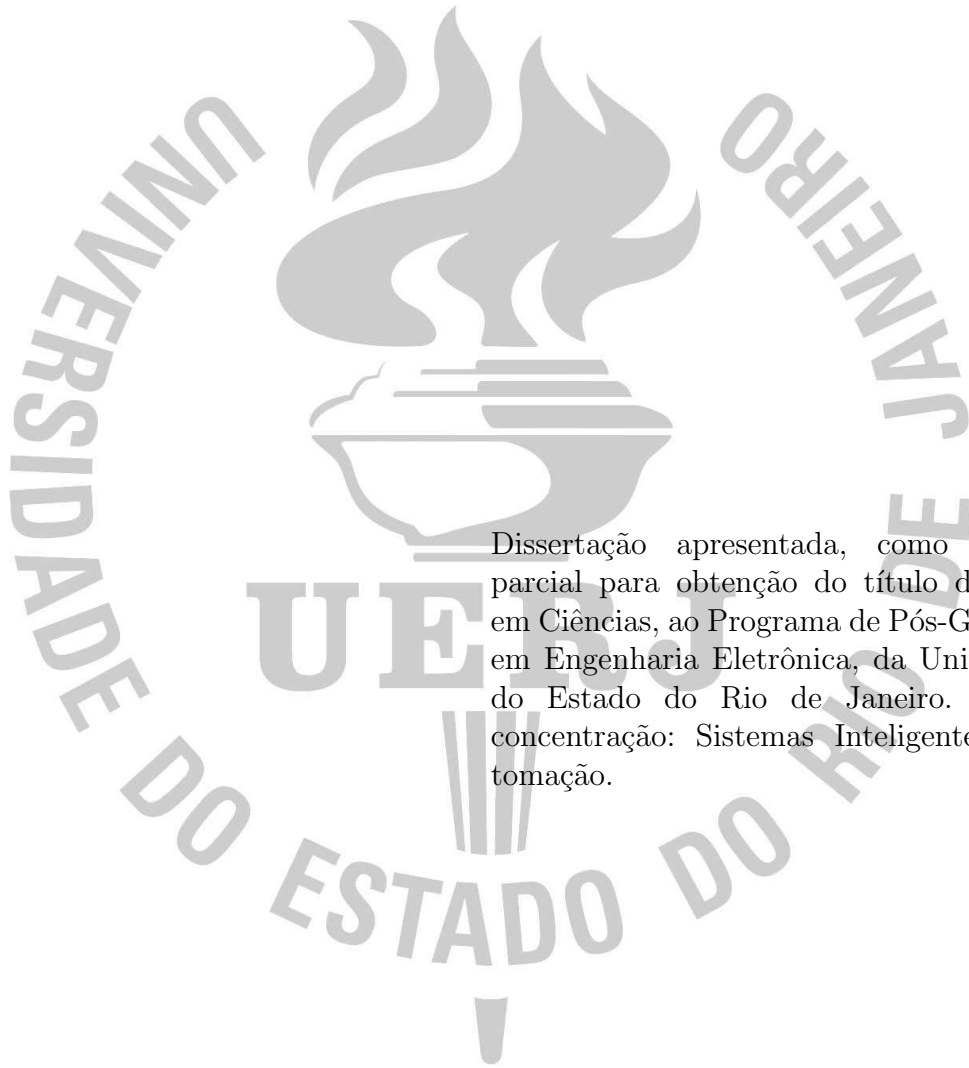
Controle Extremal com Atrasos Variantes no Tempo

Rio de Janeiro

2017

George Carneiro dos Santos

Controle Extremal com Atrasos Variantes no Tempo



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientadores: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira
Prof. Dr. Mamadou Diagne

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

S237 Santos, George Carneiro dos.
Controle extremal com atrasos variantes no tempo / George Carneiro dos Santos. – 2017.
60f.

Orientadores: Tiago Roux de Oliveira e Mamadou Diagne.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica - Teses. 2. Algoritmos - Teses. 3. Controladores programáveis - Teses. 4. Automação - Teses. I. Oliveira, Tiago Roux de. II. Diagne, Mamadou. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. IV. Título.

CDU 621.391

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

George Carneiro dos Santos

Controle Extremal com Atrasos Variantes no Tempo

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 18 de Agosto de 2017

Banca Examinadora:

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Américo Barbosa da Cunha Junior, D.Sc.

Instituto de Matemática - UERJ

Prof. Alessandro Rosa Lopes Zachi, D.Sc.

CEFET - RJ

Rio de Janeiro

2017

AGRADECIMENTO

Agradeço à UERJ, a seu corpo docente que abriram a janela pela qual hoje vislumbro um horizonte melhor, da confiança em mim depositada e do mérito e ética aqui presentes.

Ao meu orientador Prof. Tiago Roux, pela sua paciência, suporte e indicações no decorrer de todo esse caminho.

Ao Prof. Mamadou Diagne pelo auxílio no desenvolvimento da dissertação.

Agradeço a Deus e também a minha família e amigos pelo apoio e suporte nesta nova e difícil jornada de aprendizado.

RESUMO

SANTOS, George Carneiro dos. *Controle Extremal com Atrasos Variantes no Tempo*. 2017. 60f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2017.

O estudo na área de controle extremal é aplicável em situações nas quais existe um mapeamento não-linear que possuem um mínimo ou um máximo local, sendo o objetivo principal ajustar o sinal de entrada para que a saída convirja para um valor ótimo. Este trabalho apresenta um algoritmo de busca extremal baseado no método do Gradiente, usando um preditor com estimativa da segunda derivada do mapeamento do sistema denominada de Hessiana, para lidar com atrasos conhecidos arbitrários e variantes no tempo. A prova de estabilidade exponencial local e a convergência do sistema em malha fechada para uma pequena vizinhança do ponto do extremo são demonstradas rigorosamente. Este resultado é alcançado utilizando a transformação *backstepping* e a teoria de *averaging* em dimensões infinitas. Simulações numéricas são apresentadas para ilustrar o comportamento do sistema na presença de atrasos constantes e variantes no tempo. Desta forma, é observado que um atraso suficientemente grande na malha de controle extremal leva o sistema a instabilidade. A contribuição deste trabalho é desenvolver resultados ainda não existentes na literatura científica, introduzindo-se preditores para compensação de atrasos variantes no tempo e ilustrar a eficácia do controlador extremal proposto.

Palavras-chave: Atrasos; Sistemas adaptativos; Busca extremal; Preditor; Transformação *backstepping*; *Averaging* em dimensões infinitas.

ABSTRACT

Santos, George Carneiro dos. *Extremum Seeking with Time-Varying Delays*. 2017. 60f. Dissertation (Master Degree in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, University of the State of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2015.

This work presents a Gradient-based extremum seeking algorithm to deal with known and arbitrary actuator-sensor delays by using a predictor with a perturbation-based estimate of the Hessian. Local exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point are guaranteed. This result is achieved by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. Numerical simulations are given to illustrate the effectiveness of the proposed predictor based extremum seeking control for time-delay compensation.

Keywords: Time delays; Adaptive systems; Extremum seeking; Predictor; Backstepping transformation; Averaging in infinite dimensions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama de um sistema de busca extremal para mapeamento escalar baseado em perturbações senoidais.	16
Figura 2 - Algoritmo de busca extremal para mapeamento multivariável.	18
Figura 3 - Busca Extremal na presença de mapeamentos dinâmicos.	19
Figura 4 - Algoritmo de busca extremal baseado no método de Newton.	20
Figura 5 - Saída $y(t)$	21
Figura 6 - Entrada $\theta(t)$	22
Figura 7 - Lei de controle $U(t)$	22
Figura 8 - Saída $y(t)$ sob efeito de atraso constante e sem nenhum tipo de compensação.	23
Figura 9 - Diagrama de blocos básico do sistema de controle extremal com atrasos de saída constantes.	24
Figura 10- Parâmetro $\theta(t)$	36
Figura 11- Saída $y(t)$ com atraso constante.	36
Figura 12- Sinal de controle $U(t)$	37
Figura 13- Estimativa da Hessiana $\hat{H}(t)$	37
Figura 14- Saída $y(t)$ com atraso variável $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$	38
Figura 15- Diagrama de blocos básico do sistema de controle extremal com atrasos variantes no tempo.	39
Figura 16- Saída do sistema $y(t)$ sem atrasos.	52
Figura 17- Saída do sistema $y(t)$ na presença do atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$ s de entrada/saída sem qualquer compensação no atraso via preditor.	52
Figura 18- Saída do sistema $y(t)$ na presença do atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$ s de entrada/saída com a compensação baseada em preditor.	53
Figura 19- Parâmetro de entrada do sistema $\theta(t)$	53
Figura 20- Convergência da Hessiana $\hat{H}(t)$ atingindo o valor $H = -0.2$	54
Figura 21- Convergência do sinal de controle $U(t)$	54
Figura 22- Atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$	55
Figura 23- Derivada do atraso $\dot{D}(t) = -0.2 \sin(0.1t)$	55

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	BUSCA EXTREMAL	16
1.1	Busca Extremal para Mapeamentos Estáticos Escalares	16
1.2	Busca Extremal para Mapeamentos Estáticos Multivariáveis	18
1.3	Busca Extremal para Mapeamentos Estáticos Multivariáveis com Sinal de Dither Estocástico	19
1.4	Busca Extremal para Sistemas Dinâmicos	19
1.5	Algoritmo de Busca Extremal do tipo Newton para Mapeamentos Estáticos	20
1.6	Simulações	21
2	REALIMENTAÇÃO BASEADA EM PREDITOR PARA BUSCA EXTREMAL COM ATRASOS CONSTANTES	24
2.1	Sinais e Sistema	25
2.2	Preditor com estimativa de Hessiana	26
2.3	Análise de Estabilidade	27
2.4	Simulações	35
3	REALIMENTAÇÃO BASEADA EM PREDITOR PARA BUSCA EXTREMAL COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO	39
3.1	Sinais do Sistema	40
3.2	Preditor com estimativa de Hessiana	41
3.3	Implementação / Aproximação Numérica do Preditor para Atrasos Vari- antes no Tempo	42
3.3.1	Primeiro Método	43
3.3.2	Segundo Método	44
3.4	Análise de Estabilidade	45
3.5	Resultados da Simulação	51
	CONCLUSÕES	56

REFERÊNCIAS.....	58
-------------------------	-----------

INTRODUÇÃO

Controle extremal, ou *Extremum Seeking* (ES) é um método de controle adaptativo, que não se encaixa no paradigma clássico de modelo de referência, que lida, por exemplo, com o problema de estabilização do erro entre a saída medida e uma trajetória de referência desejada. Esse método não requer conhecimento explícito da planta nem da função que se deseja otimizar, desde que se saiba que a mesma possui um extremo. Como será visto adiante, esse é um método de controle que vem ganhando cada vez mais atenção na literatura. (KRSTIC, 2009)

Extremum seeking é aplicável em situações onde existe uma não linearidade no problemas de controle, e a mesma possui um mínimo ou máximo local. Por exemplo, a não linearidade pode estar na planta, ou pode ser uma não linearidade física. Consequentemente, pode-se usar *extremum seeking* tanto para ajustar o sinal de entrada para obter-se um valor ótimo na saída, quanto para ajustar os parâmetros de uma lei de controle ótimo.

O objetivo deste trabalho é estudar algumas técnicas de controle extremal na presença de atraso, analisar o seu comportamento e obter resultados ainda não existentes na literatura científica. Para isso, são realizadas simulações numéricas, assim como uma análise da estabilidade matemática rigorosa. Ao final, o trabalho contribuirá com uma proposta de adaptação dos esquemas de controle estudados, visando melhorar o desempenho dos sistemas de controle extremal com atrasos. A proposta é compreender os efeitos da presença de atrasos de medição e/ou atuação constantes e variantes no tempo quando estes são inseridos em um mapeamento estático escalar. Inicialmente, são apresentados resultados indicando que um pequeno atraso na malha de controle extremal pode levar o sistema a instabilidade. Posteriormente, são propostas estratégias baseadas em preditores adaptativos que contornarão o problema.

Breve Histórico

Em Leblanc (LEBLANC, 1922) foi proposto um mecanismo de controle que procurava manter uma maior transferência de potência, a partir de uma linha de transmissão a um bonde elétrico através do controle extremal. Durante a segunda guerra mundial, houve uma considerável pesquisa nesta mesma área na Rússia.

A primeira publicação na literatura inglesa detalhando um algoritmo de controle

extremal e seu desempenho foi no livro (DRAPER; LI, 1951). Nele foi proposto como otimizar um motor de combustão interna. Após essa publicação, surgiram várias aplicações do controle extremal em motores de combustão interna.

Controle extremal assim como outras formas de controle (adaptativo, por exemplo) tornaram-se um importante tópico de pesquisa durante as décadas de 1950 e 1960. Sendo que grande parte dos resultados obtidos nessa época eram focados na descrição dos algoritmos e aplicações particulares (AMINDE, 2013).

Posteriormente, o estudo a respeito de controle extremal continuou entre as décadas de 1970 à 2000, mas o principal foco passou para a busca de novas estratégias de controle adaptativo de maior complexidade em relação a critérios de estabilidade e desempenho do sistema de controle (TAN et al., 2010). Até 1990, a maioria dos algoritmos usava excitação periódica para estimar o valor do gradiente da função desconhecida do problema de otimização em tempo real. Um novo interesse na teoria de controle extremal surgiu após a publicação da prova rigorosa de estabilidade do sistema clássico apresentada em (KRSTIĆ; WANG, 2000).

O controle extremal tem se tornado uma área de grande importância na teoria de controle devido à crescente necessidade de otimizar plantas de modo a reduzir os custos operacionais e adequar as especificações do produto (ADETOLA; DEHAAN; GUAY, 2004). Sendo assim, os objetivos dos projetistas são de projetar melhores controladores que garantam um ótimo desempenho da planta. Por isso, em (ASTROM; B.WITTENMARK, 2005) o controle extremal já era considerado uma das áreas mais promissoras do controle adaptativo. Esta previsão vem se confirmando. Na última década, por exemplo, o número de publicações sobre controle extremal cresceu aproximadamente oito vezes em relação à década anterior (TAN et al., 2010).

O controlador de busca extremal baseado em perturbação senoidal ou *dither* (ARIYUR; KRSTIC, 2003) usa um filtro passa-alta na saída da planta e uma pequena perturbação senoidal na entrada da mesma para estimar o gradiente da função objetivo. Este método se caracteriza pela sua simplicidade. Entretanto, apenas propriedades de estabilidade local puderam ser garantidas, assumindo-se acesso a todos estados do sistema. A possibilidade de se lidar com extremos locais foi recentemente abordada em (KRSTIĆ; WANG, 2000). Em (TAN; NEŠIĆ; MAREELS, 2006),(TAN; NEŠIĆ; MAREELS, 2009),(TAN et al., 2010), sob as mesmas hipóteses dos casos anteriores e variando-se a amplitude da

perturbação, a convergência semi-global na presença de máximo local foi obtida, porém, a taxa de convergência diminui com o aumento do domínio de atração.

Um estudo de diferentes sinais de perturbação pode ser encontrado em (TAN; NEŠIĆ; MAREELS, 2008), onde uma análise matemática e resultados de simulações ilustram que a forma dos sinais de perturbação influenciam no desempenho do controlador extremal em termos de precisão, velocidade e domínio de convergência.

Em (OLIVEIRA; HSU; PEIXOTO, 2011), o controle extremal foi considerado em um problema de controle não-linear dependente do estado e do ganho de alta frequência (*HFG - High Frequency Gain*) dependente do estado que troca de sinal (também denominado de direção de controle) em torno do extremo desejado.

Aplicações recentes em Busca Extremal

Em (NOGUEIRA, 2012) foi estudada a possibilidade de usar o método de ES para otimizar a produção de petróleo em poços que operam por elevação artificial através da injeção de gás *lift*. O estudo seria uma alternativa aos métodos existentes hoje em dia, que em geral são lentos e não automatizados. O objetivo seria encontrar e manter o sistema em malha fechada em torno do ponto ótimo da curva de produção de petróleo, o que aumenta o Valor Presente Líquido (VPL) do sistema e os lucros de operação. A modelagem deste problema envolve várias incertezas e o controle por busca extremal aparece como uma boa alternativa, já que se trata de um controle adaptativo que não necessita do conhecimento explícito da planta.

Nos problemas de freios *anti-lock breaking* (ABS) usando ES, o coeficiente de força de fricção alcança valor máximo para um valor pequeno não-nulo de coeficiente de deslizamento da roda. Essa função varia dependendo do asfalto onde o carro se encontra, exigindo que o sistema se adapte a diferente tipos de terreno. Sendo assim, esse é um problema onde existe um ponto ótimo de entrada numa função que se deseja maximizar e podemos usar controle por busca extremal para projetar controladores que alcançarão esse valor independentemente do conhecimento do terreno (ARIYUR; KRSTIC, 2003).

Além disso, pode-se citar outras aplicações de ES, tais como: a otimização de formação de aeronaves descrito no livro (ARIYUR; KRSTIC, 2003) e também a otimização de biorreatores em (HSIN-HSIUNG; KRSTIC; BASTIN, 1999). Em (CHU; SU; HU, 1993), os autores mostraram ser possível usar esse algoritmo para diminuir o impacto em válvulas

eletromecânicas em motores de combustão. Em (AMINDE, 2013) uma nova proposta de controle extremal via funções de monitoração foi desenvolvida para a maximização de potência em um painel solar.

Aplicações em Busca Extremal com Atraso

Sistemas robóticos, processos de usinagem, redes de comunicação de dados são exemplos de processos que partilham de atrasos que interferem tanto na estabilidade quanto no desempenho desses sistemas. Uma classe particularmente importante de sistemas é a que envolve processos industriais térmicos compreendendo, por exemplo, fornos usados em indústrias siderúrgicas (TEIXEIRA; JOTA; TEIXEIRA, 2007) ou para tratamento térmico de metais (CHU; SU; HU, 1993). Essa classe é constituída por sistemas que, em geral, apresentam grande consumo de energia e a presença de atrasos significativos pode resultar em deterioração de desempenho. Conseqüentemente, a investigação de sistemas sujeitos a atrasos têm recebido grande atenção nos últimos anos, como pode ser observado em vários livros nessa área. Veja, por exemplo, os trabalhos de (DUGARD; VERRIEST, 1997), (MAHMOUD, 2000), (NICULESCU, 2001), (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003), (TAN; NEŠIĆ; MAREELS, 2006).

Em geral, os atrasos podem ocorrer devido a três razões distintas: propriedade intrínseca do sistema, consequência (não desejada) da ação de controle, ou advém da introdução intencional de atrasos no sistema de controle. Atrasos podem ser fixos ou variantes no tempo, e podem ocorrer, nos estados do sistema, nas entradas do processo, ou ainda, nas saídas do processo. Mais exemplos de sistemas com atrasos podem ser encontrados em reatores químicos e nucleares, controle de curso de navio, laminação de metais, sistemas de tráfego de veículos, sistemas de teleoperação, redes de comunicação de dados, sistemas biológicos, como por exemplo, o processo de maturação das células do sangue, modelo da epidemia de malária, interação neuronal, etc (NICULESCU, 2001). Vale lembrar que em todas as aplicações descritas acima a estratégia de controle extremal poderia ser aplicada como ferramenta de projeto. Contudo, como observado em (OLIVEIRA; KRSTIĆ; TSUBAKINO, 2017) um pequeno atraso na malha de controle poderia levar o sistema à instabilidade.

Objetivo principal

Assim sendo, nosso objetivo principal é:

- Estudar algumas das técnicas existentes de controle extremal na presença de atraso.
- Introduzir a realimentação baseada em preditores para compensação de atrasos de medição/atuação constantes e variantes no tempo.
- Generalizar os resultados de (OLIVEIRA; KRSTIĆ; TSUBAKINO, 2017) originalmente propostos considerando atrasos constantes em ES para o caso de atrasos variantes no tempo.

Metodologia

A metodologia para a demonstração destes resultados segue os passos:

- Representar por um sistema de equações diferenciais parciais (*Partial Differential Equation - PDE*) de transporte;
- Encontrar as equações de malha fechada para controle extremal com atraso;
- Encontrar o modelo médio do sistema em malha fechada ;
- Aplicar da *Transformação Backstepping* de forma a levar o sistema original a outro sistema de equações conveniente;
- Funcional de Lyapunov-Krasovskii;
- Estimar Exponencial da norma de L_2 para o sistema médio;
- Invocar o Teorema da Média para concluir a convergência assintótica para vizinhança do extremo.

Notações e Normas

A norma L_2 de um vetor de estado $X(t)$ de dimensão finita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é denotada por barras simples, $|X(t)|$. Em contraste, as normas de funções espaciais (de x) são denotadas por barras duplas. Por padrão, $\|\cdot\|$ denota

a norma espacial $L_2[0, D]$, *i.e.*, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2[0, D]}$. Como a variável de estado $u(x, t)$ da equação diferencial parcial (EDP) é uma função de dois argumentos, deve-se dar ênfase que levando em conta a norma de uma das variáveis faz-se à norma uma função da outra variável, como adotado em (KRSTIC, 2009). Por exemplo, a norma $L_2[0, D]$ de $u(x, t)$ em $x \in [0, D]$ é $\|u(t)\| = \left(\int_0^D u^2(x, t) dx\right)^{1/2}$. A derivada parcial de $u(x, t)$ são denotadas por $u_t(x, t)$ e $u_x(x, t)$ ou, ocasionalmente, por $\partial_t u_{av}(x, t)$ e $\partial_x u_{av}(x, t)$ para se referir ao operador do seu sinal médio $u_{av}(x, t)$. Agora, considerando um sistema não linear genérico $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t, x, \epsilon)$ é periódico em t com período T , isto é, $f(t + T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$. Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por $\dot{x}_{av} = f_{av}(x_{av})$, com $f_{av}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$, onde $x_{av}(t)$ denota a versão média do estado $x(t)$ (KHALIL, 2002). Como definido em (KHALIL, 2002), uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é dita de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ dentro do intervalo $[t_1, t_2]$ se existem constantes positivas k e ϵ^* tais que $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon^*]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Em alguns casos seremos capazes de fornecer estimativas para as constantes k e ϵ^* e portanto quantificar a correspondente aproximação $\mathcal{O}(\epsilon)$. Caso contrário, estaremos satisfeitos por $\mathcal{O}(\epsilon)$ sendo uma “ordem da relação de magnitude”, válida para “ ϵ suficientemente pequeno”.

Desigualdades Importantes

Exemplificando duas desigualdades elementares bem conhecidas, que podem ser encontradas em (KRSTIC, 2009):

– *Desigualdade de Young (versão mais elementar)*

$$ab \leq \frac{\gamma}{2} a^2 + \frac{1}{2\gamma} b^2 \quad \forall \gamma > 0. \quad (0.1)$$

– *Desigualdade de Cauchy-Schwartz*

$$\int_0^1 u(x)w(x)dx \leq \left(\int_0^1 u(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 w(x)^2 dx\right)^{1/2}. \quad (0.2)$$

Teorema da Média para Equações Diferenciais Funcionais

Considerando um sistema com atraso (HALE; LUNEL, 1990), (LEHMAN, 2002):

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{t}{\epsilon}, x_t\right), \quad \text{para } t > 0, \quad (0.3)$$

onde ϵ é um parâmetro real, $x_t(\Theta) = x(t + \Theta)$ para $-r \leq \Theta \leq 0$, e $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um funcional contínuo de uma vizinhança Ω de 0 do espaço de Banach $X = C([-r, 0]; \mathbb{R}^n)$ de funções contínuas de $[-r, 0]$ em \mathbb{R}^n . Assume-se que $f(t, \varphi)$ é periódico em t uniformemente com respeito à φ em subconjuntos compactos de Ω e que f tem uma derivada de Fréchet contínua $\partial(f, \varphi)/\partial\varphi x$ em φ para $\mathbb{R} \times \Omega$. Se $y = y_0 \in \Omega$ é um equilíbrio exponencialmente estável para o sistema médio $\dot{y}(t) = f_0(y_t)$, para $t > 0$, onde $f_0(\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T f(s, \varphi) ds$, então, para algum $\epsilon_0 > 0$ e $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, existe uma única solução periódica $t \mapsto x^*(t, \epsilon)$ de (0.3) com as propriedades de ser contínua em t e ϵ , satisfazendo $|x^*(t, \epsilon) - y_0| \leq \mathcal{O}(\epsilon)$, para $t \in \mathbb{R}$, e tal que exista $\rho > 0$ de modo que, se $x(\cdot; \rho)$ é uma solução para (0.3) com $x(s) = \varphi$ e $|\varphi - y_0| < \rho$, então $|x(t) - x^*(t, \epsilon)| \leq Ce^{-\gamma(t-s)}$, para $C > 0$ e $\gamma > 0$.

Organização dos Capítulos

No capítulo 1 foi apresentado uma introdução com a proposta do trabalho que é o estudo de controle extremal com atrasos variantes no tempo, juntamente com um breve histórico, objetivos, desigualdades importantes e aplicações de Busca Extremal com e sem atrasos.

No capítulo 2 será apresentado o caso mais simples de Busca Extremal para mapeamentos escalares estáticos e posteriormente variações destes modelos que admitem mapeamentos estáticos multivariáveis, mapeamentos estáticos com sinais dithers estocásticos, mapeamentos para sistemas dinâmicos e por fim busca extremal do tipo Newton.

No capítulo 3 será apresentado a busca extremal para mapeamentos estáticos escalares com atraso constante e a importância da compensação baseada em preditores com estimativas da Hessiana.

No capítulo 4, que é a contribuição principal desta dissertação, passou-se a considerar atrasos variantes no tempo. Conseqüentemente, uma nova classe de preditores para compensação de atrasos variantes no tempo foi incorporada no esquema de controle extremal clássico.

1 BUSCA EXTREMAL

1.1 Busca Extremal para Mapeamentos Estáticos Escalares

Para entender a ideia básica de busca extremal, é melhor primeiro considerar o caso simples de um mapeamento estático na forma quadrática com uma única entrada e uma única saída, como mostrado na Figura 1.

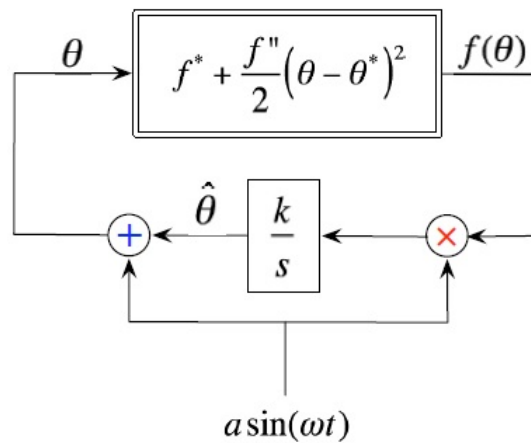


Figura 1 - Diagrama de um sistema de busca extremal para mapeamento escalar baseado em perturbações senoidais.

Três tipos de variáveis “ θ ” aparecem na Figura 1:

- θ^* é o valor desconhecido da entrada que leva a saída do mapeamento ao extremo f^*
- $\hat{\theta}(t)$ é a estimativa em tempo real de θ^*
- $\theta(t)$ é a entrada verdadeira do mapeamento.

A entrada real $\theta(t)$ é baseada na estimativa de $\hat{\theta}(t)$, mas é perturbada por um sinal $a \sin(\omega t)$ com o propósito de estimar o gradiente desconhecido $f''(\theta - \theta^*)$ do mapeamento $f(\theta) = f^* + \frac{f''}{2}(\theta - \theta^*)^2$, sendo f'' sua Hessiana. Em problemas de maximização, a Hessiana deve ser menor que zero e no de minimização a Hessiana deve ser maior que zero. O sinal do ganho k deve ser escolhido sempre tal que $k f'' < 0$. A senoide foi escolhida para o sinal de perturbação, porém muitos outros tipos de perturbações persistentes, de ondas quadradas a ruídos estocásticos, poderiam ser utilizados em vez da senoide, desde que sejam de média

nula. A estimativa $\hat{\theta}(t)$ é gerada pelo integrador com função de transferência k/s cujo o ganho de adaptação k ajusta a velocidade de estimação.

O objetivo do algoritmo de ES é fazer o erro entre a estimativa $\hat{\theta}(t)$ e θ^* desconhecido, definido como

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (1.1)$$

convergir para zero ou para algum conjunto residual pequeno, onde $f(\theta) = f^* + f''(\theta - \theta^*)^2$. Baseado na Figura 1, a estimativa é governada pela equação diferencial $\dot{\hat{\theta}} = ka \sin(\omega t) f(\theta)$, o que significa que o erro da estimativa é governado por

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = ka \sin(\omega t) \left[f^* + \frac{f''}{2} (\tilde{\theta} + a \sin(\omega t))^2 \right] \quad (1.2)$$

Expandindo o lado direito da equação (1.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = & \underbrace{ka f^* \sin(\omega t)}_{\text{média}=0} + \underbrace{ka^3 \frac{f''}{2} \sin^3(\omega t)}_{\text{média}=0} + \underbrace{ka \frac{f''}{2} \sin(\omega t)}_{\text{rápido, média}=0} \underbrace{\tilde{\theta}(t)^2}_{\text{lento}} \\ & + \underbrace{ka^2 f'' \sin^2(\omega t)}_{\text{rápido, média}=1/2} \underbrace{\tilde{\theta}(t)}_{\text{lento}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Um procedimento teórico rigoroso utilizando a teoria da média permite substituir o sinal senoidal acima por suas médias, resultando no seguinte “sistema médio”:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}}{dt} = \overbrace{\frac{k f'' a^2}{2}}^{<0} \tilde{\theta}_{av} \quad (1.4)$$

que é exponencialmente estável. A teoria da média (KHALIL, 2002) garante que existe ω suficientemente grande tal que, se a estimativa inicial $\hat{\theta}(0)$ é suficientemente próxima de θ^* , tem-se que

$$|\theta(t) - \theta^*| \leq |\theta(0) - \theta^*| e^{\frac{k f'' a^2}{2} t} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) + a. \quad \forall t \geq 0 \quad (1.5)$$

Para o projetista, a inequação (1.5) garante que, se a é escolhido suficientemente pequeno e ω é escolhido suficientemente grande, a entrada θ converge exponencialmente para um conjunto residual pequeno próximo de θ^* desconhecido e, conseqüentemente, a saída $f(\theta(t))$ converge para a vizinhança da saída ótima f^* , se f for contínua.

1.2 Busca Extremal para Mapeamentos Estáticos Multivariáveis

Para mapeamentos estáticos multivariáveis (múltiplas entradas), o ES se estende de uma maneira fácil a partir do caso com entrada simples mostrado na Figura 1, assim como mostrado na Figura 2.

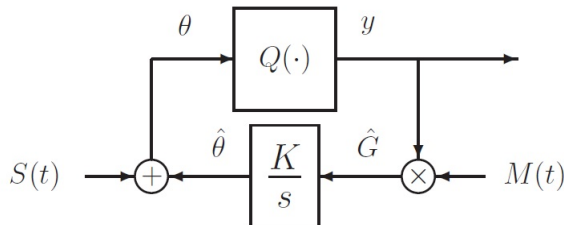


Figura 2 - Algoritmo de busca extremal para mapeamento multivariável.

O algoritmo mede o sinal escalar $y(t) = Q(\theta(t))$, onde $Q(\cdot)$ é um mapa desconhecido no qual a entrada é o vetor $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$, sendo $\theta \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$. O gradiente é estimado com a ajuda dos sinais (GHAFFARI; KRSTIĆ; NEŠIĆ, 2012):

$$S(t) = [a_1 \sin(\omega_1 t) \cdots a_n \sin(\omega_n t)]^T \quad (1.6)$$

$$M(t) = \left[\frac{2}{a_1} \sin(\omega_1 t) \cdots \frac{2}{a_n} \sin(\omega_n t) \right]^T \quad (1.7)$$

com amplitudes de perturbação diferentes de zero e com a matriz de ganhos K que é diagonal. Para garantir a convergência, o projetista deve escolher $\omega_i \neq \omega_j$. Essa é a condição chave que diferencia o caso multivariável do caso de uma única entrada. Além disso, por simplicidade, na análise de convergência o projetista deve escolher ω_i/ω_j como um valor racional e $\omega_i + \omega_j \neq \omega_k$ para i, j e k distintos.

Se o mapa desconhecido é quadrático, dado por $Q(\theta) = Q^* + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T H(\theta - \theta^*)$, o sistema médio é

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av} = KH\tilde{\theta}_{av}, \quad H = \text{Hessiana}. \quad (1.8)$$

Por exemplo, se um mapeamento genérico $Q(\cdot)$ tem um ponto de máximo (o que implica $H = H^T < 0$) tal que seja localmente quadrático, pode-se escolher os elementos da matriz diagonal K como positivos para que o algoritmo de ES seja localmente convergente na vizinhança desse ponto de extremo. Contudo, a taxa de convergência depende da Hessiana H que é desconhecida. Essa fraqueza do algoritmo de ES baseado no

método gradiente é removida com o algoritmo ES do tipo Newton que será apresentado posteriormente.

1.3 Busca Extremal para Mapeamentos Estáticos Multivariáveis com Sinal de Dither Estocástico

A versão estocástica (LIU; KRSTIC, 2012) do algoritmo da Figura 2 também existe. Neste caso $S(t)$ e $M(t)$ apresentados na seção anterior são substituídos por

$$S(\eta(t)) = [a_1 \sin(\eta_1(t)), \dots, a_n \sin(\eta_n(t))]^T \quad (1.9)$$

$$M(\eta(t)) = \left[\frac{2}{a_1(1 - e^{a_1^2})} \sin(\eta_1(t)), \dots, \frac{2}{a_n(1 - e^{a_n^2})} \sin(\eta_n(t)) \right]^T \quad (1.10)$$

onde $\eta_i = \frac{q_i \sqrt{\varepsilon_i}}{\varepsilon_i s + 1} [\dot{W}_i]$ e \dot{W}_i são processos de ruídos brancos independentes de intensidade unitária.

1.4 Busca Extremal para Sistemas Dinâmicos

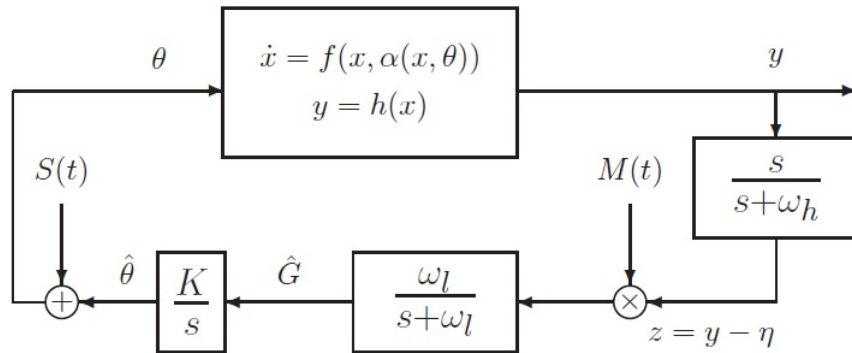


Figura 3 - Busca Extremal na presença de mapeamentos dinâmicos.

O ES se estende de uma maneira direta do caso de mapeamento estático para o caso dinâmico (KRSTIĆ; WANG, 2000), sendo estas dinâmicas estáveis e escolhendo-se os parâmetros do controlador ES de modo que a dinâmica do algoritmo de controle seja mais lenta do que a da planta. O diagrama de blocos do algoritmo é mostrado na Figura 3. As condições técnicas para convergência na presença de dinâmica é que o equilíbrio $x = l(\theta)$ do sistema $\dot{x} = f(x, \alpha(x, \theta))$, no qual $\alpha(x, \theta)$ é a lei de controle da realimentação interna, seja uniformemente exponencialmente localmente estável em θ e que, dado a saída do mapa

$y = h(x)$, exista pelo menos um $\theta^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{\partial}{\partial \theta}(h \circ l)(\theta^*) = 0$ e $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(h \circ l)(\theta^*) = H$, com $H = H^T$.

A análise da estabilidade na presença de dinâmica emprega tanto teoremas da média quanto resultados de perturbação singular, nesta ordem. Embora a análise teórica seja demasiadamente longa para ser apresentada aqui, ela garante que a dinâmica da planta esteja em uma escala de tempo rápida, as perturbações numa escala de tempo média, e o algoritmo de ES esteja numa escala de tempo lenta.

1.5 Algoritmo de Busca Extremal do tipo Newton para Mapeamentos Estáticos

A versão Newton (GHAFFARI; KRSTIĆ; NEŠIĆ, 2012) do algoritmo de ES, mostrado na Figura 4, assegura que a taxa de convergência seja atribuída pelo projetista, sendo independente da Hessiana desconhecida do mapeamento considerado. Os elementos da matriz de demodulação $N(t)$ para a geração da estimativa de Hessiana são dados por

$$N_{ii}(t) = \frac{16}{a_i^2} \left(\sin^2(\omega_i t) - \frac{1}{2} \right), \quad N_{ij}(t) = \frac{4}{a_i a_j} \sin(\omega_i t) \sin(\omega_j t). \quad (1.11)$$

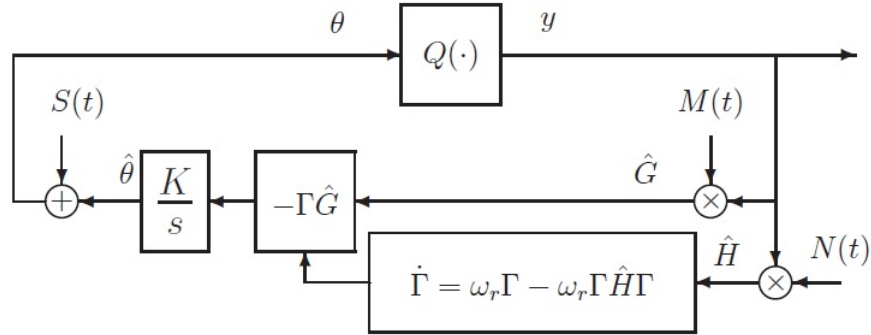


Figura 4 - Algoritmo de busca extremal baseado no método de Newton.

Para um mapeamento quadrático, os sistemas de média das variáveis de erro $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta^*$ e $\tilde{\Gamma} = \Gamma - H^{-1}$ são:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}}{dt} = -K \underbrace{\tilde{\Gamma}_{av} H \tilde{\theta}_{av}}_{\text{quadrático}}, \quad \frac{d\tilde{\Gamma}_{av}}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av} - \omega_r \underbrace{\tilde{\Gamma}_{av} H \tilde{\Gamma}_{av}}_{\text{quadrático}}. \quad (1.12)$$

Uma vez que os autovalores são determinados por K e ω_r , e são portanto independentes de H desconhecido, a taxa de convergência local é atribuível ao projetista (GHAFFARI; KRSTIĆ; NEŠIĆ, 2012).

No capítulo a seguir, será apresentado os primeiros resultados da literatura com demonstrações rigorosas que consideram ES na presença de atrasos (OLIVEIRA; KRSTIĆ; TSUBAKINO, 2017).

1.6 Simulações

Considere o seguinte mapeamento quadrático estático

$$Q(\theta) = 5 - 0.1(\theta - 2)^2. \quad (1.13)$$

De acordo com (1.13), o ponto de extremo é $(\theta^*, y^*) = (2, 5)$. Para os testes utilizou-se os parâmetros: $a = 0.2$, $\omega = 10$, $k = 0.2$, $\theta(0) = 0$ e $H = -0.2$. O método numérico utilizado nas simulações foi o de Euler, com passo de integração de 10^{-4} . Na Figura 5, a saída sem atrasos converge para o ponto no extremo y^* . Na Figura 6 é exibida a entrada $\theta(t)$ do sistema convergindo para o ponto de extremo de θ^* . Na Figura 7 é exibido o resultado do sinal de controle do sistema convergindo para a origem.

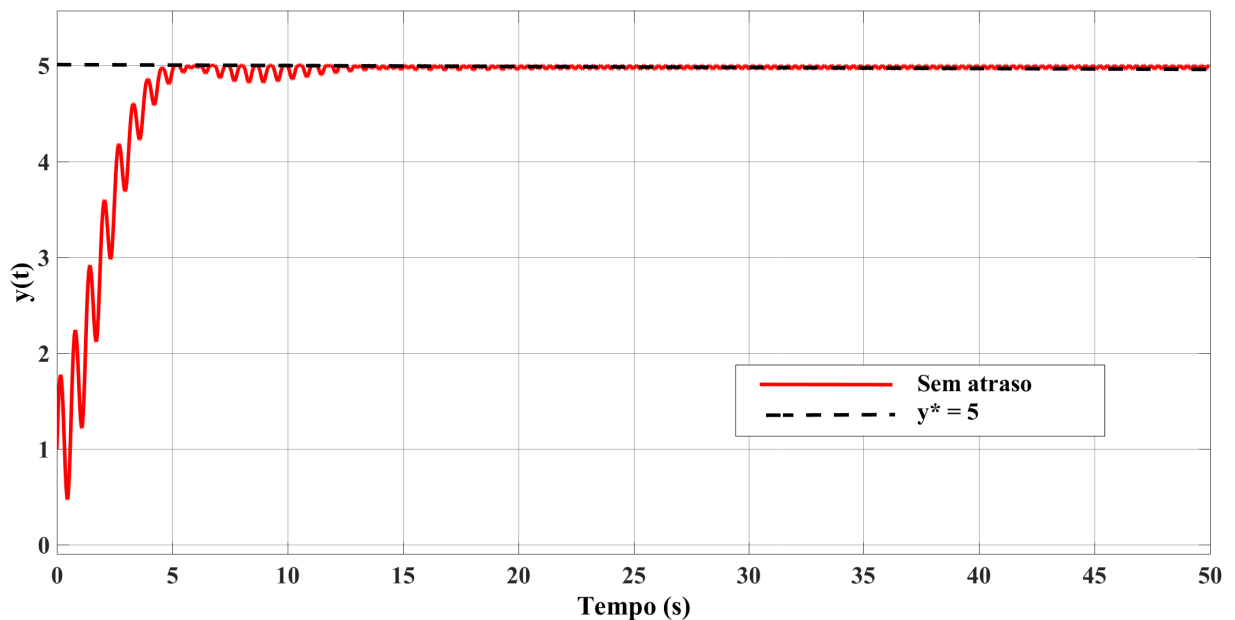
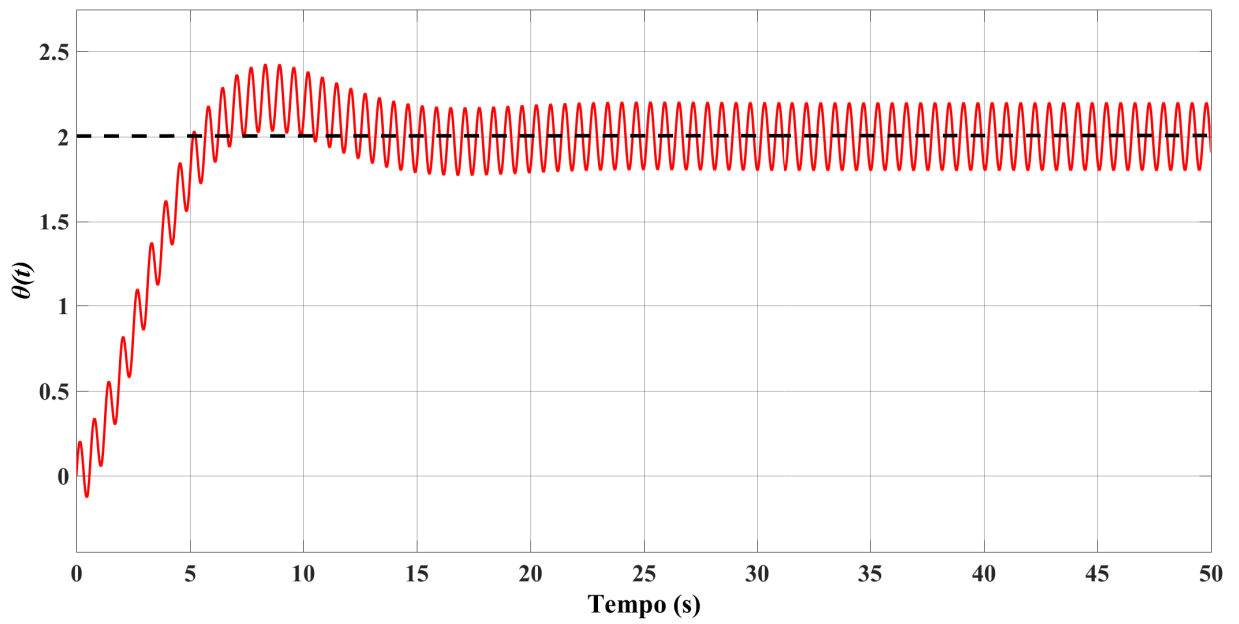
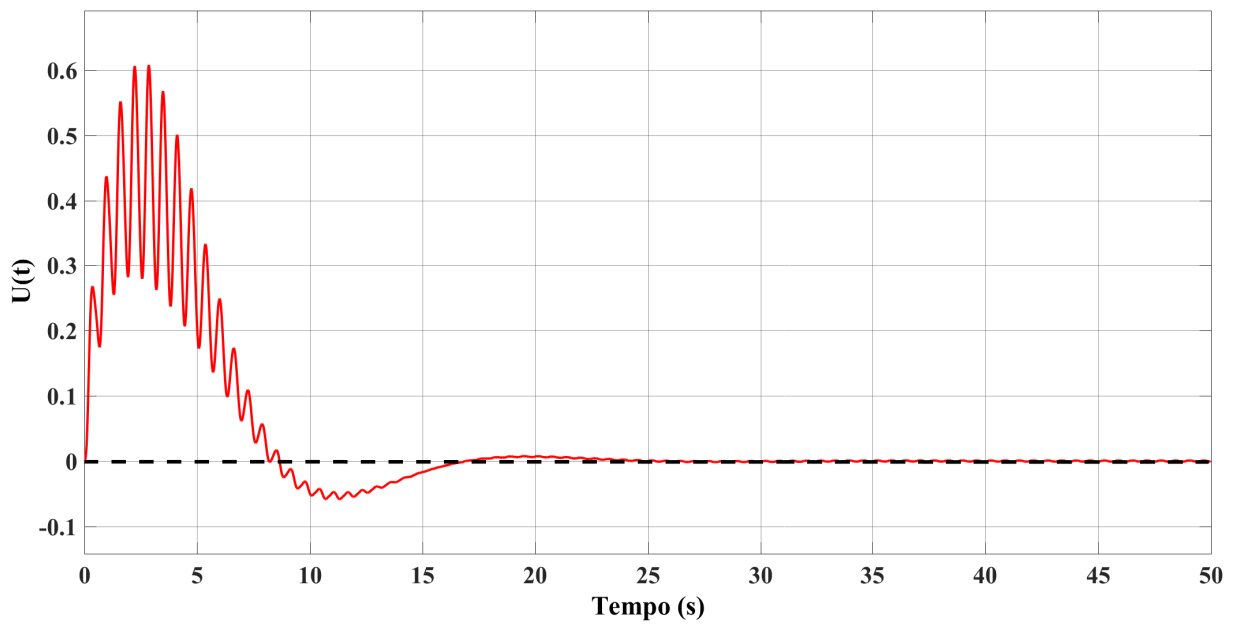


Figura 5 - Saída $y(t)$.

Figura 6 - Entrada $\theta(t)$.Figura 7 - Lei de controle $U(t)$.

Ao considerar um atraso na saída denotado por $D = 5$ s no mapeamento estático escalar (1.13), a saída $y(t)$ do sistema que antes tendia para y^* agora diverge do seu valor ótimo. A simulação do sinal de saída que considera o atraso é ilustrada na Figura 8.

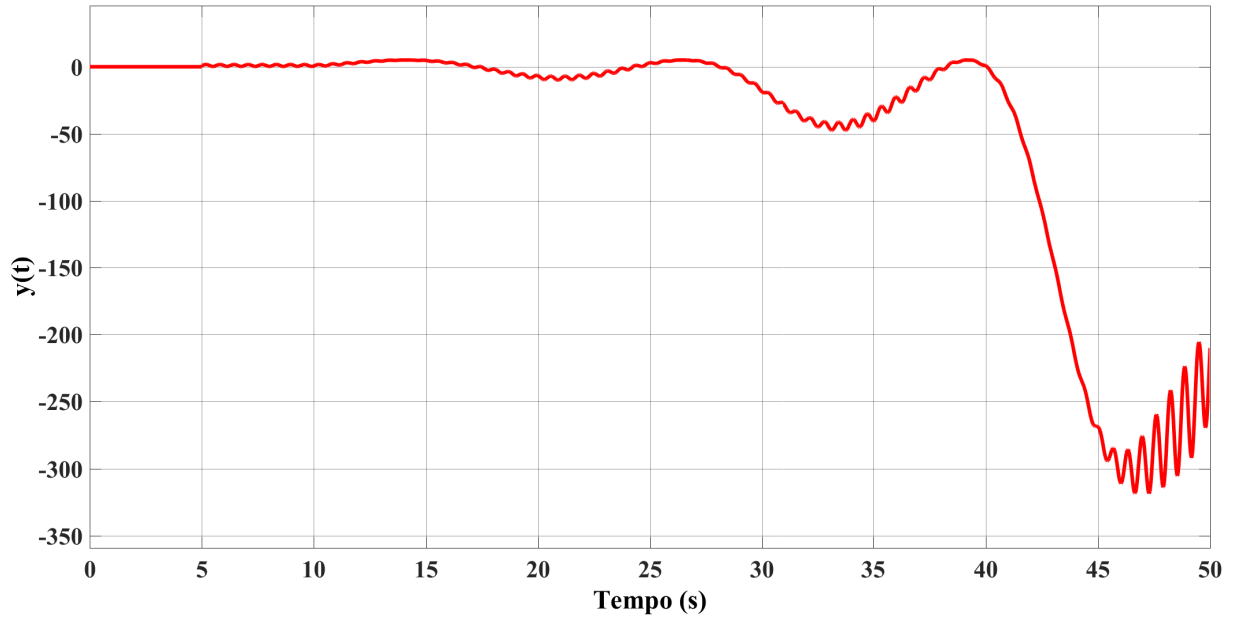


Figura 8 - Saída $y(t)$ sob efeito de atraso constante e sem nenhum tipo de compensação.

2 REALIMENTAÇÃO BASEADA EM PREDITOR PARA BUSCA EXTREMAL COM ATRASOS CONSTANTES

O controle por busca extremal escalar considera aplicações em que o objetivo é maximizar (ou minimizar) a saída $y \in \mathbb{R}$ de um mapeamento estático não linear desconhecido $Q(\theta)$, fazendo-se variar a entrada $\theta \in \mathbb{R}$.

Aqui, adicionalmente assumimos que existe *um atraso constante e conhecido* $D \geq 0$ no caminho de atuação ou medição do sistema de tal modo que a saída medida é dada por (OLIVEIRA; KRSTIĆ, 2015a):

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (2.1)$$

Para maior clareza de notação, será suposto que o nosso sistema tem atraso apenas de saída conforme o diagrama de blocos da Figura 9.

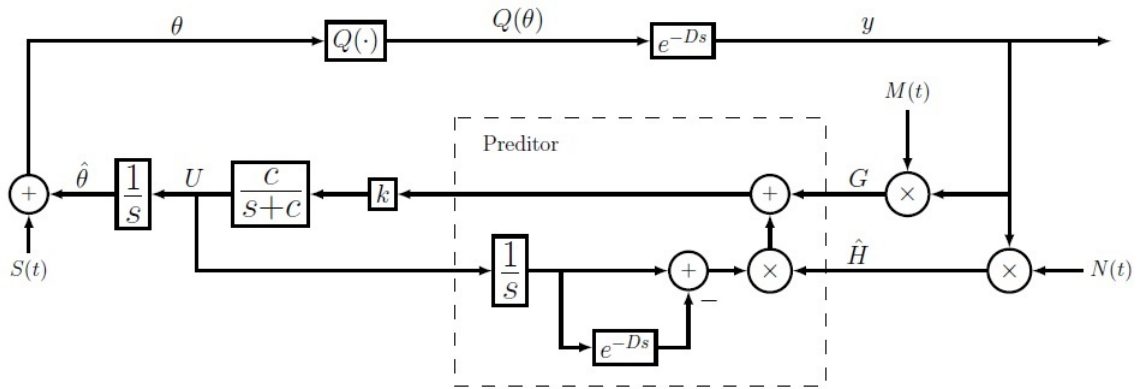


Figura 9 - Diagrama de blocos básico do sistema de controle extremal com atrasos de saída constantes.

No entanto, os resultados deste trabalho podem ser diretamente estendidos para o caso de entrada U com atraso constante, uma vez que qualquer atraso de entrada pode ser movido para a saída do mapeamento estático.

Quando os atrasos de entrada D_{in} e os atrasos de saída D_{out} ocorrem simultaneamente, estes também podem ser manipulados assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado será $D = D_{in} + D_{out}$, com $D_{in}, D_{out} \geq 0$. Sem perda de generalidade, considera-se o problema de busca por um máximo y^* é atingido quando θ é feito igual a θ^* . Assume-se também que o mapeamento não-linear é quadrático, isto é,

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (2.2)$$

com constantes $\theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$ desconhecidas e o escalar $H < 0$ sendo a Hessiana desconhecida do mapa estático. A partir de (2.1) e (2.2), obtem-se o seguinte *mapeamento quadrático estático com atraso* de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D) - \theta^*)^2. \quad (2.3)$$

2.1 Sinais e Sistema

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ^* e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (2.4)$$

o erro dessa estimativa. Da Figura 9, a *dinâmica do erro* pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = U(t - D). \quad (2.5)$$

Além disso, tem-se

$$G(t) = M(t)y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (2.6)$$

em que os sinais de *dither* são dados por

$$S(t) = a \sin(\omega(t + D)), \quad M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t), \quad (2.7)$$

com excitação periódica não-nula com amplitudes dependentes de a e frequência ω .

O sinal

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad (2.8)$$

é aplicado para obter a estimativa da Hessiana desconhecida H , onde o sinal de demodulação $N(t)$ é dado por

$$N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (2.9)$$

A partir dos desenvolvimentos em (GHAFFARI; KRSTIĆ; NEŠIĆ, 2012), pode-se mostrar que

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^\Pi M(\sigma)y d\sigma = H\tilde{\theta}_{av}, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (2.11)$$

se o mapa quadrático como em (2.2) é considerado. Em outras palavras, sua versão média para a Hessiana é $\hat{H}_{av} = (Ny)_{av} = H$ e para o gradiente é $G_{av}(t) = (My)_{av} = H\tilde{\theta}_{av}(t - D)$.

2.2 Preditor com estimativa de Hessiana

Usando a análise da média, podemos verificar que a versão média do sinal $G(t)$ em (2.6) é dada por

$$G_{\text{av}}(t) = H\tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D). \quad (2.12)$$

De (2.5), os seguintes modelos podem ser obtidos

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t - D) = U_{\text{av}}(t - D), \quad \dot{G}_{\text{av}}(t) = HU_{\text{av}}(t - D), \quad (2.13)$$

onde $U_{\text{av}} \in \mathbb{R}$ é o resultado do controle médio para $U \in \mathbb{R}$.

De forma a motivar o projeto do preditor realimentado, a ideia é compensar o atraso por realimentação do estado futuro $G(t + D)$, ou $G_{\text{av}}(t + D)$ no sistema médio equivalente. Dado qualquer ganho estabilizante $k > 0$ para o sistema sem atraso, deseja-se obter uma lei de controle que alcance

$$U_{\text{av}}(t) = kG_{\text{av}}(t + D), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.14)$$

o que aparenta não ser implementável uma vez que isso requer valores futuros do estado. Entretanto, aplicando o método de variação de constantes em (2.13), pode-se expressar o estado futuro como

$$G_{\text{av}}(t + D) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D}^t U_{\text{av}}(\sigma) d\sigma, \quad (2.15)$$

onde $G_{\text{av}}(t + D)$ é calculado em termos do sinal de controle médio U_{av} na janela de tempo passada $[t - D, t]$. Isso resulta na seguinte lei de realimentação

$$U_{\text{av}}(t) = k \left[G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D}^t U_{\text{av}}(\sigma) d\sigma \right]. \quad (2.16)$$

Por isso, de (2.15) e (2.16), a lei de realimentação (2.14) pode ser obtida como desejado. Consequentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t) = kG_{\text{av}}(t + D), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.17)$$

Portanto, de (2.12), têm-se

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)}{dt} = kH\tilde{\theta}_{\text{av}}(t), \quad \forall t \geq D, \quad (2.18)$$

com um equilíbrio exponencialmente atrativo $\tilde{\theta}_{\text{av}}^e = 0$, desde que o ganho $k > 0$ seja escolhido no projeto de controle, considerando que $H < 0$ por hipótese.

Na próxima seção, será mostrado que o objetivo de controle ainda pode ser alcançado se uma simples modificação no controlador baseado em preditor, que emprega um filtro passa-baixas, for aplicada. Neste caso, será proposto o seguinte preditor filtrado

com dimensão infinita para compensar o atraso (KRSTIC, 2008):

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (2.19)$$

onde $c > 0$ é suficientemente grande. O preditor realimentado é da forma de um filtro passa-baixas da versão não-média de (2.16). Esta filtragem passa-baixas é particularmente requerida na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas (HALE; LUNEL, 1990) é invocado. O preditor realimentado (2.19) é baseado em sinais médios porque \hat{H} é atualizado de acordo para a estimativa (2.8) da Hessiana desconhecida H , satisfazendo a propriedade da média (2.10). Tecnicamente, a filtragem transforma os atrasos de “entrada” no sinal $U(t - D)$ em atrasos no estado.

2.3 Análise de Estabilidade

Os resultados de estabilidade/convergência para o sistema em malha fechada são resumidos no próximo teorema demonstrados em (OLIVEIRA; KRSTIĆ, 2015b).

Teorema 1. Considere o sistema em malha fechada da Figura 9 com saída atrasada da equação (2.1). Existe $c^* > 0$ tal que, $\forall c \geq c^*$, $\exists \omega^*(c) > 0$ tal que, $\forall \omega > \omega^*$, o sistema atrasado em malha fechada (2.5) e (2.19), com $G(t)$ em (2.6), $\hat{H}(t)$ em (2.8) e estado $\tilde{\theta}(t - D), U(\sigma), \forall \sigma \in [t - D, t]$, tem uma única solução periódica exponencialmente estável em t de período $\Pi = 2\pi/\omega$, denotada por $\tilde{\theta}^\Pi, U^\Pi(\sigma), \forall \sigma \in [t - D, t]$ satisfazendo, $\forall t \geq 0$:

$$\left(\left| \tilde{\theta}^\Pi(t - D) \right|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \int_{t-D}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega) \quad (2.20)$$

Além disso,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (2.21)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (2.22)$$

Prova: A demonstração segue os passos 1 até 8, conforme abaixo.

Passo 1: PDE de transporte para Representação com Atraso

De acordo com (KRSTIC, 2009), o atraso em (2.5) pode ser representado usando uma equação diferencial parcial de transporte como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = u(0, t), \quad (2.23)$$

$$u_t(x, t) = u_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (2.24)$$

$$u(D, t) = U(t), \quad (2.25)$$

onde a solução do problema de valor de contorno de (2.23) - (2.25) é

$$u(x, t) = U(t + x - D). \quad (2.26)$$

Passo 2: Equações do Sistema em Malha Fechada

Primeiramente, substituindo-se $S(t)$ dado em (2.7) na equação de θ em (2.6), obtém-se

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + a \sin(\omega(t + D)) \quad (2.27)$$

Agora, substituindo (2.4) e (2.27) em (2.3) então a variável de saída é dada em termos de $\tilde{\theta}$:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2} \left(\tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\omega t) \right)^2. \quad (2.28)$$

Aplicando-se $M(t)$ proveniente de (2.7) em $y(t)$ de (2.6), além de (2.9) em (2.8) e representando-se a integral em (2.19) usando o estado da PDE obtém-se

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}, \quad (2.29)$$

$$G(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t) y(t), \quad (2.30)$$

$$\hat{H} = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) y(t). \quad (2.31)$$

Substituindo (2.28) em (2.30) e (2.31), e o resultado de (2.30) e (2.31) em (2.29), além de extrair o fator comum y no resultado de (2.29), têm-se

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[y^* + \frac{H}{2} \left(\tilde{\theta}(t - D) + a \sin(\omega t) \right)^2 \right] \right\} \\ &\times \left\{ \frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Expandindo-se o binômio (2.32), têm-se

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t - D) + Ha \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \right] \right. \\ &\times \left. \left[\frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Finalmente, substituindo-se (2.33) em (2.25), pode-se reescrever o problema de

valor de contorno (2.23) - (2.25) como

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = u(0, t), \quad (2.34)$$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x u(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} u(D, t) &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[y^* + \frac{H}{2} \tilde{\theta}^2(t - D) + \right. \right. \\ &Ha \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) + \frac{a^2 H}{2} \sin^2(\omega t) \left. \right] \\ &\quad \times \left[\frac{2}{a} \sin(\omega t) - \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right] \left. \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &+ \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t - D) \sin(\omega t) \\ &- \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t - D) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \\ &+ 2H \sin^2(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) \\ &- \frac{8H}{a} \sin(\omega t) \tilde{\theta}(t - D) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \\ &+ aH \sin^3(\omega t) - 4H \sin^2(\omega t) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \left. \right] \left. \right\} \\ &= \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[y^* \frac{2}{a} \sin(\omega t) - y^* \frac{8}{a^2} \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \right. \right. \\ &+ \frac{H}{a} \tilde{\theta}^2(t - D) \sin(\omega t) \\ &- \frac{4H}{a^2} \tilde{\theta}^2(t - D) \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \\ &+ H \tilde{\theta}(t - D) - H \cos(2\omega t) \tilde{\theta}(t - D) \\ &- \frac{4H}{a} [\sin(3\omega t) - \sin(\omega t)] \tilde{\theta}(t - D) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \\ &+ \frac{3aH}{4} \sin(\omega t) - \frac{aH}{4} \sin(3\omega t) - 2H \cos(2\omega t) \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \\ &+ [H + H \cos(4\omega t)] \int_0^D u(\sigma, t) d\sigma \left. \right] \left. \right\}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Passo 3: Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

Agora, denotando-se

$$\tilde{\vartheta}(t) := \tilde{\theta}(t - D), \quad \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) := \tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D) \quad (2.37)$$

o sistema médio (2.34) - (2.36) é:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = u_{\text{av}}(0, t), \quad (2.38)$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x, t) = \partial_x u_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt} u_{\text{av}}(D, t) = -c u_{\text{av}}(D, t) + ckH \left[\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (2.40)$$

onde a última linha é obtida simplesmente calculando-se as médias das funções seno e cosseno de $\omega, 2\omega, 3\omega$ e 4ω . Além disso, o filtro $c/s + c$ é também representado na forma

de espaço de estado. A solução da PDE de transporte (2.39) - (2.40) é dada por

$$u_{\text{av}}(x, t) = U_{\text{av}}(t + x - D). \quad (2.41)$$

Passo 4: *Transformação backstepping, sua inversa e o sistema alvo*

Considere a transformação *backstepping* de dimensão infinita do estado do atraso

$$w(x, t) = u_{\text{av}}(x, t) - kH \left[\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (2.42)$$

que mapeia o sistema (2.38) - (2.40) no *sistema alvo*:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \omega(0, t), \quad (2.43)$$

$$w_t(x, t) = w_x(x, t), \quad x \in [0, D], \quad (2.44)$$

$$w(D, t) = -\frac{1}{c}\partial_t u_{\text{av}}(D, t). \quad (2.45)$$

Utilizando-se (2.42) para $x = D$ e o fato de que $u_{\text{av}}(D, t) = U_{\text{av}}(t)$, a partir de (2.45) obtém-se (2.40), *i.e.*,

$$U_{\text{av}}(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ kH \left[\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^D u_{\text{av}}(\sigma, t) d\sigma \right] \right\}. \quad (2.46)$$

Considere $w(D, t)$, é fácil mostrar que

$$w_t(D, t) = \partial_t u_{\text{av}}(D, t) - kH u_{\text{av}}(D, t), \quad (2.47)$$

onde $\partial_t u_{\text{av}}(D, t)$. A inversa de (2.42) é dada por

$$u_{\text{av}}(x, t) = w(x, t) + kH \left[e^{kHx} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x e^{kH(x-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (2.48)$$

Substituindo-se (2.45) e (2.48) em (2.47), obtém-se

$$\begin{aligned} w_t(D, t) &= -cw(D, t) - kHw(D, t) \\ &\quad - (kH)^2 \left[e^{kHD} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x e^{kH(D-\sigma)} w(\sigma, t) d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Passo 5: *Funcional de Lyapunov-Krasovskii*

Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t) = \frac{\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^D (1+x) w^2(x, t) dx + \frac{1}{2} w^2(D, t), \quad (2.50)$$

onde o parâmetro $a > 0$ será escolhido mais adiante. Calculando-se a derivada temporal

de $V(t)$ dada em (2.50) ao longo de (2.43)-(2.45), obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= kH\vartheta_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) w(0, t) + a \int_0^D (1+x) w(x, t) w_x(x, t) dx + w(D, t) w_t(D, t) \\
&= kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2 w(0, t) + \frac{a(1+D)}{2} w^2(D, t) - \frac{a}{2} w^2(0, t) - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx \\
&+ w(D, t) w_t(D, t) \\
&\leq kH\vartheta_{\text{av}}^2(t) + \frac{\vartheta_{\text{av}}^2(t)}{2a} - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx \\
&+ w(D, t) \left[w_t(D, t) + \frac{a(1+D)}{2} w(D, t) \right]. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Note que para encontrar a primeira linha de (2.51) utiliza-se o fato de $w_t(x, t) = w_x(x, t)$, enquanto que aplicando-se o método de integração por partes obtém-se a segunda linha.

Lembrando-se que $k > 0$ e $H < 0$, escolhe-se

$$a = -\frac{1}{kH}. \tag{2.52}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \frac{kH}{2} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \frac{1}{2kH} \int_0^D w^2(x, t) dx + w(D, t) \left[w_t(D, t) - \frac{(1+D)}{2kH} w(D, t) \right] \\
&= -\frac{1}{2a} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{a}{2} \int_0^D w^2(x, t) dx \\
&+ w(D, t) \left[w_t(D, t) + \frac{a(1+D)}{2} w(D, t) \right]. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Agora, considera-se (2.53) juntamente com (2.49). Completando-se os quadrados, obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq \frac{1}{4a} (t) - \frac{a}{4} \int_0^D w^2(x, t) dx + a |(kH^2 e^{kHD})|^2 w^2(D, t) \\
&+ \frac{1}{a} \|(kH)^2 e^{kH(D-\sigma)}\|^2 w^2(D, t) + \left[\frac{a(1+D)}{2} - kH \right] w^2(D, t) \\
&- cw^2(D, t). \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Para se obter (2.54), usou-se

$$\begin{aligned}
&- w(D, t) \langle (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)}, \omega(\sigma, t) \rangle \leq |w(D, t)| \|(kH)^2 e^{kH(D-\sigma)}\| \|w(t)\| \\
&\leq \frac{a}{4} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{a} \|(kH)^2 e^{kH(D-\sigma)}\|^2 w^2(D, t). \tag{2.55}
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é de Cauchy- Schwartz e a segunda a de Young. A notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno na variável espacial $\sigma \in [0, D]$, em que ambas $e^{kH(D-\sigma)}$ e $w(\sigma, t)$ dependem e $\|\cdot\|$ denota a norma L_2 em σ . Então, a partir de (2.54), chega-se a

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4a} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{a}{4(1+D)} \int_0^D (1+x) w^2(x, t) dx - (c - c^*) w^2(D, t), \tag{2.56}$$

onde

$$c^* = \frac{a(1+D)}{2} - kH + a \left| (kH)^2 e^{kHD} \right|^2 + \frac{1}{a} \left\| (kH)^2 e^{kH(D-\sigma)} \right\|^2. \quad (2.57)$$

A partir de (2.57), é claro que um limitante superior c^* pode ser obtido de limitantes inferiores e superiores da Hessiana desconhecida H . Portanto, de (2.56), se c é escolhido tal que $c > c^*$, obtém-se

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \quad (2.58)$$

para algum $\mu > 0$. Com isso, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido da norma completa do estado

$$\left(\left| \tilde{v}_{\text{av}}(t) \right|^2 + \int_0^D w^2(x, t) dx + w^2(D, t) \right)^{1/2}, \quad (2.59)$$

i.e., na variável transformada $(\tilde{v}_{\text{av}}, w)$.

Passo 6: *Estabilidade Exponencial (na norma L_2) para o Sistema Médio (3.38) - (3.40) na variáveis originais $(\tilde{\theta}_{\text{av}}, u_{\text{av}})$*

Para se obter a estabilidade exponencial do sistema original a partir da norma em (2.59) é preciso mostrar que existem números positivos α_1 e α_2 tais que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (2.60)$$

onde $\Psi(t) \triangleq \left| \tilde{v}_{\text{av}}(t) \right|^2 + \int_0^D u_{\text{av}}^2(x, t) dx + u_{\text{av}}^2(D, t)$, ou equivalentemente,

$$\Psi(t) \triangleq \left| \tilde{\theta}_{\text{av}}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t U_{\text{av}}^2(\tau) d\tau + U_{\text{av}}^2(t), \quad (2.61)$$

usando (2.37) e (2.41). Isto é estabelecido diretamente usando-se (2.42), (2.48), (2.50) e empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e outros cálculos, como na prova do Teorema 2.1 em (KRSTIC, 2009). Portanto, com (2.58), tem-se

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (2.62)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial.

Passo 7: *Invocando o Teorema da Média*

Primeiramente, note que o sistema em malha fechada (2.5) e (2.19) pode ser reescrito como:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t-D) = U(t-D), \quad (2.63)$$

$$\dot{U}(t) = -cU(t) + c \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (2.64)$$

onde $z(t) = [\tilde{\theta}(t - D), U(t)]^T$ é o vetor de estado. Além disso, a partir de $G(t)$ em (2.6) e $\hat{H}(t)$ em (2.8), obtém-se $\dot{z}(t) = f(\omega t, z_t)$, onde $z_t(\Theta) = z(t + \Theta)$ para $-D \leq \Theta \leq 0$ e f é uma função contínua apropriada, de maneira que o Teorema da Média (*Averaging Theorem*) dado por (HALE; LUNEL, 1990) e (LEHMAN, 2002) pode ser diretamente aplicado considerando $\omega = \frac{1}{\epsilon}$. De (2.62), a origem do sistema médio em malha fechada (2.38) - (2.40), com a PDE de transporte para a representação do atraso, é exponencialmente estável. Então, de acordo com o teorema da média (HALE; LUNEL, 1990), (LEHMAN, 2002), para ω suficientemente grande, (2.34) - (2.36) tem uma única solução periódica exponencialmente estável ao redor de seu equilíbrio (a origem) satisfazendo (2.20).

Passo 8: *Convergência Assintótica para uma vizinhança do Extremo (θ^*, y^*)*

Usando a mudança de variáveis (2.37) e integrando os dois lados de (2.23) em um intervalo $[t, \sigma + D]$, têm-se:

$$\tilde{\vartheta}(\sigma + D) = \tilde{\vartheta}(t) + \int_t^{\sigma+D} u(0, s) ds. \quad (2.65)$$

De (2.26), pode-se reescrever (2.65) em termos de U , tal que

$$\tilde{\vartheta}(\sigma + D) = \tilde{\vartheta}(t) + \int_{t-D}^{\sigma} U(\tau) d\tau. \quad (2.66)$$

Agora, note que

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \tilde{\vartheta}(\sigma + D), \quad \forall \sigma \in [t - D, t]. \quad (2.67)$$

Consequentemente,

$$\tilde{\theta}(\sigma) = \tilde{\theta}(t - D) + \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau, \quad \forall \sigma \in [t - D, t]. \quad (2.68)$$

Aplicando a norma suprema nos dois lados de (2.68), têm-se

$$\begin{aligned}
\sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \tilde{\theta}(\sigma) \right| &\leq \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \tilde{\theta}(t-D) \right| + \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \int_{t-D}^t U(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \tilde{\theta}(t-D) \right| + \sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \int_{t-D}^t |U(\tau)| d\tau \\
&\leq \left| \tilde{\theta}(t-D) \right| + \int_{t-D}^t |U(\tau)| d\tau \quad (\text{Cauchy - Schwartz}) \\
&\leq \left| \tilde{\theta}(t-D) \right| + \left(\int_{t-D}^t d\tau \right)^{1/2} \times \left(\int_{t-D}^t |U(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \left| \tilde{\theta}(t-D) \right| + \sqrt{D} \left(\int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{2.69}
\end{aligned}$$

Agora, é fácil checar que

$$\left| \tilde{\theta}(t-D) \right| \leq \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \tag{2.70}$$

$$\left(\int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{2.71}$$

Usando (2.70) e (2.71), têm-se

$$\left| \tilde{\theta}(t-D) \right| + \sqrt{D} \left(\int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq (1 + \sqrt{D}) \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \tag{2.72}$$

De (2.69), é simples concluir que

$$\sup_{t-D \leq \sigma \leq t} \left| \tilde{\theta}(\sigma) \right| \leq (1 + \sqrt{D}) \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \tag{2.73}$$

e, consequentemente,

$$\left| \tilde{\theta}(\sigma) \right| \leq (1 + \sqrt{D}) \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t U^2(\tau) d\tau \right)^{1/2}. \tag{2.74}$$

A desigualdade (2.74) pode ser dada em termos da solução periódica $\tilde{\theta}^\Pi(t-D)$, $U^\Pi(\sigma)$, $\forall \sigma \in [t-D, t]$, assim como

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{\theta}(\sigma) \right| &\leq (1 + \sqrt{D}) \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^\Pi(t-D) + \tilde{\theta}^\Pi(t-D) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_{t-D}^t [U(\tau) - U^\Pi(\tau) + U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \tag{2.75}
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young e alguns algebrismos, o lado direito de (2.75)

e $|\tilde{\theta}(t)|$ podem ser majorados por

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(\sigma)| &\leq \sqrt{2} \left(1 + \sqrt{D}\right) \left(\left| \tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D) \right|^2 + \left| \tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{t-D}^t [U(\tau) - U^{\text{II}}(\tau)]^{1/2} + \int_{t-D}^t [U^{\text{II}}(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Do teorema da média (HALE; LUNEL, 1990) (LEHMAN, 2002), têm-se $\tilde{\theta}(t-D) - \tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D) \rightarrow 0$ e $\int_{t-D}^t [U(\tau) - U^{\text{II}}(\tau)]^2 d\tau \rightarrow 0$, exponencialmente. Consequentemente,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\theta}(t)| = \sqrt{2} \left(1 + \sqrt{D}\right) \times \left(\int_{t-D}^t \left| \tilde{\theta}^{\text{II}}(t-D) \right|^2 + \int_{t-D}^t [U^{\text{II}}(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2}. \quad (2.77)$$

De (2.20) e (2.77), pode se escrever $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{\theta}(t)| = \mathcal{O}(1/\omega)$. De (4) e lembrando que $\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t)$ com $S(t) = a \sin(\omega(t+D))$, podemos escrever

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(t). \quad (2.78)$$

Uma vez que o primeiro termo do lado direito de (2.78) é em última análise da ordem $\mathcal{O}(1/\omega)$ e o segundo termo é da ordem $\mathcal{O}(a)$, então

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega). \quad (2.79)$$

Finalmente, de (2.3) e (2.79), têm-se (2.21).

2.4 Simulações

Considerando o seguinte mapeamento quadrático

$$Q(\theta) = 5 - 0.1(\theta - 2)^2, \quad (2.80)$$

sujeito a um atraso de saída de $D = 5$ s. De acordo com (2.80), o ponto de extremo é $(\theta^*, y^*) = (2, 5)$ e a Hessiana do mapeamento estático é $H = -0.2$. A seguir, simulações numéricas do preditor (2.19) são apresentadas, onde \hat{H} é dado por (2.8) e $c = 20$. Para os testes utilizou-se os parâmetros: $a = 0.2$, $\omega = 10$, $k = 0.2$ e $\theta(0) = 0$.

A questão da robustez à aproximação dos termos integrais para a predição foi levantada em (MONDIÉ; MICHIELS, 2003). Esse problema foi posteriormente mostrado por (MIRKIN, 2004) como sendo simplesmente o resultado de uma má escolha do esquema de aproximação para a integral. Além disso, esquemas robustos para aproximação numérica fo-

ram desenvolvidos recentemente em (KARAFYLLIS; KRSTIC, 2014). Deste modo, o método numérico de Euler foi utilizado nas simulações com passo de amostragem igual a 10^{-4} .

Na Figura 10 é exibido a entrada do sistema convergindo para o ponto de extremo de θ^* . Na Figura 11, a saída com atraso constante também convergiu para o ponto no extremo y^* . Na Figura 12 e na Figura 13 são exibidos respectivamente os resultados do sinal de controle do sistema convergindo para a origem e a Hessiana \hat{H} convergindo para o valor de -0.2.

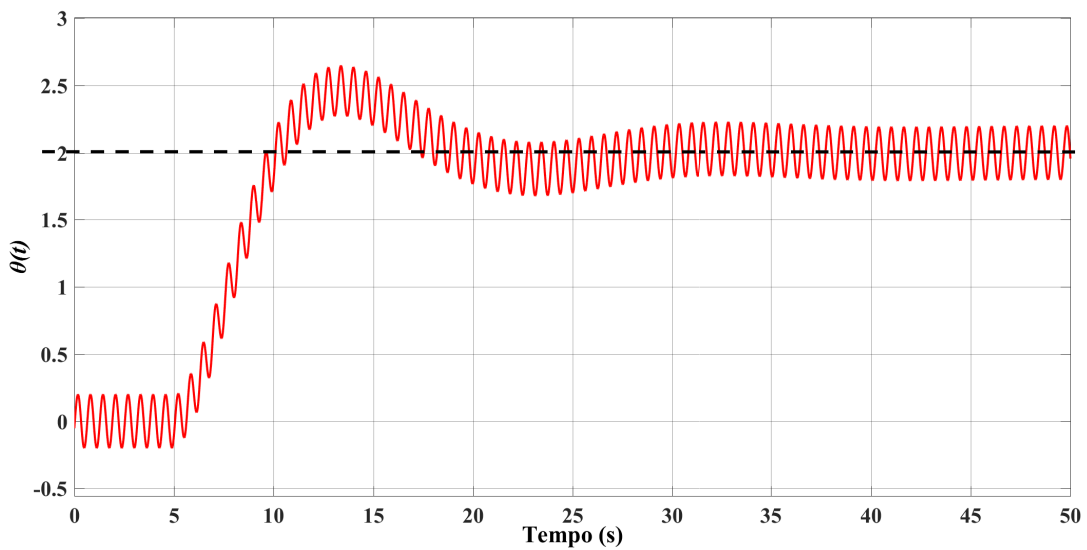


Figura 10 - Parâmetro $\theta(t)$.

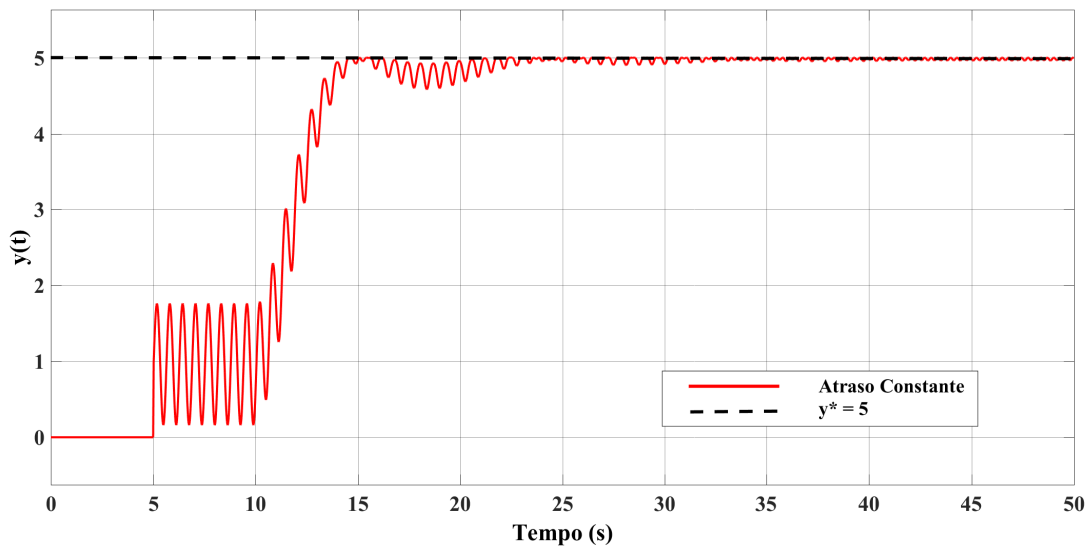
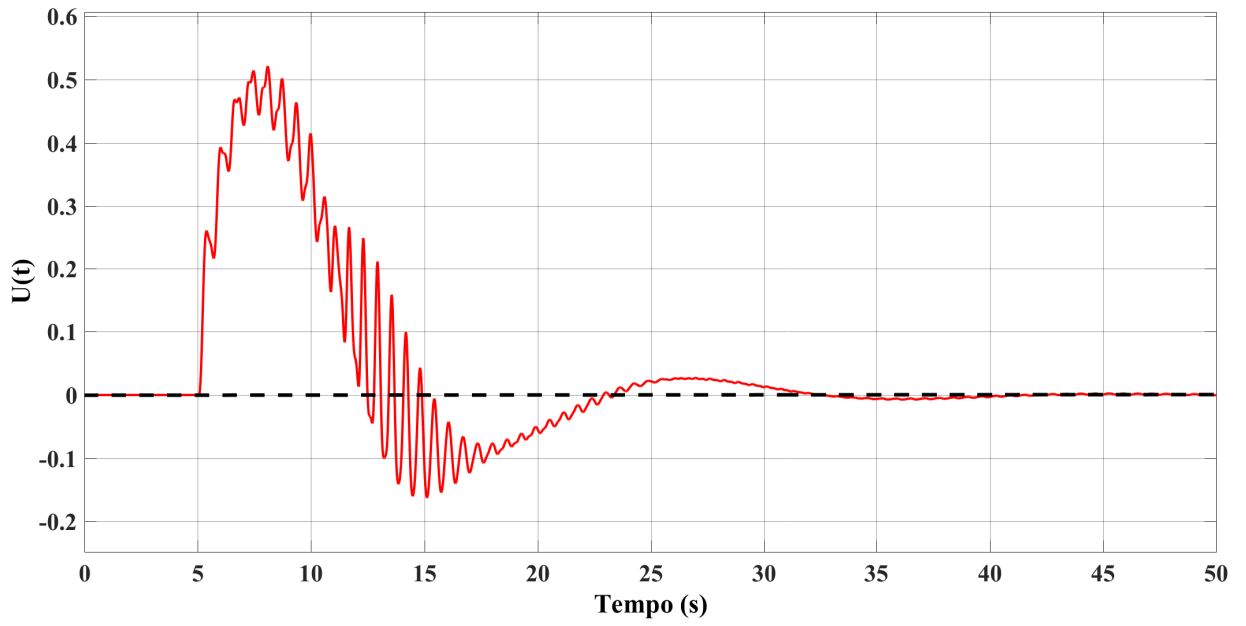
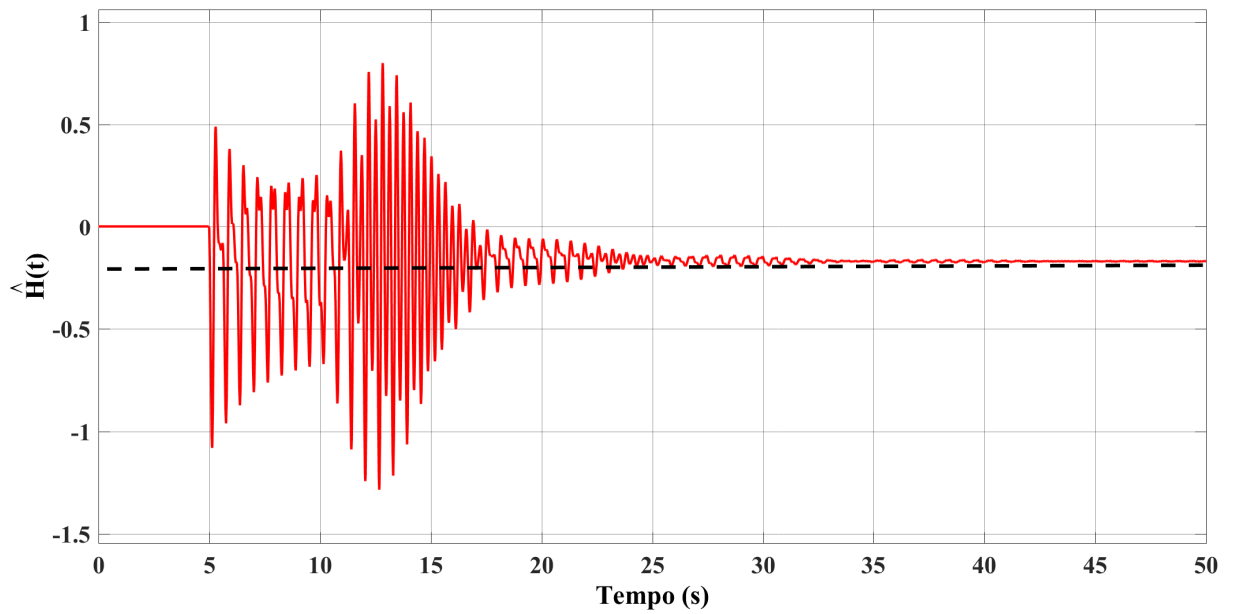


Figura 11 - Saída $y(t)$ com atraso constante.

Figura 12 - Sinal de controle $U(t)$.Figura 13 - Estimativa da Hessiana $\hat{H}(t)$.

Na Figura 14 temos o caso em que o atraso é perturbado por um termo variante $\Delta(t)$ tal que $D(t) = D_0 + \Delta(t)$, porém como o preditor foi projetado para o caso de atrasos constantes D_0 , obtemos a divergência do sistema. Na simulação apresentada na Figura 14, temos o comportamento do sistema para $D(t) = 5 + 2 \cos(0.1t)$. Este resultado motiva a introdução de estratégias de controle extremal que sejam robustas a atrasos variantes no tempo detalhadas no próximo capítulo.

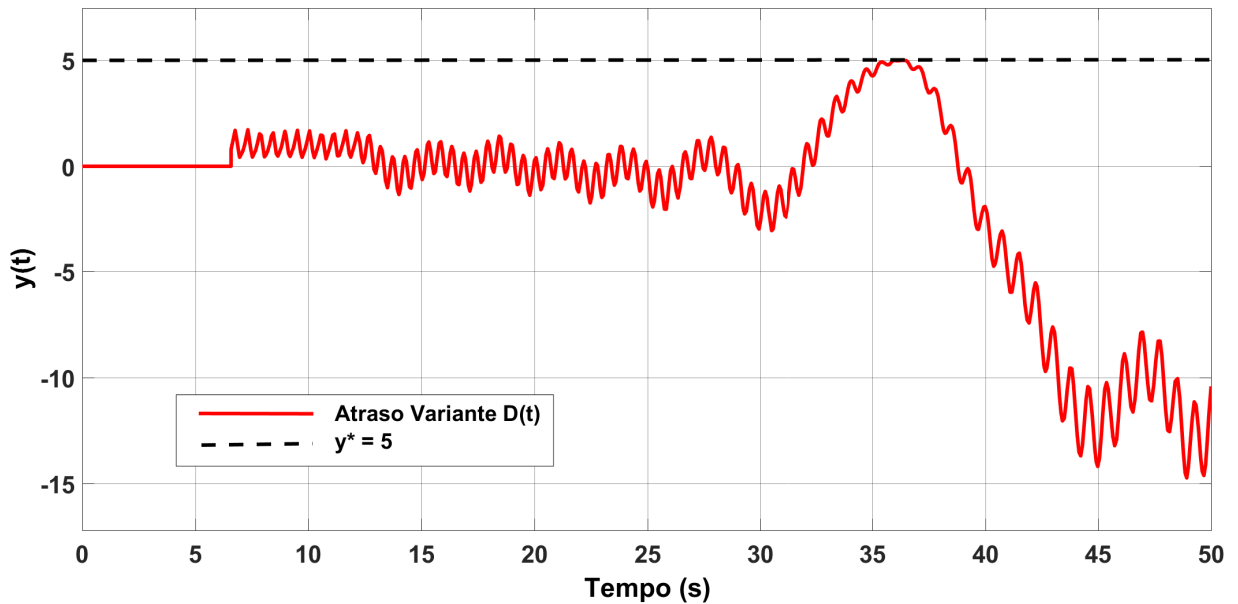


Figura 14 - Saída $y(t)$ com atraso variável $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$.

3 REALIMENTAÇÃO BASEADA EM PREDITOR PARA BUSCA EXTREMAL COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

Assim como no Capítulo 3, consideramos que o objetivo é maximizar (ou minimizar) a saída $y \in \mathbb{R}$ de um mapeamento estático não-linear desconhecido $Q(\theta)$ fazendo-se variar a entrada $\theta \in \mathbb{R}$.

Entretanto, assumimos aqui *atrasos variantes no tempo e conhecidos* $D(t) \geq 0$ na saída do sistema de tal modo que a saída medida é dada por

$$y(t) = Q(\theta(t - D(t))), \quad (3.1)$$

de acordo com a Figura 15.

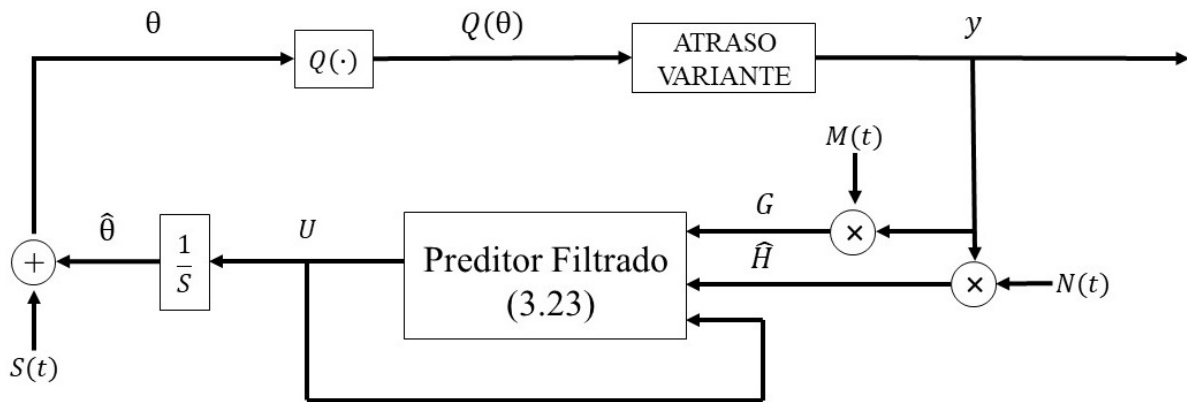


Figura 15 - Diagrama de blocos básico do sistema de controle extremal com atrasos variantes no tempo.

Novamente, considera-se o problema de busca pelo máximo em θ igual a θ^* . Por uma questão de simplicidade, assume-se que o mapa não linear é ao menos localmente quadrático na vizinhança de θ^* , isto é,

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2, \quad (3.2)$$

onde as constantes $\theta^* \in \mathbb{R}$ e $y^* \in \mathbb{R}$ são desconhecidas e o escalar $H < 0$ é a Hessiana. Aplicando-se (3.2) em (3.1), obtém-se o *mapeamento quadrático estático com atraso variante no tempo* de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D(t)) - \theta^*)^2. \quad (3.3)$$

Para um melhor entendimento, a seguir estão as *hipóteses básicas* sobre o atraso variante no tempo considerando:

(a) A função de atraso $D(t)$ é estritamente positiva (condição técnica que garante que o espaço de estados da dinâmica de entrada pode ser definido);

(b) A função de atraso $D(t)$ é uniformemente limitada por cima;

(c) A variável do atraso $\dot{D}(t)$ é estritamente menor do que 1, isto é, o atraso pode aumentar a uma taxa inferior a 1;

(d) A taxa de variação do atraso $\dot{D}(t)$ é uniformemente limitada por baixo (por uma constante finita possivelmente negativa), isto é, o atraso pode diminuir a uma taxa uniformemente limitada;

(e) A função de atraso $D(t)$ não é periódica em $\Pi = \frac{2\pi}{\omega}$ tal que $D_{av}(t) = D(t)$.

A partir das funções continuamente diferenciáveis do *tempo de atraso* $\phi(t)$ e do *tempo de predição* $\phi^{-1}(t)$, definidas como

$$\phi(t) := t - D(t), \quad (3.4)$$

$$\phi^{-1}(t) := t + D(t), \quad (3.5)$$

e satisfazendo as condições

$$\phi(t) \leq t, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.6)$$

e

$$\frac{d}{dt}\phi(t) \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (3.7)$$

podemos assumir a seguinte hipótese.

Hipótese 1: O atraso de saída variante no tempo $D(t)$ satisfaz

$$-\infty < \underline{d} < \dot{D}(t) < \bar{d} < 1, \quad (3.8)$$

onde \underline{d} e \bar{d} são constantes.

Isto é uma consequência direta de (3.4) e (3.5). Além disso, da *Hipótese 1* conclui-se que $\phi(t)$ é estritamente crescente. Note que $\phi^{-1}(t)$ é a função inversa de $\phi(t)$.

3.1 Sinais do Sistema

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ^* e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (3.9)$$

o erro de estimativa. Da Figura 15, a *dinâmica do erro* pode ser escrita como

$$\dot{\hat{\theta}}(t - D(t)) = U(t - D(t)). \quad (3.10)$$

Adicionalmente,

$$G(t) = M(t)y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (3.11)$$

onde os sinais de perturbação periódica são dados por

$$S(t) = a \sin(\omega(t + D(t))), \quad M(t) = \frac{2}{a} \sin(\omega t), \quad (3.12)$$

com perturbações diferentes de zero, amplitudes dependentes de a e com frequência ω .

O sinal

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \quad (3.13)$$

é aplicado para obter a estimativa da Hessiana H , onde o sinal de demodulação $N(t)$ é dado por

$$N(t) = -\frac{8}{a^2} \cos(2\omega t). \quad (3.14)$$

Em (GHAFFARI; KRSTIĆ; NEŠIĆ, 2012), foi provado que

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \quad (3.15)$$

se o mapeamento quadrático como em (3.2) for considerado. Em outras palavras, sua versão média é $\hat{H}_{av} = (Ny)_{av} = H$.

3.2 Preditor com estimativa de Hessiana

Usando a análise da média, podemos verificar que a versão média do sinal $G(t)$ em (3.11) é dada por

$$G_{av}(t) = H\tilde{\theta}_{av}(t - D(t)). \quad (3.16)$$

De (3.10), as seguintes equações podem ser obtidas

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t - D(t)) = U_{av}(t - D(t)), \quad \dot{G}_{av}(t) = HU_{av}(t - D(t)), \quad (3.17)$$

onde $U_{av} \in \mathbb{R}$ é o resultado do controle médio para $U \in \mathbb{R}$.

Como feito anteriormente no Capítulo 3, a ideia é compensar o atraso por realimentação do estado futuro $G(t + D(t))$, ou $G_{av}(t + D(t))$ no sistema médio equivalente. Dado qualquer ganho estabilizante $k > 0$ para o sistema sem atraso, deseja-se ter uma lei de controle

$$U_{av}(t) = kG_{av}(t + D(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.18)$$

que utiliza valores futuros do estado. Entretanto, aplicando a fórmula de variação de constantes para (3.17) pode-se expressar o estado futuro como

$$G_{\text{av}}(t + D(t)) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^t \frac{U_{\text{av}}(\sigma)}{\phi'(\phi^{-1}(\sigma))} d\sigma, \quad (3.19)$$

em termos do sinal de controle médio U_{av} na janela passada $[t - D(t), t]$. Isso resulta na seguinte lei de realimentação

$$U_{\text{av}}(t) = k \left[G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^t \frac{U_{\text{av}}(\sigma)}{\phi'(\phi^{-1}(\sigma))} d\sigma \right], \quad \forall t \geq 0, \quad (3.20)$$

onde $\phi'(\cdot)$ denota a derivada de $\phi(\cdot)$.

Por isso, de (3.19) e (3.20), a lei de realimentação (3.18) pode ser obtida e consequentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}_{\text{av}}(t) = kG_{\text{av}}(t + D(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.21)$$

Portanto, de (3.16), têm-se

$$\frac{d\tilde{\theta}_{\text{av}}(t)}{dt} = kH\tilde{\theta}_{\text{av}}(t), \quad \forall t \geq D(t), \quad (3.22)$$

com um equilíbrio $\tilde{\theta}_{\text{av}}^e = 0$ exponencialmente atrativo, desde que $k > 0$ no projeto da lei de controle e $H < 0$ por hipótese.

Na próxima seção, será mostrado que o objetivo do controle é também alcançado com a seguinte versão filtrada do preditor (KRSTIC, 2008) com dimensão infinita e estimativas baseadas na média dos sinais:

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D(t)}^t \frac{U(\sigma)}{\phi'(\phi^{-1}(\sigma))} d\sigma \right] \right\}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.23)$$

onde $c > 0$ é suficientemente grande. Esta filtragem passa-baixas no preditor (3.23) é particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas (HALE; LUNEL, 1990) é invocado. O preditor (3.23) é baseado na média porque $\hat{H}(t)$ é atualizado de acordo para a estimativa (3.13) da Hessiana H , satisfazendo a propriedade da média (3.15).

3.3 Implementação / Aproximação Numérica do Preditor para Atrasos Variantes no Tempo

Aparentemente é difícil implementar numericamente o preditor (3.23). Assim, no que se segue mostraremos um outro método para simplificar essa implementação. Portanto nas duas seções a seguir serão apresentados dois métodos diferentes de realizar essa implementação.

3.3.1 Primeiro Método

Considerando as equações (3.17) e (3.4) podemos escrever

$$\dot{G}_{\text{av}}(t) = HU_{\text{av}}(\phi(t)). \quad (3.24)$$

Além disso, pode-se definir a predição do estado no momento quando o controle atual terá um efeito sobre o estado

$$P_{\text{av}}(t) = G_{\text{av}}(t + D(\tau(t))), \quad (3.25)$$

onde o tempo de predição é definido como

$$\tau(t) = t + D(\tau(t)). \quad (3.26)$$

Agora, para utilizarmos (3.26) em vez de t , em (3.24) obtém-se

$$\dot{G}_{\text{av}}(\tau(t)) = HU_{\text{av}}(t), \quad (3.27)$$

e reescrevendo (3.27) chega-se em:

$$\frac{dG_{\text{av}}(\tau(t))}{dt} = HU_{\text{av}}(t) \frac{d\tau(t)}{dt}. \quad (3.28)$$

Além disso, derivando-se a equação (3.26), encontramos

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = 1 + D'(\tau(t)) \frac{d\tau(t)}{dt}, \quad (3.29)$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{1}{1 - D'(\tau(t))}. \quad (3.30)$$

Então, (3.25) pode ser reescrito como

$$\frac{dP_{\text{av}}(t)}{dt} = HU_{\text{av}}(t) \frac{1}{1 - D'(\tau(t))}. \quad (3.31)$$

Integrando-se (3.29) e (3.31) para todo $t - D(t) \leq \xi \leq t$, obtém-se o seguinte preditor (BEKIARIS-LIBERIS; KRSTIC, 2013)

$$P_{\text{av}}(t) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^t U_{\text{av}}(\xi) \frac{1}{1 - D'(\sigma(\xi))} d\xi, \quad (3.32)$$

$$\tau(t) = t + \int_{t-D(t)}^t \frac{1}{1 - D'(\tau(\xi))} d\xi. \quad (3.33)$$

Finalmente a lei de controle do preditor é dada por

$$U(t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D(t)}^t U(\xi) \frac{1}{1 - D'(\tau(\xi))} d\xi \right] \right\}. \quad (3.34)$$

Agora, por exemplo, usando a regra de integração ponto a ponto é fácil de calcular (3.34) numericamente, como descrito a seguir.

Computação do sinal preditor: Ao simular o controlador baseado no preditor (3.32)-(3.34), para cada passo de tempo discretizado a ODE (equação diferencial ordinária) do sistema (3.24) deve ser resolvida (usando, por exemplo, o método de Euler) e o tamanho do atraso deve ser computado (como a parte inteira de $N(i) = \frac{D(i)}{\rho}$, denominado $\bar{N}(i)$, onde ρ é o passo de tempo). O preditor é então calculado integrando-se simultaneamente as duas relações integrais (3.32) e (3.33) para cada passo de tempo, usando um esquema de integração numérica. Por exemplo, com a regra de integração, têm-se

$$P(i) = G(i) + \rho \hat{H}(i) \sum_{k=i-\bar{N}(i)}^{i-1} U(k) \frac{1}{1 - D'(\tau(k))}, \quad (3.35)$$

$$\tau(i) = i + \rho \sum_{k=i-\bar{N}(i)}^{i-1} \frac{1}{1 - D'(\tau(k))}. \quad (3.36)$$

3.3.2 Segundo Método

Em (BRESCH-PIETRI; PETIT, 2014) considera-se o seguinte preditor

$$U_{\text{av}}(t) = k \left[G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^t U_{\text{av}}(s) ds \right], \quad (3.37)$$

para sistemas do tipo $\dot{G}_{\text{av}} = HU_{\text{av}}(t-D(t))$, onde H foi originalmente assumido constante.

Observe que este controlador (3.37) não corresponde exatamente ao estado do sistema predito em um horizonte de tempo $D(t)$. De fato, usando a fórmula da variação de constantes, têm-se

$$G_{\text{av}}(t + D(t)) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^t U_{\text{av}}(s + D(t) - D(s)) ds, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.38)$$

No entanto, a integral nesta predição pode não ser implementável porque não é necessariamente causal (em detalhes, este é o caso quando existe $s \in [t - D(t), t]$ de tal modo que $s - D(s) \geq t - D(t)$, isto é, quando o atraso $D(t)$ é repentinamente grande e o sinal recebido no tempo t é mais antigo do que os recebidos anteriormente) enquanto o empregado em (3.37) sempre será causal.

Além disso, mesmo que pudéssemos implementar esta predição, a integral envolvida poderia ser aproximada pela usada em (3.37) se $D(t) - D(s) \approx 0$ para a maior parte do tempo t , isto é, sob o pressuposto de que as variações do atraso $\dot{D}(t)$ são suficientemente pequenas na média. Como esta suposição é a que é requerida no nosso teorema principal para compensar fortemente o atraso, nós preferimos utilizar a forma de predição (3.37), que é sempre causal e mais fácil de implementar.

A implementação do preditor proposto, inicia-se por dividir a integral (3.37) em duas partes, conforme a equação a seguir

$$\int_{t-D(t)}^t U_{av}(s)ds = \int_{t-D(t)}^0 U_{av}(s)ds + \int_0^t U_{av}(s)ds, \quad (3.39)$$

$$\int_{t-D(t)}^t U_{av}(s)ds = - \int_0^{t-D(t)} U_{av}(s)ds + \int_0^t U_{av}(s)ds. \quad (3.40)$$

Resolvendo para integral a seguir

$$\int_0^{t-D(t)} U_{av}(s)ds, \quad (3.41)$$

levando-se em conta,

$$s = t - D(t), \quad (3.42)$$

$$ds = dt - \dot{D}dt, \quad (3.43)$$

obtém-se $t = D(t)$ para $s = 0$ e $t = t$ para $s = t - D(t)$. Substituindo-se as condições acima, nos limites de integração da equação (3.41), teremos

$$\int_{D(t)}^t U_{av}(t - D(t)) [dt - \dot{D}dt] \quad (3.44)$$

$$= \int_{D(t)}^t (1 - \dot{D})U_{av}(t - D(t))dt \quad (3.45)$$

$$= \int_0^t (1 - \dot{D})U_{av}(t - D(t))dt, \quad (3.46)$$

sendo válido se as condições $\dot{D} \leq 1$ e $1 - \dot{D} \geq 0$ forem satisfeitas e considerando que

$$U_{av}(t - D(t)) = 0 \quad t \in [0, D(t)]. \quad (3.47)$$

Assim sendo, a versão não-média (3.37) poderia ser reescrita como:

$$U(t) = K \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^t (1 - \dot{D}(\sigma))U(\sigma - D(\sigma))d\sigma \right]. \quad (3.48)$$

Deste modo, em vez de implementarmos (3.23), poderíamos simplesmente adotar a versão filtrada de (3.48).

3.4 Análise de Estabilidade

Introduzindo uma escolha não-óbvia para o estado da equação de transporte (3.6)

$$u(x, t) = U(\phi(t + x(\phi^{-1}(t) - t))), \quad (3.49)$$

tém-se os seguintes valores nas condições de contorno

$$u(0, t) = U(\phi(t)), \quad (3.50)$$

$$u(1, t) = U(t). \quad (3.51)$$

Isso resulta no seguinte sistema

$$\dot{\theta}(t - D) = u(0, t), \quad (3.52)$$

$$u_t(x, t) = \pi(x, t) u_x(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad (3.53)$$

$$u(1, t) = U(t), \quad (3.54)$$

onde a velocidade de propagação da equação de transporte é dada por

$$\pi(x, t) = \frac{1 + x \left(\frac{d(\phi^{-1}(t))}{dt} - 1 \right)}{\phi^{-1}(t) - t}. \quad (3.55)$$

A equação (3.55) é obtida simplesmente calculando-se $\frac{u_t(x, t)}{u_x(x, t)}$ considerando $u(x, t)$ em (3.49).

Assim sendo, podemos assumir a seguinte condição.

Hipótese 2: A função (3.55) é estritamente positiva e uniformemente limitada por cima e por baixo por constantes finitas.

Além disso, têm-se

$$\pi(0, t) = \frac{1}{\phi^{-1}(t) - t} \geq \pi_0^*, \quad (3.56)$$

onde

$$\pi_0 = \frac{1}{\sup_{\delta \geq \phi^{-1}(0)} (\delta - \phi(\delta))}. \quad (3.57)$$

Adicionalmente, assume-se $\pi(x, t)$ não-periódico em $\Pi = 2\pi/\omega$, então pode-se concluir que $\pi_{av}(x, t) = \pi(x, t)$.

Dessa forma, pode-se escrever ainda

$$\phi^{-1}(t) - t > 0, \quad (3.58)$$

o que implica que a função do *tempo de atraso* (3.4) e do *tempo de predição* (3.5) são positivas e uniformemente limitadas.

Agora, reescrevendo a lei de controle (3.23) em termos de $u(x, t)$ têm-se

$$u(1, t) = \frac{c}{s + c} \left\{ k \left[G(t) + \hat{H}(t) \int_0^1 u(\sigma, t) (\phi^{-1}(t) - t) d\sigma \right] \right\}. \quad (3.59)$$

Além disso, assumindo-se a seguinte condição inicial

$$u_0(x) = u(x, 0) = U(\phi(\phi^{-1}(0)x)), \quad x \in [0, 1], \quad (3.60)$$

onde $\tilde{\theta}_0 = \tilde{\theta}(-D(0))$ e utilizando a seguinte mudança de variáveis

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t - D(t)), \quad \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) = \tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D(t)), \quad (3.61)$$

a versão média do sistema (3.52) - (3.54) pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = u_{\text{av}}(0, t), \quad (3.62)$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x, t) = \pi(x, t) \partial_x u_{\text{av}}(x, t), \quad (3.63)$$

$$u_{\text{av}}(1, t) = U_{\text{av}}(t), \quad (3.64)$$

ou ainda

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = u_{\text{av}}(0, t), \quad (3.65)$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x, t) = \pi(x, t) \partial_x u_{\text{av}}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad (3.66)$$

$$\frac{du_{\text{av}}(1, t)}{dt} = -cu_{\text{av}}(1, t) + ckH \left[\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^1 u_{\text{av}}(\sigma, t) (\phi^{-1}(t) - t) d\sigma \right]. \quad (3.67)$$

Deste modo, o seguinte resultado para o sistema médio pode ser demonstrado.

Teorema 2: Considere o sistema em malha fechada que consiste na planta (3.62)-(3.64) e o controlador (3.59) e que a *Hipóteses 1 e 2* sejam asseguradas. Existem constantes positivas α_1, α_2 e μ (independentes de ϕ) tal que o sistema em malha fechada (3.62)-(3.64) é localmente exponencialmente estável e todas as soluções satisfazem

$$\begin{aligned} & \left[\left| \tilde{\theta}_{\text{av}}(\phi(t)) \right|^2 + [U_{\text{av}}(t)]^2 + \int_{\phi(t)}^t U_{\text{av}}^2(\xi) d\xi \right] \leq \\ & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} e^{-\mu t} \left[\left| \tilde{\theta}_{\text{av}}(\phi(0)) \right|^2 + [U_{\text{av}}(0)]^2 + \int_{\phi(0)}^0 U_{\text{av}}^2(\xi) d\xi \right], \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Prova: Considere a transformação *backstepping*

$$w(x, t) = u_{\text{av}}(x, t) - kH \left[\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x u_{\text{av}}(\sigma, t) (\phi^{-1}(t) - t) d\sigma \right] \quad (3.69)$$

que mapeia o sistema (3.65)-(3.68) no sistema alvo

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{\text{av}}(t) = kH \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + w(0, t), \quad (3.70)$$

$$w_t(x, t) = \pi(x, t) w_x(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad (3.71)$$

$$w(1, t) = -\frac{1}{c} \partial_t u_{\text{av}}(1, t). \quad (3.72)$$

O sistema (3.70)-(3.72) é a configuração em cascata padrão

$$w \rightarrow \tilde{\vartheta}_{\text{av}}. \quad (3.73)$$

Considere agora $w(1, t)$. É fácil perceber que

$$w_t(1, t) = \partial_t u_{\text{av}}(1, t) - kH u_{\text{av}}(1, t), \quad (3.74)$$

onde $\partial_t u_{\text{av}}(1, t) = \dot{U}_{\text{av}}(t)$. O inverso de (3.69) é dado por

$$\begin{aligned} u_{\text{av}}(x, t) &= w(x, t) + kH e^{kHx(\phi^{-1}(t)-t)} \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \\ &+ kH \int_0^x e^{kH(x-\sigma)(\phi^{-1}(t)-t)} u_{\text{av}}(\sigma, t) (\phi^{-1}(t) - t) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Substituindo-se (3.72) e (3.75) em (3.74), obtém-se

$$\begin{aligned} w_t(1, t) &= -cw(1, t) - kHw(1, t) - k^2 H^2 e^{kH(\phi^{-1}(t)-t)} \tilde{\vartheta}_{\text{av}} \\ &- k^2 H^2 \int_0^1 e^{kH(1-\sigma)(\phi^{-1}(t)-t)} u_{\text{av}}(\sigma, t) (\phi^{-1}(t) - t) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t) = \frac{\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^1 (1+x)w^2(x, t)dx + \frac{1}{2}w^2(1, t), \quad (3.77)$$

onde o parâmetro $a > 0$ será escolhido posteriormente.

A partir da *Hipótese 1*, o termo de velocidade de propagação satisfaz $0 < \pi(x, t) < \bar{\Pi}$, onde $\bar{\Pi}$ é uma constante positiva. Assim sendo, têm-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq kH \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0, t) \\ &+ \frac{a\bar{\Pi}}{2} \int_0^1 (1+x)2w(x, t)w_t(x, t)dx \\ &+ w(1, t)w_t(1, t) \\ &\leq kH \tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) + \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0, t) + a\bar{\Pi}w^2(1, t) \\ &- \frac{a\bar{\Pi}}{2}w^2(0, t) - \frac{a\bar{\Pi}}{2} \int_0^1 w^2(x, t)dx \\ &+ w(1, t)w_t(1, t) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Desenvolvendo a desigualdade de *Young*

$$\tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t)w(0, t) \leq \left| \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) \right| |w(0, t)|, \quad (3.79)$$

$$\leq \frac{\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)}{2a\bar{\Pi}} + \frac{a\bar{\Pi}w^2(0, t)}{2} \quad (3.80)$$

$$\leq \frac{-kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)}{2} + \frac{a\bar{\Pi}w^2(0, t)}{2}. \quad (3.81)$$

Relembrando que $k > 0$ e $H < 0$, escolhe-se

$$a = -\frac{1}{kH\bar{\Pi}}, \quad (3.82)$$

e aplicando a desigualdade de Young no segundo termo do lado direito de (3.78), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq kH\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - kH\frac{\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)}{2} - \frac{a\bar{\Pi}}{2}\int_0^1 w^2(x,t)dx \\
&\quad + w(1,t)[w_t(1,t) + a\bar{\Pi}w(1,t)] \\
&\leq -\frac{1}{2a\bar{\Pi}}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{a\bar{\Pi}}{2}\int_0^1 w^2(x,t)dx \\
&\quad + w(1,t)[w_t(1,t) + a\bar{\Pi}w(1,t)]. \tag{3.83}
\end{aligned}$$

Agora, considere (3.78) juntamente com (3.76). Completando-se os quadrados e usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young para escrevermos $|w(1,t)|\|k^2H^2e^{kH(1-\sigma)}\|\|w(t)\| \leq \frac{a\bar{\Pi}}{4}\|w(t)\|^2 + \frac{1}{a\bar{\Pi}}\|k^2H^2e^{kH(1-\sigma)}\|^2w^2(1,t)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4a\bar{\Pi}}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{a\bar{\Pi}}{4}\int_0^1 w^2(x,t)dx \\
&\quad + a\bar{\Pi}|k^2H^2e^{kH}|^2w^2(1,t) \\
&\quad + \frac{1}{a\bar{\Pi}}\|k^2H^2e^{kH(1-\sigma)}\|^2w^2(1,t) \\
&\quad + [a\bar{\Pi} - kH]w^2(1,t) - cw^2(1,t). \tag{3.84}
\end{aligned}$$

De (3.83), chega-se a

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{4a\bar{\Pi}}\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t) - \frac{a\bar{\Pi}}{8}\int_0^1 (1+x)w^2(x,t)dx \\
&\quad - (c - c^*)w^2(1,t), \tag{3.85}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
c^* &= a\bar{\Pi} - kH + a\bar{\Pi}|k^2H^2e^{kH}|^2 \\
&\quad + \frac{1}{a\bar{\Pi}}\|K^2H^2e^{kH(1-\sigma)}\|^2. \tag{3.86}
\end{aligned}$$

Consequentemente, de (3.85), se c é escolhido tal que $c > c^*$, obtém-se

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t), \tag{3.87}$$

para algum $\mu > 0$. Portanto, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido da norma completa

$$\left(\left|\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)\right|^2 + \int_0^1 w^2(x,t)dx + w^2(1,t)\right)^{1/2}, \tag{3.88}$$

isto é, nas variáveis transformadas $(\vartheta_{\text{av}}, w)$.

A partir de $\left(\left|\tilde{\vartheta}_{\text{av}}^2(t)\right|^2 + \int_0^1 u_{\text{av}}^2(x,t)dx + u_{\text{av}}^2(1,t)\right)^{1/2}$ obtém-se a estabilidade exponencial no sentido da norma L_2 das variáveis originais $\tilde{\theta}_{\text{av}}$ e u_{av} , e portanto será ne-

cessário mostrar que existe números positivos de α_1 e α_2 tal que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (3.89)$$

onde $\Psi(t) = \left| \tilde{v}_{\text{av}}^2(t) \right|^2 + \int_0^1 u_{\text{av}}^2(x, t) dx + u_{\text{av}}^2(1, t)$, ou equivalentemente,

$$\Psi(t) = \left| \tilde{\theta}_{\text{av}}(t - D(t)) \right|^2 + \int_{t-D(t)}^t U_{\text{av}}^2(\tau) d\tau + U_{\text{av}}^2(t). \quad (3.90)$$

Isso é fácil de se estabelecer usando (3.69),(3.75),(3.77) e empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e outros cálculos, como na prova do Teorema 2.1 em (KRSTIC, 2009). Conseqüentemente, a partir de (3.87), obtém-se

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (3.91)$$

que é equivalente à desigualdade (3.68). \square

No Teorema 2 foi provado que o sistema da média em malha fechada (3.52) - (3.54) com a PDE de transporte para representação de atraso é também exponencialmente estável. Em (OLIVEIRA; KRSTIĆ, 2015b) e (OLIVEIRA; KRSTIĆ; TSUBAKINO, 2017) foram aplicados os resultados do Teorema da Média para atrasos constantes. Contudo, para atrasos variantes no tempo não existe nenhum teorema da média adequado, tal como (HALE; LUNEL et al., 1990) e (LEHMAN, 2002). Se algum teorema da média compatível existisse, então seria possível estabelecer o seguinte resultado para atrasos variantes no tempo.

Resultado: *Existe $c^* > 0$ tal que, $\forall c \geq c^*$, $\exists w^*(c) > 0$ tal que, $\forall \omega > \omega^*$, o sistema em malha fechada atrasado (3.23) e (3.52), com $G(t)$ em (3.16), $\tilde{\theta}(t-D(t)), U(\sigma)$, $\forall \sigma \in [t-D(t), t]$, tem uma única solução periódica localmente exponencialmente estável em t no período $\Pi = 2\pi/\omega$, denotado por $\tilde{\theta}^\Pi(t-D(t)), U^\Pi(\sigma)$, $\forall \sigma \in [t-D(t), t]$, satisfazendo, $\forall t \geq 0$:*

$$\left(\left| \tilde{\theta}^\Pi(t-D(t)) \right|^2 + [U^\Pi(t)]^2 + \int_{t-D(t)}^t [U^\Pi(\tau)]^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \quad (3.92)$$

Além do mais,

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega). \quad (3.93)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (3.94)$$

A convergência assintótica para vizinhança do extremo no caso de atraso variante no tempo é análoga àquela apresentada no Capítulo 3 para o caso de atraso constante, realizando-se pequenas alterações omitidas aqui (Veja Passo 8 da prova do Teorema 1).

3.5 Resultados da Simulação

Considere o seguinte mapa estático quadrático não linear

$$Q(\theta) = 5 - 0.1(\theta - 2)^2 \quad (3.95)$$

que está sujeito a atraso de saída $D(t) = 2 \sin(\omega t)$ com $\omega = 0.1$ rad/s. De acordo com (3.95), o ponto de extremo é $(\theta^*, y^*) = (2, 5)$ e a Hessiana do mapeamento estático é $H = -0.2$. A seguir, simulações numéricas do preditor (3.23) são apresentadas, onde \hat{H} é dado por (3.13) e $c = 20$. Para os testes utilizou-se os seguintes parâmetros: $a = 0.2$, $\omega = 10.5$, $k = 0.2$ e $\theta(0) = 0$.

A saída do sistema $y(t)$ é apresentada em três situações: (a) sem atraso (Figura 16), (b) na presença de atraso de entrada e saída, mas sem qualquer compensação no atraso (Figura 17) e (c) com atraso de entrada e saída e compensação baseada em preditor (Figura 18). As curvas em vermelho pertencem ao preditor influenciado pelo atraso e as curvas em azul ao caso livre de atraso. Na Figura 19 é exibido o parâmetro de entrada θ convergindo para θ^* . A Figura 20 mostra a estimativa da Hessiana desconhecida $H = -0.2$. Na Figura 21 é apresentada a convergência do sinal de controle $U(t)$. Por fim, na Figura 22 temos o comportamento do atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$ do tipo cossenoidal e o comportamento de sua derivada $\dot{D}(t) = -0.2 \sin(0.1t)$ na Figura 23.

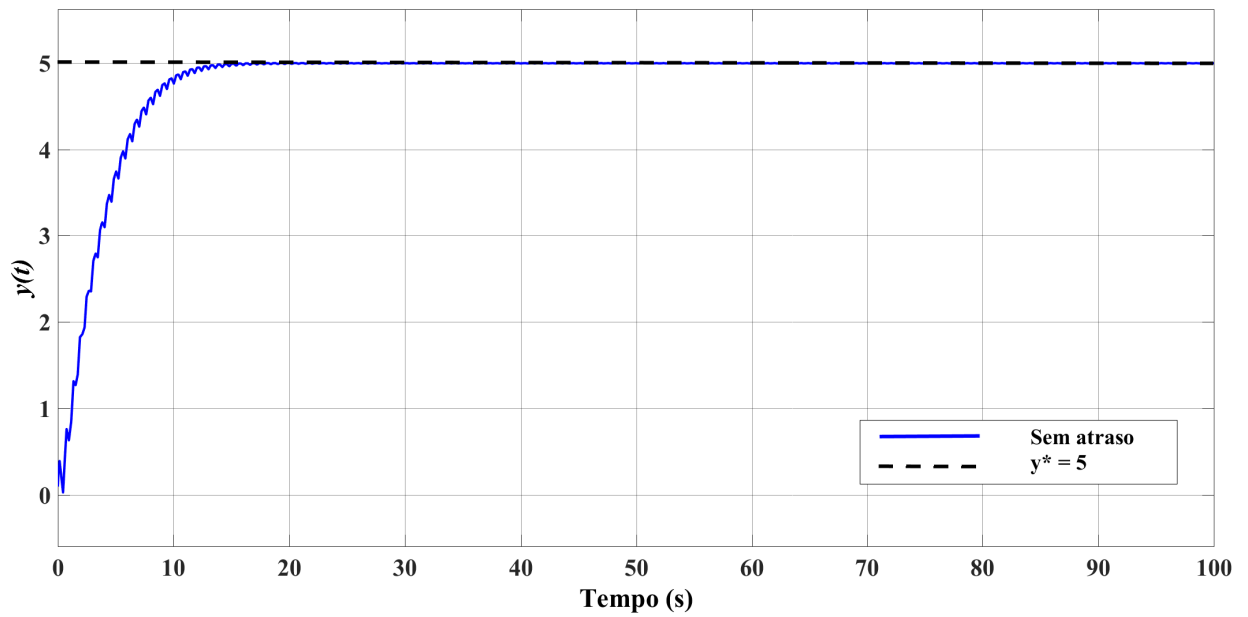


Figura 16 - Saída do sistema $y(t)$ sem atrasos.

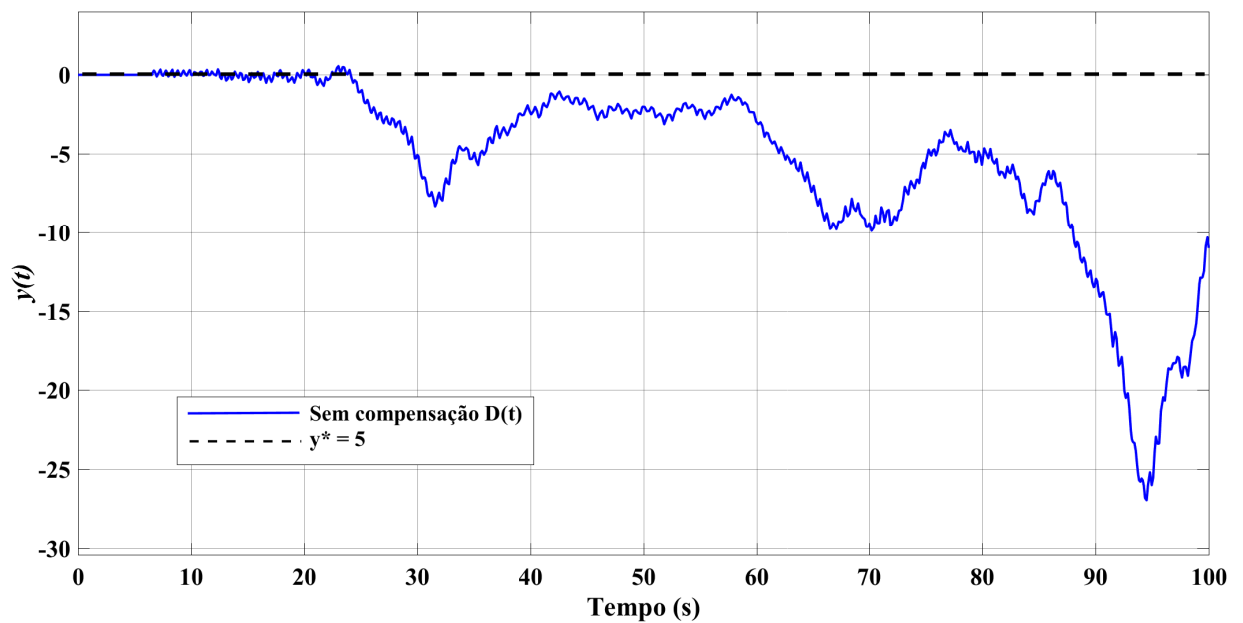


Figura 17 - Saída do sistema $y(t)$ na presença do atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5s$ de entrada/saída sem qualquer compensação no atraso via preditor.

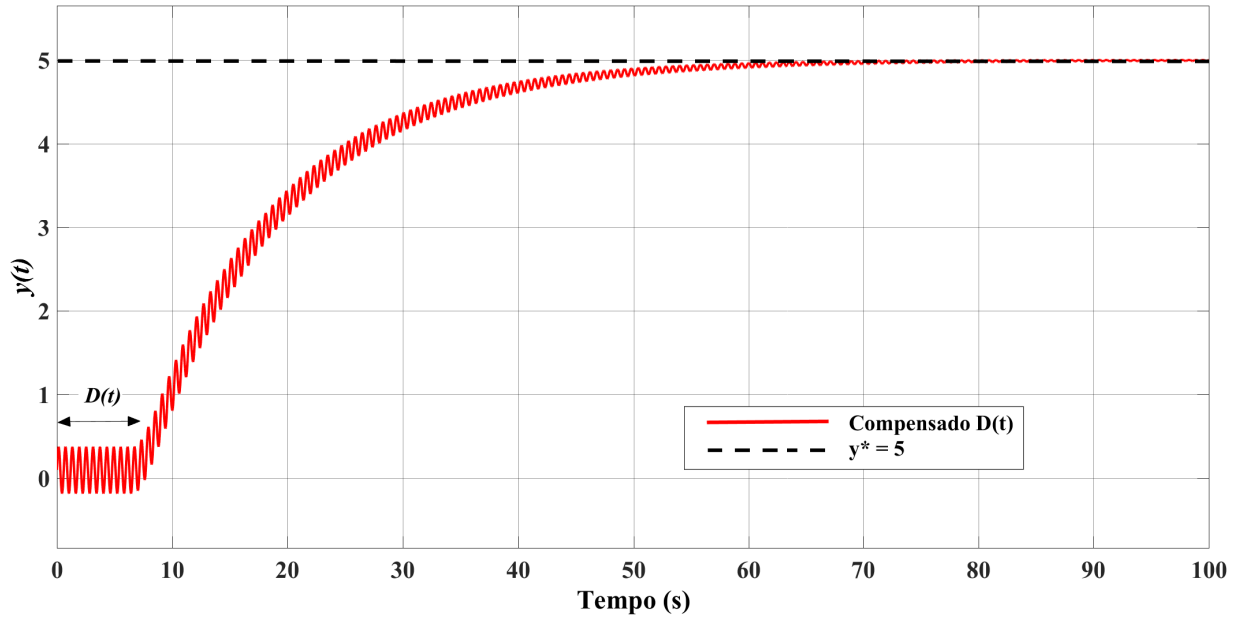


Figura 18 - Saída do sistema $y(t)$ na presença do atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5s$ de entrada/saída com a compensação baseada em preditor.

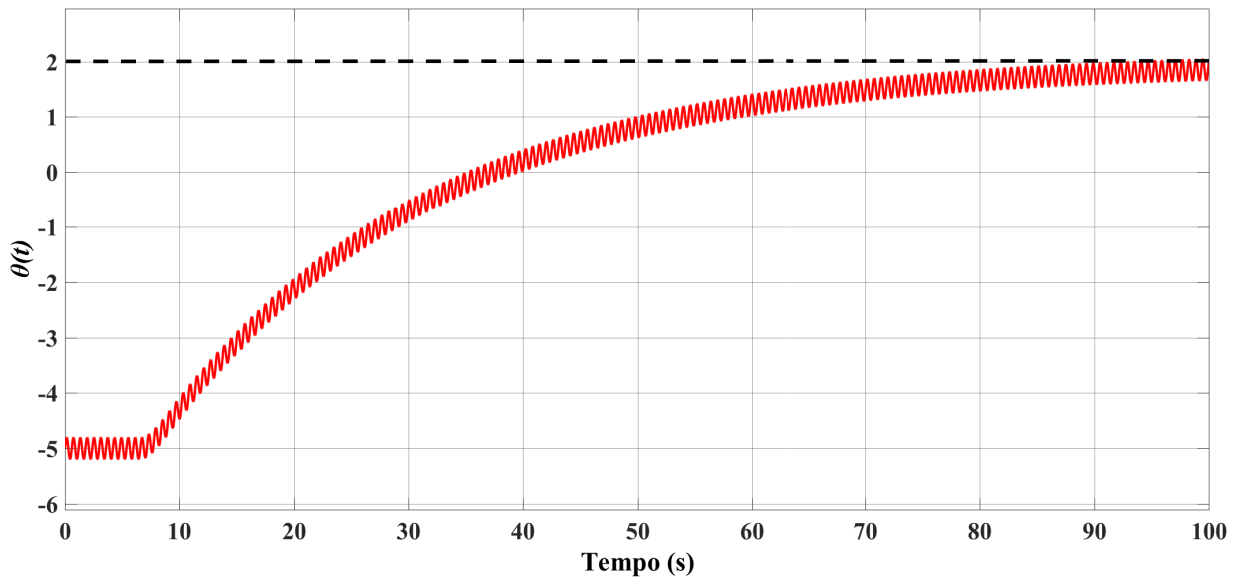


Figura 19 - Parâmetro de entrada do sistema $\theta(t)$.

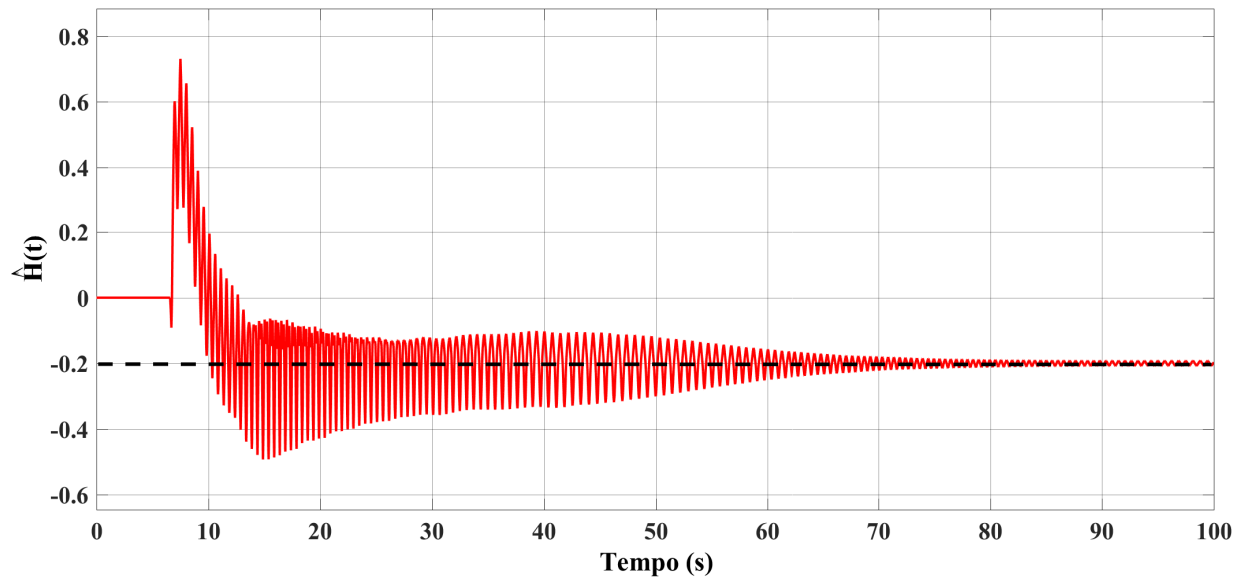


Figura 20 - Convergência da Hessiana $\hat{H}(t)$ atingindo o valor $H = -0.2$.

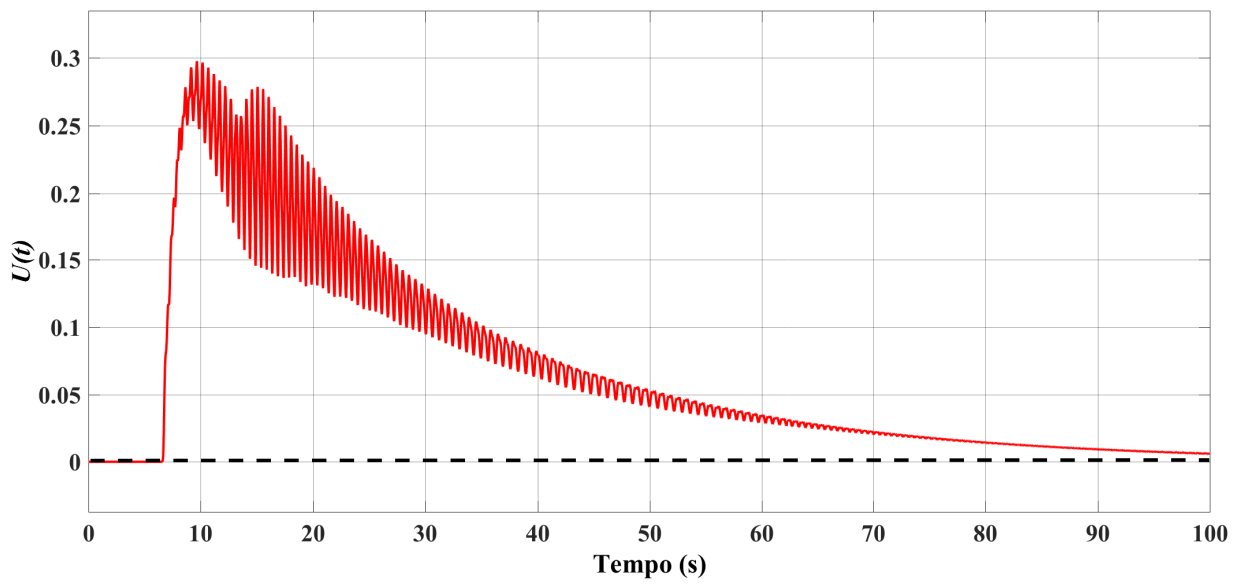


Figura 21 - Convergência do sinal de controle $U(t)$.

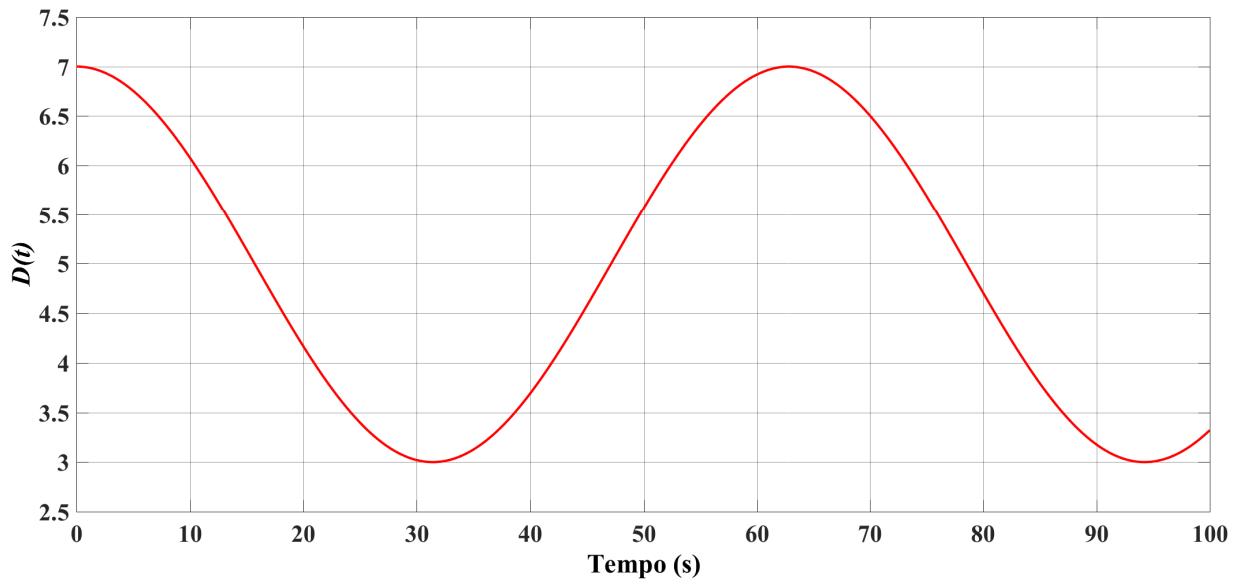


Figura 22 - Atraso $D(t) = 2 \cos(0.1t) + 5$.

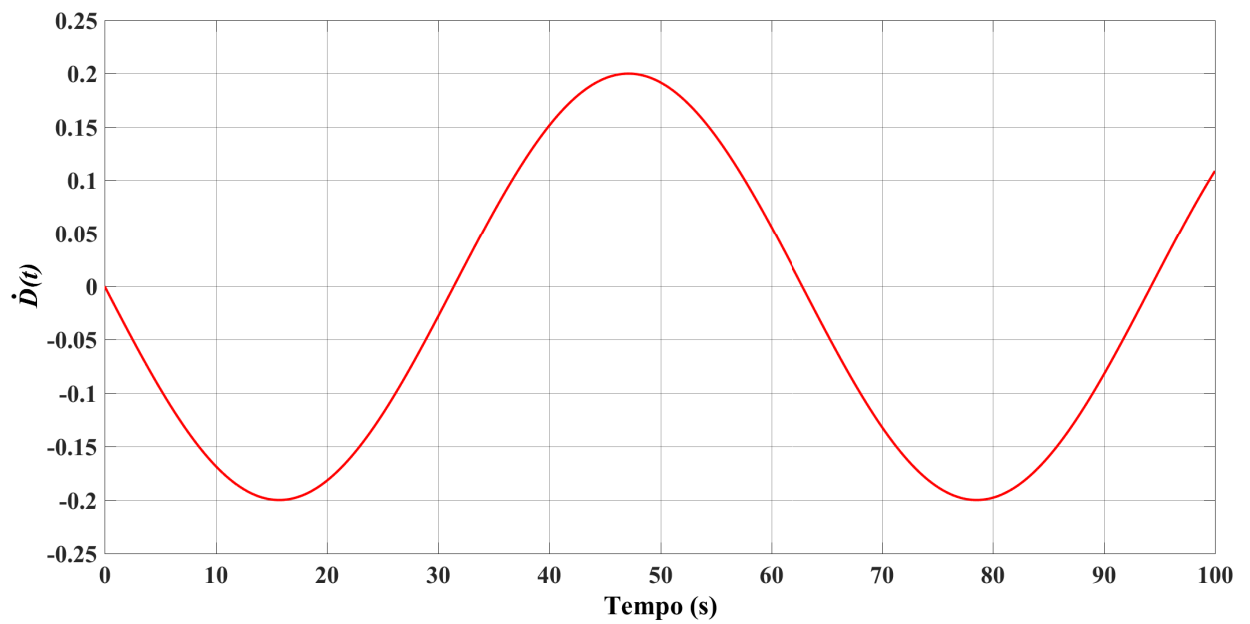


Figura 23 - Derivada do atraso $\dot{D}(t) = -0.2 \sin(0.1t)$.

CONCLUSÃO

A seguir é feita uma síntese dos resultados obtidos e as conclusões deles. Também são apresentadas ideias para a realização de trabalhos complementares, visando dar continuidade aos desenvolvimentos da presente dissertação.

Contribuições

O propósito deste trabalho foi apresentar e provar a estabilidade local de um algoritmo de busca extremal baseado no método Gradiente utilizando um preditor com a estimativa da Hessiana para compensar atrasos variantes no tempo na entrada e/ou saída de um mapeamento escalar estático. Portanto novas estratégias de realimentação via preditor com estimativa da Hessiana baseada em perturbações senoidais foram introduzidas para lidar com esse tipo de atraso variável no sistema. A abordagem resultante preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema a uma pequena vizinhança do ponto de extremo, mesmo na presença de atrasos arbitrários nos atuadores e sensores. Uma demonstração rigorosa é dada explorando a transformação *backstepping* e o teorema da média em dimensões infinitas. A taxa de convergência do método de ES gradiente considerado aqui é ditada pela Hessiana. Entretanto a compensação do atraso poderia ser alcançada ainda com uma taxa de convergência escolhida arbitrariamente se o método de Newton fosse aplicado, melhorando ainda mais o desempenho do controlador proposto.

Inicialmente, durante as simulações sem a presença de atrasos, foi observado que o controlador extremal para mapeamentos estáticos com os parâmetros de controle ajustados, consegue levar a saída y para o seu máximo y^* quando a entrada θ alcança o valor de θ^* . A motivação para o estudo de busca extremal com atrasos se deve ao fato de que ao ser inserido um pequeno atraso, o sistema em malha fechada se torna instável. Dessa forma, faz-se necessário a construção de um preditor para compensar o atraso inserido e alcançar novamente o objetivo de controle, levando a saída para o seu valor máximo.

Ao considerar a proposta desta dissertação que é em inserir e analisar o comportamento de atrasos variantes no tempo em mapeamentos estáticos, foi observado que o preditor construído para atrasos constantes não obteve êxito e a saída tornou-se instável. Portanto, houve-se a necessidade de se implementar um novo preditor que considerasse atrasos variantes no tempo. Duas implementações foram desenvolvidas e abordadas, avaliando-se

questões de simplicidade de implementação prática. A partir da substituição do preditor, para atrasos variantes no tempo, o controlador extremal volta a alcançar o seu objetivo com sucesso.

Sugestões para trabalhos futuros

Em relação às pesquisas futuras, o trabalho pode se estender nas vertentes de ES abordados no Capítulo 2, tais como a utilização do algoritmo baseado em Newton, no qual a taxa de convergência não depende mais da Hessiana que é desconhecida e sim de um parâmetro a ser ajustado pelo usuário (OLIVEIRA; KRSTIĆ; TSUBAKINO, 2017). Além disso pode-se usar uma versão estocástica do algoritmo da Figura 15 substituindo os sinais (3.12) e (3.14) por suas versões estocásticas. Fatores importantes a serem explorados também seriam: trabalhar com sistemas que possuem atrasos desconhecidos e admitir mapeamentos mais desafiadores incluindo dinâmicas na planta, atrasos variantes e distintos em múltiplas entradas do sistema a ser controlado.

REFERÊNCIAS

- ADETOLA, V.; DEHAAN, D.; GUAY, M. Adaptive extremum-seeking receding horizon control of nonlinear systems. *American Control Conference*, v. 4, p. 2937–2942, 2004.
- AMINDE, N. O. *CONTROLE EXTREMAL VIA FUNÇÕES DE MONITORAÇÃO E REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA*. Dissertação (Mestrado) — COPPE/UFRJ - PROGRAMA ENG. ELETRÔNICA, 2013.
- ARIYUR, K. B.; KRSTIC, M. *Real-time optimization by extremum-seeking control*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons, 2003.
- ASTROM, K. J.; B.WITTENMARK. *Adaptive Control*. Canada: Addison-Wesley, 2005.
- BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIC, M. *Nonlinear control under nonconstant delays*. [S.l.]: SIAM, 2013.
- BRESCH-PIETRI, D.; PETIT, N. Robust compensation of a chattering time-varying input delay. In: IEEE. *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*. [S.l.], 2014. p. 457–462.
- CHU, J.; SU, H.; HU, X. A time-delay control algorithm for an industrial electric heater. *Journal of Process Control*, v. 3, p. 219–224, 1993.
- DRAPER, C.; LI, Y. Principles of optimizing control systems and an application to the internal combustion engine. *R. Oldenburger*, . 1951.
- DUGARD, L.; VERRIEST, E. I. *Stability and Control of Time-delay Systems*. Berlin, Germany: Springer, 1997.
- GHAFFARI, A.; KRSTIĆ, M.; NEŠIĆ, D. Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 8, p. 1759–1767, 2012.
- GU, K.; KHARITONOV, L. V.; CHEN, J. Stability of time-delay systems. *Control Engineering, Birkhäuser, Boston*, 2003.
- HALE, J.; LUNEL, S. M. V. Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, v. 2, p. 463–494, 1990.
- HALE, J.; LUNEL, S. V. et al. Averaging in infinite dimensions. *J. Integral Equations Appl*, v. 2, n. 4, p. 463–494, 1990.
- HSIN-HSIUNG, W. R.; KRSTIC, M.; BASTIN, G. Optimizing bioreactors by extremum seeking. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, v. 13, n. 651, p. 669, 1999.
- KARAFYLLIS, I.; KRSTIC, M. Numerical schemes for nonlinear predictor feedback. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, Springer, v. 26, n. 4, p. 519–546, 2014.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2002.
- KRSTIC, M. Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: inverse optimality and robustness to delay mismatch. *Automatica*, v. 44, p. 2930–2935, 2008.

- KRSTIC, M. Delay compensation for nonlinear, adaptive, and pde systems. *Birkhauser*, 2009.
- KRSTIĆ, M.; WANG, H.-H. Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 595–601, 2000.
- LEBLANC, M. Sur l'électrification des chemins de fer au moyen de courants alternatifs de frequence elevee. *Revue générale de l'électricité*, . 1922.
- LEHMAN, B. The influence of delays when averaging slow and fast oscillating systems: overview. *IMA Journal of Mathematical Control & Information*, v. 19, p. 201–215, 2002.
- LIU, S.-J.; KRSTIC, M. *Stochastic averaging and stochastic extremum seeking*. California, USA: Springer Science & Business Media, 2012.
- MAHMOUD, M. S. *Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems*. New York: Control Engineering Series, 2000.
- MIRKIN, L. On the approximation of distributed-delay control laws. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 51, n. 5, p. 331–342, 2004.
- MONDIÉ, S.; MICHIELS, W. Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 48, n. 12, p. 2207–2212, 2003.
- NICULESCU, S. I. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer-Verlag, London: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2001. v. 269.
- NOGUEIRA, E. M. *Controle via Busca Extremal da Produção de Petróleo em Poços Operando com Elevação Artificial por Injeção de Gás*. 2012.
- OLIVEIRA, T. R.; HSU, L.; PEIXOTO, A. J. Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with application to extremum-seeking control. *Automatica*, Elsevier, v. 47, n. 9, p. 2029–2038, 2011.
- OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M. Gradient extremum seeking with delays. *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, p. 227–232, 2015.
- OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M. Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 48, n. 12, p. 304–309, 2015.
- OLIVEIRA, T. R.; KRSTIĆ, M.; TSUBAKINO, D. Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 62, n. 4, p. 1911–1926, 2017.
- TAN, Y.; MOASE, W.H.; MANZIE, C.; NEŠIĆ, D.; MAREELS, I.M.Y. Extremum seeking from 1922 to 2010. In: IEEE. *Control Conference (CCC), 2010 29th Chinese*. [S.l.], 2010. p. 14–26.
- TAN, Y.; NEŠIĆ, D.; MAREELS, I. On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, v. 42, p. 889–903, 2006.
- TAN, Y.; NEŠIĆ, D.; MAREELS, I. On the choice of dither in extremum seeking systems: A case study. *Automatica*, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 1446–1450, 2008.

TAN, Y.; NEŠIĆ, D.; MAREELS, I. On global extremum seeking in the presence of local extrema. *Automatica*, v. 45, p. 245–251, 2009.

TEIXEIRA, B. O. S.; JOTA, F. G.; TEIXEIRA, M. G. Modelagem, controle e otimização do processo dos fornos de reaquecimento de placas. *Revista Controle & Automação*, v. 18, p. 67–93, 2007.