



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Faculdade de Engenharia

Nataly Ines Challapa Molina

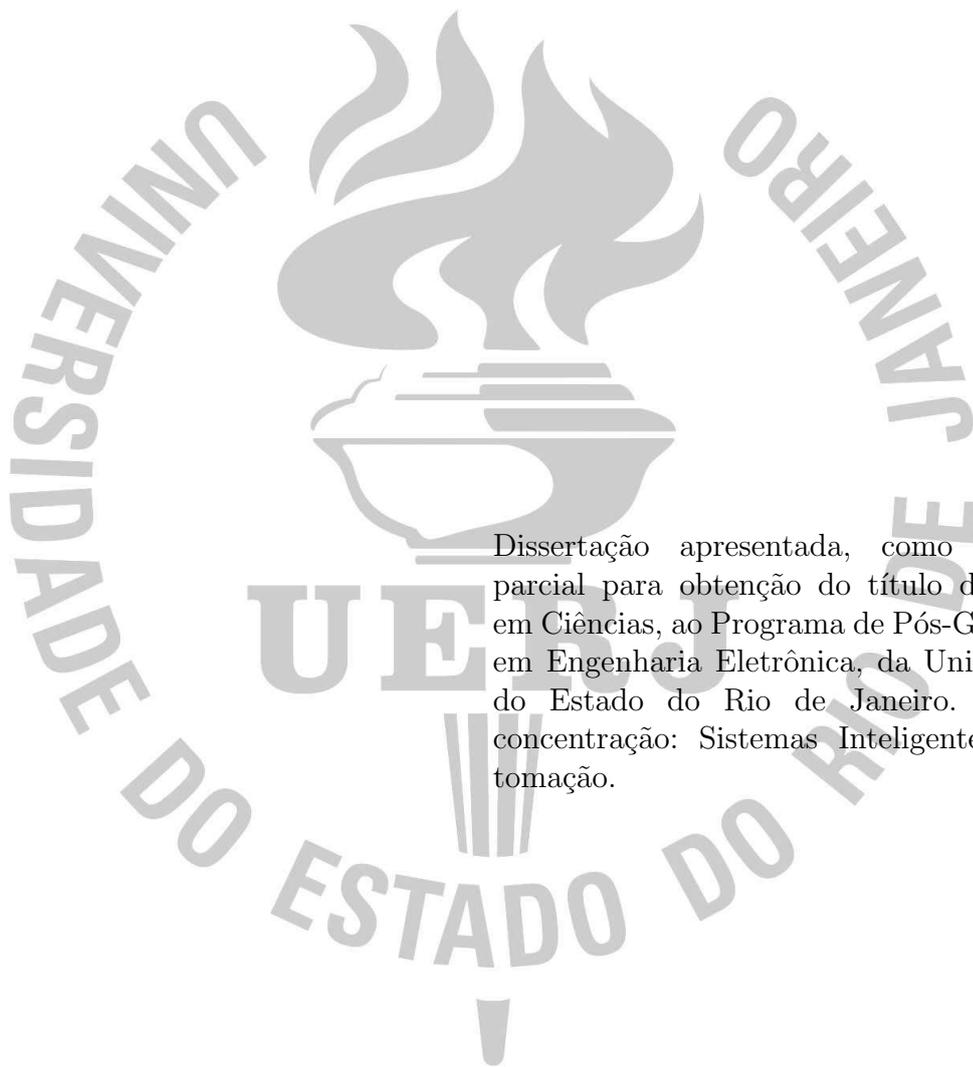
**Modelagem e Controle por Modo Deslizante do Conteúdo da
Água no Solo para Irrigação de Precisão**

Rio de Janeiro

2017

Nataly Ines Challapa Molina

**Modelagem e Controle por Modo Deslizante do Conteúdo da Água no Solo
para Irrigação de Precisão**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientador: Prof. Dr. José Paulo V.S. da Cunha

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

M722 Molina, Nataly Ines Challapa.
Modelagem e controle por modo deslizante do conteúdo da
água no solo para irrigação de precisão / Nataly Ines Challapa
Molina. - 2017.
103 f.

Orientador: José Paulo Vilela Soares da Cunha.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica. 2. Controle por modo deslizante -
Dissertações. 3. Solos - Irrigação - Dissertações. 4. Equações
diferenciais parciais - Dissertações. 5. Controle Proporcional
integral – Dissertações. I. Cunha, José Paulo Vilela Soares da.
II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Título.

CDU 681.511.4

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total
ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Nataly Ines Challapa Molina

**Modelagem e Controle por Modo Deslizante do Conteúdo da Água no Solo
para Irrigação de Precisão**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 17 de Fevereiro de 2017

Banca Examinadora:

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc. (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Alessandro Jacoud Peixoto, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UFRJ

Profa. Vilma Alves de Oliveira, Ph.D.

Faculdade de Engenharia - USP

Rio de Janeiro

2017

O impossível é temporário

Anônimo

DEDICATÓRIA

A minha amada mãe *Valentina Huarachi de Challapa*, que dedicou seu tempo para educar-me e ensinar-me a alcançar meus objetivos de forma correta na margem do respeito às pessoas e à vida.

AGRADECIMENTO

A Deus por ter sido meu pastor e fez que nada me faltasse neste tempo do Mestrado.

Ao CNPq pela bolsa de mestrado PEC-PG.

A meu pai *Angel* por ter me apoiado neste tempo que estive afastada do lar. A minha irmã *Pilar Selma* pelas palavras de força para concluir o iniciado. E a toda minha família que cuidou de minha mãe durante minha ausência.

A meu querido *Fernando* pela compreensão e a companhia de todos os dias, mesmo sem estar presente fisicamente, obrigada pelas conversas de incentivo.

Ao meu professor e orientador *José Paulo*, que respeito muito e agradeço pela enorme paciência e aprendizado que o senhor compartilhou comigo neste período de minha vida no Rio de Janeiro. Obrigada de coração querido professor *José Paulo* que Deus o abençoe sempre.

A meus colegas de mestrado *George, Gabriel, César* pela companhia e anedotas vividas.

RESUMO

CHALLAPA MOLINA, Nataly Ines. *Modelagem e Controle por Modo Deslizante do Conteúdo da Água no Solo para Irrigação de Precisão*. 103f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2017.

Nesta Dissertação são propostas estratégias de controle para a irrigação. O objetivo é controlar o conteúdo da água no solo. O modelo da dinâmica da propagação da água no solo é representado pela equação diferencial parcial de Richards. Uma das estratégias de controle analisadas usa ações proporcional e integral (PI). A função de transferência da equação de Richards é usada para a análise e o projeto do controlador PI, de uma forma diferente da encontrada na literatura. Outras duas estratégias desenvolvidas são baseadas em controle por modo deslizante (*sliding mode control* — SMC) para o controle da média do conteúdo da água numa faixa do solo e do conteúdo da água no solo em uma profundidade especificada, para as quais foram propostas superfícies de deslizamento não usuais. Foi abordado o SMC não colocado de equações diferenciais parciais, isto é, quando o sensor e o atuador estão em posições distintas, o que também não foi encontrado na literatura. Suas propriedades de estabilidade são estudadas com o auxílio de funções de Lyapunov e o critério frequencial de estabilidade de Mikhailov. O desempenho dos controladores é avaliado por simulações, nas quais se verifica que o SMC torna a umidade do solo imune a perturbações causadas pela evaporação da água.

Palavras-chave: controle da irrigação; equação de Richards; equações diferenciais parciais; controle por modo deslizante; controle PI.

ABSTRACT

CHALLAPA MOLINA, Nataly Ines. *Modeling and Sliding Mode Control of the Water Content for Precision Irrigation*. 103f. Dissertation (Master Degree in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, University of the State of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2017.

This thesis proposes control strategies for irrigation control. The objective is to control the water content in the soil. The dynamic model of water propagation in the soil is represented by the Richards partial differential equation. One of the analyzed control strategies applies proportional and integral (PI) actions. The transfer function of the Richards equation is used for PI controller analysis, unlike previous approaches found in the literature. Two other sliding mode control (SMC) strategies are developed to control the mean water content and water content at a specified depth. For these purposes, unusual sliding manifolds are proposed. It was considered the non-collocated SMC of partial differential equations, that is, where the sensor and the actuator are at different positions, which was also not found in the literature. Their stability properties are analyzed using Lyapunov functions and the Mikhailov frequency criterion of stability. The performances of the controllers are evaluated by simulations, which lets verify that the SMC makes the water content of the soil immune to disturbances due water evaporation.

Keywords: irrigation control; Richard equation; partial differential equations; sliding mode control; PI control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Irrigação por sulco. Extraído de (GONZALEZ; P, 1994, Fig 21)	22
Figura 2 - Irrigação por inundação. Extraído de (GONZALEZ; P, 1994, Fig 12)	22
Figura 3 - Sistema portátil. Extraído de (BISCARO, 2009, Figura 2)	23
Figura 4 - Sistema permanente. Extraído de (BISCARO, 2009, Figura 3)	24
Figura 5 - Mecanismo - Pivô central. Extraído de (BISCARO, 2009, Figura 31)	24
Figura 6 - Irrigação por localizada, gotejamento. Extraído de (JOBIM, 2013, Figura 9)	25
Figura 7 - Foto de protótipo do irrigador Atmomagnético e do Sensor IG. Extraído de (CALBO; VAZ; RABELLO, 2014, Figura 2)	27
Figura 8 - Posição dos dois sensores.	28
Figura 9 - Foto da Vista de frente do cabeçal de controle do equipamento. Extraído de (NOGUEIRA et al., 2001, Figura 14)	29
Figura 10- Solo saturado. Adaptado de (LIBARDI, 2005, Fig. 7.2).....	31
Figura 11- Solo Não saturado. Adaptado de (LIBARDI, 2005, Fig. 7.2)	32
Figura 12- Diagrama do solo como uma mistura com três fases. Adaptado de (HIL- LEL, 1998, Fig. 1.4).....	33
Figura 13- Sinal do Potencial de pressão. Adaptado de (HILLEL, 1998, Fig. 6.6).....	35
Figura 14- Coordenadas do sistema, fluxo da água no solo.	39
Figura 15- Conteúdo da água, $\theta(t)$, dinâmica não-linear em uma profundidade $L=0,50$ m.	42
Figura 16- Conteúdo da água, $\theta(t)$, dinâmica não-linear em uma profundidade $L=0,15$ m.	42
Figura 17- Conteúdo de água $\theta(t)$, dinâmica linear em uma profundidade de $L=0,50$ m.	44
Figura 18- Conteúdo de água $\theta(t)$, dinâmica linear em uma profundidade de $L=0,15$ m.	44
Figura 19- Resposta em frequência da função de transferência da equação de Ri- chards com fluxo horizontal (Linha solida) e com fluxo vertical (Linha tracejada).	50

Figura 20- Diagrama de blocos do sistema de controle.	51
Figura 21-Diagrama de Nyquist da malha direta da função de transferência da $H(j\omega)$, frequências analisadas.	53
Figura 22- Família de curvas da MF, condições de contorno Dirichlet ($0,0049 \leq \bar{\omega}_f \leq 0,2193$).	56
Figura 23- MG com condições de contorno Dirichlet para $K_p=1$ ($4,93 \leq \bar{\omega}_g \leq 10,99$).	58
Figura 24- Família de curvas da MF, condições de contorno Neumann-Dirichlet ($0,01 \leq \bar{\omega}_f \leq 0,3$).	61
Figura 25-MG com condições de Contorno Neumann-Dirichlet para $K_p=1$ ($1,23 \leq \bar{\omega}_g \leq 10,97$).	62
Figura 26- Resposta em malha aberta do conteúdo de água no solo. $u=5,78 \times 10^{-7}$ m/s.	63
Figura 27- MF, primeira escolha de 80° , segunda escolha de 93° . $L=0,15$ m. $D=8,46 \times 10^{-6}$ m ² /s.....	64
Figura 28- MG, primeira escolha de 19,15, segunda escolha de 19,69. $L=0,15$ m. $D=8,46 \times 10^{-6}$ m ² /s.....	64
Figura 29-Simulação do controlador PI em malha fechada com MF= 80° e MG=19,15: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.	65
Figura 30- Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo con- trolador PI com MF= 80° e MG=19,15.	65
Figura 31-Simulação do controlador PI em malha fechada com MF= 93° e MG=19,69: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.	66
Figura 32- Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo con- trolador PI com MF= 93° e MG=19,69.	66
Figura 33- Resposta em malha aberta do conteúdo de água no solo, considerando o fluxo vertical. $u=5,78 \times 10^{-7}$ m/s.....	67

Figura 34-Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical com MF=91° e MG=16,48: (a) conteúdo de água no solo na profundidade L=0,15 m e (b) o sinal de controle.	68
Figura 35- Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador PI com MF=91° e MG=16,48.	68
Figura 36-Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com MF=91° e MG=16,48: (a) conteúdo de água no solo na profundidade L=0,15 m e (b) o sinal de controle.	69
Figura 37- Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com MF=91° e MG=16,48, tempo estendido da Figura 36: (a) conteúdo de água no solo na profundidade L=0,15 m e (b) o sinal de controle.	70
Figura 38- Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador PI com d_0	71
Figura 39-Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com MF=60° e MG=5,37: (a) conteúdo de água no solo na profundidade L=0,50 m e (b) o sinal de controle.	71
Figura 40- Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com MF=60° e MG=5,37, tempo estendido da Figura 39: (a) conteúdo de água no solo na profundidade L=0,50 m e (b) o sinal de controle.	72
Figura 41 - Gráfico de $P(j\omega)$	81
Figura 42- Gráfica de $K_i(j\omega)$. O máximo ganho permitido \bar{K}_i é indicado.	81
Figura 43-Simulação do controlador liga-desliga em malha fechada: (a) conteúdo de água no solo na profundidade L=0,15 m e (b) o sinal de controle.	83
Figura 44-Simulação do controlador da média do conteúdo da água no solo, (a) o conteúdo médio de água no solo até uma profundidade L=0,15 m, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.	84
Figura 45-Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador da média do conteúdo de água (L=0,15 m).	85

Figura 46-Simulação do controlador da média do conteúdo da água no solo, (a) o conteúdo médio de água no solo até uma profundidade $L=0,50$ m, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.	86
Figura 47- Simulação do controlador do conteúdo da água em malha fechada na profundidade $L=0,15$ m, (a) conteúdo da água no solo, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.	86
Figura 48-Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador controlador do conteúdo da água na profundidade $L=0,15$ m.	87
Figura 49-Simulação da resposta do controlador do conteúdo da água em malha fechada na profundidade $L=0,50$ m, (a) conteúdo da água no solo, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.	87
Figura 50- Quantidade de água gasta por cada controlador. Profundidade $L = 0,15$ m.	88
Figura 51- Gráfico gerado pelo projeto no Simulink.	100
Figura 52- Gráfico gerado pela ferramenta pdepe do Matlab.	101
Figura 53- Discrepância entre as duas simulações apresentadas nas Figura 51 e Figura 52.	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Eficiências médias de sistemas de irrigação.(NETTO, 1998, Quadro 20.5) . 25

LISTA DE SIGLAS

MG	Margem de Ganho
MF	Margem de Fase
PDE	Equação Diferencial Parcial (<i>Partial Differential Equation</i>)
PI	Controlador Proporcional e Integral
PID	Controlador Proporcional, Integral e Derivativo
SI	Sistema Internacional de Unidades
SMC	Controle por Modos Deslizantes (<i>Sliding Mode Control</i>)
VSC	Controle por Estrutura Variável (<i>Variable Structure Control</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

∇	Nabla.
∇^2	Laplaciano.
div	Divergente.
∂t	Derivada parcial do tempo.
∂x	Derivada parcial do espaço, coordenada x .
∂y	Derivada parcial do espaço, coordenada y .
∂z	Derivada parcial do espaço, coordenada z .
∂A	Derivada parcial da área molhada.
∂Q	Derivada parcial da descarga.
∂Y	Derivada parcial da profundidade.
$\partial \theta$	Derivada parcial do conteúdo da água no solo.
∂q_x	Derivada parcial do fluxo na coordenada x .
∂q_y	Derivada parcial do fluxo na coordenada y .
∂q_z	Derivada parcial do fluxo na coordenada z .
∂K	Derivada parcial da Condutividade Hidráulica.
$\partial \Phi$	Derivada parcial do Potencial Mático.
∂v	Derivada parcial da Temperatura.
θ_t	Derivada parcial com respeito ao tempo do conteúdo da água no solo.
θ_x	Derivada parcial com respeito ao espaço, coordenada x , do conteúdo da água no solo.
θ_{xx}	Derivada parcial de segunda ordem com respeito ao espaço, coordenada x , do conteúdo da água no solo.
θ_z	Derivada parcial com respeito ao espaço, coordenada z , do conteúdo da água no solo.
θ_{zz}	Derivada parcial de segunda ordem com respeito ao espaço, coordenada z , do conteúdo da água no solo.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	18
1	IRRIGAÇÃO DE PLANTAÇÕES	21
1.1	Métodos de Irrigação.....	21
1.1.1	Irrigação por superfície	21
1.1.2	Irrigação por aspersão	22
1.1.3	Irrigação localizada	23
1.1.4	Irrigação subterrânea.....	25
1.2	Eficiência da Irrigação	25
1.3	Controle Automático da Irrigação	26
1.3.1	Controle dos Canais	26
1.3.2	Controle do Conteúdo da Água no Solo	27
1.3.3	Outras Técnicas	29
2	MODELAGEM DA DINÂMICA DA PROPAGAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO	31
2.1	Tipos de Solos	31
2.2	Conteúdo da Água no Solo - Volumétrica	32
2.3	Potencial do Sistema Solo-Água	34
2.4	Coluna de Água	35
2.5	Lei de Darcy	36
2.6	Equações do Fluxo de Água no meio Saturado.....	37
2.7	Equações do Fluxo de Água no meio Não Saturado	37
2.7.1	Equação de Richards	37
2.7.2	Descrição da Dinâmica Não-Linear	40
2.7.3	Obtenção da Forma Linear da Equação de Richards.....	43
2.8	Analogia da Equação de Richards com Equação do Calor.....	45

2.9	Condições de Contorno	45
2.10	Função de Transferência da Equação Linear de Richards	46
2.10.1	Função de Transferência Considerando o Fluxo Horizontal	46
2.10.2	Função de Transferência Considerando o Fluxo Vertical.....	49
3	CONTROLE PROPORCIONAL E INTEGRAL DO SISTEMA DE IRRIGAÇÃO	51
3.1	Controlador Proporcional Integral	51
3.2	Projeto do Controlador Proporcional e Integral da Função de Transferência da Equação Linear de Richards	52
3.2.1	Função de Transferência-Condição de Contorno Dirichlet	53
3.2.2	Função de Transferência-Condições de Contorno Neumann- Dirichlet	58
3.2.3	Exemplo do projeto com a Condição de Contorno Neumann- Dirichlet.....	62
3.2.4	Exemplo do projeto com a Condição de Contorno Neumann- Dirichlet Considerando o Fluxo Vertical.....	67
4	CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL POR MODO DES- LIZANTE	73
4.1	Superfície de Deslizamento	73
4.2	Formulação do Problema	74
4.3	Lei de Controle	75
4.4	Projeto da Superfície de Chaveamento	75
4.4.1	Média do Conteúdo da Água no Solo	76
4.4.2	Conteúdo de Água no Solo em uma Profundidade Especificada ...	76
4.5	Existência do Modo Deslizante	76
4.6	Estabilidade do movimento deslizante.....	78
4.7	Simulações do Controle por Modo Deslizante	82
4.7.1	Controle Liga-Desliga do Conteúdo da Água no Solo.....	83

4.7.2	Controle da Média do Conteúdo da Água no Solo	84
4.7.3	Controle do Conteúdo da Água em uma Profundidade Especificada	85
4.8	Consumo de Água	88
	CONCLUSÕES	89
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICES	94
	APÊNDICE A – Função pdepe do MATLAB	94
	APÊNDICE B – Método das Diferenças Finitas para Desenvolvimento das Simulações	98
	APÊNDICE C – Critério de Estabilidade de Mikhailov	102

INTRODUÇÃO

A água doce ou potável é um recurso escasso, isto leva à necessidade de conseguir uma melhor racionalização do seu uso. Os problemas causados pela falta da água provavelmente serão maiores se as previsões a longo-prazo das mudanças climáticas acertarem. Dados meteorológicos sugerem um significativo aumento de temperatura e uma diminuição da precipitação anual, o que significa uma redução da água doce no século XXI. A indústria e o turismo, entre outras atividades produtivas, competem para que a rentabilidade e a produtividade deste recurso aumente. Nestes dias, a agricultura consome 70% da água doce, a indústria consome 20% e 10% é consumida para o uso doméstico (VICENTE, 2011).

Em muitas partes do mundo o recurso da água doce é proporcionado pela chuva. Existem três fatores característicos da chuva: a quantidade, a frequência e a intensidade, em valores que variam no espaço e no tempo. Quando a chuva não atende a umidade que a cultura precisa, os agricultores devem suplementar a água disponível através de algum tipo de irrigação, para alcançar o conteúdo da água no solo necessário e a concentração de nutrientes. Assim, gera-se ambiente de crescimento adequado (BENZEKRI; MEGHRICHE; REFOUFI, 2007).

O cenário da agricultura causado pela falta da água são as estiagens, que têm sido uma grande ameaça para produção agrícola. Desta forma, os agricultores acabam ficando muito dependentes das condições climáticas. Na maioria dos casos é difícil reverter o quadro desfavorável de frustrações de safra e produtores endividados (JOBIM, 2013).

Tendo-se a disponibilidade limitada da água doce e o aumento dos custos da energia e da mão de obra, a irrigação, a qual contribui substancialmente à produção agrícola, deveria ser planejada e administrada de tal forma a não perder nem uma gota da água.

O problema da escassez da água nos momentos críticos do desenvolvimento da cultura é uma motivação para desenvolver este trabalho, propondo-se controladores do conteúdo da água no solo. Esta seria uma maneira de conseguir diminuir os prejuízos de uma eventual seca sobre o resultado final da safra.

Por outro lado, existem as estufas as quais, precisam de grandes quantidades de água e fertilizantes para maximizar o crescimento das plantas e a qualidade do produto. A frequência da irrigação nas estufas é tipicamente baseada em uma programação pre-determinada ou avaliação visual do estado das plantas, sendo este um fator que resulta no excesso de rega, que causa lixiviação e escoamento. Podem ser usados sensores para reduzir ou eliminar a lixiviação de recipientes, regulando precisamente a quantidade da água utilizada para a irrigação (FERRAREZI; DOVE; IERSEL, 2015).

Por outro lado, tem-se a agricultura de precisão, que tem como objetivo incrementar a eficiência produtiva dos cultivos, mediante a observação, medição e a ação sobre as condições específicas do processo de crescimento das plantações (LOZOYA; AGUILAR; MENDOZA, 2016).

A automatização da irrigação começou em meados do século XX. Os controladores eram basicamente simples temporizadores e comutadores usados para ligar o sistema de irrigação por um determinado período de tempo, considerando as condições de umidade ou do conteúdo da água no solo. Desde então, houve melhoras contínuas nos sistemas automatizados em todos os sentidos (BENZEKRI; MEGHRICHE; REFOUFI, 2007).

Neste trabalho será considerada a dinâmica da propagação da água no solo. Para isto será desenvolvida uma modelagem feita com a *Equação de Richards* (NETTO, 1998), que é uma equação diferencial parcial (*Partial Differential Equation* - PDE) parabólica.

A teoria do controle das PDEs é aplicada em áreas como a regulação do pH em um fotobiorreator (ANDRADE et al., 2016), no qual é modelado um conjunto de PDEs hiperbólicas, e o controle é abordado pelo método das características.

O método do *Backstepping* para o controle de contorno das PDEs é apresentado em (SMYSHLYAEV; KRSTIC, 2005; BACCOLI; PISANO; ORLOV, 2015). Diagne et al. (2015) aplica o projeto do *backstepping* para estabilizar o conjunto das equações de Saint-Venant-Exner para o controle de canais de irrigação. O controle adaptativo é desenvolvido em (SMYSHLYAEV; KRSTIC, 2007; KRSTIC; SMYSHLYAEV, 2008).

Por outro lado, o Controle a Estrutura Variável (*Variable Structure Control* - VSC) por Modo Deslizante ou Controle por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control* - SMC) é

também usado nos controladores de contorno de PDEs. Cheng, Radisavljevic e Su (2011) usaram o modo deslizante de primeira ordem, para a estabilização de um sistema unidimensional de transferência de calor instável. Pisano e Orlov (2012) abordaram a técnica de controle de segunda ordem para o caso do controle de contorno colocado (*collocated*), uma técnica na qual a medida e o atuador encontram-se no mesmo lugar.

Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver estratégias de controle para o conteúdo da água do solo. Tem-se em vista aplicações como a agricultura de precisão, a realização de experimentos em botânica e agronomia.

Para este propósito, será realizada modelagem da dinâmica propagação da água no solo. Serão realizadas comparações de desempenho das estratégias desenvolvidas por meio de simulações.

Organização da Dissertação

O **Capítulo 1** apresenta uma revisão bibliográfica a respeito da irrigação de plantações, a qual é dividida em três partes: *métodos de irrigação*, *eficiência da irrigação* e *controle automático da irrigação*.

O **Capítulo 2** apresenta o desenvolvimento da modelagem do sistema da propagação da água no solo, a *Equação de Richards* e a função de transferência da mesma. Além disso, mostra-se a analogia da equação de Richards com a equação do Calor.

O **Capítulo 3** apresenta o controle proporcional e integral (PI) e o desenvolvimento do projeto do controlador PI através da função transferência apresentada no capítulo anterior.

O **Capítulo 4** apresenta o desenvolvimento do controle por estrutura variável ou modo deslizante, propondo duas estratégias de controle: média do conteúdo da água no solo e conteúdo da água em uma profundidade específica.

Conclusões sobre o trabalho desenvolvido, bem como sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no final desta dissertação, mais apêndices necessários para o trabalho.

1 IRRIGAÇÃO DE PLANTAÇÕES

O desenvolvimento de uma cultura está intimamente relacionado a disponibilidade de água no solo e ao clima da região. Além disso, a planta transfere para a atmosfera aproximadamente 98% da quantidade de água que retira do solo (NETTO, 1998).

A constante preocupação com a administração dos recursos hídricos, tem levado ao desenvolvimento de diferentes métodos de irrigação e a eficiência deles. Neste capítulo serão descritos estes recursos e tem-se uma revisão bibliográfica na área de controle e automação na irrigação.

1.1 Métodos de Irrigação

Dentro dos métodos de irrigação alguns deles requerem o uso de bastante mão de obra, e outros não, mas em compensação necessitam de alto investimento de equipamentos ou de energia (NETTO, 1998).

Para a aplicação da água às plantas diversos métodos de irrigação são usados, a forma mais aceitável baseia-se na maneira que a água é colocada à disposição da planta: por superfície, aspersão, localizada e subterrânea.

1.1.1 Irrigação por superfície

A irrigação por superfície é aquela na qual a condução da água desde o sistema de distribuição até qualquer ponto de infiltração, dentro da parcela a ser irrigada, é feita diretamente sobre a superfície do solo. Este método é também conhecido como irrigação por gravidade. Dentro deste tipo tem-se:

- *Irrigação por sulco*, que consiste em conduzir a água em pequenos sulcos localizados paralelamente a linha de plantas durante um determinado tempo. Isto, para umedecer o solo compreendido na zona das raízes (Figura 1).

- *Irrigação por inundação*, este sistema cobre o terreno com uma lamina de água. É um dos métodos de irrigação mais tradicionais e mais usado no mundo. Ilustra-se na Figura 2.



Figura 1 - Irrigação por sulco. Extraído de (GONZALEZ; P, 1994, Fig 21)



Figura 2 - Irrigação por inundação. Extraído de (GONZALEZ; P, 1994, Fig 12)

• *Irrigação por faixas*, consiste em faixas de terreno com pouca ou nenhuma declividade transversal, porém com uma certa declividade longitudinal, compreendida entre os diques paralelos. Deste modo os diques tem a função de somente orientar o movimento da lamina de água no sentido do comprimento da faixa.

1.1.2 Irrigação por aspersão

No método por aspersão um jato de água é lançado sob pressão adequada, para cima e para o lado, fracionando o mecanicamente em um emissor que pode ser um aspersor ou um orifício, desta forma será distribuído uniformemente em pequenas gotas sobre uma área circular do terreno.

Os sistemas de irrigação por aspersão apresentam uma variedade basta de tipos de equipamentos e podem ser subdivididos em dois grupos:

1º *Grupo - Aspersão convencional*, neste grupo as mudanças de posição no terreno (quando houverem) são efetuadas manualmente, e são:

- *Fixo* (Figura 3)
- *Semi-fixo*
- *Móvel* (Figura 4)

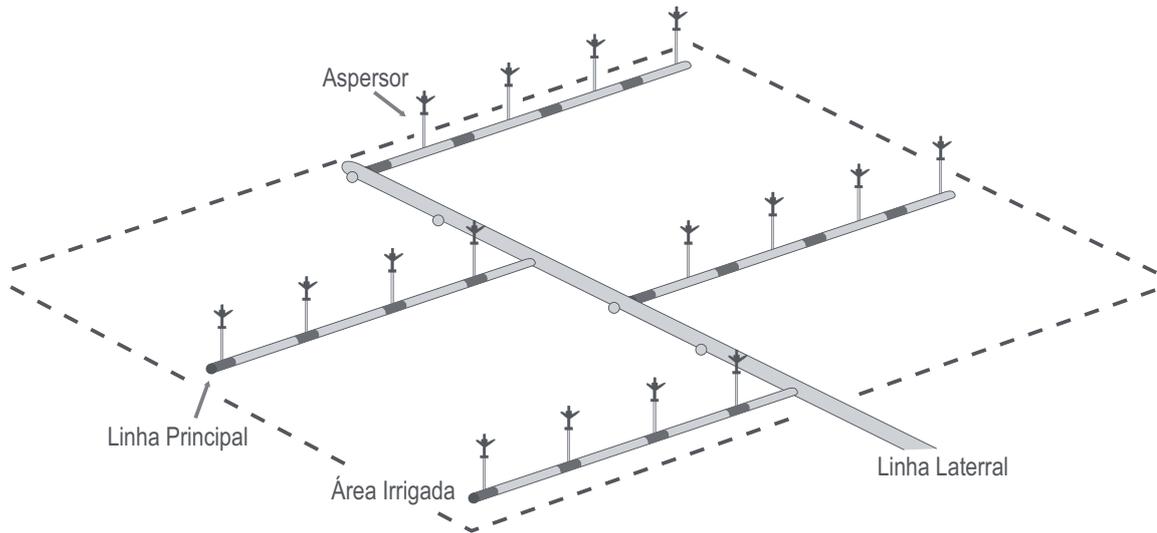


Figura 3 - Sistema portátil. Extraído de (BISCARO, 2009, Figura 2)

2º Grupo - *Aspersão mecanizada*, este grupo tem a participação de um equipamento mecânico de zero porte, uma máquina, para realizar a distribuição da água, os tipos mais utilizados são:

- *Autopropelido*
- *Montagem direta*
- *Pivô central*(Figura 5)

1.1.3 Irrigação localizada

A irrigação localizada tem por princípio a aplicação de água molhando apenas uma parte do solo, a ocupada pelo sistema radicular das plantas, é assim que o solo funciona como um pequeno armazenamento, mas sem reduzir a oferta de água à planta.

Este método se fundamenta na passagem de pequena vazão em orifício de diâmetro

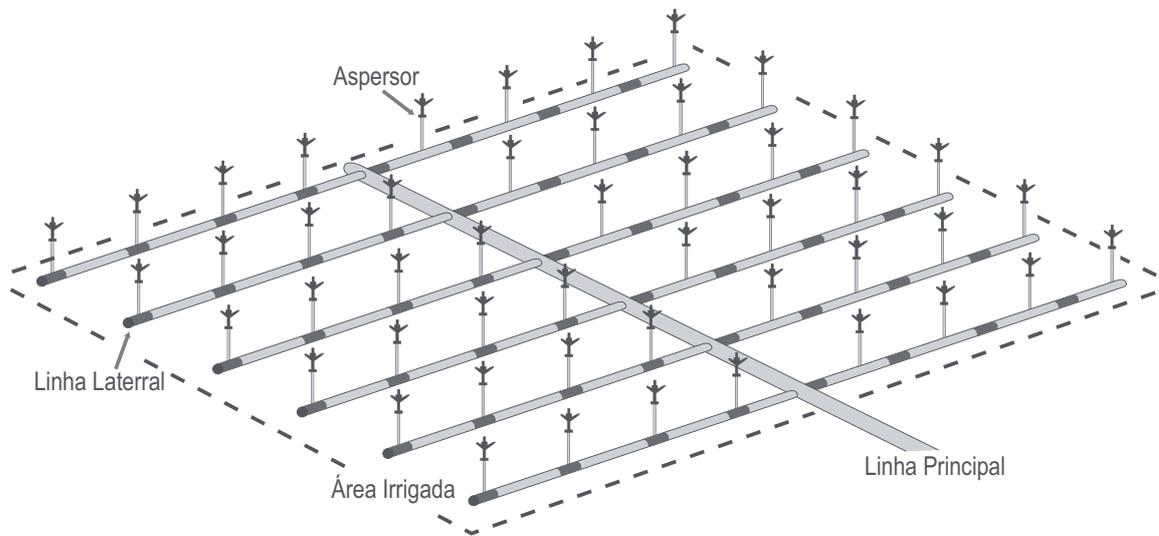


Figura 4 - Sistema permanente. Extraído de (BISCARO, 2009, Figura 3)

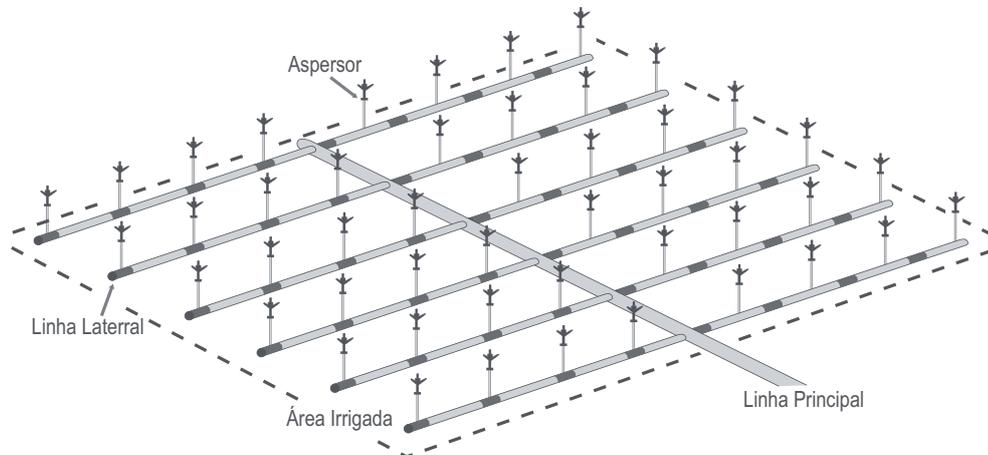


Figura 5 - Mecanismo - Pivô central. Extraído de (BISCARO, 2009, Figura 31)

reduzido de estruturas especiais chamadas de emissores. O tipo de emissor define o tipo de irrigação localizada como ser:

- *Gotejamento*, que usa os gotejadores, mostrado na Figura 6,
- *Micro aspersão*, que usa microaspersores.

A condução da água até os emissores é feita por uma extensa rede de tubulações de vários diâmetros.



Figura 6 - Irrigação por localizada, gotejamento. Extraído de (JOBIM, 2013, Figura 9)

1.1.4 Irrigação subterrânea

Este método de irrigação é aquela cuja aplicação de água é feita no interior do solo por um dos dois processos explicados a seguir. O primeiro consiste na elevação do nível do lenço freático para propiciar umidade adequada ao sistema radicular das plantas, o outro processo é a aplicação da água no interior do solo através de tubos perfurados, manilhas porosas ou dispositivos permeáveis instalados á pequenas profundidades.

1.2 Eficiência da Irrigação

A eficiência da irrigação encontra-se dentro dos parâmetros a considerar na irrigação. Pois existem perdas no processo de aplicação da água, tais perdas dependem do sistema de irrigação, de sua conservação e da habilidade do irrigante, etc.(NETTO, 1998), todo isto é traduzido pela sua eficiência (E_i).

Tabela 1 - Eficiências médias de sistemas de irrigação.(NETTO, 1998, Quadro 20.5)

Sistema de Irrigação	Eficiência (Decimal E_i)
Aspersão	0,60-0,80
Gotejamento	0,80-0,95
Microaspersão	0,75-0,90
Sulcos	0,40-0,70
Inundação	0,50-0,80

A eficiência pode ser descrita pela equação:

$$E_i = \frac{H_i}{H_b}, \quad (1.1)$$

na qual, H_i é a Lâmina Líquida, sendo esta a quantidade de água disponível no solo que será realmente utilizada pela planta (mm), H_b é a Lâmina Bruta que representa a quantidade de água que o sistema deve liberar para o cultivo (mm).

Considerando-se neste trabalho o tipo de irrigação por gotejamento.

1.3 Controle Automático da Irrigação

Realizando uma revisão bibliográfica na área de controle relacionada com a irrigação encontrou-se uma serie de trabalhos que abordaram o tema de diferentes maneiras, como as mostradas a seguir.

1.3.1 Controle dos Canais

Litrico et al. (2003) abordam o modelo e o controle para o tipo de irrigação por canais. O modelo é desenvolvido através das equações de Saint-Venant, usadas para modelos hidráulicos que representam a dinâmica do fluxo nos canais. Estas equações são PDEs hiperbólicas não-lineares, que envolvem a descarga média $Q(x, t)$, a profundidade da água $Y(x, t)$ ao longo de uma dimensão do espaço x :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q^2/A}{\partial x} + gA \frac{\partial Y}{\partial x} = gA(I - S_f), \quad (1.3)$$

na qual, $A(x, t)$ é a área molhada, $Q(x, t)$ é a descarga da seção transversal de A , $Y(x, t)$ é a profundidade da água, $S_f(x, t)$ é o atrito da inclinação, I é a inclinação da cama e g é a aceleração gravitacional. São necessárias duas condições de fronteira, que são: $Q(0, t) = Q_0(t)$ e $Q(X, t) = Q_X(t)$, nas quais X é a distância do canal considerado. A condição inicial é dada por $Q(x, 0)$ e $Y(x, 0)$. O modelo linear é usado no projeto do controlador, considerando pequenas variações de profundidade da água $y(x, t)$ e descarga $q(x, t)$, em torno de valores estacionários definidos por $Y_0(x)$ e $Q_0(x)$.

São projetados dois controladores PI que atendem dois tipos de controle do sistema da irrigação por canais, os quais são: Controle distante águas abaixo e o Controle local águas acima.

Um outro modelo para os canais, denominado *Saint-Venant-Exner* é tomado em conta em (DIAGNE et al., 2015). Onde se aborda a estabilização do modelo PDE linearizado através do método *Backstepping*.

1.3.2 Controle do Conteúdo da Água no Solo

Considerando o conteúdo da água no solo foi desenvolvido em (CALBO; VAZ; RABELLO, 2014), onde se tem um sistema atmomagnético para irrigação. O sistema aciona automaticamente linhas de gotejamento ou linhas de aspersão com leituras feitas pelo *Sensor IG*. Este sensor tem o núcleo com partículas não sintetizadas de granulometria controlada, este sistema não faz uso de eletricidade.



Figura 7 - Foto de protótipo do irrigador Atmomagnético e do Sensor IG. Extraído de (CALBO; VAZ; RABELLO, 2014, Figura 2)

Ferrarezi, Dove e Iersel (2015) abordaram o controle de um sistema de irrigação controlando o conteúdo da água no solo volumétrico ou umidade do solo. Foram usados sensores de capacitância, um microcontrolador e válvulas solenoides. Utilizaram a logica de um *controle liga-desliga* para a programação do microcontrolador cumprindo uma rotina de controle. As válvulas mantem-se ligadas se a leitura do sensor do conteúdo de

água encontra-se dentro de um intervalo adequado e são desligadas se a leitura do sensor esta fora do intervalo.

Dentro da área dos sistemas embarcados foi desenvolvido o trabalho (BENZEKRI; MEGHRICHE; REFOUFI, 2007), onde projeta-se e implementa-se um controlador para um sistema de irrigação. Foi construído em base a um computador pessoal e sensores de potencial da água no solo medindo a o conteúdo da água no solo. Estes sensores são os mostrados na Figura 8. O Sensor 1 indica quando deve parar-se de irrigar e o Sensor 2 indica quando deve começar a irrigação.

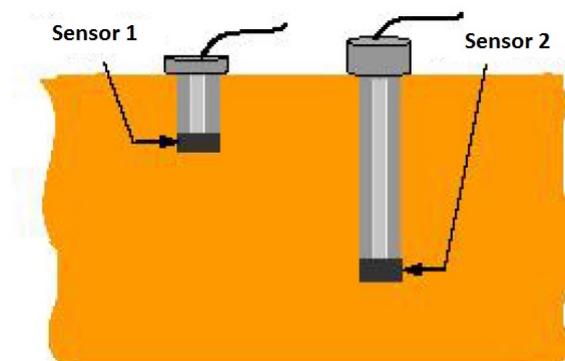


Figura 8 - Posição dos dois sensores.

Goodchild et al. (2015) abordaram o controle clássico, indicando como administrar o uso da água com o controle da irrigação em resposta às mudanças do conteúdo da água no solo. A medição do conteúdo da água no solo dá a conhecer a demanda da água na plantação, então, para desenvolver o controle foi necessário fechar a malha do controle. O tipo de controlador clássico usado foi o Proporcional, Integral e Derivativo (PID). Este controle estima o tempo que a bomba da água ou a válvula solenoide tem que ficar ligada para manter uma umidade constante na plantação.

O sistema está formado por um registrador de dados, um microcontrolador (GP2), uma bomba de água elétrica, três sensores de umidade e um medidor de fluxo de água. O algoritmo de controle é feito no GP2 considerando a média da leitura dos três sensores, também lidos pelo GP2. A função integral do PID tem a restrição de saída de valores equivalentes aos volumes positivos de água.

1.3.3 Outras Técnicas

Existem equipamentos construídos como o desenvolvido em (NOGUEIRA et al., 2001), que foi realizado pela constante preocupação na gestão dos recursos hídricos a partir da busca de métodos de manejo de solo e água. Este equipamento usa sensores de pressão e de fluxo de água, os quais interrompem a irrigação quando registram valores superiores ou inferiores de um intervalo fixado. O controle é feito por um computador de irrigação GAL-COMPACT, de 12V, ligado a uma placa solar, este computador é programado para controlar o funcionamento de cada sequência de válvulas.



Figura 9 - Foto da Vista de frente do cabeçal de controle do equipamento. Extraído de (NOGUEIRA et al., 2001, Figura 14)

Por outro lado, no journal “*Agricultural Water Management*” do ELSEVIER tem-

se o trabalho do (ROMERO et al., 2012), no qual se menciona vários trabalhos desenvolvidos na área do controle automático da irrigação na década do 2002 até 2012. Esta pesquisa indica que as primeiras estratégias de controle foram baseadas no *controle liga-desliga* como os trabalhos mencionados anteriormente. Comutando a saída do controlador considerando um valor máximo e outro valor mínimo de acordo com o sinal do erro.

Também foram considerados os controles através da lógica fuzzy e as redes neurais, para modelos não-lineares. Finalmente o mesmo autor deste trabalho menciona o próprio trabalho onde foi desenvolvido um modelo de controle preditivo com uma abordagem da automação na irrigação usando a medida do *fluxo de seiva em órgãos de condução de uma planta* (VICENTE, 2011).

Além da irrigação existem outras preocupações para o bom desenvolvimento da cultura, como ser o problema da aplicação desmedida de químicos nas plantações tendo os riscos graves de contaminação ambiental e degradação da qualidade dos alimentos. Este tema é tratado em (FELIZARDO et al., 2013).

Neste caso desenvolveu-se o modelo do sistema de pulverização de taxa variável. O sistema de pulverização utiliza tecnologia de injeção direta que permite a utilização de diferentes produtos químicos em uma única aplicação. Reduzindo o desperdício de produtos químicos e minimizando a toxicidade e assim, diminuindo os riscos ambientais e toxicológicos associados à preparação e descarga da mistura veículo-químico. O controle aplicado é o *controle preditivo*. Menciona-se esta última abordagem para mostrar que o controle é aplicado não só na irrigação para o desenvolvimento da cultura.

2 MODELAGEM DA DINÂMICA DA PROPAGAÇÃO DA ÁGUA NO SOLO

Neste capítulo são apresentados conceitos de hidrologia, a fim de estudar o problema de controle. Mostrar-se os modelos que representam a dinâmica da propagação da água no solo. Finalizando o capítulo com a apresentação das funções de transferência que representam aos modelos mencionados anteriormente.

2.1 Tipos de Solos

O solo é considerado como um conjunto de partículas sólidas de diversas formas e tamanhos, ligadas por poros interconectados. Também estes poros tem diversas formas e tamanhos. Portanto, o solo é composto basicamente de duas partes: a parte sólida e a parte porosa ou poros do solo (LIBARDI, 2005). Desta maneira, são definidos os dois tipos de solos.

1. *Solos Saturados*: Denomina-se solo saturado quando todos os espaços porosos estão cheios de água. O conteúdo da água de um solo saturado é igual à porosidade total do solo (MILLAR, 1993).

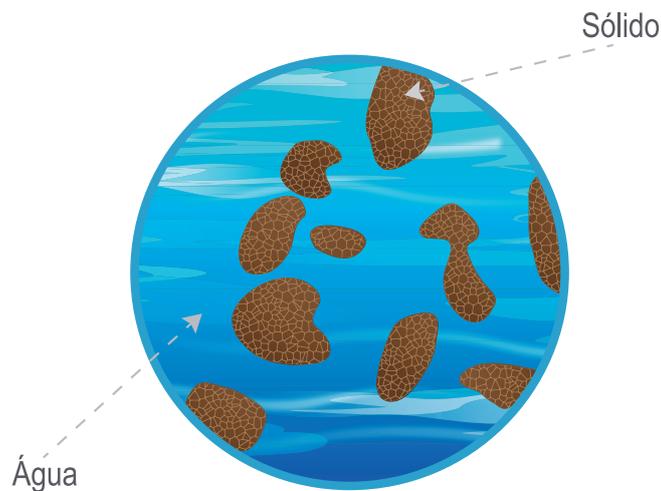


Figura 10 - Solo saturado. Adaptado de (LIBARDI, 2005, Fig. 7.2)

2. *Solos Não Saturados*: O solo não saturado não tem todos os espaços porosos cheios de água, tem espaços que contêm ar. A quantidade de água neste caso será sempre menor que o valor de saturação (MILLAR, 1993).

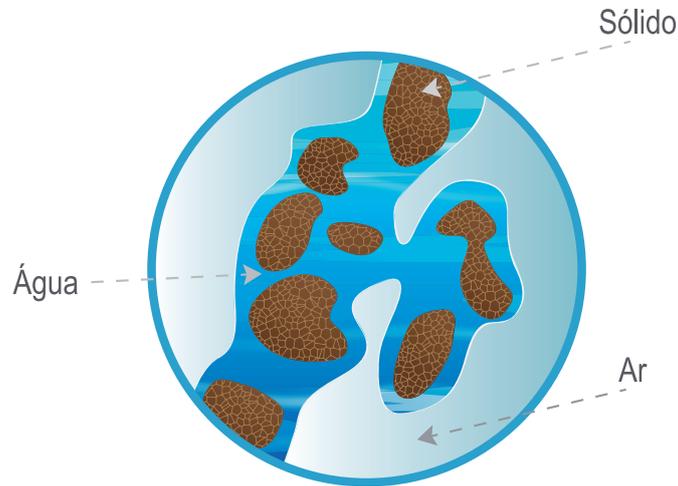


Figura 11 - Solo Não saturado. Adaptado de (LIBARDI, 2005, Fig. 7.2)

2.2 Conteúdo da Água no Solo - Volumétrica

Seja uma amostra de solo que tenha um volume total V_t que seria a soma do volume de seus sólidos V_s , e o volume de seus poros V_f , isto é (LIBARDI, 2005),

$$V_t = V_s + V_f. \quad (2.1)$$

Se a amostra é não saturada, tem-se o volume de água V_w e o volume de ar V_a presentes no interior do espaço poroso, então em um determinado momento é claro que:

$$V_f = V_w + V_a, \quad (2.2)$$

portanto,

$$V_t = V_s + V_w + V_a. \quad (2.3)$$

Define-se o conteúdo da água no solo volumétrica como o quociente do volume de água presente em uma amostra de solo em um determinado instante e o volume da amostra. O

que seria,

$$\theta = \frac{V_w}{V_t}. \quad (2.4)$$

Na Figura 12 o solo é considerado como um sistema conformado por três fases, onde são descritos os volumes mencionados anteriormente.

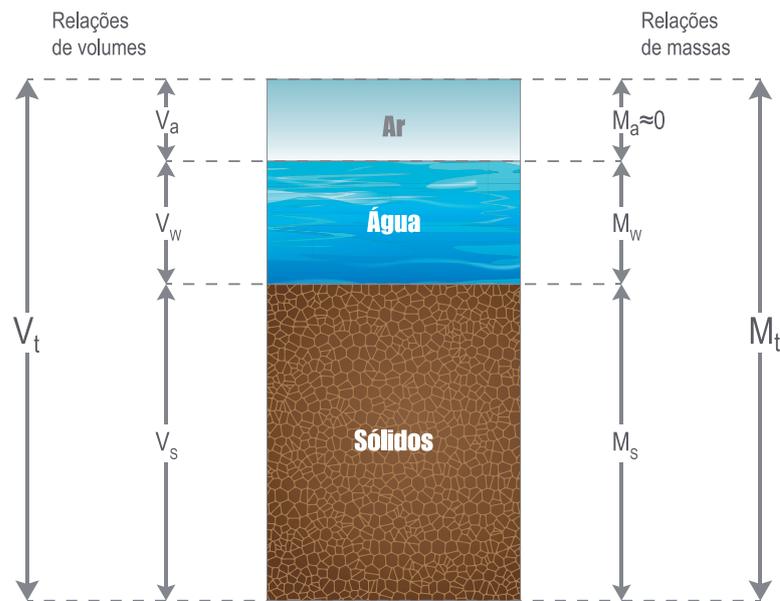


Figura 12 - Diagrama do solo como uma mistura com três fases. Adaptado de (HILLEL, 1998, Fig. 1.4).

O quociente do volume dos poros e do volume total da amostra é definido como o conteúdo da água à base de volume no solo saturado (LIBARDI, 2005) ou conteúdo da água saturado,

$$\theta_s = \frac{V_f}{V_t}. \quad (2.5)$$

Na Figura 12 também se mostra a M_t que é a massa total da amostra do solo não-saturado em um dado momento. m_s é a massa de seus sólidos, m_a é a massa do ar e o m_w é a massa da água. Estas últimas massas presentes no interior do seu espaço poroso. Comparando a magnitude de m_s e m_w , a massa do ar m_a pode ser desprezível.

2.3 Potencial do Sistema Solo-Água

A água no solo, como outros organismos na natureza, contem energia em diferentes quantidades e formas. Para determinar o estado da propagação da água no solo é usada principalmente a energia potencial (HILLEL, 1998).

De acordo com a Sociedade Internacional da Ciência do Solo (ASLYNG et al., 1963), o *potencial total da água no solo* é “a quantidade de trabalho que deve ser feita por unidade de quantidade de água pura, para transportar reversivelmente e isotermicamente uma quantidade infinitesimal de água de uma piscina de água pura a uma elevação especificada à pressão atmosférica para a água do solo (em um ponto especificado).”

Então, o potencial total do sistema solo-água é uma soma de diferentes potenciais (HILLEL, 1998):

$$\phi_t = \phi_g + \phi_p + \phi_o + \dots, \quad (2.6)$$

na qual ϕ_t é o potencial total, ϕ_g é o potencial gravitacional, ϕ_p é o potencial de pressão, ϕ_o é o potencial osmótico e termos adicionais que teoricamente poderiam ser considerados.

Potencial gravitacional: O potencial gravitacional de água no solo em cada ponto é determinado pela elevação do ponto relativo com respeito a algum nível de referencia arbitrário. Se o nível de referencia é a parte superior do solo, o potencial gravitacional que esta abaixo da referencia é negativa. O potencial gravitacional em termos da energia potencial por unidade de massa é:

$$\phi_{g,m} = gz. \quad (2.7)$$

Potencial de pressão: O potencial de pressão toma valores positivos quando a pressão hidrostática é maior que a pressão atmosférica, se a pressão hidrostática é menor que a pressão atmosférica, o potencial é considerado negativo. Este principio é ilustrado na Figura 13. Assim, o potencial de pressão também é denominado *potencial de submersão*.

A pressão hidrostática P de água com respeito à pressão atmosférica é:

$$P = \rho gh, \quad (2.8)$$

sendo h a coluna piezométrica e ρ é a densidade da água, então o potencial de submersão

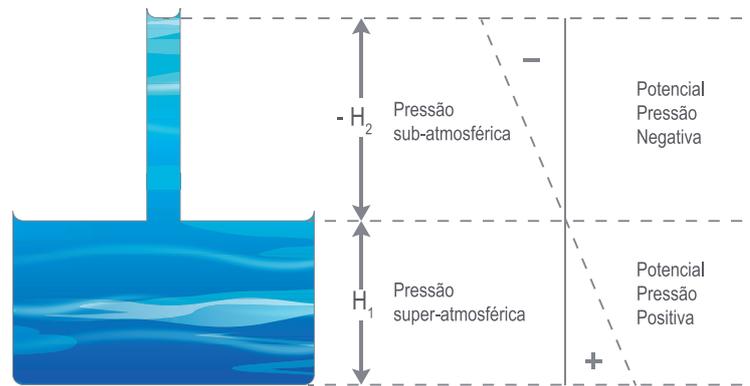


Figura 13 - Sinal do Potencial de pressão. Adaptado de (HILLEL, 1998, Fig. 6.6).

considera como energia potencial por unidade de volume à pressão hidrostática,

$$\phi_{ps} = P. \quad (2.9)$$

Define-se ao *potencial mátrico*, Ψ , como o potencial de pressão quando a pressão hidrostática é menor que a pressão atmosférica. Este caso é conhecido como *tensão da água no solo* representado por,

$$\Psi = -P. \quad (2.10)$$

Potencial osmótico: O efeito osmótico é importante na interação entre a raiz da planta e o solo, processo que envolve a difusão do vapor.

Para o caso do modelo do sistema da propagação de água no solo o potencial osmótico não é considerado.

Concluindo que o potencial total é dado pela seguinte expressão:

$$\phi_t = \phi_g + \phi_p. \quad (2.11)$$

2.4 Coluna de Água

O potencial descrito na seção anterior, pode ser expresso em termos de coluna de água. Uma coluna refere-se à altura de uma coluna de líquido correspondente à pressão dada, por exemplo: 1 atm (Pa) é equivalente a uma coluna de água de 10,33 m e a uma

coluna de mercúrio de 0,76 m (HILLEL, 1998).

Desta forma a equação (2.11) pode-se escrever da seguinte maneira:

$$H = H_g + H_p, \quad (2.12)$$

na qual H é a coluna de água total (m), que seria a soma da coluna de água do potencial gravitacional, H_g (m) e a coluna de água do potencial da pressão, H_p (m).

O termo H é definido como *Coluna de água*.

2.5 Lei de Darcy

Darcy (1856), da França da cidade de Dijon, pesquisando sobre a taxa de infiltração através de filtros de areia, conseguiu desenvolver uma Lei que tem o próprio nome dele, Darcy.

A Lei de Darcy descreve o fluxo através de um meio poroso. Pode ser representada pela seguinte equação geral (HILLEL, 1998):

$$q = \frac{Q}{A} = -K \nabla H, \quad (2.13)$$

na qual q é a densidade de fluxo da água (m/s), Q é o fluxo de água (m³/s), A é a seção transversal de área (m²), K é a condutividade hidráulica saturada em (m/s) e o ∇H é o gradiente da coluna de água nas três dimensões do espaço (adimensional) (MILLAR, 1993).

No sistema unidimensional a Lei de Darcy toma a forma:

$$q = -K \frac{dH}{dx}. \quad (2.14)$$

Matematicamente a Lei de Darcy é similar a outras leis como à Lei de Ohm na qual a taxa do fluxo da eletricidade é proporcional ao gradiente do potencial elétrico, à Lei de Fourier na qual a taxa de condução de calor é proporcional ao gradiente da temperatura e à Lei de Fick na qual a taxa de difusão é proporcional ao gradiente de concentração, (MILLAR, 1993).

2.6 Equações do Fluxo de Água no meio Saturado

Para o caso dos solos saturados a Lei de Darcy descreve o processo do fluxo estacionário, nessa descrição o fluxo é considerado constante e igual ao longo do sistema.

Para a parte do processo do fluxo transiente é necessária a Lei da conservação da matéria, também denominada a Lei de conservação de massa, que é expressa na *equação de continuidade*. Considerando o conteúdo da água no solo e a *equação de continuidade*, no caso do sistema de unidimensional com o fluxo na direção x (coordenada horizontal), tem-se (HILLEL, 1998, Equação (7.18)):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial q_x}{\partial x}, \quad (2.15)$$

então, o sistema multidimensional chegaria a ser:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \nabla \cdot q. \quad (2.16)$$

Substituindo q da equação (2.13) na equação (2.16), tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot K \nabla H. \quad (2.17)$$

2.7 Equações do Fluxo de Água no meio Não Saturado

Para este caso, tem-se a *equação de continuidade* na equação (2.15), porém, considerando mais o fluxo nas direções y e z . Então, teria-se a equação da continuidade em três dimensões:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right), \quad (2.18)$$

desta forma seria a expansão da equação (2.16) (HILLEL, 1998, Equação (8.6)). Uma outra alternativa de expressar esta equação é pelo operador nabla que seria o *divergente*,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \operatorname{div} q. \quad (2.19)$$

2.7.1 Equação de Richards

Richards (1931) propôs a combinação de equação (2.16) com a Lei de Darcy para o caso do fluxo nos solos não saturados. A *condutividade hidráulica* K é uma função que depende da coluna de água do potencial mátrico ou coluna de água de tensão Ψ , o que

significa que a Lei de Darcy seria reescrita da seguinte forma:

$$q = -K(\Psi) \nabla H, \quad (2.20)$$

na qual o ∇H é o gradiente de coluna de água.

De outra forma, *condutividade hidráulica* K esta em função do conteúdo da água no solo θ , $K(\theta)$. Esta função é menos afeitada pelo comportamento da histereses que a função $K(\Psi)$.

Então a Lei de Darcy para solos não saturados também pode ser escrita da seguinte forma:

$$q = -K(\theta) \nabla H. \quad (2.21)$$

Substituindo a equação (2.20) em (2.16) obtêm-se (HILLEL, 1998, Equação (8.11)):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla H], \quad (2.22)$$

esta equação é conhecida como a *Equação de Richards*.

A coluna de água total é a suma da coluna de água do potencial de pressão (H_p), ou da coluna de água do potencial mátrico (pode ser negativo e expresso pelo Ψ), e da coluna de água potencial gravitacional (H_g), como tinha-se mencionado na Seção 2.3, então, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla (H_p + H_g)] = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla (\Psi - z)], \quad (2.23)$$

na qual z é a coordenada vertical, se o fluxo é vertical então ∇z é igual à unidade, obtendo-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot K(\Psi) \nabla \Psi + \frac{\partial K}{\partial z}. \quad (2.24)$$

Se o fluxo é horizontal então ∇z é igual a zero. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\Psi) \nabla \Psi]. \quad (2.25)$$

Para poder esclarecer as coordenadas do modelo apresenta-se a Figura 14.

A equação de Richards tem uma analogia com equações da difusão e do calor considerando o seguinte tratamento matemático.

O gradiente da coluna de água do potencial mátrico $\partial \Psi / \partial x$ pode-se expandir pela

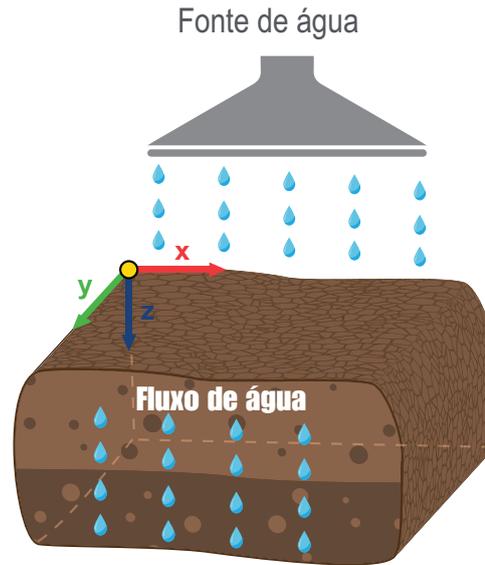


Figura 14 - Coordenadas do sistema, fluxo da água no solo.

regra da cadeia da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{d\Psi}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.26)$$

na qual a expressão $\partial \theta / \partial x$ é o gradiente do conteúdo da água no solo e $d\Psi / d\theta$ é o recíproco à *Capacidade específica do conteúdo da água no solo*, $C(\theta)$:

$$C(\theta) = \frac{d\theta}{d\Psi}. \quad (2.27)$$

Então, usando a expressão (2.27), a Lei de Darcy (2.21) unidimensional pode ser escrita,

$$q = K(\theta) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{K(\theta)}{C(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.28)$$

Esta última equação é análoga à Lei de Fick da Difusão, na qual se introduz a função denominada *Difusividade hidráulica*, D :

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} = K(\theta) \frac{d\Psi}{d\theta}, \quad (2.29)$$

que tem como unidades físicas no SI de (m^2/s).

Desta forma a equação (2.21) pode ser reescrita:

$$q = -D(\theta) \nabla \theta, \quad (2.30)$$

da forma unidimensional tem-se:

$$q = -D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.31)$$

que seria matematicamente igual a la primeira Lei de Fick da Difusão.

Desta forma, a equação (2.25) com a *Difusividade Hidráulica* é rescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta]. \quad (2.32)$$

Note-se que a ultima equação depende só de uma única variável (θ) em lugar de duas (θ e Ψ).

Tomando em conta o potencial gravitacional da forma que foi feita na equação (2.24), obtém-se a equação com a *Difusividade hidráulica* considerando o fluxo vertical (HILLEL, 1998, Equação (8.24)):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] + \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (2.33)$$

2.7.2 Descrição da Dinâmica Não-Linear

A não-linearidade na dinâmica da propagação de água no solo é consequência da dependência da condutividade hidráulica com respeito à *coluna de água do potencial mátrico* $K(\Psi)$ ou ao *conteúdo da água* no solo $K(\theta)$.

Existem varias funções empíricas que relacionam a *condutividade hidráulica*, com respeito à *coluna de água do potencial mátrico* ou ao *conteúdo da água* no solo. Assim, tem-se:

$$K(\Psi) = \frac{a}{\Psi^n}, \quad (2.34)$$

$$K(\Psi) = \frac{a}{(b + \Psi^n)}, \quad (2.35)$$

$$K(\theta) = a\theta^n, \quad (2.36)$$

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta}{f} \right)^n, \quad (2.37)$$

nas quais, K_s é a condutividade hidráulica saturada, a , e n são constantes empíricas, diferentes em cada função, e f é a porosidade.

As funções apresentadas são as mais empregadas para mostrar a dinâmica não-linear. Os valores dos parâmetros dependem do tipo de solo, seu ajuste deve ser feito experimentalmente (HILLEL, 1998).

Genuchten (1980) desenvolveu as seguintes equações:

$$S(\Psi) = [1 + (\alpha |\Psi|)^n]^{-m}, \quad (2.38)$$

$$K(S) = K_s S^{1/2} [1 - (1 - S^{1/m})^m]^2, \quad (2.39)$$

nas quais:

$$S(\theta) = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad (2.40)$$

$$m = 1 - \frac{1}{n}, \quad (2.41)$$

sendo θ_s o conteúdo da água de saturação, θ_r é o conteúdo da água residual, n e α são parâmetros estabelecidos em (GENUCHTEN, 1980).

Neste trabalho foi usado o estudo de Holzbecher (2012) a partir das equações desenvolvidas em (GENUCHTEN, 1980). Holzbecher (2012) propõe uma outra abordagem da *Equação de Richards* para poder observar o comportamento da dinâmica não-linear.

Esta abordagem é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\Psi) \frac{\partial}{\partial z} (\Psi - z) \right], \quad (2.42)$$

na qual, para encontrar o coeficiente de pressão derivativo $\partial \theta / \partial \Psi$ usa-se as equações (2.40) e (2.38) de onde se tem:

$$\theta = \theta_r + \frac{(\theta_s - \theta_r)}{[1 + (\alpha |\Psi|)^n]^m}, \quad (2.43)$$

derivando a expressão (2.43) tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \Psi} = - \frac{(\theta_s - \theta_r)(nm\alpha)((\alpha |\Psi|)^{n-1})}{[1 + (\alpha |\Psi|)^n]^{m+1}}. \quad (2.44)$$

Por fim, a *Equação de Richards* (2.42), é escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\Psi) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - 1 \right) \right]. \quad (2.45)$$

Usou-se a função `pdepe` do MATLAB, descrita no Apêndice A, para simular o comportamento não linear.

Na Figura 15 mostra-se a simulação da dinâmica não-linear para uma profundidade de 0,50 m, e diferentes entradas. Utilizou-se parâmetros do solo Guelph Loam já úmido de (GENUCHTEN, 1980). Observa-se um atraso nos primeiros $0,5 \times 10^5$ s da simulação.

O modelo não-linear só é capaz de representar conteúdos de água maiores que o

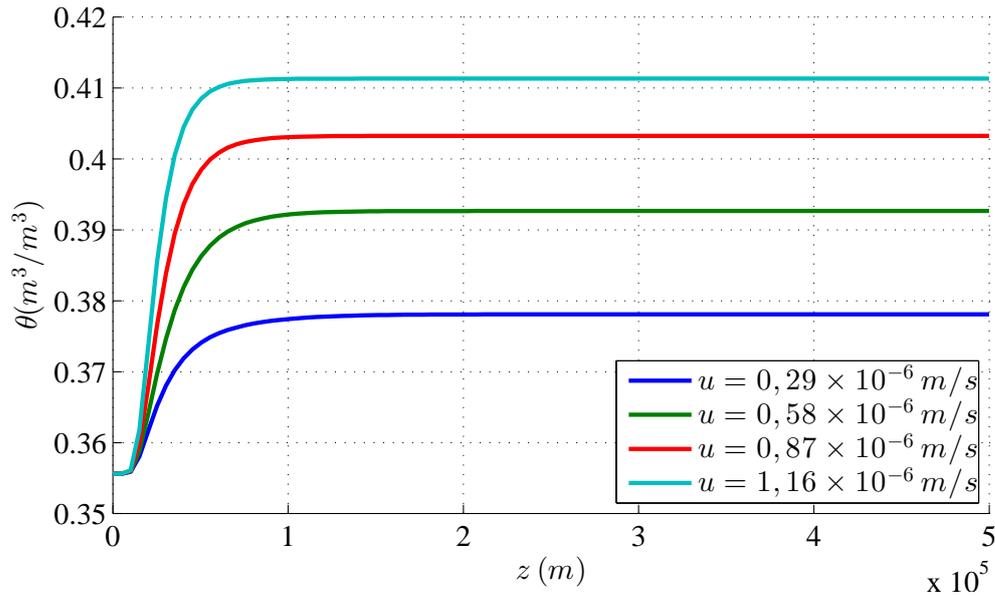


Figura 15 - Conteúdo da água, $\theta(t)$, dinâmica não-linear em uma profundidade $L=0,50$ m.

conteúdo da água residual (θ_r).

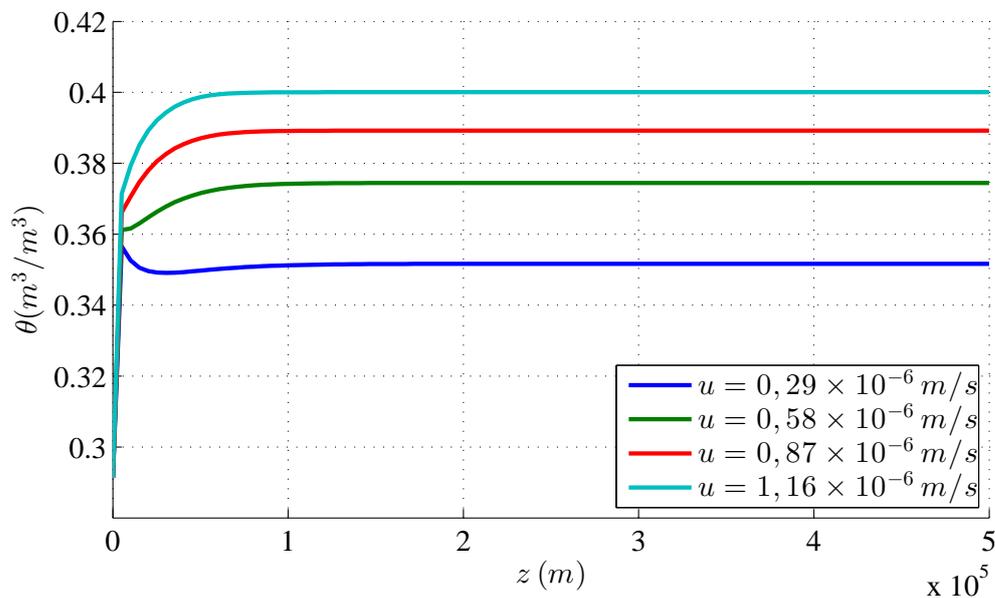


Figura 16 - Conteúdo da água, $\theta(t)$, dinâmica não-linear em uma profundidade $L=0,15$ m.

Por outro lado, na Figura 16 mostra-se a simulação do sistema em uma profundidade de $L=0,15$ m com as mesmas entradas e parâmetros da simulação anterior. Neste caso pode-se observar que com um fluxo de água de $0,29 \times 10^6$ m/s o sistema mostra um pico nos primeiros $0,5 \times 10^5$ s, sendo este um comportamento não linear do sistema.

2.7.3 Obtenção da Forma Linear da Equação de Richards

Considerando a forma unidimensional da equação (2.33) que representa a propagação da água verticalmente (HILLEL, 1998), tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (2.46)$$

Desenvolvendo a equação anterior, obtém-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D(\theta_0) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \left[\frac{\partial D(\theta)}{\partial z} - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \right] \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad (2.47)$$

na qual se considera à *Difusividade Hidráulica* invariante no espaço. Portanto, $\partial D(\theta)/\partial z = 0$ e praticamente tem-se uma constante $D = D(\theta_0)$. Então, para um valor de $D(\theta_0)$ considera-se,

$$K_0 = \frac{dK(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\theta_0}. \quad (2.48)$$

Tomando em conta as considerações apresentadas anteriormente tem-se a forma *Linear da Equação de Richards com fluxo vertical* (MENZIANI; PUGNAGHI; VINCENZI, 2007):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - K_0 \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (2.49)$$

A seguir, se $K_0 = 0$ obtém-se a forma *Linear da Equação de Richards com fluxo horizontal*,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (2.50)$$

Para ilustrar o comportamento da equação (2.49) obtiveram-se os valores de D e K_0 do mesmo solo (Guelph Loam) usado na descrição não-linear. O cálculo foi feito usando as fórmulas de (CHEN; TAN; CHEN, 2003).

Na Figura 17 mostra-se o gráfico da dinâmica linear a uma profundidade de $L=0,50$ m e os mesmos valores de entrada que na Seção 2.7.2. Observando-se que o conteúdo da água no solo vai aumentando ao passar o tempo.

Na Figura 18 mostra-se o gráfico da dinâmica linear na profundidade de $L=0,15$ m usando as entradas e os parâmetros do caso anterior. Comparando esta simulação com a mostrada na Figura 16 onde se observava um pico nos primeiros $0,5 \times 10^5$ s com um fluxo de água de $0,29 \times 10^6$ m/s, agora este pico sumiu.

A simulação da equação linear de Richards, foi feita usando a mesma função `pdepe` do MATLAB, como no caso não linear.

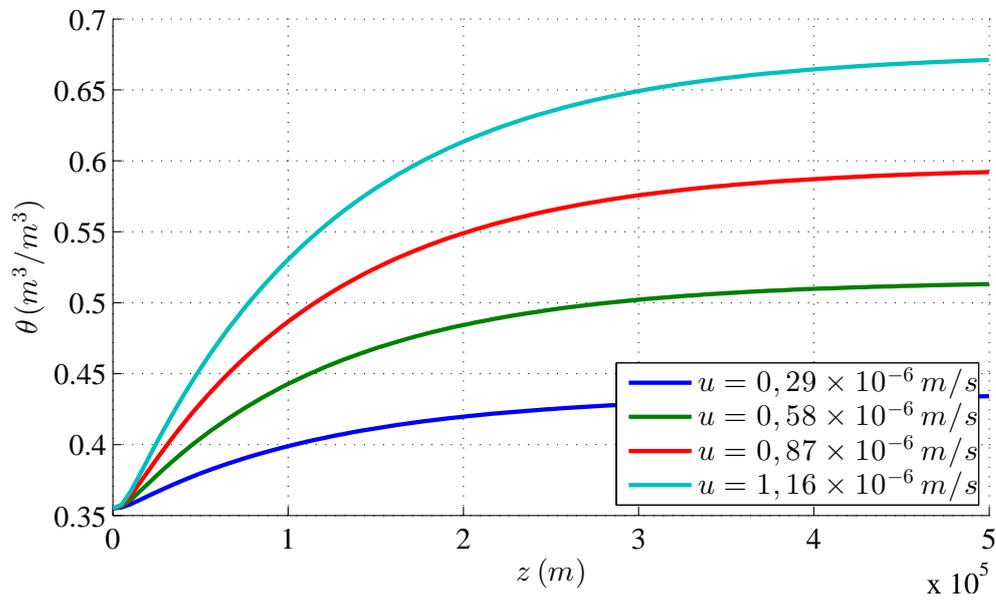


Figura 17 - Conteúdo de água $\theta(t)$, dinâmica linear em uma profundidade de $L=0,50$ m.

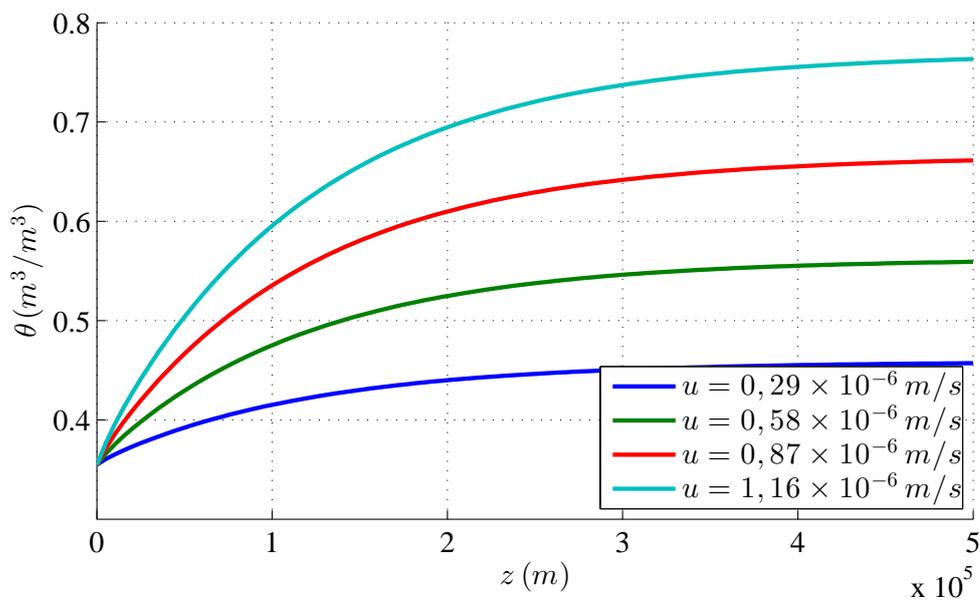


Figura 18 - Conteúdo de água $\theta(t)$, dinâmica linear em uma profundidade de $L=0,15$ m.

2.8 Analogia da Equação de Richards com Equação do Calor

A expressão que representa a Equação do Calor é apresentada em (VORONOV, 1985, Seção 1.3), da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (2.51)$$

sendo:

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{c}{\lambda}, \quad (2.52)$$

na qual c é o *Calor Específico volumétrico* ($\text{J}/\text{m}^3\text{K}$), λ é a *Condutividade Térmica* (W/mK) e finalmente v é a temperatura (K). Por tanto, tem-se:

$$\alpha = \frac{\lambda}{c} = \gamma^2, \quad (2.53)$$

na qual α é a *Difusividade Térmica* (m^2/s).

Por outro lado, considerando constantes as funções da equação (2.29), tem-se,

$$D = \frac{K}{C}, \quad (2.54)$$

na qual, D é a *Difusividade hidráulica* (m^2/s), K é *condutividade hidráulica* (m/s) e C é *Capacidade específica do conteúdo da água no solo* ($1/\text{m}$) (HILLEL, 1998).

Para fins analíticos desta seção, a equação (2.50) é escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (2.55)$$

Desta forma pode-se concluir que a equação (2.51) é análoga à equação (2.55).

2.9 Condições de Contorno

O problema físico da propagação da água no solo é representado pela equação de Richards que é uma PDE parabólica. A solução da PDE é dada dentro de uma região Λ no plano (x, t) dentro de um contorno Γ , onde se tem condições auxiliares adequadas, denominadas *Condições de Contorno*. Os tipos de condições de contorno mais importantes são (JEFFREY, 2001):

1. Condição Dirichlet,

$$\theta(x, t) = f(x, t), \quad (2.56)$$

na qual, $f(x, t)$ é uma função dada. Neste trabalho esta função é representada por uma constante que chegaria a ser um valor do conteúdo da água no solo, com a unidade no SI de m^3/m^3 .

2. Condição Neumann

$$\frac{\partial \theta}{\partial N}(x, t) = g(x, t), \quad (2.57)$$

na qual, N é a normal do contorno Γ e $g(x, t)$ uma função dada. Neste trabalho esta função $g(x, t)$ é representada por uma constante que chegaria a ser a vazão dada em m^3/s por área em m^2 , concluindo que é um valor da densidade de fluxo de água na superfície do solo, com unidades no SI de m/s .

2.10 Função de Transferência da Equação Linear de Richards

Apresenta-se a função de transferência da equação linear de Richards para possibilitar o projeto dos controladores lineares.

2.10.1 Função de Transferência Considerando o Fluxo Horizontal

Nesta seção considera-se a equação da difusão (2.50) apresentada na Seção 2.7 do presente trabalho. Onde se mostra o caso da equação de Richards na forma de uma PDE parabólica linear e unidimensional. Nesta equação o coeficiente da *Difusividade hidráulica* D é considerado um parâmetro constante do sistema.

Åström e Hägglund (2006, Seção 2.3) mencionam a função de transferência da equação do calor. Netushil (1978, Seção 5.4) apresenta o desenvolvimento da equação do calor.

Neste trabalho foi desenvolvida a função de transferência para o caso da propagação da água no solo que é representada pela equação de Richards. A equação de Richards é análoga à equação do Calor. Para fins analíticos desta seção toma-se em conta a equação (2.55) descrita na seção anterior.

Considera-se o desenvolvimento feito em (VORONOV, 1985, Seção 1.3), no qual se realiza uma análise da função de transferência da equação do calor.

Sendo o caso da propagação da água no solo, considera-se o valor inicial da equação (2.55) como, $\theta(x, 0) = 0$. A Transformada de Laplace de $\partial\theta/\partial t$ é dada por:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial\theta}{\partial t} \right\} = s \Theta(x, s), \quad (2.58)$$

substituindo (2.58) em (2.55), obtém-se,

$$\frac{\partial^2 \Theta(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s}{D} \Theta(x, s) = 0, \quad (2.59)$$

então, a solução é dada por:

$$\Theta(x, s) = A e^{-\kappa x \sqrt{s}} + B e^{\kappa x \sqrt{s}}, \quad (2.60)$$

na qual $\kappa = 1/\sqrt{D}$.

Uma das condições de contorno considerada é o conteúdo da água no solo em um ponto infinito do espaço afastado da superfície do solo. Assim, tem-se um conteúdo da água do ambiente. Isto é representado por: $\theta(\infty, t) = 0$, i.e. $\Theta(\infty, s) = 0$, portanto, $B = 0$. Então, tem-se,

$$\Theta(x, s) = A e^{-\kappa x \sqrt{s}}. \quad (2.61)$$

Continuando com a análise das condições de contorno, foram apresentadas três tipos de duplas de condições de contorno, porém, a terceira dupla é diferente à apresentada em (VORONOV, 1985). Esta ultima dupla de condição de contorno é mencionada em (NETUSHIL, 1978). Correspondentemente com estas três duplas de condições de contorno, apresentam-se três tipos de funções de transferência. A seguir, considerou-se a equação (2.61) para fazer a análises dos três casos.

I) O conteúdo de água no solo na superfície é considerada em $\theta_{in} = \theta(0, t)$, que é a variável de entrada. O conteúdo da água no solo a uma determinada distancia L , $\theta_{out} = \theta(L, t)$, é a variável de saída. Portanto:

$$\Theta_{in}(s) = \Theta(0, s) = A \quad (2.62)$$

$$\Theta_{out}(s) = \Theta(L, s) = A e^{-\kappa L \sqrt{s}}. \quad (2.63)$$

Estas condições de contorno são do tipo *Dirichlet*. Então, tem-se a seguinte função de transferência:

$$G_1(s) = \frac{\Theta_{out}(s)}{\Theta_{in}(s)} = e^{-\kappa L \sqrt{s}}. \quad (2.64)$$

Por fim, considerando a equação (2.64), como:

$$G_1(s) = e^{-\sqrt{(L^2/D)s}}, \quad (2.65)$$

assim, $\tau = L^2/D$, e portanto:

$$G_1(s) = e^{-\sqrt{\tau s}}. \quad (2.66)$$

II) Considerando a densidade do fluxo de água incidente como variável de entrada ($u_{in} = u_o$). Enquanto que o conteúdo da água do solo na superfície ($\theta_{out} = \theta(0, t)$) é a variável de saída. Se não houver nenhuma propagação da água no solo a partir da superfície para o meio circundante, a equação de balanço da propagação da água é:

$$u_{in} = u_o = -D \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} \quad (2.67)$$

em que D é a *Difusividade Hidráulica*, de esta forma, a variável de entrada e saída, respectivamente, são:

$$U_{in}(s) = -D \frac{\partial \Theta(0, s)}{\partial x} = D\kappa A \sqrt{s}, \quad (2.68)$$

$$U_{out}(s) = \Theta(0, s) = A. \quad (2.69)$$

Estas condições de contorno são do tipo: *Neumann* (2.68) e *Dirichlet* (2.69). Logo, a função de transferência é dada por:

$$G_2(s) = \frac{U_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{1}{D\kappa\sqrt{s}}. \quad (2.70)$$

Então, substituindo κ na equação (2.70),

$$G_2(s) = \frac{1}{\sqrt{Ds}}, \quad (2.71)$$

assim, $\bar{\tau} = D$, portanto,

$$G_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\bar{\tau}s}}. \quad (2.72)$$

III) Considerando a densidade do fluxo de água incidente como variável de entrada ($u_{in} = u_o$). Enquanto que o conteúdo da água no solo a uma determinada distancia, L , $\theta_{out} = \theta(L, t)$ é a variável de saída. De esta forma, a variável de entrada e saída,

respectivamente, são:

$$U_{in}(s) = -D \frac{\partial \Theta(0, s)}{\partial x} = D \kappa A \sqrt{s}, \quad (2.73)$$

$$\Theta_{out}(s) = \Theta(L, t) = A e^{-\kappa L \sqrt{s}}. \quad (2.74)$$

Note que, as condições de contorno são do tipo: *Neumann* (2.73) e *Dirichlet* (2.74), como no caso anterior. Logo, a função de transferência é:

$$G_3(s) = \frac{\Theta_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{e^{-\kappa L \sqrt{s}}}{D \kappa \sqrt{s}}. \quad (2.75)$$

Por fim, considerando a equação (2.75), como:

$$G_3(s) = \frac{e^{-\sqrt{(L^2/D)s}}}{\sqrt{Ds}}, \quad (2.76)$$

assim, $\tau = L^2/D$ e $\bar{\tau} = D$, então,

$$G_3(s) = \frac{e^{-\sqrt{\tau s}}}{\sqrt{\bar{\tau} s}}. \quad (2.77)$$

2.10.2 Função de Transferência Considerando o Fluxo Vertical

Para este caso considera-se a equação (2.49), na qual foi aplicada a Transformada de Laplace da expressão (2.58). Então, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Theta(z, s)}{\partial z^2} - \frac{K_0}{D} \frac{\partial \Theta(z, s)}{\partial z} - \frac{s}{D} \Theta(z, s) = 0. \quad (2.78)$$

Resolvendo a equação diferencial homogênea (2.78), tem-se:

$$\Theta(z, s) = C_1 e^{-\frac{1}{2D}(\sqrt{K_0^2+4sD}-K_0)z} + C_2 e^{\frac{1}{2D}(\sqrt{K_0^2+4sD}+K_0)z}, \quad (2.79)$$

Segundo as condições de contorno, o conteúdo da água no solo em um ponto infinito do espaço, afastado da superfície do solo, tem-se um conteúdo da água do ambiente. Isto é representado por: $\theta(\infty, t) = 0$, i.e. $\Theta(\infty, s) = 0$. Portanto, $C_2 = 0$, assim, tem-se que:

$$\Theta(z, s) = C_1 e^{-\frac{1}{2D}(\sqrt{K_0^2+4sD}-K_0)z}. \quad (2.80)$$

Considerando o terceiro caso apresentado na Seção 2.10.1. No qual se considera a densidade do fluxo de água incidente como variável de entrada ($u_{in} = u_o$) e o conteúdo da água no solo a uma determinada distância L como a variável de saída $\theta_{out} = \theta(L, t)$. Desta forma, a variável de entrada representa uma condição de contorno do tipo *Neumann* e a

variável de saída do tipo *Dirichlet*, portanto:

$$U_{in}(s) = -D \frac{\partial \Theta(0, s)}{\partial z} = C_1 \frac{1}{2} (\sqrt{K_0^2 + 4sD} - K_0); \quad (2.81)$$

$$\Theta_{out}(s) = \Theta(L, t) = C_1 e^{-\frac{L}{2D}(\sqrt{K_0^2 + 4sD} - K_0)}. \quad (2.82)$$

A seguir, a função de transferência é:

$$G(s) = \frac{\Theta_{out}(s)}{U_{in}(s)} = \frac{2 e^{-\frac{L}{2D}(\sqrt{K_0^2 + 4sD} - K_0)}}{\sqrt{K_0^2 + 4sD} - K_0}. \quad (2.83)$$

Para poder observar o comportamento do modelo, foram ilustrados os diagramas de Bode da função de transferência (2.83) juntamente à função de transferência (2.77) na Figura 19.

Os parâmetros usados para esta ilustração são: $D=8,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $K_0=1,69 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ e $L=0,15$.

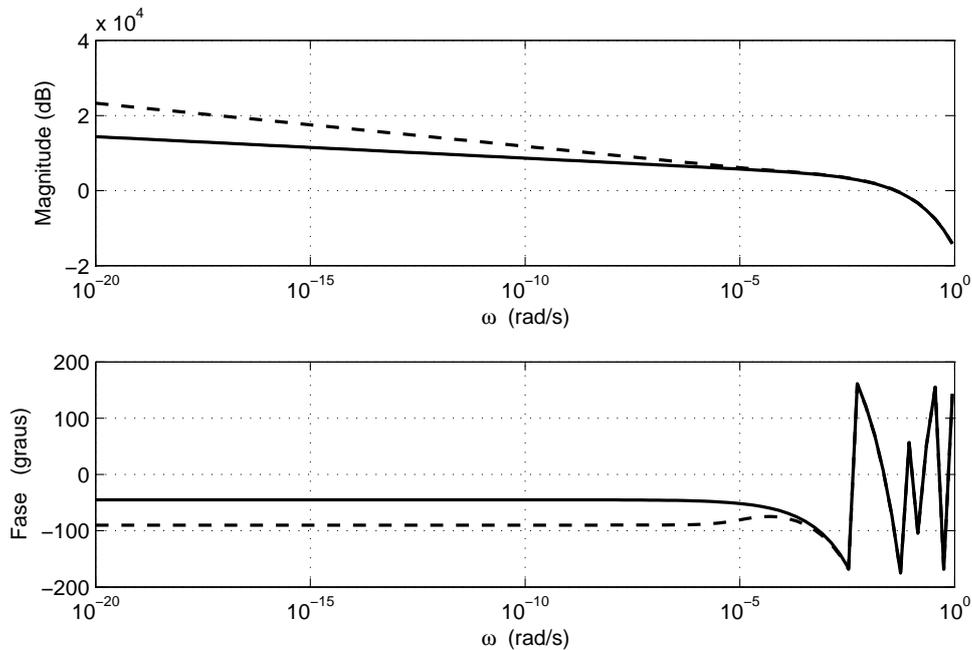


Figura 19 - Resposta em frequência da função de transferência da equação de Richards com fluxo horizontal (Linha solida) e com fluxo vertical (Linha tracejada).

Na Figura 19 pode-se observar que as duas repostas são bem parecidas em baixa frequência, tanto a fase quanto a amplitude. A defasagem se mantém uniforme até uma certa frequência critica, após este ponto a fase começa a oscilar.

3 CONTROLE PROPORCIONAL E INTEGRAL DO SISTEMA DE IRRIGAÇÃO

Neste capítulo foi desenvolvido o projeto do controlador Proporcional Integral para o modelo apresentado no capítulo anterior. Considerou-se a função de transferência da propagação de água no solo horizontal quanto vertical para o projeto do controlador PI.

3.1 Controlador Proporcional Integral

O controle proporcional integral é representada pela expressão:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right), \quad (3.1)$$

na qual, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle, $e(t)$ é o erro do controle. O erro é definido como,

$$e(t) = \theta_{ref} - \theta_L(t), \quad (3.2)$$

na qual, $\theta_{ref} \in \mathbb{R}$ é o sinal do conteúdo da água no solo de referencia e $\theta_L(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal do conteúdo da água no solo da saída em uma certa distância $L \in \mathbb{R}$.

Na Figura 20 ilustra-se o diagrama de blocos do sistema de controle, mostrando a realimentação respectiva. O sinal de controle é a soma do termo proporcional e do termo integral. $K_p \in \mathbb{R}^+$ é o ganho proporcional, $T_i \in \mathbb{R}^+$ é o tempo integral, sendo os dois parâmetros do controlador (ÅSTRÖM; HÄGGLUND, 2006). A função de transferência do

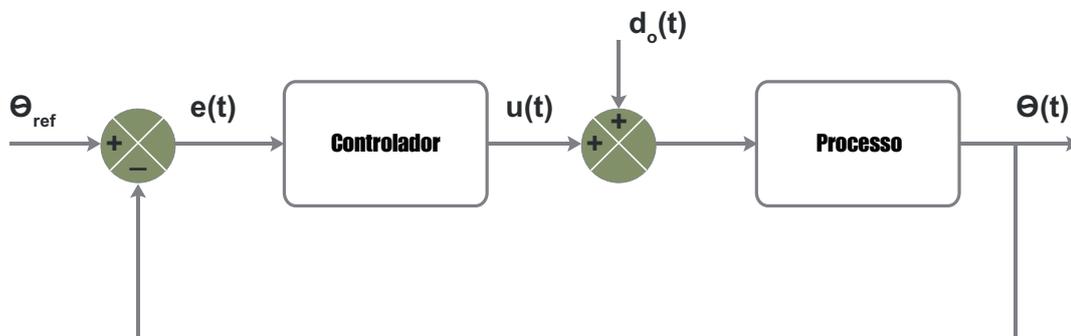


Figura 20 - Diagrama de blocos do sistema de controle.

controlador PI (3.1) é representada por,

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right). \quad (3.3)$$

Esta função de transferência pode ser escrita da seguinte maneira:

$$C(s) = \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i s + 1}{s} \right), \quad (3.4)$$

nesta última expressão, fica na descoberta o polo na origem dividido à ação integral, e o zero em $s = -1/T_i$.

3.2 Projeto do Controlador Proporcional e Integral da Função de Transferência da Equação Linear de Richards

O projeto foi realizado considerando as funções de transferência apresentadas em (2.66) e (2.77), que consideram a equação linear de Richards, expressa na equação (2.55).

O projeto dos controladores foram desenvolvidos usando o critério de Nyquist, analisando o comportamento das frequências da Margem de Ganho (MG) e Margem de Fase (MF), mostradas na Figura 21 (CASTRUCCI; BITTAR; SALES, 2011). O gráfico de Nyquist foi traçado utilizando os seguintes limites:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(j\omega) = 0, \quad (3.5)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} H(j\omega) = \infty. \quad (3.6)$$

sendo,

$$H(s) = C(s) \times \text{Planta do sistema}. \quad (3.7)$$

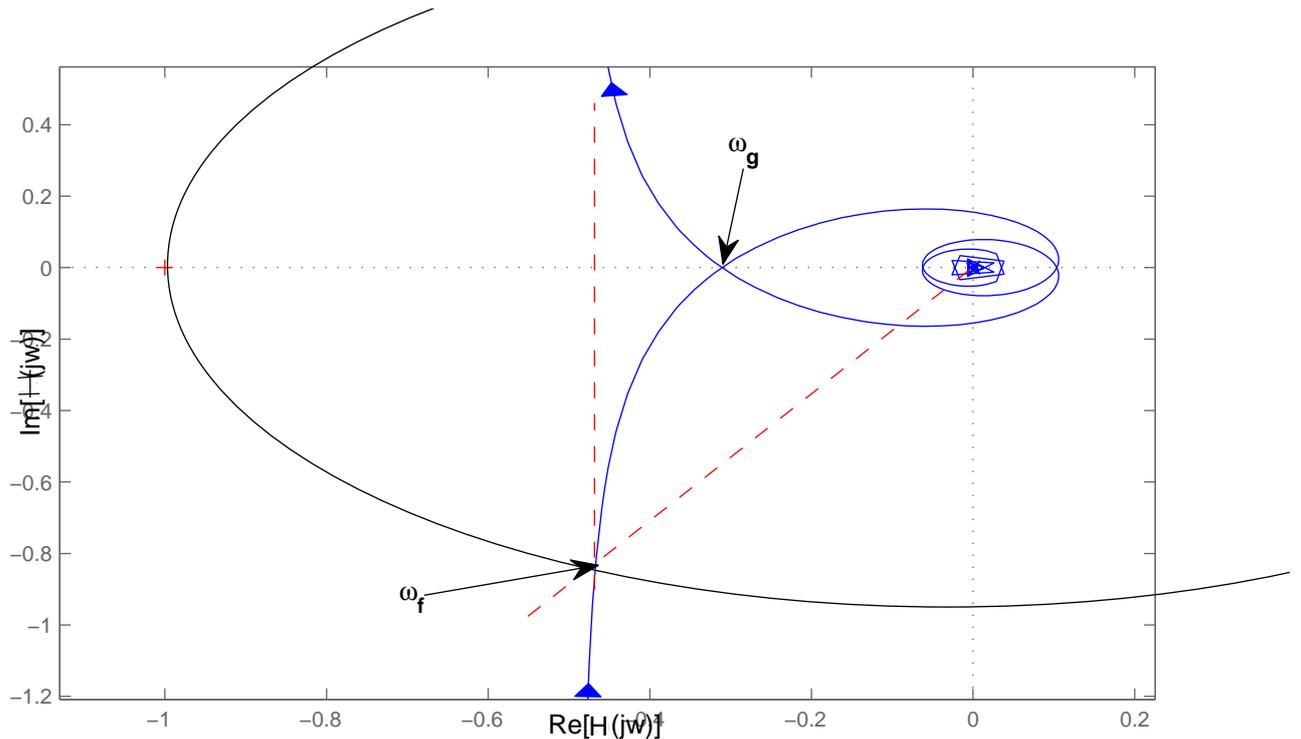


Figura 21 -Diagrama de Nyquist da malha direta da função de transferência da $H(j\omega)$, frequências analisadas.

Então, foram consideradas as funções de transferência descritas nos casos I) e III), apresentadas anteriormente na Seção 2.10.1. A seguir, mostra-se o desenvolvimento do projeto do controlador proporcional integral para cada um desses casos.

3.2.1 Função de Transferência-Condição de Contorno Dirichlet

Neste enfoque são consideradas duas condições de contorno do tipo Dirichlet. Fisicamente são representadas pelo conteúdo de água no solo na superfície do solo e um valor do conteúdo de água a uma distância L no solo. Então, usando a função de transferência (2.66), tem-se que,

$$H(s) = C(s)G_1(s) = \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i s + 1}{s} \right) e^{-\sqrt{s}\tau}. \quad (3.8)$$

Desta forma, para a análise na frequência a expressão anterior é dada por,

$$H(j\omega) = -j \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i j\omega + 1}{\omega} \right) e^{-\sqrt{j\omega}\tau}, \quad (3.9)$$

com a expressão: $\sqrt{j\omega\tau} = \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}$, tem-se:

$$H(j\omega) = -je^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}} \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i j\omega + 1}{\omega} \right) e^{j\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}}, \quad (3.10)$$

$$H(j\omega) = -e^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}} \frac{K_p}{T_i} \left(jT_i + \frac{1}{\omega} \right) \left(\text{sen}\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j\cos\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} \right), \quad (3.11)$$

$$H(j\omega) = -e^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}} \frac{K_p}{T_i} \left[\frac{1}{\omega} \text{sen}\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} - T_i \cos\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j \left(T_i \text{sen}\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + \frac{1}{\omega} \cos\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Para determinar a Margem de Fase, satisfaz-se que:

$$|H(j\omega_f)| = 1. \quad (3.13)$$

Então, avaliando-se ω_f na equação (3.10), obtém-se a seguinte expressão:

$$|H(j\omega_f)| = \left| -je^{-\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i j\omega_f + 1}{\omega_f} \right) e^{j\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} \right| = 1. \quad (3.14)$$

Seguidamente,

$$|H(j\omega_f)| = \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{\sqrt{T_i^2\omega_f^2 + 1}}{\omega_f} \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}}, \quad (3.15)$$

$$\frac{K_p}{T_i} \left(\frac{\sqrt{T_i^2\omega_f^2 + 1}}{\omega_f} \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} = 1, \quad (3.16)$$

$$\frac{K_p^2}{T_i^2} (T_i^2\omega_f^2 + 1) = \omega_f^2 e^{2\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}}, \quad (3.17)$$

$$\frac{K_p^2}{T_i^2} (T_i^2\omega_f^2 + 1) - \omega_f^2 e^{2\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} = 0. \quad (3.18)$$

Definindo-se:

$$\bar{\omega}_f := \tau\omega_f, \quad (3.19)$$

então,

$$\omega_f = \frac{\bar{\omega}_f}{\tau}, \quad (3.20)$$

logo:

$$K_p^2 (T_i^2\bar{\omega}_f^2 + \tau^2) - \bar{\omega}_f^2 T_i^2 e^{\sqrt{2\bar{\omega}_f}} = 0. \quad (3.21)$$

Se:

$$T_i = \tau_i \tau, \quad (3.22)$$

com isto:

$$K_p^2 (\tau_i^2 \bar{\omega}_f^2 + 1) - \bar{\omega}_f^2 \tau_i^2 e^{\sqrt{2\bar{\omega}_f}} = 0, \quad (3.23)$$

por fim, tem-se:

$$\tau_i = \sqrt{\frac{K_p^2}{\bar{\omega}_f^2 (\sqrt{2\bar{\omega}_f} - K_p^2)}}, \quad (3.24)$$

ou também:

$$K_p = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_f^2 \tau_i^2 e^{\sqrt{2\bar{\omega}_f}}}{\tau_i^2 \bar{\omega}_f^2 + 1}}. \quad (3.25)$$

Por outro lado, a MF esta dada por,

$$MF = \pi + \arg[H(j\omega_f)], \quad (3.26)$$

portanto, avaliando ω_f na equação (3.10), tem-se,

$$MF = \pi + \arg\left[-je^{-\sqrt{\frac{\omega_f \tau}{2}}} \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i j\omega_f + 1}{\omega_f}\right) e^{j\sqrt{\frac{\omega_f \tau}{2}}}\right], \quad (3.27)$$

tirando o argumento dos termos complexos, obtém-se:

$$MF = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\omega_f \tau}{2}} + \arctan(T_i \omega_f). \quad (3.28)$$

Da mesma forma, substituindo a expressão (3.19) na equação (3.28) tem-se,

$$MF = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\bar{\omega}_f}{2}} + \arctan\left(\frac{T_i \bar{\omega}_f}{\tau}\right). \quad (3.29)$$

Substituindo a expressão (3.22) na ultima equação, obtém-se,

$$MF = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\bar{\omega}_f}{2}} + \arctan(\tau_i \bar{\omega}_f). \quad (3.30)$$

Finalmente, a MF fica em função do parâmetro dimensional τ_i , expressa em (3.24), e a frequência de fase parametrizada ($\bar{\omega}_f$). Fazendo uso das expressões (3.25) e (3.30), pode-se obter a Figura 22, onde se mostra uma família de curvas do τ_i com o seu respectivo valor de K_p para uma determinada margem de fase dentro de uma faixa de $\bar{\omega}_f$ de 0,0049 a 0,2193.

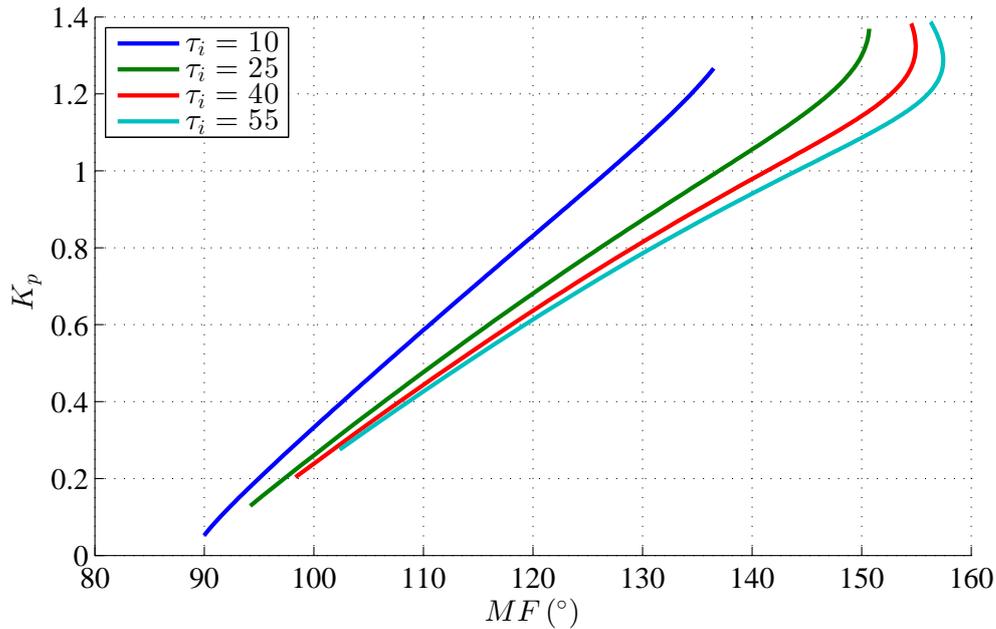


Figura 22 - Família de curvas da MF, condições de contorno Dirichlet ($0,0049 \leq \bar{\omega}_f \leq 0,2193$).

Por outra parte, a Margem de Ganho foi determinada pela frequência ω_g , que é a primeira solução da seguinte equação:

$$\arg[H(j\omega_g)] = -\pi, \quad (3.31)$$

ou de forma equivalente, tem-se:

$$\text{Im}[H(j\omega_g)] = 0. \quad (3.32)$$

Aplicando a expressão (3.32) na equação (3.12), obtém-se:

$$T_i \text{sen} \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} + \frac{1}{\omega_g} \cos \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} = 0, \quad (3.33)$$

da qual se tem,

$$\tan \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} + \frac{1}{T_i \omega_g} = 0. \quad (3.34)$$

Definindo-se:

$$\bar{\omega}_g = \tau \omega_g, \quad (3.35)$$

da onde se tem,

$$\omega_g = \frac{\bar{\omega}_g}{\tau}, \quad (3.36)$$

substituindo a expressão (3.36) em (3.34), tem-se,

$$\tan \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} + \frac{T}{T_i \bar{\omega}_g} = 0, \quad (3.37)$$

logo, substituindo a expressão (3.22) na equação (3.37), obtém-se,

$$\tau_i = \frac{-1}{\bar{\omega}_g \tan \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}}}. \quad (3.38)$$

Sabe-se que a MG é dada pela seguinte equação:

$$MG = \frac{-1}{Re [H(j\omega_g)]}, \quad (3.39)$$

Então, avaliando ω_g na equação (3.12), tem-se:

$$|H(j\omega_g)| = \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{\sqrt{T_i^2 \omega_g^2 + 1}}{\omega_g} \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}}}, \quad (3.40)$$

em seguida, substituindo a parte real da equação (3.12) na expressão (3.39), obtém-se,

$$MG = (-1) \left\{ -e^{-\sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}}} \frac{K_p}{T_i} \left[\frac{1}{\omega_g} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} - T_i \cos \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} \right] \right\}^{-1}, \quad (3.41)$$

$$MG = \frac{T_i \omega_g e^{\sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}}}}{K_p \left[\operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} - T_i \omega_g \cos \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} \right]}. \quad (3.42)$$

considerando as expressões; (3.35), (3.36) e substituindo as em (3.41), tem-se,

$$MG = \frac{T_i \frac{\bar{\omega}_g}{\tau} e^{\sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}}}}{K_p \left[\operatorname{sen} \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} - T_i \frac{\bar{\omega}_g}{\tau} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} \right]}, \quad (3.43)$$

substituindo a expressão (3.22) na equação (3.43), obtém-se,

$$MG = \frac{\tau_i \bar{\omega}_g e^{\sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}}}}{K_p \left[\operatorname{sen} \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} - \tau_i \bar{\omega}_g \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} \right]}. \quad (3.44)$$

A expressão (3.44), fica em função ao parâmetro adimensional τ_i representada pela expressão (3.38), e a frequência de ganho parametrizada ($\bar{\omega}_g$).

Na Figura 23, ilustra-se a variável τ_i respeito à margem de ganho para um K_p igual à unidade e dentro de uma faixa de $\bar{\omega}_g$ de 4,93 a 10,99.

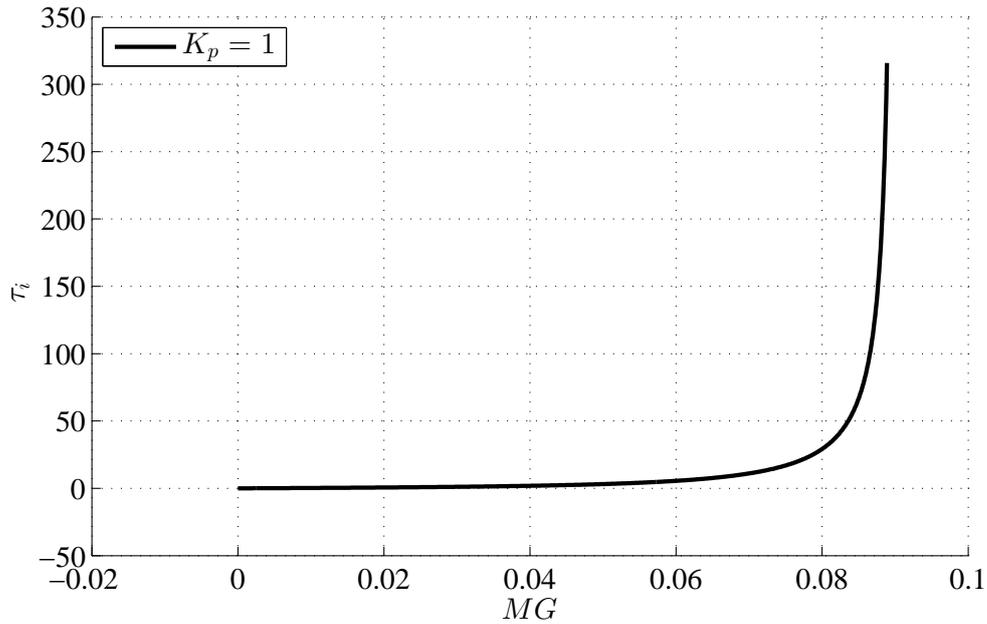


Figura 23 - MG com condições de contorno Dirichlet para $K_p=1$ ($4,93 \leq \bar{\omega}_g \leq 10,99$).

3.2.2 Função de Transferência-Condições de Contorno Neumann-Dirichlet

Neste segundo enfoque, uma das condições de contorno considerada é a densidade do fluxo de água incidente na superfície do solo, sendo esta do tipo Neumann, e a outra uma condição de contorno Dirichlet. A expressão da função de transferência é dada pela equação (2.77). Desta forma, tem-se que,

$$H(s) = C(s)G_3(s) = \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i s + 1}{s} \right) \frac{e^{-\sqrt{\tau} s}}{\sqrt{\tau} s}. \quad (3.45)$$

Desta maneira, a expressão anterior para a análise na frequência é dada por,

$$H(j\omega) = -j \frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i j\omega + 1}{\omega} \right) \frac{e^{-\sqrt{j\omega\tau}}}{\sqrt{j\omega\tau}}, \quad (3.46)$$

com a expressão, $\sqrt{j\omega\tau} = \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}$ e $\sqrt{j\omega\bar{\tau}} = \sqrt{\frac{\omega\bar{\tau}}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\bar{\tau}}{2}}$, tem-se:

$$H(j\omega) = -j\frac{K_p}{T_i} \left(\frac{T_i j\omega + 1}{\omega} \right) \frac{e^{-(\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}})}}{\sqrt{\frac{\omega\bar{\tau}}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\bar{\tau}}{2}}}, \quad (3.47)$$

$$H(j\omega) = -j\sqrt{2}\frac{K_p}{T_i} e^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}} \left(\frac{T_i j\omega + 1}{\omega} \right) e^{-j\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega\bar{\tau}} + j\sqrt{\omega\bar{\tau}}} \right) \left(\frac{\sqrt{\omega\bar{\tau}} - j\sqrt{\omega\bar{\tau}}}{\sqrt{\omega\bar{\tau}} - j\sqrt{\omega\bar{\tau}}} \right), \quad (3.48)$$

$$H(j\omega) = -j\frac{\sqrt{2}K_p}{2T_i} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}}}{\omega\bar{\tau}} \left(jT_i + \frac{1}{\omega} \right) (\sqrt{\omega\bar{\tau}} - j\sqrt{\omega\bar{\tau}}) e^{-j\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}}, \quad (3.49)$$

$$H(j\omega) = -\frac{\sqrt{2}K_p}{2T_i} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}}}{\omega\bar{\tau}} (\sqrt{\omega\bar{\tau}} - j\sqrt{\omega\bar{\tau}}) \left[\frac{1}{\omega} \text{sen} \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} - T_i \cos \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j \left(T_i \text{sen} \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + \frac{1}{\omega} \cos \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} \right) \right], \quad (3.50)$$

por fim, tem-se,

$$H(j\omega) = -\frac{\sqrt{2}K_p}{2T_i} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}}}{\omega\bar{\tau}} \left[\left(\frac{1}{\omega} + T_i \right) \sqrt{\omega\bar{\tau}} \text{sen} \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + \left(\frac{1}{\omega} - T_i \right) \sqrt{\omega\bar{\tau}} \cos \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + j \left(\left(T_i - \frac{1}{\omega} \right) \sqrt{\omega\bar{\tau}} \text{sen} \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} + \left(\frac{1}{\omega} + T_i \right) \sqrt{\omega\bar{\tau}} \cos \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}} \right) \right]. \quad (3.51)$$

Para determinar a Margem de Fase é satisfeita a equação (3.13). Assim, avaliando ω_f na equação (3.49), obtém-se,

$$|H(j\omega_f)| = \left| -j\frac{\sqrt{2}K_p}{2T_i} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}}}{\omega_f\bar{\tau}} \left(jT_i + \frac{1}{\omega_f} \right) (\sqrt{\omega_f\bar{\tau}} - j\sqrt{\omega_f\bar{\tau}}) e^{-j\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} \right| = 1. \quad (3.52)$$

Então,

$$|H(j\omega_f)| = \sqrt{2}\frac{K_p}{T_i} \left(\frac{\sqrt{T_i^2\omega_f^2 + 1}}{\omega_f} \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}}, \quad (3.53)$$

$$\sqrt{2}\frac{K_p}{T_i} \left(\frac{\sqrt{T_i^2\omega_f^2 + 1}}{\omega_f} \right) e^{-\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} = 1, \quad (3.54)$$

$$\frac{2K_p^2}{T_i^2} (T_i^2\omega_f^2 + 1) = \omega_f^2 e^{2\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}}, \quad (3.55)$$

$$\frac{2K_p^2}{T_i^2} (T_i^2\omega_f^2 + 1) - \omega_f^2 e^{2\sqrt{\frac{\omega_f\tau}{2}}} = 0. \quad (3.56)$$

Considerando as expressões (3.19), (3.20), e substituindo as em (3.56), tem-se:

$$2K_p^2 (T_i^2\bar{\omega}_f^2 + \tau^2) - \bar{\omega}_f^2 T_i^2 e^{\sqrt{2}\bar{\omega}_f} = 0. \quad (3.57)$$

Logo, substituindo a expressão (3.22) em (3.57), obtém-se :

$$2K_p^2 (\tau_i^2 \bar{\omega}_f^2 + 1) - \bar{\omega}_f^2 \tau_i^2 e^{\sqrt{2\bar{\omega}_f}} = 0, \quad (3.58)$$

por fim,

$$\tau_i = \sqrt{\frac{Kp^2}{\bar{\omega}_f^2 \left[\bar{\omega}_f \left(\frac{\bar{\tau}}{\tau} \right) e^{\sqrt{2\bar{\omega}_f}} - Kp^2 \right]}}. \quad (3.59)$$

De outra forma, também tem-se:

$$K_p = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_f^3 \tau_i^2 \frac{\bar{\tau}}{\tau} e^{\sqrt{2\bar{\omega}_f}}}{\tau_i^2 \bar{\omega}_f^2}}. \quad (3.60)$$

Por outra parte, a MF foi dada pela expressão (3.26). Portanto, considerando a equação (3.49) com ω_f , obtém-se,

$$MF = \pi + \arg \left[-j \frac{\sqrt{2} K_p}{2 T_i} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega_f \tau}{2}}}}{\omega_f \bar{\tau}} \left(j T_i + \frac{1}{\omega_f} \right) (\sqrt{\omega_f \bar{\tau}} - j \sqrt{\omega_f \bar{\tau}}) e^{-j \sqrt{\frac{\omega_f \tau}{2}}} \right], \quad (3.61)$$

então, tirando o argumento ficaria:

$$MF = \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\omega_f \tau}{2}} + \arctan(T_i \omega_f). \quad (3.62)$$

Da mesma forma, substituindo as expressões; (3.19), (3.20), na equação (3.62) tem-se,

$$MF = \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\bar{\omega}_f}{2}} + \arctan\left(\frac{T_i \bar{\omega}_f}{\tau}\right). \quad (3.63)$$

Substituindo a expressão (3.22) na ultima equação, obtém-se,

$$MF = \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{\bar{\omega}_f}{2}} + \arctan(\tau_i \bar{\omega}_f). \quad (3.64)$$

Por fim, a MF fica em função do parâmetro adimensional τ_i representada na (3.59), e a frequência de fase parametrizada ($\bar{\omega}_f$). Utilizando as expressões (3.60) e (3.64) pode-se obter a Figura 24, onde se mostra uma família de curvas do τ_i com valores respectivos de K_p para uma determinada margem de fase dentro de uma faixa de $\bar{\omega}_f$ de 0,01 a 0,3.

Para a Margem de Ganho é satisfeita e a expressão (3.32). Então, da equação (3.51), obtém-se a seguinte equação:

$$\left(T_i - \frac{1}{\omega_g} \right) \sqrt{\omega_g \bar{\tau}} \sin \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} + \left(\frac{1}{\omega_g} + T_i \right) \sqrt{\omega_g \bar{\tau}} \cos \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} = 0, \quad (3.65)$$

da qual se tem,

$$\tan \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} + \frac{T_i \omega_g + 1}{T_i \omega_g - 1} = 0. \quad (3.66)$$

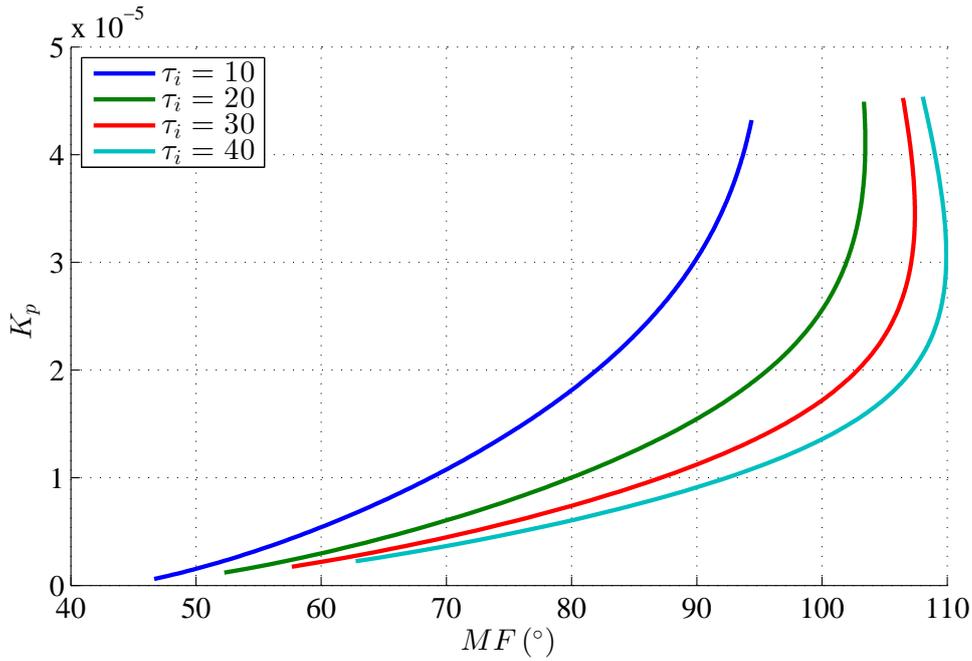


Figura 24 - Família de curvas da MF, condições de contorno Neumann-Dirichlet ($0, 01 \leq \bar{\omega}_f \leq 0, 3$).

Considerando-se as expressões (3.35) e (3.36), substituindo as na equação (3.66), tem-se:

$$\tan \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} + \frac{T_i \bar{\omega}_g + \tau}{T_i \bar{\omega}_g - \tau} = 0, \quad (3.67)$$

logo, substituindo a expressão (3.22) na equação (3.67), obtém-se,

$$\tau_i = \frac{\tan \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} - 1}{\bar{\omega}_g \left(\tan \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} + 1 \right)}. \quad (3.68)$$

Por outra parte, a MG é dada pela equação (3.39), avaliando ω_g na equação (3.51), tem-se:

$$MG = (-1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{K_p}{T_i} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}}}}{\omega_g \bar{\tau}} \left[\left(\frac{1}{\omega_g} + T_i \right) \sqrt{\omega_g \bar{\tau}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} + \left(\frac{1}{\omega_g} - T_i \right) \sqrt{\omega_g \bar{\tau}} \cos \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} \right] \right)^{-1}, \quad (3.69)$$

$$MG = \frac{T_i \omega_g \sqrt{2 \omega_g \bar{\tau}} e^{\sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}}}}{K_p \left[\operatorname{sen} \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} + T_i \omega_g \cos \sqrt{\frac{\omega_g \tau}{2}} \right]}, \quad (3.70)$$

considerando as expressões; (3.35), (3.36), e substituindo as na equação (3.70), tem-se,

$$MG = \frac{T_i \frac{\bar{\omega}_g}{\tau} \sqrt{2 \bar{\omega}_g \bar{\tau}} e^{\sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}}}}{K_p \left[\operatorname{sen} \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} + T_i \frac{\bar{\omega}_g}{\tau} \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} \right]}. \quad (3.71)$$

Finalmente, substituindo a expressão (3.22) na equação (3.71) , obtém-se,

$$MG = \frac{\tau_i \bar{\omega}_g \sqrt{2\bar{\omega}_g \frac{\tau_i}{\tau}} e^{\sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}}}}{K_p \left[\text{sen} \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} + \tau_i \bar{\omega}_g \cos \sqrt{\frac{\bar{\omega}_g}{2}} \right]}. \quad (3.72)$$

Esta ultima equação fica em função do parâmetro adimensional τ_i representada por (3.68), e a frequência de ganho parametrizada ($\bar{\omega}_g$).

Na Figura 25, ilustra-se a variável τ_i respeito à margem de ganho para um K_p igual à unidade e dentro de uma faixa de $\bar{\omega}_g$ de 1,23 a 10,97.

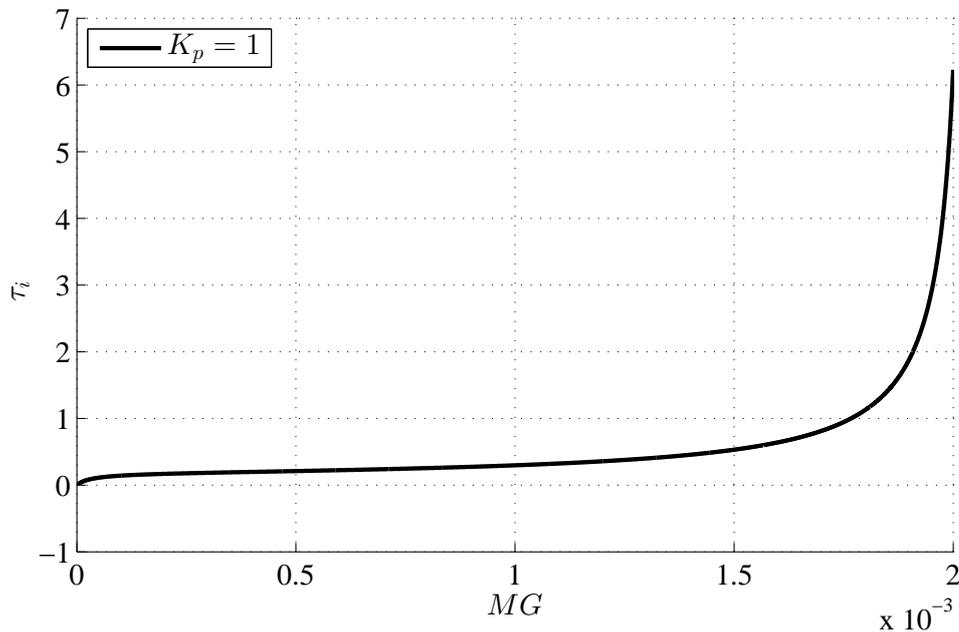


Figura 25 -MG com condições de Contorno Neumann-Dirichlet para $K_p=1$ ($1,23 \leq \bar{\omega}_g \leq 10,97$).

3.2.3 Exemplo do projeto com a Condição de Contorno Neumann-Dirichlet

No presente trabalho, foi considerado como variável de controle a vazão, que seria a densidade de fluxo na superfície do solo. Dito abordagem foi apresentado pela Função de Transferência expressa em (2.77). Portanto, a seguir é mostrado um exemplo que ilustra o projeto desenvolvido.

Para este exemplo, utilizou-se os dados experimentais dos parâmetros do solo apresentado em (GENUCHTEN, 1980). O calculo da difusividade hidráulica foi feita usando formulas apresentadas em (CHEN; TAN; CHEN, 2003).

Obtendo assim, o valor do coeficiente da difusividade hidráulica, $D = 8,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, para o solo *Guelph Loam* umedecido.

Foi considerada uma profundidade de $L = 0,15 \text{ m}$, conseguindo uma resposta em malha aberta mostrada na Figura 26. Foi considerado a variável de entrada uma densidade de fluxo na superfície do solo de $5,78 \times 10^{-7} \text{ m/s}$.

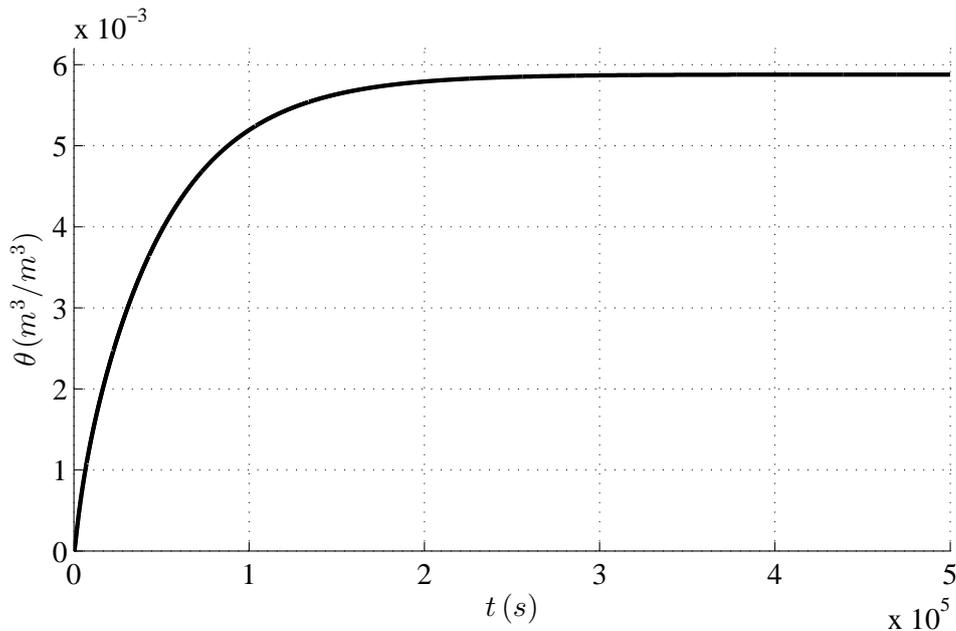


Figura 26 - Resposta em malha aberta do conteúdo de água no solo. $u=5,78 \times 10^{-7} \text{ m/s}$.

A projeção do controlador foi feita usando as expressões (3.64), (3.72), da MF e da MG respectivamente. Calculadas na Seção 3.2.2.

Considerou-se como referência um conteúdo de água no solo de $0,2 \text{ m}^3/\text{m}^3$. Para este propósito tem-se na Figura 27 onde se mostra duas escolhas da MF e na Figura 28 mostra-se as duas escolhas para MG. Estas escolhas foram feitas em função ao parâmetro τ_i .

Na primeira escolha, na Figura 27 pode-se observar uma MF de 80° para um determinado valor de τ_i . Com isto, pode-se enxergar que para o valor bastante próximo ao τ_i da MF tem-se uma MG de 19,15.

Com esta primeira escolha conseguiu-se a resposta em malha fechada ilustrada na primeira gráfica da Figura 29, que mostra um *overshoot* de 6,5%.

Para poder eliminar o *overshoot* teve-se que fazer uma segunda escolha, acrescen-

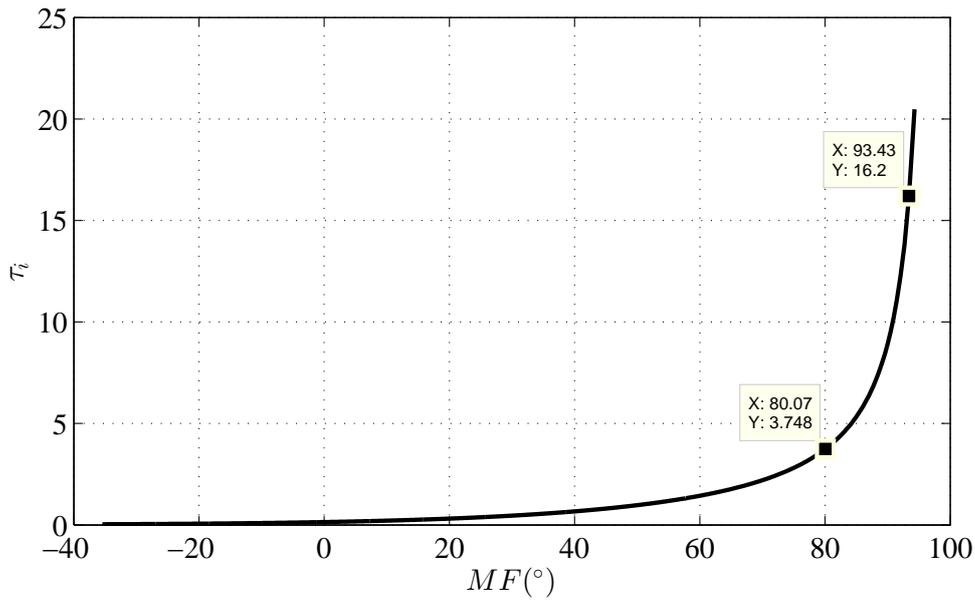


Figura 27 - MF, primeira escolha de 80° , segunda escolha de 93° . $L=0,15$ m. $D=8,46 \times 10^{-6}$ m^2/s .

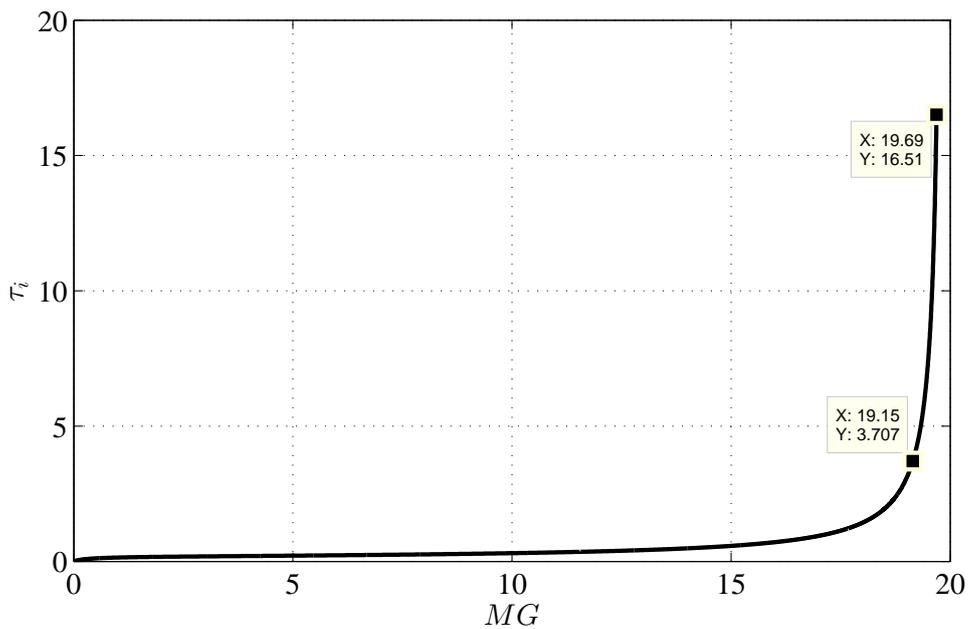


Figura 28 - MG, primeira escolha de 19,15, segunda escolha de 19,69. $L=0,15$ m. $D=8,46 \times 10^{-6}$ m^2/s .

tando a MF para 93° . Esta escolha pode-se observar na Figura 27. Assim, a MF de 93° pertence a um valor determinado de τ_i e este a sua vez tem uma MG de 19,69 mostrada na Figura 28. Portanto, este aumento de margem de fase fez sumir o *overshoot* de 6,5% que se tinha na escolha anterior. A resposta em malha fechada e o sinal de controle são ilustrados na Figura 31 e Figura 32.

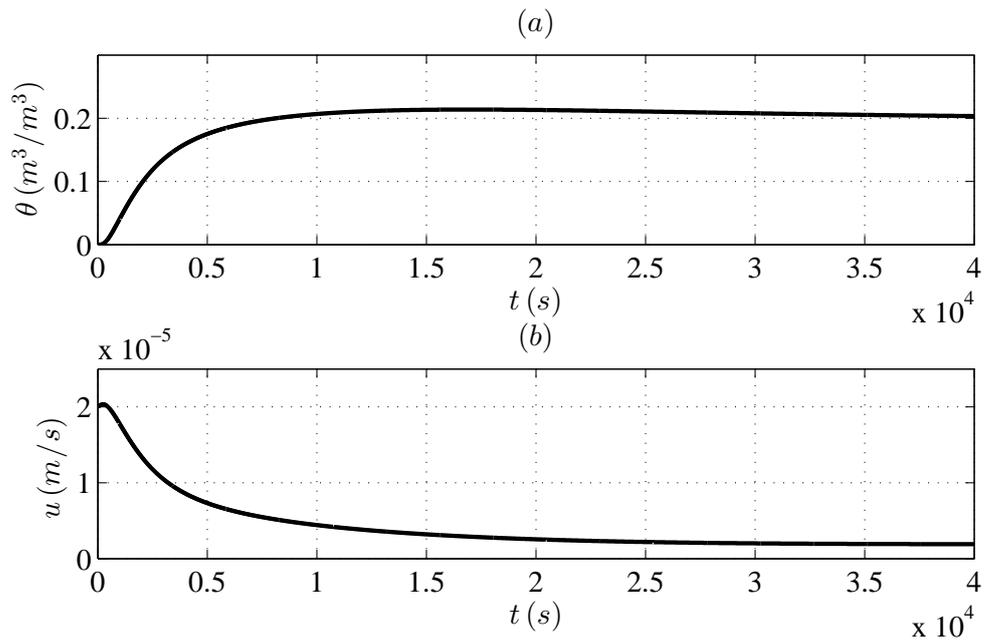


Figura 29 - Simulação do controlador PI em malha fechada com MF=80° e MG=19,15: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.

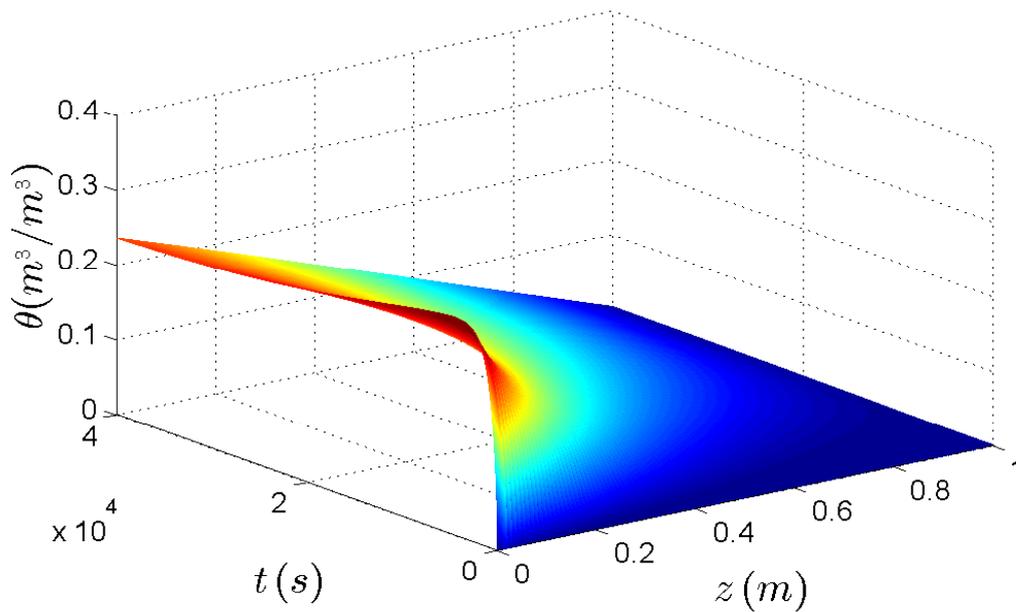


Figura 30 - Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador PI com MF=80° e MG=19,15.

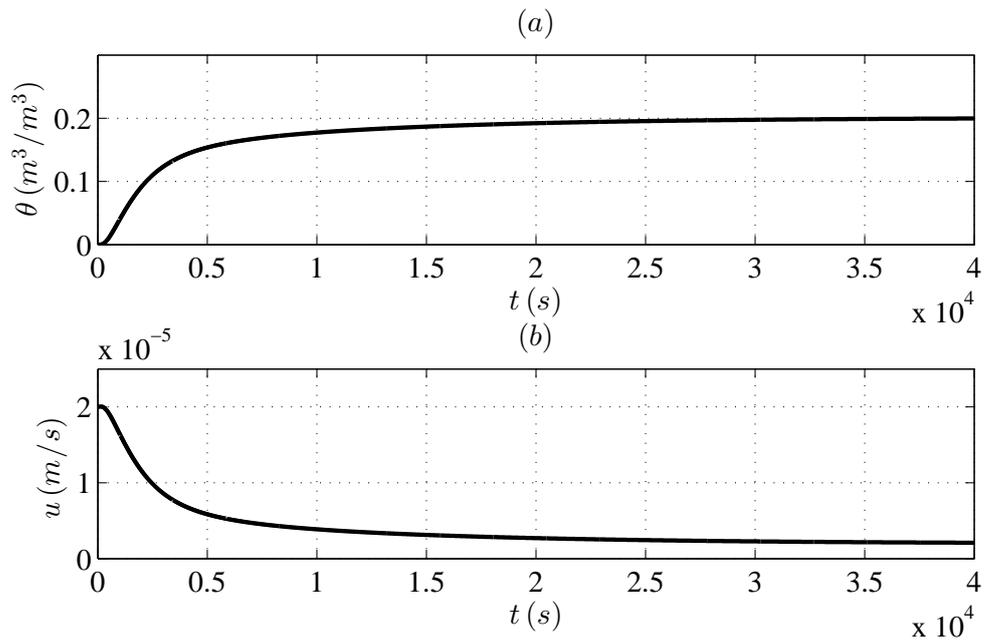


Figura 31 - Simulação do controlador PI em malha fechada com $MF=93^\circ$ e $MG=19,69$: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.

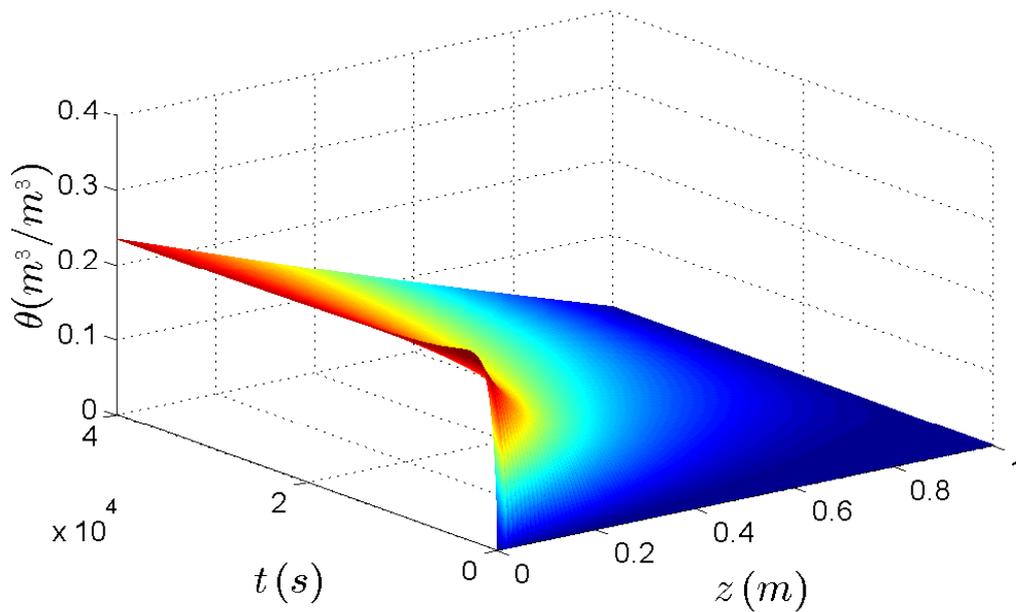


Figura 32 - Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador PI com $MF=93^\circ$ e $MG=19,69$.

3.2.4 Exemplo do projeto com a Condição de Contorno Neumann-Dirichlet Considerando o Fluxo Vertical

A função de transferência considerando o fluxo vertical foi representada pela equação (2.83). Do projeto do controlador PI pelo critério de Nyquist resultaram equações bastante abstratas, é por esta razão que foi considerado o critério da resposta em frequência da função de transferência da Equação de Richards com o Fluxo vertical da Seção 2.10.2 mostrado na Figura 19.

O parâmetro K_0 do sistema foi calculado através de (CHEN; TAN; CHEN, 2003), obtive-se: $K_0=16,93 \times 10^{-6}$ m/s, o valor da difusividade hidráulica continuou sendo o mesmo que a aplicação anterior ($D=8,46 \times 10^{-6}$ m²/s).

Na Figura 33 tem-se a resposta em malha aberta, considerando uma distância $L=0,15$ m.

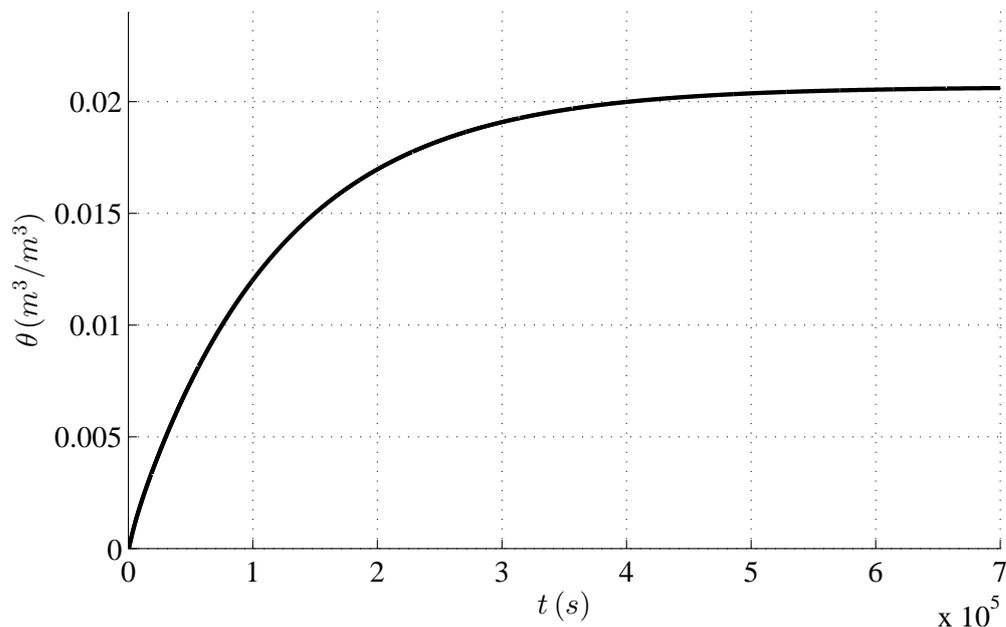


Figura 33 - Resposta em malha aberta do conteúdo de água no solo, considerando o fluxo vertical. $u=5,78 \times 10^{-7}$ m/s.

Obtiveram-se os resultados mostrados na Figura 34 e na Figura 35. Na Figura 19 pode-se observar que o valor da constante do tempo integral é, $T_i \cong 10^4$ s. Desta forma, o ajuste foi considerado como: $T_i=10,684 \times 10^4$ s. Para obter uma resposta sem *overshoot*

o parâmetro do ganho proporcional foi ajustado: $K_p=1,2\times 10^{-4}$. Obtendo assim, o valor do τ_i e considerando os gráficos da anterior aplicação da margem de fase e margem de ganho, tem-se uma MF=91° e uma MG=16,48.

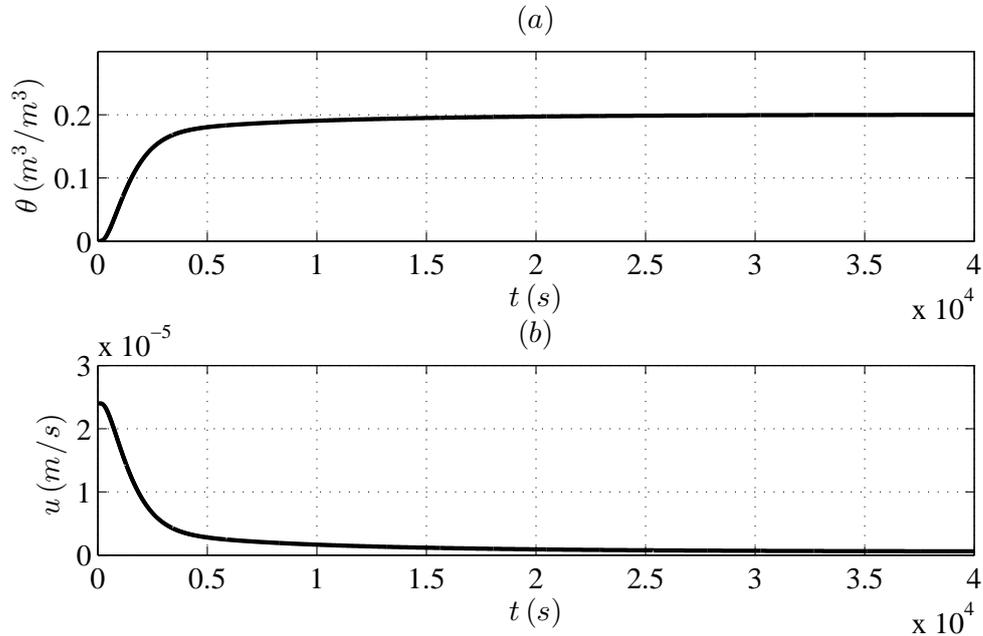


Figura 34 - Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical com MF=91° e MG=16,48: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.

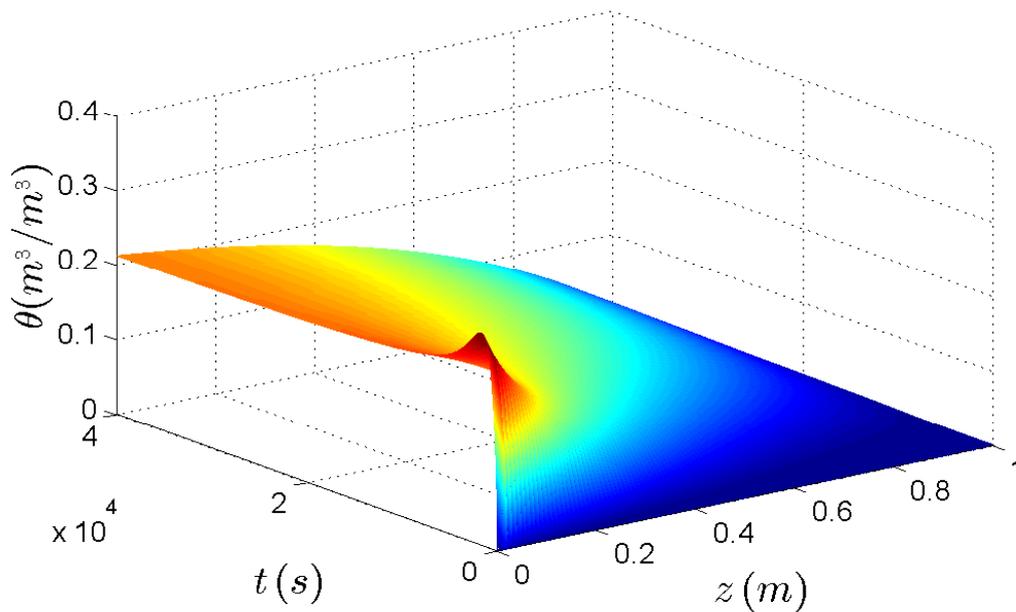


Figura 35 - Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador PI com MF=91° e MG=16,48.

Logo, foi considerada uma perturbação d_0 , descrita por,

$$d_0(t) = \begin{cases} 0 \text{ m/s}, & \text{se } t < 20 \times 10^3 \text{ s} \\ -25 \times 10^{-6} \text{ m/s}, & \text{se } t \geq 20 \times 10^3 \text{ s} \end{cases} . \quad (3.73)$$

Os resultados são mostrados na Figura 36 e na Figura 38. Pode-se observar que na Figura 36.(b) o sinal de controle reage à aplicação da perturbação, mais na Figura 36.(a) o sinal controlado demora em reagir.

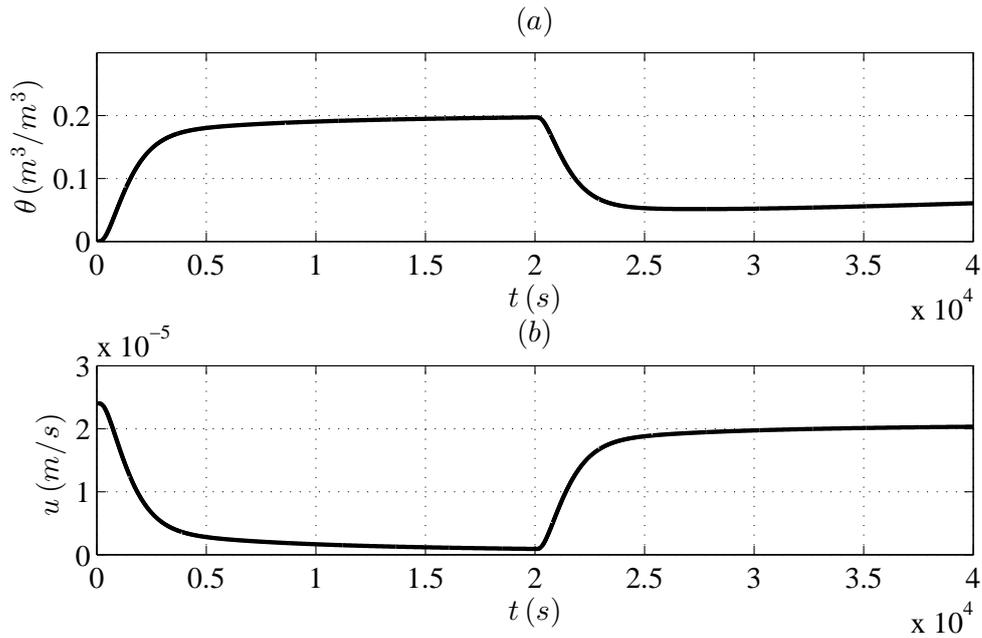


Figura 36 -Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com $\text{MF}=91^\circ$ e $\text{MG}=16,48$: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.

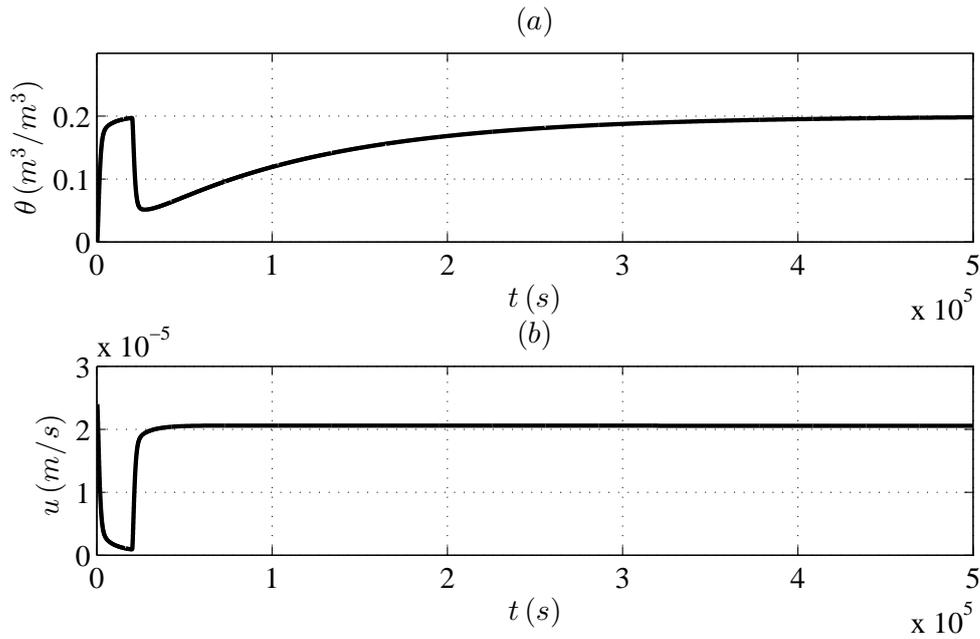


Figura 37 - Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com $\text{MF}=91^\circ$ e $\text{MG}=16,48$, tempo estendido da Figura 36: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.

Para isto, estendeu-se o tempo da simulação para poder verificar se o conteúdo de água no solo conseguiu voltar para o sinal de referência. Na Figura 37 conseguiu-se observar que o sinal controlado demora para voltar para a referência, mas finalmente volta.

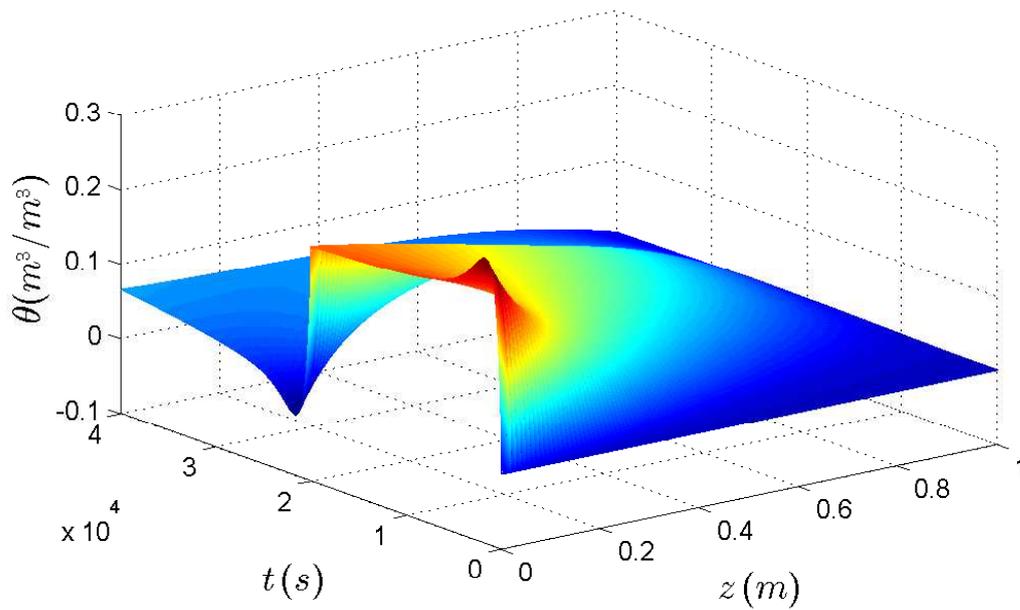


Figura 38 - Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador PI com d_0 .

Na Figura 39 e na Figura 40 mostra-se o comportamento do sistema com uma distância $L=0,50$ m.

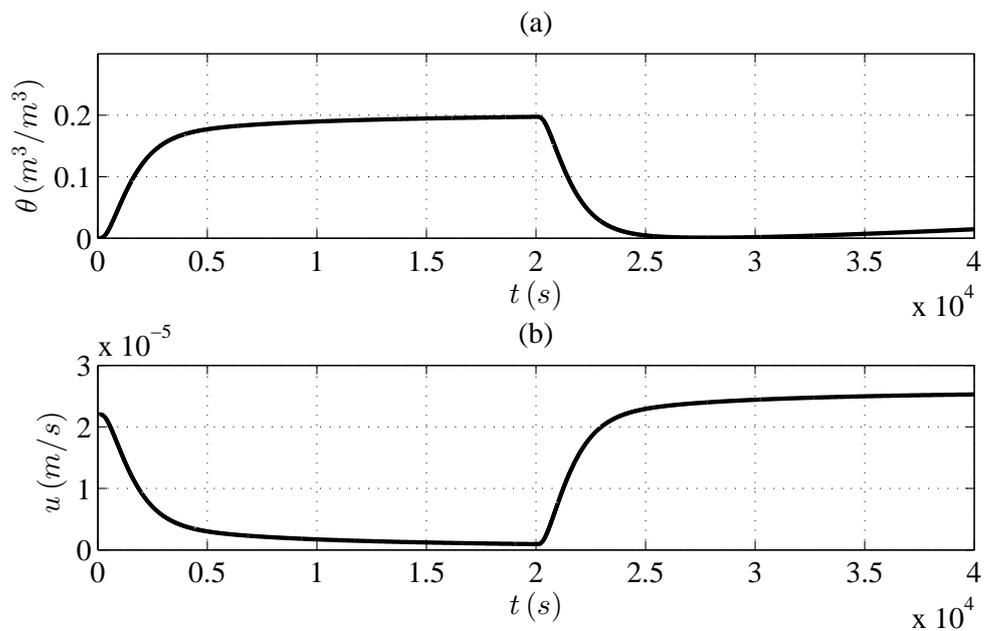


Figura 39 - Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com $MF=60^\circ$ e $MG=5,37$: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,50$ m e (b) o sinal de controle.

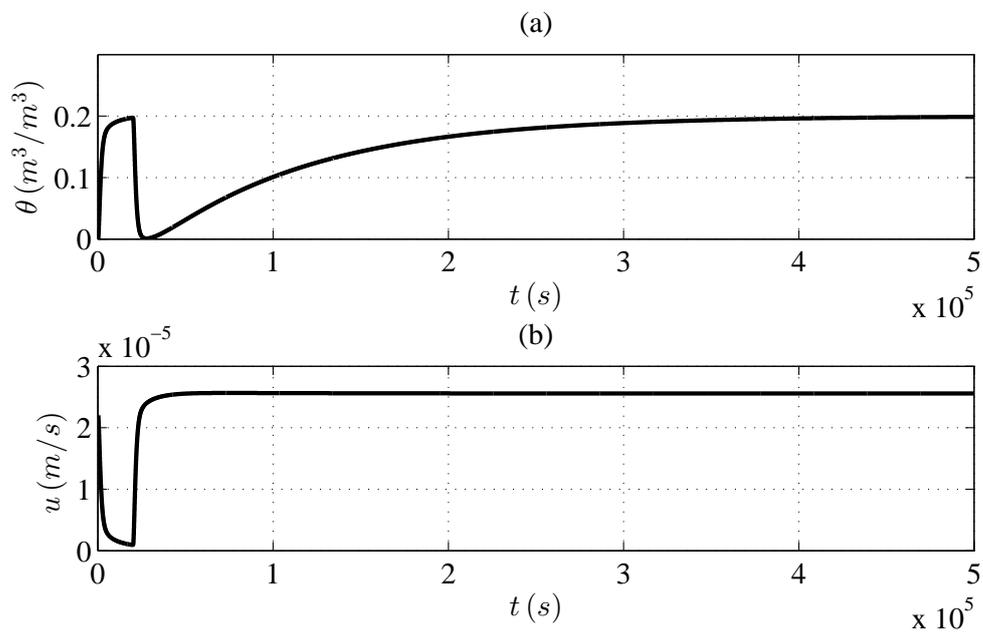


Figura 40 - Simulação do controlador PI em malha fechada mais o fluxo vertical e d_0 com $MF=60^\circ$ e $MG=5,37$, tempo estendido da Figura 39: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,50$ m e (b) o sinal de controle.

4 CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL POR MODO DESLIZANTE

Este capítulo apresenta a base teórica e o desenvolvimento do controlador por modo deslizante (*sliding mode control* — SMC).

As primeiras noções publicadas em inglês sobre o Controle a Estrutura Variável (*Variable Structure Control* — VSC) foram o livro do Itkis (1976) e o artigo do Utkin (1977) (EDWARDS; SPURGEON, 1998).

O controle a estrutura variável por modo deslizante força o estado do sistema em direção à superfície de deslizamento, que é escolhida pelo projetista de tal forma que o sistema tenha o desempenho desejado e seja imune às perturbações, deste modo os efeitos de incertezas paramétricas e perturbações são cancelados e o objetivo do controle é alcançado. O VSC ou SMC funciona idealmente como um controlador de ganho infinito e tem o sinal de controle descontínuo.

A realimentação é responsável por chavear entre duas ou mais estruturas, de tal forma que um novo sistema é produzido. Este novo sistema é conhecido por ser de alto desempenho, capaz de rejeitar perturbações e praticamente insensível a variações de seus parâmetros internos. Porém, a ocorrência do fenômeno *chattering* dificulta a implementação do controle SMC.

4.1 Superfície de Deslizamento

A superfície de deslizamento é uma região do espaço de estado onde se garante que o sistema tenha um comportamento predefinido e estável (DECARLO et al. 1988).

Para realizar o projeto do controle por modo deslizante tem-se duas etapas (EDWARDS; SPURGEON, 1998):

1. Projetar a superfície de deslizamento tal maneira que quando a trajetória do sistema execute essa superfície, esta seja estável e comporte-se da forma desejada.
2. Definir uma lei de chaveamento do controle que garanta a existência do modo deslizante e a alcançabilidade da superfície de deslizamento.

Por outro lado, os sistemas reais possuem imperfeições, tais como atraso e histerese. Como consequência destas imperfeições, o chaveamento deve ocorrer em frequência finita. Desta forma o estado oscila dentro de uma região vizinha à superfície de deslizamento. Este fenômeno é conhecido como *chattering*. Se a frequência de chaveamento for muito alta em relação à resposta dinâmica do sistema, estas imperfeições e a lentidão no chaveamento do controle poderão ser desprezadas.

4.2 Formulação do Problema

Neste trabalho é considerado o caso *no collocated*, o que significa que a medida feita por um sensor, por exemplo, e o atuador encontram-se em diferentes lugares.

As equações de Richards nas coordenadas Vertical (2.49) e Horizontal (2.50) podem ser também escritas como,

$$\theta_t(z, t) = D\theta_{zz}(z, t) - K_0\theta_z(z, t), \quad (4.1)$$

$$\theta_t(x, t) = D\theta_{xx}(x, t), \quad (4.2)$$

respectivamente. Na qual, a notação adotada é a seguinte:

$$\begin{aligned} \theta_t(z, t) &:= \frac{\partial\theta(z, t)}{\partial t}, & \theta_{zz}(z, t) &:= \frac{\partial^2\theta(z, t)}{\partial z^2}, \\ \theta_z(z, t) &:= \frac{\partial\theta(z, t)}{\partial z}, & \theta_{xx}(x, t) &:= \frac{\partial^2\theta(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Considerando a variação do campo escalar no espaço e no tempo de $\theta(z, t)$, com a variável unidimensional no espaço $z \in [0, L]$ e a variável no tempo $t \geq 0$. Desta forma, tem-se a PDE (4.1) e as condições de contorno Neumann dadas pelas expressões:

$$\theta_z(0, t) = -D^{-1}[u(t) + d_0(t)], \quad (4.4)$$

$$\theta_z(L, t) = -D^{-1}d_L(t). \quad (4.5)$$

Na primeira expressão tem-se, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle, que seria a densidade de fluxo de água para a irrigação. A perturbação $d_0(t) \in \mathbb{R}$ representa a chuva ou a evaporação da água. A perturbação $d_L(t) \in \mathbb{R}$ é a drenagem da água para o resto do solo ($z > L$). Esta perturbação pode também representar a absorção de água pela planta. Estas perturbações não precisam ser medidas desde que se encontrem em faixas de valores conhecidas.

Foram abordados dois tipos de problemas de controle:

1. regular a média do conteúdo de água no solo, que é definido como,

$$\bar{\theta}(t) := \frac{1}{L} \int_0^L \theta(z, t) dz. \quad (4.6)$$

2. regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade específica ($z = L$), que é definido como,

$$\theta_L(t) := \theta(L, t). \quad (4.7)$$

O fluxo de água é aplicado na superfície do solo ($z = 0$).

Observação 4.1 *A medida de $\bar{\theta}(t)$ na equação (4.6) e $\theta_L(t)$ na equação (4.7), podem ser realizadas por sensores. Os quais podem ser os apresentados em (KIZITO et al., 2008).*

4.3 Lei de Controle

Para poder controlar o sistema descrito pela PDE (4.1) e as condições de contorno (4.5) e (4.6), foi proposta uma adequada lei de controle de estrutura variável (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009):

$$u(t) = \begin{cases} u^+(t), & \text{se } \sigma > 0 \\ u^-(t), & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}, \quad (4.8)$$

na qual, $u^+(t)$ e $u^-(t)$ são sinais de modulação definidas como:

$$u^+(t) = \bar{d}(t) + \delta, \quad u^-(t) = \underline{d}(t) - \delta, \quad (4.9)$$

nas quais, $\delta > 0$ é uma constante arbitraria. O limite superior $\bar{d}(t) \in \mathbb{R}$ e o limite inferior $\underline{d}(t) \in \mathbb{R}$ são sinais contínuas por partes que satisfazem a seguinte desigualdade:

$$\underline{d}(t) \leq d(t) \leq \bar{d}(t), \quad (4.10)$$

na qual, $d(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal da perturbação que é rejeitada. Esta será descrita mais adiante nas expressões (4.22) e (4.26).

4.4 Projeto da Superfície de Chaveamento

Baseia-se nas duas abordagens descritas na Seção 4.2.

4.4.1 Média do Conteúdo da Água no Solo

A regulação da média do conteúdo de água no solo é a primeira abordagem considerada. Para isto, define-se a superfície de deslizamento $\sigma(t) = 0$, da seguinte forma:

$$\sigma(t) = \bar{\theta}_{ref} - \bar{\theta}(t) , \quad (4.11)$$

na qual, $\bar{\theta}_{ref} \in \mathbb{R}$ é a média do conteúdo de água no solo desejada. Então, quando a média de conteúdo de água no solo $\bar{\theta}$ é igual a $\bar{\theta}_{ref}$, tem-se $\sigma(t) = 0$.

4.4.2 Conteúdo de Água no Solo em uma Profundidade Especificada

Para regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade específica (L), escolheu-se uma superfície de deslizamento alternativa. Esta inclui um termo de erro integral e_i para eliminar o erro e entre o conteúdo da água no solo em uma profundidade especificada e uma referencia desejada, tal que,

$$\sigma(t) = \theta_{ref} - \bar{\theta}(t) + e_i(t) , \quad (4.12)$$

na qual, $\theta_{ref} \in \mathbb{R}$ é o conteúdo de água no solo desejado e a integral do erro pode ser expressa como

$$e_i(t) = \int_0^t K_i e(t) dt , \quad (4.13)$$

tal que, $K_i \in \mathbb{R}^+$ é o ganho da integral e $e(t)$ é o sinal do erro definido como:

$$e(t) = \theta_{ref} - \theta(L, t) . \quad (4.14)$$

O equilíbrio de (4.13) é obtida quando, $e = 0$.

4.5 Existência do Modo Deslizante

A existência do modo deslizante nas duas abordagens de controle da Seção 4.2 é enunciada no Teorema 4.1 e no Corolário 4.1, apresentados a seguir. Assume-se que a perturbação verifica a desigualdade (4.10) com limitantes conhecidos, o que não requer a medição da perturbação nem dos sinais que a compõem, tais como: chuva, evaporação, absorção e condições de contorno.

Teorema 4.1 *Considere a PDE (4.1), as condições de contorno (4.4)–(4.5), a lei de controle (4.8), (4.9) mais (4.6), e $\sigma(t)$ dada pela equação (4.12) com a integral do erro (4.13) e (4.14). Se a perturbação verifica a desigualdade (4.10), então a superfície de deslizamento, $\sigma(t) = 0$, é alcançada em tempo finito.*

Prova: Considerando a função positiva definida,

$$V = \frac{\sigma^2}{2}, \quad (4.15)$$

que tem como derivada no tempo,

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma}. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.6), (4.13) e (4.14) na (4.12) resulta,

$$\sigma(t) = \theta_{ref} - \frac{1}{L} \int_0^L \theta(z, t) dz + \int_0^t K_i [\theta_{ref} - \theta(L, t)] dt, \quad (4.17)$$

e derivada no tempo de (4.17) é dada por

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{1}{L} \int_0^L \theta_t(z, t) dz + K_i [\theta_{ref} - \theta(L, t)]. \quad (4.18)$$

Substituindo, $\theta_t(z, t)$ da PDE (4.1) na (4.18), então, esta pode ser escrita como,

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{1}{L} \int_0^L [D\theta_{zz}(z, t) - K_0\theta_z(z, t)] dz + K_i [\theta_{ref} - \theta(L, t)]. \quad (4.19)$$

Resolvendo a integral na equação (4.19), pode-se obter,

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{1}{L} \left[\left(D\theta_z(L, t) - K_0\theta(L, t) \right) - \left(D\theta_z(0, t) - K_0\theta(0, t) \right) \right] + K_i [\theta_{ref} - \theta(L, t)]. \quad (4.20)$$

Então, substituindo as condições de contorno (4.4)–(4.5) na (4.20), resulta,

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{1}{L} \left(d_L(t) + K_0\theta_L(t) - u(t) - d_0(t) - K_0\theta(0, t) + LK_i\theta_{ref} - LK_i\theta(L, t) \right). \quad (4.21)$$

Definindo o sinal de perturbação,

$$d(t) = d_L(t) + K_0\theta(L, t) - d_0(t) - K_0\theta(0, t) + LK_i\theta_{ref} - LK_i\theta(L, t). \quad (4.22)$$

Então, a equação (4.21) pode ser reescrita como,

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{L} [d(t) - u(t)]. \quad (4.23)$$

Usando (4.23) na equação (4.16), esta ultima pode ser expressa como,

$$\dot{V} = \frac{\sigma}{L} [d(t) - u(t)]. \quad (4.24)$$

Tomando em conta a lei de controle (4.8)–(4.9), pode-se concluir que,

$$\dot{V} \leq -\frac{|\sigma|\delta}{L} < 0, \sigma \neq 0, \quad (4.25)$$

desde que a perturbação $d(t)$ verifique a desigualdade (4.10). Portanto, a superfície de deslizamento será alcançada em tempo finito (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009, Seção 2.5). \square

Corolário 4.1 *Considere a PDE (4.1), as condições de contorno (4.4)–(4.5), a lei de controle (4.8), (4.9) mais (4.6), e $\sigma(t)$ dado pela equação (4.11). Se a perturbação verifica a desigualdade (4.10), então a superfície de deslizamento, $\sigma(t) = 0$, é alcançada em tempo finito.*

Prova: A prova do Teorema 4.1 considerando $K_i = 0$, é obtido dado que o sinal da perturbação,

$$d(t) = d_L(t) + K_0\theta(L, t) - d_0(t) - K_0\theta(0, t), \quad (4.26)$$

satisfaz a desigualdade (4.10). \square

4.6 Estabilidade do movimento deslizante

A análise da estabilidade do movimento do estado na superfície de deslizamento do sistema em malha fechada baseia-se na Transformada de Laplace da PDE linear (4.1) e no critério de estabilidade do Mikhailov (NETUSHIL, 1978, Seção 7.3) baseada no Princípio do Argumento (CASTRUCCI; BITTAR; SALES, 2011, Seção 5.7.1) para funções de uma variável complexa, vide Apêndice C.

Teorema 4.2 *Considere a PDE (4.1) com as condições de contorno (4.4)–(4.5), o sinal de controle (4.8), o sinal $\sigma(t)$ (4.12) e (4.6), e a integral do erro (4.13) e (4.14). Se o modo deslizante começa em tempo finito na superfície de deslizamento,*

$$\sigma(t) = \theta_{ref} - \frac{1}{L} \int_0^L \theta(z, t) dz + \int_0^t K_i [\theta_{ref} - \theta(L, t)] dt = 0, \quad (4.27)$$

e o ganho $K_i > 0$ é suficientemente pequeno, então o estado $\theta(z, t)$ converge para o equilíbrio estacionário $\theta_{ss}(z)$, $\forall z \in [0, L]$, e o sinal de erro $e(t)$ converge para zero.

Prova: O modo deslizante começa em tempo finito $t_s \geq 0$ de acordo com o Teorema 4.1. A partir desse instante, o estado do sistema satisfaz a equação da superfície de deslizamento (4.27).

Para proceder a análise, aplica-se a Transformada de Laplace à equação (4.27), então,

$$\frac{\theta_{ref}}{s} - \frac{1}{L} \int_0^L \Theta(z, s) dz + \frac{1}{s} K_i \left[\frac{\theta_{ref}}{s} - \Theta(L, s) \right] = 0, \quad (4.28)$$

na qual, $\Theta(z, s)$ é a transformada de Laplace de $\theta(z, t)$. Multiplicando os dois lados de (4.28) por “s”, esta equação tem as mesmas raízes de,

$$\theta_{ref} - \frac{1}{L} \int_0^L s \Theta(z, s) dz + K_i \left[\frac{\theta_{ref}}{s} - \Theta(L, s) \right] = 0. \quad (4.29)$$

Seguidamente, considerando de novo a abordagem apresentada em (VORONOV, 1985, Seção 1.3), que foi considerada na Seção 2.10.2, onde se tem a Transformada de Laplace de $\theta_t(z, t)$. Usando a nova nomenclatura, a expressão (2.58), é:

$$\mathcal{L} \{ \theta_t(z, t) \} = s \Theta(z, s), \quad (4.30)$$

portanto, a transformada de Laplace da equação (4.1) pode ser expressa como

$$s \Theta(z, s) = D \Theta_{zz}(z, s) - K_0 \Theta_z(z, s). \quad (4.31)$$

Os termos de (4.31) são reorganizados tal que se tenha a equação (2.78) reescrita como,

$$D \Theta_{zz}(z, s) - K_0 \Theta_z(z, s) - s \Theta(z, s) = 0. \quad (4.32)$$

A solução da equação diferencial (4.32) foi dada na expressão (2.79), porém pode ser expressa da seguinte forma,

$$\Theta(z, s) = C_1 \exp [p_1(s)z] + C_2 \exp [p_2(s)z], \quad (4.33)$$

$$p_1(s) = -\frac{1}{2D} (\sqrt{K_0^2 + 4sD} - K_0), \quad (4.34)$$

$$p_2(s) = \frac{1}{2D} (\sqrt{K_0^2 + 4sD} + K_0), \quad (4.35)$$

na qual, $C_1 = \Theta(0, s)$ e $C_2 = 0$ são condições de contorno em $z = 0$ e $z \rightarrow +\infty$, respectivamente. Por fim, (4.33) pode ser rescrita como,

$$\Theta(z, s) = C_1 \exp [p_1(s)z]. \quad (4.36)$$

Substituindo (4.31) em (4.29),

$$\theta_{ref} - \frac{1}{L} \int_0^L \left[D\Theta_{zz}(z, s) - K_0\Theta_z(z, s) \right] dz + K_i \left[\frac{\theta_{ref}}{s} - \Theta(L, s) \right] = 0, \quad (4.37)$$

e resolvendo a integral da expressão anterior, pode-se obter

$$\begin{aligned} \theta_{ref} - \frac{1}{L} \left[D\Theta_z(L, s) - K_0\Theta(L, s) - D\Theta_z(0, s) + \right. \\ \left. K_0\Theta(0, s) \right] dz + K_i \left[\frac{\theta_{ref}}{s} - \Theta(L, s) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Uma vez que a PDE é linear, para a análise da estabilidade é considerado: $\theta_{ref} = 0$, sem perda de generalidade. Portanto, a equação (4.38) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$P(s) = -\frac{1}{L} \left[D\Theta_z(L, s) - K_0\Theta(L, s) - D\Theta_z(0, s) + K_0\Theta(0, s) \right] dz - K_i [\Theta(L, s)] = 0. \quad (4.39)$$

Usando a solução (4.36), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Theta_z(L, s) &= C_1 p_1(s) \exp [Lp_1(s)] , \\ \Theta(L, s) &= C_1 \exp [Lp_1(s)] , \\ \Theta_z(0, s) &= C_1 p_1(s) , \quad \Theta(0, s) = C_1 , \end{aligned} \quad (4.40)$$

então, substituindo o anterior na equação (4.39) resulta,

$$P(s) = \frac{1}{2L} \left(\exp [Lp_1(s)] - 1 \right) \left(\sqrt{K_0^2 + 4sD} + K_0 \right) - K_i \exp [Lp_1(s)] . \quad (4.41)$$

Para verificar a existência de raízes instáveis de $P(s) = 0$, i.e., na metade direita do plano complexo, pode-se aplicar o critério da frequência da estabilidade, tal como o critério de Mikhailov (NETUSHIL, 1978, Seção 7.3). Este critério é uma interpretação geométrica do Princípio do Argumento. Para ilustrá-lo, considera-se $P(s)$ usando os seguintes parâmetros $D=8,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $K_0=1,69 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ (GENUCHTEN, 1980), e $L = 0,15 \text{ m}$.

Na Figura 41, mostra-se o gráfico de $P(j\omega)$, $0 \leq \omega < +\infty$, para três valores de K_i . A curva desenhada cruza a origem no caso $K_i = \bar{K}_i = 0,0119$. Se $K_i > \bar{K}_i$, pode-se ver que a origem é envolvida no sentido horário, o que implica instabilidade. Se $0 < K_i < \bar{K}_i$, a origem não é envolvida, portanto, o movimento do estado na superfície é assintoticamente estável e converge para seu valor de regime. Além disso, uma vez que o estado $e_i(t)$ do termo integral (4.13) converge para o equilíbrio, então conclui-se que o erro $e(t)$ converge para zero. □

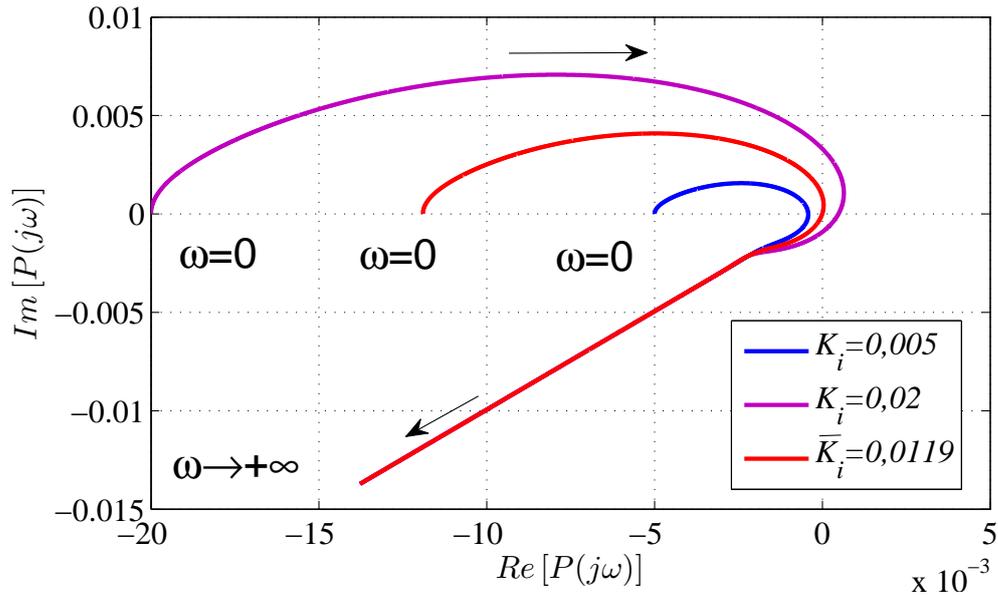


Figura 41 - Gráfico de $P(j\omega)$.

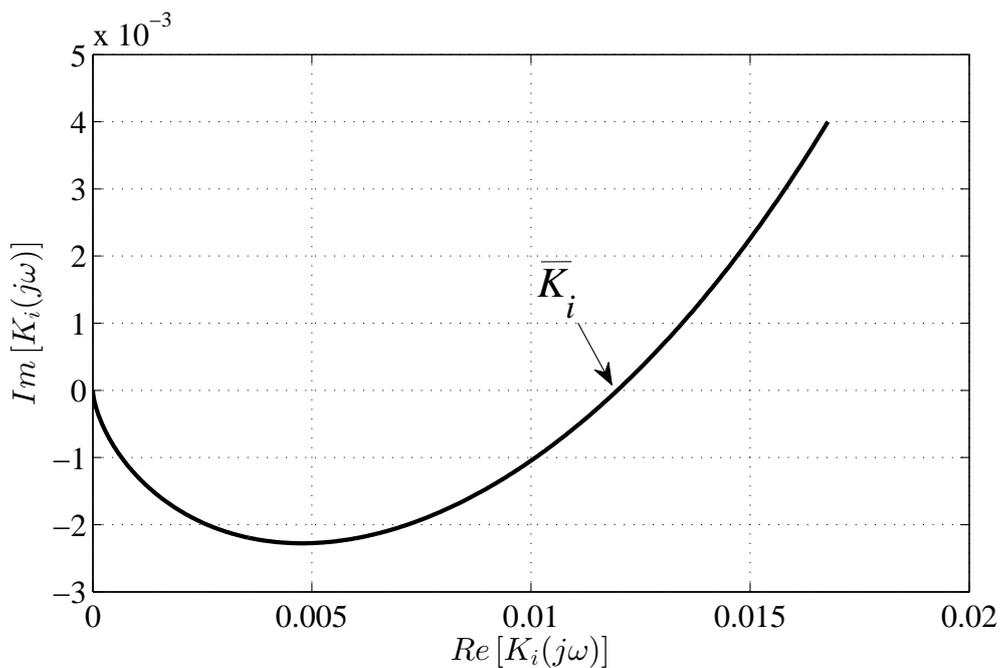


Figura 42 - Gráfica de $K_i(j\omega)$. O máximo ganho permitido \bar{K}_i é indicado.

Observação 4.2 O máximo ganho permitido \bar{K}_i para obter uma superfície de deslizamento estável pode ser obtido resolvendo a equação $P(j\omega) = 0$ com $P(s)$ dado por (4.41). Desta forma, é possível obter um ganho real K_i tal que a equação $P(j\omega) = 0$ tenha uma solução. Para este fim, a equação (4.41) pode ser reescrita como:

$$K_i(j\omega) = \frac{1}{2L} \left(\sqrt{K_0^2 + 4j\omega D} - K_0 \right) \left(1 - \exp[-Lp_1(j\omega)] \right). \quad (4.42)$$

A solução $\bar{K}_i = \text{Re}[K_i(j\omega)]$ é sujeita a $\text{Im}[K_i(j\omega)] = 0$. Isto é ilustrado na Figura 42. Note que o ganho máximo \bar{K}_i nesta figura tem o mesmo valor indicado na Figura 41.

Corolário 4.2 Considere a PDE (4.1) com as condições de contorno (4.4)–(4.5), o sinal de controle (4.8), o sinal $\sigma(t)$ (4.11) e (4.6). Se o modo deslizante começa em tempo finito na superfície de deslizamento,

$$\sigma(t) = \theta_{ref} - \frac{1}{L} \int_0^L \theta(z, t) dz = 0, \quad (4.43)$$

então o estado $\theta(z, t)$ converge para o equilíbrio estacionário $\theta_{ss}(z)$, $\forall z \in [0, L]$.

Prova: A prova segue passos semelhantes aos da prova do Teorema 4.2. Neste caso, $K_i = 0$ na equação (4.41). Logo, tem-se:

$$P(s) = \frac{1}{2L} \left(\exp [Lp(s)] - 1 \right) \left(\sqrt{K_0^2 + 4sD} + K_0 \right). \quad (4.44)$$

Assim, pode-se concluir que $P(s) = 0$ não contém raízes instáveis na metade direita no plano complexo, o que garante a estabilidade. \square

4.7 Simulações do Controle por Modo Deslizante

As simulações foram feitas para ilustrar o desempenho dos controladores propostos nesta seção. Foram considerados os seguintes parâmetros do solo: $D=8,46 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ e $K_0=1,69 \times 10^{-6} \text{ m/s}$, os quais foram obtidos através das formulas desenvolvidas em (CHEN; TAN; CHEN, 2003). A profundidade total do solo é de 1 m e a condição de contorno Dirichlet é considerada $\theta(1, t) = 0 \text{ m}^3/\text{m}^3$. As condições iniciais são nulas, $\theta(z, 0) = 0 \text{ m}^3/\text{m}^3$, $\forall z \in [0, 1] \text{ m}$, em todas as simulações. Também é incluído um degrau unitário como perturbação, sendo definido como,

$$d_0(t) = \begin{cases} 0 \text{ m/s}, & \text{se } t < 20 \times 10^3 \text{ s} \\ -25 \times 10^{-6} \text{ m/s}, & \text{se } t \geq 20 \times 10^3 \text{ s} \end{cases}, \quad (4.45)$$

esta perturbação representa os efeitos da evaporação da água na superfície do solo.

As leis de controle comutam o fluxo da água ligando ($u^+(t) \equiv 50 \times 10^{-6} \text{ m/s}$) e desligando ($u^-(t) \equiv 0 \text{ m/s}$). A distancia do sensor é $L=0,15 \text{ m}$.

Os sinais do controle médio mostrados nas Figuras 44.(b), 47.(b), 47.(b) e 49.(b)

foram obtidos através de um filtro de primeira ordem passa-baixa, com uma constante de tempo pequena (0,01 s), a qual dá a estimativa do sinal do controle equivalente (UTKIN; GULDNER; SHI, 2009, Seção 2.4).

4.7.1 Controle Liga-Desliga do Conteúdo da Água no Solo

Tem-se o controle liga-desliga para o conteúdo de água no solo (FERRAREZI; DOVE; IERSEL, 2015),

$$u(t) = \begin{cases} u^+(t), & \text{se } e > 0 \\ u^-(t), & \text{se } e < 0 \end{cases}, \quad (4.46)$$

que foi simulado com o propósito de comparação. A Figura 43 apresenta resultados das simulações do sistema em malha fechada. Pode-se observar na Figura 43.(a) que o conteúdo de água no solo apresenta um *overshoot* e oscilações que aumenta quando a evaporação da água no solo começa ($t \geq 20 \times 10^3$ s). Estas oscilações são causadas pela baixa frequência de chaveamento do sinal de controle observada na Figura 43.(b), i.e., *chattering* causado pelo atraso da propagação da água no solo.

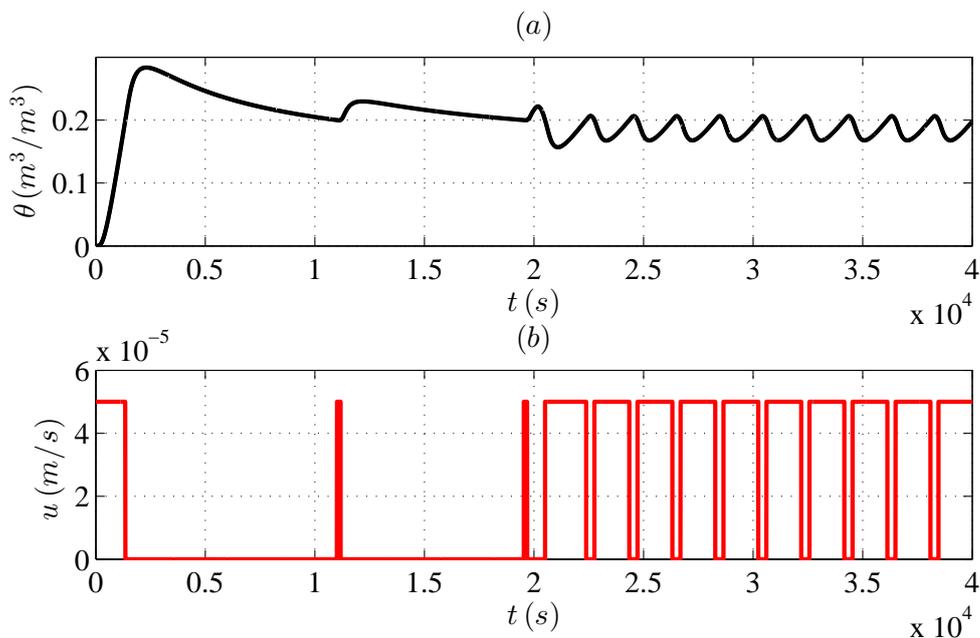


Figura 43 -Simulação do controlador liga-desliga em malha fechada: (a) conteúdo de água no solo na profundidade $L=0,15$ m e (b) o sinal de controle.

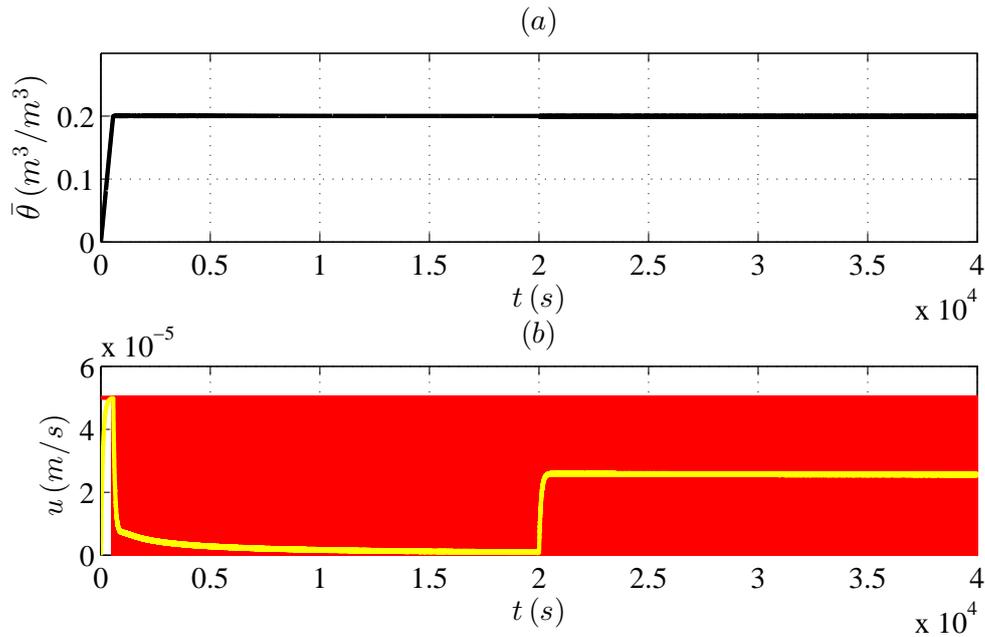


Figura 44 - Simulação do controlador da média do conteúdo da água no solo, (a) o conteúdo médio de água no solo até uma profundidade $L=0,15$ m, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.

4.7.2 Controle da Média do Conteúdo da Água no Solo

Os resultados da simulação apresentadas na Figura 44 e Figura 45 mostram uma resposta mais rápida para alcançar o estado estacionário sem *overshoot*. Não se observaram efeitos causados pela perturbação inserida no sinal de saída na Figura 44.(a). Contudo, o aumento do fluxo médio de água para compensar a evaporação é aparente na Figura 44.(b) quando $t \geq 20 \times 10^3$ s. A alta frequência de chaveamento no sinal de controle indica a ausência do *chattering*.

Na Figura 46 mostra-se o comportamento do sistema de controle para uma profundidade de $L=0,50$ m. Na Figura 46.(a) pode-se observar um *overshoot* pois, na Figura 46.(b) o sinal de controle demora em reagir. Também é aplicada uma perturbação d_0 no tempo $t \geq 35 \times 10^3$ s na Figura 46.(b), na qual observa-se como o sinal de controle reage à perturbação.

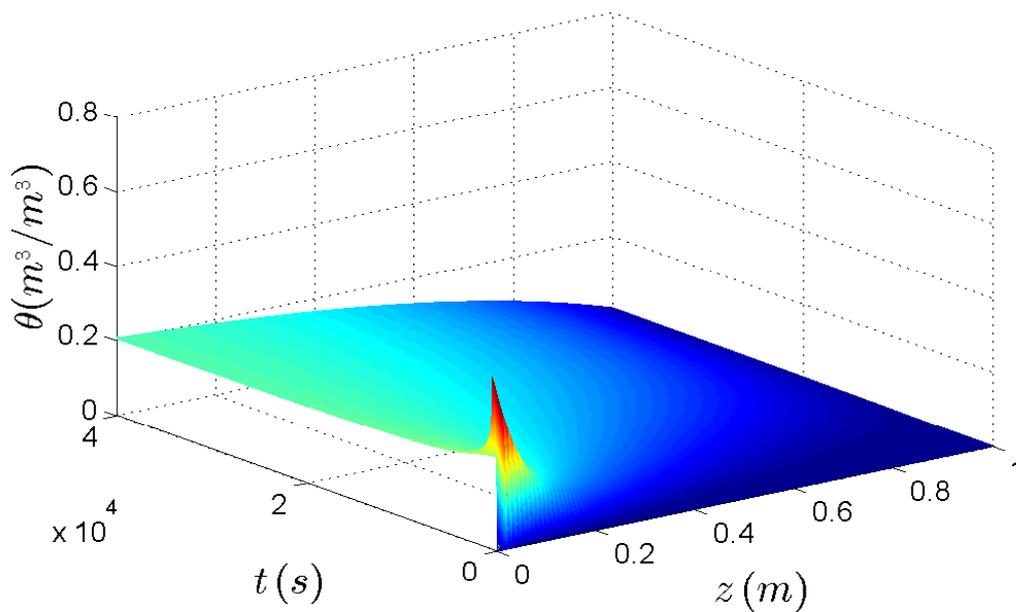


Figura 45 -Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador da média do conteúdo de água ($L=0,15$ m).

4.7.3 Controle do Conteúdo da Água em uma Profundidade Especificada

Os resultados das simulações apresentadas na Figura 47 e Figura 48 indicam um bom transiente na resposta em malha fechada e rejeição à perturbação.

O ganho integral $K_i=0,635 \times 10^{-5}$ é muito pequeno em comparação ao máximo ganho permitido indicado na Figura 42, tal que a estabilidade é garantida. Esta foi ajustada para obter uma resposta rápida e livre de *overshoot* observada na Figura 47.(a).

A seguir, na Figura 49 mostra-se o comportamento do sistema de controle para uma profundidade $L=0,50$ m. Na Figura 49.(a) pode-se observar uma especie de atraso no inicio da resposta do conteúdo da água no solo. Aplica-se a perturbação d_0 no tempo $t \geq 35 \times 10^3$ s na Figura 49.(b), na qual observa-se a reação do sinal de controle à perturbação.

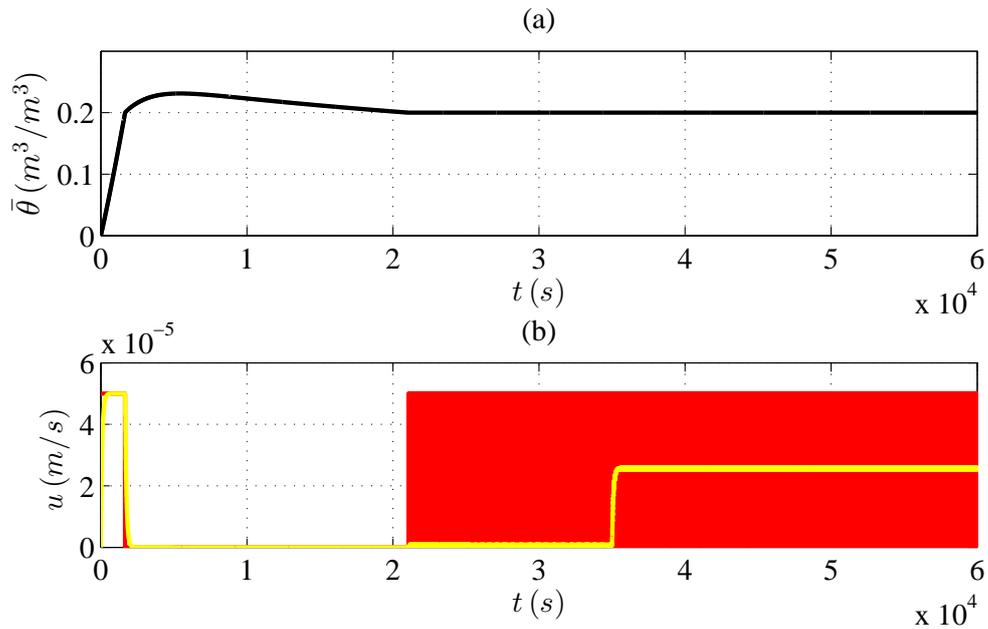


Figura 46 - Simulação do controlador da média do conteúdo da água no solo, (a) o conteúdo médio de água no solo até uma profundidade $L=0,50$ m, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.

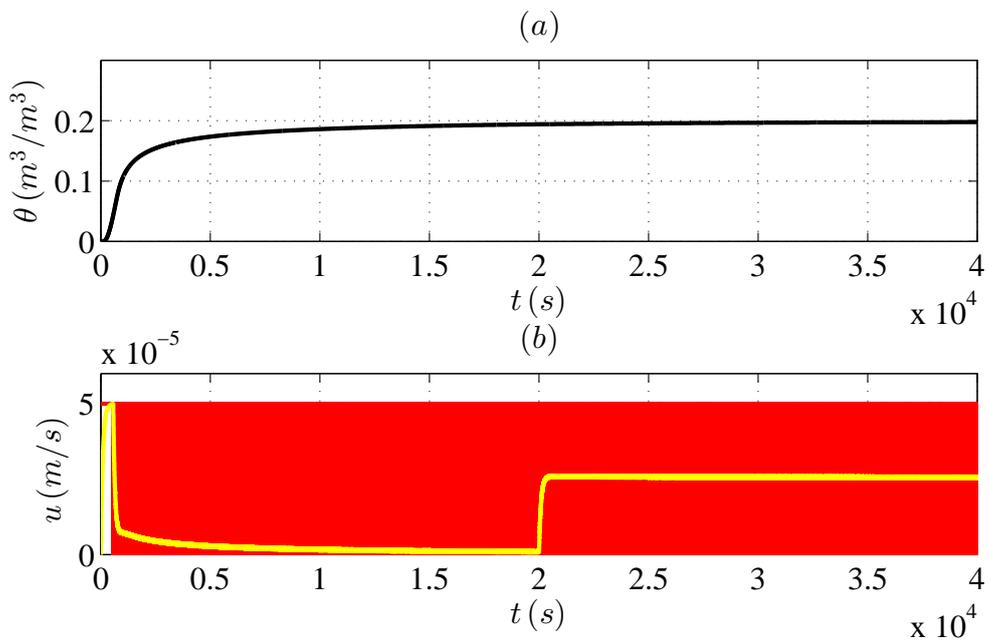


Figura 47 - Simulação do controlador do conteúdo da água em malha fechada na profundidade $L=0,15$ m, (a) conteúdo da água no solo, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.

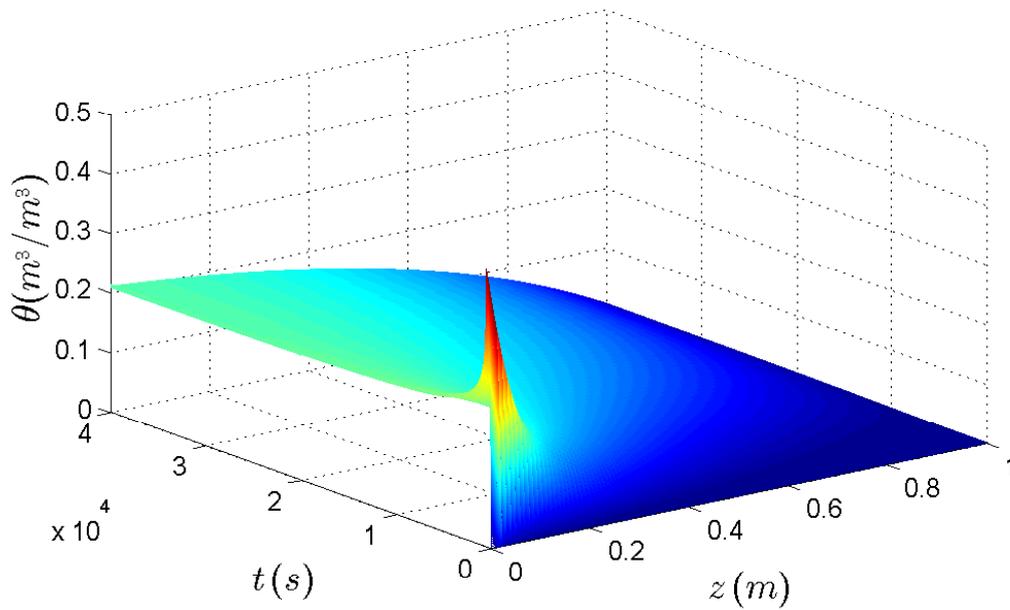


Figura 48 -Simulação da distribuição do conteúdo de água no solo obtida pelo controlador controlador do conteúdo da água na profundidade $L=0,15$ m.

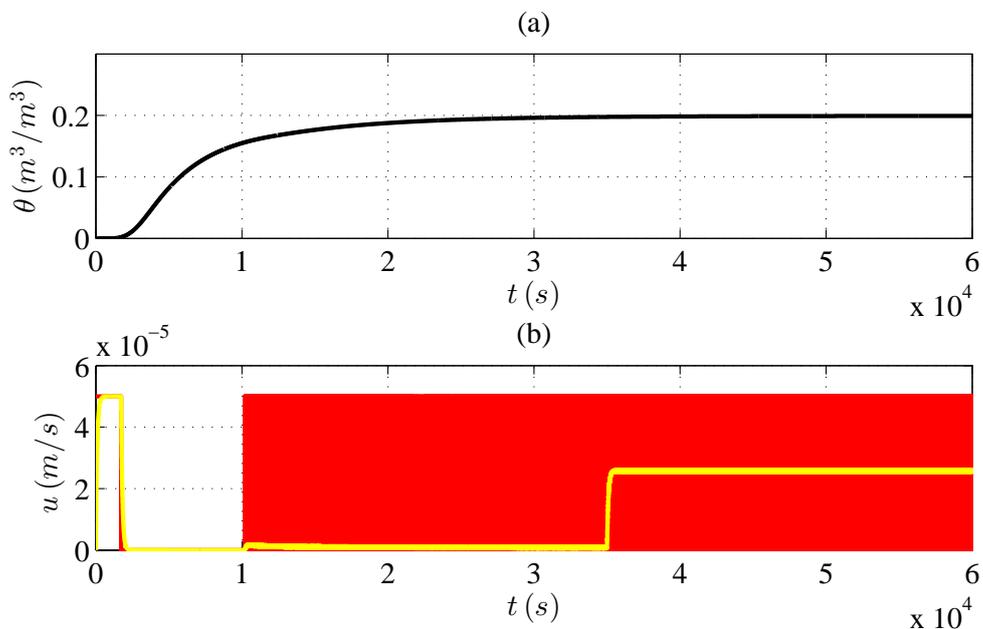


Figura 49 -Simulação da resposta do controlador do conteúdo da água em malha fechada na profundidade $L=0,50$ m, (a) conteúdo da água no solo, (b) o sinal de controle (vermelho) e o sinal de controle médio (amarelo) que aproxima o controle equivalente.

4.8 Consumo de Água

Para completar este capítulo, apresentam-se simulações da quantidade de água gasta pelos quatro controladores do conteúdo da água no solo desenvolvidos: o controlador PI, o controlador liga-desliga e os dois controladores por modo deslizante.

Pode-se observar na Figura 50 que as estratégias de controle PI e de modo deslizante têm um consumo de água menor do que a estratégia liga e desliga, em um horizonte de tempo curto. Porém, quando o horizonte de tempo é ampliado, a água consumida pelas quatro estratégias são similares.

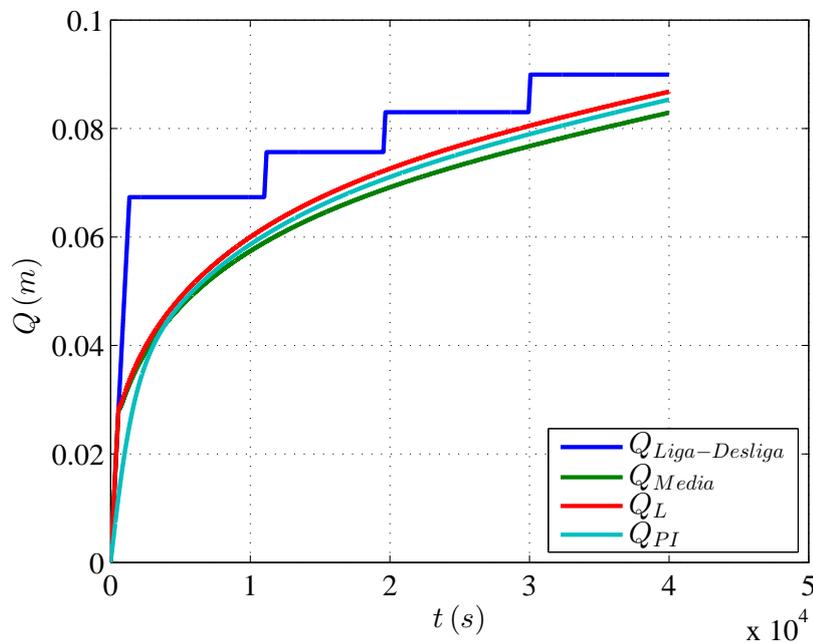


Figura 50 - Quantidade de água gasta por cada controlador. Profundidade $L = 0,15$ m.

Para realizar estas simulações de consumo de água não foi levada em conta nenhuma perturbação e nos quatro controladores foram usadas condições semelhantes.

CONCLUSÕES

Nesta Dissertação foram desenvolvidas três estratégias de controle para o conteúdo da água no solo. Para este propósito realizou-se uma modelagem da propagação da água no solo utilizando a Equação de Richards que é uma PDE parabólica e que representa a dinâmica do sistema.

A equação de Richards considera o fluxo horizontal e o fluxo vertical. Para ambos casos existe uma representação não linear e outra representação linear. Neste trabalho mostra-se o comportamento da equação de Richards não linear considerando os dois tipos de fluxos. Após ser ilustrado o comportamento do sistema não linear considera-se uma aproximação linear do sistema. Portanto, os projetos dos controladores foram feitos com o sistema linear tomando em conta o fluxo horizontal e o vertical.

Controlador PI

Uma das estratégias de controle desenvolvidas foi o controle PI, usou-se para este desenvolvimento a função de transferência da equação linear de Richards considerando só o fluxo horizontal, sendo esta análoga à equação do calor. Desta forma, o projeto foi realizado no domínio da frequência considerando dois tipos de condições de contorno para a PDE parabólica: Dirichlet e Neumann-Dirichlet.

O projeto com as condições de contorno Neumann-Dirichlet foi usado para o caso da função de transferência da equação linear de Richards considerando o fluxo vertical, utilizando o diagrama de Bode do mesmo como referência para o desenvolvimento.

Foram feitas simulações para observar o comportamento do sistema projetado.

Controlador SMC

Duas das estratégias de controle desenvolvidas pertencem a este tipo de controle. Procurou-se, regular a média do conteúdo da água no solo e seguidamente regular o conteúdo de água no solo em uma profundidade específica. Usou-se funções de Lyapunov para a análise das propriedades de existência do modo deslizante em estas estratégias de

controle e analisou-se no domínio da frequência a estabilidade do sistema.

Finalmente, realizaram-se simulações nas mesmas condições e com os mesmos parâmetros que o caso do controle PI para poder comparar o desempenho das diferentes estratégias. Além de adicionar perturbações nas diferentes simulações para verificar a robustez dos projetos. Concluindo através das simulações que os projetos feitos com SMC chegaram a ser mais robustos e imunes a perturbações o que não ocorre no projeto do controlador PI.

Trabalhos futuros

Propõem-se os tópicos seguintes para dar continuação a este trabalho:

1. O projeto realizado para o controlador PI com a função de transferência da equação linear de Richards considerando o fluxo horizontal, pode ser usado para os sistemas que são representados analogamente com a função de transferência usada neste projeto, por exemplo a equação do calor.
2. Para o caso do projeto do controlador PI com a função de transferência da equação linear de Richards considerando o fluxo vertical, desenvolver toda a análise da matemática da equação (2.83) como foi feita nas equações (3.8) e (3.45).
3. Considerar a equação não linear de Richards para poder projetar um controlador por modo deslizante.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, G. A. et al. Distributed sliding mode control of pH in tubular photobioreactors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 24, n. 4, p. 1160–1173, 2016.
- ASLYNG, H. et al. Soil physics terminology. *Int. Soc. Soil Sci. Bull*, v. 23, n. 7, 1963.
- ÅSTRÖM, K. J.; HÄGGLUND, T. *Advanced PID control*. North Carolina: ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006.
- BACCOLI, A.; PISANO, A.; ORLOV, Y. Boundary control of coupled reaction–diffusion processes with constant parameters. *Automatica*, Elsevier, v. 54, p. 80–90, 2015.
- BENZEKRI, A.; MEGHRICHE, K.; REFOUFI, L. Pc-based automation of a multi-mode control for an irrigation system. In: IEEE. *2007 International Symposium on Industrial Embedded Systems*. Lisbon, 2007. p. 310–315.
- BISCARO, G. A. *Sistemas de irrigação por aspersão*. Dourados: Editora da UFGD, 2009.
- CALBO, A.; VAZ, C.; RABELLO, L. Controle atmomagnético de irrigação com sensores ig. *Simpósio Nacional de Instrumentação Agropecuária*, 2014.
- CASTRUCCI, P. L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. *Controle Automático*. Rio de Janeiro: LTC & GEN, 2011.
- CHEN, J.-M.; TAN, Y.-C.; CHEN, C.-H. Analytical solutions of one-dimensional infiltration before and after ponding. *Hydrological processes*, Wiley Online Library, v. 17, n. 4, p. 815–822, 2003.
- CHENG, M.-B.; RADISAVLJEVIC, V.; SU, W.-C. Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, Elsevier, v. 47, n. 2, p. 381–387, 2011.
- DARCY, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application...* Paris: Victor Dalmont, 1856.
- DIAGNE, A. et al. Backstepping stabilization of the linearized Saint-Venant-Exner Model: Part I-state feedback. In: IEEE. *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. Osaka, 2015. p. 1242–1247.
- EDWARDS, C.; SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. London: Taylor & Francis Ltd., 1998.
- FELIZARDO, K. R. et al. Modeling and predictive control of a variable-rate spraying system. In: IEEE. *2013 8th EUROSIM Congress on Modelling and Simulation*. Cardiff, Wales, 2013. p. 202–207.
- FERRAREZI, R. S.; DOVE, S. K.; IERSEL, M. W. van. An automated system for monitoring soil moisture and controlling irrigation using low-cost open-source microcontrollers. *HortTechnology*, American Society for Horticultural Science, v. 25, n. 1, p. 110–118, 2015.

- GENUCHTEN, M. T. V. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, Soil Science Society of America, v. 44, n. 5, p. 892–898, 1980.
- GONZALEZ, J. F.; P, J. E. *Principios básicos del riego por superficie*. Zaragoza, 1994. [Online; Acesso em 11-Jan-2016]. Disponível em: http://www.magrama.gob.es/ministerio/pags/biblioteca/hojas/hd_1994_10-11.pdf.
- GOODCHILD, M. et al. A method for precision closed-loop irrigation using a modified pid control algorithm. *Sensors & Transducers*, IFSA Publishing, SL, v. 188, n. 5, p. 61, 2015.
- HILLEL, D. *Environmental soil physics: Fundamentals, applications, and environmental considerations*. London: Academic press, 1998.
- HOLZBECHER, E. *Environmental modeling: using MATLAB*. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2012.
- ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. New York: Wiley, 1976.
- JEFFREY, A. *Advanced engineering mathematics*. London: Academic Press, 2001.
- JOBIM, F. K. Projeto de viabilização de sistema de irrigação em propriedade agrícola. 2013.
- KIZITO, F. et al. Frequency, electrical conductivity and temperature analysis of a low-cost capacitance soil moisture sensor. *Journal of Hydrology*, Elsevier, v. 352, n. 3, p. 367–378, 2008.
- KRSTIC, M.; SMYSHLYAEV, A. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs Part I: Lyapunov design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 53, n. 7, p. 1575–1591, 2008.
- LI, J.; CHEN, Y.-T. *Computational partial differential equations using MATLAB*. Boca Raton: Crc Press, 2008.
- LIBARDI, P. L. *Dinâmica da Água no Solo Vol. 61*. São Paulo: Edusp, 2005.
- LITRICO, X. et al. Modelling and pi control of an irrigation canal. In: IEEE. *European Control Conference (ECC), 2003*. Cambridge, 2003. p. 850–855.
- LOZOYA, C.; AGUILAR, A.; MENDOZA, C. Service oriented design approach for a precision agriculture datalogger. *IEEE Latin America Transactions*, v. 14, n. 4, p. 1683–1688, April 2016.
- MENZIANI, M.; PUGNAGHI, S.; VINCENZI, S. Analytical solutions of the linearized richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. *Journal of hydrology*, Elsevier, v. 332, n. 1, p. 214–225, 2007.
- MILLAR, A. A. *Manejo de agua y producción agrícola*. Santiago, 1993.
- NETTO, A. *Manual de Hidráulica*. 8. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1998.
- NETUSHIL, A. V. *Theory of automatic control*. Moscow: Mir Publishers, 1978.

- NOGUEIRA, L. et al. *Equipamento para pesquisa de irrigação em fruteiras tropicais com controle automático de aplicação de água*. Aracaju: Embrapa Tabuleiros Costeiros, 2001.
- PISANO, A.; ORLOV, Y. Boundary second-order sliding-mode control of an uncertain heat process with unbounded matched perturbation. *Automatica*, Elsevier, v. 48, n. 8, p. 1768–1775, 2012.
- RICHARDS, L. A. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 1, n. 5, p. 318–333, 1931.
- ROMERO, R. et al. Research on automatic irrigation control: State of the art and recent results. *Agricultural water management*, Elsevier, v. 114, p. 59–66, 2012.
- SKEEL, R. D.; BERZINS, M. A method for the spatial discretization of parabolic equations in one space variable. *SIAM journal on scientific and statistical computing*, SIAM, v. 11, n. 1, p. 1–32, 1990.
- SMYSHLYAEV, A.; KRSTIC, M. On control design for PDEs with space-dependent diffusivity or time-dependent reactivity. *Automatica*, Elsevier, v. 41, n. 9, p. 1601–1608, 2005.
- SMYSHLYAEV, A.; KRSTIC, M. Adaptive boundary control for unstable parabolic PDEs Part II: Estimation-based designs. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 9, p. 1543–1556, 2007.
- UTKIN, V. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 2, p. 212–222, Apr 1977. ISSN 0018-9286.
- UTKIN, V.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. 2nd. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- VICENTE, R. R. Hydraulic modelling and control of the soil-plant-atmosphere continuum in woody crops. Universidad de Sevilla, 2011.
- VORONOV, A. A. *Basic principles of automatic control theory: Special linear and nonlinear systems*. Moscow: Mir Publishers, 1985.

APÊNDICE A – Simulação de Equações de Derivadas Parciais

A.1 Resolução de Equações Diferenciais Parciais

Dentro do MATLAB R2012a versão 7.14.0.739, existem algumas funções que são usadas para a resolução de PDEs do tipo Parabólicas-Elípticas de uma dimensão no espaço e o tempo, com condições iniciais e de contorno ou fronteira.

A função `pdepe` do MATLAB resolve sistemas representados por equações diferenciais parciais parabólicos e elípticas de uma dimensão, onde x é o espaço e t é o tempo, os sistemas considerados tem a seguinte forma:

$$c\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \right) + s\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right). \quad (1)$$

Os intervalos de solução da PDE são: $t_i \leq t \leq t_f$ e $a \leq x \leq b$. Nos quais, $[a, b]$ devem ser finitos.

Na (1), o valor de m pode ser 0, 1 ou 2 correspondendo as simetrias de laje, cilíndrica ou espiral respectivamente. O $f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ é o termo de fluxo e $s(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ é o termo de alimentação. O termo de fluxo deve depender de $\frac{\partial u}{\partial x}$. O $c(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$ é o termo que fica como coeficiente da derivada parcial respeito ao tempo.

O tempo inicial, $t = t_0$, para todos os componentes de x da solução, deve satisfazer a condição inicial da forma:

$$u(x, t_0) = u_0(x). \quad (2)$$

As condições de contorno onde, $x = a$ ou $x = b$ para todos os componentes de t da solução devem satisfazer uma condição de fronteira da forma:

$$p(x, t, u) + q(x, t) f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (3)$$

na qual, tem-se os coeficientes p e q . Onde p esta em função de u de f esta em função de u e do termo $\frac{\partial u}{\partial x}$.

A função `pdepe` converte as PDEs em ODEs usando uma discretização do espaço de segundo ordem precisa, baseada em um conjunto fixo de nós especificado pelo usuário.

(SKEEL; BERZINS, 1990) . A integração no tempo é feita pela função `ode15`, a função `pdepe` explora as capacidades desta função na resolução de equações algébricas diferenciais.

A sintaxe para obter a solução é:

$$\text{sol} = \text{pdepe} (\text{m}, \text{pdefun}, \text{icfun}, \text{bcfun}, \text{xmesh}, \text{tspan})$$

onde:

m ; 0, 1, 2

pdefun ; $[c, f, s] = \text{pdefun}(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$

icfun ; $u_0 = \text{icfun}(x)$

bcfun ; $[pl, ql, pr, qr] = \text{bcfun}(xl, ul, xr, ur, t)$

xmesh ; Vetor $[x_0, x_1, \dots, x_n]$

tspan ; Vetor $[t_0, t_1, \dots, t_f]$

Para a função `pdefun` segunda a equação (1) teria-se:

c ; $c(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$

f ; $f(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$

s ; $s(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x})$

Para a função `bcfun` segunda a equação (3) teria-se:

pl ; $p(x, t, u)$ condição de contorno da esquerda para p

ql ; $q(x, t)$ condição de contorno da esquerda para q

pr ; $p(x, t, u)$ condição de contorno da direita para p

qr ; $q(x, t)$ condição de contorno da direita para q

Na Figura 17, ilustra-se o resultado do exemplo explicado anteriormente que seria o caso linear.

A.2 Equação de Richards com MATLAB

Usando a função `pdepe` do MATLAB, tem-se os seguintes ajustes dos parâmetros de dita função para a equação do *Richards* linearizada (2.50). As condições iniciais iguais a: $u(x, 0) = 0$, e condições de fronteira: $u(0, t) = 0$, $u(0, L) = 0$. Então os ajustes da função `pdepe` seriam:

```
m ; 0
pdefun ; [c, f, s] = pdefun(x, t, u, dudx)
icfun ; u0 = icfun(x)= 0
bcfun ; [pl, ql, pr, qr] = bcfun(xl, ul, xr, ur, t)
xmesh ; x = linspace(0,L,100)
tspan ; t = linspace(0,T,25)
```

```
[c, f, s] = pdefun(x, t, u, dudx)
```

```
c ; 1
f; D*dudx
s ; 0
```

```
[pl, ql, pr, qr] = bcfun(xl, ul, xr, ur, t)
```

```
p1 ; u1-1
ql ; 0
pr ; ur
qr ; 0
```

No caso da equação não linear de *Richards*, usa-se a equação (2.45), com condições iniciais iguais a: $u(x, 0) = -2 + x; x < 10, u_0 = -0,005$, e condições de fronteira: $5,7 \times 10^{-7} + \frac{\partial(0,t)}{\partial x} = 0$, $u(0, L) = 0$:

```

m ; 0
pdefun ; [c, f, s] = pdefun(x, t, u, dudx)
icfun ; u0 = -2+x; if x < 10 u0 = - 0.005
bcfun ; [pl, ql, pr, qr] = bcfun(xl, ul, xr, ur, t)
xmesh ; x = linspace(0,L,100)
tspan ; t = linspace(0,T,25)

```

```
[c, f, s] = pdefun(x, t, u, dudx)
```

```

c ;  $\frac{\partial \theta}{\partial \Psi}$ 
f ;  $K * dudx - K$ 
s ; 0

```

```
[pl, ql, pr, qr] = bcfun(xl, ul, xr, ur, t)
```

```

pl ; 5.7e-7
ql ; 1
pr ; ur
qr ; 0

```

O valor de K é dado pela equação (2.39) e a $\frac{\partial \theta}{\partial \Psi}$ pela equação (2.44). A Figura 15 é o resultado do exemplo explicado para o caso não linear.

APÊNDICE B – Método das Diferenças Finitas para as Simulações

As simulações foram feitas usando o conceito da aproximação de diferenças finitas (LI; CHEN, 2008), especificamente o Método de Euler, discretizando no domínio da solução do espaço.

B.1 Simulação da Equação Representativa do Fluxo Horizontal

Tem-se como discretização da equação (2.50) a seguinte expressão,

$$\frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta t} = D \left(\frac{\theta_{i-1,j-1} - 2\theta_{i,j-1} + \theta_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} \right), \quad (1)$$

se $\lambda = D/(\Delta x)^2$ e,

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta t}, \quad (2)$$

a equação (1) pode-se escrever,

$$\dot{\theta} = \lambda (\theta_{i-1,j-1} - 2\theta_{i,j-1} + \theta_{i+1,j-1}). \quad (3)$$

Portanto, tem-se as seguintes matrizes,

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (4)$$

$$\dot{\theta} = \lambda \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix}_{n \times n} \theta + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \theta_0 + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \theta_n. \quad (5)$$

Considerando a condição de contorno Neumann que é representada pela equação (2.67), e discretizando-la tem-se:

$$u = -\frac{\theta_{1,j-1} - \theta_{0,j-1}}{\Delta x}, \quad (6)$$

deixando em evidencia o termo de interesse, tem-se,

$$\theta_0 = \theta_{0,j-1} = \theta_{1,j-1} + \frac{\Delta x}{D}u. \quad (7)$$

Assim, substituindo (7) na equação (3) tem-se os dados necessários para realizar as simulações através da elaboração de um algoritmo que represente as equações mencionadas.

B.2 Simulação da Equação Representativa do Fluxo Vertical

Então, tem-se a discretização da equação (2.49) como,

$$\frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta t} = D \left(\frac{\theta_{i-1,j-1} - 2\theta_{i,j-1} + \theta_{i+1,j-1}}{(\Delta x)^2} \right) - K_0 \left(\frac{\theta_{i,j-1} - \theta_{i-1,j-1}}{\Delta x} \right), \quad (8)$$

organizando melhor os termos de (8) tem-se,

$$\frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta t} = \left(\frac{D}{(\Delta x)^2} + \frac{K_0}{\Delta x} \right) \theta_{i-1,j-1} + \left(-\frac{K_0}{\Delta x} - 2\frac{D}{(\Delta x)^2} \right) \theta_{i,j-1} + \left(\frac{D}{(\Delta x)^2} \right) \theta_{i+1,j-1}, \quad (9)$$

logo, sabe-se que pela equação (2) e

$$a = \frac{D}{(\Delta x)^2} + \frac{K_0}{\Delta x}, b = -\frac{K_0}{\Delta x} - 2\frac{D}{(\Delta x)^2}, c = \frac{D}{(\Delta x)^2}, \quad (10)$$

na qual, a , b e c são constantes, então, (10) pode-se rescrever como,

$$\dot{\theta} = a\theta_{i-1,j-1} + b\theta_{i,j-1} + c\theta_{i+1,j-1}. \quad (11)$$

Portanto, considerando (4), tem-se o seguinte arranjo de matrizes,

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & c & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & b \end{bmatrix}_{n \times n} \theta + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1} \theta_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c \end{bmatrix}_{n \times 1} \theta_n. \quad (12)$$

Por fim, θ_0 de (7) pode ser substituindo na equação (12), conseguindo o arranjo de matrizes para a simulação.

Para poder validar o projeto de simulação foi feita uma comparação entre este desenvolvimento e a ferramenta de Matlab descrita no Apêndice A.

Então, obtive-se a Figura 51 onde se mostra o θ_1 que foi simulado com um programa feito no Simulink tomando em conta a equação (11).

Na Figura 52 mostra-se o θ_2 . Esta simulação foi feita com a ferramenta pdepe do Matlab.

Os parâmetros usados para as simulações foram $K_0=16,93 \times 10^{-6}$ m/s, $D=8,46 \times 10^{-6}$ m²/s) e um passo de integração $h=1$ s.

Por fim, a Figura 51 e a Figura 52 parecem ser similares, mas para isto se tem o erro da diferença entre as duas mostrado na Figura 53 seguindo a equação (13).

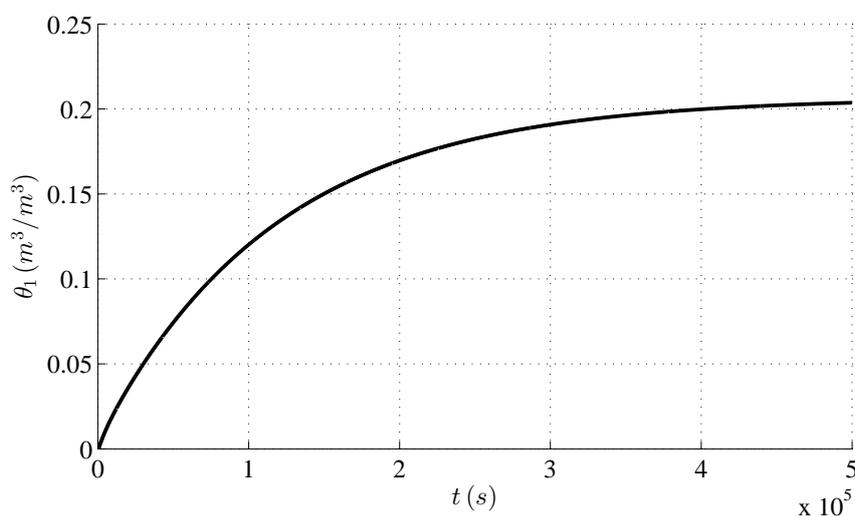


Figura 51 - Gráfico gerado pelo projeto no Simulink.

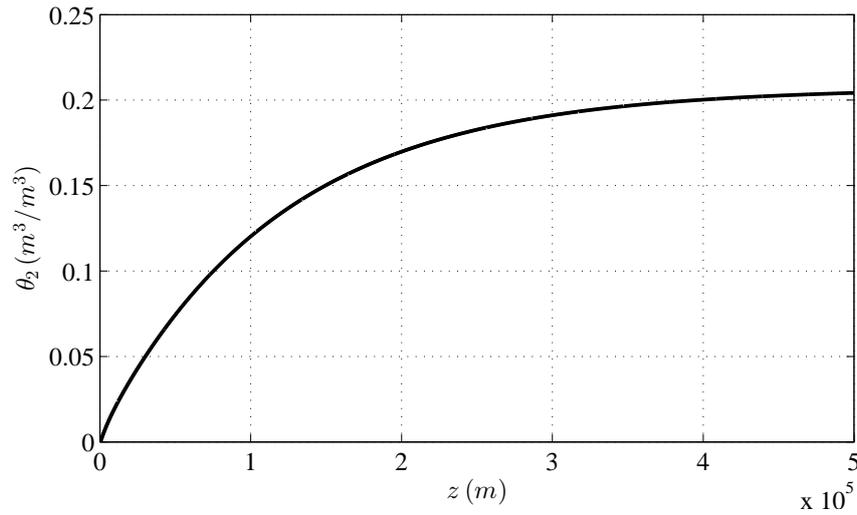


Figura 52 - Gráfico gerado pela ferramenta pdepe do Matlab.

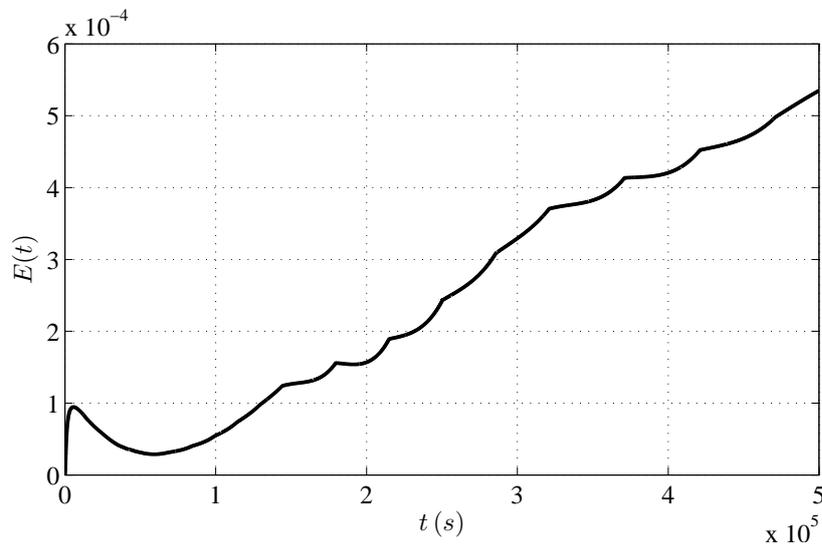


Figura 53 - Discrepância entre as duas simulações apresentadas nas Figura 51 e Figura 52.

Concluindo da Figura 53, que o erro maior ocorre no final,

$$E(t) = (\theta_1 - \theta_2) \times 100\%, \quad (13)$$

tendo assim: $E(t) = 0,0535\%$.

APÊNDICE C – Critério de Estabilidade de Mikhailov

O critério de estabilidade de Mikhailov formulado em 1938 é essencialmente uma interpretação geométrica do Princípio do Argumento (NETUSHIL, 1978, Seção 7.3). O incremento do argumento de uma função f de variável complexa s quando esta percorre uma curva fechada em uma direção positiva (sentido anti-horário) é $2\pi(N - P)$, onde N é o número de zeros e P é o número de polos da função $f(s)$ dentro da curva fechada. Assume-se que a função $f(s)$ seja analítica dentro desta curva fechada, exceto num número finito de polos, e sem polos nem zeros na curva.

Para ilustrar, aplica-se o Princípio do Argumento no polinômio $A(s)$ do lado esquerdo da equação característica:

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \quad (1)$$

Tem-se a curva começando no eixo imaginário ($s = j\omega$) e fechada por um semi-círculo de raio infinito que envolve o semiplano complexo direito, assim o critério de Mikhailov é obtido.

O polinômio $A(s)$ pode ser reescrito da forma

$$A(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n), \quad (2)$$

na qual p_i são as raízes da equação (1).

Assumindo que $s = j\omega$, neste caso tem-se:

$$A(s) = a_n (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (3)$$

O argumento de $A(j\omega)$ é,

$$\arg A(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i). \quad (4)$$

A variação do argumento ω de $-\infty$ a $+\infty$ de $A(j\omega)$ é

$$\Delta \arg A(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg(\omega - p_i). \quad (5)$$

A expressão

$$\Delta \arg A(j\omega) = (n - 2l)\pi, \quad (6)$$

representa o princípio do argumento para o polinômio característico $A(s)$, na qual n é o grau do polinômio e l é o número de raízes do semiplano complexo direito.

Para que a equação característica $A(s)$ que descreve o sistema de controle seja estável é necessário e suficiente que o número de raízes l do lado direito seja igual a zero, então

$$\Delta \arg A(j\omega) = n\pi. \quad (7)$$

Nota-se que com $l = 0$, o argumento de $A(s)$ aumenta monotonicamente com ω .