



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto Politécnico

Fábio Silva de Souza

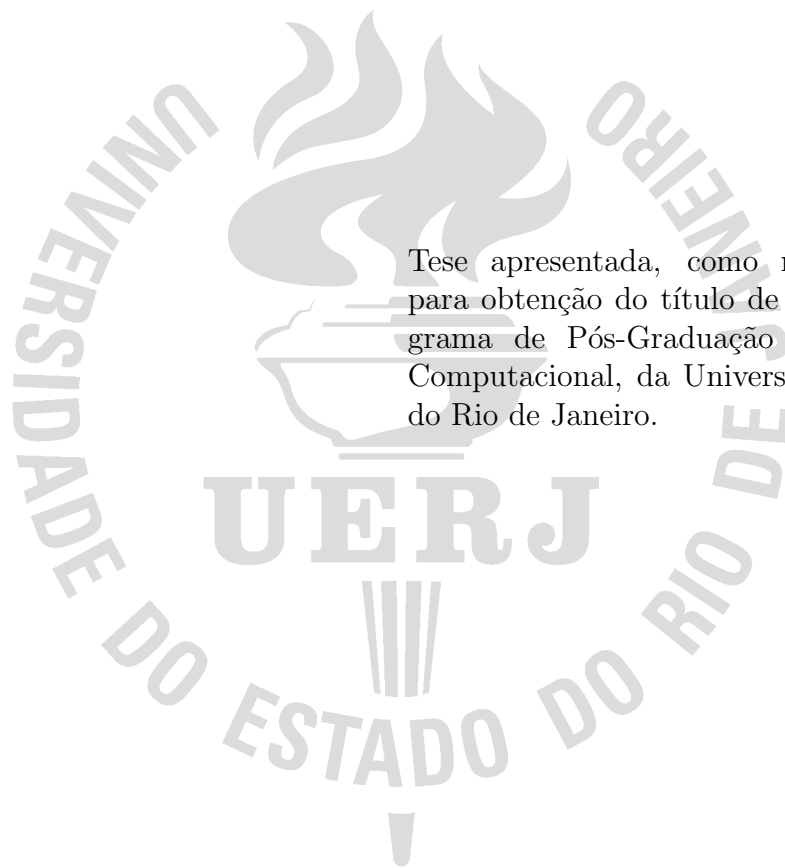
**Simulações de escoamentos de fluidos newtonianos usando o
método do tubo de trajetórias nas variáveis vorticidade e função
de corrente**

Nova Friburgo

2020

Fábio Silva de Souza

Simulações de escoamentos de fluidos newtonianos usando o método do tubo de trajetórias nas variáveis vorticidade e função de corrente



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Nélio Henderson Guedes de Oliveira

Nova Friburgo

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/E

S729 Souza, Fábio Silva de.
Simulações de escoamentos de fluidos newtonianos usando o método do tubo de trajetórias nas variáveis vorticidade e função de corrente / Fábio Silva de Souza. - 2020.
154 f. : il.

Orientadores: Luiz Nélio Henderson Guedes de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Dinâmica dos fluídos– Teses. 2. Navier- Stokes, Equações de – Teses. 3. Movimento turbulento – Teses. I. Oliveira, Luiz Nélio Henderson Guedes de. II.. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. III. Título.

CDU 531.742

Bibliotecária Pâmela Lisboa CRB7/ 5965

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data


Fábio Silva de Souza


Simulações de escoamentos de fluidos newtonianos usando o método do tubo de trajetórias nas variáveis vorticidade e função de corrente


Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.


Aprovada em 14 de janeiro de 2020.


Banca examinadora:


Prof. Luiz Nélio Henderson Guedes de Oliveira, D.Sc. (Orientador)
Instituto Politécnico - UERJ


Prof. Daiara Fernandes de Faria, D.Sc.
Instituto Politécnico - UERJ


Prof. Grazione de Souza Boy, D.Sc.
Instituto Politécnico - UERJ


Prof. Sanderson Lincoln Gonzaga de Oliveira, D.Sc.
Universidade Federal de Lavras


Prof. Adolfo Pume Pires, D.Sc.
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Nova Friburgo

2020

DEDICATÓRIA

Para Luiz

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, desejo agradecer a Deus e aos Orixás que me guiaram durante toda a minha vida através de uma série de coincidências.

Agradeço ao professor Luiz Nélio Henderson Guedes de Oliveira por toda a orientação e por ter conduzido tão bem este trabalho.

Agradeço a Gisiane, Noelle, Breno, Narcisa e Adriana, meus companheiros de jornada do Labmacc. Saibam que, com a ajuda de vocês, o caminho ficou mais fácil.

Agradeço aos professores e funcionários do Instituto Politécnico por terem compartilhado seu tempo e conhecimento comigo.

Agradeço aos meus colegas do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri por permitirem que eu me afastasse para a qualificação e, mais ainda, torcer para que lograsse sucesso no doutoramento.

Agradeço à professora Jaqueline Maria da Silva por ter me dito que concluir um doutorado não é fácil, mas é possível.

Agradeço à professora Márcia Cristina Anderson Braz Federson por ter me ensinado, durante o Mestrado, que, quando desejamos chegar a algum lugar, é necessário lutar por isso.

Agradeço a Gilza Santos Simão Ferreira por ter me dito, lá em São Carlos, que seria uma boa ideia cursar o doutorado em Nova Friburgo. Agradeço ainda por ter me recebido logo na minha chegada à cidade e por ter compartilhado sua vida comigo.

Agradeço a Matheus, Natália e Neidiane por torcerem para que tudo ocorresse bem. Saber disso sempre me confortou.

Agradeço ao homem da minha vida, Luiz, por todo amor e apoio incondicional nos momentos de incerteza. Mais ainda, agradeço por ter ficado ao lado mesmo quando eu não me fiz tão presente.

Há várias outras pessoas que eu gostaria de agradecer. Gente que compartilhou sua vida, tempo e boas vibrações. Não quero ser injusto a ponto de esquecer alguém, mas saibam que vocês foram fundamentais neste processo e eu os carrego comigo.

Muito obrigado a todos!

I'm the hunter
Bring back the good
But I don't know when
And I don't know when

Björk

RESUMO

SOUZA, F. S. de. *Simulações de escoamentos de fluidos newtonianos usando o método do tubo de trajetórias nas variáveis vorticidade e função de corrente*. 2020. 154 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2020.

As equações de Navier-Stokes são amplamente utilizadas em diversas áreas de conhecimento. Contudo, uma de suas variáveis primárias não é determinada de maneira única, o que, por vezes, inviabiliza a análise de fenômenos físicos. Este trabalho objetiva, inicialmente, apresentar uma nova formulação lagrangiana para as equações de Navier-Stokes através da introdução das variáveis vorticidade e função de corrente. Desta maneira, o problema da unicidade é eliminado. Em seguida, abordaremos o escoamento de fluidos incompressíveis no plano e desenvolveremos um método novo para determinar soluções de tais equações. Para isto, descreveremos a trajetória de cada partícula do fluido, o que enseja o nome de Método do Tubo de Trajetórias. Ainda, compararemos nosso método com ferramentas utilizadas anteriormente para resolver o mesmo problema. Além disso, observaremos como as técnicas advindas da computação paralela podem contribuir para a redução do custo computacional. Para finalizar este trabalho, abordaremos as vantagens do novo método e indicaremos perspectivas para pesquisas futuras.

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes. Vorticidade. Função de corrente. Método do tubo de trajetórias.

ABSTRACT

SOUZA, F. S. de. *Simulation of newtonian fluid flows using path tube method on the variables vorticity and stream function*. 2020. 154 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2020.

Navier-Stokes equations are widely used in many areas of knowledge. However, one of its primary variables is not unique in determining what, sometimes, makes the analysis of physical phenomena unfeasible. This thesis aims, initially, to present a new lagrangian formulation for the Navier-Stokes equations by introducing the vorticity and stream functions as variables. In this way, the problem of uniqueness is eliminated. Then, we will address the flow of incompressible fluids in the plane and we will develop a new method for determining solutions of such equations. For this, we will describe the trajectory of each fluid particle, which gives rise to the name of Path Tube Method. Also, we will compare our method with tools previously used to solve the same problem. In addition, we will observe how the techniques derived from parallel computing can contribute to the reduction of the computational costs. To conclude, we will address the advantages of the new method and we will indicate perspectives for future research.

Keywords: Navier-Stokes equations. Vorticity. stream function. Path tube method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Densidade de força superficial	41
Figura 2 - Força total exercida em P no tempo t	42
Figura 3 - Decomposição da força de superfície T	43
Figura 4 - Representação da superfície M no plano x_1x_2	58
Figura 5 - Subdivisão da malha em blocos internos, de fronteira e de canto	74
Figura 6 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da função de corrente para $Re = 100$	80
Figura 7 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da função de corrente para $Re = 500$	81
Figura 8 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da função de corrente para $Re = 1000$	82
Figura 9 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da função de corrente para $Re = 2500$	83
Figura 10 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da vorticidade para $Re = 100$	84
Figura 11 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da vorticidade para $Re = 500$	85
Figura 12 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da vorticidade para $Re = 1000$	86
Figura 13 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata da vorticidade para $Re = 2500$	87
Figura 14 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata do campo de velocidades para $Re = 100$	88
Figura 15 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata do campo de velocidades para $Re = 500$	89
Figura 16 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata do campo de velocidades para $Re = 1000$	90
Figura 17 - Solução numérica <i>versus</i> solução exata do campo de velocidades para $Re = 2500$	91
Figura 18 - Curva de <i>speedup</i>	95
Figura 19 - Representação da malha usada em Pearson (1965)	98
Figura 20 - Função de corrente para $t = 0$	98
Figura 21 - Função de corrente para $t = 0,0016$	99
Figura 22 - Função de corrente para $t = 0,0019$	99
Figura 23 - Função de corrente para $t = 0,0037$	100
Figura 24 - Função de corrente para $t = 0,0044$	100
Figura 25 - Função de corrente para $t = 0,0102$	101
Figura 26 - Função de corrente para $t = 0,011$	101
Figura 27 - Função de corrente para $t = 0,4036$	102
Figura 28 - Função de corrente para $t = 0,8043$	102

Figura 29 - Função de corrente para $t = 2,4783$	103
Figura 30 - Função de corrente em regime permanente	103
Figura 31 - Região do vórtice em $t = 0,0016$	105
Figura 32 - Região do vórtice em $t = 0,0019$	105
Figura 33 - Região do vórtice em $t = 0,0037$	106
Figura 34 - Região do vórtice em $t = 0,0044$	106
Figura 35 - Região do vórtice em $t = 0,0102$	107
Figura 36 - Região do vórtice em $t = 0,0011$	107
Figura 37 - Região do vórtice em $t = 0,4036$	108
Figura 38 - Região do vórtice em $t = 0,8043$	108
Figura 39 - Região do vórtice em $t = 2,4783$	109
Figura 40 - Região do vórtice em regime permanente	109
Figura 41 - Vorticidade para $t = 0$	110
Figura 42 - Vorticidade para $t = 0,0016$	110
Figura 43 - Vorticidade para $t = 0,0019$	111
Figura 44 - Vorticidade para $t = 0,0037$	111
Figura 45 - Vorticidade para $t = 0,0044$	112
Figura 46 - Vorticidade para $t = 0,0102$	112
Figura 47 - Vorticidade para $t = 0,011$	113
Figura 48 - Vorticidade para $t = 0,04036$	113
Figura 49 - Vorticidade para $t = 0,8043$	114
Figura 50 - Vorticidade para $t = 2,4783$	114
Figura 51 - Vorticidade em regime permanente	115
Figura 52 - Campo de velocidades para $t = 0$	115
Figura 53 - Campo de velocidades para $t = 0,0016$	116
Figura 54 - Campo de velocidades para $t = 0,0019$	116
Figura 55 - Campo de velocidades para $t = 0,0037$	117
Figura 56 - Campo de velocidades para $t = 0,0044$	117
Figura 57 - Campo de velocidades para $t = 0,0102$	118
Figura 58 - Campo de velocidades para $t = 0,011$	118
Figura 59 - Campo de velocidades para $t = 0,4036$	119
Figura 60 - Campo de velocidades para $t = 0,8043$	119
Figura 61 - Campo de velocidades para $t = 2,4783$	120
Figura 62 - Campo de velocidades em regime permanente	120
Figura 63 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0$	121
Figura 64 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,0016$	121
Figura 65 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,0019$	122
Figura 66 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,0037$	122
Figura 67 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,0044$	123

Figura 68 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,0102$	123
Figura 69 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,011$	124
Figura 70 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,4036$	124
Figura 71 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,8043$	125
Figura 72 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 2,4783$	125
Figura 73 - Campo de velocidades na região do vórtice em regime permanente . . .	126
Figura 74 - Curva de <i>speedup</i>	130
Figura 75 - Comportamento da solução em regime permanente	134
Figura 76 - Comportamento da solução em regime permanente	134
Figura 77 - Comportamento da solução em regime permanente	135
Figura 78 - Curva de <i>speedup</i>	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns <i>time-steps</i> para $Re = 100$	92
Tabela 2 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns <i>time-steps</i> para $Re = 500$	92
Tabela 3 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns <i>time-steps</i> para $Re = 1000$	93
Tabela 4 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns <i>time-steps</i> para $Re = 2500$	93
Tabela 5 - Quantidade de <i>time-steps</i> necessários para obtenção da solução em regime permanente	94
Tabela 6 - Tempo empregado para determinar a solução em regime permanente	94
Tabela 7 - Comparativo entre os resultados em alguns pontos da malha	126
Tabela 8 - Comparativo entre os resultados para a função de corrente em malhas com várias subdivisões em cada eixo	127
Tabela 9 - Erro entre os valores obtidos para a função de corrente usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos	127
Tabela 10 - Erro entre os valores obtidos para a vorticidade usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos	127
Tabela 11 - Erro entre os valores obtidos para o campo de velocidades v_1 usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos	128
Tabela 12 - Erro entre os valores obtidos para o campo de velocidades v_2 usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos	128
Tabela 13 - Quantidade de <i>time-steps</i> necessários para obter a solução em regime permanente para diversos números de Reynolds e malhas	129
Tabela 14 - Tempo empenhado para determinar a Solução, em regime permanente, usando $Re = 2500$ e $\Delta t = 0,00001$ numa malha 81×81	130
Tabela 15 - Comparativo entre os valores da função de corrente encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Gartling (1990) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós	135
Tabela 16 - Comparativo entre os valores da vorticidade encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Gartling (1990) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós	135

Tabela 17 - Comparativo entre os valores do campo de velocidades v_1 encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Erturk (2007) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós	136
Tabela 18 - Comparativo entre os valores do campo de velocidades v_2 encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Erturk (2007) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós	136
Tabela 19 - Comparativo entre os valores da vorticidade encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Erturk (2007) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós	137
Tabela 20 - Comparativo entre os valores obtidos para a função de corrente através do Método do Tubo de Trajetórias em diversas malhas usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$	137
Tabela 21 - Quantidade de <i>time-steps</i> e o tempo empenhado para encontrar, em algumas malhas, a solução em regime permanente usando $Re = 1100$ e $\Delta t = 0.001$	137
Tabela 22 - Tempo gasto para encontrar a solução, em regime permanente, usando $Re = 1100$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 1529×50 nós	138

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
1	CONCEITOS PRELIMINARES	17
1.1	Álgebra tensorial	17
1.2	Análise tensorial	21
1.3	Cinemática	28
2	EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOM- PRESSÍVEIS	36
2.1	Equação da continuidade	36
2.2	Força, tensão e pressão	40
2.3	Hipóteses constitutivas	43
2.4	Fluidos newtonianos e as equações de Navier-Stokes	45
3	EQUAÇÃO DA VORTICIDADE E FUNÇÃO DE CORRENTE	51
3.1	Equação de transporte de vorticidade	51
3.2	Função de corrente	55
4	O MÉTODO DO TUBO DE TRAJETÓRIAS	61
4.1	Obtenção do esquema numérico	61
4.2	Determinação da vorticidade no tempo passado	66
4.3	Aproximação das coordenadas do campo de velocidades	73
4.4	Resolução de sistemas lineares	75
4.5	Resolução numérica do método do tubo de trajetórias e <i>OpenMP</i>	76
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	78
	CONCLUSÃO	140
	REFERÊNCIAS	143
	APÊNDICE A – Dedução das fórmulas de quarta ordem para derivadas de primeira e segunda ordem	149
	APÊNDICE B – Equação de Poisson para a pressão	152
	APÊNDICE C – Função <i>peaks</i> do software <i>Matlab</i>	154

INTRODUÇÃO

Motivação para o estudo proposto

A Mecânica dos Meios Contínuos é um ramo da Física, mais especificamente da Mecânica, que propõe um modelo unificado para sólidos deformáveis, sólidos rígidos e fluidos. Fisicamente, os fluidos são classificados em gases e líquidos.

Um dos objetos de estudo mais analisados dentro desta área são as equações de Navier-Stokes, as quais descrevem o escoamento de fluidos. Estas são equações diferenciais parciais que possibilitam a obtenção dos campos de velocidade e pressão em um escoamento. Foram denominadas assim após Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes desenvolverem um conjunto de equações que descreveriam o movimento de gases e líquidos, conforme descrito por Wolfram (2002). Basicamente, o modelo apresentado pelos dois cientistas estabelece que mudanças no momento e aceleração de uma partícula fluida são o produto das mudanças na pressão e forças viscosas dissipativas atuando no fluido. Esta força viscosa surge a partir de interações moleculares.

As equações de Navier-Stokes descrevem a física de um grande número de fenômenos de interesse econômico e acadêmico, incluindo diversos ramos da Engenharia. Elas são utilizadas para modelar o clima, correntes oceânicas, fluxos de água em oceanos, estuários, lagos e rios, movimentos estelares dentro e fora da galáxia, escoamentos ao redor de aerofólios de aviões e automóveis, propagação da fumaça de incêndios e a dispersão em chaminés industriais, por exemplo.

As equações de Navier-Stokes também são usadas diretamente no projeto de aeronaves e carros, na hemodinâmica, no projeto de usinas hidrelétricas, nos projetos de hidráulica marítima, na análise dos efeitos de poluição hídrica em rios, mares, lagos e oceanos e na dispersão da poluição atmosférica. O modelo matemático pode ser a transposição de um modelo físico em um laboratório de hidráulica ou em um túnel de vento, tendo em vista as possíveis limitações práticas para representar escoamentos bidimensionais. Por fim, as equações de Navier-Stokes juntamente com as equações de Maxwell podem ser utilizadas no estudo da magneto-hidrodinâmica. Todas estas aplicações são descritas por Lukaszewicz e Kalita (2016), Younsi (2012) e Blazek (2003).

A formulação das equações de Navier-Stokes nas incógnitas velocidade e pressão não relacionam estas variáveis. Ao invés disso, o que se apresenta são as relações entre as taxas de variação ou fluxos destas magnitudes. Uma das simplificações é aquela na qual a viscosidade do fluido é nula. Neste caso, pode-se mostrar que a aceleração do fluido é proporcional à derivada da pressão interna, o que se assemelha muito à segunda Lei de Newton.

Desta forma, as equações de Navier-Stokes para um dado problema físico não po-

dem ser solucionadas por meio de técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. Na prática, somente nos casos mais restritivos existem soluções analíticas. Frequentemente, estes casos envolvem fluxo não-turbulento em estado estacionário no qual a viscosidade do fluido é muito grande ou sua velocidade é muito pequena. Estas condições também podem ser traduzidas para movimento no qual o número de Reynolds é muito pequeno, conforme explicitado em Lukaszewicz e Kalita (2016). O número de Reynolds é um número adimensional que permite avaliar o tipo do escoamento e pode indicar se flui de forma laminar ou turbulenta. Para o caso de um fluxo de água num tubo cilíndrico, admite-se os valores de 2.000 e 2.400 como limites. Desta forma, para valores menores que 2.000 o fluxo será laminar, para valores maiores que 2.400 o fluxo será turbulento e para valores entre eles, o fluxo será transitório, conforme explicita Reynolds (1883). E, segundo o mesmo autor, esta seria a base do estudo do escoamento de outros fluidos.

Para situações mais complexas, há a necessidade de se utilizar técnicas computacionais, o que dá origem ao campo da ciência conhecido como Dinâmica dos Fluidos Computacional. Neste sentido, há uma vasta literatura que propõe formas de obtenção de soluções numéricas para as supracitadas equações. Só a título de exemplificação, é possível citar John e Tobiska (1999), Gad-el-Hak (1995), Elias (2003) e Andrade (2010).

Tendo em vista suas múltiplas aplicações, a obtenção de soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes continuam a gerar interesse da comunidade acadêmica. Neste sentido, proporemos sua resolução através da análise do deslocamento das partículas fluidas ao longo do tempo. Em outras palavras, acompanharemos o escoamento do fluido ao longo de um intervalo de tempo para compreender o movimento como um todo. Tal técnica, apresentada em Henderson et al. (2017), é denominada Método do Tubo de Trajetórias. A principal vantagem deste método em relação aos tradicionais reside no fato de que há uma maior aproximação entre o modelo matemático e o modelo físico, tendo em vista que, na sua construção, levaremos em conta fortemente o deslocamento físico do fluido.

Além disso, Gurtin (1981) mostra que, para a formulação clássica do problema de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, a variável pressão é única a menos de uma constante, o que pode se tornar um complicador. Afinal, se uma das variáveis possui infinitas soluções, então devemos introduzir condições para as quais tenhamos uma solução única para a outra variável. Nem sempre tais hipóteses são facilmente verificadas. Por isso, faremos, no contexto do método considerado aqui, uma nova formulação das equações de Navier-Stokes introduzindo duas novas variáveis: vorticidade e função de corrente. A vorticidade é uma grandeza física empregada para quantificar a rotação das partículas de um fluido em movimento, enquanto a função de corrente auxilia na determinação das direções adotadas pelas partículas durante o escoamento.

Objetivos do estudo proposto

A presente tese almeja alcançar os seguintes objetivos:

- Apresentar uma formulação generalista e adimensional da Equação de Navier-Stokes.
- Reescrever a Equação de Navier-Stokes em termos das variáveis vorticidade e função de corrente, diminuindo o número de variáveis a serem analisadas.
- Introduzir o Método do Tubo de Trajetórias para solucionarmos a Equação de Navier-Stokes em sua nova formulação.
- Aplicar o Método do Tubo de Trajetórias em problemas estudados por outros autores e comparar os resultados obtidos.

Organização do trabalho a ser desenvolvido

Para alcançarmos os objetivos descritos na seção anterior, inicialmente introduziremos conceitos preliminares inerentes à Mecânica do Contínuo a fim de familiarizar o leitor com os termos usados. Matematicamente, conceituaremos derivadas, gradientes, divergências e rotacionais e apresentaremos alguns resultados do Cálculo Vetorial que se mostrarão úteis ao longo deste trabalho. Todos estes elementos estão discriminados no capítulo 1.

No capítulo 2, introduziremos uma das formulações existentes para as equações de Navier-Stokes nas variáveis velocidade e pressão, chamadas de variáveis primitivas. Para tanto, construiremos um arcabouço teórico para determinar as relações existentes entre as grandezas citadas. Apesar de haver formas mais intuitivas para obtermos tais equações, optamos por seguir um caminho matematicamente mais rigoroso e generalista. Portanto, nos preocuparemos com o formalismo matemático, a fim de permitir que o leitor compreenda os meandros desta dedução de maneira mais ampla.

Uma vez obtidas as equações de Navier-Stokes, passaremos a reescrevê-las através das variáveis vorticidade e função de corrente. Assim como no capítulo 2, nos preocuparemos com o rigor matemático para dar a devida sustentação à nova formulação. Desta maneira, no capítulo 3, verificaremos como as novas variáveis são obtidas e analisaremos como estas se relacionam com as variáveis primitivas.

Em seguida, o capítulo 4 será dedicado à exposição do Método do Tubo de Trajetórias. Neste momento, verificaremos quais fórmulas discretas serão implementadas, bem como analisaremos a sua elaboração considerando as variáveis introduzidas no capítulo anterior. Deste modo, teremos um conjunto de equações algébricas que nos auxiliarão na obtenção das soluções numéricas. Tal conjunto será abordado através de um esquema

de diferenças finitas de alta ordem, o que garantirá melhor acurácia numérica. Tal abordagem é um diferencial, considerando que usualmente tais esquemas costumam ser de segunda ordem.

No capítulo 5, abordaremos três problemas específicos e verificaremos como o método se comporta na obtenção das soluções. Apresentaremos todos os dados relevantes que nos permitirão comparar nosso método com outros no tocante à facilidade de implementação, erro entre soluções e gasto de tempo e custo computacional. Em particular, observaremos como o uso da computação paralela através da API *OpenMP* pode auxiliar nesta economia de tempo, o que está em consonância com o exposto por Chandra (2001) e Chapman (2008). Ainda, elencaremos as possíveis vantagens do método pensando em perspectivas futuras.

Por fim, teceremos nossas considerações finais ressaltando os aspectos importantes de nossas descobertas, bem como indicaremos os próximos passos desta pesquisa.

1 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo tem como objetivo conceituar o espaço no qual construiremos a Equação de Navier-Stokes, bem como apresentar formas de manipular algebricamente seus elementos. Para isto, iniciaremos com conceitos de Álgebra Tensorial, a fim de definirmos espaços euclidianos e espaços vetoriais associados, bem como tensores sobre tais conjuntos.

Em seguida, utilizaremos elementos de Análise Tensorial para introduzir as concepções de derivada de tensor, gradiente, divergência, rotacional e laplaciano, bem como suas principais propriedades.

Ainda, mostraremos a transposição de elementos de cinemática em termos matemáticos, a fim de possibilitar a manipulação algébrica de corpos e suas partes. Nesse intento, caracterizaremos campos materiais e espaciais e mostraremos as relações entre estas duas categorias de tensor. Além disso, faremos a distinção teórica entre caminho e trajetória a fim de estabelecer o que entenderemos por tubo de trajetórias. Por fim, encerraremos esta discussão inicial firmando o Teorema de Transporte de Reynolds; resultado este fundamental para a continuidade deste trabalho.

1.1 Álgebra tensorial

Ao longo deste trabalho, analisaremos objetos matemáticos no espaço tridimensional euclidiano E que está associado a um espaço vetorial V . Suporemos que V possui um produto interno, denotado por \cdot , e um sistema de coordenadas cartesianas com base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Além disso, chamaremos de tensor a todo operador linear $T : V \rightarrow V$. Ainda, consideraremos o conjunto Lin formado por todos os tensores do espaço vetorial V dotado das operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Neste sentido, dados dois tensores S e T em Lin , definiremos o produto ST por $S \circ T$.

Ainda, definiremos a transposta de um tensor T , denotada por T^T , como sendo o único tensor tal que:

$$Tu \cdot v = u \cdot T^T v; \quad u, v \in V \quad (1)$$

Teorema 1.1. *Dados dois tensores S e T temos que:*

$$a) (T + S)^T = T^T + S^T \quad (2)$$

$$b)(ST)^T = T^T S^T \quad (3)$$

$$c)(S^T)^T = S \quad (4)$$

A demonstração do resultado acima encontra-se em Hoffman e Kunze (1971).

Um tensor T   dito simétrico se ele   igual   sua transposta e anti-simétrico quando sua transposta e seu oposto são iguais. Em particular, observemos que, dado um tensor T , podemos decompô-lo na soma de um tensor simétrico com outro tensor anti-simétrico.

Ainda, consideraremos o produto tensorial de dois vetores a e b , denotado por $a \otimes b$, como sendo o tensor dado por:

$$(a \otimes b)v = (b \cdot v)a, \quad v \in V \quad (5)$$

Esta defini o nos permite introduzir os seguintes resultados cuja demonstra es estão em Gurtin (1981).

Teorema 1.2. *Sejam a, b, c e d vetores de V e $\{e_1, e_2, e_3\}$ seu respectivo sistema de coordenadas cartesianas. Então:*

$$a)(a \otimes b)^T = b \otimes a \quad (6)$$

$$b)(a \otimes b)(c \otimes d) = (b \cdot c)a \otimes d \quad (7)$$

$$c)(e_i \otimes e_i)(e_j \otimes e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ e_i \otimes e_i, & i = j \end{cases} \quad (8)$$

$$d) \sum_{i=1}^3 e_i \otimes e_i = I \quad (9)$$

Tendo em vista que todo tensor T   uma transforma o linear, então este admite

uma representação matricial onde seus elementos são dados por:

$$T_{ij} = e_i \cdot T e_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (10)$$

Deste modo, notemos que se $T \in Lin$, então:

$$\sum_{i,j=1}^3 T_{ij} e_i \otimes e_j = T \quad (11)$$

Isto posto, passemos a definir o traço de um tensor. Com efeito, o traço é uma operação linear que associa a cada tensor T um escalar $tr(T)$ e para quaisquer vetores a e b satisfaz:

$$tr(a \otimes b) = a \cdot b \quad (12)$$

Agora, observe que:

$$tr(T) = tr\left(\sum_{i,j=1}^3 T_{ij} e_i \otimes e_j\right) = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} tr(e_i \otimes e_j) = \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} e_i \cdot e_j = \sum_{i=1}^3 T_{ii} \quad (13)$$

Deste modo, o traço de um tensor pode ser definido por:

$$tr(T) = \sum_{i=1}^3 T_{ii} \quad (14)$$

Além disso, o operador traço pode induzir um produto interno natural entre tensores da seguinte forma:

$$S \cdot T = tr(S^T T) \quad (15)$$

para quaisquer tensores S e T .

Agora, apresentaremos um outro tipo de operação entre vetores. Para isso, note que em todo espaço tridimensional existem exatamente dois produtos vetoriais, sendo um o oposto do outro. Denotaremos tal produto por $u \times v$, onde $u, v \in V$ sendo $u \times v$ perpendicular a u e v ao mesmo tempo. Intuitivamente, $u \times v$ é o vetor perpendicular a u e v ao mesmo tempo. Assim, se $e_3 = e_1 \times e_2$, então os componentes de $u \times v$ em relação

à base $\{e_1, e_2, e_3\}$ são, respectivamente:

$$u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \quad (16)$$

Neste momento, apresentaremos um resultado, cuja prova está em Gurtin (1981), o qual garante a existência de uma correspondência biunívoca entre tensores anti-simétricos e produto vetorial.

Teorema 1.3. *Seja W um tensor anti-simétrico. Então, existe um único vetor w tal que, para todo $v \in V$:*

$$Wv = w \times v \quad (17)$$

O vetor w apresentando no teorema anterior é chamado vetor axial do tensor W .

Para finalizar esta seção, apresentaremos os conceitos de autovalor e autovetor de um tensor. Um escalar ω é dito autovalor do tensor T se existe um vetor unitário e tal que $Te = \omega e$. Neste caso, e é chamado de autovetor. O espaço característico para T correspondente a ω é o subespaço de V consistindo de todos os vetores v que satisfazem a equação:

$$Tv = \omega v \quad (18)$$

O último resultado desta seção é o Teorema Espectral, cuja demonstração encontra-se em Hoffman e Kunze (1971). Este teorema caracteriza tensores simétricos em função de seus autovetores.

Teorema 1.4. *Seja T um tensor simétrico. Então, existe uma base ortonormal de V consistindo de autovetores de T . Mais ainda, temos que:*

$$T = \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i \otimes e_i \quad (19)$$

onde ω_1, ω_2 e ω_3 são os autovalores de T . Reciprocamente, se T tem a forma acima com $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal de V , então ω_1, ω_2 e ω_3 são os autovalores associados a e_1, e_2 e e_3 . Além disso:

- a) T tem exatamente três autovalores distintos se, e somente se, os espaços característicos são três linhas mutuamente perpendiculares passando pela origem.
- b) T tem exatamente dois autovalores distintos se, e somente se, T admite a repre-

sentação:

$$T = \omega_1 e_1 \otimes e_1 + \omega_2 (I - e_1 \otimes e_1) \quad (20)$$

c) T tem exatamente um autovalor se, e somente se, $T = \omega I$. Neste caso, ω é autovalor com espaço característico correspondente V . Reciprocamente, se V é um espaço característico para T , então $S = \omega I$.

1.2 Análise tensorial

Nesta seção, introduziremos uma definição de derivada suficientemente geral para incluir campo de pontos, vetores, escalares ou tensores. Desta forma, apresentaremos alguns conceitos topológicos, bem como resultados que serão utilizados ao longo do texto. Para tanto, assumiremos que os espaços vetoriais com os quais trabalharemos são dotados de uma norma, o que, conforme Munkres (2000) e Lima (1970), permite a construção de uma topologia para tais conjuntos.

Assim, tomemos U e W espaços vetoriais normados dotados de uma topologia. Seja f uma função definida numa vizinhança da origem de U e que assume valores em W . Então, dizemos que $f(u)$ se aproxima de zero mais rápido do que u e escrevemos $f(u) = o(u)$ se:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{|f(u)|}{|u|} = 0 \quad (21)$$

Notemos que $|f(u)|$ representa a norma de $f(u)$ em W , enquanto $|u|$ é a norma de u em U . Analogamente:

$$f(u) = g(u) + o(u) \iff f(u) - g(u) = o(u) \quad (22)$$

Percebamos que f e g podem assumir valores em E enquanto $f - g$ assume valores em V . Isto posto, consideremos U e W dois espaços vetoriais de dimensão finita e $g : D \rightarrow W$, onde D é um subconjunto aberto de U . Diremos que g é diferenciável em x se existe uma transformação linear $Dg(x) : U \rightarrow W$ tal que

$$g(x + u) = g(x) + Dg(x)[u] + o(u) \quad (23)$$

quando $u \rightarrow 0$. Se $Dg(x)$ existe, então é única. Com efeito, para cada $u \in U$, temos:

$$Dg(x)[u] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [g(x + \alpha u) - g(x)] = \frac{d}{d\alpha} g(x + \alpha u)|_{\alpha=0}, \quad \alpha \in R \quad (24)$$

Chamaremos $Dg(x)$ de derivada de g no ponto x . Como as normas em espaços vetoriais de dimensão finita são equivalentes, $Dg(x)$ está bem definida, independentemente das escolhas das normas em U e W . Se g é diferenciável em todo $x \in D$, então Dg denota a aplicação $x \mapsto Dg(x)$, cujo domínio é D e o contradomínio é o espaço das aplicações lineares de U em W . Este espaço vetorial é de dimensão finita e pode se tornar normado de uma maneira natural. Portanto, faz sentido pensar nos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de Dg . Em particular, diremos que g é de classe C^1 ou suave se g é diferenciável em D e Dg é contínua.

Evidentemente, o espaço euclidiano E não é normado. Desta forma, quando o domínio D de g é um subconjunto de E , a definição de derivada permanece válida se trabalharmos com o espaço vetorial associado V . O mesmo pode ser dito caso a imagem de g esteja contida em E . Agora, introduziremos algumas propriedades da derivação. Omitiremos a demonstração dos próximos dois resultados. Contudo, estas se encontram em Lima (2000).

Teorema 1.5. *(Regra do Produto) Sejam f e g diferenciáveis em $x \in D$. Então, o produto $h : D \rightarrow V$ dado por $h = \pi(f, g)$ é diferenciável em x e:*

$$Dh(x)[u] = \pi(f(x), Dg(x)[u]) + \pi(Df(x)[u], g(x)) \quad (25)$$

para todo $u \in U$

Teorema 1.6. *(Regra da Cadeia) Sejam g uma função diferenciável em $x_0 \in D$ e f diferenciável em $y = g(x_0)$. Então, a composta*

$$h = f \circ g \quad (26)$$

é diferenciável em x e:

$$Dh(x) = Df(y) \circ Dg(x_0) \quad (27)$$

Agora, consideraremos funções definidas sobre um conjunto aberto R em um espaço euclidiano. Uma função em R é chamada escalar, vetorial, tensorial ou um campo de pontos à medida que seus valores forem números, vetores, tensores ou pontos.

Seja ϕ um campo escalar suave em R . Então, para cada $x \in R$, $D\phi(x)$ é uma

aplicação linear do espaço vetorial associado V sobre R . Em particular, o teorema a seguir é um resultado bastante interessante que nos permitirá definir o conceito de gradiente.

Teorema 1.7. (*Representação das Formas Lineares*) *Seja $\psi : V \rightarrow R$ uma aplicação linear. Então, existe um único vetor a tal que:*

$$\psi(v) = a \cdot v \quad (28)$$

para todo $v \in V$.

Demonstração. Se $\psi \equiv 0$, então $a = 0$. Se ψ não for a função nula, então consideremos os seguintes conjuntos:

$$Ker(\psi) = \{v \in V : \psi(v) = 0\} \text{ e } Ker(\psi)^\perp = \{u \in V : u \cdot v = 0, v \in Ker(\psi)\} \quad (29)$$

Neste caso, $Ker(\psi)$ tem, no máximo, uma base composta por dois vetores. Sendo assim, suponhamos que $\{k_1, k_2\}$ é uma base ortonormal de $Ker(\psi)$. Então, dado $v \in V$, consideremos o vetor u dado por:

$$u = v - \frac{v \cdot k_1}{|k_1|^2} k_1 + \frac{v \cdot k_2}{|k_2|^2} k_2 \quad (30)$$

Notemos que, para $i = 1, 2$ temos:

$$u \cdot k_i = 0 \quad (31)$$

Portanto, $u \in Ker(\psi)^\perp$. De maneira similar, podemos mostrar que existe tal u se a base de $Ker(\psi)$ contiver um único vetor. Por fim, se $Ker(\psi) = \{0\}$, então $V = Ker(\psi)^\perp$. Logo, existe $a_0 \neq 0 \in Ker(\psi)^\perp$ tal que $|a_0| = 1$. Sendo assim, tomemos $a = \psi(a_0)a_0$. Assim, se $v \in Ker(\psi)$:

$$a \cdot v = \psi(a_0)a_0 \cdot v = (\psi(a_0)) \cdot (a_0 \cdot v) = 0 = \psi(v) \quad (32)$$

e, em particular:

$$a \cdot a_0 = \psi(a_0)a_0 \cdot a_0 = \psi(a_0)(a_0 \cdot a_0) = \psi(a_0) \quad (33)$$

Agora, dado $v \in V$ definimos:

$$v_0 = v - \lambda a_0, \quad (34)$$

onde:

$$\lambda = \frac{\psi(v)}{\psi(a_0)} \quad (35)$$

Daí, é possível escrever,

$$\psi(v_0) = \psi(v - \lambda a_0) = \psi(v) - \lambda \psi(a_0) = 0 \quad (36)$$

ou seja, $v_0 \in \text{Ker}(\psi)$. Além disso:

$$a \cdot v = a \cdot (v_0 + \lambda a_0) = \psi(v_0) + \lambda \psi(a_0) = \psi(v_0 + \lambda a_0) = \psi(v) \quad (37)$$

Portanto:

$$\psi(v) = a \cdot v, \quad v \in V \quad (38)$$

Suponha, agora, que existam $a_1, a_2 \in V$ tais que:

$$a_1 \cdot v = \psi(v) = a_2 \cdot v \quad (39)$$

Então, $(a_1 - a_2) \cdot v = 0$. Como isto vale para qualquer $v \in V$, segue que $a_1 = a_2$, o que encerra a demonstração. \square

Desta forma, pelo Teorema da Representação das Formas Lineares (Teorema 1.7), se v é um campo escalar, então, para cada $x \in E$ existe um único vetor, denotado por $\nabla\psi(x)$, tal que:

$$D\psi(x)[u] = \nabla\psi(x) \cdot u \quad (40)$$

A este vetor damos o nome de gradiente de ψ em x . De maneira análoga, se v é um campo vetorial ou de pontos suave em E , então $Dv(x)$ é uma transformação linear de V em V e, portanto, um tensor. Neste caso, usaremos a mesma notação para gradiente, mas escreveremos:

$$Dv(x)[u] = \nabla v(x)[u] \quad (41)$$

Suponha, agora, que ψ ou v representem uma grandeza. Então, segundo Leithold (1994), o gradiente é um vetor (ou campo vetorial) que indica o sentido e a direção nos quais, por deslocamento a partir de um dado ponto, obtém-se o maior incremento possível no valor desta grandeza.

Dado um campo vetorial v em E , o campo escalar:

$$\operatorname{div}(v) = \operatorname{tr}(\nabla v) \quad (42)$$

é chamado de divergência de v . Podemos usar este operador para definir divergência de um campo suave tensorial S . De fato, $\operatorname{div}(S)$ é o único campo vetorial tal que:

$$\operatorname{div}(S) \cdot a = \operatorname{div}(S^T a), \text{ para todo vetor } a \quad (43)$$

De maneira, similar se v ou S representarem grandezas físicas, então o operador divergência mede a dispersão ou divergência dos vetores do campo num determinado ponto, conforme explicitado em Leithold (1994).

O rotacional do campo vetorial v , denotado por $\operatorname{rot}(v)$, é o único campo vetorial com a seguinte propriedade:

$$(\nabla v - (\nabla v)^T)a = \operatorname{rot}(v) \times a, \text{ para todo vetor } a \quad (44)$$

Segundo Leithold (1994), o operador rotacional é um aquele que calcula, em uma superfície infinitesimal, o quanto os vetores de um campo vetorial se afastam ou se aproximam de um vetor normal a esta superfície. Em particular, campos vetoriais nos quais o rotacional é diferente de zero, são ditos campos de vórtice.

Seja, agora, ϕ um campo vetorial ou escalar de classe C^2 . Então, o laplaciano $\Delta\phi$ de ϕ é definido por:

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\nabla\phi) \quad (45)$$

Conforme explicitado em Leithold (1994), o laplaciano está associado à ideia de concentração. Ou seja, o laplaciano é uma medida do crescimento ou decrescimento de um campo vetorial ou escalar nas vizinhanças de cada ponto de seu domínio.

Observemos que, até o presente momento, introduzimos conceitos como gradiente, rotacional e divergência de maneira bastante geral. Contudo, neste trabalho será favorável utilizar estes entes em função de um sistema de coordenadas cartesianas. Assim, se ψ , v e T são campos suaves escalar, vetorial e tensorial, respectivamente, então:

$$\begin{aligned} (\nabla\psi)_i &= \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}, & \operatorname{div}(v) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}, \\ (\nabla v)_{ij} &= \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, & \operatorname{div}(T)_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \\ \Delta\psi &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x_i^2}, & (\Delta v)_j &= \Delta v_j \end{aligned} \quad (46)$$

Além disso, observemos que o rotacional de v é o vetor axial do tensor anti-simétrico $W = \nabla v - (\nabla v)^T$. Em particular, a representação matricial de tal tensor é:

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

e as coordenadas do vetor $rot(v)$ são

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (48)$$

A proposição a seguir apresenta algumas propriedades importantes da divergência, bem como dos operadores rotacional e gradiente. Sua demonstração encontra-se em Gurtin et al. (2009).

Proposição 1.1. *Sejam ψ, v, w e S campos suaves com ψ escalar, v e w vetoriais e S tensorial. Então:*

$$a) \nabla(\psi v) = \psi \nabla v + v \otimes \nabla \psi \quad (49)$$

$$b) div(\psi v) = \psi div(v) + v \cdot \nabla \psi \quad (50)$$

$$c) \nabla(v \cdot w) = (\nabla w)^T v + (\nabla v)^T w \quad (51)$$

$$d) div(v \otimes w) = v div(w) + (\nabla v)w \quad (52)$$

$$e) div(S^T v) = S \cdot \nabla v + v \cdot div S \quad (53)$$

$$f) div(\psi S) = \psi div(S) + S \nabla \psi \quad (54)$$

$$g) \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(v)) = 0 \quad (55)$$

$$h) \operatorname{rot}(v \times w) = \operatorname{div}(w \otimes v - v \otimes w) \quad (56)$$

Agora, consideremos $M \subset E$ uma região regular, $M_1 \subset E$ um aberto tal que $M \subset M_1$, $F : M_1 \rightarrow E$ um campo vetorial e n um vetor normal à região. Então, o fluxo de F através de M seguindo a normal n é dado por:

$$\int_M F \cdot n dA \quad (57)$$

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser vista em Gurtin et al. (2009), relaciona o fluxo de um campo vetorial através de uma região com seu comportamento dentro da mesma região. Intuitivamente, este resultado mostra que a soma de todas as fontes menos a soma de todos os sumidouros dá o valor do fluxo líquido saindo da região.

Teorema 1.8. (*Teorema da Divergência*) *Seja R uma região regular e limitada. Consideremos $\psi : R \rightarrow R$, $v : R \rightarrow V$ e $S : R \rightarrow \operatorname{Lin}(V, V)$ campos escalar, vetorial e tensorial suaves, respectivamente, onde $\operatorname{Lin}(V, V)$ é o conjunto das transformações lineares de V em V . Então:*

$$\int_{\partial R} \psi n dA = \int_R \nabla \psi dV \quad (58)$$

$$\int_{\partial R} v \cdot n dA = \int_R \operatorname{div}(v) dV \quad (59)$$

$$\int_{\partial R} S n dA = \int_R \operatorname{div}(S) dV \quad (60)$$

onde n é o campo vetorial formado pelos vetores unitários perpendiculares à fronteira de R apontados para fora da região. Este campo também é chamado de campo unitário normal exterior em ∂R .

Por fim, o último teorema a ser apresentado nesta seção ilustra o fato de que o valor do campo vetorial em um determinado ponto pode ser calculado através de uma média volumétrica em torno deste mesmo ponto.

Teorema 1.9. (Teorema da Localização) *Seja Φ um campo vetorial ou escalar contínuo em um conjunto aberto R de E . Então, dado $x_0 \in R$:*

$$\Phi(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\Omega_\delta)} \int_{\Omega_\delta} \Phi dV \quad (61)$$

onde $\Omega_\delta, (\delta > 0)$ é a bola fechada de raio δ centrada em x_0 e $\text{vol}(\Omega_\delta)$ é o volume de tal bola. Mais ainda, se

$$\int_{\Omega} \Phi dV = 0 \quad (62)$$

para cada bola fechada $\Omega \subset R$, então $\Phi = 0$.

1.3 Cinemática

Corpos têm uma propriedade física importante: eles ocupam regiões do espaço euclidiano E . Embora um dado corpo ocupe diferentes regiões em diferentes instantes de tempo, e nenhuma dessas regiões está intrinsecamente associada ao corpo, é conveniente escolher uma região específica, denotada por B , para referência e identificar pontos do corpo com suas posições em B . Desta forma, um corpo B é uma região regular em E . Por vezes, diremos que B é a configuração de referência do corpo. Pontos $\xi \in B$ são chamados de pontos materiais, enquanto subregiões limitadas regulares de B serão chamadas de partes.

Dado um tempo $t \in R$, a posição ocupada por B em E , no instante t , será denotada por Ω_t . Chamamos Ω_t de configuração do corpo material B . Portanto, no instante t , um ponto material de B será associado com um ponto espacial $\chi \in \Omega_t$.

A Mecânica do Contínuo é, em grande parte, o estudo de corpos sendo deformados. Matematicamente, em um tempo t , o corpo B é deformado através de uma aplicação injetora

$$\chi(\cdot, t) : \Omega_{t_R} \rightarrow E \quad (63)$$

onde Ω_{t_R} é a configuração de referência de B em um instante t_R fixo. Deste modo, esta aplicação leva cada ponto material $\xi \in \Omega_{t_R}$ em um ponto $X \in E$, tal que $X(\xi, t) = \chi(\xi, t)$. A função $\chi(\cdot, t)$ é chamada deformação de B em um tempo t .

Observemos que a exigência de que χ seja injetora é necessária para que o corpo, ao ser deformado, não entre em si mesmo. Como será mostrado nesta seção, $\det(\nabla\chi)$ representa, localmente, o volume após a deformação por unidade de volume. Portanto, é razoável supormos que $\det(\nabla\chi) > 0$ ou, equivalentemente, $|\det(\nabla\chi)| = \det(\nabla\chi)$.

Um movimento de B é uma função suficientemente diferenciável

$$X : \Omega_{t_R} \times R \rightarrow E \quad (64)$$

tal que, para todo $t \in R$, $X(\cdot, t) = \chi(\cdot, t)$ é uma deformação deste corpo material. Em outras palavras, um movimento de B é uma família de deformações com um parâmetro t . Ainda, dizemos que $X = X(\xi, t)$ é o lugar ocupado pelo ponto material ξ no instante t .

A velocidade material de uma partícula fixa $\chi \in \Omega_{t_R}$ em um tempo t é dada por:

$$v(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} X(\xi, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(\xi, t + \Delta t) - X(\xi, t)}{\Delta t} \quad (65)$$

Tal velocidade descreve a taxa de variação com o tempo da posição da partícula ξ . Portanto, trata-se de um conceito lagrangiano. Ainda, como $\chi(\cdot, t)$ é uma aplicação injetora, então existe uma inversa:

$$\chi^{-1}(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \Omega_{t_R} \quad (66)$$

tal que:

$$\chi^{-1}(\chi(\xi, t), t) = \xi \quad (67)$$

Usando esta inversa, podemos escrever a velocidade como função da posição X e tempo t da seguinte forma:

$$v(X, t) = \frac{d}{dt} X(\chi^{-1}(X, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} X(\chi^{-1}(X(\xi, t), t), t) \quad (68)$$

a qual é chamada descrição espacial ou Euleriana da velocidade.

Mais geralmente, qualquer propriedade de um corpo associado com um movimento pode ser expresso como uma função do ponto material e tempo com domínio $\Omega_{t_R} \times R$ ou como uma função espacial com domínio Ω_t . Portanto, adotaremos a seguinte terminologia: um campo material é uma função com domínio $\Omega_{t_R} \times R$ e um campo espacial é uma função com domínio Ω_t .

Dado um campo material Φ , escrevemos:

$$\dot{\Phi}(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\xi, t) \quad (69)$$

para a derivada em relação a t mantendo o ponto ξ fixo, e:

$$\nabla \phi(\xi, t) = \nabla_{\xi} \Phi(\xi, t) \quad (70)$$

para o gradiente com relação a ξ mantendo t fixo. $\dot{\Phi}$ é chamado de derivada temporal da função Lagrangiana Φ e $\nabla\Phi$ é o gradiente material de Φ . Em particular, o campo material $F = \nabla\chi$ é o gradiente de deformação do movimento.

De maneira similar, dado um campo espacial Θ , escrevemos

$$\Theta'(X, t) = \frac{\partial}{\partial t}\Theta(X, t) \quad (71)$$

para a derivada com relação a t , mantendo X fixado, e

$$\text{grad}(\Theta(X, t)) = \nabla_X\Theta(X, t) \quad (72)$$

para o gradiente em relação a X mantendo t fixo. Θ' é chamada de derivada temporal da função Euleriana Θ e $\text{grad}(\Theta)$ é o gradiente espacial de Θ .

Isto posto, há uma relação bastante interessante entre as derivadas Lagrangianas e Eulerianas do campo de velocidades que será demonstrada a seguir:

Teorema 1.10. *Seja v um campo de velocidades associado ao movimento de um corpo B . Então:*

$$\dot{v} = v' + Lv, \text{ onde } L = \text{grad}(v) \quad (73)$$

Demonstração. Da Regra da Cadeia, segue que:

$$\dot{v}(X(\xi, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}v(X(\xi, t), t) = \text{grad}(v(X, t))\dot{X}(\xi, t) + v'(X, t) \quad (74)$$

Logo:

$$\dot{v}(X(\xi, t), t) = v'(X, t) + [\text{grad}(v(X, t))]v(X, t) \quad (75)$$

o que encerra a demonstração. \square

Dado um campo de velocidades espacial, a função $X(\chi^{-1}(X, t), t)$ que satisfaz o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d}{dt}X(\chi^{-1}(X, t), t) = V(X, t) \quad (76)$$

com a condição adicional

$$X(\chi^{-1}(X, t_R), t_R) = \xi \quad (77)$$

representa, para todo $t \in R$, o locus das posições ocupadas pelas partículas materiais ξ durante o movimento de B . Este locus é uma curva em E denominada caminho da

partícula material ξ .

Além disso, existe outra curva associada com a partícula material ξ , contida em $E \times R$, dada por:

$$C_\xi = \{(X, t) \in E \times R\} \quad (78)$$

onde $X = X(t)$ satisfaz (76) e (77). Chamamos C_ξ de trajetória de ξ .

Assim, diremos que o tubo de trajetórias de um corpo material B é uma região em $E \times R$ formada pela união das trajetórias relacionadas a todas as partículas materiais de B . O tubo de trajetórias admite a seguinte representação:

$$\Sigma = \{(X, t) : X \in \Omega_t, t \in R\} \quad (79)$$

Usando a inversa χ^{-1} , a descrição material de qualquer propriedade Φ de um movimento de B pode ser expressa como uma descrição espacial $\Phi : \Sigma \rightarrow E$ da seguinte forma:

$$\Phi(X(t), t) = \Phi(\chi^{-1}(X, t), t) = \Phi(X(\chi^{-1}(X(\xi, t), t))) \quad (80)$$

Para finalizar esta seção, apresentaremos o Teorema de Transporte de Reynolds. Este resultado é fundamental para a elaboração das leis básicas da dinâmica dos fluidos. Para tanto, denotaremos por $P_t = X(P, t)$ a região do espaço ocupada por uma parte de B no instante t . Assim:

$$vol(P_t) = \int_{P_t} dV \quad (81)$$

representa o volume de P no instante t . O resultado a seguir não será demonstrado para que não fuçamos do escopo deste trabalho. Contudo, sua prova encontra-se em Gurtin (1981).

Teorema 1.11. *Sejam χ uma deformação do corpo B e φ um campo escalar contínuo em $\chi(B)$. Então, para cada parte P de B .*

$$\int_{\chi(P)} \varphi(X) dV_x = \int_P \varphi(\chi(\xi)) det F(\xi) dV_\xi \quad (82)$$

onde $F = \nabla \chi$.

Isto posto, considere F como sendo o gradiente de deformação do movimento X . Então, a equação (82) leva a:

$$vol(P_t) = \int_P det(F) dV \quad (83)$$

Desto maneira, segue que:

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(P_t) = \int_P \dot{\det}(F) dV \quad (84)$$

Agora, consideremos a função φ definida no conjunto de todos os tensores inversíveis dada por $\varphi(A) = \det(A)$. Notemos ainda que, dado um tensor T temos que:

$$\det[I + T] = 1 + \text{tr}(T) + o(T), \text{ se } T \rightarrow 0 \quad (85)$$

Assim, da equação (85) segue que:

$$\det(A+U) = \det[(I+UA^{-1})A] = \det(A)\det(I+UA^{-1}) = \det(A)[1+\text{tr}(UA^{-1})+o(U)] \quad (86)$$

Daí:

$$\det(A+U) = \det(A) + \det(A)\text{tr}(UA^{-1}) + o(U), \text{ se } U \rightarrow 0 \quad (87)$$

Portanto:

$$\varphi(A+U) = \varphi(A) + \det(A)\text{tr}(UA^{-1}) + o(U), \text{ se } U \rightarrow 0 \quad (88)$$

Por fim, considere a seguinte aplicação:

$$U \rightarrow \det(A)\text{tr}(UA^{-1}) \quad (89)$$

Daí, para tensores U e V inversíveis e $\alpha \in R$ temos:

$$\varphi(\alpha U + V) = \det(A)\text{tr}((\alpha U + V)A^{-1}) = \alpha\varphi(U) + \varphi(V) \quad (90)$$

Deste modo, definimos:

$$D\varphi(A)[U] = \det(A)\text{tr}(UA^{-1}) \quad (91)$$

e, então,

$$\int_P \dot{\det}(F) dV = \int_P \dot{\det}(F) [\dot{F}] dV = \int_P (\det(F)) \text{tr}(\dot{F} F^{-1}) dV \quad (92)$$

Por outro lado, observemos que, dado um campo espacial u , podemos definir sua descrição material da seguinte forma:

$$u_m(\xi, t) = u(X(\xi, t), t) \quad (93)$$

para todo ponto material ξ .

Portanto, pela regra da Cadeia, segue que:

$$\nabla(u_m) = \text{grad}(u)_m \nabla X \quad (94)$$

Em particular, para todo ponto material ξ temos que:

$$\dot{F}(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla X(\xi, t) = \nabla \dot{X}(\xi, t) = \nabla v_m(\xi, t) = (\text{grad}(v))_m F \quad (95)$$

Fazendo $L_m = (\text{grad}(v))_m$, segue que $\dot{F} = L_m F$. Assim, utilizando a equação (92) obtemos:

$$\int_P (\dot{\det}(F)) dV = \int_P (\det(F)) \text{tr}(L_m) dV = \int_P (\det(F)) (\text{div}(v))_m dV \quad (96)$$

Do Teorema 1.14 e (96) chegamos a:

$$\int_P (\dot{\det}(F)) dV = \int_{P_t} \text{div}(v) dV \quad (97)$$

Por fim, do Teorema da Divergência e da equação (92) temos que

$$\int_{P_t} \text{div}(v) dV = \int_{\partial P} v \cdot n dA \quad (98)$$

Portanto, a partir das equações (84), (97) e (98) temos a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(P_t) = \int_P (\dot{\det}(F)) dV = \int_{P_t} \text{div}(v) dV = \int_{\partial P} v \cdot n dA \quad (99)$$

Teorema 1.12. *(Teorema do Transporte de Reynolds) Seja Φ um campo espacial escalar. Então, para qualquer parte P de B e instante t temos:*

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi dV = \int_{P_t} (\dot{\Phi} + \Phi \text{div}(v)) dV \quad (100)$$

Demonstração. Do Teorema 1.14 e da equação (96) temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi dV = \frac{d}{dt} \int_P \Phi_m \det(F) dV = \int_P (\Phi_m \dot{\det}(F)) dV = \int_P (\dot{\Phi} + \Phi \text{div}(v))_m \det(F) dV \quad (101)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi dV = \int_{P_t} (\dot{\Phi} + \Phi \text{div}(v)) dV \quad (102)$$

□

Do ponto de vista físico, o Teorema do Transporte de Reynolds mostra que a taxa de variação de uma propriedade extensiva de um fluido em um volume específico é expressa em termos da derivada material desta propriedade, bem como da divergência do campo de velocidades que atue sobre o volume.

Além disso, uma grandeza adimensional é aquela que é desprovida de qualquer unidade física que a defina, sendo portanto uma grandeza pura. As grandezas adimensionais se definem como produtos de quantidades cujas unidades se cancelam. Dependendo de seu valor, estas grandezas têm um significado físico que caracteriza determinadas propriedades para alguns sistemas.

Mais especificamente, dado um campo φ , podemos adimensionalizá-lo multiplicando-o por uma constante adequada a .

Corolário 1.1. *Suponha que o conjunto P_t é formado por pontos adimensionais e que a aplicação v é adimensional. Então, o teorema do Transporte de Reynolds continua válido se adimensionalizarmos o campo Φ .*

Demonstração. Com efeito, considere o campo Φ^* resultante da adimensionalização de Φ .

Ou seja:

$$\Phi^* = a\Phi, \text{ para uma constante não-nula adequada } a \quad (103)$$

O Teorema de Transporte de Reynolds assegura que:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi dV = \int_{P_t} (\dot{\Phi} + \Phi \operatorname{div}(v)) dV \quad (104)$$

Note que:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi^* dV = a \frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi \quad (105)$$

e:

$$\int_{P_t} (\dot{\Phi}^* + \Phi^* \operatorname{div}(v)) dV = a \int_{P_t} (\dot{\Phi} + \Phi \operatorname{div}(v)) dV \quad (106)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \Phi^* dV = \int_{P_t} (\dot{\Phi}^* + \Phi^* \operatorname{div}(v)) dV \quad (107)$$

□

2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS

Neste capítulo, faremos a dedução formal das Equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis sem a utilização de um sistema de coordenadas fixo. Desta maneira, começaremos definindo densidade de um corpo e veremos como esta grandeza se relaciona com o campo de velocidades de um movimento. Esta equação será denominada Equação da Continuidade. Além disso, definiremos movimento isocórico, o que nos permitirá conceituar incompressibilidade.

Em seguida, descreveremos as interações entre as partes de um corpo ou entre um corpo e o ambiente que o circunda através de sistema de forças. Em especial, nos deteremos no Teorema de Cauchy, o qual ilustra o fato de a força de superfície de um corpo pode ser vista como um tensor. Tal tensor, denominado Tensor de Cauchy, obedece à chamada Equação do Movimento e, num primeiro momento, nos permitirá definir pressão de um fluido.

Posteriormente, analisaremos as possíveis formas deste tensor e nos deteremos naquela que nos possibilitará introduzir o conceito de fluido newtoniano. E com isso, utilizaremos a Equação do Movimento para definir as Equações de Navier-Stokes. Por fim, observaremos sua forma adimensionalizada e, somente neste momento, o sistema de coordenadas será necessário.

2.1 Equação da continuidade

Uma das propriedades mais importantes dos corpos é que eles possuem massa. Neste trabalho, consideraremos que a massa de um corpo B é distribuída continuamente. Independentemente da deformação a que um corpo esteja sujeito, sua massa será definida como a integral de um campo de densidades. Ou seja, dada qualquer deformação χ , existe um campo de densidades ρ_χ em $\chi(B)$ tal que a massa $m(P)$ de qualquer parte P é dada por:

$$m(P) = \int_{\chi(P)} \rho_\chi dV \tag{108}$$

Mais precisamente, uma distribuição de massa para um corpo B é uma família de

campos de densidades suaves

$$\rho_\chi : \chi(B) \rightarrow R^+ \quad (109)$$

tal que:

$$\int_{f(P)} \rho_f dV = \int_{g(P)} \rho_g dV \equiv m(P) \quad (110)$$

para quaisquer deformações f e g e qualquer parte P . O número $\rho_\chi(X)$ representa a densidade no ponto espacial $X \in \chi(B)$ e a equação (110) ilustra o Princípio da Conservação da Massa, ou seja, a lei que, independentemente de qual deformação um corpo sofra, sua massa permanece inalterada.

Observemos também que, na definição de distribuição de massas, a suavidade não é necessária. Na realidade, tal conceito está bem posto se ρ_χ for contínua por partes para cada deformação χ . Porém, como veremos a seguir, definiremos densidade ao longo da trajetória de um ponto material e suas derivadas serão necessárias. Assim, acrescentamos a hipótese de suavidade na definição de distribuição de massa por ser mais conveniente. Denotaremos por ρ_0 o campo de densidades ρ_χ quando $\chi(\xi) = \xi$ para todo ponto $\xi \in B$. Assim, $\rho_0(\xi)$ é a densidade de ξ quando o corpo está em sua configuração de referência. Pelo Teorema da Localização, temos que:

$$\rho_0(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(\Omega_\delta)}{\text{vol}(\Omega_\delta)} \quad (111)$$

onde Ω_δ é a bola de raio δ centrada em ξ . Uma observação cabível neste momento reside no tocante à terminologia adotada. Conforme mostra Younsi (2012), alguns autores utilizam o termo massa específica ao se referirem à densidade. Contudo, neste trabalho, adotaremos apenas o termo densidade.

A próxima proposição objetiva relacionar as densidades de pontos materiais e espaciais de um corpo.

Proposição 2.1. *Sejam χ uma deformação e $F = \nabla\chi$. Então:*

$$\rho_\chi(X) \det(F(\xi)) = \rho_0(\xi) \quad (112)$$

onde $X(\xi, t) = \chi(\xi, t)$.

Demonstração. Da equação (110) temos que:

$$\int_{\chi(P)} \rho_\xi(X) dV_X = \int_P \rho_0(\xi) dV_\xi \quad (113)$$

Ainda, do Teorema 1.11, segue que:

$$\int_{\chi(P)} \rho_\xi(X) dV_X = \int_P \rho_\chi(\chi(\xi)) \det(F(\xi)) dV_\xi \quad (114)$$

Portanto:

$$\int_P [\rho_\chi(\chi(\xi)) \det(F(\xi)) - \rho_0(\xi)] dV_\xi = 0 \quad (115)$$

Daí, como P é qualquer, segue do Teorema da Localização que:

$$\rho_\chi(X) \det(F(\xi)) - \rho_0(\xi) = 0 \quad (116)$$

ou

$$\rho_\chi(X) \det(F(\xi)) = \rho_0(\xi) \quad (117)$$

□

Dado um movimento X de B , denotaremos a densidade no ponto espacial $X(\xi, t) \in B_t$ na deformação $\chi(\cdot, t)$ por $\rho(X, t)$. Desta forma, a aplicação $\rho : C_\xi \rightarrow R^+$ dada por:

$$\rho(X, t) = \rho_{\chi(\cdot, t)}(X) \quad (118)$$

será chamada de densidade do movimento X . Considerando a equação (110) temos que

$$m(P) = \int_{P_t} \rho(X, t) dV_X = \int_{P_t} \rho dV \quad (119)$$

Isto nos leva à seguinte afirmação: dada uma parte P de B e um tempo t , temos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_t} \rho dV = 0 \quad (120)$$

Se $F = \nabla X$ é o gradiente de deformação do movimento X , então a equação (112) se torna:

$$\rho(X, t) \det(F(\xi, t)) = \rho_0(\xi) \quad (121)$$

com $X = \chi(\xi, t)$. Assim, ρ é a seguinte descrição espacial:

$$\rho(X, t) = \frac{\rho_o(\xi)}{\det(F(\xi, t))} \quad (122)$$

Logo, ρ é um campo suave.

O próximo resultado mostra que, ao longo de um movimento, a taxa de variação da densidade é proporcional à divergência de seu campo de velocidades.

Teorema 2.1. (*Equação da Continuidade*)

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(v) &= 0 \\ \rho' + \operatorname{div}(\rho v) &= 0 \end{aligned} \quad (123)$$

Demonstração. A partir da equação (122),

$$\rho \dot{\det}(F) + \dot{\rho}(\det(F)) = 0 \quad (124)$$

Daí:

$$\rho \operatorname{div}(v) + \dot{\rho} = 0 \quad (125)$$

Ainda:

$$\dot{\rho}(X, t) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(X(\xi, t), t) = \operatorname{grad}(\rho(X, t)) \cdot v(X, t) + \rho'(X, t) \quad (126)$$

Logo:

$$\dot{\rho} = \rho' + v \cdot \operatorname{grad}(\rho) \quad (127)$$

Assim:

$$\rho' + v \cdot \operatorname{grad}(\rho) + \rho \operatorname{div}(v) = 0 \quad (128)$$

Da Proposição 1.1 segue que:

$$\rho' + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (129)$$

□

Um movimento X é dito isocórico se:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(P_t) = 0 \quad (130)$$

para toda parte P e tempo t .

Do Teorema da Localização e da equação (99) temos que um movimento é isocórico se, e somente se, $\text{div}(v) = 0$. Pela Equação da Continuidade, podemos afirmar também que um movimento é isocórico se, e somente se, $\dot{\rho} = 0$. Em outras palavras, um movimento é isocórico se a densidade do corpo for constante.

2.2 Força, tensão e pressão

Durante um movimento mecânico, as interações entre as partes de um corpo ou entre um corpo e o ambiente são descritas por forças. Consideraremos três tipos de força:

- a) de contato entre partes separadas de um corpo,
- b) de contato exercidas pelo ambiente sobre a fronteira de um corpo e
- c) exercidas pelo ambiente sobre o interior de um corpo.

Um dos axiomas mais importantes da Mecânica do Contínuo é a Hipótese de Cauchy que se refere às forças de contato. Cauchy supôs a existência de uma força superficial $s(n, X, t)$ definida para cada vetor n e todo $(X, t) \in C_\xi$ conforme a Figura 1.

De um modo geral, dizemos que S é uma superfície orientada se for possível escolher um vetor normal unitário n em cada ponto da superfície de modo que n varie continuamente sobre S . Assim, o campo $s(n, X, t)$ possui a seguinte propriedade: seja S uma superfície orientada em B_t com normal unitária positiva n em x . Então, $s(n, X, t)$ é a força, por unidade de área, exercida, pelos pontos materiais no lado positivo da superfície sobre os pontos materiais no lado negativo de S .

Dada uma parte P ,

$$\int_{\partial P_t} s(n) dA \quad (131)$$

representa a força total exercida em P no instante t . Tal força é ilustrada pela Figura 2.

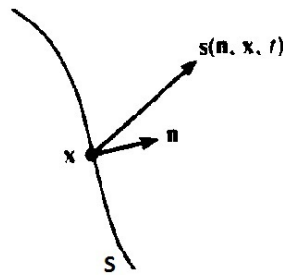
Como o ambiente também pode exercer forças no interior de B , assumiremos que tais forças são determinadas por um campo vetorial b em C_ξ . Assim, $b(X, t)$ dá a força, por unidade de volume, exercida pelo ambiente em X . Portanto, para qualquer parte P , a integral

$$\int_{P_t} b(X, t) dV_X = \int_{P_t} b dV \quad (132)$$

dá a parcela da força de ambiente sem contato exercida em P .

Estas observações feitas motivam as definições a seguir. Seja N o conjunto de todos

Figura 1 - Densidade de força superficial



Fonte: O autor, 2019.

os vetores unitários. Um sistema de forças em B durante um movimento, com trajetória C_ξ , é um par (s, b) de funções:

$$s : N \times C_\xi \rightarrow V$$

$$b : C_\xi \rightarrow V$$

com

a) $s(n, X, t)$, para cada $n \in N$ e t , é uma função suave de X em B_t ;

b) $b(X, t)$, para cada t , é uma função contínua de X em B_t .

Denominamos s de força de superfície e b de força do corpo. Os axiomas básicos que descrevem movimentos são chamados de leis de balanço do *momentum* ou da quantidade de movimento. Estas leis asseguram que, para toda parte de P e instante t temos:

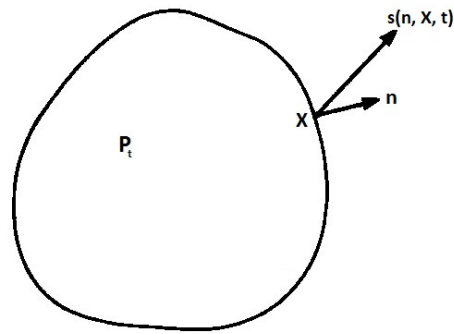
$$f(P, t) = \int_{P_t} \dot{v} \rho dV \quad (133)$$

e

$$m(P, t) = \int_{P_t} r \times \dot{v} \rho dV \quad (134)$$

Conforme explicita Bird et al. (1960), a equação (133) é uma generalização da Segunda Lei de Newton, enquanto a equação (134) é utilizada para descrever movimentos angulares. O próximo resultado é central na Mecânica do Contínuo. Sua principal afirmação é que $s(n)$ é linear em n . Não apresentaremos sua demonstração, mas esta pode ser vista em Gurtin (1981).

Teorema 2.2. (Teorema de Cauchy) *Seja (s, b) um sistema de forças para B durante um movimento. Então, uma condição necessária e suficiente para que as leis de balanço da*

Figura 2 - Força total exercida em P no tempo t 

Fonte: O autor, 2019.

quantidade de movimento sejam satisfeitas é que exista um campo tensorial espacial T (chamado de Tensor das Tensões de Cauchy) tal que:

a) Para cada vetor unitário n ,

$$s(n) = Tn \quad (135)$$

b) T é simétrico;

c) T satisfaz a equação do movimento

$$\operatorname{div}(T) + b = \rho \dot{v} \quad (136)$$

Agora, consideremos uma superfície plana orientada com vetor positivo unitário normal n em x . Então, a força de superfície Tn pode ser decomposta na soma de uma força normal:

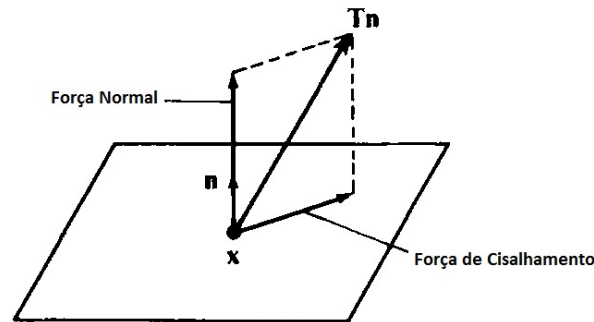
$$(n \otimes n)Tn$$

e de uma componente tangencial

$$(I - n \otimes n)Tn$$

chamada de força de cisalhamento. A Figura 3 ilustra esta decomposição.

Um fluido em repouso não sofre a ação de forças de cisalhamento. Portanto, Tn é paralelo a n para cada vetor unitário n . Logo, do Teorema Espectral, T admite um único espaço característico e $T = \pi I$, com π sendo um campo escalar. Este campo, em

Figura 3 - Decomposição da força de superfície T 

Fonte: O autor, 2019.

particular, é chamado de pressão do fluido, conforme explica Gurtin (1981).

2.3 Hipóteses constitutivas

As leis de balanço da quantidade de movimento são comuns na maioria dos estudos em relação à dinâmica dos corpos na natureza. Contudo, estas leis não caracterizam completamente o comportamento dos corpos porque elas não distinguem os diferentes tipos de materiais. Empiricamente, pode-se observar que dois corpos de mesma forma e mesmo tamanho submetidos ao mesmo movimento, em geral, não possuem a mesma distribuição de forças. Portanto, introduziremos hipóteses adicionais, chamadas de hipóteses constitutivas para tornar o movimento estudado mais realístico. Consideraremos três tipos de hipóteses constitutivas:

- a) restrições sobre as possíveis deformações que o corpo pode sofrer,
- b) hipóteses sobre a forma do Tensor de Cauchy e
- c) equações Constitutivas referente à tensão do movimento.

Um processo dinâmico é um par (X, T) tal que:

- a) X é um movimento;
- b) T é um campo tensorial simétrico em C_ξ ;
- c) $T(X, t)$ é uma função suave de X em B_t .

Um corpo material é um corpo B junto com uma distribuição de massa e uma família C de processos dinâmicos. A família C é chamada de classe constitutiva do corpo. O processo dinâmico (X, T) é dito isocórico se $\chi(\cdot, t)$ é uma deformação isocórica em cada t . O corpo material é dito incompressível se cada $(X, T) \in C$ é isocórico. Em outras

palavras, o corpo é dito incompressível se, para cada parte P de B temos

$$vol(P_t) = vol(P) \quad (137)$$

para todo t .

Ou seja, todo movimento de um corpo incompressível é isocórico. Mais ainda, o movimento isocórico não somente preserva o volume como também o volume de uma parte em qualquer instante de tempo é o mesmo de sua parte correspondente na configuração de referência. Além disso, todo movimento é isocórico se, e somente se, $div(v) = 0$. Logo, se o corpo for incompressível, então $div(v) = 0$.

Agora, lembremos que, dada uma deformação χ :

$$vol(\chi(P)) = \int_{\chi(P)} dV \quad (138)$$

Do Teorema 1.11 temos que:

$$vol(\chi(P)) = \int_P det(F) dV, \text{ onde } F = \nabla \chi \quad (139)$$

Pelo Teorema da Localização, segue que:

$$det(F(\xi)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{vol(\xi(\Omega_\delta))}{vol(\Omega_\delta)} \quad (140)$$

onde Ω_δ é a bola fechada de raio δ e centro ξ . Se χ é isocórica, então:

$$det(F(\xi)) = 1 \quad (141)$$

Além disso, se $det(F) = 1$, então:

$$\rho(X, T) = \rho_0(\xi), \text{ para } X = \chi(\xi, t) \quad (142)$$

Portanto, quando ρ_0 é constante, $\rho \equiv \rho_0$ é chamado de densidade do corpo. Um processo dinâmico (X, T) é Euleriano se o tensor T é da forma $T = -\pi I$ sendo π um campo escalar na trajetória de X . Um fluido ideal é um corpo material consistente com duas hipóteses constitutivas:

a) a classe constitutiva é o conjunto de todos os processos dinâmicos isocóricos Eulerianos e

b) a densidade ρ_0 é constante.

Ou seja, um fluido ideal é um corpo material incompressível para o qual a tensão é uma pressão em uma direção qualquer.

2.4 Fluidos newtonianos e as equações de Navier-Stokes

Em geral, atritos em fluidos surgem através de forças de cisalhamento que retardam o movimento de suas partículas. O gradiente de velocidade, $L = \text{grad}(v)$ é uma forma de mensurar tal movimento. Este fato nos motiva a considerar equações constitutivas da forma:

$$T = -\pi I + C[L] \tag{143}$$

Materiais definidos por relações deste tipo com C linear são chamados fluidos newtonianos. Eles fornecem o modelo mais simples de comportamento de fluido viscoso. Neste trabalho, usaremos o termo newtoniano para significar fluidos incompressíveis newtonianos. Ou seja, como $\text{tr}(L) = \text{div}(v)$, nos limitaremos a discutir campos L tais que $\text{tr}(L) = 0$.

Assim, um fluido newtoniano em repouso se aproxima de um fluido ideal. Além disso, de maneira similar a um fluido ideal, a pressão π é arbitrária. Esta flexibilidade na pressão leva a uma certa ambiguidade a respeito da função C . Dada qualquer função linear escalar $\beta(L)$ de L , podemos reescrever (143) da seguinte forma:

$$T = -\{\pi + \beta(L)\}I + C_\beta[L] \tag{144}$$

onde

$$C_\beta[L] = C[L] + \beta(L)I \tag{145}$$

Como a pressão é arbitrária, π pode absorver o termo $\beta(L)$. Ou seja, a equação (143) permanece inalterada se substituirmos $C[L]$ por $C_\beta[L]$. Para remover esta ambiguidade, normalizaremos C exigindo que

$$\text{tr}(C[L]) = 0 \tag{146}$$

Portanto, C tem como domínio o conjunto Lin_0 cujos elementos são todas as transformações lineares L tais que $tr(L) = 0$. E o contradomínio de C é o conjunto Sim_0 formado por todos os tensores simétricos T tais que $tr(T) = 0$. Isto posto, tomemos o traço da equação (143). Assim, temos:

$$tr(T) = -3\pi + tr(C[L]) \quad (147)$$

Considerando a equação (146) temos:

$$\pi = -\frac{tr(T)}{3} \quad (148)$$

Portanto, levando-se em conta a restrição dada pela equação (146), a pressão passa a ser definida unicamente pelo Tensor de Cauchy. Definimos a tensão extra T_0 por:

$$T_0 = T + \pi I = T - \frac{1}{3}tr(T)I \quad (149)$$

Deste modo a equação (143) se torna:

$$T_0 = C[L] \quad (150)$$

Estes apontamentos levam à seguinte definição: um fluido newtoniano é um corpo material consistente com as seguintes hipóteses:

a) existe uma função linear $C : Lin_0 \rightarrow Sim_0$ tal que sua classe constitutiva é o conjunto de todos os processos dinâmicos isocóricos (X, T) que obedecem a equação (150) e

b) a densidade ρ_0 é constante.

O próximo teorema, cuja demonstração encontra-se em Gurtin (1981), mostra que a função C é determinada por uma simples constante. Em outras palavras, o resultado introduz condições para que esta função seja independente do observador.

Teorema 2.3. *Uma condição suficiente e necessária para que um fluido newtoniano seja independente do observador é que a função C tenha a forma*

$$C[L] = 2\mu D \quad (151)$$

para cada $L \in Lin_0$, onde:

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad (152)$$

O escalar μ é chamado de viscosidade do fluido.

Pelo teorema anterior, a equação (143) se torna:

$$T = -\pi I + 2\mu D \quad (153)$$

Além disso,

$$2\operatorname{div}(D) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(v) + \operatorname{grad}(v^T)) = \Delta(v) + \operatorname{div}(\operatorname{grad}(v^T)) \quad (154)$$

Ainda,

$$\operatorname{grad}(v^T)_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (155)$$

Daí:

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}(v^T)]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\operatorname{grad}(v^T))_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad (156)$$

Logo:

$$\operatorname{div}[\operatorname{grad}(v^T)]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div}(v) = [\operatorname{grad}(\operatorname{div}(v))]_i \quad (157)$$

Ou seja, $\operatorname{div}(\operatorname{grad}(v^T)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(v))$. Em particular, como estamos lidando com fluidos newtonianos temos que:

$$2\operatorname{div}(D) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(v) + \operatorname{grad}(v^T)) = \Delta(v) \quad (158)$$

Ademais, a Proposição 1.1 mostra que:

$$\operatorname{div}(\pi I) = \pi \operatorname{div}(I) + I \operatorname{grad}(\pi) = \operatorname{grad}(\pi) \quad (159)$$

Por fim, a equação (136) leva a:

$$\rho_0(v' + grad(v)v) = div(T) + b \quad (160)$$

ou

$$\rho_0(v' + grad(v)v) = \mu\Delta v - grad(\pi) + b \quad (161)$$

e

$$div(v) = 0 \quad (162)$$

As equações (161) e (162) são chamadas equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis. Se definimos a viscosidade cinemática ν por:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (163)$$

então podemos reescrever as equações de Navier-Stokes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} v' + grad(v)v &= \nu\Delta v - \frac{1}{\rho_0} grad(\pi) + \frac{b}{\rho_0} \\ div(v) &= 0 \end{aligned} \quad (164)$$

Para finalizar esta seção, iremos adimensionalizar as equações acima. Para isso, consideraremos o comprimento d do corpo sobre o qual o fluido se desloca e v_0 a velocidade do fluido no início do movimento. Sendo assim, definiremos as seguintes variáveis adimensionais:

$$v = v_0 v^* \quad x_i^* = \frac{x_i}{d} \quad t^* = \frac{v_0 t}{d} \quad \pi^* = \frac{\pi}{\rho v_0^2} \quad (165)$$

Daí:

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = \frac{v_0^2}{d} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} \quad (166)$$

Além disso:

$$[grad(v)v]_i = \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{v_0^2}{d} \sum_{j=1}^3 v_j^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = [grad(v^*)v^*]_i \quad (167)$$

Portanto,

$$[grad(v)v] = \frac{v_0^2}{d} grad(v^*)v^* \quad (168)$$

Ainda,

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\rho_0 v_0^2}{d} \frac{\partial \pi^*}{\partial x^*} \quad (169)$$

e, finalmente

$$(\Delta v)_i = (\Delta v_i) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{v_0}{d^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*} = (\Delta v_i^*) = (\Delta v^*)_i \quad (170)$$

Substituindo as equações (166), (168), (33) e (34) na equação (30), temos:

$$(v^*)' + grad(v^*)v^* = \frac{\nu}{dv_0} \Delta v^* - grad(\pi^*) + \frac{d}{v_0^2 \rho_0} b \text{ e } div(v^*) = 0 \quad (171)$$

O número adimensional de Reynolds, denotado por Re , será definido por

$$Re = \frac{v_0 d}{\nu} \quad (172)$$

Este número depende das propriedades físicas do fluido e de características geométricas do corpo sobre o qual o fluido escoar.

Por fim, se

$$b^* = \frac{d}{v_0^2 \rho_0} b \quad (173)$$

então obteremos a equação de Navier-Stokes em sua forma adimensional.

$$\begin{aligned}(v^*)' + \mathit{grad}(v^*)v^* &= \frac{1}{Re}\Delta v^* - \mathit{grad}(\pi^*) + b^* \\ \mathit{div}(v^*) &= 0\end{aligned}\tag{174}$$

Nos próximos capítulos, nos referiremos à equação de Navier-Stokes em sua forma adimensional. Contudo, omitiremos o asterisco para simplificar a notação.

3 EQUAÇÃO DA VORTICIDADE E FUNÇÃO DE CORRENTE

Até o presente momento, vimos uma dedução das equações de Navier-Stokes. Observando as equações (161) e (162), podemos verificar que existem duas variáveis envolvidas: a velocidade e a pressão. Contudo, para a formulação clássica do problema de Navier-Stokes, Gurtin (1981) mostra que, no tocante a fluidos incompressíveis, a pressão é única a menos de uma constante. Logo, não conseguimos garantir a unicidade de solução para tal variável. Portanto, utilizaremos outra abordagem para apresentar as soluções das equações de Navier-Stokes.

Neste capítulo, introduziremos duas variáveis adicionais: a vorticidade e a função de corrente. Reescreveremos as equações (161) e (162) em função destas novas variáveis e, então, poderemos determinar soluções únicas. Veremos ainda que a função de corrente está intimamente relacionada ao campo de velocidades, o que permite determinar uma variável se conhecemos a outra. O Apêndice B apresenta uma equação para obtermos a pressão em função do campo de velocidades. Assim, resolver as equações de Navier-Stokes na formulação que será apresentada a seguir não impede que encontremos os valores das variáveis originais.

3.1 Equação de transporte de vorticidade

Do ponto de vista físico, a vorticidade é uma grandeza empregada para quantificar a rotação das partículas de um fluido em movimento. Sendo assim, passaremos a defini-la matematicamente.

Dado um movimento, sua vorticidade é definida por $\omega = rot(v)$. Contudo, podemos associá-la a um tensor anti-simétrico específico. Para isso, tomemos $L = grad(v)$ o gradiente do campo de velocidades. Daí, podemos escrever $L = D + W$, onde D e W são tensores simétrico e anti-simétrico, respectivamente. Além disso, tomemos o vetor axial de W , isto é, o vetor w tal que $Wv = w \times v, v \in V$. Ainda, para todo $a \in V$, com coordenadas a_1, a_2 e a_3 , consideremos o tensor anti-simétrico $A : V \rightarrow V$ dado por $Av = a \times v$. Ou seja, a é o vetor axial de A . Tendo em vista a discussão feita na seção 1.1, sabemos que tal tensor existe e sua forma matricial é a seguinte:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (175)$$

Além disso, se $w = (w_1, w_2, w_3)$, então sua forma matricial é:

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (176)$$

Daí:

$$A \cdot W = \text{tr}(A^T W) = 2(a \cdot w) \quad (177)$$

Ademais,

$$A \cdot L = a \cdot \text{rot}(v) = a \cdot \omega \quad (178)$$

E, por fim, observemos que:

$$A \cdot D = 0 \quad (179)$$

E, assim:

$$A \cdot L = A \cdot W \quad (180)$$

Desta maneira pelas equações (177), (178) e (180) temos:

$$a \cdot \omega = 2(a \cdot w) \quad (181)$$

Portanto:

$$\omega = 2w \quad (182)$$

Da Proposição 1.1 temos:

$$\text{grad}(v \cdot v) = 2(\text{grad}(v))^T v \quad (183)$$

Logo,

$$2Wv = Lv - \frac{1}{2}grad(|v|^2) \quad (184)$$

Do Teorema 1.13 e de (184) segue que:

$$\dot{v} = v' + \frac{1}{2}grad(|v|^2) + \omega \times v \quad (185)$$

Da Proposição 1.1, temos que:

$$rot(\dot{v}) = rot(v') + rot(\omega \times v) \quad (186)$$

Ainda, da Proposição 1.1 segue que:

$$rot(\omega \times v) = div(v)\omega + grad(\omega)v - div(\omega)v - grad(v)\omega \quad (187)$$

Agora, observemos que:

$$div(\omega) = 0 \quad (188)$$

Desta forma, a equação (187) se torna:

$$rot(\omega \times v) = div(v)\omega + grad(\omega)v - L\omega \quad (189)$$

Substituindo a equação (189) na equação (186) temos:

$$rot(\dot{v}) = \omega' + div(v)\omega + grad(\omega)v - L\omega \quad (190)$$

Em particular, se o campo de velocidades se referir ao movimento de um fluido incompressível, então:

$$rot(\dot{v}) = \dot{\omega} - L\omega \quad (191)$$

Novamente, da Proposição 1.1 temos:

$$\operatorname{div}(v \otimes \omega) = v \operatorname{div}(\omega) + \operatorname{grad}(v)\omega \quad (192)$$

Porém, notemos que, para todo $a \in V$:

$$\operatorname{div}(v \otimes \omega)a = (a \cdot \omega)\operatorname{div}(v) \quad (193)$$

Mais uma vez, se v for o campo de velocidades de um fluido incompressível, temos que:

$$\operatorname{div}(v \otimes \omega) = 0 \quad (194)$$

Portanto, para fluidos incompressíveis, temos, a partir das equações (188), (192) e (194) que:

$$L\omega = 0 \quad (195)$$

Isto posto, consideremos as equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em sua forma adimensional:

$$\begin{aligned} v' + \operatorname{grad}(v)v &= \frac{1}{Re}\Delta v - \operatorname{grad}(\pi) + b \\ \operatorname{div}(v) &= 0 \end{aligned} \quad (196)$$

Agora, suponhamos que b é uma força conservativa com potencial β . Então:

$$-\operatorname{grad}(\pi) + b = \operatorname{grad}(\beta - \pi) \quad (197)$$

Assim, chegamos a

$$\dot{v} = \frac{1}{Re}\Delta v + \operatorname{grad}(\beta - \pi) \quad (198)$$

Calculando o rotacional de ambos os lados da equação acima e considerando a

Proposição 1.1, segue que:

$$rot(\dot{v}) = \frac{1}{Re} \Delta rot(v) \quad (199)$$

Substituindo as equações (191) e (195) na equação (199), chegamos à Equação de Transporte da Vorticidade:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad (200)$$

3.2 Função de corrente

Nesta seção, reduziremos o escopo de nosso objeto de estudo. Para isto, analisaremos um movimento de um fluido incompressível cujo campo de velocidades v é plano. Mais especificamente, consideraremos $v = (v_1, v_2, 0)$ com v_1 e v_2 não dependendo da coordenada x_3 . Sendo assim, iniciaremos nosso estudo através da conceituação de diferenciais. Em Cálculo, utilizamos o termo diferencial para nos referirmos a uma mudança infinitesimal em alguma quantidade variando. Por exemplo, se x é uma variável, então denotamos uma variação infinitamente pequena em x por dx . No caso de função $f : V \rightarrow V$ escrevemos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \quad (201)$$

Ainda, em Leithold (1994) está demonstrado que (dx_1, dx_2, dx_3) é o vetor tangente ao gráfico de f em (x_1, x_2, x_3) .

Uma expressão diferencial

$$A(x_1, x_2)dx_1 + B(x_1, x_2)dx_2 \quad (202)$$

é uma diferencial exata se existir alguma função Ψ tal que:

$$d\Psi = A(x_1, x_2)dx_1 + B(x_1, x_2)dx_2 \quad (203)$$

Uma equação diferencial da forma

$$A(x_1, x_2)dx_1 + B(x_1, x_2)dx_2 = 0 \quad (204)$$

é chamada de equação exata se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

Teorema 3.1. *Sejam $A(x_1, x_2)$ e $B(x_1, x_2)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular $R = [a, b] \times [c, d]$. Então, uma condição necessária e suficiente para que a equação*

$$A(x_1, x_2)dx_1 + B(x_1, x_2)dx_2 = 0 \quad (205)$$

seja exata é

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{\partial B}{\partial x_1} \quad (206)$$

O próximo resultado, cuja demonstração se encontra em Boyce e DiPrima (2010), será importante para a formulação do conceito de função de corrente.

Agora, retomemos o campo de velocidades $v = (v_1, v_2, 0)$. Então, a equação (162) nos leva a

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 \quad (207)$$

Daí:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \quad (208)$$

Logo, a expressão $v_1 dx_2 - v_2 dx_1$ é exata. Desta forma, pelo Teorema 3.1 existe uma função escalar Ψ tal que:

$$v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \quad v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \quad (209)$$

Tendo em vista que $d\Psi = v_1 dx_2 - v_2 dx_1$ segue que:

$$\Psi - \Psi_0 = \int_C v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = \int_C (v_1, v_2) \cdot (dx_2, -dx_1) \quad (210)$$

onde Ψ_0 é uma constante e C é a linha que liga algum ponto de referência O a $P = (x_1, x_2)$. Deste modo, observe que ao trocarmos v_1 e v_2 por Ψ estaremos simplificando a análise do campo v .

Isto posto, tomemos dois caminhos C_1 e C_2 ligando O a P e tomemos M como a parte do plano limitada por estes dois caminhos, conforme indica a Figura 4.

Suponhamos que a ∂M está orientada no sentido anti-horário. Então:

$$\int_{\partial M} v \cdot ndA = \int_{\partial C_2} v \cdot ndA - \int_{\partial C_1} v \cdot ndA \quad (211)$$

Do Teorema da Divergência, temos que:

$$\int_{\partial M} v \cdot ndA = \int_M \text{div}(v) dV = 0 \quad (212)$$

pois v é um campo de velocidades de um fluido incompressível.

Assim:

$$\int_{\partial C_1} v \cdot ndA = \int_{\partial C_2} v \cdot ndA \quad (213)$$

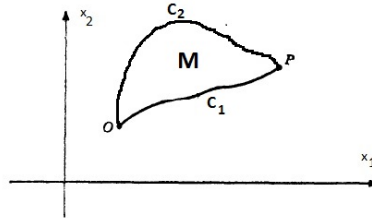
Ou seja, neste caso, o fluxo passando através de um caminho é independente do caminho adotado. Porém, em Leithold (1994) é mostrado que, se existe um vetor $n = (n_1, n_2)$ tal que $n \cdot t = 0$, onde t é o vetor tangente ao gráfico de um campo, então n é normal a este campo. Em particular, notemos que (dx_1, dx_2) é tangente ao campo v . Ainda:

$$(dx_1, dx_2) \cdot (dx_2, -dx_1) = 0 \quad (214)$$

Logo, $(dx_2, -dx_1)$ são as coordenadas do vetor normal a v . Deste modo, considerando a independência do fluxo em relação ao caminho adotado e a equação (210), segue que $\Psi - \Psi_0$ está bem definida e depende apenas do ponto P . Uma curva cuja tangente é paralela ao campo v , em cada ponto, é denominada linha de fluxo ou linha de corrente de v . Ou seja, as linhas de corrente $s = s(x_1(t), x_2(t))$ são soluções da equação diferencial:

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(s(t)) \quad (215)$$

Figura 4 - Representação da superfície M no plano x_1x_2



Fonte: O autor, 2019.

Em particular, da Regra da Cadeia e da equação (209) temos:

$$\frac{d}{dt}\Psi(s(t)) = \nabla\Psi(s(t)) \cdot v(s(t)) = 0 \quad (216)$$

Assim, $\Psi(s(t))$ é uma constante. A função Ψ é denominada função de corrente e, pelo exposto, é constante em toda linha de corrente s . A partir deste momento, vamos relacionar a função de corrente com a vorticidade de um movimento. Para isto, observemos o resultado a seguir:

Proposição 3.1. *Dado um campo vetorial de velocidades v temos:*

$$\text{rot}(\text{rot}(v)) = \text{grad}(\text{div}(v)) - \Delta v \quad (217)$$

Demonstração. Observemos que, para todo i temos:

$$[\text{grad}(\text{div}(v))]_i = \frac{\partial(\text{div}(v))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (218)$$

E:

$$(\Delta(v))_i = \Delta v_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (219)$$

Portanto,

$$[\text{grad}(\text{div}(v)) - \Delta v]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (220)$$

Por outro lado:

$$[\text{rot}(\text{rot}(v))]_1 = \frac{\partial(\text{rot}(v))_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(\text{rot}(v))_2}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \quad (221)$$

Assim, a partir das equações (220) e (221) temos que

$$[\text{rot}(\text{rot}(v))]_1 = [\text{grad}(\text{div}(v)) - \Delta v]_1 \quad (222)$$

De maneira análoga, prova-se que $[\text{rot}(\text{rot}(v))]_i = [\text{grad}(\text{div}(v)) - \Delta v]_i$, $i = 2, 3$.

□

Em particular, para um fluido incompressível segue que $\text{rot}(\text{rot}(v)) = -\Delta v$. Agora, consideremos o campo vetorial $u : V \rightarrow V$ dado por $u(\xi) = (0, 0, \Psi(\xi))$, com ξ não dependendo da coordenada x_3 . Então:

$$\text{div}(u) = 0 \quad (223)$$

Daí:

$$\text{rot}(\text{rot}(u)) = -\Delta u \quad (224)$$

Porém, da equação (209) temos que:

$$\text{rot}(u) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, 0 \right) = (v_1, v_2, 0) = v \quad (225)$$

Desta forma, $\text{rot}(v) = -\Delta u$.

Por fim, notemos que:

$$\omega = \text{rot}(v) = \left(0, 0, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad (226)$$

Desta maneira, se $v = (v_1, v_2, 0)$ é um campo escalar cujas coordenadas não de-

pendam de x_3 , então $\omega_3 = -\Delta\Psi$, onde:

$$\omega_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (227)$$

E, portanto, chegamos a uma relação entre vorticidade e função de corrente para este caso específico.

4 O MÉTODO DO TUBO DE TRAJETÓRIAS

Neste capítulo, abordaremos um método para a obtenção das soluções das Equações de Navier-Stokes em sua formulação nas variáveis vorticidade e função de corrente, denominado Método do Tubo de Trajetórias. Tal ferramenta objetiva, com o auxílio do Teorema de Transporte de Reynolds, eliminar a derivada material que surge nas Equações de Navier-Stokes apresentadas no capítulo anterior. Sendo assim, obteremos um esquema numérico e definiremos um domínio de discretização específico para resolvê-lo. Contudo, na resolução do esquema que será apresentado, nos depararemos com alguns obstáculos. Desta maneira, mostraremos maneiras de superá-los visando a aplicação efetiva de nosso método.

Por fim, faremos algumas observações a respeito do custo computacional decorrente da implementação do algoritmo adotado. Assim, incorporaremos técnicas de Computação Paralela com o uso do *OpenMP* e definiremos uma métrica de sua eficiência, conhecida como *speedup*.

4.1 Obtenção do esquema numérico

Seja χ o movimento de um fluido incompressível com campo de velocidades $v = (v_1, v_2, 0)$ sendo que v_1 e v_2 , bem como a pressão π aplicada sobre o fluido não dependam da coordenada x_3 .

Anteriormente, vimos que, nestas condições, a vorticidade ω depende apenas da coordenada ω_3 . Para simplificar a notação, utilizaremos ω para indicar ω_3 . Deste modo, se Ψ for a função de corrente, então as Equações de Navier-Stokes podem ser escritas da seguinte forma adimensional:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \\ \omega = -\Delta \Psi \end{cases} \quad (228)$$

Inicialmente, observemos que:

$$\dot{\omega}(\chi(\xi, t), t) = \frac{\partial}{\partial t}(\omega(\chi(\xi, t), t)) = \text{grad}(\omega(\chi, t)) \cdot \dot{\chi}(\xi, t) + \omega'(\chi, t) \quad (229)$$

Daí:

$$\dot{\omega}(\chi(\xi, t), t) = v(\chi, t) \cdot \text{grad}(\omega(\chi, t)) + \omega'(\chi, t) \quad (230)$$

Agora, consideremos que o movimento está ocorrendo em uma região regular R do espaço euclidiano E . Então, notemos que, ao substituir a segunda equação em (228) na primeira, temos:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + v \cdot \text{grad}(\Delta \Psi) = \frac{1}{Re} \Delta^4 \Psi \quad (231)$$

Deste modo, as equações dadas por (228) são acopladas e altamente dependentes da função de corrente. Portanto, conforme visto em Tannehill (1997) e Charles (2007), métodos numéricos explícitos não são recomendados para resolver tal problema. Além disso, para que o problema esteja bem posto, são necessárias algumas informações adicionais. Assim, o problema a ser analisado é o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \\ \omega = -\Delta \Psi \\ \Psi|_{\partial R} = F \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}|_{\partial R} = V_i, \quad i = 1, 2 \end{array} \right. \quad (232)$$

onde F , V_1 e V_2 são funções conhecidas.

Passemos a desenvolver o método do tubo de trajetórias para abordarmos a equação (232).

Dado um intervalo $[t, t + \Delta t] \subset R$, dizemos que $\Sigma_{[t, t + \Delta t]}$ é uma parte do tubo de trajetórias Σ correspondente ao intervalo $[t, t + \Delta t]$ se

$$\Sigma_{[t, t + \Delta t]} = \{(X, \tilde{t}) \in \Omega_{\tilde{t}} : \tilde{t} \in [t, t + \Delta t]\}$$

Se $\Psi : \Sigma \rightarrow E$ é uma descrição espacial de uma propriedade Ψ do movimento de um corpo material, então:

$$\int_{\Sigma_{[t, t + \Delta t]}} \Psi(X, t) dX dt = \int_t^{t + \Delta t} \int_{\Omega_t} \Psi(X, t) dX dt \quad (233)$$

Proposição 4.1. *Seja $\Psi : \Sigma \rightarrow E$ uma descrição espacial de uma propriedade de um corpo material incompressível cuja imagem é escalar. Então, para quaisquer intervalos de*

tempo $[t, t + \Delta t] \subset R$ temos:

$$\int_{\Sigma_{[t, t + \Delta t]}} \dot{\Psi}(X, t) dX dt = \int_{\Omega_{t + \Delta t}} \Psi(X, t + \Delta t) dX - \int_{\Omega_t} \Psi(X, t) dX \quad (234)$$

Demonstração. Consideremos a função $A : \Sigma \rightarrow E$, dada por

$$A(X, t) = \int_{\Omega_t} \Psi(X, t) dX \quad (235)$$

Então:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi(X, t) dX = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(X, t + \Delta t) - A(X, t)}{\Delta t} = \frac{\partial A(X, t)}{\partial t} \quad (236)$$

Então, do Teorema de Transporte de Reynolds temos que:

$$\int_{\Omega_t} \dot{\Psi} + \Psi \operatorname{div}(v) dX = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dX \quad (237)$$

Logo, como $\operatorname{div}(v) = 0$, segue que:

$$\int_{\Omega_t} \dot{\Psi} dX = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \Psi dX = \frac{\partial A}{\partial t} \quad (238)$$

Portanto, integrando a equação acima no intervalo $[t, t + \Delta t]$ temos:

$$\int_{\Sigma_{[t, t + \Delta t]}} \dot{\Psi}(X, t) dX dt = A(X, t + \Delta t) - A(X, t) \quad (239)$$

ou seja,

$$\int_{\Sigma_{[t, t + \Delta t]}} \dot{\Psi}(X, t) dX dt = \int_{\Omega_{t + \Delta t}} \Psi(X, t + \Delta t) dX - \int_{\Omega_t} \Psi(X, t) dX \quad (240)$$

□

Deste modo, observemos que:

$$\int_{\Sigma_{[t, t + \Delta t]}} \dot{\omega}(X, t) dX dt = \int_{\Omega_{t + \Delta t}} \omega(X, t + \Delta t) dX - \int_{\Omega_t} \omega(X, t) dX \quad (241)$$

Daí a primeira equação de (228), ao ser integrada no tubo de trajetórias, se torna:

$$\int_{\Omega_{t+\Delta t}} \omega(X, t + \Delta t) dX - \int_{\Omega_t} \omega(X, t) dX = \frac{1}{Re} \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_t} \Delta\omega(X, t) dX dt \quad (242)$$

Isto posto, faremos uma aproximação na integral na variável temporal do lado direito da equação (242). Conforme Ruggiero e Lopes (1993), temos a seguinte forma:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega_t} \Delta\omega dX dt \approx \Delta t \int_{\Omega_{t+\Delta t}} \Delta\omega(X, t + \Delta t) dX \quad (243)$$

Assim, a equação (242) pode ser aproximada por:

$$\int_{\Omega_{t+\Delta t}} \omega(X, t + \Delta t) dX - \int_{\Omega_t} \omega(X, t) dX = \frac{\Delta t}{Re} \int_{\Omega_{t+\Delta t}} \Delta\omega(X, t + \Delta t) dX \quad (244)$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega_{t+\Delta t}} \left(\omega(X, t + \Delta t) - \frac{\Delta t}{Re} \Delta\omega(X, t + \Delta t) \right) dX = \int_{\Omega_t} \omega(X, t) dX \quad (245)$$

O conjunto Ω_t , indicado na equação (245), pode ser determinado através das trajetórias, partindo-se de $\Omega_{t+\Delta t}$ no instante $t + \Delta t$ e terminando nos pontos de Ω_t no tempo t .

Mais especificamente, dizemos que Ω_t é a imagem de $\Omega_{t+\Delta t}$ através de uma função injetora $\varphi_t : \Omega_{t+\Delta t} \subset E \rightarrow E$ dada por $\varphi(X) = \tilde{X} \in \Omega_t$. Neste caso, \tilde{X} é a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}(\xi, t)}{dt} = v(\tilde{X}(\xi, t)) \\ \tilde{X}(\xi, t + \Delta t) = X \end{cases} \quad (246)$$

Além disso, como o movimento é isocórico, segue que $vol(\Omega_t) = vol(\Omega_{t+\Delta t})$. Daí, a equação (245) se torna:

$$\frac{1}{vol(\Omega_{t+\Delta t})} \int_{\Omega_{t+\Delta t}} \left(\omega(X, t + \Delta t) - \frac{\Delta t}{Re} \Delta\omega(X, t + \Delta t) \right) dX = \frac{1}{vol(\Omega_t)} \int_{\Omega_t} \omega(\tilde{X}, t) d\tilde{X} \quad (247)$$

Se Ω_t e $\Omega_{t+\Delta t}$ forem suficientemente pequenos, então o Teorema da Localização

permite aproximar a equação acima aplicando:

$$\omega(X, t + \Delta t) - \frac{\Delta t}{Re} \Delta \omega(X, t + \Delta t) = \omega(\tilde{X}, t) \quad (248)$$

Uma vez estabelecido o método, passaremos a aplicá-lo em domínios retangulares. Assim $\Omega_{t+\Delta t}$ é um retângulo da forma $[a, b] \times [c, d]$, para reais a, b, c e d . Para discretizar tal domínio, dado um inteiro $M > 0$, utilizaremos uma partição de $[a, b]$ com M pontos interiores, representada por $a = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = b$, tal que $x_{r+1} - x_r = \Delta x$, para todo $r = 0, 1, \dots, M$, onde

$$\Delta x = \frac{b - a}{M + 1} \quad (249)$$

Analogamente, dado um inteiro positivo N , o intervalo $[c, d]$ é particionado em $N + 1$ sub-intervalos iguais $c = y_0 < y_1 < \dots < y_N < y_{N+1} = d$, de maneira que $y_{s+1} - y_s = \Delta y$ para $s = 0, 1, 2, \dots, N$. Neste caso:

$$\Delta y = \frac{c - d}{N + 1} \quad (250)$$

Este procedimento cria uma malha com MN nós internos, $2(M + N)$ nós de fronteira e 4 nós de canto. Denotaremos por (x_r, y_s) ao ponto da malha localizado em $(a + r\Delta x, c + s\Delta y)$.

Usualmente, discretizamos o eixo temporal de maneira similar ao utilizarmos um espaçamento $\Delta t > 0$. Assim, dado um intervalo de tempo Δt , associamos o passo n com o tempo t através da expressão $t_n = n\Delta t$.

Utilizaremos a notação $f_{r,s}^n$ para a imagem de uma função arbitrária f no ponto (x_r, y_s, t_n) localizada no domínio espaço-tempo do problema considerado. Portanto, o par $(\omega_{r,s}^n, \Psi_{r,s}^n)$ será a aproximação da solução do problema dado pela equação (228) no ponto $(a + r\Delta x, c + s\Delta y, n\Delta t)$.

Se fixarmos um tempo específico na malha temporal, conseguiremos uma subdivisão do domínio Ω conforme ilustrado na Figura 5, onde cada elemento de Ω é um bloco. Neste tipo de divisão, temos alguns tipos de blocos:

a) internos da forma $\Omega_{r,s} = [x_{r-1/2}, x_{r+1/2}] \times [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}]$, onde $x_{r\pm 1/2} = a + (r \pm 1/2)\Delta x$ e $y_{s\pm 1/2} = c + (s \pm 1/2)\Delta y$, para $r = 1, 2, \dots, M$ e $s = 1, 2, \dots, N$, cujo nó é o ponto (x_r, y_s) ;

b) de fronteira da forma $\Omega_{0,s} = [x_0, x_{1/2}] \times [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}]$, $s = 1, 2, \dots, N$, são aqueles adjacentes ao lado vertical esquerdo de Ω . O nó deste bloco é o ponto (x_0, y_s) ;

c) de fronteira da forma $\Omega_{M+1,s} = [x_{M+1/2}, x_{M+1}] \times [y_{s-1/2}, y_{s+1/2}]$, $s =$

$1, 2, \dots, N$, são aqueles adjacentes ao lado vertical direito de Ω . O nó deste bloco é o ponto (x_{M+1}, y_s) ;

d) de fronteira da forma $\Omega_{r,0} = [x_{r-1/2}, x_{r+1/2}] \times [y_0, y_{1/2}]$, $r = 1, 2, \dots, M$, são aqueles adjacentes ao lado inferior de Ω . O nó deste bloco é o ponto (x_r, y_0) ;

e) de fronteira da forma $\Omega_{r,N+1} = [x_{r-1/2}, x_{r+1/2}] \times [y_{N+1/2}, y_{N+1}]$, $r = 1, 2, \dots, M$, são aqueles adjacentes ao lado superior de Ω . O nó deste bloco é o ponto (x_r, y_{N+1}) e

f) de canto da forma $\Omega_{0,0} = [x_0, x_{1/2}] \times [y_0, y_{1/2}]$, $\Omega_{0,N+1} = [x_0, x_{1/2}] \times [y_{N+1/2}, y_{N+1}]$, $\Omega_{M+1,0} = [x_{M+1/2}, x_{M+1}] \times [y_0, y_{1/2}]$ e $\Omega_{M+1,N+1} = [x_{M+1/2}, x_{M+1}] \times [y_{N+1/2}, y_{N+1}]$, cujos nós são, respectivamente, (x_0, y_0) , (x_0, y_{N+1}) , (x_{M+1}, y_0) e (x_{M+1}, y_{N+1}) .

Por fim, supomos que $\Delta x \Delta y$ seja um valor suficientemente pequeno. Daí, o Método do Tubo de Trajetórias consiste do seguinte esquema numérico:

$$\begin{cases} \omega_{r,s}^{n+1} - \frac{\Delta t}{Re} \Delta \omega_{r,s}^{n+1} = \omega^n(\tilde{X}, t) \\ \omega_{r,s}^{n+1} = -\Delta \Psi_{r,s}^{n+1} \end{cases} \quad (251)$$

onde \tilde{X} é solução do sistema dado pela equação (246), acrescido com as condições iniciais e de contorno dadas em (232).

4.2 Determinação da vorticidade no tempo passado

Uma vez estabelecidas as equações discretizadas do método que adotaremos, passemos a descrever o processo para a determinação de soluções numéricas acrescentando algumas considerações importantes. Desta forma, para utilizarmos o Método do Tubo de Trajetórias, assumiremos que conhecemos os valores da função de corrente e da vorticidade em um passo temporal n . Sendo assim, para obtermos tais valores no passo $n + 1$, devemos inicialmente observar a primeira equação do sistema (251). Então, dada uma malha numérica, para deduzirmos os valores de seus nós no passo temporal $n + 1$ é necessário deduzir onde tais pontos estavam no passo n . Em (251), tais pontos são denotados por \tilde{X} . Para determinar cada \tilde{X} , devemos resolver o sistema (246) como já observado. Para isto, utilizaremos o método de Runge-Kutta de quarta ordem, conforme descrito em Ruggiero e Lopes (1993).

Contudo, isto nos leva a um segundo problema, tendo em vista que \tilde{X} não é, necessariamente, um nó da malha no passo n . Sendo assim, utiliza-se um processo de busca binária como o descrito por Roberts (1998). Caso algum \tilde{X} esteja fora da malha, interrompe-se o processo e recomeça-se utilizando um passo temporal menor ou uma quantidade maior de pontos do domínio a ser discretizado.

Tendo verificado que todo \tilde{X} está na malha, devemos determinar o valor da vorticidade em cada um deles para descrevermos o segundo lado da primeira equação de (251). Para tanto, utilizaremos uma fórmula de interpolação deduzida originalmente por Sheppard (1968) e, posteriormente, simplificada por Henderson et al. (2017). Sendo assim, considere que \tilde{X} está na célula $\Omega_{i,j}$ no passo n . No mesmo passo, denotemos seus blocos vizinhos por $\Omega_{i+1,j}, \Omega_{i-1,j}, \Omega_{i,j+1}$ e $\Omega_{i,j-1}$ com nós $X_{i+1,j}, X_{i-1,j}, X_{i,j+1}$ e $X_{i,j-1}$, respectivamente. Então:

$$\omega(\tilde{X}) = \begin{cases} \frac{\sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} \omega(X_{k,l}) d_{k,l}^{-1}}{\sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} d_{k,j}^{-1}} & \text{se } \tilde{X} \neq X_{i,j} \\ \omega(X_{i,j}) & \text{se } \tilde{X} = X_{i,j} \end{cases} \quad (252)$$

onde $d_{k,l}$ mede a distância Euclidiana entre os pontos \tilde{X} e $X_{k,l}$.

A expressão (252) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\omega(\tilde{X}) = \begin{cases} \sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} \omega(X_{k,l}) \delta_{k,l} & \text{se } \tilde{X} \neq X_{i,j} \\ \omega(X_{i,j}) & \text{se } \tilde{X} = X_{i,j} \end{cases} \quad (253)$$

onde

$$\delta_{k,l} = \frac{1}{\left(\sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} d_{k,j}^{-1} \right) d_{k,l}} \quad (254)$$

Ainda, observe que:

$$\sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{k=i-1}^{i+1} \delta_{k,j} = 1 \quad (255)$$

Em outras palavras, se $\tilde{X} \neq X_{i,j}$, então:

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{X}) = & \omega(X_{i,j}) \delta_{i,j} + \omega(X_{i-1,j}) \delta_{i-1,j} + \omega(X_{i+1,j}) \delta_{i+1,j} + \\ & + \omega(X_{i,j-1}) \delta_{i,j-1} + \omega(X_{i,j+1}) \delta_{i,j+1} \end{aligned} \quad (256)$$

onde $\delta_{i,j}, \delta_{i-1,j}, \delta_{i+1,j}, \delta_{i,j-1}$ e $\delta_{i,j+1}$ são pesos positivos dados por:

$$\delta_{i,j} = \frac{1}{1 + \frac{d_{i,j}}{d_{i-1,j}} + \frac{d_{i,j}}{d_{i+1,j}} + \frac{d_{i,j}}{d_{i,j-1}} + \frac{d_{i,j}}{d_{i,j+1}}} \quad (257)$$

$$\delta_{i-1,j} = \frac{1}{1 + \frac{d_{i-1,j}}{d_{i,J}} + \frac{d_{i-1,j}}{d_{i+1,J}} + \frac{d_{i-1,j}}{d_{i,J-1}} + \frac{d_{i-1,j}}{d_{i,J+1}}} \quad (258)$$

$$\delta_{i+1,j} = \frac{1}{1 + \frac{d_{i+1,j}}{d_{i,J}} + \frac{d_{i+1,j}}{d_{i-1,J}} + \frac{d_{i+1,j}}{d_{i,J-1}} + \frac{d_{i+1,j}}{d_{i,J+1}}} \quad (259)$$

$$\delta_{i,j+1} = \frac{1}{1 + \frac{d_{i,j+1}}{d_{i,J}} + \frac{d_{i,j+1}}{d_{i+1,J}} + \frac{d_{i,j+1}}{d_{i,J-1}} + \frac{d_{i,j+1}}{d_{i-1,J+1}}} \quad (260)$$

$$\delta_{i,j-1} = \frac{1}{1 + \frac{d_{i,j-1}}{d_{i-1,J}} + \frac{d_{i,j-1}}{d_{i+1,J}} + \frac{d_{i,j-1}}{d_{i,J}} + \frac{d_{i,j-1}}{d_{i,J+1}}} \quad (261)$$

satisfazendo

$$\delta_{i,j} + \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j} + \delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1} = 1 \quad (262)$$

Agora, consideremos a seguinte diferença:

$$e_{i,j}(\tilde{X}) = |\omega(\tilde{X}) - \omega(X_{i,j})| \quad (263)$$

para $\tilde{X} \neq X_{i,j}$. Então, da série de Taylor, temos que:

$$\omega(X_{i-1,j}) = \omega(X_{i,j}) + O(\Delta x) \quad (264)$$

$$\omega(X_{i+1,j}) = \omega(X_{i,j}) + O(\Delta x) \quad (265)$$

$$\omega(X_{i,j-1}) = \omega(X_{i,j}) + O(\Delta y) \quad (266)$$

$$\omega(X_{i,j+1}) = \omega(X_{i,j}) + O(\Delta y) \quad (267)$$

Substituindo as equações (264) a (267) na equação (256) temos:

$$\omega(\tilde{X}) = (\delta_{i,j} + \delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j} + \delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1})\omega(X_{i,j}) + (\delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j})O(\Delta x) + (\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1})O(\Delta y) \quad (268)$$

Considerando a equação (262), temos que:

$$\omega(\tilde{X}) - \omega(X_{i,j}) = (\delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j})O(\Delta x) + (\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1})O(\Delta y) \quad (269)$$

Logo,

$$e_{i,j}(\tilde{X}) \leq O(\Delta x) + O(\Delta y) \quad (270)$$

Isto posto, observemos que $\omega(\tilde{X})$ é o valor aproximado da vorticidade no ponto \tilde{X} . Sendo assim, considere $\omega_e(\tilde{X})$ o valor exato da vorticidade em tal ponto e

$$E(\tilde{X}) = |\omega(\tilde{X}) - \omega_e(\tilde{X})| \quad (271)$$

o erro absoluto cometido nesta aproximação. Em particular, note que $\omega(\tilde{X}) = \omega_e(\tilde{X})$ se $\tilde{X} = X_{i,j}$.

Desta forma, a expansão de Taylor leva a:

$$\omega_e(\tilde{X}) - \omega(\tilde{X}) = \omega(X_{i,j}) - \omega(\tilde{X}) + R(\tilde{X} - X_{i,j}) \quad (272)$$

onde $R(\tilde{X} - X_{i,j}) \rightarrow 0$ quando $\tilde{X} \rightarrow X_{i,j}$. Daí:

$$E(\tilde{x}) \leq O(\Delta x) + O(\Delta y) + R(\tilde{X} - X_{i,j}) \quad (273)$$

Portanto, se Δx e Δy forem suficientemente pequenos, então o erro de aproximação se torna desprezível. Sendo assim, adotaremos o seguinte esquema numérico:

$$\omega(\tilde{X}) = \omega_{i,j}^n \delta_{i,j} + \omega_{i-1,j}^n \delta_{i-1,j} + \omega_{i+1,j}^n \delta_{i+1,j} + \omega_{i,j-1}^n \delta_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}^n \delta_{i,j+1}, \text{ se } \tilde{X} \neq X_{i,j} \quad (274)$$

$$\omega(\tilde{X}) = \omega_{i,j}^n, \text{ se } \tilde{X} = X_{i,j} \quad (275)$$

Agora, voltemos para a equação (251). Podemos reescrever a primeira equação deste sistema seguinte forma:

$$Re \omega_{r,s}^{n+1} - \Delta t \Delta \omega_{r,s}^{n+1} = Re \omega(\tilde{X}, t) \quad (276)$$

Usando as equações dadas no Apêndice A, podemos reescrever a equação (276) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Re \omega_{r,s}^{n+1} - \Delta t & \left[\frac{-\omega_{r-2,s}^{n+1} + 16\omega_{r-1,s}^{n+1} - 30\omega_{r,s}^{n+1} + 16\omega_{r+1,s}^{n+1} - \omega_{r+2,s}^{n+1}}{12\Delta x^2} \right] \\ & - \Delta t \left[\frac{-\omega_{r,s-2}^{n+1} + 16\omega_{r,s-1}^{n+1} - 30\omega_{r,s}^{n+1} + 16\omega_{r,s+1}^{n+1} - \omega_{r,s+2}^{n+1}}{12\Delta y^2} \right] \\ & + O(\Delta x^4) + O(\Delta y^4) = Re \omega(\tilde{X}, t), \quad r = 2, \dots, M-1 \text{ e } s = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (277)$$

$$\begin{aligned} Re \omega_{r,s}^{n+1} - \Delta t & \left[\frac{10\omega_{r\mp 1,s}^{n+1} - 15\omega_{r,s}^{n+1} - 4\omega_{r\pm 1,s}^{n+1} + 14\omega_{r\pm 2,s}^{n+1} - 6\omega_{r\pm 3,s}^{n+1} + \omega_{r\pm 4,s}^{n+1}}{12\Delta x^2} \right] \\ & - \Delta t \left[\frac{10\omega_{r,s\mp 1}^{n+1} - 15\omega_{r,s}^{n+1} - 4\omega_{r,s\pm 1}^{n+1} + 14\omega_{r,s\pm 2}^{n+1} - 6\omega_{r,s\pm 3}^{n+1} - \omega_{r,s\pm 4}^{n+1}}{12\Delta y^2} \right] \\ & + O(\Delta x^4) + O(\Delta y^4) = Re \omega(\tilde{X}, t), \quad r = 1, \dots, M \text{ e } s = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (278)$$

De maneira análoga, a equação de Poisson constante em (251) pode ser discretizada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \frac{-\Psi_{r-2,s}^{n+1} + 16\Psi_{r-1,s}^{n+1} - 30\Psi_{r,s}^{n+1} + 16\Psi_{r+1,s}^{n+1} - \Psi_{r+2,s}^{n+1}}{12\Delta x^2} \\ & + \frac{-\Psi_{r,s-2}^{n+1} + 16\Psi_{r,s-1}^{n+1} - 30\Psi_{r,s}^{n+1} + 16\Psi_{r,s+1}^{n+1} - \Psi_{r,s+2}^{n+1}}{12\Delta y^2} + \omega_{r,s}^{n+1} \\ & + O(\Delta x^4) + O(\Delta y^4) = 0, \quad r = 2, \dots, M-1 \text{ e } s = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (279)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{10\Psi_{r\mp 1,s}^{n+1} - 15\Psi_{r,s}^{n+1} - 4\Psi_{r\pm 1,s}^{n+1} + 14\Psi_{r\pm 2,s}^{n+1} - 6\Psi_{r\pm 3,s}^{n+1} + \Psi_{r\pm 4,s}^{n+1}}{12\Delta x^2} \\
& + \frac{10\Psi_{r,s\mp 1}^{n+1} - 15\Psi_{r,s}^{n+1} - 4\Psi_{r,s\pm 1}^{n+1} + 14\Psi_{r,s\pm 2}^{n+1} - 6\Psi_{r,s\pm 3}^{n+1} - \Psi_{r,s\pm 4}^{n+1}}{12\Delta y^2} + \omega_{r,s}^{n+1} \\
& + O(\Delta x^4) + O(\Delta y^4) = 0, \quad r = 1, \dots, M \text{ e } s = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{280}$$

As variáveis procuradas nas equações (277) e (278) são os valores de ω^{n+1} nos nós internos da malha. Porém, estas equações exigem os valores de ω^{n+1} nos pontos da fronteira. Por outro lado, por meio das equações (279) e (280) busca-se determinar os valores de ω^{n+1} e Ψ^{n+1} em nós internos e, para isso, é necessário conhecermos os valores de Ψ^{n+1} em pontos da fronteira.

As condições de fronteira explicitadas em (232) incluem informações relacionadas à função de corrente em nós da fronteira. Contudo, desconhecemos os valores da vorticidade nestes nós. Para preencher esta lacuna, muitas condições de fronteira computacionais para a vorticidade foram estabelecidas como pode ser visto em Spetz (1998), Fornberg (1996), Evans (2010), Ponce (2006), Gilbarg e Trudinger (1977), Smith (1985) e Figueiredo (1987).

Além disso, devemos ressaltar que a interpolação apresentada em (253) não se aplica se \tilde{X} estiver em um bloco de fronteira ou de canto. Se isso ocorrer, então assumiremos que $\omega(\tilde{X}) = \omega(X_{r,s})$, ou seja, o valor da vorticidade em \tilde{X} é igual ao valor desta função no nó do bloco. Sendo assim, verifiquemos como calcular a vorticidade em tais pontos ao longo do tempo, iniciando pelas denominadas fórmulas de Jensen, apresentadas por Spetz (1998).

Para chegarmos a elas, observemos que, da série de Taylor, temos:

$$\Psi_{1,s}^{n+1} - \frac{1}{8}\Psi_{2,s}^{n+1} = \frac{7}{8}\Psi_{0,s}^{n+1} + \frac{6}{8}\Delta x \frac{\partial \Psi_{0,s}^{n+1}}{\partial x} + \frac{2\Delta x^2}{8} \frac{\partial^2 \Psi_{0,s}^{n+1}}{\partial x^2} + O(\Delta x^4) \tag{281}$$

Lembrando da equação de Poisson de (251), podemos reescrever (281) da seguinte forma:

$$\Psi_{1,s}^{n+1} - \frac{1}{8}\Psi_{2,s}^{n+1} = \frac{7}{8}\Psi_{0,s}^{n+1} + \frac{6}{8}\Delta x \frac{\partial \Psi_{0,s}^{n+1}}{\partial x} + \frac{2\Delta x^2}{8} \left(-\omega_{0,s}^{n+1} - \frac{\partial^2 \Psi_{0,s}^{n+1}}{\partial y^2} \right) + O(\Delta x^4) \tag{282}$$

Multiplicando a equação (282) por $8/2\Delta x^2$ chegamos à fórmula de Jensen:

$$\omega_{0,s}^{n+1} = \frac{7\Psi_{0,s}^{n+1} - 8\Psi_{1,s}^{n+1} + \Psi_{2,s}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{3}{\Delta x} \frac{\partial \Psi_{0,s}^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi_{0,s}^{n+1}}{\partial y^2} + O(\Delta x^2) \tag{283}$$

Perceba que $\Psi_{0,s}^{n+1}$, $\partial^2\Psi_{0,s}^{n+1}/\partial y^2$ e $\partial\Psi_{0,s}^{n+1}/\partial x$ são obtidos de (232). Além disso, a fórmula de Jensen usa os valores da função de corrente em dois pontos internos da malha discretizada. Assim, o sistema de equações descrito em (277), (278), (279) e (280) é perfeitamente compatível.

De maneira análoga, obtemos a fórmula de Jensen para outros lados da fronteira de Ω :

$$\omega_{M+1,s}^{n+1} = \frac{7\Psi_{M+1,s}^{n+1} - 8\Psi_{M,s}^{n+1} + \Psi_{M-1,s}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{3}{\Delta x} \frac{\partial\Psi_{M+1,s}^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial^2\Psi_{M+1,s}^{n+1}}{\partial y^2} + O(\Delta x^2) \quad (284)$$

$$\omega_{r,0}^{n+1} = \frac{7\Psi_{r,0}^{n+1} - 8\Psi_{r,1}^{n+1} + \Psi_{r,2}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{3}{\Delta x} \frac{\partial\Psi_{r,0}^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial^2\Psi_{r,0}^{n+1}}{\partial y^2} + O(\Delta x^2) \quad (285)$$

$$\omega_{r,N+1}^{n+1} = \frac{7\Psi_{r,N+1}^{n+1} - 8\Psi_{r,N}^{n+1} + \Psi_{r,N-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{3}{\Delta x} \frac{\partial\Psi_{r,N+1}^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial^2\Psi_{r,N+1}^{n+1}}{\partial y^2} + O(\Delta x^2) \quad (286)$$

Observe que as equações (277), (278), (279) e (280) não exigem valores da vorticidade em blocos de canto. Contudo, como observado anteriormente, necessitaremos de tais valores. Deste modo, descreveremos uma formulação usada para aproximar ω em tais nós. Para este fim, aproximaremos a equação de Poisson em (251) utilizando um esquema de diferenças finitas de nove pontos descrito por Rosser (1975), o qual supõe que os blocos de malha são quadrados, ou seja, $\Delta x = \Delta y = h$. Observamos, ainda, que tal esquema é de quarta ordem, o que garante melhor acurácia numérica: Assim:

$$\begin{aligned} &4(\Psi_{r+1,s} + \Psi_{r,s+1} + \Psi_{r-1,s} + \Psi_{r,s-1}) + \Psi_{r+1,s+1} + \Psi_{r-1,s+1} + \Psi_{r-1,s-1} + \Psi_{r+1,s-1} \\ &- 20\Psi_{r,s} - \frac{h^2}{15}(\omega_{r+1,s} + \omega_{r,s+1} + \omega_{r-1,s} + \omega_{r,s-1} + \omega_{r+1,s+1} + \omega_{r-1,s+1} + \omega_{r-1,s-1} \\ &\quad + \omega_{r+1,s-1} + 82\Psi_{r,s}) + O(h^4) \end{aligned} \quad (287)$$

Então, por exemplo, centrando este esquema no ponto $(x_r, y_s) = (x_1, y_1)$ obtemos o seguinte valor de ω^{n+1} no nó do bloco $\Omega_{0,0} = [x_0, x_{1/2}] \times [y_0, y_{1/2}]$:

$$\begin{aligned} \omega_{0,0}^{n+1} = &-\frac{60}{h^2}(\Psi_{2,1}^{n+1} + \Psi_{1,2}^{n+1} + \Psi_{0,1}^{n+1} + \Psi_{1,0}^{n+1}) - \frac{15}{h^2}(\Psi_{2,2}^{n+1} + \Psi_{0,2}^{n+1} \\ &+ \Psi_{0,0}^{n+1} + \Psi_{2,0}^{n+1} - 20\Psi_{1,1}^{n+1}) - (\omega_{2,1}^{n+1} + \omega_{1,2}^{n+1} + \omega_{0,1}^{n+1} + \omega_{1,0}^{n+1}) \\ &-(\omega_{2,2}^{n+1} + \omega_{0,2}^{n+1} + \omega_{2,2}^{n+1} + 82\omega_{1,1}^{n+1}) + O(h^2) \end{aligned} \quad (288)$$

Os valores $\omega_{0,N+1}^{n+1}$, $\omega_{M+1,0}^{n+1}$ e $\omega_{M+1,N+1}^{n+1}$ são obtidos de maneira similar, centrado o esquema de nove pontos em (x_1, y_N) , (x_M, y_1) e (x_M, y_N) , respectivamente.

4.3 Aproximação das coordenadas do campo de velocidades

Agora, observemos que, de acordo com a equação (209), os campos de velocidade v_1 e v_2 dependem da função de corrente Ψ . Então, ao resolvermos as equações (277) e (278), não conhecemos os valores de v_1 e v_2 no intervalo $(t, t + \Delta t]$. Portanto, para determinarmos \tilde{X} em (246) necessitamos de uma aproximação adequada para o sistema de equações diferenciais ordinárias. Assim, para todo $\tau \in [t, t + \Delta t]$, empregaremos a seguinte aproximação, a qual usa extrapolação linear de valores da velocidade em t e $t - \Delta t$,

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \frac{v_1(x(t), y(t)) - v_1(x(t-\Delta t), y(t-\Delta t))}{\Delta t} (\tau - t) + v_1(x(t), y(t)) \\ \frac{dy}{d\tau} = \frac{v_2(x(t), y(t)) - v_2(x(t-\Delta t), y(t-\Delta t))}{\Delta t} (\tau - t) + v_2(x(t), y(t)) \end{cases} \quad (289)$$

Para cada nó (x_r, y_s) , o sistema descrito em (289) está equipado com as mesmas condições descritas em (246).

Em cada tempo t , as componentes de velocidade definidas em (209) são aproximadas usando um esquema de diferenças finitas de quarta ordem como indicados no Apêndice A. Logo:

$$v_1(x_r, y_s) = \frac{\partial \Psi(x_r, y_s)}{\partial y} = \frac{\Psi_{r,s-2} - 8\Psi_{r,s-1} + 8\Psi_{r,s+1} - \Psi_{r,s+2}}{12\Delta y} + O(\Delta y^4) \quad (290)$$

$$v_2(x_r, y_s) = -\frac{\partial \Psi(x_r, y_s)}{\partial x} = -\frac{\Psi_{r-2,s} - 8\Psi_{r-1,s} + 8\Psi_{r+1,s} - \Psi_{r+2,s}}{12\Delta x} + O(\Delta x^4) \quad (291)$$

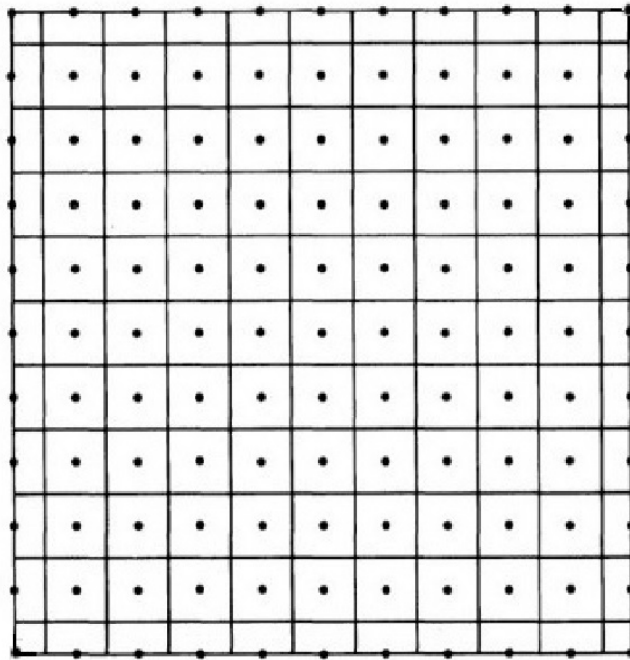
para todo $r = 1, \dots, M$ e $s = 1, \dots, N$.

Porém, observe que, em (290), devemos determinar $\Psi_{r,-1}$ se $s = 1$, e $\Psi_{r,N+2}$, quando $s = N$. Note ainda que tais pontos encontram-se fora do domínio Ω . Para calcularmos $\Psi_{r,-1}$, utilizaremos um esquema de diferenças finitas avançadas de terceira ordem. Assim:

$$\frac{\partial \Psi(x_r, y_0)}{\partial y} = \frac{-2\Psi_{r,-1} - 3\Psi_{r,0} + 6\Psi_{r,1} - \Psi_{r,2}}{6\Delta y} + O(\Delta y^3) \quad (292)$$

De (292) e (232), segue que:

Figura 5 - Subdivisão da malha em blocos internos, de fronteira e de canto



Fonte: O autor, 2019.

$$\Psi_{r,-1} = \frac{-3\Psi_{r,0} + 6\Psi_{r,1} - \Psi_{r,2}}{2} - 3\Delta y \frac{\partial \Psi(x_r, y_0)}{\partial y} + O(\Delta y^4)$$

Por outro lado, para determinar $\Psi_{r,N+2}$, usaremos um esquema de diferenças finitas atrasadas de terceira ordem dado por:

$$\frac{\partial \Psi(x_r, y_{N+1})}{\partial y} = \frac{\Psi_{r,N-1} - 6\Psi_{r,N} + 3\Psi_{r,N+1} + 2\Psi_{r,N+2}}{6\Delta y} + O(\Delta y^3) \quad (293)$$

Novamente, por (293) e (232), segue que:

$$\Psi_{r,N+2} = -\frac{\Psi_{r,N-1} - 6\Psi_{r,N} + 3\Psi_{r,N+1}}{2} + 3\Delta y \frac{\partial \Psi(x_r, y_{N+1})}{\partial y} + O(\Delta y^4) \quad (294)$$

Os valores de $\Psi_{-1,s}$ e $\Psi_{M+2,s}$, presentes na equação (291) quando $s = 1$ e $s = M$, respectivamente, podem ser calculados de maneira similar.

4.4 Resolução de sistemas lineares

Uma vez tendo feita a discretização, observemos que surgirão uma série de sistemas lineares ao longo do tempo para serem resolvidos.

Em outras palavras, o que se busca é a solução do sistema linear

$$Ax = b \quad (295)$$

onde $A \in R^{n \times n}$ é uma matriz que não é simétrica, $A + A^T$ é positiva (ou negativa) definida, $x \in R^n$ é o vetor solução, $b \in R^n$ e n é grande.

Um dos caminhos utilizados para solucionar (295) é o método de Richardson, também conhecido como método de Chebyshev, o qual consiste em utilizar o vetor residual $r(x) = Ax - b$ como direção de busca desta solução. Tal procedimento está descrito em Brezinski (1996), Calvetti e Reichel (1996) e Reichel (1991).

Porém, este método, bem como suas variações, são técnicas menos vantajosas do que os métodos de Krylov, descritos por Kelley (1995), os quais costumam ser acoplados com pré-condicionantes específicos.

Entretanto, é possível analisar sistemas lineares como um caso específico de sistemas não lineares. Neste sentido, adotaremos uma adaptação do *Derivative-Free Spectral Approach for Nonlinear Equations* (DFSANE) para sistemas lineares descrito por La Cruz e Raydan (2008).

Sendo assim, analisemos o problema de otimização

$$\min_{x \in R^n} f(x) \equiv |g(x)|^2 \quad (296)$$

onde $g(x) = Ax - b$.

Para solucionar (296), é utilizado o seguinte esquema numérico, inspirado pelo DFSANE, método este descrito por La Cruz e Raydan (2003).

$$x_{k+1} = x_k + \operatorname{sgn}(\beta_k) \left(\frac{1}{\beta_{k-1}} \right) r_k \quad (297)$$

onde $r_k = b - Ax_k = -g(x_k)$ é o vetor residual em x_k e $\beta_k = (r_k^T Ar_k) / (r_k^T r_k)$.

As propriedades do comprimento do passo espectral $\alpha_{k+1} = (r_k^T r_k) / (r_k^T Ar_k)$, para a minimização de funções quadráticas convexas foram estabelecidas por Raydan (1997) e posteriormente analisadas por Dai e Liao (2002).

Para garantir a convergência deste método, dado um ponto inicial x_0 e um com-

primento de passo espectral inicial $1/\beta_0$, a condição

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \eta_k - \gamma \lambda_k^2 |g(x_k)|^2 \quad (298)$$

precisa ser forçada para que, dado um natural k , tenhamos $0 < \lambda_k \leq 1$.

A fim de determinarmos tal λ_k , utilizaremos uma estratégia de otimização global inspirada por La Cruz et al. (2006). Assim, serão exigidos os parâmetros γ , σ_{min} , σ_{max} e uma sequência $\{\eta_k\}$, de maneira que $\eta_k > 0$ para todo k . Além disso, suporemos que $\gamma \in (0, 1)$, $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$ e:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k = \eta < +\infty \quad (299)$$

4.5 Resolução numérica do método do tubo de trajetórias e *OpenMP*

Isto posto, em resumo, para resolvermos o sistema (251) devemos adotar os seguintes passos:

1. dado um passo temporal t_{n+1} , determinar \tilde{X} para cada nó da malha através do método de Runge-Kutta de quarta ordem;
2. verificar se cada \tilde{X} encontra-se na malha. Em caso negativo, interrompe-se o processo e recomeça-se usando um passo temporal menor ou uma malha espacial mais fina, aumentando a quantidade de pontos utilizada em cada eixo;
3. determinar a vorticidade em cada \tilde{X} usando a expressão (253), as fórmulas de Jensen e o esquema de nove pontos;
4. resolver as equações (277), (278), (279) e (280) com o auxílio do DFSANE adaptado considerando as devidas substituições de valores de blocos de fronteira e de canto;
5. uma vez determinados todos os valores de ω^{n+1} e Ψ^{n+1} , repete-se o processo para o próximo passo temporal.

O procedimento descrito é seguido até que as soluções obtidas entre um instante e o subsequente estejam suficientemente próximas. Finalmente, há uma última observação a ser feita. Tendo em vista que o processo pode, eventualmente, ser interrompido, é interessante considerarmos maneiras de reduzir o tempo computacional empregado. Desta forma, a computação de alto desempenho fornece recursos que se destinam a otimizar o processamento de simulações numéricas. Uma das técnicas mais importantes é a computação em paralelo de *clusters* e supercomputadores conforme apresentando em Chapman et al. (2008). Atualmente as metodologias mais empregadas para processamento em

paralelo são as de memória distribuída e memória compartilhada. O processamento em paralelo com arquitetura de memória compartilhada resume-se na divisão de tarefas entre os processadores que compartilham a mesma memória.

Neste sentido, Chapman et al. (2008) referem-se a máquinas com essa arquitetura pela sigla SMPs (*Symmetric Multi-Processor*). As ferramentas de programação paralela mais comuns em SMPs são aquelas com *threading* explícito e as baseadas em diretivas de compilação. Dentre os procedimentos que utilizam diretivas de compilação, um dos padrões mais difundidos é o *OpenMP*, que especifica um conjunto de diretivas, funções e variáveis de ambiente para tornar o programa paralelo.

Segundo Chapman et al. (2008), o *OpenMP* é uma interface de programação de aplicativos de memória compartilhada (API), não sendo uma nova linguagem de programação. Em vez disso, são instruções que podem ser adicionadas a programas sequenciais (Fortran, C ou C++) para descrever de que maneira o trabalho deve ser compartilhado entre as *threads* que serão executados em diferentes processadores (ou núcleos) e para solicitar acessos a dados compartilhados (se necessário). A métrica pela qual se mede o quanto o tempo despendido pode ser melhorado, em comparação com o uso de um único processador, é chamada, segundo Chandra (2001), de *speedup* e é calculado da seguinte forma:

$$S = \frac{T(1)}{T(N)} \quad (300)$$

onde S é o *speedup* e $T(N)$ é o tempo empenhado para N processadores. Assim, o *OpenMP* será utilizado a fim de diminuir o tempo computacional empregado. Além disso, cabe observar que construímos nosso algoritmo em linguagem *Fortran*. Sendo assim, para determinarmos o *speedup*, utilizaremos a função *CPU-TIME*, inerente a esta linguagem, para aferir o tempo computacional empenhado.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, aplicaremos o Método do Tubo de Trajetórias em três exemplos, analisando os resultados obtidos, bem como realizando discussões. Além disso, observaremos o tempo computacional empregado no processo e como o *OpenMP* pode auxiliar na redução deste tempo. Para tanto, o programa desenvolvido com base no método aqui apresentado foi executado em um computador dotado de doze processadores *Intel Xeon E5-2420* físicos aliados a doze núcleos virtuais.

Ainda, todos os gráficos foram gerados com o auxílio do *software Matlab*, conforme as orientações dadas por Hanselman e Littlefield (1997).

Exemplo 1: Considere o seguinte sistema, definido no quadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \\ \omega = -\Delta \Psi \end{cases} \quad (301)$$

acrescido das seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\begin{cases} \Psi(x, 0) = \frac{1}{2} \cos(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \\ \Psi(x, 1) = -\frac{1}{2} \cos(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \\ \Psi(0, y) = \frac{1}{2} \cos(\pi y), 0 \leq y \leq 1 \\ \Psi(1, y) = -\frac{1}{2} \cos(\pi y), 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (302)$$

e

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \text{ em } \partial \Omega \quad (303)$$

Este problema possui solução analítica em Ω , a saber:

$$\begin{cases} \Psi(x, y, t) = \frac{1}{2} \cos(\pi x) \cos(\pi y) \exp\left(-\frac{2\pi^2}{Re} t\right) \\ \omega(x, y, t) = 2\pi^2 \Psi(x, y, t) \end{cases} \quad (304)$$

Neste caso, adotamos $\Delta t = 0,001$. As figuras 6 a 9 apresentam as soluções numéricas e exatas para a função de corrente para alguns números de Reynolds. Percebamos que os gráficos apresentados são idênticos em cada caso. Ainda, apresentaremos as soluções numéricas e exatas para a vorticidade considerando os mesmos números de Reynolds considerados nas Figuras 10 a 13. Observemos que, novamente, os gráficos

são absolutamente idênticos. Além disso, mostraremos nas Figuras 14 a 17 os campos de velocidades obtidos numérica e analiticamente para os mesmos casos. Mais uma vez, perceberemos que os gráficos são praticamente iguais.

Ainda, este exemplo nos permitirá verificar um fato bastante interessante. Uma das maiores preocupações na aplicação de um método numérico está relacionada à quantidade de pontos da malha. De fato, quanto mais refinada for a malha, mais cálculos serão necessários em cada iteração. Contudo, observando os dados descritos nas Tabelas 1 a 4 verificaremos que, para cada número de Reynolds adotado, o erro absoluto entre as soluções numérica e exata obtido em diferentes *time-steps* é irrevelante se considerarmos o refinamento da malha. Em outras palavras, podemos perceber que uma malha grossa já nos dá resultados numéricos satisfatórios. Logo, o refinamento, para este exemplo, só nos auxiliaria a produzir um gráfico mais nítido. Lembremos que definimos erro absoluto da seguinte maneira: dadas duas soluções S^n e S^{n+1} referentes a iterações n e $n + 1$, respectivamente, calculamos o erro absoluto através da norma $\|S^{n+1} - S^n\|$, onde a norma adotada é a euclidiana.

A Tabela 5 traz os dados referentes à quantidade de passos de tempo necessárias para obtermos a solução em regime permanente para os números de Reynolds adotados, o que reforça a vantagem de estarmos trabalhando, aparentemente, com um método eficaz em malhas grossas.

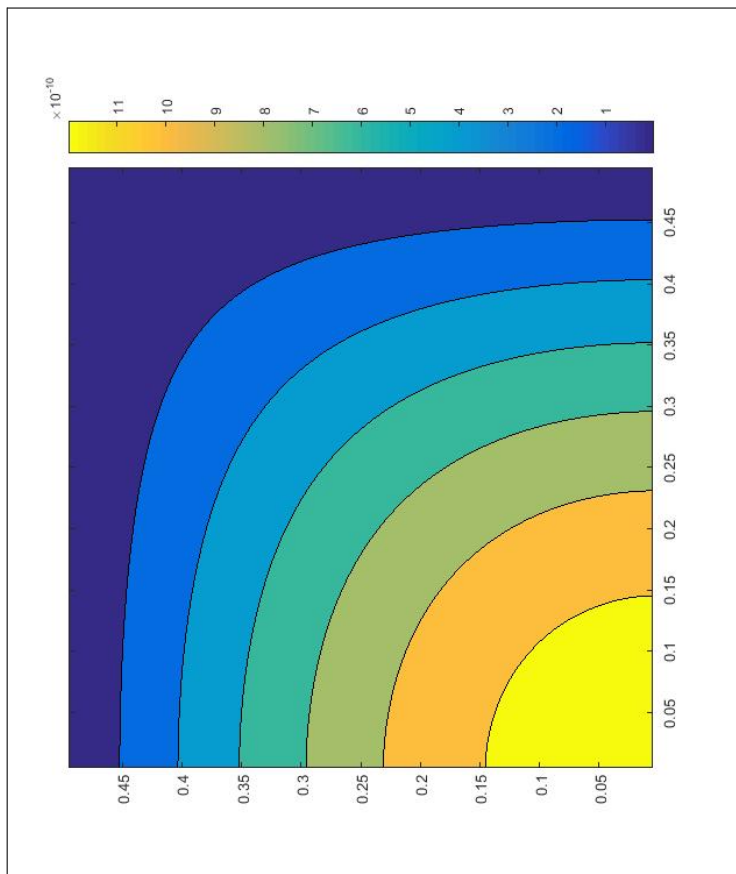
Finalmente, a Tabela 6 e a Figura 18 indicam os resultados obtidos com o uso da computação paralela através do *OpenMP*. Para ilustrarmos isso, abordamos o caso em que levou-se mais tempo para solucionar o problema, ou seja, quando utilizamos $Re = 2500$ e uma malha com 100 subdivisões em cada eixo. Portanto, analisaremos um caso relativamente mais simples para ilustrar que o método, de maneira eficaz, encontra a solução numérica de uma equação de Navier-Stokes na forma vorticidade - função de corrente.

Por fim, denotaremos por S a solução analítica e S^n a solução numérica obtida na iteração n . O critério de parada adotado consistiu na iteração na qual o erro relativo entre as soluções fosse inferior a 10^{-10} . Em outras palavras, a solução numérica aceita foi aquela na qual a desigualdade

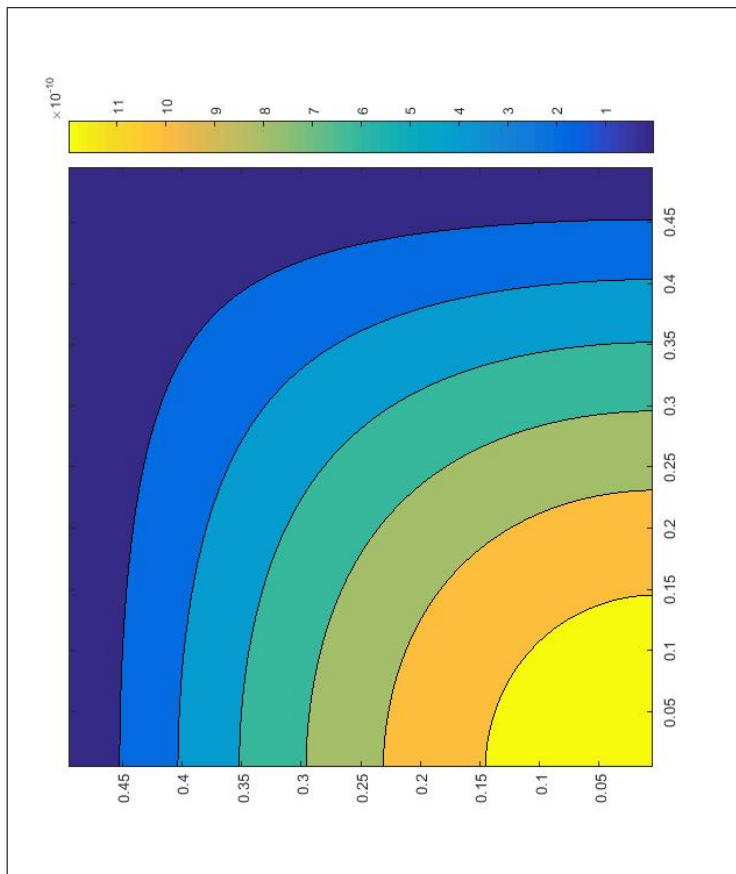
$$\frac{\|S^n - S\|}{\|S\|} < 10^{-10} \tag{305}$$

se torna verdadeira. A norma considerada, neste caso, foi a norma euclidiana.

Figura 6 - Solução numérica *versus* solução exata da função de corrente para $Re = 100$



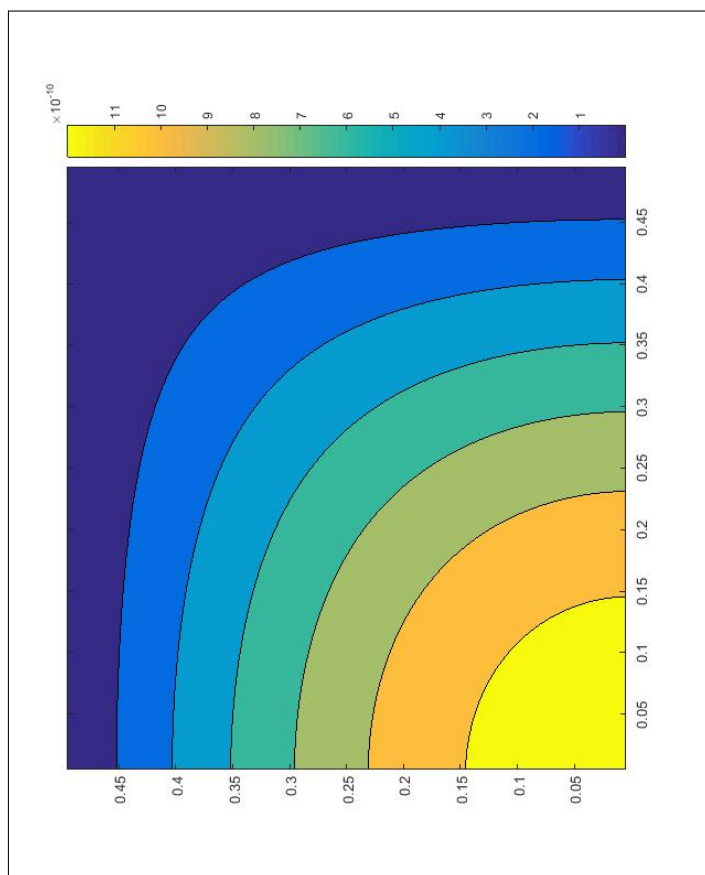
(a)



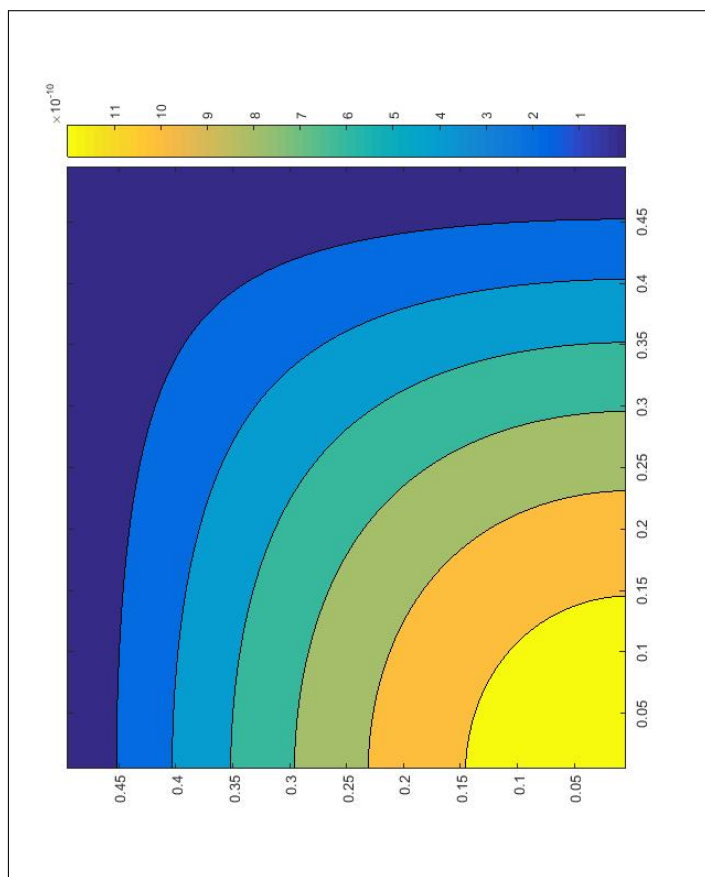
(b)

Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.
Fonte: O autor, 2019.

Figura 7 - Solução numérica *versus* solução exata da função de corrente para $Re = 500$



(a)

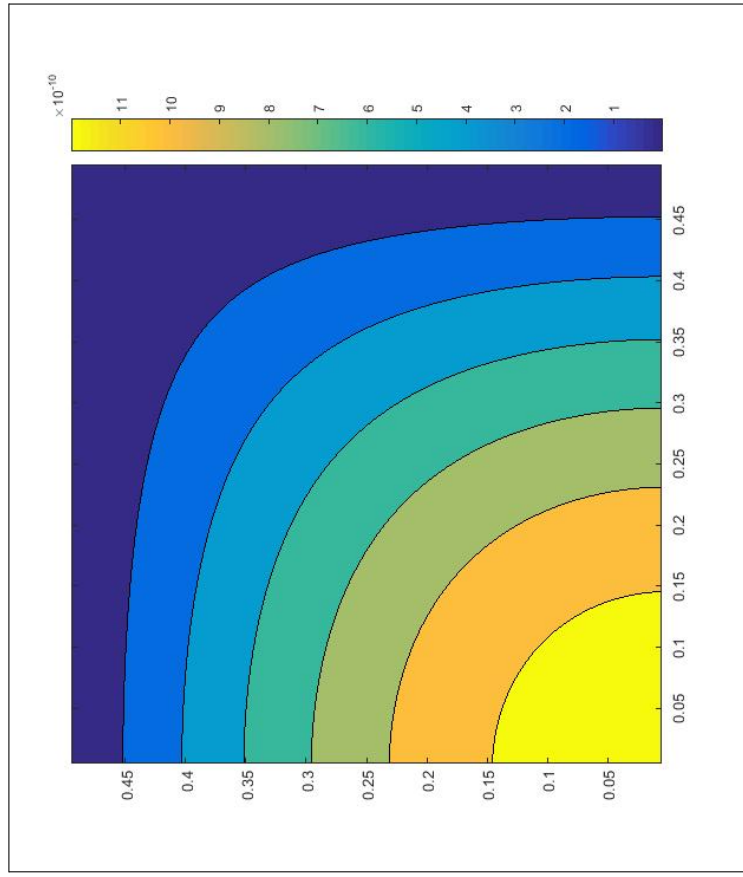


(b)

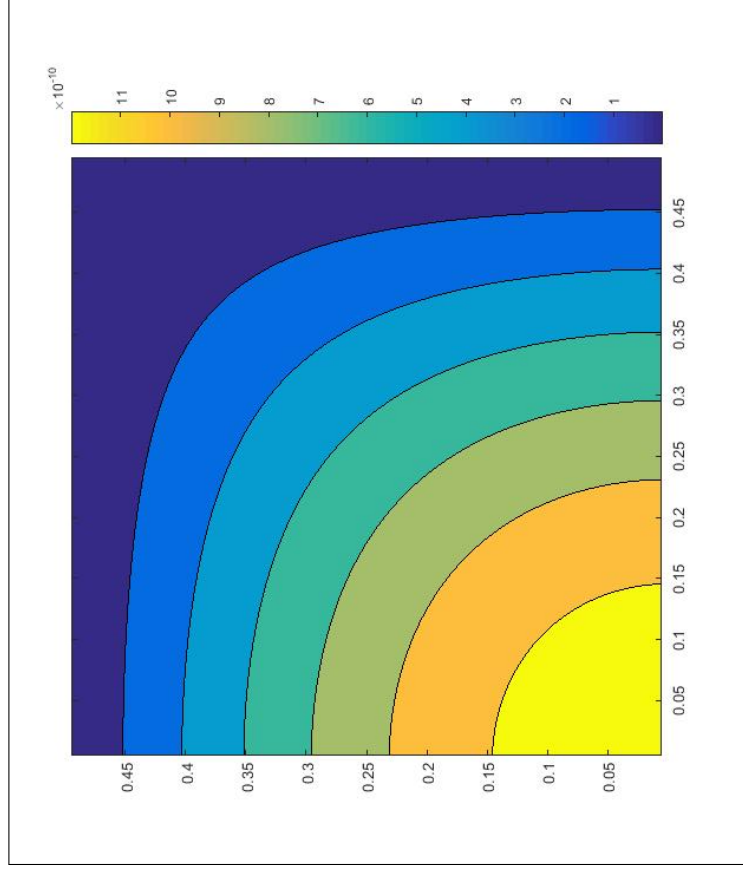
Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 8 - Solução numérica *versus* solução exata da função de corrente para $Re = 1000$



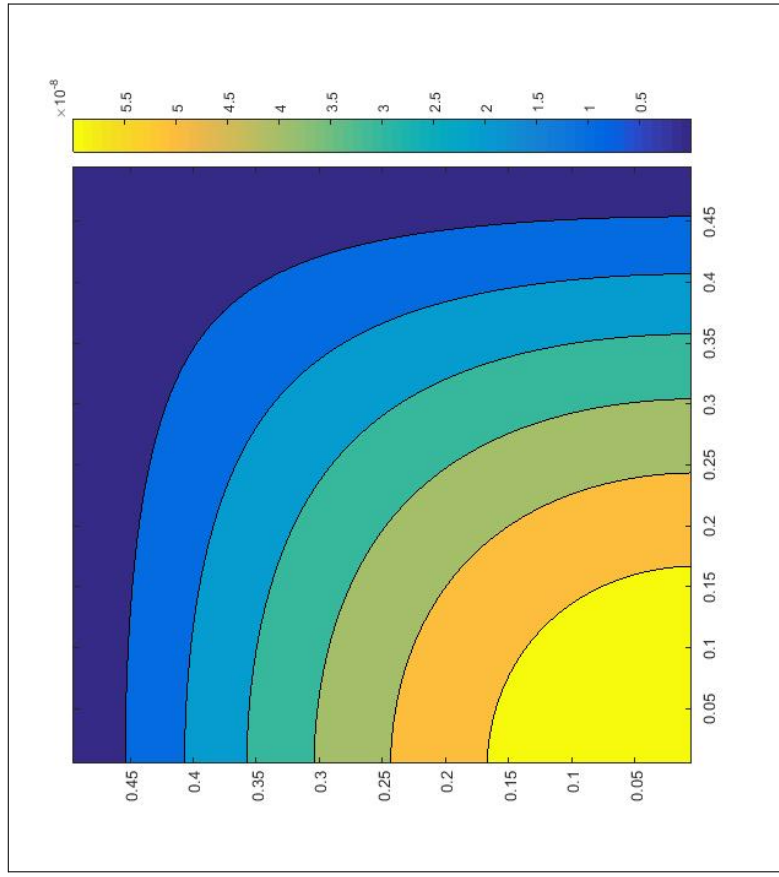
(a)



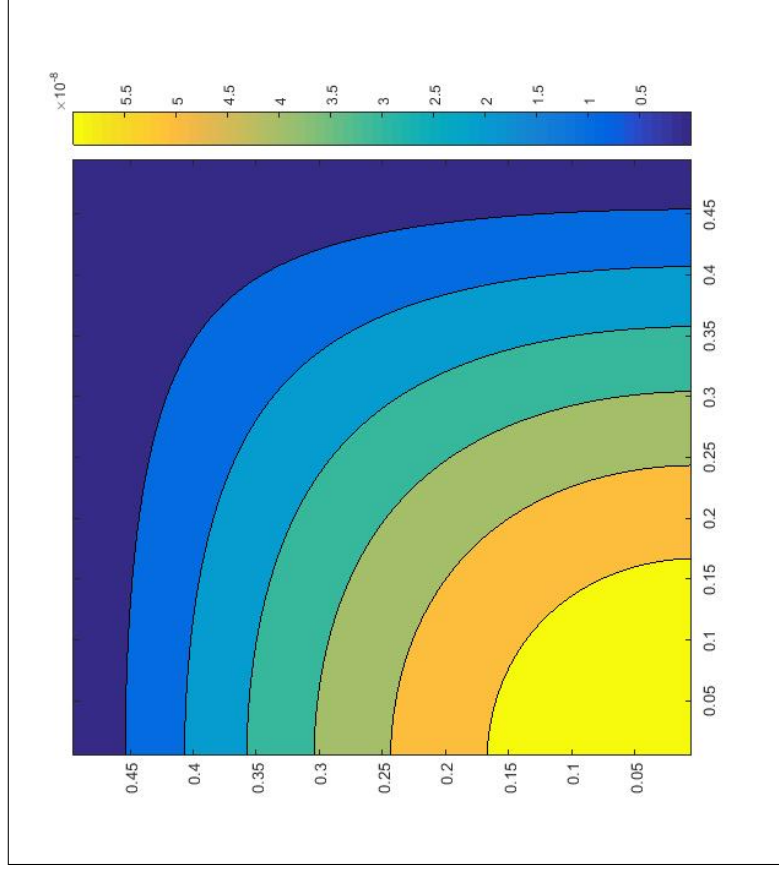
(b)

Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.
Fonte: O autor, 2019.

Figura 9 - Solução numérica *versus* solução exata da função de corrente para $Re = 2500$



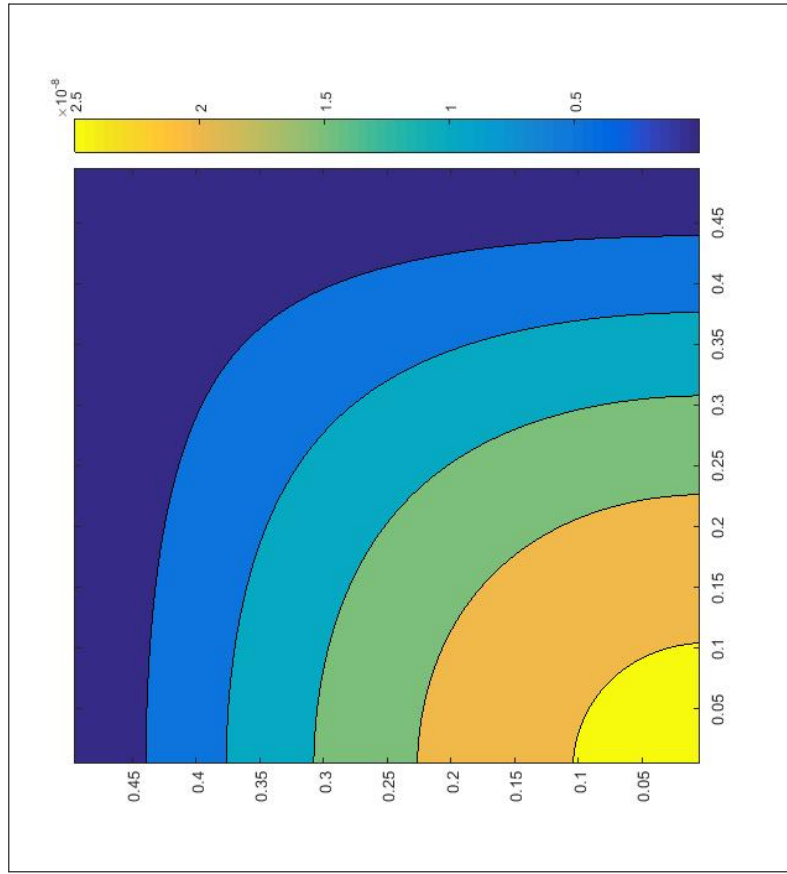
(a)



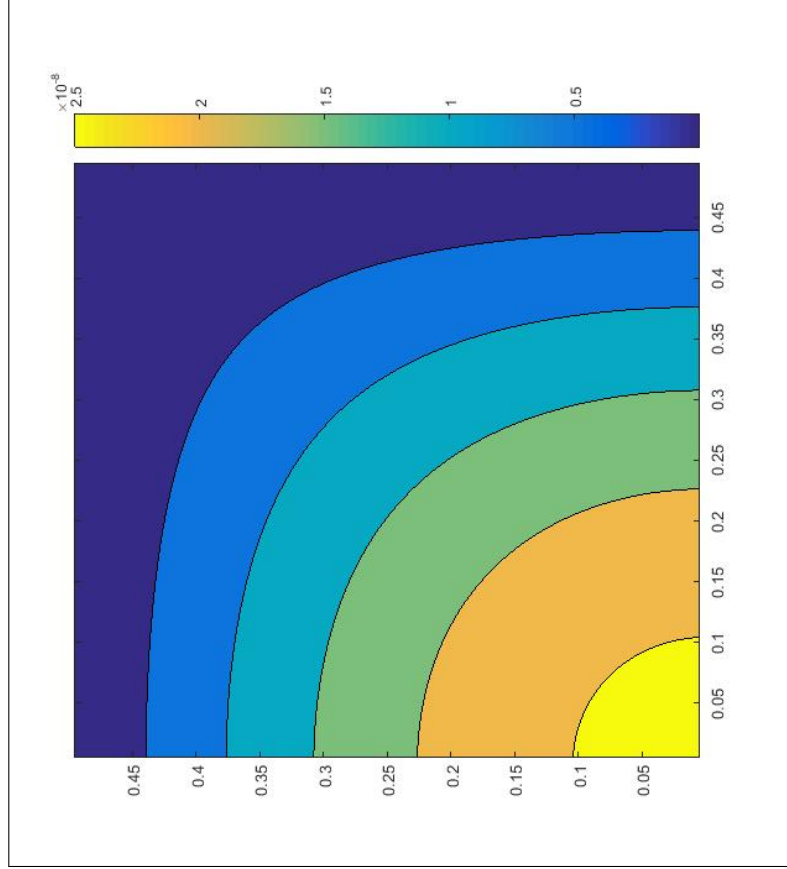
(b)

Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.
Fonte: O autor, 2019.

Figura 10 - Solução numérica *versus* solução exata da vorticidade para $Re = 100$



(a)

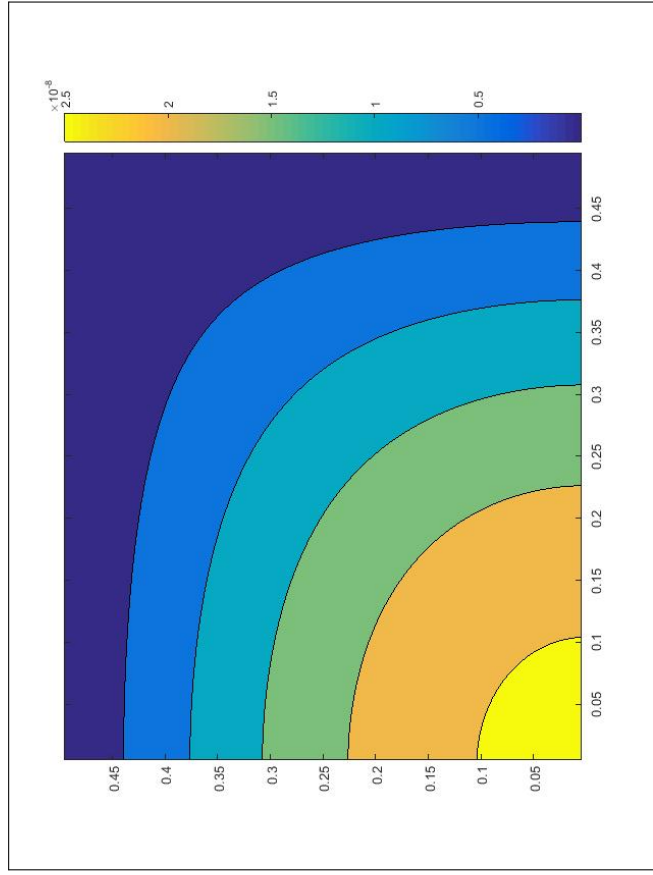


(b)

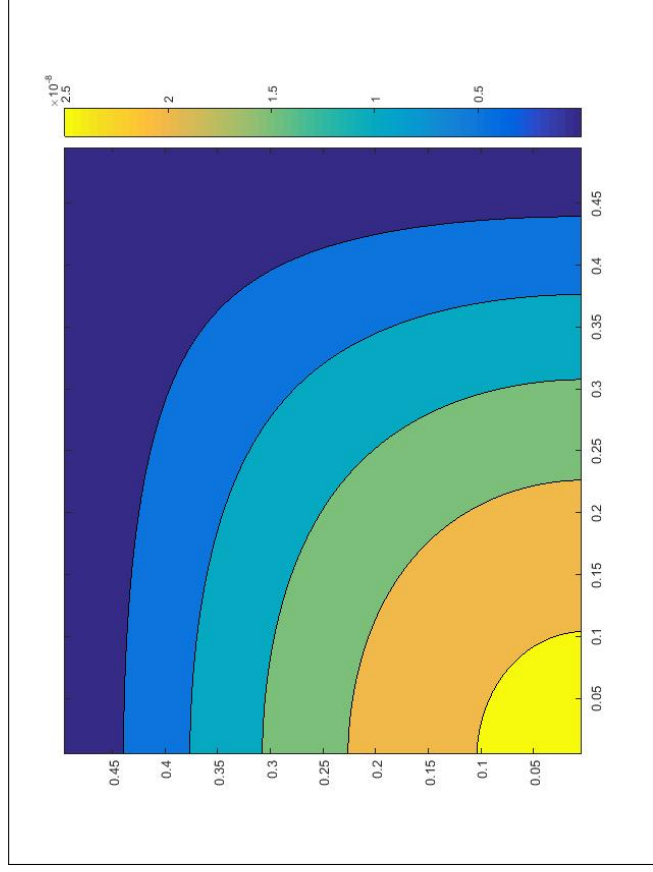
Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 11 - Solução numérica *versus* solução exata da vorticidade para $Re = 500$



(a)

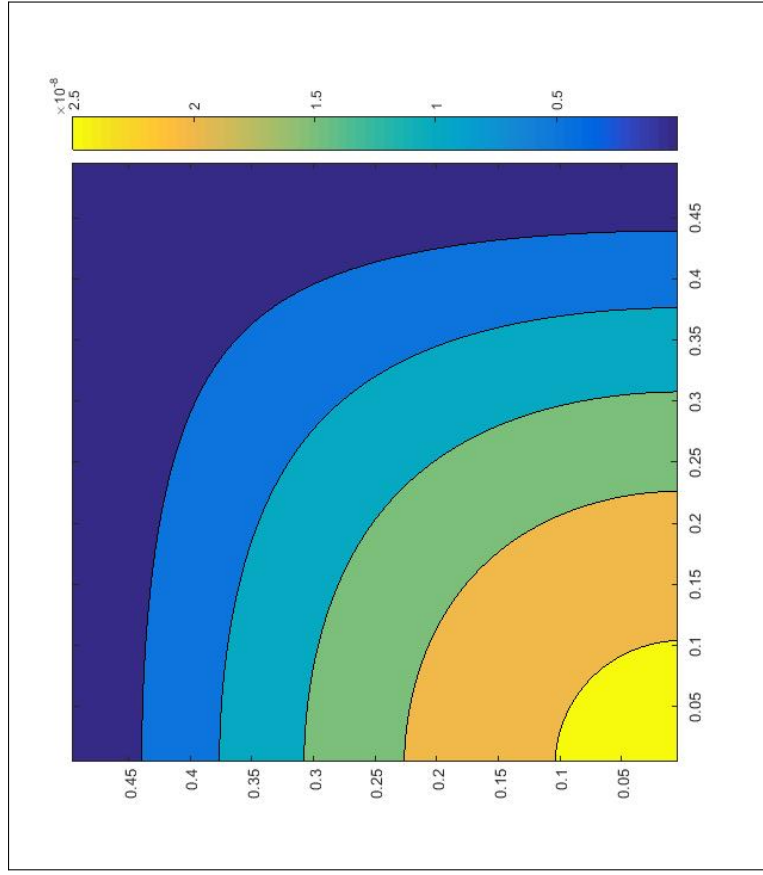


(b)

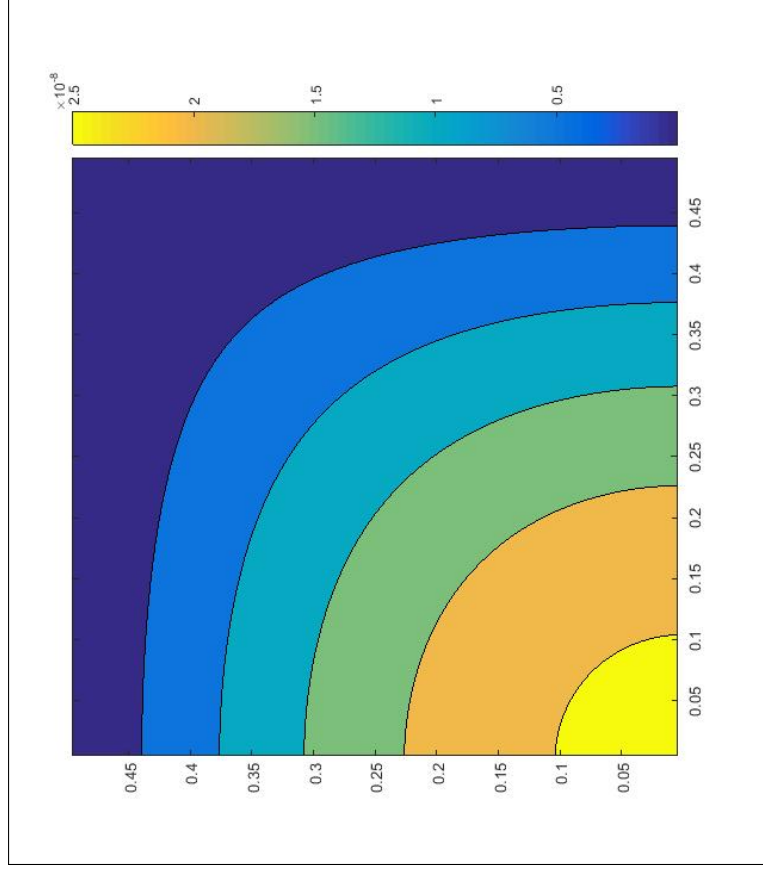
Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 12 - Solução numérica *versus* solução exata da vorticidade para $Re = 1000$



(a)

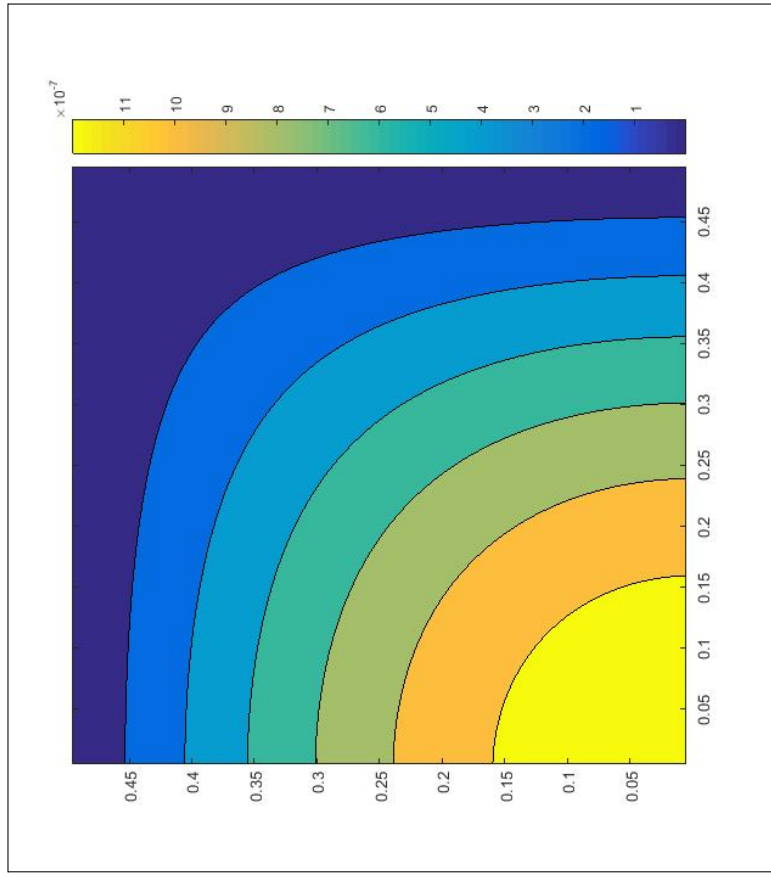


(b)

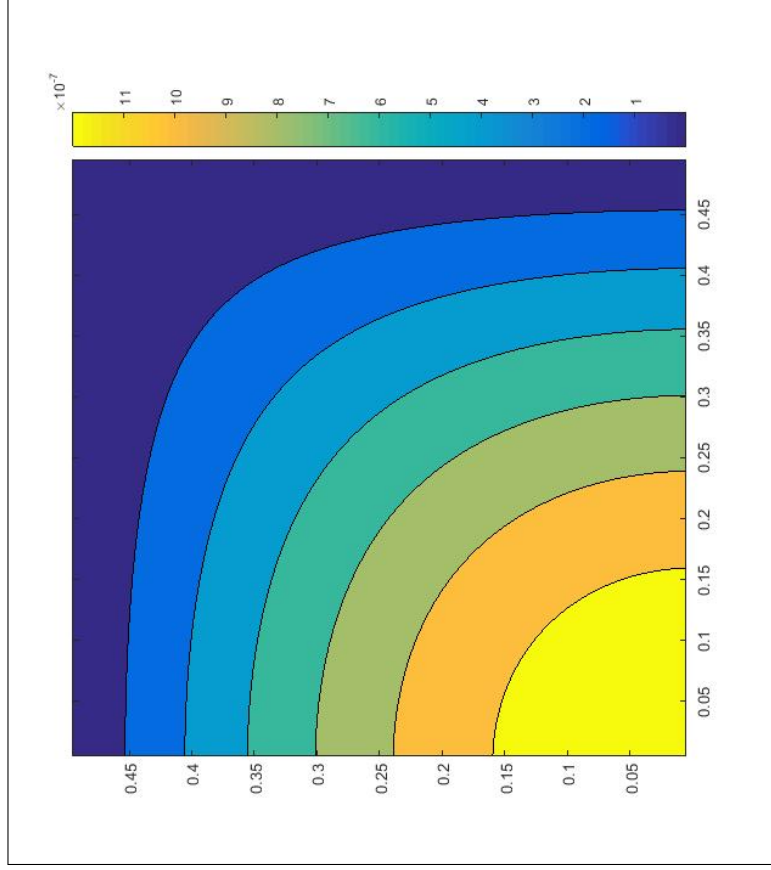
Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 13 - Solução numérica *versus* solução exata da vorticidade para $Re = 2500$



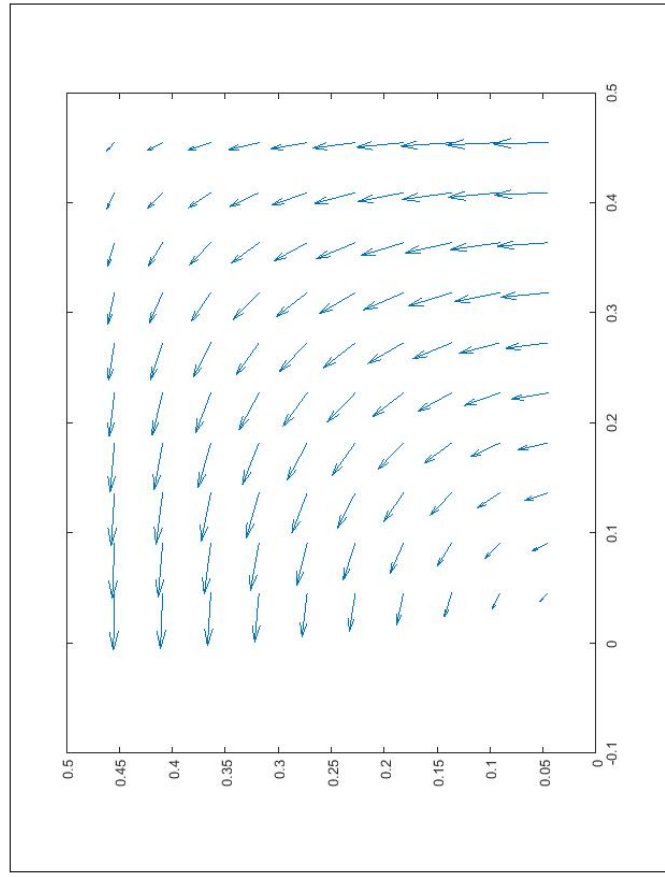
(a)



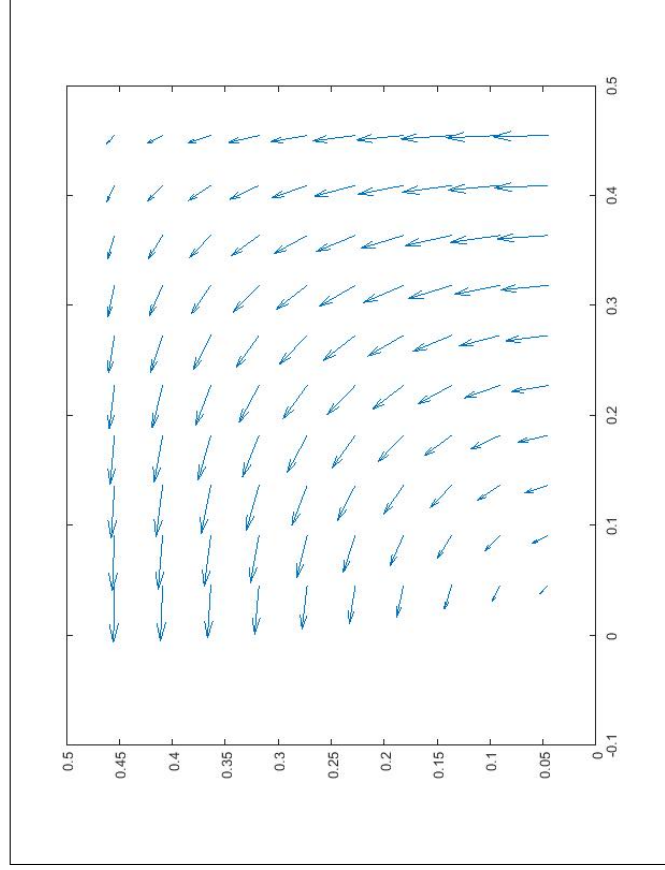
(b)

Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.
Fonte: O autor, 2019.

Figura 14 - Solução numérica *versus* solução exata do campo de velocidades para $Re = 100$



(a)

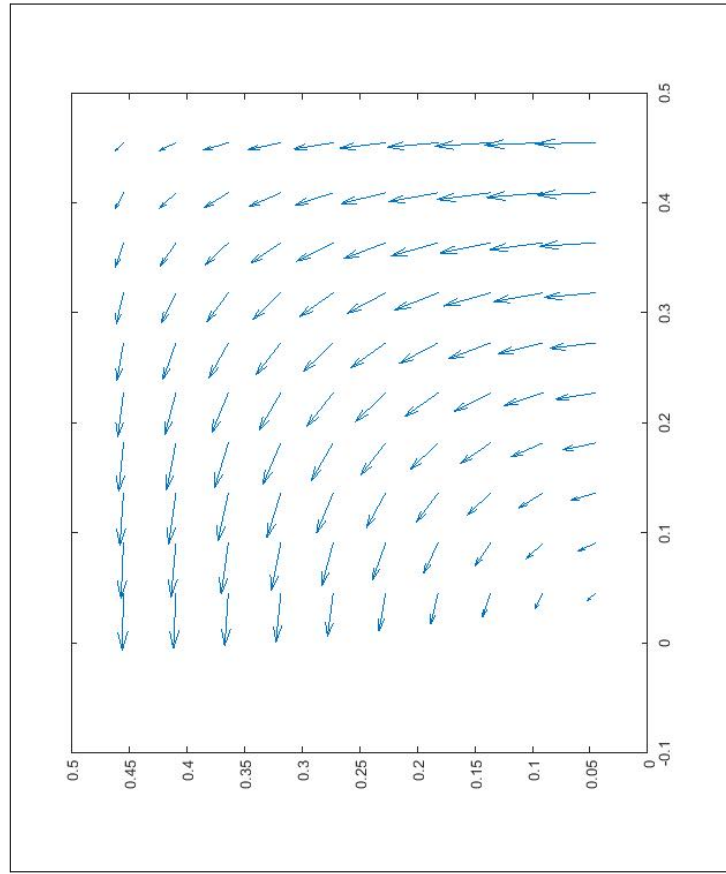


(b)

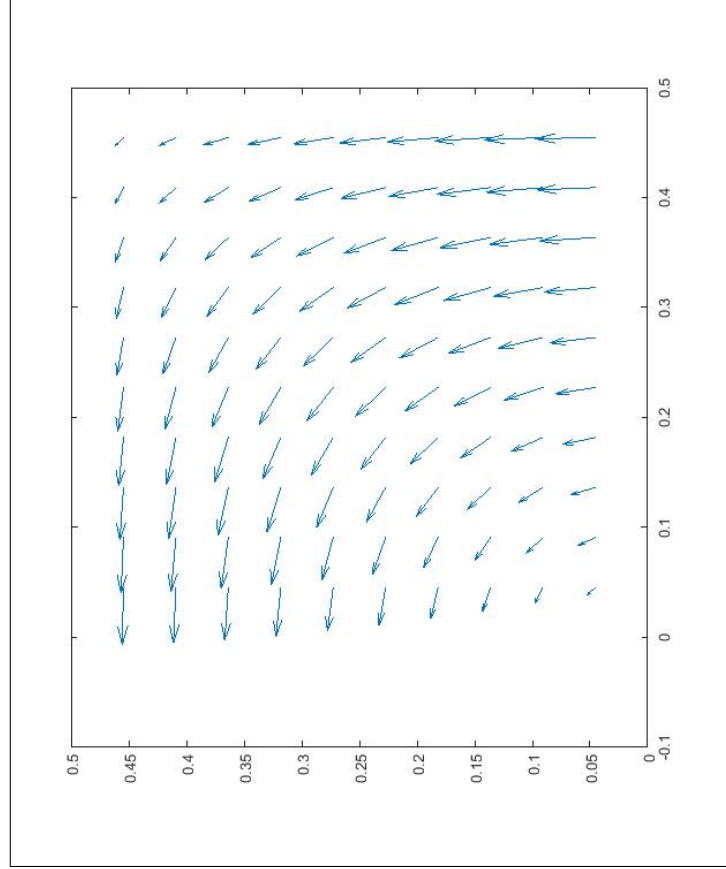
Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 15 - Solução numérica *versus* solução exata do campo de velocidades para $Re = 500$



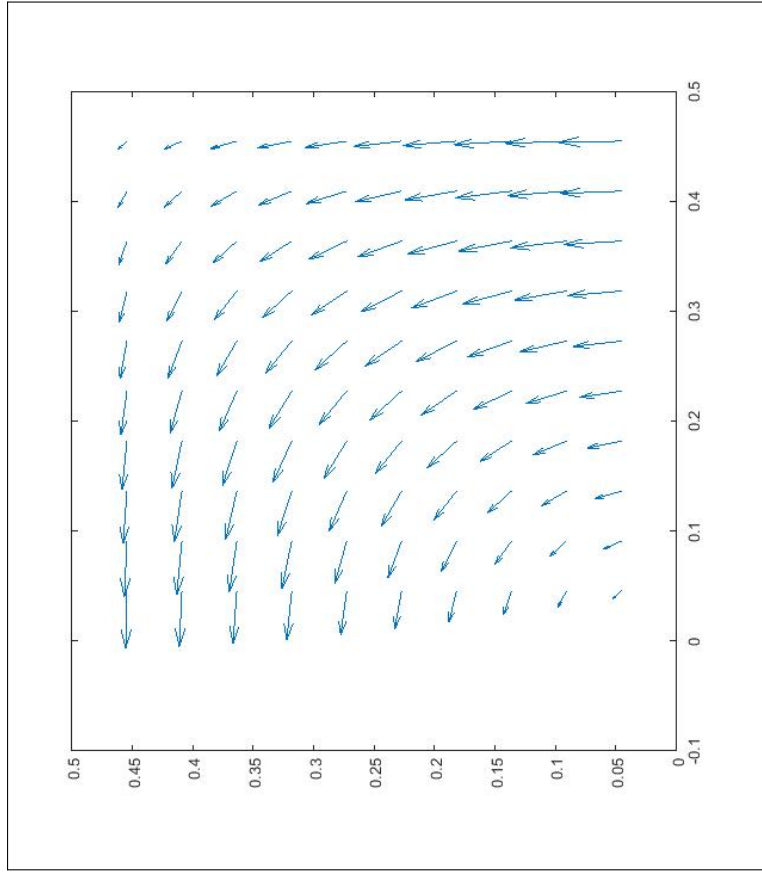
(a)



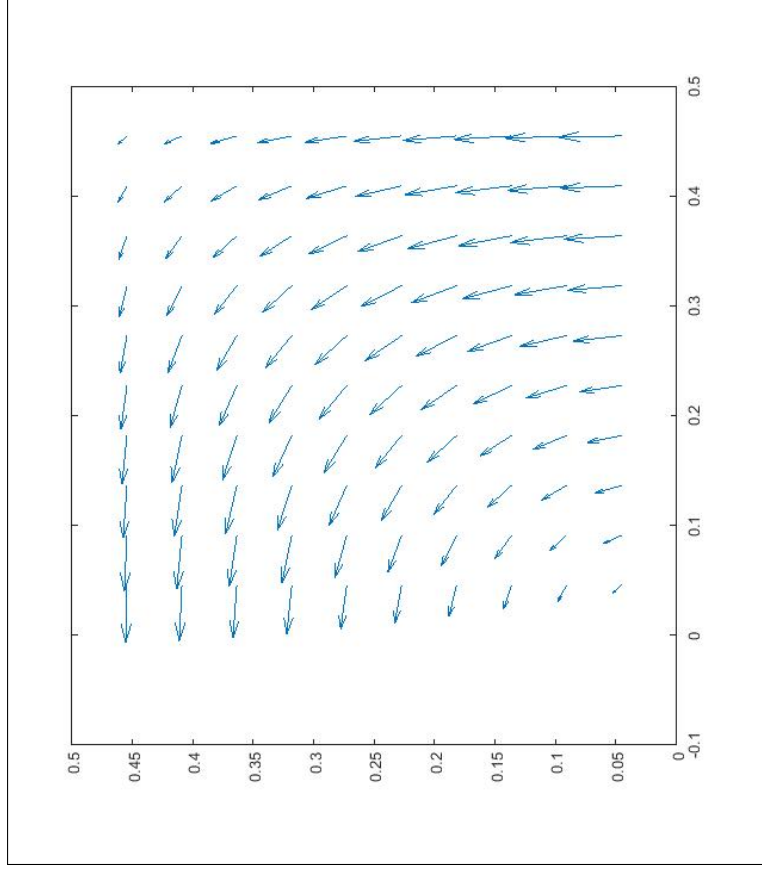
(b)

Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.
Fonte: O autor, 2019.

Figura 16 - Solução numérica *versus* solução exata do campo de velocidades para $Re = 1000$



(a)

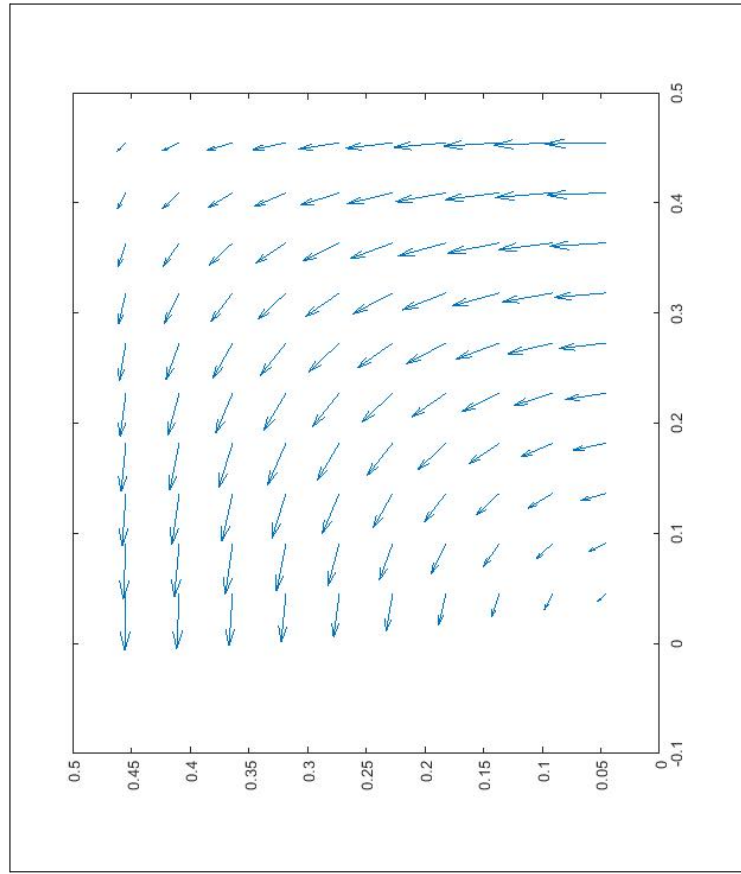


(b)

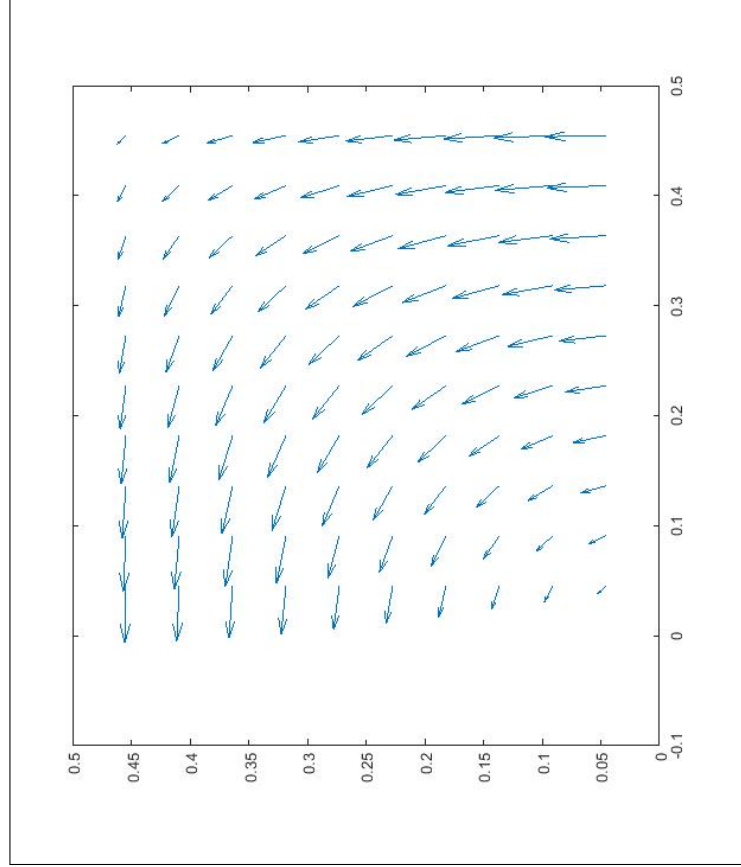
Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 17 - Solução numérica *versus* solução exata do campo de velocidades para $Re = 2500$



(a)



(b)

Legenda: (a) Solução numérica. (b) Solução exata.
Fonte: O autor, 2019.

Tabela 1 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns *time-steps* para $Re = 100$

<i>Time-steps</i>	Tempo (segundos)	Malha	Vorticidade	Função de corrente
1000	18,69	10×10	$2,8932 \times 10^{-2}$	$2,7422 \times 10^{-4}$
	173,67	25×25	$9,4261 \times 10^{-3}$	$8,1016 \times 10^{-5}$
	1276,66	50×50	$3,1844 \times 10^{-3}$	$2,6762 \times 10^{-5}$
	7324,86	100×100	$8,8895 \times 10^{-4}$	$7,0715 \times 10^{-6}$
10000	179,75	10×10	$2,7282 \times 10^{-3}$	$2,5695 \times 10^{-5}$
	2116,75	25×10	$9,9871 \times 10^{-5}$	$5,7581 \times 10^{-6}$
	15952,36	50×10	$2,5647 \times 10^{-5}$	$1,2569 \times 10^{-6}$
	87625,63	100×10	$9,6358 \times 10^{-6}$	$5,6375 \times 10^{-7}$
50000	736,29	10×10	$5,6767 \times 10^{-9}$	$4,2305 \times 10^{-11}$
	9001,41	25×25	$1,8817 \times 10^{-10}$	$1,0355 \times 10^{-12}$
	19652,32	50×50	$6,5478 \times 10^{-11}$	$5,6321 \times 10^{-14}$
	29654,23	100×100	$3,2145 \times 10^{-11}$	$1,2358 \times 10^{-14}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 2 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns *time-steps* para $Re = 500$

<i>Time-steps</i>	Tempo (segundos)	Malha	Vorticidade	Função de corrente
1000	16,56	10×10	$3,9773 \times 10^{-2}$	$3,7418 \times 10^{-4}$
	174,71	25×25	$1,5295 \times 10^{-2}$	$1,2725 \times 10^{-4}$
	1336,83	50×50	$5,8195 \times 10^{-3}$	$4,4183 \times 10^{-5}$
	6254,22	100×100	$1,2564 \times 10^{-3}$	$9,6325 \times 10^{-6}$
10000	168,79	10×10	$2,7481 \times 10^{-2}$	$2,5847 \times 10^{-4}$
	1785,06	25×25	$1,0784 \times 10^{-2}$	$9,0028 \times 10^{-5}$
	5236,45	50×50	$6,5841 \times 10^{-3}$	$7,6528 \times 10^{-6}$
	12587,96	100×100	$2,5687 \times 10^{-3}$	$2,3655 \times 10^{-6}$
50000	812,63	10×10	$4,7694 \times 10^{-3}$	$4,4765 \times 10^{-5}$
	7501,5	25×25	$1,5893 \times 10^{-3}$	$1,3308 \times 10^{-5}$
	22589,36	50×50	$8,6254 \times 10^{-4}$	$5,6256 \times 10^{-6}$
	125899,22	100×100	$1,2552 \times 10^{-5}$	$9,0021 \times 10^{-7}$
100000	1769,08	10×10	$3,6934 \times 10^{-5}$	$2,8631 \times 10^{-6}$
	15947,94	25×25	$7,0938 \times 10^{-5}$	$5,9488 \times 10^{-7}$
	95632,21	50×50	$1,5689 \times 10^{-5}$	$1,2311 \times 10^{-7}$
	185632,55	100×100	$8,6235 \times 10^{-6}$	$5,1548 \times 10^{-8}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 3 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns *time-steps* para $Re = 1000$

<i>Time-steps</i>	Tempo (segundos)	Malha	Vorticidade	Função de corrente
1000	12, 74	10×10	$4,1354 \times 10^{-2}$	$3,8868 \times 10^{-4}$
	155, 21	25×25	$1,6304 \times 10^{-2}$	$1,3499 \times 10^{-4}$
	1182, 6	50×50	$6,353 \times 10^{-3}$	$4,7226 \times 10^{-5}$
	9565, 81	100×100	$1,9754 \times 10^{-3}$	$9,8129 \times 10^{-6}$
10000	156, 11	10×10	$3,4524 \times 10^{-2}$	$3,2445 \times 10^{-4}$
	1529, 46	25×25	$1,4097 \times 10^{-2}$	$1,1705 \times 10^{-4}$
	12876, 14	50×50	$6,1311 \times 10^{-3}$	$4,6118 \times 10^{-5}$
	94306, 32	100×100	$1,8169 \times 10^{-3}$	$9,8067 \times 10^{-6}$
50000	892, 34	10×10	$1,5289 \times 10^{-2}$	$1,4363 \times 10^{-4}$
	7126, 23	25×25	$6,0996 \times 10^{-3}$	$5,079 \times 10^{-5}$
	61368, 67	50×50	$2,7498 \times 10^{-3}$	$2,1715 \times 10^{-5}$
	759856, 23	100×100	$1,5426 \times 10^{-3}$	$9,6274 \times 10^{-6}$
100000	1723, 73	10×10	$5,297 \times 10^{-3}$	$4,9717 \times 10^{-5}$
	13074, 96	25×25	$1,9503 \times 10^{-3}$	$1,6258 \times 10^{-5}$
	98215, 22	50×50	$7,9652 \times 10^{-4}$	$7,859 \times 10^{-6}$
	215007, 82	100×100	$2,9041 \times 10^{-4}$	$2,2734 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 4 - Erro na vorticidade e função de corrente para alguns *time-steps* para $Re = 2500$

<i>Time-steps</i>	Tempo (segundos)	Malha	Vorticidade	Função de corrente
1000	11, 92	10×10	$4,2329 \times 10^{-2}$	$3,9761 \times 10^{-4}$
	147, 72	25×25	$1,6949 \times 10^{-2}$	$1,3991 \times 10^{-4}$
	1234, 75	50×50	$6,7121 \times 10^{-3}$	$4,9185 \times 10^{-5}$
	9551, 41	100×100	$2,1325 \times 10^{-3}$	$9,8056 \times 10^{-6}$
10000	183, 44	10×10	$3,9425 \times 10^{-2}$	$3,7032 \times 10^{-4}$
	1533, 6	25×25	$1,6411 \times 10^{-2}$	$1,3577 \times 10^{-4}$
	10986, 82	50×50	$7,1777 \times 10^{-3}$	$5,2502 \times 10^{-5}$
	94210, 36	100×100	$2,084 \times 10^{-3}$	$9,7686 \times 10^{-6}$
50000	922, 36	10×10	$2,8673 \times 10^{-2}$	$2,693 \times 10^{-4}$
	7449, 44	25×25	$1,1973 \times 10^{-2}$	$9,9264 \times 10^{-5}$
	57475, 11	50×50	$5,509 \times 10^{-3}$	$4,1701 \times 10^{-5}$
	101265, 22	100×100	$4,112 \times 10^{-3}$	$2,1856 \times 10^{-6}$
100000	1831, 48	10×10	$1,9225 \times 10^{-2}$	$1,8055 \times 10^{-4}$
	14732, 95	25×25	$8,0063 \times 10^{-3}$	$6,6464 \times 10^{-5}$
	108245, 88	50×50	$3,8018 \times 10^{-3}$	$2,9516 \times 10^{-5}$
	278369, 63	100×100	$1,3688 \times 10^{-3}$	$8,7207 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 5 - Quantidade de *time-steps* necessários para obtenção da solução em regime permanente

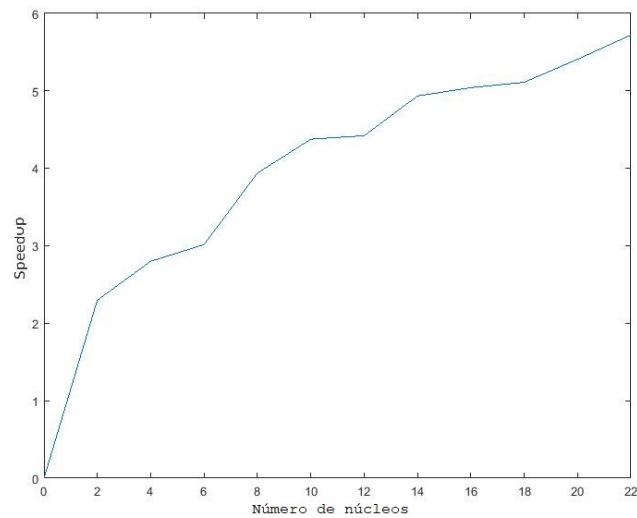
Número de Reynolds	Malha	<i>Time-steps</i>
100	10 × 10	93192
	25 × 25	125632
	50 × 50	325984
	100 × 100	521632
500	10 × 10	425204
	25 × 25	632568
	50 × 50	952689
	100 × 100	1825693
1000	10 × 10	815298
	25 × 25	860794
	50 × 50	1245699
	100 × 100	2125369
2500	10 × 10	1922183
	25 × 25	3036501
	50 × 50	5125364
	100 × 100	8102452

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 6 - Tempo empregado para determinar a solução em regime permanente

Número de <i>threads</i>	Tempo de processamento
1	5 dias, 12 horas e 43 minutos
2	2 dias, 9 horas e 51 minutos
4	1 dia, 23 horas e 29 minutos
6	1 dia, 20 horas e 6 minutos
8	1 dia, 9 horas e 46 minutos
10	1 dia, 6 horas e 23 minutos
12	1 dia, 6 horas e 5 minutos
14	1 dia, 2 horas e 57 minutos
16	1 dia, 2 horas e 22 minutos
18	1 dia, 2 horas e 9 minutos
20	1 dia e 35 minutos
22	23 horas e 14 minutos

Fonte: O autor, 2019.

Figura 18 - Curva de *speedup*

Fonte: O autor, 2019.

Tendo em vista os gráficos e tabelas apresentados, podemos verificar o seguinte:

1. apesar de já termos observado isso, reforçamos que os gráficos advindos da plotagem da função de corrente, vorticidade e campo de velocidades obtida numérica e analiticamente são praticamente idênticos. Isso está ilustrado nas Figuras 6 a 17;
2. as Tabelas 1 a 4 mostram que as soluções, do ponto de vista de valores de sua imagem, são obtidas de maneira satisfatória em uma malha grossa. Ao considerarmos os erros de aproximação entre os valores numérico e exato, é perceptível que o refinamento da malha não impacta significativamente sobre tal diferença. Com efeito, notemos que o erro na vorticidade diminui em, no máximo, duas casas decimais à medida que aumentamos o número de nós da grade. E em relação à função de corrente, esta variação é de, no máximo, três casas decimais. Além disso, as mesmas Tabelas ilustram o fato de que o método parece ser mais preciso à medida que aumentamos o número de Reynolds;
3. já a Tabela 5 nos mostra que à medida que aumentamos o número de Reynolds e refinamos a malha, a quantidade de *time-steps* necessários para obtermos soluções em regime permanente aumenta consideravelmente, o que impacta no tempo computacional empregado;
4. a Tabela 6 aborda a situação em que se levou mais tempo para encontrar soluções usando apenas um núcleo. Neste caso, usamos $Re = 2500$ em uma malha 100×100 . Porém, observemos que ao utilizarmos oito núcleos físicos em paralelo, o método

se tornou quatro vezes mais rápido. Contudo, ao aumentarmos a quantidade de núcleos, não se observa uma queda no tempo computacional empenhado tão contundente. Tal fato é reforçado pela Figura 18 e

5. o número de Reynolds não causou instabilidade para o método. De fato, testamos parâmetros cada vez maiores e as soluções foram plenamente encontradas.

Sendo assim, ressaltamos que as técnicas de computação paralela são de suma importância para a obtenção de resultados gráficos, visto que, em tais momentos, é desejável uma malha fina. Contudo, se procuramos somente valores numéricos, uma malha grossa nos dá bons resultados.

Exemplo 2: Este exemplo é apresentado em Pearson (1965). Neste caso, consideraremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \\ \omega = -\Delta \Psi \end{cases} \quad (306)$$

sobre a região $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Além disso, consideraremos as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\begin{cases} \Psi(0, y) = \Psi(1, y) = 0, 0 \leq y \leq 1 \\ \Psi(x, 1) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ \Psi(x, 0) = 10 \cos(2\pi x) (1 - e^{-1000}), 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (307)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial y} = \frac{\partial \Psi(1, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(1, y)}{\partial y} = 0, 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{\partial \Psi(x, 1)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(x, 1)}{\partial y} = \frac{\partial \Psi(x, 0)}{\partial y} = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial \Psi(x, 0)}{\partial x} = -20\pi (1 - e^{-1000}) \operatorname{sen}(2\pi x), 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (308)$$

As condições (307) e (308) mostram que há uma injeção de fluido na região $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Também, podemos verificar que a saída do fluido ocorre na região $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Tanto a entrada quanto a saída ocorrem em direções paralelas ao eixo y .

Abordaremos este problema utilizando o Método do Tubo de Trajetórias com alguns números de Reynolds e algumas malhas. Contudo, antes de apresentarmos os resultados obtidos, faremos algumas observações a respeito do método descrito em Pearson (1965) para resolver o mesmo exemplo.

Inicialmente, observemos que este problema apresenta somente uma solução numérica. Sendo assim, originalmente considerou-se dois conjuntos de pontos da discretização do

domínio, indicadas por A , B e uma região, denotada por C , conforme ilustrado na Figura 19.

Uma vez definidos tais conjuntos, o procedimento adotado consiste dos seguintes passos:

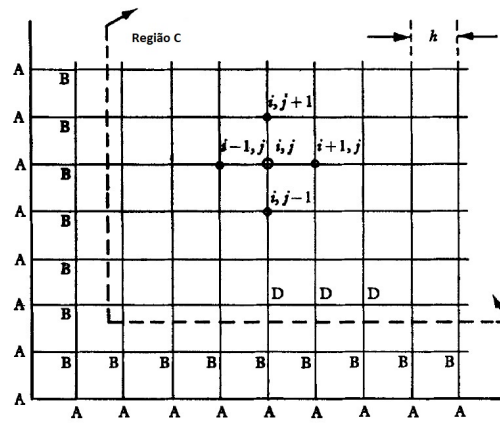
1. dado um instante temporal n , determinamos a aproximação inicial para ω^{n+1} e Ψ^{n+1} em cada nó interior da malha através de uma extrapolação na variável temporal dos valores de ω^n e Ψ^n ;
2. com as condições de contorno, determinamos Ψ^{n+1} nos pontos do conjunto A;
3. calculamos uma aproximação mais precisa dos valores de ω^{n+1} nos nós da região C;
4. com o auxílio das condições de fronteira no instante $n + 1$, obtemos as aproximações iniciais de Ψ^{n+1} nos pontos do conjunto B;
5. usando as aproximações do item anterior na fronteira da região C, determinamos Ψ^{n+1} nos pontos da região C, através de uma extrapolação;
6. com a mesma extrapolação, atualizamos os valores de ω^{n+1} no conjunto B;
7. repetimos o passo 3 para atualizarmos os valores de ω^{n+1} na região C e
8. determinamos, enfim, os valores de ω^{n+1} no conjunto A com o auxílio das condições de contorno.

O processo se repete até que tenhamos a convergência. Devemos ressaltar que, em cada um dos passos descritos acima, Pearson (1965) apresenta um conjunto de equações envolvendo as funções procuradas, advinda do Método das Diferenças Finitas Centradas de Segunda Ordem.

Em outras palavras, há uma espécie de recuo da fronteira para a inicialização da iteração. Sendo assim, a implementação computacional deste processo é mais complicada por exigir a separação da malha em quatro conjuntos distintos embora possa parecer mais eficiente.

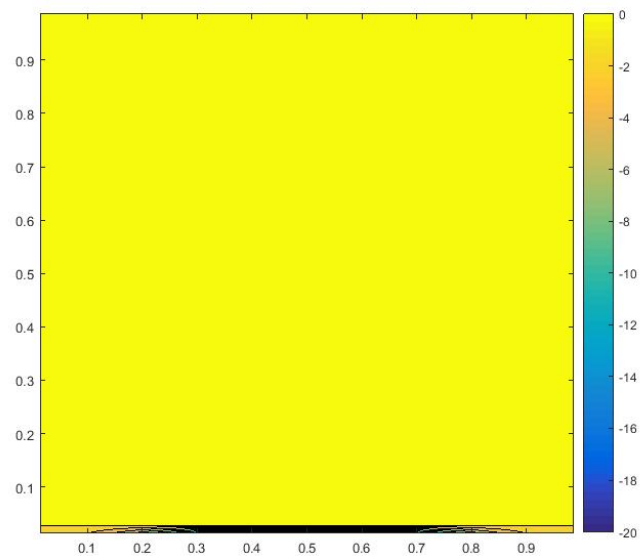
Isto posto, passemos a apresentar as soluções advindas do Método do Tubo de Trajetórias. Para isso, utilizaremos $Re = 100$, $\Delta t = 0,001$ e uma malha na qual cada eixo foi subdividido em 81 pontos. Sendo assim, as Figuras 20 a 30 apresentam a função de corrente desde $t = 0$ até o momento em que ela entra em regime permanente.

Figura 19 - Representação da malha usada em Pearson (1965)

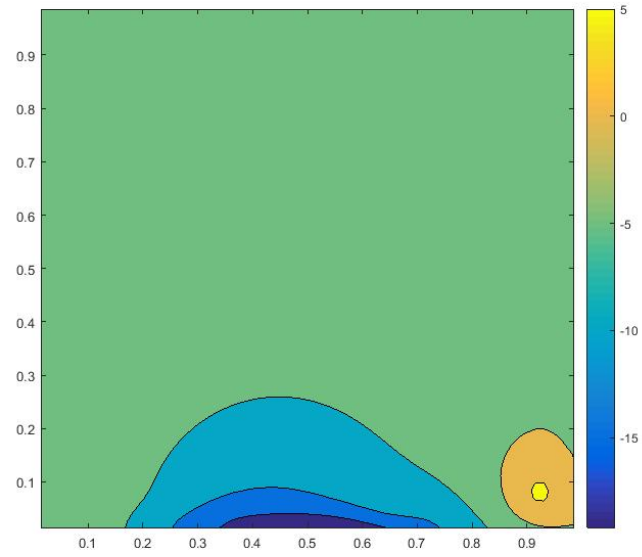


Fonte: O autor, 2019.

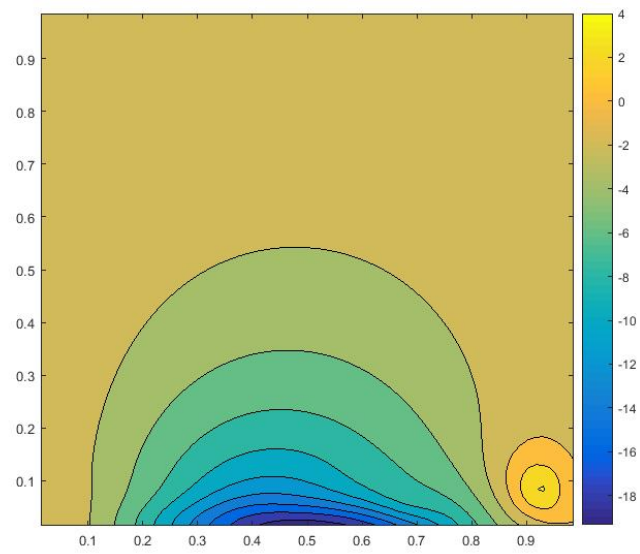
Figura 20 - Função de corrente para $t = 0$



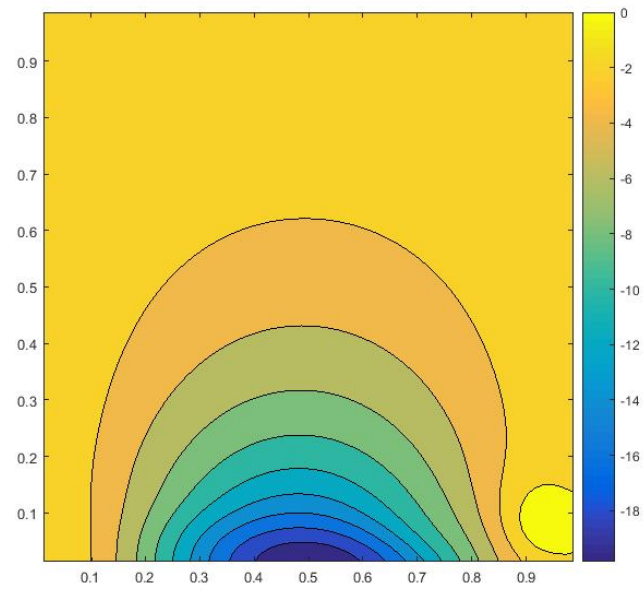
Fonte: O autor, 2019.

Figura 21 - Função de corrente para $t = 0,0016$ 

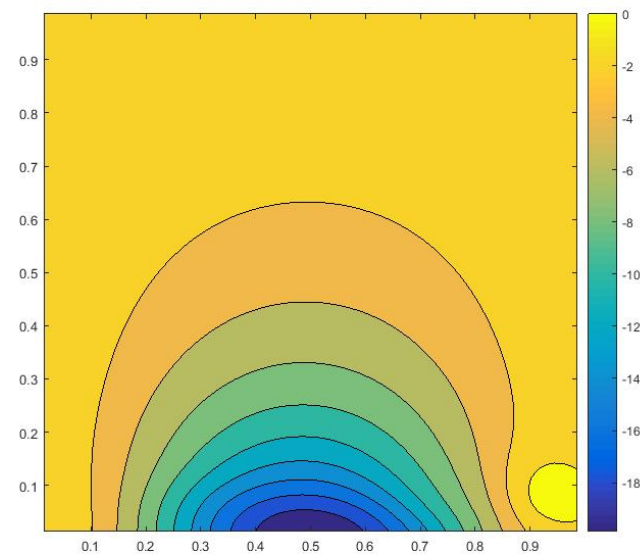
Fonte: O autor, 2019.

Figura 22 - Função de corrente para $t = 0,0019$ 

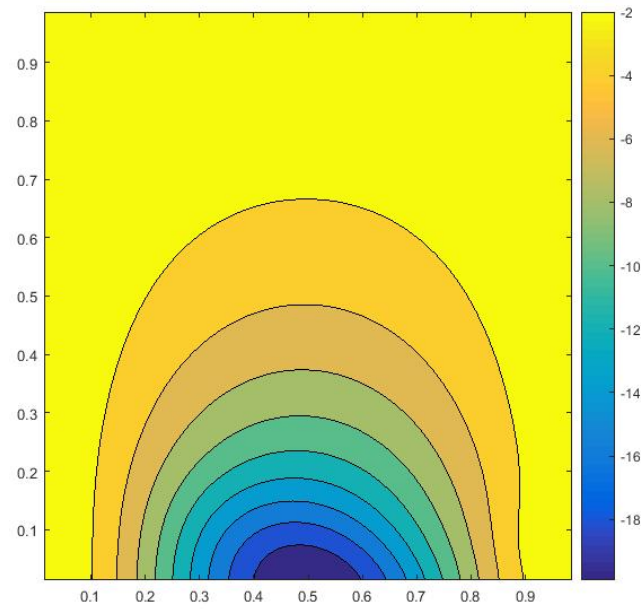
Fonte: O autor, 2019.

Figura 23 - Função de corrente para $t = 0,0037$ 

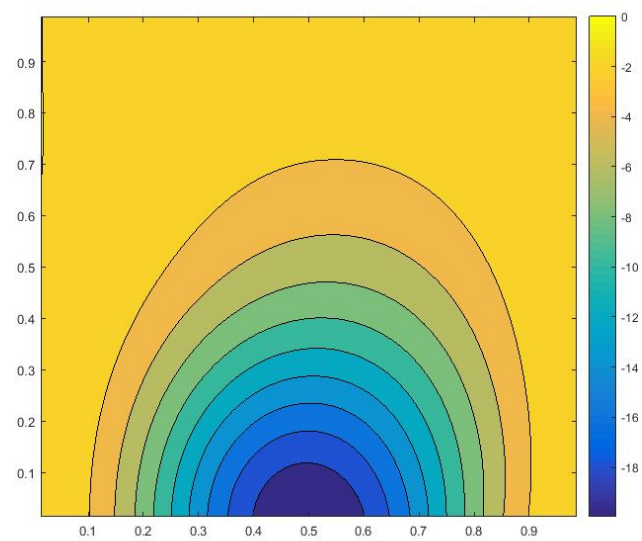
Fonte: O autor, 2019.

Figura 24 - Função de corrente para $t = 0,0044$ 

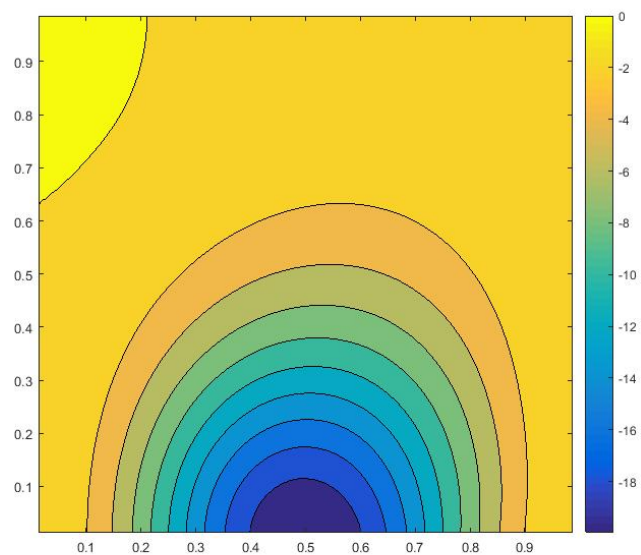
Fonte: O autor, 2019.

Figura 25 - Função de corrente para $t = 0,0102$ 

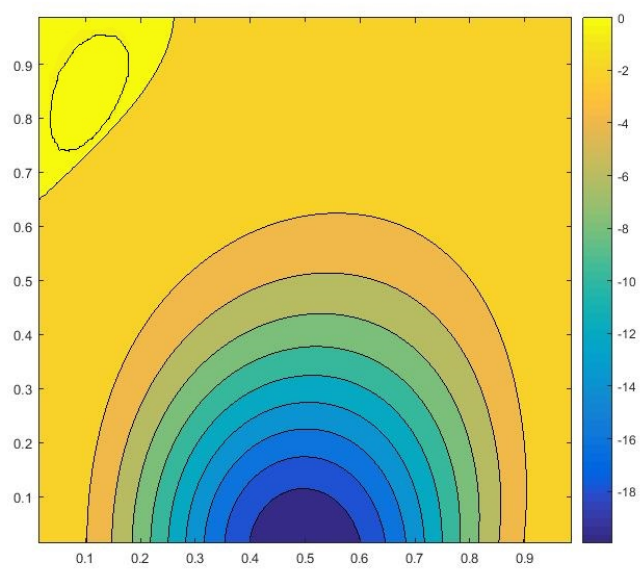
Fonte: O autor, 2019.

Figura 26 - Função de corrente para $t = 0,011$ 

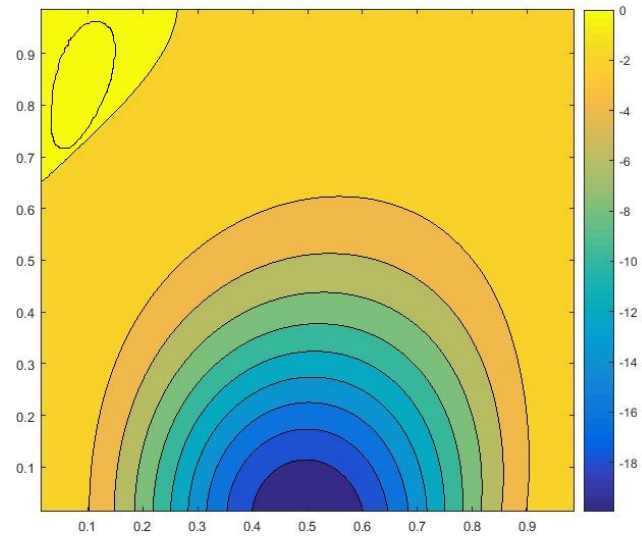
Fonte: O autor, 2019.

Figura 27 - Função de corrente para $t = 0,4036$ 

Fonte: O autor, 2019.

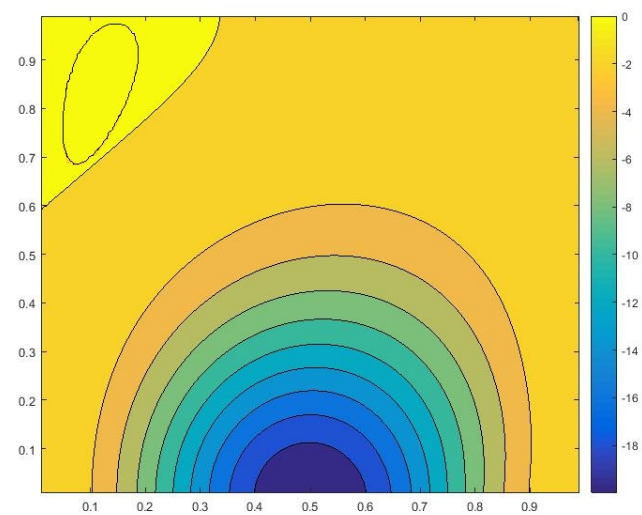
Figura 28 - Função de corrente para $t = 0,8043$ 

Fonte: O autor, 2019.

Figura 29 - Função de corrente para $t = 2,4783$ 

Fonte: O autor, 2019.

Figura 30 - Função de corrente em regime permanente



Fonte: O autor, 2019.

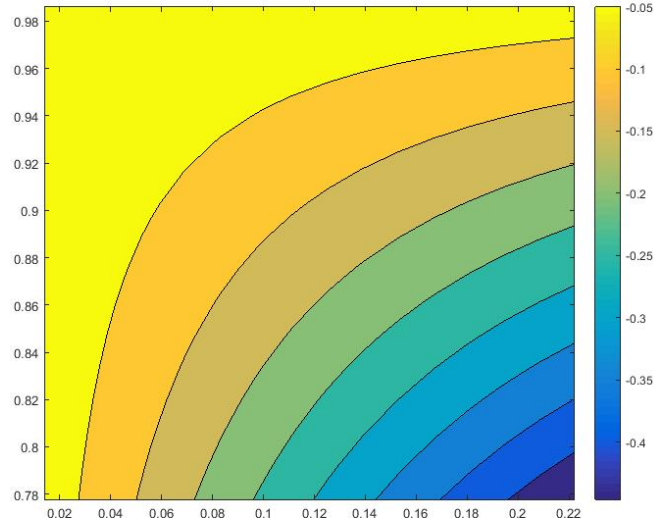
Os gráficos apresentados até o momento mostram o surgimento de um vórtice no canto superior esquerdo. As Figuras 31 a 40 apresentam uma aproximação sobre esta região específica para mostrar, com mais detalhes, o surgimento deste vórtice. Já as Figuras 41 a 51 ilustram o comportamento da vorticidade desde o instante inicial até o momento em que esta solução entra em regime permanente.

Além disso, as Figuras 52 a 73 apresentam os comportamentos dos campos de velocidades no domínio completo de discretização, bem como na região de surgimento do vórtice, o que completa a apresentação gráfica das soluções para este problema. Neste tocante, estamos utilizando uma malha formada por 41 pontos em cada eixo, o que facilitou a visualização do gráfico, tendo em vista que malhas mais refinadas geram uma quantidade maior de setas.

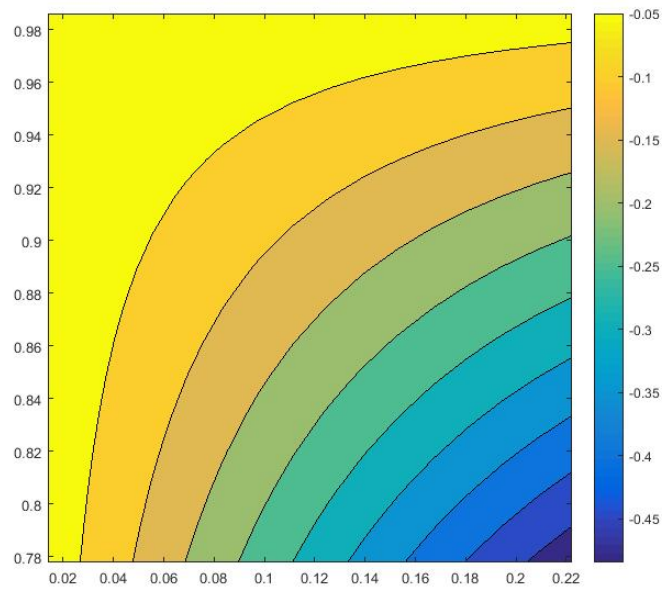
Isto posto, passemos a fazer algumas comparações de valores numéricos para verificar os resultados obtidos até aqui. Para tanto, a Tabela 7 faz o comparativo entre alguns valores da função de corrente apresentados por Pearson (1965) e o encontrado pelo Método do Tubo de Trajetórias. Novamente, frisamos que a malha adotada é composta por 41 pontos em cada eixo.

Já a Tabela 8 faz um comparativo entre as soluções encontradas em alguns pontos por nosso método considerando várias malhas distintas. Observemos que, novamente, o resultado fica praticamente inalterado com o refinamento da malha.

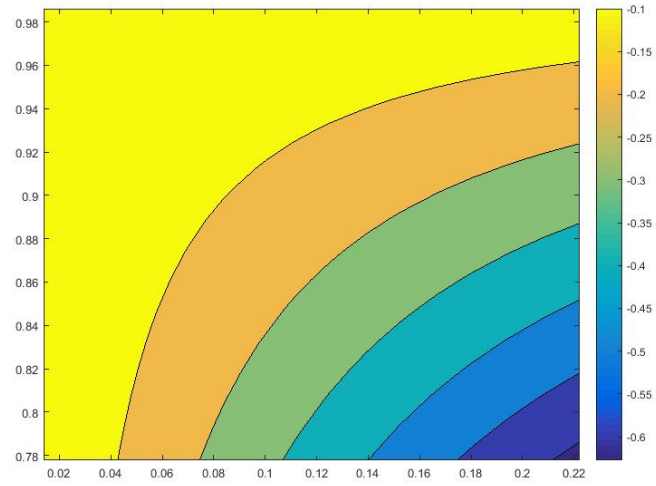
Ainda, aplicamos nosso método variando o número de Reynolds. Um fato interessante a respeito deste exemplo é que a solução em regime permanente não se altera em função deste parâmetro. Com efeito, quanto maior o número de Reynolds, mais tempo se leva para chegar às soluções, embora os valores finais sejam praticamente idênticos. Tais fatos podem ser vistos nas Tabelas 9 a 13. Por fim, a Tabela 14 e a Figura 74 ilustram os resultados advindos do uso da computação paralela usando *OpenMP* para este problema.

Figura 31 - Região do vórtice em $t = 0,0016$ 

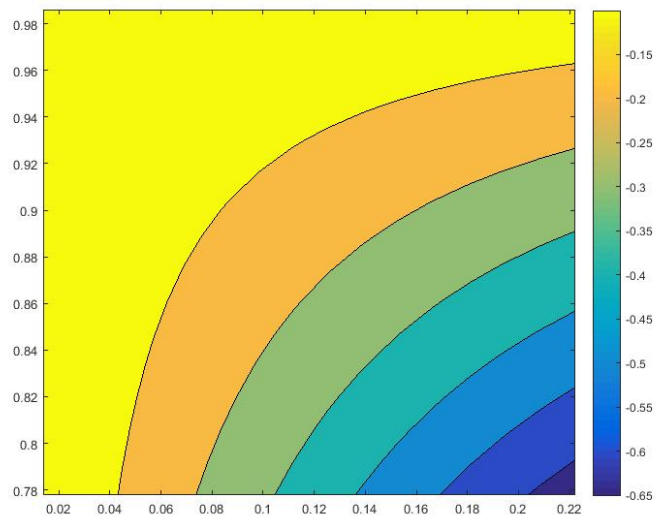
Fonte: O autor, 2019.

Figura 32 - Região do vórtice em $t = 0,0019$ 

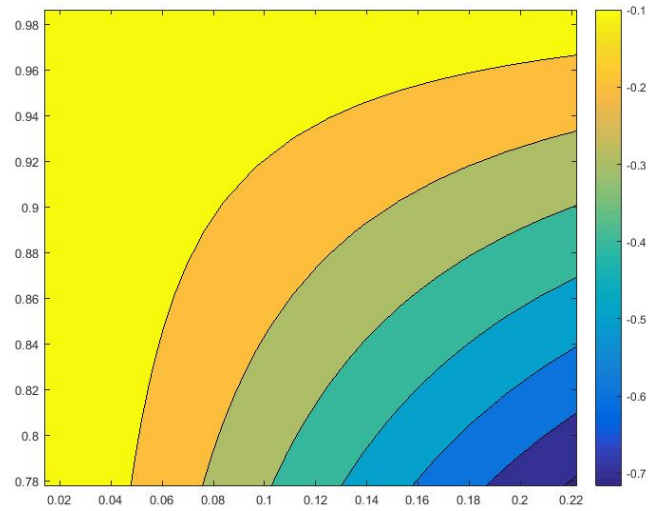
Fonte: O autor, 2019.

Figura 33 - Região do vórtice em $t = 0,0037$ 

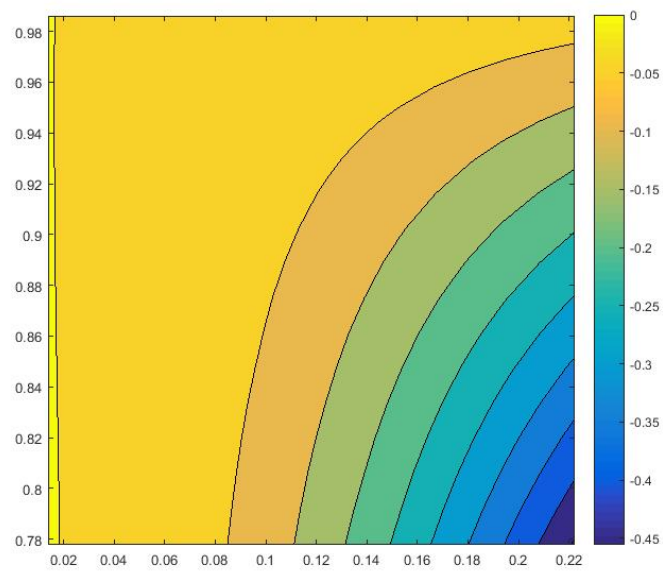
Fonte: O autor, 2019.

Figura 34 - Região do vórtice em $t = 0,0044$ 

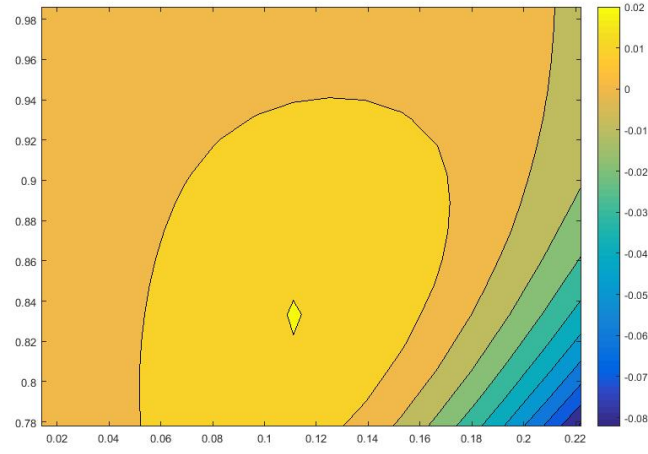
Fonte: O autor, 2019.

Figura 35 - Região do vórtice em $t = 0,0102$ 

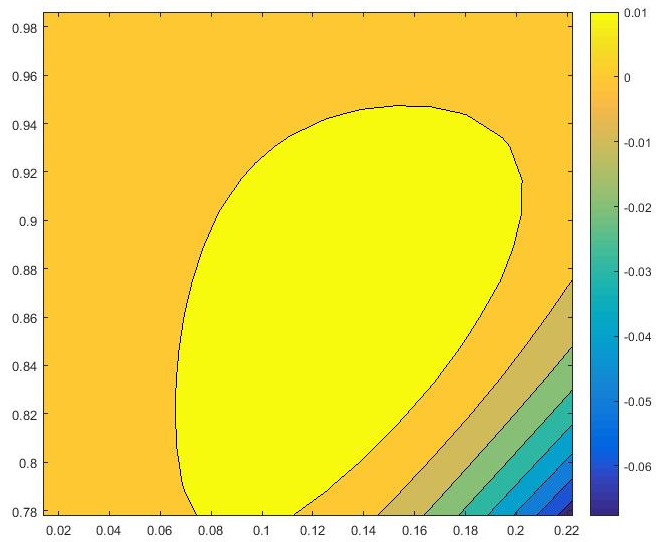
Fonte: O autor, 2019.

Figura 36 - Região do vórtice em $t = 0,0011$ 

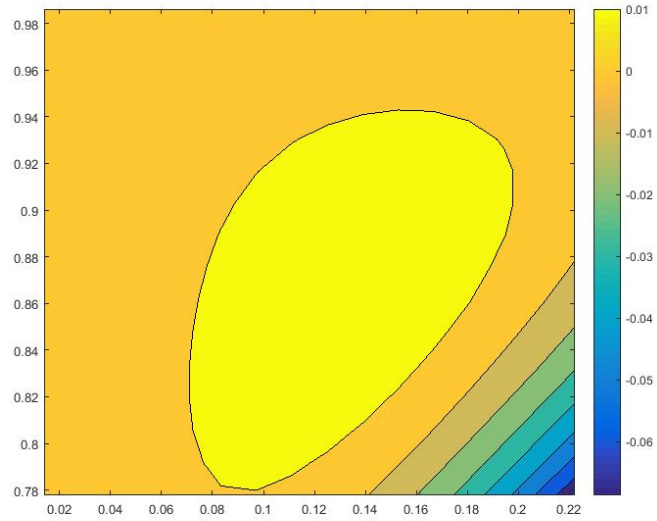
Fonte: O autor, 2019.

Figura 37 - Região do vórtice em $t = 0,4036$ 

Fonte: O autor, 2019.

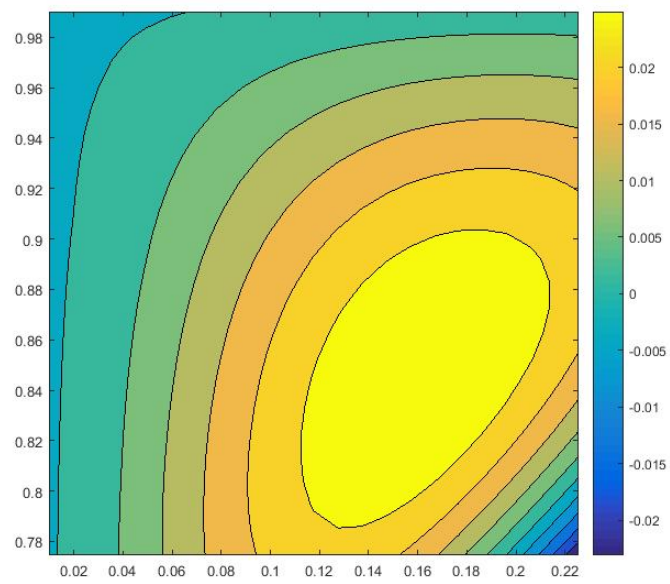
Figura 38 - Região do vórtice em $t = 0,8043$ 

Fonte: O autor, 2019.

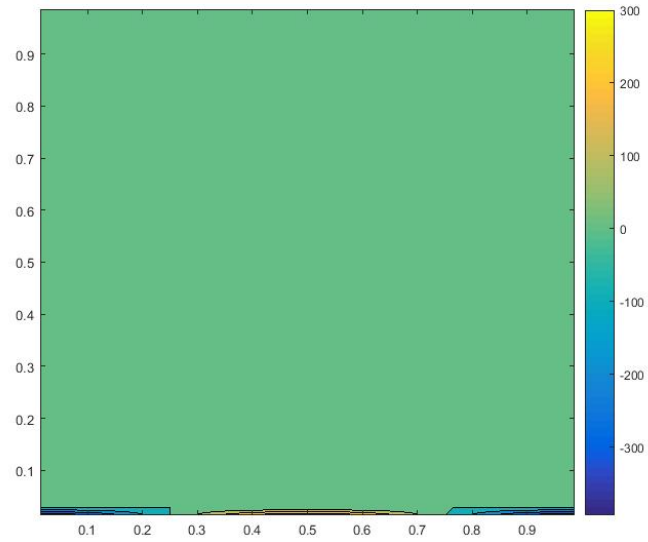
Figura 39 - Região do vórtice em $t = 2,4783$ 

Fonte: O autor, 2019.

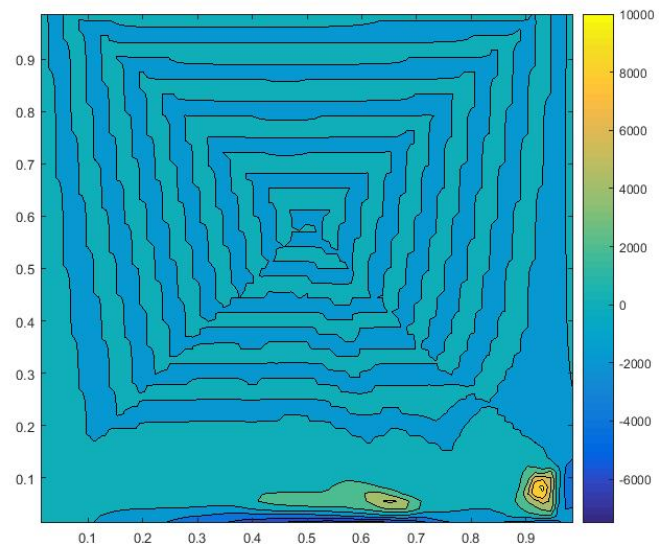
Figura 40 - Região do vórtice em regime permanente



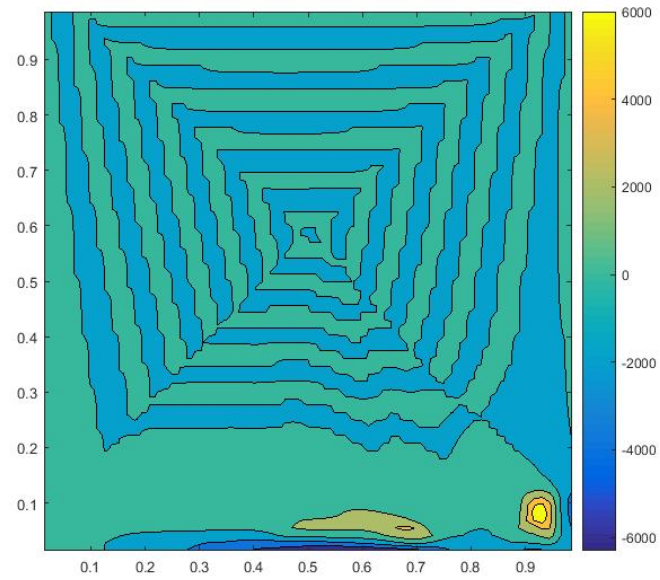
Fonte: O autor, 2019.

Figura 41 - Vorticidade para $t = 0$ 

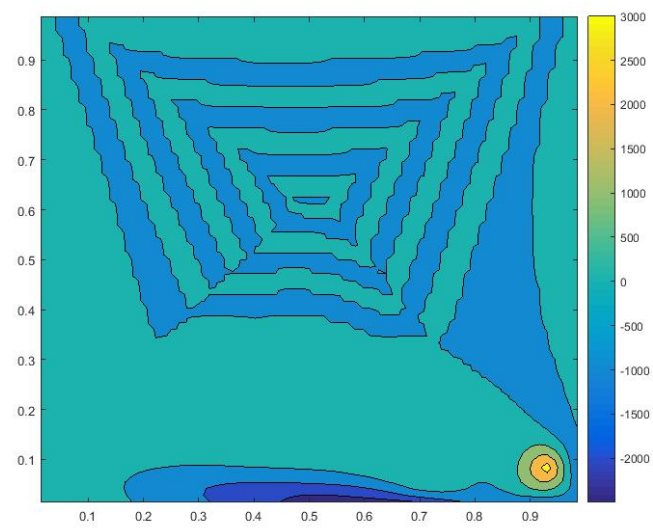
Fonte: O autor, 2019.

Figura 42 - Vorticidade para $t = 0,0016$ 

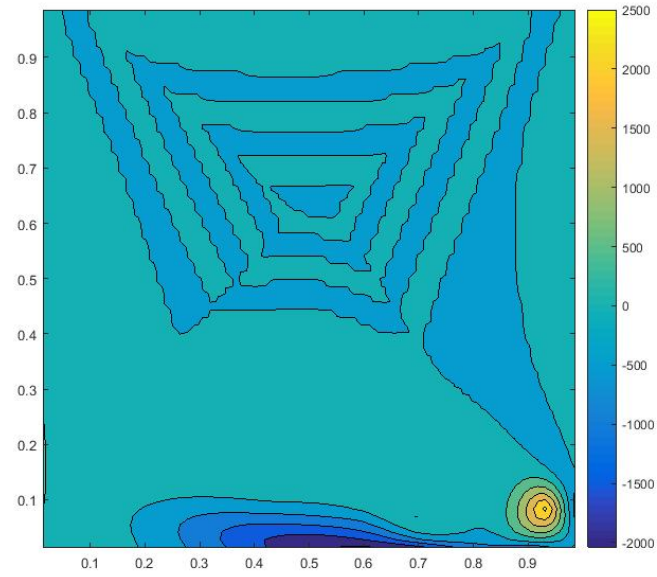
Fonte: O autor, 2019.

Figura 43 - Vorticidade para $t = 0,0019$ 

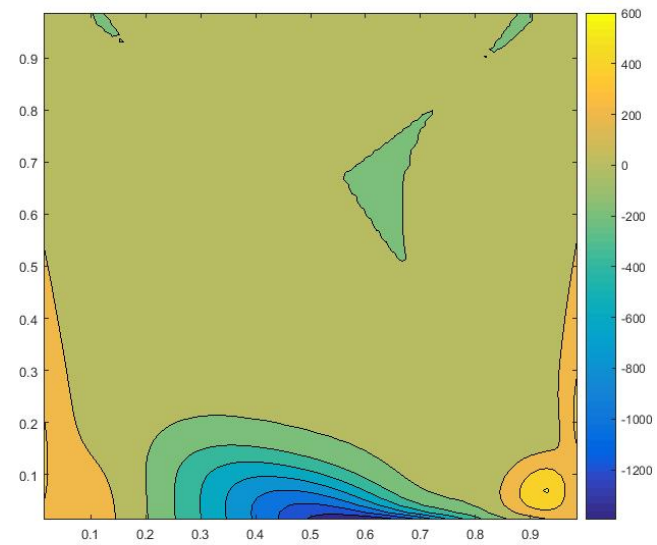
Fonte: O autor, 2019.

Figura 44 - Vorticidade para $t = 0,0037$ 

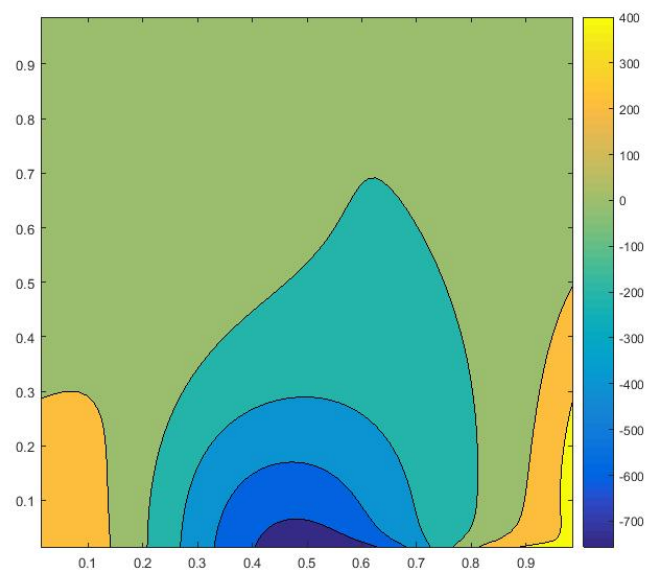
Fonte: O autor, 2019.

Figura 45 - Vorticidade para $t = 0,0044$ 

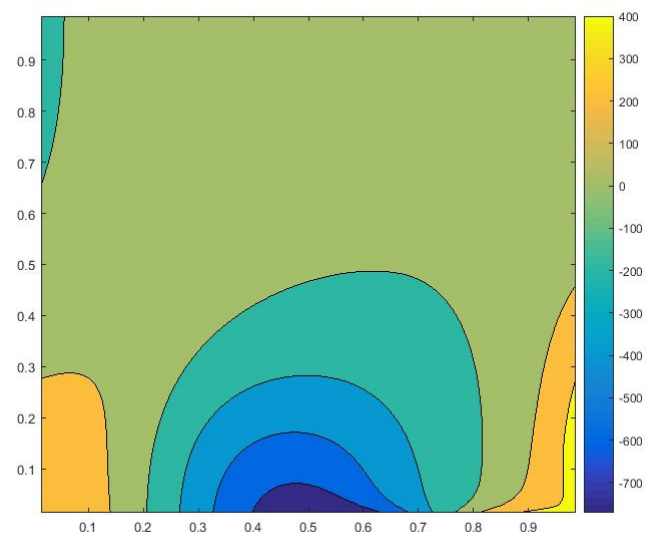
Fonte: O autor, 2019.

Figura 46 - Vorticidade para $t = 0,0102$ 

Fonte: O autor, 2019.

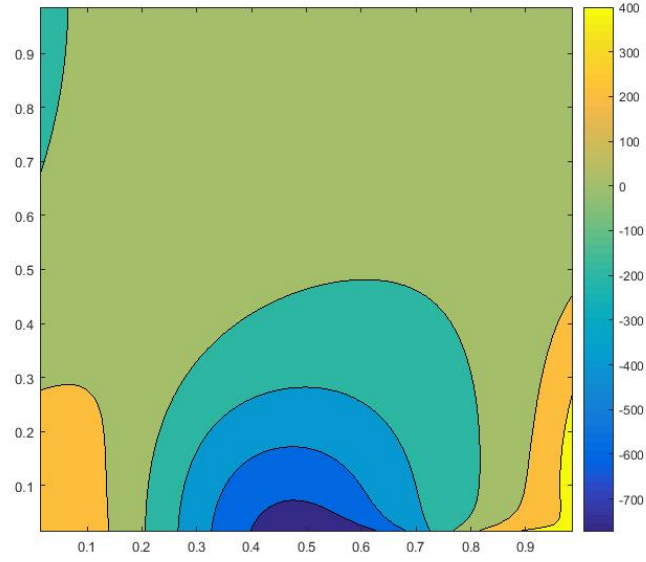
Figura 47 - Vorticidade para $t = 0,011$ 

Fonte: O autor, 2019.

Figura 48 - Vorticidade para $t = 0,04036$ 

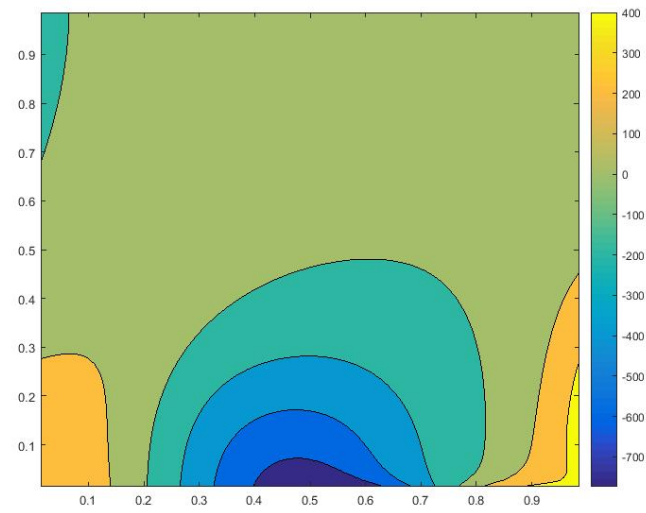
Fonte: O autor, 2019.

Figura 49 - Vorticidade para $t = 0,8043$



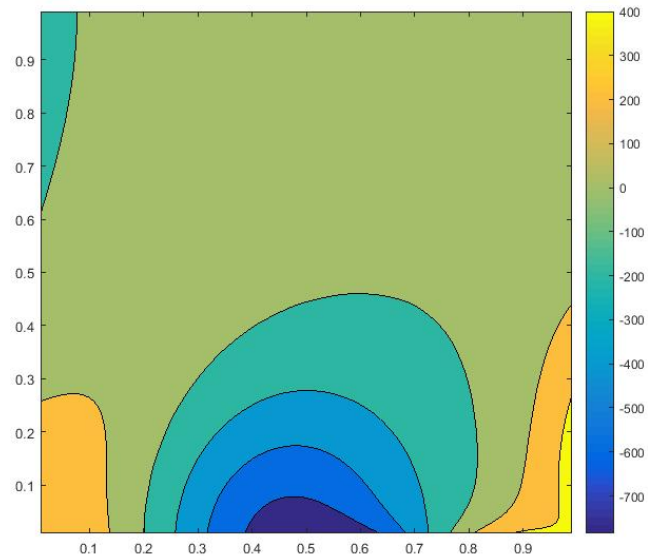
Fonte: O autor, 2019.

Figura 50 - Vorticidade para $t = 2,4783$

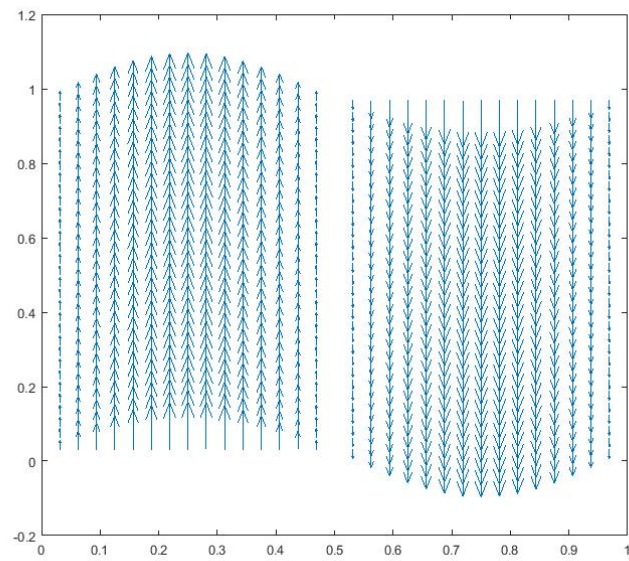


Fonte: O autor, 2019.

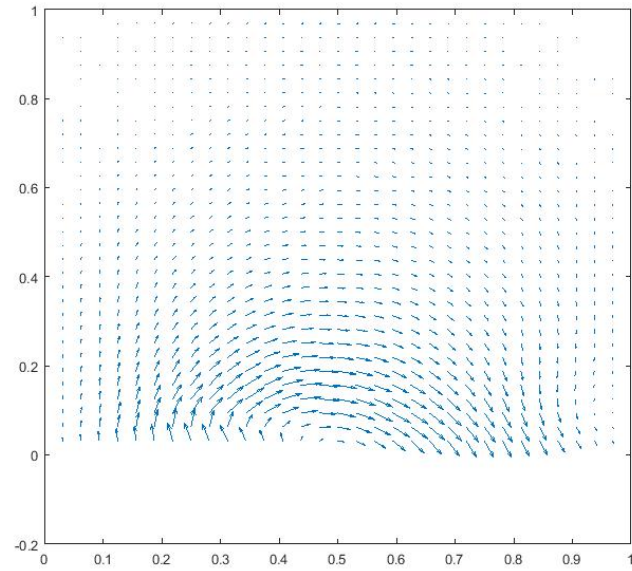
Figura 51 - Vorticidade em regime permanente



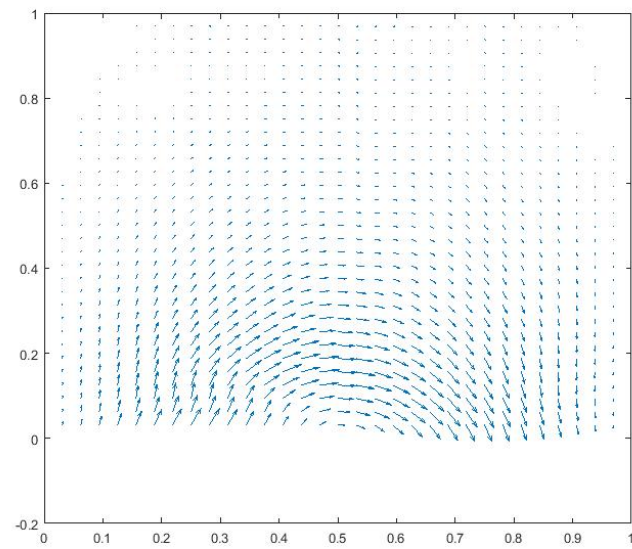
Fonte: O autor, 2019.

Figura 52 - Campo de velocidades para $t = 0$ 

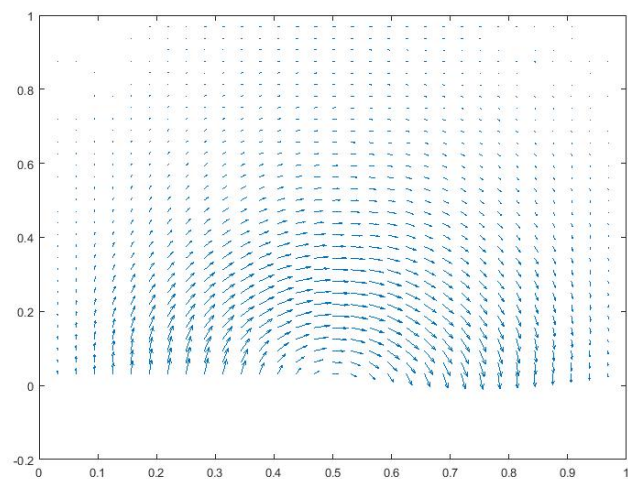
Fonte: O autor, 2019.

Figura 53 - Campo de velocidades para $t = 0,0016$ 

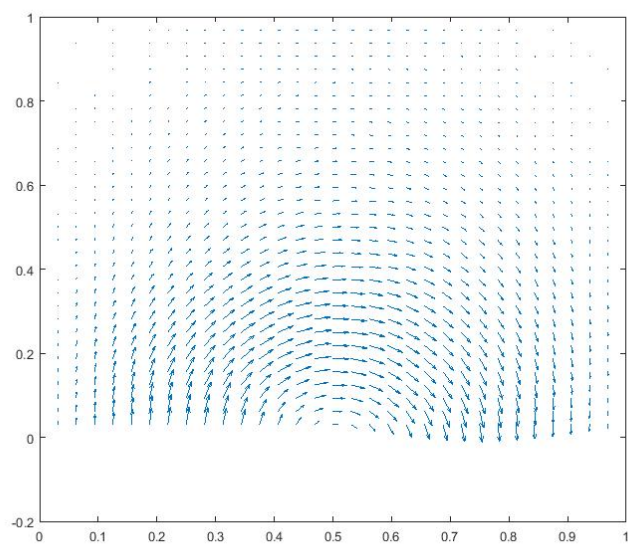
Fonte: O autor, 2019.

Figura 54 - Campo de velocidades para $t = 0,0019$ 

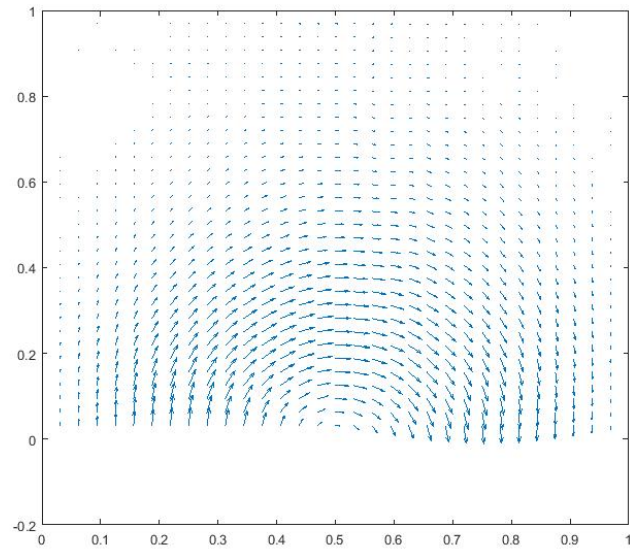
Fonte: O autor, 2019.

Figura 55 - Campo de velocidades para $t = 0,0037$ 

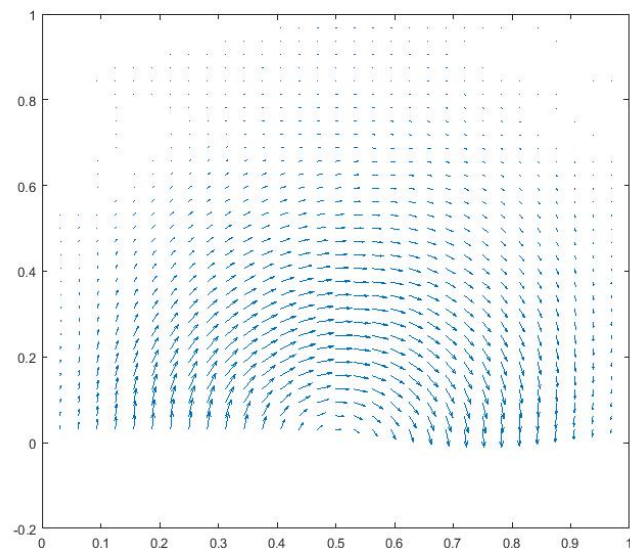
Fonte: O autor, 2019.

Figura 56 - Campo de velocidades para $t = 0,0044$ 

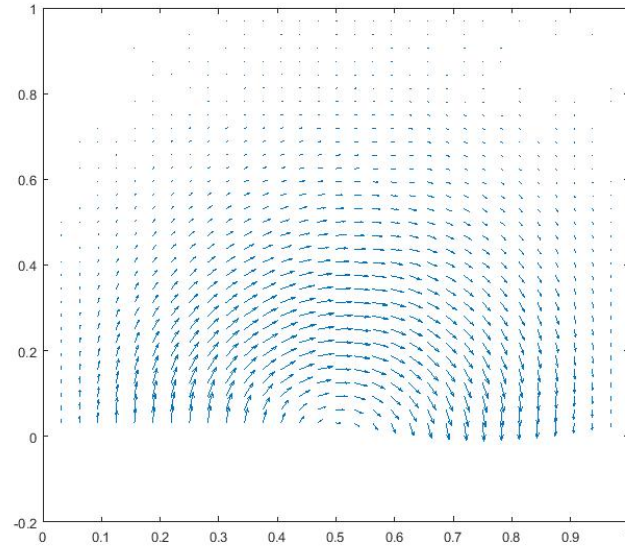
Fonte: O autor, 2019.

Figura 57 - Campo de velocidades para $t = 0,0102$ 

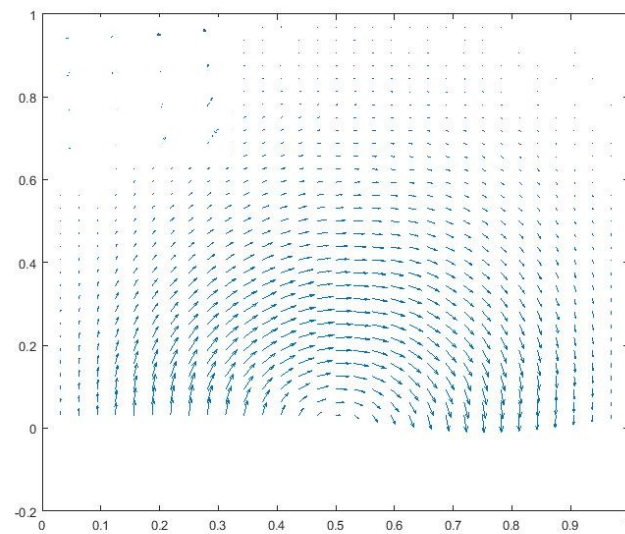
Fonte: O autor, 2019.

Figura 58 - Campo de velocidades para $t = 0,011$ 

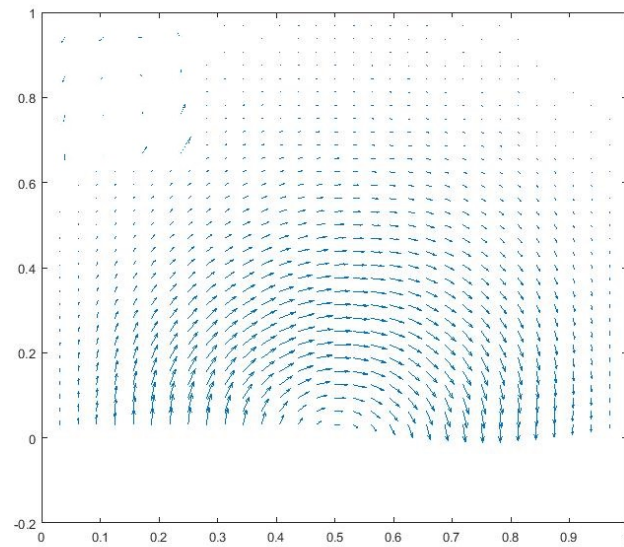
Fonte: O autor, 2019.

Figura 59 - Campo de velocidades para $t = 0,4036$ 

Fonte: O autor, 2019.

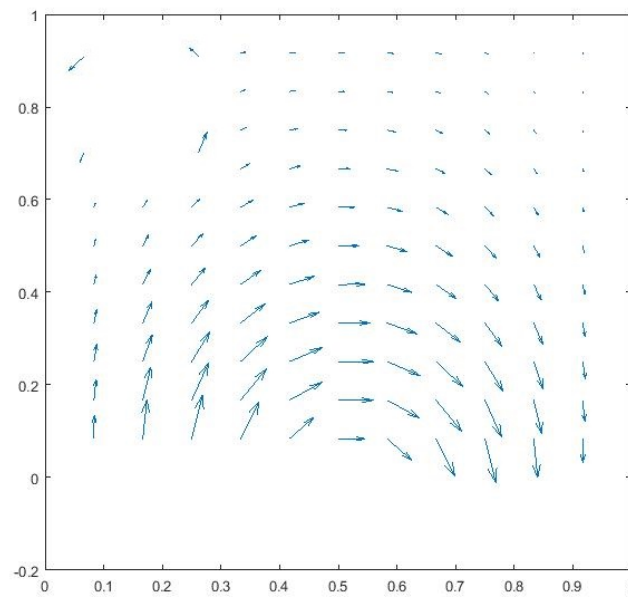
Figura 60 - Campo de velocidades para $t = 0,8043$ 

Fonte: O autor, 2019.

Figura 61 - Campo de velocidades para $t = 2,4783$ 

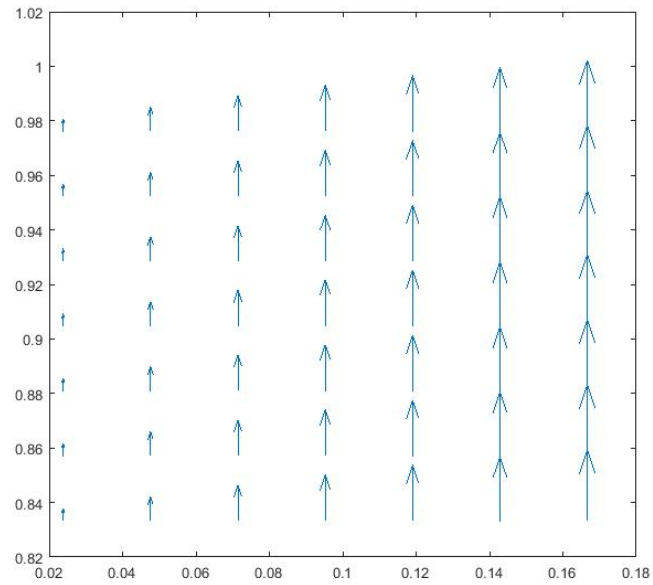
Fonte: O autor, 2019.

Figura 62 - Campo de velocidades em regime permanente



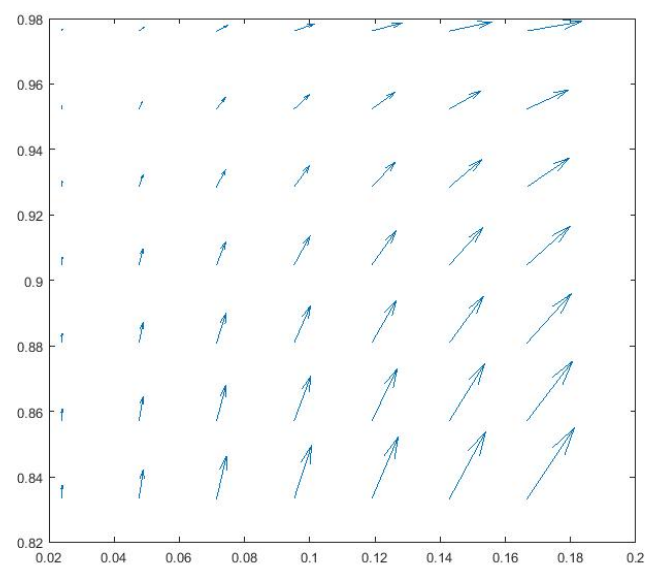
Fonte: O autor, 2019.

Figura 63 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0$



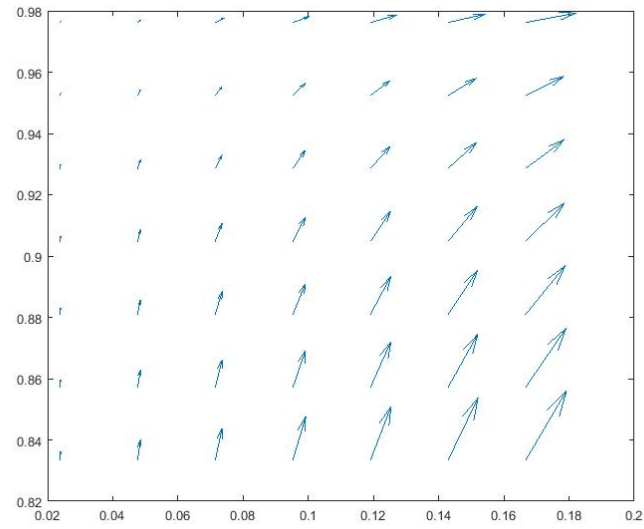
Fonte: O autor, 2019.

Figura 64 - Campo de velocidades na região do vórtice para $t = 0,0016$



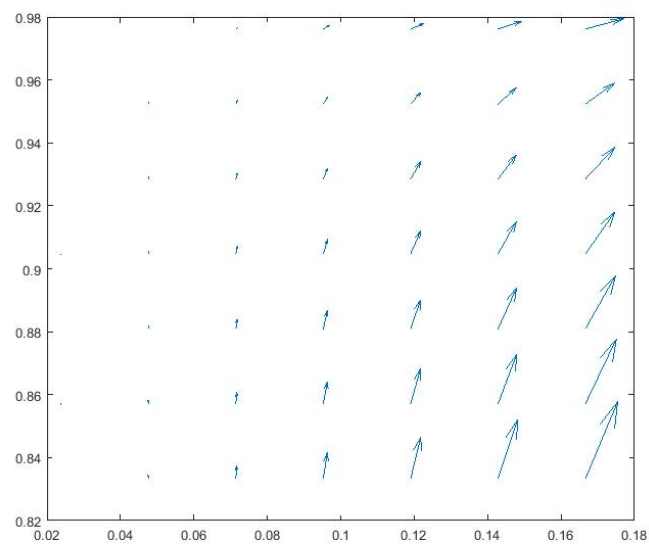
Fonte: O autor, 2019.

Figura 65 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,0019$



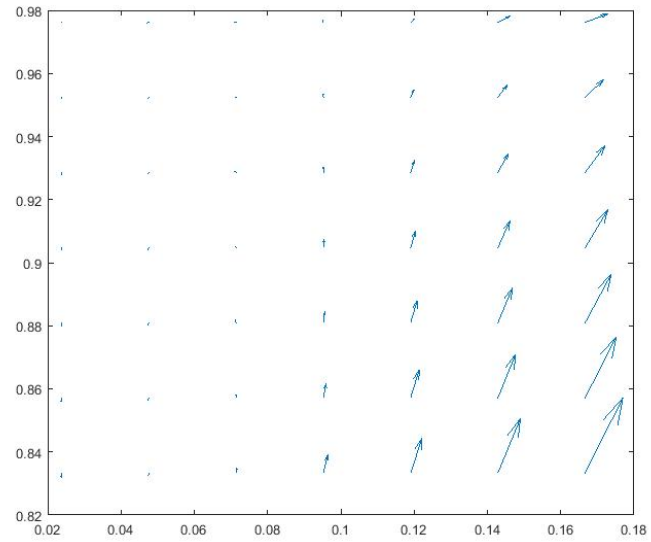
Fonte: O autor, 2019.

Figura 66 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,0037$



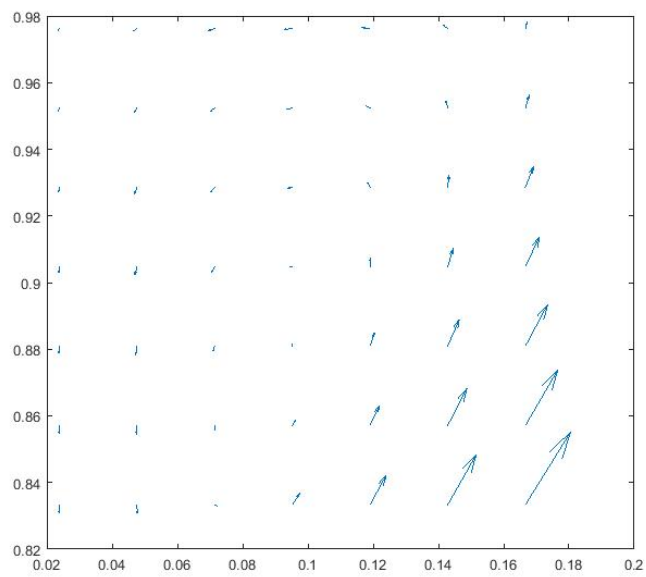
Fonte: O autor, 2019.

Figura 67 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,0044$



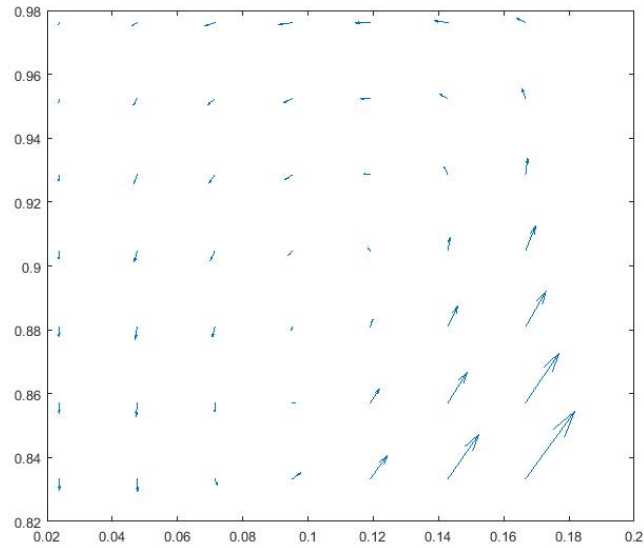
Fonte: O autor, 2019.

Figura 68 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,0102$



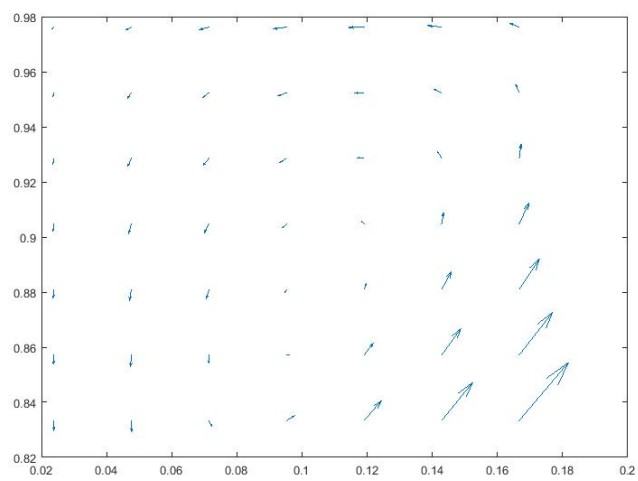
Fonte: O autor, 2019.

Figura 69 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,011$



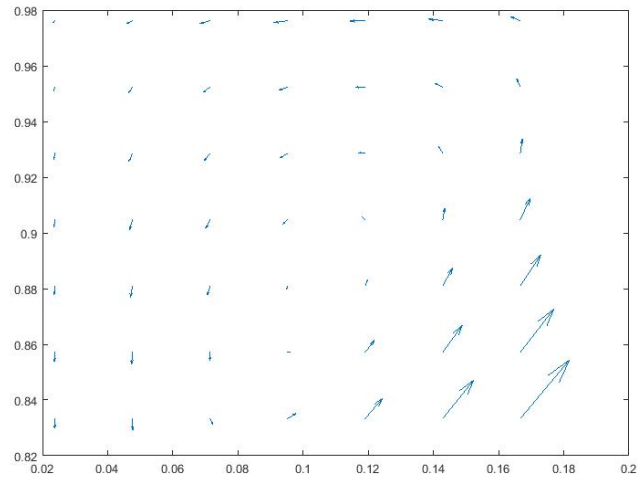
Fonte: O autor, 2019.

Figura 70 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,4036$



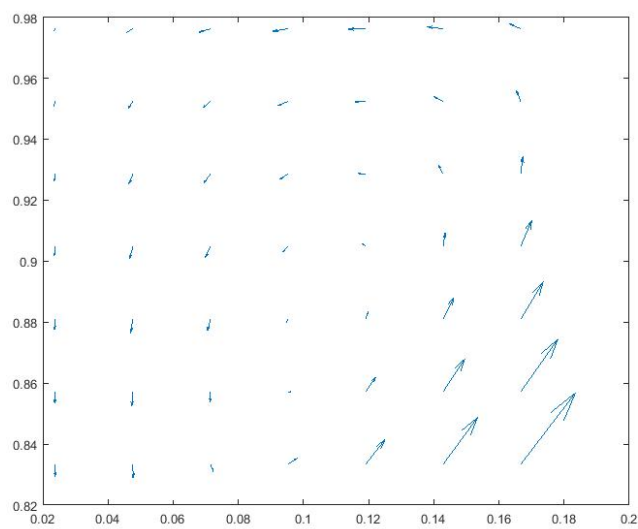
Fonte: O autor, 2019.

Figura 71 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 0,8043$



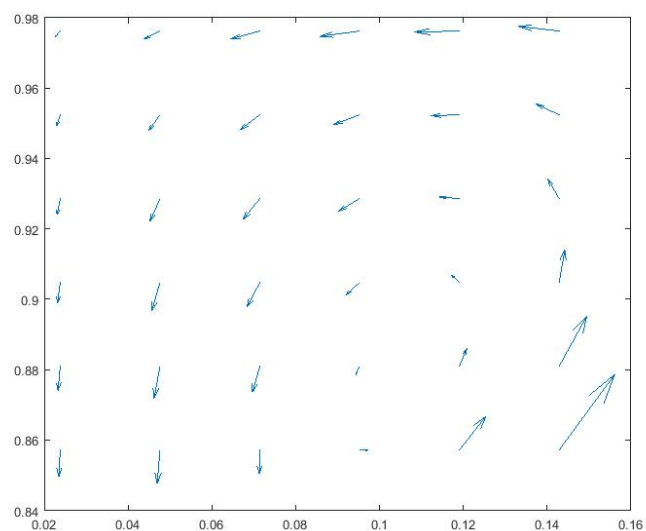
Fonte: O autor, 2019.

Figura 72 - Campo de velocidades na região do vórtice
para $t = 2,4783$



Fonte: O autor, 2019.

Figura 73 - Campo de velocidades na região do vórtice em regime permanente



Fonte: O autor, 2019.

Tabela 7 - Comparativo entre os resultados em alguns pontos da malha

Ponto	Tubo de Trajetórias	Pearson
(0, 025, 0, 25)	-0, 0636742	-0, 064
(0, 075, 0, 25)	-0, 407654	-0, 408
(0, 1, 0, 25)	-0, 623812	-0, 624
(0, 125, 0, 25)	-0, 851943	-0, 852
(0, 25, 0, 25)	-2, 1957343	-2, 196

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 8 - Comparativo entre os resultados para a função de corrente em malhas com várias subdivisões em cada eixo

Ponto	15 pontos	31 pontos	41 pontos	51 pontos	71 pontos	81 pontos
(0, 1, 0, 1)	-2, 6280	-1, 6769	-1, 6933	-1, 6935	-1, 6936	-1, 6937
(0, 1, 0, 5)	-0, 7917	-0, 1775	-0, 1755	-0, 1824	-0, 1825	-0, 1826
(0, 1, 0, 9)	-0, 0849	0, 0003	0, 0051	0, 0096	0, 0097	0, 0098
(0, 5, 0, 1)	-17, 4114	-18, 3763	-18, 4217	-18, 4194	-18, 4184	-18, 4183
(0, 5, 0, 5)	-5, 2596	-3, 9956	-4, 0126	-4, 0131	-4, 0132	-4, 0132
(0, 5, 0, 9)	-0, 6078	-0, 1780	-0, 1535	-0, 1524	-0, 1525	-0, 1526
(0, 9, 0, 1)	-2, 6454	-1, 8936	-1, 9275	-1, 9244	-1, 9245	-1, 9246
(0, 9, 0, 5)	-0, 8149	-0, 5182	-0, 5480	-0, 5456	-0, 5457	-0, 5458
(0, 9, 0, 9)	-0, 0876	-0, 0163	-0, 0152	-0, 0121	-0, 0122	-0, 0122

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 9 - Erro entre os valores obtidos para a função de corrente usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos

Reynolds\Malha	41 pontos	51 pontos	71 pontos	81 pontos
10	$5, 5773 \times 10^{-5}$	$3, 1092 \times 10^{-5}$	$9, 4062 \times 10^{-6}$	$8, 5261 \times 10^{-6}$
100	$5, 6177 \times 10^{-5}$	$2, 8431 \times 10^{-5}$	$2, 8798 \times 10^{-6}$	$1, 5261 \times 10^{-6}$
500	$5, 6405 \times 10^{-5}$	$2, 8162 \times 10^{-5}$	$1, 8268 \times 10^{-6}$	$1, 7526 \times 10^{-6}$
1000	$5, 6447 \times 10^{-5}$	$2, 8139 \times 10^{-5}$	$1, 6894 \times 10^{-6}$	$1, 5486 \times 10^{-6}$
2500	$5, 6476 \times 10^{-5}$	$2, 8128 \times 10^{-5}$	$1, 6074 \times 10^{-6}$	$8, 8981 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 10 - Erro entre os valores obtidos para a vorticidade usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos

Reynolds\Malha	41 pontos	51 pontos	71 pontos	81 pontos
10	$1, 7924 \times 10^{-3}$	$1, 5647 \times 10^{-3}$	$1, 631 \times 10^{-4}$	$1, 0902 \times 10^{-4}$
100	$1, 7989 \times 10^{-3}$	$1, 4726 \times 10^{-3}$	$2, 889 \times 10^{-4}$	$1, 1265 \times 10^{-4}$
500	$1, 8031 \times 10^{-3}$	$1, 4116 \times 10^{-3}$	$1, 849 \times 10^{-4}$	$1, 632 \times 10^{-4}$
1000	$1, 8039 \times 10^{-3}$	$1, 4098 \times 10^{-3}$	$1, 713 \times 10^{-4}$	$1, 3541 \times 10^{-4}$
2500	$1, 8043 \times 10^{-3}$	$1, 4088 \times 10^{-3}$	$1, 631 \times 10^{-4}$	$1, 1368 \times 10^{-4}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 11 - Erro entre os valores obtidos para o campo de velocidades v_1 usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos

Reynolds\Malha	41 pontos	51 pontos	71 pontos	81 pontos
10	$3,12 \times 10^{-5}$	$2,16 \times 10^{-5}$	$3,5844 \times 10^{-6}$	$6,7857 \times 10^{-7}$
100	$3,15 \times 10^{-5}$	$1,97 \times 10^{-5}$	$2,168 \times 10^{-6}$	$6,6713 \times 10^{-7}$
500	$3,16 \times 10^{-5}$	$1,95 \times 10^{-5}$	$2,0423 \times 10^{-6}$	$1,9785 \times 10^{-7}$
1000	$3,16 \times 10^{-5}$	$1,95 \times 10^{-5}$	$2,0257 \times 10^{-6}$	$1,857 \times 10^{-7}$
2500	$3,16 \times 10^{-5}$	$1,95 \times 10^{-5}$	$2,0155 \times 10^{-6}$	$6,6523 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 12 - Erro entre os valores obtidos para o campo de velocidades v_2 usando $Re = 1$ e outros números de Reynolds para malhas com diferentes subdivisões nos eixos

Reynolds\Malha	41 pontos	51 pontos	71 pontos	81 pontos
10	$4,9975 \times 10^{-5}$	$4,7654 \times 10^{-5}$	$3,618 \times 10^{-6}$	$6,5167 \times 10^{-7}$
100	$4,5592 \times 10^{-5}$	$3,9258 \times 10^{-5}$	$1,9401 \times 10^{-6}$	$6,3045 \times 10^{-7}$
500	$4,5069 \times 10^{-5}$	$3,8178 \times 10^{-5}$	$1,7771 \times 10^{-6}$	$1,4258 \times 10^{-7}$
1000	$4,5002 \times 10^{-5}$	$3,8037 \times 10^{-5}$	$1,7576 \times 10^{-6}$	$1,352 \times 10^{-7}$
2500	$4,4961 \times 10^{-5}$	$3,7952 \times 10^{-5}$	$1,7457 \times 10^{-6}$	$6,27 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 13 - Quantidade de *time-steps* necessários para obter a solução em regime permanente para diversos números de Reynolds e malhas

Reynolds	Malha	Δt	<i>Time-Steps</i>	Tempo (segundos)
1	41 × 41	10 ⁻³	318	469, 11
	51 × 51	10 ⁻³	338	917, 5
	71 × 71	10 ⁻³	349	2656, 4
	71 × 71	10 ⁻⁴	4290	8658, 58
10	41 × 41	10 ⁻⁴	12894	3719, 94
	51 × 51	10 ⁻⁴	14357	7819, 02
	71 × 71	10 ⁻⁴	15790	10877, 28
	81 × 81	10 ⁻⁵	140527	21257, 5
100	41 × 41	10 ⁻⁴	19730	3914, 08
	51 × 51	10 ⁻⁴	25021	8933, 8
	71 × 71	10 ⁻⁴	48673	11147, 89
	81 × 81	10 ⁻⁵	425972	42829, 5
500	41 × 41	10 ⁻⁴	22891	4370, 15
	51 × 51	10 ⁻⁴	36580	11271, 46
	71 × 71	10 ⁻⁴	123473	18851, 05
	81 × 81	10 ⁻⁴	328373	59495, 5
1000	41 × 41	10 ⁻⁴	25361	4558, 74
	51 × 51	10 ⁻⁴	43152	12780, 37
	71 × 71	10 ⁻⁴	189013	27374, 59
	81 × 81	10 ⁻⁵	285692	62589, 62
2500	41 × 41	10 ⁻⁴	28423	4997, 93
	51 × 51	10 ⁻⁴	56094	15305, 68
	71 × 71	10 ⁻⁴	248682	32458, 88
	81 × 81	10 ⁻⁵	313604	83880, 24

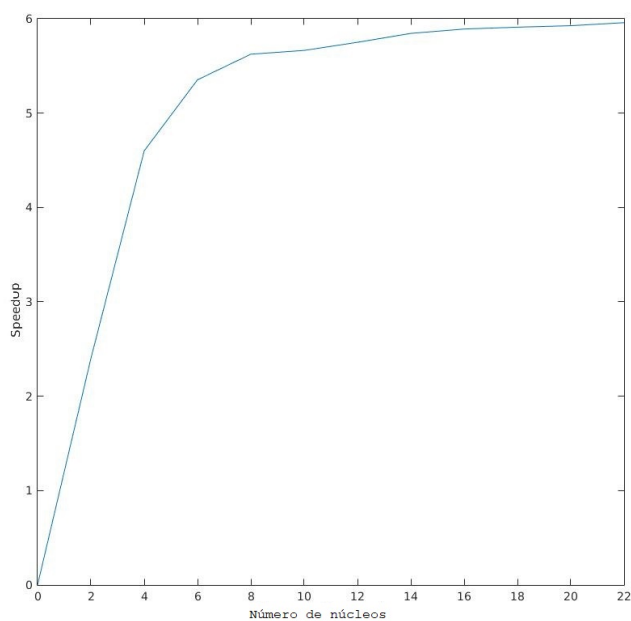
Fonte: O autor, 2019.

Tabela 14 - Tempo empenhado para determinar a Solução, em regime permanente, usando $Re = 2500$ e $\Delta t = 0,00001$ numa malha 81×81 .

Número de <i>threads</i>	Tempo de processamento
1	23 horas e 18 minutos
2	9 horas e 43 minutos
4	5 horas e 4 minutos
6	4 horas e 21 minutos
8	4 horas e 9 minutos
10	4 horas e 7 minutos
12	4 horas e 3 minutos
14	3 horas e 59 minutos
16	3 horas e 57 minutos
18	3 horas e 56 minutos
20	3 dia e 55 minutos
22	3 horas e 55 minutos

Fonte: O autor, 2019.

Figura 74 - Curva de *speedup*.



Fonte: O autor, 2019.

Observando os gráficos e tabelas apresentados para este exemplo, podemos notar o seguinte:

1. segundo Pearson (1965), seu método é complicado de implementar pois exige o recuo da fronteira do domínio de discretização. Além disso, segundo o mesmo artigo, este fato pode acarretar em instabilidade numérica. Neste sentido, o Método do Tubo de Trajetórias evita este dificultador uma vez que considera os pontos fronteirigos;
2. as Figuras 20 a 30 apresentam, como já indicado, a evolução gráfica da função de corrente desde o início do movimento até sua entrada em regime permanente. Porém, observemos que as Figuras 21 a 24 mostram um vórtice no canto inferior direito que desaparece ao longo do tempo. Esta informação não é detectada em Pearson (1965);
3. a Figura 30, em particular, pode ser comparada com aquela apresentada em Pearson (1965). Neste caso, é possível observar que, do ponto de vista gráfico, encontramos a mesma solução descrita pelo supracitado autor;
4. a aproximação feita no canto superior esquerdo do domínio de discretização descrita pelas Figuras 32 a 40 mostram o surgimento de vários vórtices nesta região, o que também não é mostrado em Pearson (1965);
5. as Figuras 41 a 51 trazem a evolução gráfica da vorticidade, sendo esta uma informação adicional;
6. as Figuras 52 a 73 apresentam a evolução dos campos de velocidade do movimento analisado no domínio de discretização, bem como no canto superior esquerdo desta mesma região. Percebamos que tais gráficos são consonantes com os gráficos da função de corrente apresentados anteriormente;
7. a Tabela 7 mostra que nosso método encontra a mesma solução numérica para a função de corrente obtida por Pearson;
8. A Tabela 8 apresenta o fato de que o refinamento da malha não interfere significativamente na obtenção de valores para a função de corrente. Note que, em vários pontos, os valores ficam praticamente imutáveis a partir de malhas com mais de 1681 nós, ou seja, grades do tipo 41×41 . Portanto, é perceptível que temos valores confiáveis em malhas grossas;
9. As Tabelas 9 a 12 apresentam um dado curioso para o exemplo em tela. Inicialmente, considere as soluções obtidas para o problema com $Re = 1$. Em seguida, determinamos os valores das soluções obtidas para o mesmo problema para alguns números de Reynolds e calculamos os erros de aproximação entre estas soluções e aquelas

obtidas para $Re = 1$. Os resultados indicam que apesar da variação do número de Reynolds, as soluções obtidas são praticamente as mesmas. O único impacto observado pela alteração do número de Reynolds reside no tempo computacional gasto conforme indica a Tabela 13 e

10. a Tabela 14 ilustra o caso mais demorado que foi testado. Novamente é perceptível que, ao utilizarmos seis núcleos físicos, o método se torna cerca de cinco vezes mais rápido. Assim, as técnicas de computação paralela são necessárias para este problema. Ainda, notemos que a partir desta quantidade de núcleos o ganho não é tão significativo. Tal fato é reforçado pela Figura 74.

Desta forma, podemos concluir que o Método do Tubo de Trajetórias aliado ao *OpenMP* se mostrou bastante eficaz para a análise deste exemplo. Além disso, devemos destacar que sua implementação se revelou mais simples do que o modelo proposto em Pearson (1965).

Exemplo 3: Trata-se de um problema apresentado por Gartling (1990), oriundo da adaptação de um experimento descrito por Armaly et al. (1983). Este problema também foi estudado por Shah e Yuan (2008) e Erturk (2007). Sendo assim, consideremos o seguinte domínio $\Omega = [0, 30] \times [-0.5, 0.5]$. Nesta região, desejamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \\ \omega = -\Delta \Psi \end{cases} \quad (309)$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\begin{cases} \Psi(x, 0.5) = \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 30 \\ \Psi(x, -0.5) = 0, 0 \leq x \leq 30 \\ \Psi(0, y) = 0, -0.5 \leq y \leq 0 \\ \Psi(0, y) = 6y^2 - 8y^3, 0 \leq y \leq 0.5 \\ \Psi(30, y) = y^3 + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}, -0.5 \leq y \leq 0.5 \end{cases} \quad (310)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(x, 0.5)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(x, 0.5)}{\partial y} = \frac{\partial \Psi(x, -0.5)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(x, -0.5)}{\partial y} = 0, 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial y} = 0, -0.5 \leq y \leq 0 \\ \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial x} = 0, 0 \leq y \leq 0.5 \\ \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial y} = 12y - 24y^2, 0 \leq y \leq 0.5 \\ \frac{\partial \Psi(30, y)}{\partial x} = 0, -0.5 \leq y \leq 0.5 \\ \frac{\partial \Psi(30, y)}{\partial y} = 3y^2 + \frac{3}{4}, -0.5 \leq y \leq 0.5 \end{cases} \quad (311)$$

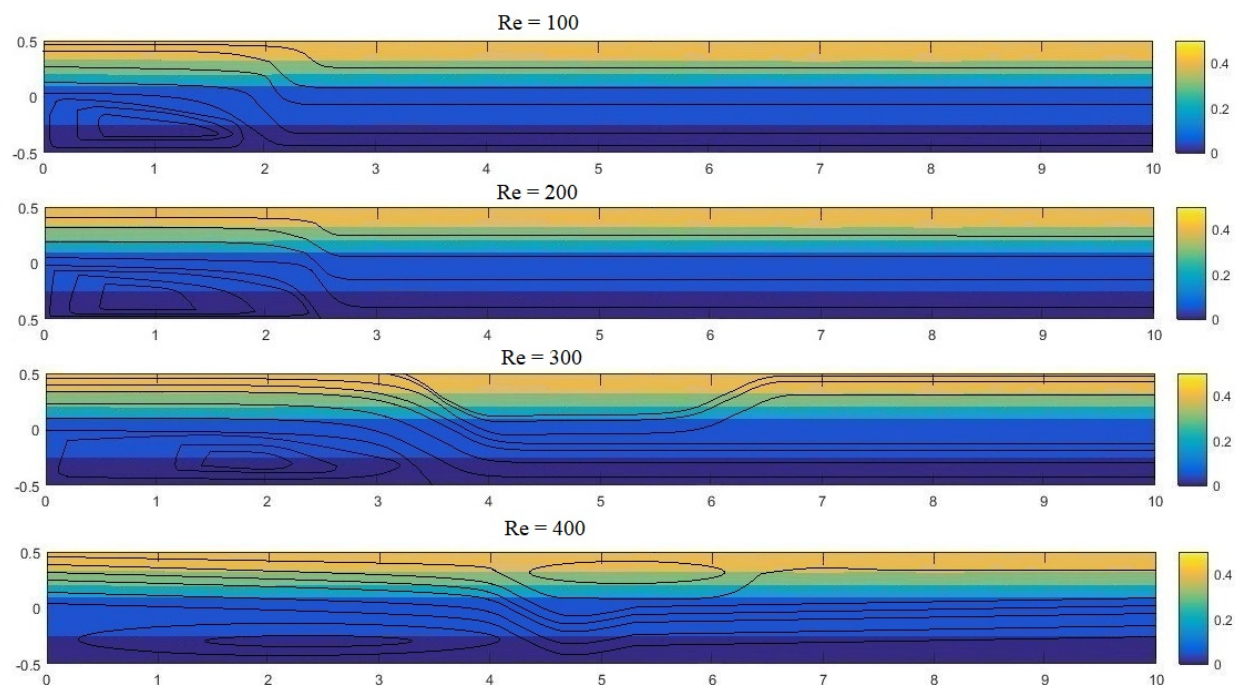
As condições descritas em (310) e (311) nos garantem que o fluido que está escoando pelo tubo é incompressível. Existem várias abordagens para resolver este problema, sendo a mais comum a subdivisão da malha em duas: uma mais refinada na região entre $0 \leq x \leq 15$ e outra mais grossa na região $15 \leq x \leq 30$, conforme descrito em Gartling (1990). Uma outra abordagem se baseia na análise de autovalores e autovetores das matrizes dos sistemas lineares advindas da discretização do problema, conforme explicitado em Shah e Yuan (2008) e Erturk (2007). E, por fim, pela impossibilidade de repetir o experimento no plano, pode-se realizar o experimento no espaço e escanear as curvas de nível da solução para inferir através de uma série de adaptações de parâmetros como se comportará a solução bidimensional, conforme mostrado em Armaly et al. (1983). Contudo, segundo Armaly et al. (1983), esta última técnica não é adequada para o estudo do problema com números de Reynolds elevados. Por fim, não entraremos em maiores detalhes de cada uma destas técnicas para que não fujamos do escopo deste trabalho.

Desta forma, o Método do Tubo de Trajetórias é de implementação computacional mais simples e apresenta os mesmos resultados. Com efeito, as Figuras 75, 76 e 77 mostram o comportamento da função de corrente para números de Reynolds variando entre 100 e 1100, em uma subregião do domínio. Este intervalo foi escolhido pois, para números de Reynolds superiores, a solução sofre alterações irrelevantes. Além disso, a escolha da região se deu para permitir a comparação de resultados com os artigos citados e, em todos os casos, os padrões de movimento encontrados são os mesmos descritos por aqueles autores.

Para termos um comparativo numérico, apresentamos as Tabelas 15 e 16 nas quais indicamos os valores descritos por Gartling (1990) e os obtidos por nosso método em alguns pontos. Já as Tabelas 17, 18 e 19 apresentam comparações entre os valores obtidos por Erturk (2007) e nosso método para os campos de velocidade e a vorticidade em vários pontos. A Tabela 20 mostra os valores obtidos para a função de corrente em alguns pontos para várias malhas. Neste casos em particular, adotamos $Re = 800$, $\Delta t = 0,001$ e uma malha 329×10 .

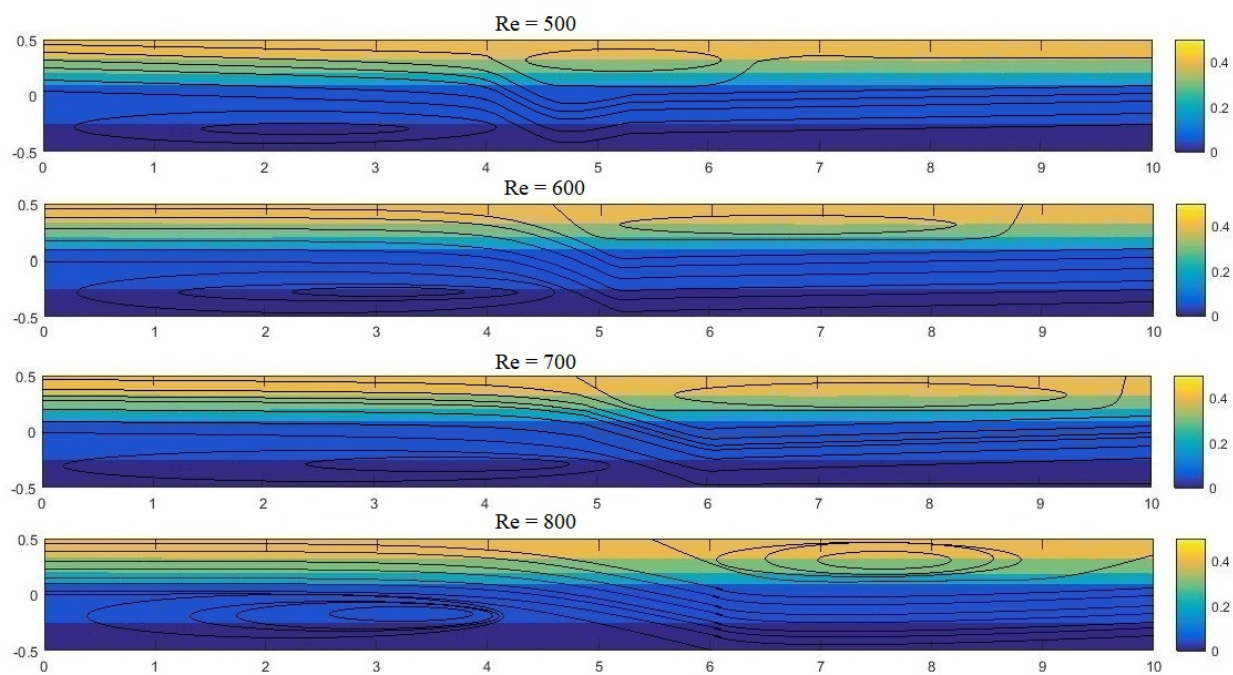
A Tabela 21 mostra o tempo empenhado gasto para que a solução entre em regime permanente considerando várias malhas. E, por fim, a Tabela 22 e a Figura 78 ilustram como o uso da computação paralela através do *OpenMP* contribuem para a redução do tempo de simulação. Para isto, abordamos o caso no qual $Re = 1100$ numa malha 1529×50 .

Figura 75 - Comportamento da solução em regime permanente



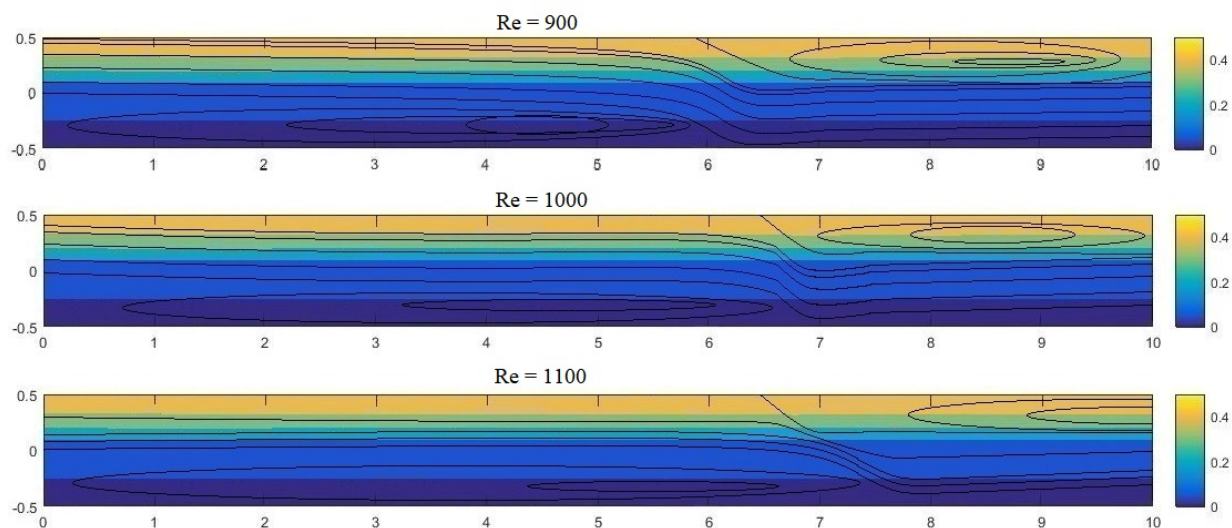
Fonte: O autor, 2019.

Figura 76 - Comportamento da solução em regime permanente



Fonte: O autor, 2019.

Figura 77 - Comportamento da solução em regime permanente



Fonte: O autor, 2019.

Tabela 15 - Comparativo entre os valores da função de corrente encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Gartling (1990) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós

Ponto	Tubo de Trajetórias	Gartling (1990)
(3,000, -0,167)	-0,03351	-0,0335
(3,000, -0,200)	-0,03419	-0,0342
(7,500, 0,333)	0,50711	0,5071
(7,400, 0,300)	0,50639	0,5064

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 16 - Comparativo entre os valores da vorticidade encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Gartling (1990) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós

Ponto	Tubo de Trajetórias	Gartling (1990)
(3,000, -0,167)	-2,5178	-2,518
(3,000, -0,200)	-2,2488	-2,249
(7,500, 0,333)	0,9588	0,959
(7,400, 0,300)	1,3187	1,319

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 17 - Comparativo entre os valores do campo de velocidades v_1 encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Erturk (2007) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós

Ponto	Tubo de Trajetórias	Erturk (2007)
(7,000, 0,450)	-0,0381	-0,038
(7,000, 0,350)	-0,0322	-0,032
(7,000, 0,300)	0,0153	0,015
(7,000, 0,250)	0,0921	0,092
(7,000, -0,200)	1,0617	1,062
(15,000, 0,450)	0,1009	0,101
(15,000, 0,350)	0,3338	0,334
(15,000, 0,300)	0,4081	0,408
(15,000, 0,250)	0,5117	0,512
(15,000, -0,200)	0,6488	0,649

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 18 - Comparativo entre os valores do campo de velocidades v_2 encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Erturk (2007) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós

Ponto	Tubo de Trajetórias	Erturk (2007)
(7,000, 0,450)	-0,000272	-0,00027
(7,000, 0,350)	-0,001469	-0,00147
(7,000, 0,300)	-0,001933	-0,00193
(7,000, 0,250)	-0,002253	-0,00225
(7,000, -0,200)	-0,019172	-0,01917
(15,000, 0,450)	0,000213	0,00021
(15,000, 0,350)	0,001403	0,0014
(15,000, 0,300)	0,002068	0,00207
(15,000, 0,250)	0,002598	0,0026
(15,000, -0,200)	-0,001848	-0,00185

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 19 - Comparativo entre os valores da vorticidade encontrados pelo Método do Tubo de Trajetórias e Erturk (2007) usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 329×10 nós

Ponto	Tubo de Trajetórias	Erturk (2007)
(7,000, 0, 450)	-0,4931	-0,493
(7,000, 0, 350)	-0,6347	-0,635
(7,000, 0, 300)	1,2373	1,237
(7,000, 0, 250)	1,8878	1,888
(7,000, -0, 200)	-1,6839	-1,684
(15,000, 0, 450)	2,0127	2,013
(15,000, 0, 350)	2,0578	2,058
(15,000, 0, 300)	2,0897	2,09
(15,000, 0, 250)	2,0753	2,075
(15,000, -0, 200)	-1,9388	-1,939

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 20 - Comparativo entre os valores obtidos para a função de corrente através do Método do Tubo de Trajetórias em diversas malhas usando $Re = 800$ e $\Delta t = 0,001$

Ponto\Malha	179×5	329×10	629×20	929×30	1529×50
(3,000, -0, 167)	-0,03317	-0,03351	-0,03352	-0,03352	-0,03352
(3,300, -0, 200)	-0,03392	-0,03419	-0,03421	-0,03422	-0,03422
(6,000, 0, 000)	0,00513	0,00524	0,00525	0,00532	0,0053
(7,500, 0, 333)	0,50801	0,50711	0,50712	0,50713	0,50713
(7,400, 0, 300)	0,50621	0,50639	0,50642	0,50641	0,50643

Fonte: O autor, 2019.

Tabela 21 - Quantidade de *time-steps* e o tempo empenhado para encontrar, em algumas malhas, a solução em regime permanente usando $Re = 1100$ e $\Delta t = 0.001$

Malha	<i>Time-Steps</i>	Tempo (segundos)
179×5	4158	12589
329×10	8522	27514
629×20	10258	58210
929×30	25121	125632
1529×50	48372	390240

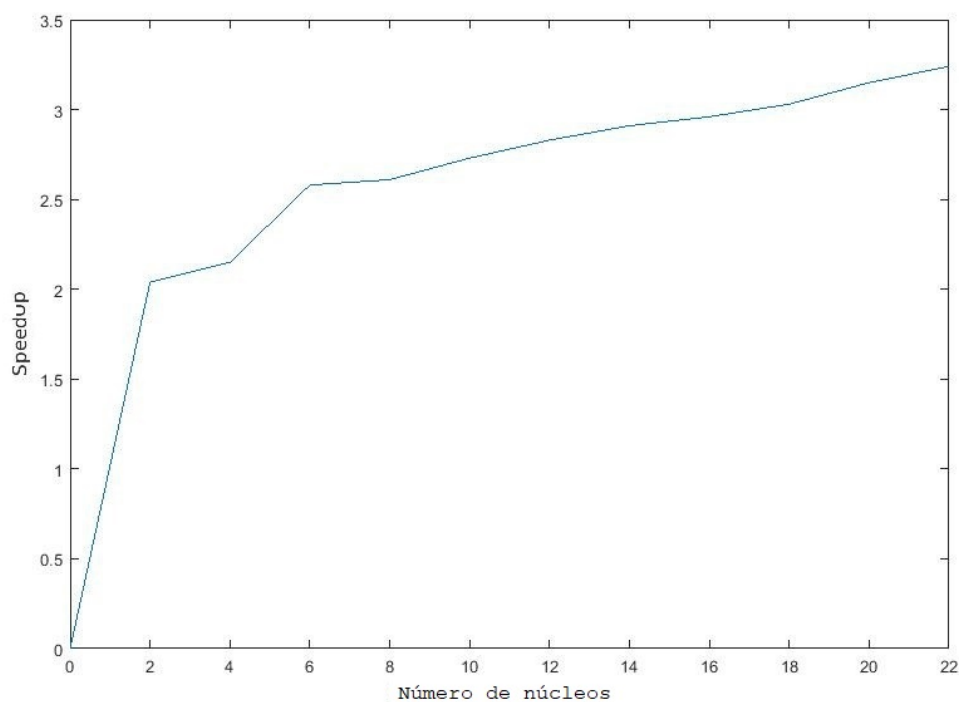
Fonte: O autor, 2019.

Tabela 22 - Tempo gasto para encontrar a solução, em regime permanente, usando $Re = 1100$ e $\Delta t = 0,001$ em uma malha de 1529×50 nós

Número de <i>threads</i>	Tempo de Processamento
1	4 dias, 12 horas e 24 minutos
2	2 dias, 5 horas e 8 minutos
4	1 dia, 18 horas e 12 minutos
6	1 dia, 17 horas e 32 minutos
8	1 dia, 16 horas e 22 minutos
10	1 dia, 15 horas e 42 minutos
12	1 dia, 14 horas e 18 minutos
14	1 dia, 13 horas e 15 minutos
16	1 dia, 12 horas e 37 minutos
18	1 dia, 11 horas e 46 minutos
20	1 dia, 10 horas e 25 minutos
22	1 dia, 9 horas e 27 minutos

Fonte: O autor, 2019.

Figura 78 - Curva de *speedup*



Fonte: O autor, 2019.

Os dados apresentados neste exemplo trazem informações interessantes a respeito do exemplo em tela. Passemos a discorrer sobre elas:

1. as Figuras 75, 76 e 77 apresentam o comportamento da função de corrente obtida considerando diversos números de Reynolds. Segundo Erturk (2007), este é um parâmetro essencial para aferirmos a eficácia do nosso método. Neste sentido, os gráficos mostrados são similares àqueles exibidos em Gartling (1990), Erturk (2007), Shah e Yuan (2008) e Armaly et al. (1983), Portanto, do ponto de vista gráfico, o Método do Tubo de Trajetórias mostrou-se plenamente satisfatório;
2. as Tabelas 15 e 16 mostram que nosso método alcança os mesmos valores numéricos em comparação ao método explicitado em Gartling (1990). Utilizamos os mesmos parâmetros do supracitado artigo. Porém, como citado anteriormente, nosso método não exige a subdivisão do domínio em duas malhas distintas, o que torna nossa técnica mais vantajosa;
3. reproduzimos a mesma situação estudada em Erturk (2007) com os mesmos parâmetros e comparamos os valores obtidos por nosso método e o método do supracitado autor. Novamente, percebamos que obtivemos valores idênticos. Contudo, o Método do Tubo de Trajetórias dispensa a análise espectral das matrizes envolvidas, diferentemente da abordagem de Erturk;
4. a Tabela 20 ilustra o fato de que, a partir de uma malha de 329×10 nós, o refinamento pouco influencia na solução obtida. Portanto, mais uma vez, observamos que o método atinge seus objetivos com uma malha grossa. Tal fato é importante pois, conforme mostra a Tabela 21, a quantidade de *time-steps* necessários para obter uma solução aumenta consideravelmente com o refinamento da malha. Apesar de termos feito para um caso específico, o mesmo pode ser visto nas demais situações testadas e
5. a Tabela 22 traz as contribuições do *OpenMP* no tocante ao tempo computacional gasto. Novamente, percebamos que ao utilizarmos oito núcleos físicos em paralelo, nosso método se torna cerca de três vezes mais rápido. Contudo, a partir desta quantidade de núcleos, a economia de tempo torna-se cada vez menos significativa. A Figura 78 reforça esta conclusão.

Desta maneira, este exemplo nos mostra que nosso método é mais simples de implementar, bem como obtém soluções satisfatórias em malhas grossas. Novamente, uma malha refinada seria necessária para obtermos soluções gráficas com maior nitidez e, neste interim, o *OpenMP* é altamente recomendável.

CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo reintroduzir uma nova formulação para as equações de Navier-Stokes através de uma mudança de variáveis a fim de eliminar o problema da falta de unicidade da variável pressão. Contudo, cabe ressaltar que este fato é exclusivo do comportamento de fluidos incompressíveis, conforme explicita Batchelor (1970). Neste sentido, apresentamos as variáveis vorticidade e função de corrente e mostramos como estas estão relacionadas do ponto de vista físico e matemático com o campo de velocidades de um fluido.

Em seguida, reduzimos o escopo de nosso estudo e passamos a analisar fluidos incompressíveis bidimensionais. Deste modo, as novas variáveis se tornaram mais simples de serem manipuladas, o que nos levou a um sistema de equações; sistema este que define a solução desejada de maneira única. Isto posto, passamos a discutir a discretização das equações e, posteriormente, desenvolvemos técnicas para implementar um algoritmo eficaz. Esta técnica foi chamada de Método do Tubo de Trajetórias por levar em consideração a trajetória de cada partícula do fluido ao longo do tempo.

Uma vez estabelecidas as equações numéricas a serem discretizadas, deparamo-nos com as dificuldades advindas da falta de informações a respeito da vorticidade nos nós da malha, o que é apontado como empecilho por diversos autores. Além disso, tais valores precisam ser determinados em cada iteração. Assim, para ultrapassarmos este obstáculo, apresentamos uma interpolação para determinar a vorticidade nos nós internos do domínio de discretização. Ainda, introduzimos as fórmulas de Jensen e o esquema de nove pontos para obter a vorticidade em nós fronteiros e de canto, respectivamente.

Uma vez definido o algoritmo, fizemos a comparação com outros métodos e percebemos algumas vantagens no tocante à implementação, bem como observamos que os resultados encontrados eram praticamente os mesmos. Logo, desenvolvemos um método promissor e igualmente eficiente. Além disso, observamos que podíamos trabalhar com malhas grossas, bem como é possível diminuir o tempo computacional gasto através de técnicas de computação paralela. Por fim, passemos a elencar as vantagens deste novo método:

1. o método é mais fácil de ser implementado computacionalmente em comparação aos métodos apresentados pelos demais autores citados. Perceba que trabalhamos apenas com uma malha e não nos preocupamos com regiões específicas do domínio. Além disso, evitamos o cálculo de autovalores de matrizes advindas dos sistemas necessários para resolver o problema;
2. obtemos bons resultados com malhas grossas. Perceba que encontramos valores numéricos praticamente idênticos aos dos demais artigos usando tais malhas. Deste

modo, o refinamento da malha só tem utilidade para a construção de gráficos mais nítidos;

3. a computação paralela é fundamental na diminuição do tempo computacional gasto. Contudo, observa-se que, a partir do uso de oito núcleos físicos, a economia obtida não é significativa. Provavelmente, tal fato ocorre em virtude da adoção de núcleos virtuais;
4. uma das maiores dificuldades na resolução da equação de Navier-Stokes em sua formulação nas variáveis vorticidade e função de corrente reside na captura dos vórtices. Neste sentido, o Método do Tubo de Trajetórias mostrou-se bastante eficiente;
5. o método que adotamos é mais realístico do ponto de vista físico. Afinal, analisamos o deslocamento de cada partícula do fluido ao longo do tempo considerando suas trajetórias, o que não alteraria a reprodução de experimentos. Desta forma, é possível que, em problemas mais avançados, alcancemos bons resultados e
6. uma das possíveis limitações do método se refere ao fato de que, eventualmente, algum ponto do domínio poderia se localizar fora deste em algum instante. Contudo, a diminuição do passo temporal mostra-se eficaz para tais situações, muito embora o tempo computacional gasto aumente. Mais uma vez, o *OpenMP* mostra-se necessário em tais casos.

Portanto, acreditamos que estamos contribuindo com um método original e inovador para solucionar problemas complexos do ponto de vista físico-matemático.

Isto posto, podemos pensar em perspectivas futuras de pesquisa. Inicialmente, é possível verificar se o Método do Tubo de Trajetórias pode ser utilizado para solucionar o problema apresentado por Ghia et al. (1982) em seu artigo e amplamente estudado. Desta forma, teríamos outros métodos que poderiam ser comparados com o nosso.

Além disso, percebe-se que trabalhamos com fluidos bidimensionais incompressíveis. Um caminho natural seria verificar se é possível aplicar este método para fluidos compressíveis no plano e, posteriormente, observar se podemos replicar nossas descobertas para fluidos no espaço. Em particular, isso permitiria a reprodução computacional de experimentos físicos.

Um outro aspecto a ser considerado é a análise de fluidos não newtonianos. Neste sentido, Bird et al. (1960) e Bennet e Myers (1978) apresentam uma série de modelos que abordam diversos fluidos. Em cada caso, poderíamos investigar se o Método de Tubo de Trajetórias é eficiente para descrever tais fenômenos e quais adaptações seriam necessárias para isso. Portanto, este trabalho representa um passo inicial tendo em vista a quantidade de modelos existentes. Contudo, entendemos que nossa contribuição reside

fundamentalmente na apresentação de um método mais simples para solucionar problemas de escoamento de fluidos no plano.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, J. H. *Análise das equações de Navier-Stokes no escoamento bidimensional em dutos com formulação em variáveis primitivas via GITT*. 2010. 81 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, Paraíba, 2010.
- ARMALY, B. F., DURST, F., PEREIRA, J. C. F., SCHONUNG, B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 172, p. 473 - 496, junho 1983.
- BARTLE, R. G. *The elements of real analysis*. 2. ed. New York: Wiley, 1976.
- BATCHELOR, G. K. *An introduction to fluid dynamics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
- BIRD, R. B. STEWART, W. E. LIGHTFOOT, E. N. *Transport phenomena*. 1. ed. New York: John Wiley Sons Inc., 1960.
- BENNET, C. O., MYERS, J. E. *Fenômenos de transporte, quantidade de calor e massa*. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1978.
- BLAZEK, J. *Computational fluid dynamics*. 1. ed. London: Butterworth - Heinemann, 2003.
- BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- BREZINSKI, C. Variations on Richardson's Method and acceleration. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, n. 11, p. 33 - 44, maio 1996.
- CALVETTI, D., REICHEL, L. An adaptative Richardson Iteration Method for indefinite linear systems. *Numerical Algorithms*, n. 12, p. 125 - 149, junho 1996. CHANDRA, R. *Parallel programming in OpenMP*. 2. ed. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001.
- CHAPMAN, R., JOST, G., VAN DER PAS, R. *Using OpenMP: portable shared memory parallel programming*. 1. ed. Cambridge: MIT Press, 2008.
- CHARLES, H. *Numerical computation of internal external flows*. 2. ed. Nova York: John Wiley Sons, 2007.

DAI, Y. H., LIAO, L. Z. R-linear convergence of the Barzilai and Borwein Gradient Method. *IMA Journal on Numerical Analysis*, n. 22, p. 1 - 10, set. 2002.

ELIAS, R. N. *Métodos tipo-Newton inexatos para a solução de problemas não-lineares resultantes da formulação SUPG/PSPG das Equações de Navier-Stokes incompressíveis em regimes permanentes*. 2003. 122 F. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

ERTURK, E. Comparison of wide and compact fourth order formulations of the Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, n. 60, p. 992 - 1010, agosto 2009.

ERTURK, E. Numerical Solutions of 2-D Steady incompressible flow Over a backward-facing step, part I: high Reynolds number solutions. *Computers and Fluids*, n. 37, p. 633 - 655, julho 2007.

EVANS, L. C. *Partial differential equations*. 2. ed. New York: American Mathematical Society, 2010.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1987.

FISHELOV, D., BEN-ARTZI, M. B., CROISILLE, J. A fast direct solver for the biharmonic problem in a rectangular grid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, n. 31, p. 303 - 333, janeiro 2008.

FORNBERG, B. *A practical guide for pseudospectral methods*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

GAD-EL-HAK, M. Stokes' hypothesis for a newtonian, isotropic fluid. *Journal of Fluids Engineering*, n. 177, p. 3 - 5, agosto 1995.

GARTLING, D. K. A test problem for outflow boundary conditions flow over a backward-facing step. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, n. 11, p. 953 - 967, maio 1990.

GHIA, U., GHIA, K. N., SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes Equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, n.102, p. 387 - 411, março 1982.

GILBARG, D., TRUDINGER, N. *Elliptic partial differential equations of second order*.

1. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

GURTIN, M. E. *An introduction to continuum mechanics*. 1. ed. New York: Academic Press, 1981.

GURTIN, M. E., FRIED, E., ANAND, L. *The mechanics and thermodynamics of continua*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

GRIPPO, L., LAMPARIELLO, F., LUCIDI, S. A nonmonotone line search technique for Newton's method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, n. 23, p. 707 - 716, ago. 1986.

HANSELMAN, D; LITTLEFIELD, B *MATLAB: Guia do Usuário*. 4. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1997.

HENDERSON, N., PACHECO, F., KISCHINHEVSKY, M. Numerical solution of the Navier-Stokes Equations using the Path Tubes Method. *Chemical Engineering Science*, n. 172, p. 585 - 602, julho 2017.

HENDERSON, N., PENA, L. The inverse distance weighted interpolation applied to a particular form of the Path Tubes Methods: theory and computation for advection in incompressible flow. *Applied Mathematics and Computation*, n. 304, p. 114 - 135, abril 2017.

HENDERSON, N., SAMPAIO, M., PENA, L. Path Tubes Method: a semi-Lagrangian approach for linear advection equations. *Chemical Engineering Science*, n. 64, p. 3138 - 3146, maio 2009.

HOFFMAN, K., KUNZE, R. *Linear algebra*. 2. ed. Nova Jersey: Prentice-Hall, 1971.

JOHN, V., TOBISKA, L. Numerical performance of smoothers in coupled multigrid methods for the parallel solution of incompressible Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, n. 33, p. 454 - 457, set. 1999.

KELLEY, C. T. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 1995.

LA CRUZ, W., MARTÍNEZ, J. M., RAYDAN, M. Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations. *Mathematics of Computations*, n. 75, p. 1429 - 1448, jan. 2006.

- LA CRUZ, W., RAYDAN, M. Nonmonotone spectral methods for large-scale nonlinear systems. *Optimization Methods and Software*, n. 18, p. 583 - 589, jul. 2003.
- LA CRUZ, W., RAYDAN, M. Residual Iterative schemes for large-scale nonsymmetric positive definite linear aystems. *Computational Applied Mathematics*, n. 2, p. 151 - 173, abr. 2008.
- LAMBERT, J. D. *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*. 1. ed. New York: Jonh Wiley Sons, 1991.
- LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica - Volume II*. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1994.
- LI, D. H., FUKUSHIMA, M. A derivative-free line search and global convergence of Broyden-like method for nonlinear equations. *Optimization Methods and Software*, n. 13, p. 181 - 201, jan. 2000.
- LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. 1. ed. Rio de Janeiro: Impa, 1970.
- LIMA, E. L. *Curso de análise - Volume 2*. 6. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2000.
- LUKASZEWICZ, G., KALITA, P. *Navier-Stokes Equations: an introduction with applications*. 1. ed. New York: Springer, 2016.
- MATHEWS, J., WALKER, R. L. *Mathematical methods of physics*. New York: W. A. Benjamin, 1970.
- MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. Londres: Prentice Hall International, 2000.
- PEARSON, C. E. A computational method for viscous flow problems. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 21, p. 611 - 622, agosto 1964.
- PIAO, X., BU, S., BAK, S., KIM, P. An iteration free backward semi-Lagrangian scheme for solving incompressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, n. 283, p. 189 - 204, abril 2015.
- POLYANIN, A. D. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press, 2002.
- PONCE, A. *Métodos clássicos em teoria do potencial* 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

PONTES, J. R. M., MANGIAVACCHI, N., ANJOS, G. R. *Introdução aos escoamentos incompressíveis*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

RAYDAN, M. The Barzilai and Borwein Gradient Method for the large-scale unconstrained minimization problem. *SIAM Journal of Optimization*, n. 7, p. 26 - 33, ago 1997.

REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *The Philosophical Transactions of the Royal Society*, n. 174, p. 935 - 982, mai 1883.

REICHEL, L. The application of Leja points to Richardson iteration and polynomial preconditioning. *Linear Algebra and Its Applications*, n. 154 - 156, p. 389 - 414, mai 1991.

ROBERTS, E. S. *Programming abstractions in C: a second course in computer science*. 1. ed. Boston: Addison-Wesley, 1998.

ROSSER, J.B., Nine-point difference solutions for Poisson's equation. *Computers and Mathematics with Applications*, n. 1, p. 353 - 360, mai 1975.

RUGGIERO, M. A. G, LOPES, V. L. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1993.

SHAH, A., YUAN, L. Flux-difference splitting-based upwind compact schemes for the incompressible Navier-Stokes Equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, n. 61, p. 552 - 568, maio 2008.

SHEPARD D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: ACM National Conference, 23, New York. *Proceedings of 23rd ACM National Conference*. New York: ACM, 1968. p. 517 - 524.

SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. New York: Oxford University Press, 1985.

SPOTZ, W. F. Accuracy and performance of numerical wall boundary conditions for steady, 2D, incompressible stream function vorticity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, n. 28, p. 737 - 757, março 1998.

TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A., PLETCHER, R. H. *Computational fluid*

mechanics and heat Transfer. 2. ed. Londres: Taylor Francis, 1997.

THOMAS, J.W. *Numerical partial differential equations: finite difference methods*. New York: Springer, 1995.

TREFETHEN, L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*. Ithaca: Cornell University Press, 1996.

WOLFRAM, S. *A new kind of science*. Champaign: Wolfram Media, Inc., 2002.

YOUNSI, R. *Navier-Stokes Equations: properties, description and applications*. 1. ed. New York: Nova Science Publishers Inc, 2012.

APÊNDICE A – Dedução das fórmulas de quarta ordem para derivadas de primeira e segunda ordem

Neste apêndice, apresentaremos a dedução de algumas das fórmulas usadas para a discretização dos problemas apresentados neste trabalho. Neste sentido, suponha que $f : V \rightarrow R$ seja uma função dada por $f = f(x_1, x_2)$, onde V é um espaço vetorial bidimensional. Ainda, considere um vetor $v \in V$ com coordenadas (x_i, x_j) . Faremos as demonstrações em relação à variável x_1 , mas as fórmulas para a segunda variável são obtidas de maneira análoga. Para tanto, utilizaremos as seguintes notações:

$$f(x_i, x_j) = f_{i,j} \quad \frac{\partial f(x_i, x_j)}{\partial x_1} = \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial^2 f(x_i, x_j)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \quad (312)$$

Além disso, para todo real positivo h e n natural, denotaremos $f(x_i, x_j + nh)$ por $f_{i,j+n}$. Deste modo, da série de Taylor, para todo $h > 0$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned} f(x_1 - 5h, x_2) &= f(x_1, x_2) - 5h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{25h^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{125h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 - 4h, x_2) &= f(x_1, x_2) - 4h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + 8h^2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{64h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 - 3h, x_2) &= f(x_1, x_2) - 3h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{9h^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{27h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 - 2h, x_2) &= f(x_1, x_2) - 2h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + 2h^2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 - h, x_2) &= f(x_1, x_2) - h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 + h, x_2) &= f(x_1, x_2) + h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 + 2h, x_2) &= f(x_1, x_2) + 2h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + 2h^2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{8h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 + 3h, x_2) &= f(x_1, x_2) + 3h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{9h^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{27h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 + 4h, x_2) &= f(x_1, x_2) + 4h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + 8h^2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{64h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \\ f(x_1 + 5h, x_2) &= f(x_1, x_2) + 5h \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{25h^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{125h^3}{6} \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3} + o(h^4) \end{aligned} \quad (313)$$

Sendo assim, a partir das equações apresentadas em (313) podemos escrever o seguinte:

$$-f_{i+2,j} + 8f_{i+1,j} - 8f_{i-1,j} + f_{i-2,j} + o(h^4) = 12h \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \quad (314)$$

Assim:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \approx \frac{-f_{i+2,j} + 8f_{i+1,j} - 8f_{i-1,j} + f_{i-2,j}}{12h} \quad (315)$$

Além disso:

$$-25f_{i,j} + 48f_{i+1,j} - 36f_{i+2,j} + 16f_{i+3,j} - 3f_{i+4,j} + o(h^4) = 12h \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \quad (316)$$

Logo,

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \approx \frac{-25f_{i,j} + 48f_{i+1,j} - 36f_{i+2,j} + 16f_{i+3,j} - 3f_{i+4,j}}{12h} \quad (317)$$

Ainda:

$$-25f_{i,j} + 48f_{i-1,j} - 36f_{i-2,j} + 16f_{i-3,j} - 3f_{i-4,j} + o(h^4) = -12h \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \quad (318)$$

Daí:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_1} \approx \frac{25f_{i,j} - 48f_{i-1,j} + 36f_{i-2,j} - 16f_{i-3,j} + 3f_{i-4,j}}{12h} \quad (319)$$

Por outro lado, notemos que:

$$-f_{i-2,j} + 16f_{i-1,j} - 30f_{i,j} + 16f_{i+1,j} - f_{i+2,j} + o(h^4) = 12h^2 \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \quad (320)$$

Daí:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \approx \frac{-f_{i-2,j} + 16f_{i-1,j} - 30f_{i,j} + 16f_{i+1,j} - f_{i+2,j}}{12h^2} \quad (321)$$

Ainda,

$$45f_{i,j} - 154f_{i+1,j} + 214f_{i+2,j} - 156f_{i+3,j} + 61f_{i+4,j} - 10f_{i+5,j} + o(h^4) = 12h^2 \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \quad (322)$$

Donde:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \approx \frac{45f_{i,j} - 154f_{i+1,j} + 214f_{i+2,j} - 156f_{i+3,j} + 61f_{i+4,j} - 10f_{i+5,j}}{12h^2} \quad (323)$$

Por fim,

$$-45f_{i,j} + 154f_{i-1,j} - 214f_{i-2,j} + 156f_{i-3,j} - 61f_{i-4,j} + 10f_{i-5,j} + o(h^4) = 12h^2 \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \quad (324)$$

Ou seja:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_1^2} \approx \frac{-45f_{i,j} + 154f_{i-1,j} - 214f_{i-2,j} + 156f_{i-3,j} - 61f_{i-4,j} + 10f_{i-5,j}}{12h^2} \quad (325)$$

Assim, com as equações (315), (317), (319), (321), (323) e (325), podemos descrever as derivadas de primeira e segunda ordem centradas, avançadas e atrasadas, respectivamente. Analogamente, se denotarmos $f(x_i, x_j + nh)$ por $f_{i,j+n}$, obtemos fórmulas similares para as derivadas na segunda variável, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_2} &\approx \frac{-f_{i,j+2} + 8f_{i,j+1} - 8f_{i,j-1} + f_{i,j+2}}{12h} \\ \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_2} &\approx \frac{-25f_{i,j} + 48f_{i,j+1} - 36f_{i,j+2} + 16f_{i,j+3} - 3f_{i,j+4}}{12h} \\ \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_2} &\approx \frac{25f_{i,j} - 48f_{i,j+1} + 36f_{i,j+2} - 16f_{i,j+3} + 3f_{i,j+4}}{12h} \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_2^2} &\approx \frac{-f_{i,j-2} + 16f_{i,j-1} - 30f_{i,j} + 16f_{i,j+1} - f_{i,j+2}}{12h^2} \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_2^2} &\approx \frac{45f_{i,j} - 154f_{i,j+1} + 214f_{i,j+2} - 156f_{i,j+3} + 61f_{i,j+4} - 10f_{i,j+5}}{12h^2} \\ \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x_2^2} &\approx \frac{-45f_{i,j} + 154f_{i,j-1} - 214f_{i,j-2} + 156f_{i,j-3} - 61f_{i,j-4} + 10f_{i,j-5}}{12h^2} \end{aligned} \quad (326)$$

APÊNDICE B – Equação de Poisson para a pressão

Consideremos um campo de velocidades do movimento de um fluido incompressível dado por $v = (v_1, v_2, 0)$, de maneira que v_1 e v_2 não dependam da coordenada x_3 . Ainda, suponha que a pressão no fluido é da forma $\pi = (\pi_1, \pi_2, 0)$, de forma que π_1 e π_2 não sejam dependentes de x_3 . Neste caso, as Equações de Navier-Stokes em sua forma adimensional são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad}(v)v &= \frac{1}{Re} \Delta v - \nabla(\pi) + b \\ \text{div}(v) &= 0 \end{aligned} \quad (327)$$

Observemos que:

$$\text{grad}(v)v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (328)$$

Portanto, em coordenadas cartesianas, as Equações de Navier-Stokes levam a duas outras equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \pi_2}{\partial x_1} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \end{aligned} \quad (329)$$

Agora, consideremos $M = (M_1, M_2)$ um vetor cujas coordenadas sejam, respectivamente, as equações indicadas acima, ou seja, M é um vetor de equações. Desta forma, ao calcular $\text{div}(M)$ obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div}(v) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \text{div}(v) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \text{div}(v) = -\Delta \pi + \frac{1}{Re} \Delta(\text{div}(v)) \quad (330)$$

Tendo em vista que $\text{div}(v) = 0$, segue que:

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 = -\Delta \pi \quad (331)$$

Ou, em notação vetorial:

$$\Delta\pi = -f \tag{332}$$

onde:

$$f = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + 2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 \tag{333}$$

A equação (332) é denominada Equação de Poisson para a Pressão do movimento de um fluido incompressível.

APÊNDICE C – Função *peaks* do *software Matlab*

Ao desejarmos construir as curvas de uma nível de uma dada função, podemos, eventualmente, nos deparar com um problema de escala numérica. Isso ocorre toda vez que há uma grande diferença entre o maior e o menor valor aferido. Conforme explicita Hanselman e Littlefield (1997), o *Matlab* apresenta dificuldades em tais situações e, via de regra, o *software* tende a agrupar curvas com valores próximos, tratando-as como se fosse uma só.

Neste sentido, Hanselman e Littlefield (1997) apresentam a função *peaks*, inerente à linguagem *Matlab*. Esta é uma função bidimensional, obtida a partir de translação e readequação de uma curva Gaussiana, a qual mostra-se bastante eficiente para a construção de figuras que envolvam os comandos *mesh*, *surf*, *contour* e *contourf*. Esta função obriga o *Matlab* a diferenciar máximos e mínimos locais em uma escala específica.

Para exemplificar esta ideia, consideremos o exemplo 2 apresentado no capítulo 5. Nos gráficos que envolvem a função de corrente em toda a malha, nos quais é possível ver o surgimento do vórtice, esta função foi aplicada. A menor curva de nível aferida numericamente foi $-21,3421$ enquanto a maior foi $0,0031$. No nosso caso específico, fizemos a seguinte sequência de passos: inicialmente informamos ao software a quantidade de máximos e mínimos locais desejados através da linha $[X, Y, Z] = peaks(100)$. Cabe ressaltar que X e Y são definidos como vetores que contenham os pontos advindos da subdivisão dos eixos x e y , respectivamente. Já Z é a matriz que continha os valores da função de corrente.

Em seguida, solicitamos ao programa que construísse o gráfico através dos comandos *figure* e *hold on*. Logo após, introduzimos as seguintes linhas de comando:

- `contour(X,Y,Z,'LevelList',-21.3421:1:0:005)` e
- `contour(X,Y,Z,'LevelList',-0.005:0.0001:0.0003)`.

Com efeito, a primeira linha indica para o *software* que desejamos construir curvas de nível que estejam no intervalo $[-21, 3421, 0, 005]$ numa variação de 1 em 1. Já a segunda linha, indica que as curvas de nível no intervalo $[-0, 005, 0, 0003]$ deverão ser desenhadas com uma variação numérica de 0,0001 entre elas. Em outras palavras, fizemos uma espécie de refinamento no intervalo no qual o vórtice se encontrava, o que possibilitou sua visualização.