



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Marcelle Santos Morcanas


**O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros**

São Gonçalo

2019

Marcelle Santos Morcanas

**O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano

São Gonçalo

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CEH/D

M833  
TESE

Morcanas, Marcelle Santos.  
O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros / Marcelle Santos Morcanas. – 2019.  
80f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Poliedros – Teses. 2. Ensino – Metodologia – Teses.  
3. Matemática – Teses. I. Lozano, Abel Rodolfo Garcia.  
II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CDU 514.113.5

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Marcelle Santos Morcanas

**O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 03 de maio de 2019.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Abel Rodolfo Garcia Lozano (Orientador)  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Priscila Cardoso Petito  
Faculdade de Formação de Professores – UERJ

---

Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquinca  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

São Gonçalo

2019

## **DEDICATÓRIA**

À todos que lutam por uma educação de qualidade.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela provisão durante todo esse tempo.

Aos meus pais Roberto e Sueli e minha irmã Michelle, pelo total apoio durante essa etapa.

Aos professores do PROFMAT da UERJ-FFP pelo comprometimento, paciência, incentivo e carinho.

Ao Colégio Estadual José Bonifácio pela rica oportunidade que me proporcionou de colocar em prática todo o conhecimento adquirido ao longo dessa jornada e aos meus alunos pelo imenso amor.

A CAPES pelo apoio que me ajudou e incentivou muito durante o curso.

Aos amigos do PROFMAT da UERJ-FFP pela atenção e dedicação no decorrer do curso.

Essa vitória é nossa! Obrigada por tudo!

Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.

*Paulo Freire*

## RESUMO

MORCANAS, Marcelle Santos. *O processo de ensino-aprendizagem dos poliedros*. 2019. 80f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

Nos dias de hoje é possível perceber que a maioria dos alunos chega no 6º ano com dificuldades em visualizar os elementos de um poliedro em virtude da forma ensinada desde as séries iniciais inadequadamente. Neste trabalho será realizada uma abordagem de diversas construções de poliedros de forma lúdica que podem ser utilizadas nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio, visando a melhor compreensão não só dos elementos, mas também dos conceitos relacionados a esses sólidos. Além disso, será apresentada uma didática inovadora com o uso da realidade aumentada (RA) na sala de aula através de softwares educativos que tornam as aulas de Geometria Espacial mais dinâmicas, interativas e prazerosas e ainda permitem trabalhar a Relação de Euler de uma maneira diferenciada. Acreditamos que desta maneira proporcionaremos uma aprendizagem significativa dos poliedros. Por outro lado, destacaremos o modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas por Van Hiele. Para finalizar este trabalho foram aplicadas atividades para 22 alunos de uma turma de 6º ano. Essas atividades ocorreram em duas partes: uma atividade realizando construções de poliedros e outra atividade com realidade aumentada através do uso dos aplicativos: Polyèdres augmentès e Geometrix para abordar o conteúdo através de recursos tecnológicos e diagnosticar onde reside a dificuldade apresentada pelo aluno na aprendizagem dos poliedros.

Palavras-chave: Poliedros. Relação de Euler. Metodologia de ensino. Poliedros de Platão.



## ABSTRACT

MORCANAS, Marcelle Santos. *The teaching-learning process of polyhedra*. 2019. 80f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

Nowadays it is possible to notice that most of the students arrive in the 6th year with difficulties in visualizing the elements of a polyhedron by virtue of the form taught from the initial grades improperly. In this work will be carried out an approach of diverse constructions of polyhedra of playful form that can be used in the Mathematics classes of Elementary School II and High School, aiming at the better understanding not only of the elements, but also of the concepts related to these solids. In addition, an innovative didactics will be presented with the use of augmented reality (RA) in the classroom through educational softwares that make Space Geometry classes more dynamic, interactive and enjoyable and also allow to work the Euler Interface in a differentiated way. We believe that in this way we will provide meaningful learning of polyhedra. On the other hand, we will highlight the geometric development model and the learning phases developed by Van Hiele. To finish this work, activities were applied to 22 students of a 6th grade class. These activities took place in two parts: an activity performing constructions of polyhedra and another activity with augmented reality through the use of the applications: Polyèdres augmentès and Geometrix to approach the content through technological resources and to diagnose where the difficulty presented by the student in the learning of polyhedra resides .

Keywords: Polyhedra. Euler's relationship. Teaching methodology. Plato's polyhedrons.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Elementos de um poliedro.....	17
Figura 2 –	Poliedro convexo.....	19
Figura 3 –	Poliedro não convexo.....	19
Figura 4 –	Poliedros convexos regulares.....	20
Figura 5 –	Tetraedro.....	21
Figura 6 –	Hexaedro.....	21
Figura 7 –	Octaedro.....	22
Figura 8 –	Dodecaedro.....	22
Figura 9 –	Icosaedro.....	23
Figura 10 –	Poliedros de Platão e os fenômenos da natureza.....	24
Figura 11 –	Exemplos de Prismas.....	24
Figura 12 –	Prismas regulares.....	25
Figura 13 –	Exemplos de Pirâmides.....	26
Figura 14 –	Poliedro convexo onde a Relação de Euler é válida.....	28
Figura 15 –	Poliedro não convexo onde a Relação de Euler é válida.....	28
Figura 16 –	Poliedro não convexo onde a Relação de Euler não é válida.....	29
Figura 17 –	Poliedros com jujubas.....	39
Figura 18 –	Confecção do cubo com palitos de churrasco.....	39
Figura 19 –	Octaedro com garrotes.....	40
Figura 20 –	Construção de um octaedro regular com canudos.....	40
Figura 21 –	Icosaedro feito com canudos.....	41
Figura 22 –	Poliedros construídos com papéis.....	41
Figura 23 –	Diversos poliedros de papéis.....	42
Figura 24 –	Esquema de funcionamento da Realidade Aumentada em dispositivo móvel.....	44
Figura 25 –	Realidade Aumentada e a pirâmide quadrangular.....	45
Figura 26 –	Visualização de sólidos geométricos através do Polyèdres augmentès....	46
Figura 27 –	Visualização de pirâmides e paralelepípedos com o Polyèdres	

augmentès.....	47
Figura 28 – Prisma triangular visto através do Poyèdres augmentès.....	47
Figura 29 – Visualização de um Hexaedro pelo Geometrix.....	48
Figura 30 – Pirâmide hexagonal vista pelo Geometrix.....	48
Figura 31 – Visualização do tetraedro com SISEULER.....	49
Figura 32 – Visualização de um cubo com SISEULER.....	50
Figura 33 – Visualização de um dodecaedro com SISEULER.....	50
Figura 34 – Tabuleiro do SISEULER.....	51
Figura 35 – O uso dos materiais na construção dos poliedros no CEJB.....	54
Figura 36 – Construções de poliedros.....	55
Figura 37 – Construção de octaedro com palitos de churrasco e garrotes.....	56
Figura 38 – Identificação dos elementos nos poliedros construídos.....	56
Figura 39 – Montagens de poliedros platônicos com planificações.....	57
Figura 40 – Diversas construções de poliedros.....	57
Figura 41 – O uso do Geometrix no CEJB.....	59
Figura 42 – O uso do Polyèdres augmentès no CEJB.....	59
Figura 43 – Quantidades dos elementos dos prismas e das pirâmides.....	60
Figura 44 – Construções dos poliedros pela turma 601 do CEJB.....	61
Figura 45 – Construções dos poliedros com palitos e garrotes.....	61
Figura 46 – Aplicação da Atividade I na turma 601 no CEJB.....	61
Figura 47 – Realização da Atividade I na turma 601 no CEJB.....	62
Figura 48 – Visualização de um icosaedro pelo Geometrix.....	63
Figura 49 – Visualização de um octaedro pelo Geometrix.....	64
Figura 50 – Visualização de um dodecaedro pelo Geometrix.....	64
Figura 51 – Visualização de uma pirâmide quadrangular.....	65
Figura 52 – Visualização da face do hexaedro com Geometrix.....	66
Figura 53 – Alunos do CEJB mostrando o hexaedro com o Geometrix para a turma 601.....	66
Figura 54 – Alunas do CEJB visualizando o tetraedro com Polièdres augmentès.....	67
Gráfico 1 – Desempenho dos alunos da turma 601 na questão da atividade I.....	68
Grafico 2 – Desempenho dos alunos nas questões da atividade II.....	70

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Nomenclatura dos poliedros.....	18
Tabela 2 –	Representação dos elementos da relação de Euler.....	28
Tabela 3 –	Tabela dos poliedros.....	54
Tabela 4 –	Identificação dos elementos dos poliedros.....	60
Tabela 5 –	Poliedros e Relação de Euler.....	68
Tabela 6 –	Tabela dos poliedros.....	79

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CEJB	Colégio Estadual José Bonifácio
FFP	Faculdade de Formação de Professores
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RA	Realidade Aumentada
UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	14
1	<b>POLIEDROS.....</b>	15
1.1	<b>Um breve histórico dos poliedros.....</b>	15
1.2	<b>O ensino dos poliedros.....</b>	16
1.2.1	<u>Definição.....</u>	17
1.3	<b>Poliedro convexo.....</b>	18
1.4	<b>Poliedro não convexo.....</b>	19
1.5	<b>Poliedros regulares.....</b>	20
1.6	<b>Prismas.....</b>	24
1.6.1	<u>Prisma regular.....</u>	25
1.7	<b>Pirâmides.....</b>	25
1.8	<b>Relações entre elementos de poliedros.....</b>	26
1.9	<b>Relação de Euler.....</b>	27
2	<b>TEORIA DE VAN HIELE.....</b>	30
2.1	<b>O modelo de Van Hiele.....</b>	30
2.1.1	<u>Níveis de compreensão.....</u>	31
2.1.1.1	Nível 1 : Visualização ou reconhecimento.....	31
2.1.1.2	Nível 2 : Análise.....	32
2.1.1.3	Nível 3 : Ordenação ou classificação.....	32
2.1.1.4	Nível 4: Dedução Formal.....	33
2.1.1.5	Nível 5 : Rigor.....	33
2.1.2	<u>Fases de aprendizagem da teoria de Van Hiele.....</u>	34
2.1.2.1	Questionamento ou Informação.....	34
2.1.2.2	Orientação Direta.....	34
2.1.2.3	Explicitação.....	34
2.1.2.4	Orientação Livre.....	35
2.1.2.5	Integração.....	35
3	<b>CONSTRUÇÕES DE POLIEDROS DE FORMA LÚDICA.....</b>	36

3.1	<b>Metodologia de ensino dos poliedros.....</b>	36
3.1.1	<u>Formas lúdicas e o ensino dos poliedros.....</u>	37
3.1.1.1	Jujubas e palitos de dentes.....	38
3.1.1.2	Garrotes e palitos de churrasco.....	39
3.1.1.3	Canudos e linha.....	40
3.1.1.4	Montagem de poliedros com papéis.....	41
4	<b>OS POLIEDROS E A REALIDADE AUMENTADA.....</b>	43
4.1	<b>Realidade Aumentada.....</b>	43
4.2	<b>Polyèdres augmentès.....</b>	46
4.3	<b>Geometrix.....</b>	47
4.4	<b>Siseuler.....</b>	49
5	<b>EXPERIMENTO E ANÁLISES.....</b>	52
5.1	<b>Atividades com poliedros.....</b>	52
5.1.1	<u>Sujeitos.....</u>	52
5.1.2	<u>Material.....</u>	53
5.1.3	<u>Procedimento.....</u>	53
5.1.4	<u>Desenho das atividades.....</u>	53
5.1.4.1	Parte I.....	54
5.1.4.2	Parte II.....	58
5.2	<b>Atividade I do 6º ano do Ensino Fundamental.....</b>	59
5.3	<b>Atividade II do 6ºano do Ensino Fundamental.....</b>	62
5.4	<b>Análises.....</b>	68
5.4.1	<u>Panorama geral da atividade I.....</u>	68
5.4.1.1	Panorama detalhado da atividade I.....	69
5.4.2	<u>Panorama geral da atividade II.....</u>	70
5.4.2.1	Panorama detalhado da atividade II.....	71
	<b>CONCLUSÃO.....</b>	74
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	76
	<b>APÊNDICE A – Atividade I.....</b>	79
	<b>APÊNDICE B – Atividade II.....</b>	80

## INTRODUÇÃO

No decorrer da minha trajetória profissional, como docente, tenho refletido como ocorre o processo de ensino-aprendizagem dos poliedros. Atuando principalmente no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, observo que a maioria dos alunos apresenta dificuldades de aprendizagem em Geometria Espacial, por não conseguir visualizar todos os elementos dos poliedros ilustrados nos livros. Assim, percebe-se que é de extrema necessidade a construção dos sólidos com diversas técnicas lúdicas a fim de proporcionar o manuseio de maneira que o aluno possa identificar melhor cada um de seus elementos.

Esta pesquisa tem a finalidade de incentivar o uso das diversas construções de poliedros de forma lúdica e dos recursos tecnológicos nas aulas de Geometria Espacial. Neste sentido, pretendemos contribuir para o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem dos poliedros, já que em várias escolas eles são ensinados de forma tradicional através de uma didática desinteressante, não valorizando os recursos lúdicos e tecnológicos. Além disso, será apresentado o conceito de realidade aumentada com o intuito de aplicarmos uma nova didática nas salas de aulas com o uso de softwares, promovendo uma visualização tridimensional de uma forma mais fácil.

No Capítulo I será feita uma abordagem sobre os poliedros, destacando as relações existentes entre seus elementos. Ademais, realizará uma abordagem da relação de Euler que é válida para todo poliedro convexo. Por outro lado, também será feita uma reflexão sobre os poliedros de Platão.

O Capítulo II realizará uma apresentação da teoria de Van Hiele, caracterizando os níveis e as fases de aprendizagem geométrica do aluno.

O Capítulo III enfatizará a metodologia dinâmica que pode ser usada nas aulas de Geometria Espacial, salientando as principais construções de poliedros de forma lúdica que tornam as aulas mais atrativas.

O Capítulo IV apontará alguns softwares educativos de realidade aumentada como por exemplo: *Polièdres augmentès* e *Geometrix* que podem ser usados nas aulas de poliedros possibilitando uma melhor visão espacial.

Já o Capítulo V trata-se das atividades aplicadas numa turma de 6º ano utilizando construções de poliedros de formas lúdicas e alguns aplicativos da realidade aumentada.



## 1 POLIEDROS

### 1.1 Um breve histórico dos poliedros

Os poliedros vêm sendo estudados desde a antiguidade. O que se conhece sobre a história do poliedro vem de fontes egípcias, chinesas e babilônicas que continham resolução de problemas relacionados a pirâmides. Existem papiros referentes a construção de pirâmides que nos dão uma ideia de como eram tratados geometricamente esses tipos de sólidos. Um interessante documento egípcio é o Papiro de Rhind, conhecido como Papiro Ahmes. O Nome Ahmes é em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C. Esse documento foi comprado em 1858 por Henry Rhind, um antiquário escocês (BOYER, 1974, p.9). Nesse Papiro há alguns problemas geométricos, em particular sobre pirâmides (BOYER, 1974, p.13-14). Verdadeiramente, é possível perceber a existência de objetos e esculturas em forma de poliedros desde a época da antiguidade. Os poliedros apareceram em formas arquitetônicas antigas, como cubos e cubóides, com as primeiras pirâmides do Egito na Idade da Pedra.

Os etruscos precederam os gregos na sua consciência de pelo menos alguns dos poliedros regulares, como evidenciado pela descoberta perto de Pádua (no norte da Itália), no final do século XIX, de um dodecaedro feito de pedra-sabão e datado de mais de 2.500 anos (Lindemann, 1987). Os primeiros registros escritos sobre os poliedros foram realizados por autores clássicos gregos, que também fizeram a primeira descrição matemática conhecida deles.

Vale salientar que os pitagóricos, mais precisamente a Escola Pitagórica, contribuíram muito de certa forma no que se tem hoje sobre os cinco poliedros regulares, pois propuseram os primeiros estudos, formalizados e com rigor matemático, sobre poliedros regulares.

O interesse mais importante dos gregos se encontrava nos poliedros regulares convexos, que vieram a ser chamados de sólidos platônicos.

As ideias de Platão (filósofo grego, fundador da academia de Atenas no século IV a.C.) sobre os poliedros regulares foram registradas num diálogo intitulado *Timaeus*, presumivelmente do nome de um pitagórico, que serviu como interlocutor principal.

Os poliedros regulares foram denominados “corpos cósmicos” ou “sólidos platônicos”, por causa da forma pelo qual Platão, no *Timaeus*, os aplicou à explicação dos

fenômenos científicos. Platão associou ao cubo a Terra, ao tetraedro o Fogo, ao octaedro o Ar, ao icosaedro a Água e ao dodecaedro o Universo.

## 1.2 O ensino dos poliedros

No decorrer dos últimos anos é possível perceber que as críticas contra a metodologia como a escola vem ensinando a Geometria Espacial aumentaram, apontando a necessidade de adequar o trabalho escolar a uma nova realidade.

Segundo Nasser e Santanna (1997, p. 6), “Nas últimas décadas, uma necessidade de modificações no ensino da geometria cresceu ao redor do mundo, devido às dificuldades encontradas e ao fraco desempenho mostrado por alunos secundários em geometria”. É importante que o educador coloque em prática nas aulas de Geometria uma nova metodologia baseada numa perspectiva construtivista que utilize técnicas de montagem de poliedros com diversos recursos didáticos que agucem a curiosidade de aprender os conceitos de maneira significativa e atrativa. Uma outra forma de se realizar uma nova prática nas aulas de Geometria consiste no uso de recursos tecnológicos que fazem com que a aula seja mais interativa.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), a Geometria é um dos importantes campos de estudo, essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático. Os conceitos geométricos compõem parte de extrema importância no currículo do Ensino Fundamental, já que através deles, o educando consegue compreender e descrever o mundo em que vive.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a presença da tecnologia na sala de aula consiste numa estratégia de ensino, em que a proposta é trabalhar como uma intervenção social que contextualize o uso da tecnologia ao conteúdo aplicado. Ademais, destaca que é fundamental utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais, de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.

### 1.2.1 Definição

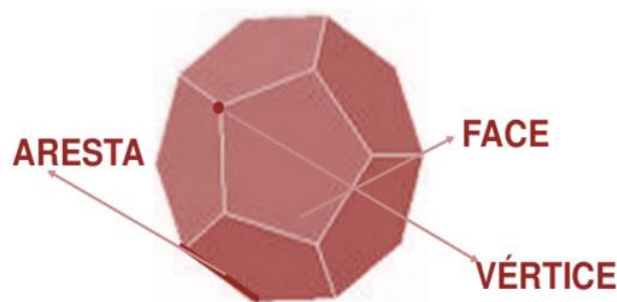
Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:

- (a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e, apenas um, outro polígono.
- (b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
- (c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

(LIMA,2006)

A palavra **poliedro** é composta por: **poli** que vem do grego *polys* que significa muitos ou vários, e **edro** que também vem do grego *hedra* que significa face. Além disso, os poliedros são conhecidos como sólidos geométricos compostos por três elementos basicamente: Faces, Arestas e Vértices, conforme é possível ver na Figura 1.

Figura 1 - Elementos de um poliedro



Fonte: Disponível em: <<https://www.slideserve.com/yazid/poliedros>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

- **Faces:** são os polígonos que limitam o poliedro.
- **Arestas:** tratam-se dos segmentos de reta que limitam suas faces.
- **Vértices:** consistem nos pontos de interseção de três ou mais arestas.

Uma questão fundamental sobre a nomenclatura dos poliedros consiste no fato de que cada um deles recebe nome de acordo com o número de faces que possui, como podemos verificar na tabela 1.

Tabela 1 - Nomenclatura dos Poliedros

Número de faces	Nome
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
13	Tridecaedro
...	...
20	Icosaedro

Fonte: A autora, 2019.

### 1.3 Poliedro convexo

Segundo DOLCE (1993):

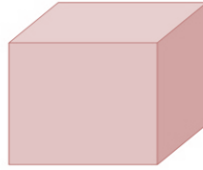
Consideremos um número finito  $n$  ( $n \geq 4$ ) de polígonos planos convexos tais que:

- dois polígonos não estejam contidos num mesmo plano;
- cada lado de um polígono é comum a dois, e somente dois polígonos;
- o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados  $n$  semi-espaços, cada um dos quais tem origem no polígono e contém os restantes. A intersecção destes semi-espaços é chamada poliedro convexo. (DOLCE, 1993, p.124) Assim, é possível perceber que um poliedro é considerado convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos.

Na Figura 2 podemos observar um exemplo de um poliedro convexo.

Figura 2 - Poliedro convexo

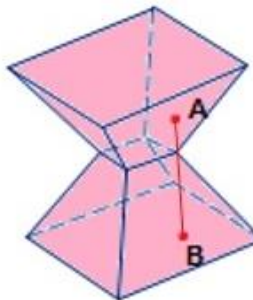


Fonte: Disponível em: <<https://www.infoescola.com/geometria-espacial/poliedros/>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

#### 1.4 Poliedro não convexo

Um poliedro é considerado como não convexo quando o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes. Na Figura 3 podemos observar um exemplo de poliedro não convexo.

Figura 3 - Poliedro não convexo



Fonte: Disponível em: <<https://www.infoescola.com/geometria-espacial/poliedros/>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

Vale ressaltar que neste trabalho faremos abordagens tomando como base de estudo os poliedros convexos, que por sua vez são classificados em várias categorias. No Ensino Básico, as categorias estudadas de uma forma generalizada são as dos poliedros regulares, também chamados de poliedros platônicos, os prismas e as pirâmides.

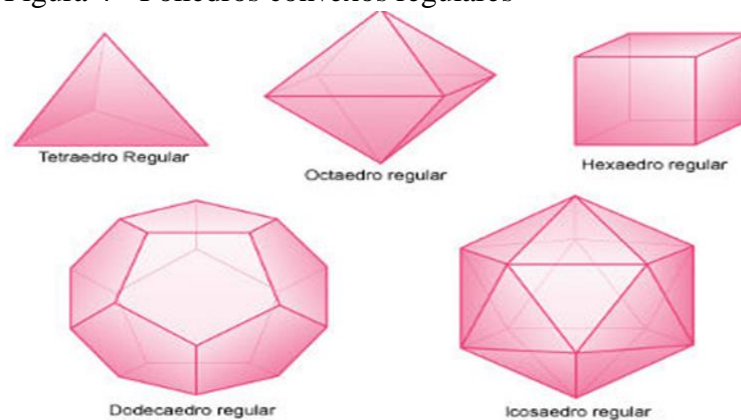
## 1.5 Poliedros regulares

Temos por DOLCE e POMPEO (2005) que poliedros convexos são considerados regulares quando todas as suas faces forem polígonos regulares e congruentes e por todos os seus vértices concorrerem o mesmo número de arestas. Esses poliedros são conhecidos como poliedros de Platão.

É conveniente destacar que os poliedros de Platão têm características próprias com as seguintes condições: O número de arestas é igual em todas as faces; Em cada vértice incidem o mesmo número de arestas; é válida a relação de Euler ( $V + F = A + 2$ ), onde  $V$  = número de vértices,  $A$  = número de arestas e  $F$  = número de faces, que será abordada mais adiante.

Uma questão interessante é que existem apenas cinco poliedros regulares convexos: o tetraedro regular, o hexaedro regular ou cubo, o octaedro regular, o dodecaedro regular e o icosaedro regular, como podemos ver na Figura 4.

Figura 4 - Poliedros convexos regulares



Fonte: Disponível em: <<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/poliedros-regulares.htm>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

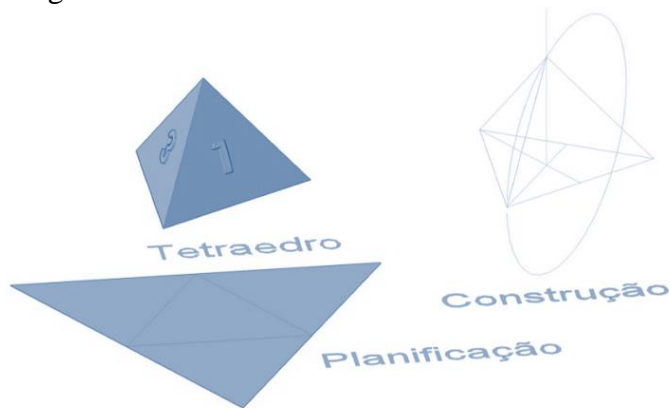
Os Poliedros de Platão também são chamados como THODI: T-Tetraedro (4 faces), H-Hexaedro (6 faces), O-Octaedro (8 faces), D-Dodecaedro (12 faces) e I-Icosaedro (20 faces).

Consideremos os poliedros platônicos e suas importantes características:

### **Tetraedro**

Trata-se de um poliedro formado por quatro faces triangulares, seis arestas e quatro vértices, sendo três arestas concorrendo a cada um dele conforme mostra a Figura 5.

Figura 5 - Tetraedro

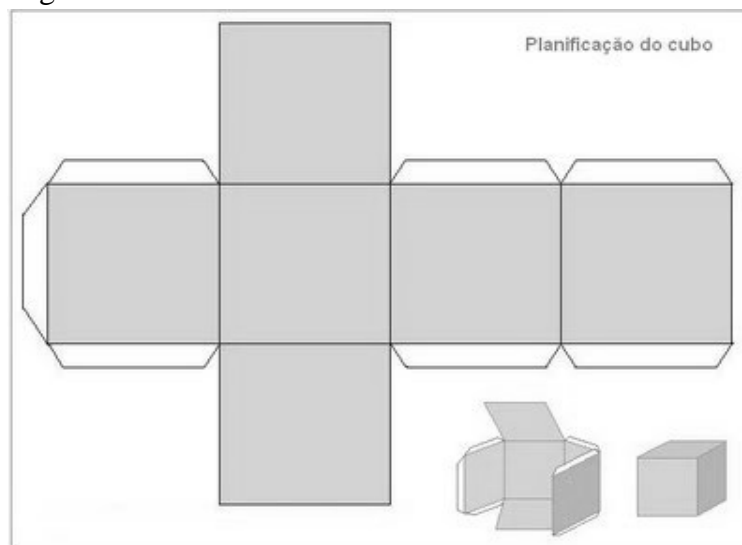


Fonte: Disponível em: <<http://uniquedesignpedromonteiro.blogspot.com/2010/04/blog-post.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### Hexaedro

Consiste num poliedro composto por faces quadradas. Com três arestas concorrendo a um mesmo vértice, ele tem seis faces, doze arestas e oito vértices. Esse poliedro também é chamado de cubo, como podemos ver na Figura 6.

Figura 6 - Hexaedro

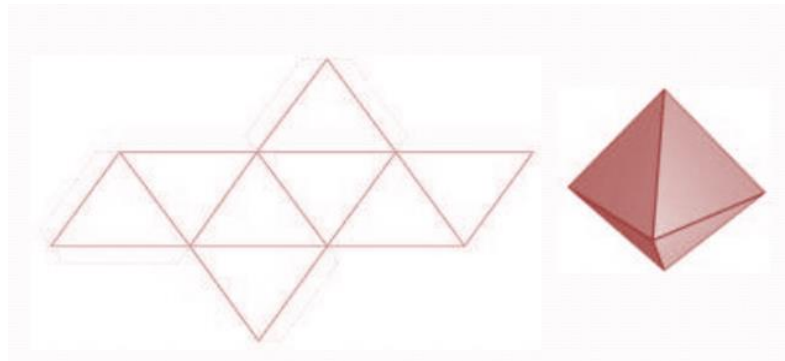


Fonte: Disponível em: <<http://dinamicamatematica.blogspot.com/2011/04/planificacao-de-solidos-geometricos.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### Octaedro

É um poliedro constituído por faces triangulares. Cada vértice desse poliedro tem quatro arestas concorrentes. Assim, o octaedro possui oito faces, doze arestas e seis vértices, como é possível verificarmos na Figura 7.

Figura 7 - Octaedro

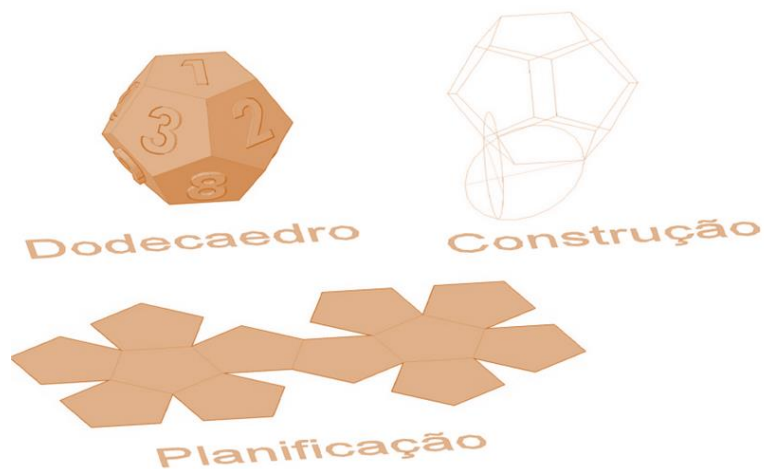


Fonte: Disponível em: <<https://pt.slideshare.net/lyliagraciele/octaedro-by-1-ano-a>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### **Dodecaedro**

Consiste no único poliedro regular que possui as faces pentagonais. Tem doze faces, vinte vértices e trinta arestas, concorrendo três em cada vértice, como mostra a Figura 8.

Figura 8 - Dodecaedro



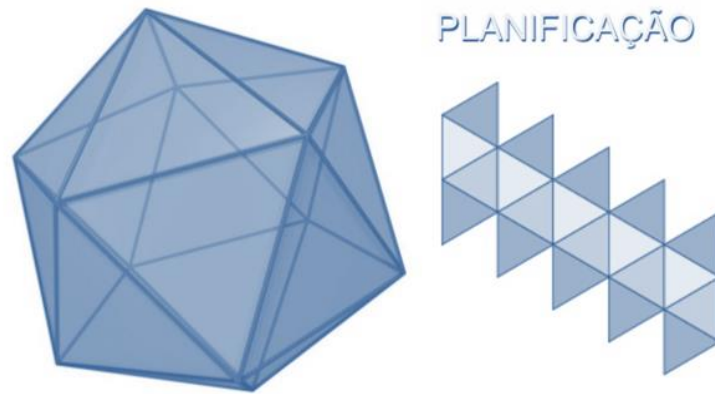
Fonte: Disponível em: <<http://uniquedesigmpedromonteiro.blogspot.com/2010/04/construcao-e-planificacao-de-dodecaedro.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### **Icosaedro**

Trata-se de um poliedro que tem cinco arestas concorrendo a um mesmo vértice. Ademais, possui ao todo vinte faces triangulares, trinta arestas e doze vértices, conforme vemos na Figura 9.



Figura 9 - Icosaedro



Fonte: Disponível em: <<https://pt.slideshare.net/mazzesantos/slide-caderno-6pnaic>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

Platão identificou cinco sólidos poliédricos com todas as faces iguais. Ele associou esses sólidos com os elementos básicos que ele acreditava que formavam o mundo físico. (ROONEY, 2012, p.33).

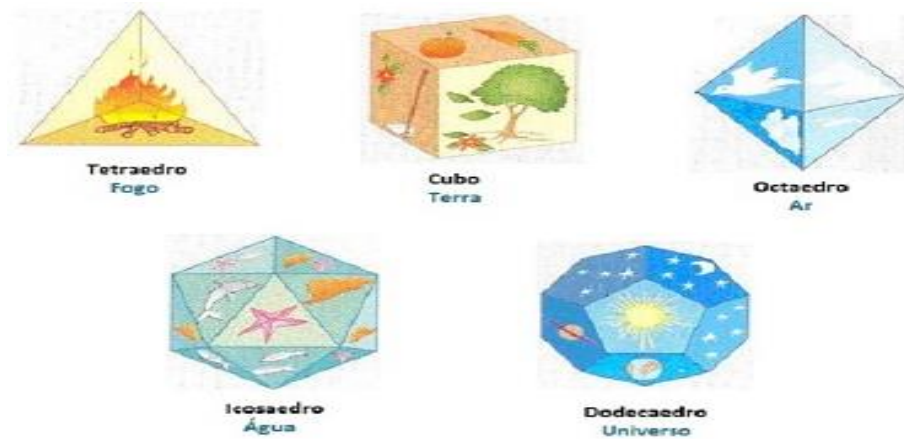
Uma questão importante é que esses poliedros, são conhecidos como poliedros de Platão em homenagem ao filósofo grego Platão (427-347 a.C.) que relacionou a origem do universo aos poliedros, associando cada um destes a um elemento da natureza: a terra foi associada com o cubo, o ar com o octaedro, a água com o icosaedro, o fogo com o tetraedro e como faltava ainda uma quinta construção que Deus utilizou para organizar todas as constelações do céu se referiu ao universo o dodecaedro. Verdadeiramente, percebe-se que Platão relacionou o tetraedro ao fogo, pois este sólido possui o menor número de faces e maior estabilidade; o cubo à terra por ter faces quadradas podendo ser colocadas lado a lado perfeitamente e garantir estabilidade; o octaedro ao ar, pois acreditava que o átomo do ar era um poliedro de oito faces e tinha a maior mobilidade; o icosaedro relacionou a água e o dodecaedro ao universo para representar o Cosmos, que defendia ser a “alma do mundo”. Assim, verifica-se que Platão utilizava os poliedros para explicar cientificamente os fenômenos naturais, conforme podemos ver na Figura 10.

Vale destacar que o matemático Johan Kepler(1571-1630) deu ênfase para as associações dos poliedros aos fenômenos da natureza.

Johann Kepler (1571 –1630),mestre da astronomia, matemático e numerologista deu uma explicação engenhosa para as associações de Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essas relações volume superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo é o mais seco dos quatro “elementos” e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa – se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem maior estabilidade. O octaedro, seguro

frouxamente por dois de seus vértices opostos entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente associa-se o dodecaedro com o universo porque o dodecaedro tem doze faces e o zodíaco tem doze seções. (EVES, 1995).

Figura 10 - Poliedros de Platão e os fenômenos da natureza



Fonte: Disponível em: <<http://matematicacinco.blogspot.com/2010/10/um-pouco-de-historia.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

## 1.6 Prismas

O prisma trata-se de um poliedro que apresenta duas faces paralelas idênticas, chamadas de bases. Cada vértice de uma das bases está unido a um vértice da outra base, de modo a formar as outras faces do poliedro, que são todas retângulos ou paralelogramos, conforme podemos ver na Figura 11.

Figura 11 - Exemplos de Prismas

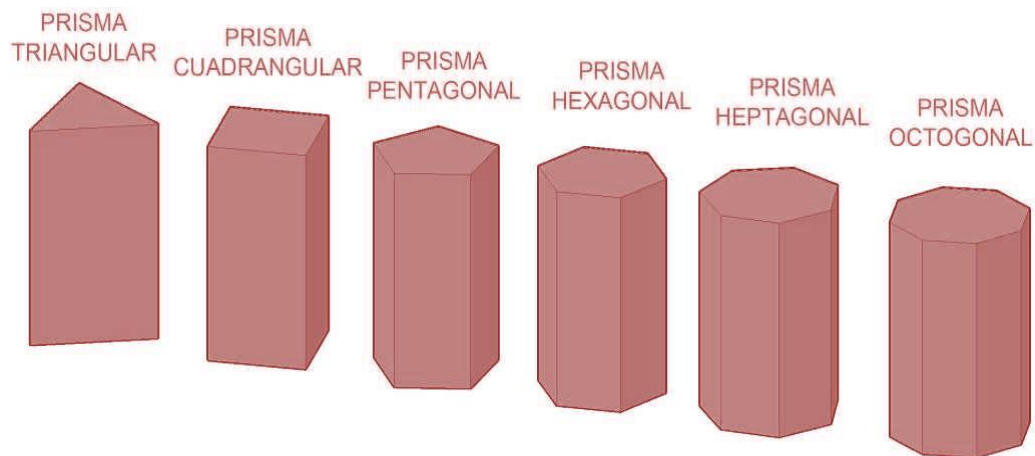


Fonte: Disponível em: <[https://www.researchgate.net/figure/figura-5-Exemplos-de-prismas-retos-Na-imagem-aparecem-os-seguintes-poliedros-da\\_fig2\\_260192202](https://www.researchgate.net/figure/figura-5-Exemplos-de-prismas-retos-Na-imagem-aparecem-os-seguintes-poliedros-da_fig2_260192202)>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### 1.6.1 Prisma regular

Um prisma é considerado regular se for reto e suas bases forem dois polígonos regulares. Além disso, os prismas são nomeados de acordo com o polígono que determina a sua base, como por exemplo: se a base for triângulo, o prisma chama-se triangular; se a base for quadrilátero, prisma quadrangular; se a base for pentágono, prisma pentagonal; e assim por diante, como é possível visualizarmos na Figura 12.

Figura 12 - Prismas regulares



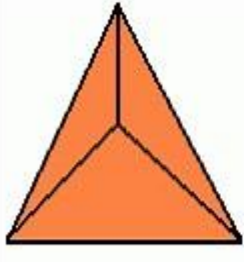
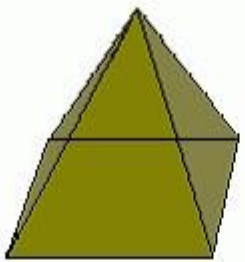
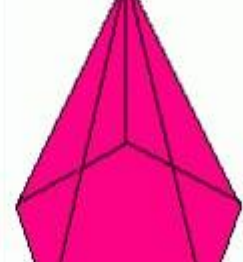
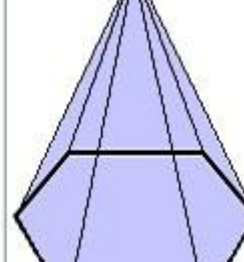
Fonte: Disponível em: <<https://www.partesdel.com/prisma.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### 1.7 Pirâmides

Pirâmide consiste num poliedro em que sua base é representada por um polígono, as faces laterais são triangulares e possui um vértice que é comum a todas as suas faces.

As pirâmides são classificadas de acordo com o polígono que forma sua base: pirâmide triangular, a base é um triângulo; pirâmide quadrangular, a base é um quadrilátero; pirâmide pentagonal, a base é um pentágono; e assim por diante, como podemos ver na Figura 13.

Figura 13 - Exemplos de Pirâmides

Triangular	Quadrangular	Pentagonal	Hexagonal
			
base: triângulo	base: quadrilátero	base: pentágono	base: hexágono

Fonte: Disponível em: <<http://matematicanapontadolapis.blogspot.com/2009/11/piramides.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### 1.8 Relações entre elementos de poliedros

É possível estabelecer relações entre alguns elementos de um poliedro convexo. Consideremos  $F$ , o número de faces,  $A$ , o número de arestas e  $V$ , o número de vértices.

É importante salientarmos que existem poliedros que possuem faces formadas por polígonos diferentes. Desta forma, consideremos  $F_n$  o número de faces que contém  $n$  lados, com  $n \geq 3$ , teremos  $F_3$  faces triangulares,  $F_4$  faces quadrangulares e assim por diante. Deste modo, podemos concluir que o número total de faces do poliedro é dado por:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_n$$

Outra questão interessante é que para cada vértice  $V$  de um poliedro concorrem  $q$  arestas, mas como para cada vértice o menor número de arestas que concorrem para ele é 3, por definição, temos que  $q \geq 3$ . Considerando  $V_3$  o número de vértices no qual concorrem 3 arestas,  $V_4$  o número de vértices onde concorrem 4 arestas e assim sucessivamente, temos que o número total de vértices do poliedro é expresso por:

$$V = V_3 + V_4 + \dots + V_q$$

Vale destacar que para determinar o número de arestas do poliedro, basta multiplicar o número de lados de cada polígono que o constitui pela quantidade de polígonos: o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5 e assim sucessivamente. Em seguida, deve-se adicionar os resultados obtidos. Como temos que cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior equivale ao dobro do número de arestas. Logo, devemos dividir essa soma por 2 para encontrarmos o total de arestas do poliedro considerado.

$$3.F_3 + 4.F_4 + 5.F_5 + \dots + n.F_n = 2.A$$

Assim, temos que o número de arestas de um poliedro é definido por:

$$A = \frac{3.F_3 + 4.F_4 + \dots + n.F_n}{2}$$

### 1.9 Relação de Euler

Conforme encontra-se em Eves (2004), Leonhard Euler foi um suíço, nascido em Basileia, em 1707. Após uma tentativa de carreira no campo da teologia, Euler encontrou sua vocação na matemática.

Para Eves (2004, p.472): “Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática que seu nome não figure”. Euler destacou uma intensa importância aos poliedros ao figurar em um de seus artigos a relação:  $V - A + F = 2$ . Nesta igualdade, Leonhard Euler relaciona-se o número  $V$  de vértices,  $F$  de faces e  $A$  de arestas, de todo poliedro convexo, podendo também ser escrita na forma:  $V + F = A + 2$ .

Na tabela 2, é possível verificar a validade desta fórmula de Euler, neste caso para os Poliedros de Platão. No entanto, a fórmula aplica-se a todos os poliedros convexos.

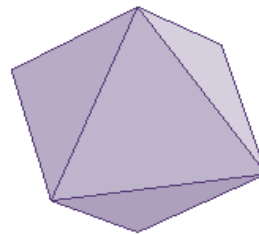
Tabela 2 - Representação dos elementos da Relação de Euler

Poliedro	V	A	F	V-A+F
Tetraedro	4	6	4	2
Hexaedro	8	12	6	2
Octaedro	6	12	8	2
Dodecaedro	20	30	12	2
Icosaedro	12	30	20	2

Fonte: A autora, 2019.

A fórmula de Euler para poliedros foi descoberta em 1758. Na época, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) elaborou uma carta para o matemático Christian Golbach(1690-1764), descrevendo a descoberta da relação de dependência entre os elementos de um poliedro. Na Figura 14 temos um exemplo de poliedro convexo onde a relação de Euler é válida. Entretanto, essa relação pode ou não ser verdadeira para poliedros não convexos, como podemos ver nas Figuras 15 e 16.

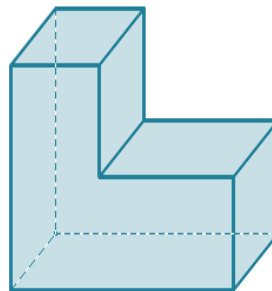
Figura 14 - Poliedro convexo onde a Relação de Euler é válida



$$V - A + F = 6 - 12 + 8 = 2$$

Fonte: Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/relacao-de-euler-estudando-poliedros-convexos.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

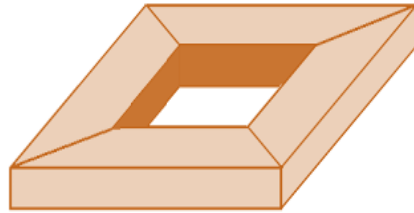
Figura 15 - Poliedro não convexo onde a Relação de Euler é válida



$$V - A + F = 12 - 18 + 8 = 2$$

Fonte: Mialich, 2013, p. 14.

Figura 16 - Poliedro não convexo onde a Relação de Euler não é válida



$$V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$$

Fonte: Mialich, 2013, p. 18.

## 2 TEORIA DE VAN HIELE

### 2.1 O modelo de Van Hiele

Essa teoria foi criada por um casal de holandeses, na década de 1950, Pierre Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele-Geldof. Através de suas teses de doutorado na Universidade de Utrecht, esta teoria teve início a partir das observações feitas pelo casal das dificuldades que seus alunos apresentavam em conteúdos de Geometria. Então, por meio das pesquisas realizadas, criaram esta teoria baseada no desenvolvimento do pensamento geométrico, o qual consideram a existência de diferentes níveis de pensamento e fases de aprendizagem sobre conceitos geométricos, sugerindo que os estudantes durante sua formação passam por estes níveis, sendo que a evolução de um nível para outro não depende de sua idade cronológica, mas sim da experiência de atividades adequadas organizadas pelo professor. Assim, é possível perceber que o docente tem um papel fundamental ao definir as tarefas adequadas para os alunos avançarem para níveis superiores de pensamento.

Vale destacar que a teoria de Van Hiele estabelece que o pensamento geométrico evolui de forma lenta desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e a dedução vão se relacionando. As crianças iniciam reconhecendo as figuras e diferenciando-as pelo seu aspecto físico e só depois realizam a análise das suas propriedades. Desta forma, é de extrema importância que ao nível do 1º ciclo se priorize a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em associação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

A aplicação da metodologia de ensino baseada na teoria de Van Hiele, também considerada um modelo de aprendizagem, é uma possível estratégia para a reversão da problemática no ensino da geometria, pois, por ter sido originada em sala de aula, a teoria aliou os aspectos cognitivo e pedagógico do ensino da geometria (NASSER; SANTANNA,1997).Verdadeiramente, é perceptível que trata-se de um modelo de aprendizagem que possibilita o aluno a vencer as dificuldades de aprendizagem de certos conteúdos geométricos.

A composição desses níveis se deu por influência da teoria piagetiana, identificando quatro fatores atuantes no processo de desenvolvimento cognitivo: maturação, experiência



com o mundo físico, experiências sociais e equilíbrio. Na teoria de Van Hiele, contudo, atenção maior é dada ao processo de ensino-aprendizagem, sendo este um meio através do qual o estudante atinge certo nível de desenvolvimento (SAMPAIO ALVES, 2010). O modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas por Van Hiele promovem uma maneira de identificar em qual nível de maturidade geométrica os educandos se encontram e apontam os possíveis caminhos para ajudá-los a avançar de nível.

### 2.1.1 Níveis de compreensão

Os níveis de Van Hiele são cinco e podem ser nomeados com números de 1 a 5. Conforme Villiers (2010), a distinção desses cinco níveis de raciocínio é a marcante característica do modelo. Cada nível envolve a compreensão e utilização de conceitos geométricos de uma forma diferente, o que se reflete na maneira de interpretá-los, defini-los, classificá-los e fazer demonstrações. Os níveis são sequenciais e ordenados de tal forma que não se pode pular nenhum.

#### 2.1.1.1 Nível 1: Visualização ou reconhecimento

Nesse nível, os educandos identificam as figuras visualmente por sua aparência global, ou seja, a descrição das figuras é realizada com base em seus aspectos físicos e posição no espaço. Reconhecem, descrevem, comparam e classificam as figuras geométricas planas através de suas formas, mas não identificam as propriedades delas. Além disso, o aluno aprende o vocabulário geométrico, identifica formas específicas e reproduz figuras; como exemplo, o aluno pode dizer que um hexaedro é uma caixa quadrada, assim como diferencia pirâmide e prisma a partir da visualização, mas não reconhece e nem diferencia os sólidos por suas propriedades. Ademais, é neste nível, por exemplo, que o aluno sabe afirmar para a turma qual característica de uma certa figura lhe atraiu maior atenção.

As descrições das características não são, necessariamente, colocadas com termos matemáticos. É possível um aluno, nesse nível, se referir a um “vértice” como “bolinha” e as “arestas” como “palitos”, por exemplo.

### 2.1.1.2 Nivel 2: Análise

Nesse nível, os educandos começam a análise das propriedades das figuras por meio de comparação e aprendem a simbologia necessária para realizar a descrição de cada uma delas, mas não conseguem correlacionar figuras ou propriedades das mesmas. Assim, os alunos raciocinam por meio de uma análise informal a partir da observação e experiência. Por outro lado, é também nesse período que o aluno inicia a percepção de que a figura é composta por partes como por exemplo, no caso do hexaedro, o aluno começa a identificar que esse sólido possui seis faces quadrangulares e que pode, ainda, apresentar faces quadrangulares e retangulares, duas a duas (no caso do paralelepípedo).

É possível ver que o nível 2 é caracterizado pelo:

[...]reconhecimento e caracterização das figuras geométricas por meio de suas propriedades. As propriedades são apreendidas experimentalmente, por meio de atividades de observação, de medição e desenhos. Os estudantes descobrem que algumas propriedades, quando combinadas, referem-se a uma classe de figuras. (VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 45).

### 2.1.1.3 Nivel 3: Ordenação ou classificação

Nesse nível, os alunos passam a estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras, deduzindo propriedades e reconhecendo classes de figuras. Nesta etapa, a definição já tem significado; entretanto, o aluno ainda não compreende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas nas provas formais. Desta forma, os alunos acompanham provas formais, mas não percebem como construir uma prova a partir de premissas diferentes, não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas.

É válido lembrar que é nesse nível que os educandos repetem demonstrações feitas pelo professor e começam a diferenciar os poliedros por seu tipo de face, já que um octaedro e um tetraedro apresentam faces triangulares e um dodecaedro faces pentagonais.

#### 2.1.1.4 Nível 4 : Dedução formal

Nesse nível, os discentes iniciam o desenvolvimento de sequências longas de enunciados e conseguem entender o significado da dedução, o papel dos axiomas, teoremas e provas, ou seja, os educandos compreendem a diferença entre axiomas, teoremas, postulados e definições. A realização de conjecturas e esforços iniciados é espontânea. Um aluno nesse período pode construir provas e não apenas memorizá-las.

É interessante salientar que “Neste estágio o aluno analisa e compreende o processo dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado” (PEREIRA; SILVA; MOTTA JR., 2005 apud VIEIRA; ALLEVATO, 2015, p. 46). Percebe-se que nesse nível, os alunos são capazes de desenvolver demonstrações formais. Além disso, é nesse momento que o aluno passa a aceitar a possibilidade de se atingir ao mesmo resultado através de diferentes caminhos.

#### 2.1.1.5 Nível 5 : Rigor

Nesse nível, os alunos tem a capacidade para realizar deduções abstratas tomando como base um sistema de axiomas. Ademais, são capazes de entender axiomas, mesmo na ausência de modelos concretos. Assim, verifica-se que nesse nível os alunos entendem a estrutura de vários sistemas dedutivos com alto grau de rigor, sendo capazes de trabalhar em vários sistemas axiomáticos.

O modelo de Van Hiele leva o educando ao nível da visualização de um conceito geométrico, em seguida ao nível da análise, depois ao da ordenação lógica, mais adiante ao nível da dedução e, por fim, a atingir o nível do rigor da conceituação. Nesta etapa, o aluno torna-se capaz de entender e relacionar conceitos abstratos.

É importante ressaltar que é possível encontrar numa turma alunos com diferentes níveis de compreensão em relação ao pensamento geométrico descrito pela Teoria de Van Hiele.

Vale enfatizar que envolver os alunos com objetos concretos para o universo matemático pode tornar a aprendizagem mais efetiva, interessante e atrativa. A aplicação de uma metodologia inovadora para compreensão dos conceitos geométricos é um caminho que

certamente atingirá uma maior quantidade de alunos e promoverá o aumento do nível de desenvolvimento do raciocínio dos mesmos. O uso da teoria de Van Hiele gera uma aplicação prática e concreta nas aulas de Geometria diferente da metodologia tradicional presente em várias escolas.

Os níveis são subdivididos em cinco fases conhecidas como: questionamento, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração ou fechamento.

### 2.1.2 Fases de aprendizagem da teoria de Van Hiele

#### 2.1.2.1 Questionamento ou Informação

Nessa fase, o professor dialoga com o educando sobre o material de estudo, procurando ver quais são seus conhecimentos anteriores sobre o conteúdo a ser abordado na aula.

#### 2.1.2.2 Orientação Direta

Nessa fase, os educandos exploram o conteúdo a ser abordado em sala por meio do material selecionado pelo professor. Vale ressaltar que as atividades dessa fase deverão gerar respostas objetivas.

#### 2.1.2.3 Explicitação

Nessa fase, é perceptível que o professor atua como um mero observador. Já o aluno descreve por escrito o que aprendeu e viu nas atividades anteriores. Assim, é possível ver que neste momento, os alunos fazem trocas de experiências que contribuem para que cada um possa analisar suas ideias.

#### 2.1.2.4 Orientação Livre

Nessa fase, as tarefas são compostas por várias etapas, promovendo muitas repostas, com o intuito do aluno ganhar experiência e autonomia. Além disso, neste período os alunos conseguem resolver atividades mais complexas que as anteriores.

#### 2.1.2.5 Integração

Nessa fase, os discentes passam a ter uma visão global do assunto e o docente ajuda na revisão e conclusão, transmitindo experiências e observações, sem apresentar novas ideias ou discordantes ideias.

### 3 CONSTRUÇÕES DE POLIEDROS DE FORMA LÚDICA

#### 3.1 Metodologia de ensino dos poliedros

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) destacam que a Geometria precisa ser introduzida nas escolas a partir dos anos iniciais, pois é parte importante do cotidiano do indivíduo, presente tanto na natureza quanto em elementos construídos pelo homem.

Os PCNs (BRASIL,1998) ressaltam que são atividades que exploram as formas que vão proporcionar estímulos aos alunos para perceber as posições dos objetos, reconhecer formas distintas e descrever o espaço sob diferentes aspectos. Ademais, enfatizam que somente através de construções e observações é que o aluno conseguirá identificar diferenças e semelhanças entre as formas. Por outro lado, os PCNs intensificam que “O uso de alguns softwares disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente.” (BRASIL, 1997, p.83). Um dos maiores desafios encontrados pelos professores ao abordarem a Geometria Espacial trata-se da dificuldade por parte dos alunos de desenvolverem uma visão tridimensional do mundo que os rodeia (BRASIL, 1997). Assim, percebe-se que o uso de atividades lúdicas e softwares educativos sobre poliedros nas salas de aulas é sugerido neste contexto, porque diminuem tais defasagens por meio da melhor visualização dos elementos que formam cada poliedro.

A ausência ou quase ausência do ensino da geometria, apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria matemática, é uma lacuna a ser preenchida na prática pedagógica de professores e outros profissionais envolvidos com a área.(OLIVEIRA; VELASCO, 2007, p. 3).

É de extrema importância ensinar poliedros na educação básica através de materiais concretos associando a objetos da nossa realidade, pois assim o aprendizado torna - se prazeroso e significativo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática dão ênfase a tal importância da geometria ao declarar:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial

de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 51).

### 3.1.1 Formas lúdicas e o ensino dos poliedros

Uma questão interessante é que o uso adequado do material concreto no ensino e aprendizagem permite o desenvolvimento de habilidades que estão dentro do processo mental do educando e relacionadas na construção dos conceitos geométricos.

Rego e Rego (2006, p. 43) afirmam que:

O material concreto tem fundamental importância, pois, a partir de sua utilização adequada os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de idéias e modelos.

É válido destacar que o professor precisa estar convencido de que ensinar não é só transmitir conhecimento, mas, sim abrir caminhos para a construção do mesmo. É ser consciente de que ensinar é diferente de dar aula. Desta forma, verifica-se que para ocorrer um aprendizagem significativa da Geometria é necessário que os educandos construam, relacionem ideias, interagindo com outros alunos e materiais variados.

O processo ensino-aprendizagem nem sempre é direto, nem tudo que se ensina, se aprende, e às vezes aprendem-se coisas que não se pretendem ensinar. E nada mais enriquecedor do que propor atividades criativas e desafiadoras que põem acontecer em qualquer lugar, até mesmo na areia da praia. O lúdico através de jogos, brincadeiras, músicas e dramatizações é muito motivador, devendo acontecer em casa e na escola, em especial na sala de aula, onde a aprendizagem vira ofício do brincar e a vida escolar um enorme prazer. (Ramalho, 2010).

Verdadeiramente, vale salientar que é por meio da utilização do material didático que torna-se possível construir o conhecimento através da interação entre o aluno e o objeto, contribuindo para uma aprendizagem significativa.

Lorenzato (2006, p. 21) declara que o material concreto pode ser um excelente catalisador para o aluno construir o seu saber matemático dependendo da forma que os conteúdos são conduzidos pelo professor. E nada melhor do que trabalhar essa metodologia com a inserção de construções geométricas no ambiente da sala de aula, possibilitando ao aluno relacionar teoria e prática, visualizando melhor as figuras trabalhadas e deixando de

lado, a abstração matemática. É importante lembrar que o uso do material concreto na sala de aula é uma rica oportunidade que o professor pode adotar nas aulas visando torná-las mais interessantes.

Para Kaleff (2006), as dificuldades apresentadas pelos alunos na visualização dos sólidos geométricos e a desmotivação que muitos estudantes apresentam nas aulas de geometria espacial “têm levado os educadores a buscarem meios para facilitar o ensino das propriedades geométricas dos sólidos e para tornar esse ensino mais atrativo e motivador” (p.16). Nos seus estudos, essa educadora nos sugere a utilização de materiais concretos para a construção dos “esqueletos” dos sólidos geométricos, tais como canudos, linha, palitos de churrasco, anéis elásticos e agulha grossa. Ressalta a importância da visualização tridimensional do sólido, afirmando que “ao visualizar objetos geométricos, o aluno passa a ter controle sobre o conjunto das operações básicas mentais exigidas no trato da geometria” (p.16). Assim, é possível perceber a necessidade da presença do material concreto nas aulas de Geometria a fim de despertar a atenção dos alunos e facilitar o processo de aprendizagem dos poliedros.

#### 3.1.1.1 Jujubas e palitos de dentes

Uma forma lúdica de construir os poliedros consiste na técnica de usar jujubas para representar os vértices e os palitos de dentes, arestas. Trata - se de uma forma agradável, principalmente pelo fato de utilizar jujubas coloridas que despertam a atenção dos alunos. Por outro lado, este método de ensino dos poliedros tem como objetivo reconhecer e nomear os principais poliedros, identificando vértices, faces e arestas nos mesmos e utilizar a relação de Euler para resolver problemas.

O material desta técnica se resume no uso de jujubas e palitos de dentes para a construção de esqueletos de poliedros. Vale lembrar que esse material é de baixo custo e fácil acesso.

Podemos observar na Figura 17 a concentração e o interesse do aluno em montar o poliedro utilizando as diversas cores possíveis, sabendo que após ao término da atividade poderá levá-lo para casa para degustar as jujubas.



Figura 17 - Poliedros com jujubas



Fonte: Disponível em: <<http://sagradopg.redesagradosul.com.br/unidade/noticias/poliedros-de-jujubas>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### 3.1.1.2 Garrotes e palitos de churrasco

Esse método permite o aluno construir poliedros usando os palitos de churrasco para representar as arestas e os garrotes, os vértices. Vale destacar que esta técnica é muito atraente para o aluno uma vez que cada poliedro construído possui dimensões maiores do que nas outras técnicas. Além disso, essa técnica é rápida de se executar e utiliza materiais fáceis de encontrar e de baixo custo. Por outro lado, é válido afirmar que alguns sólidos não se sustentam apenas com arestas, sendo necessária a montagem das diagonais, como por exemplo o cubo da Figura 18.

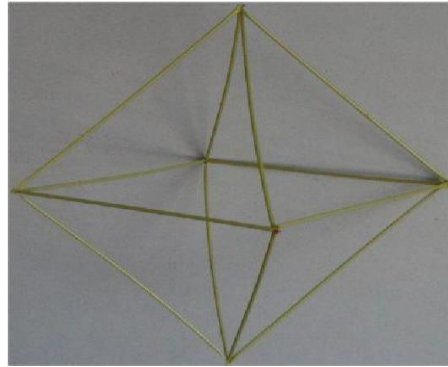
Figura 18 - Confeção do cubo com palitos de churrasco



Fonte: Disponível em: <<http://sapucaiaadosul-egef.blogspot.com/2012/12/4-encontro-semanal.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

O uso desse método é indicado devido à sua fácil manipulação, o que permite rapidez na construção das estruturas, sendo muito indicado para as atividades a serem realizadas com as turmas de 6º ano. Podemos observar na Figura 19 o octaedro construído com facilidades por um aluno do 6º ano do Ensino Fundamental.

Figura 19 - Octaedro com garrotes

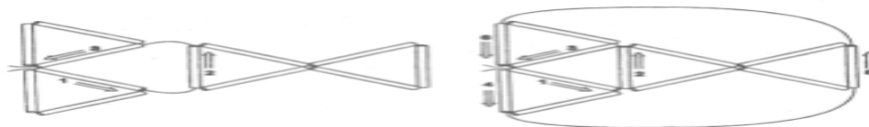


Fonte: Disponível em: <<https://cursoathenas.webnode.com.br/news/geometria-espacial-platao/>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

### 3.1.1.3 Canudos e linha

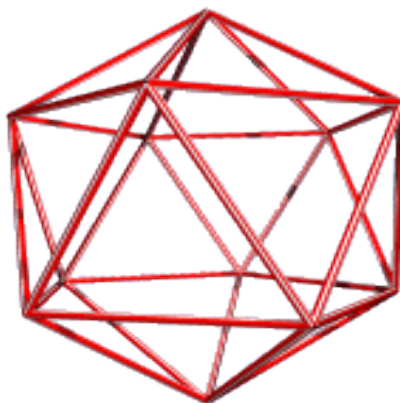
É um método de construção dos poliedros, onde a linha passa por dentro dos canudos para montar o esqueleto dos poliedros. Apesar de ser um método de baixo custo e de visual agradável, vale lembrar que essa técnica tem alguns aspectos negativos como: é difícil e tem demorada execução, a estrutura não fica rígida dependendo do tamanho do canudo, o que dificulta o manuseio, e utiliza agulhas que podem gerar acidentes. Por isso, é de extrema necessidade o acompanhamento do professor ao aluno na construção de cada sólido. Podemos verificar nas Figuras 20 e 21, respectivamente as montagens de um octaedro e de um icosaedro com canudos e linhas.

Figura 20 - Construção de um octaedro regular com canudos



Fonte: Disponível em: <<http://tempodematematica.blogspot.com/2013/09/como-construir-com-canudos-os-solidos.html>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

Figura 21 - Icosaedro feito com canudos



Fonte: Disponível em: <<http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10314/open/file/canudos.htm?sequence=18>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

#### 3.1.1.4 Montagem de poliedros com papéis

Consiste na construção de poliedros através da montagem da planificação de cada um deles, podendo utilizar palitos de fósforos e canudos para destacar as arestas. Por outro lado, se usarmos apenas a construção com papéis a visualização dos elementos dos poliedros fica mais comprometida. Além disso, vale ressaltar que esse método é difícil e de demorada execução, pois exige a planificação correta do sólido, o que dificilmente acontece já que a maioria dos desenhos a ser recortado possui erros de medida. Entretanto, essa técnica de dobraduras de papel na sala de aula poderá fazer toda a diferença no processo de ensino e aprendizagem, enriquecendo a aula e tornando a aprendizagem mais interessante e divertida, como podemos ver nas figuras 22 e 23.

Figura 22 - Poliedros construídos com papéis



Fonte: RESENDE, 2013, p. 5.

Figura 23 - Diversos poliedros de papéis



Fonte: Disponível em: <<http://www.ohiogas.info/numeros-do-papel-com-seus-padres-de-circuitos/>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

Enfim, é perceptível que a Geometria é uma área em que podemos usar vários recursos didáticos para uma melhor aprendizagem. Ademais, é possível verificar se os alunos que participaram na construção dos materiais apresentam melhores resultados, porque a partir da manipulação e da exploração do objeto, o aluno ultrapassa as dificuldades da abstração matemática, compreendendo de forma clara e sucinta regras, propriedades e teorias.

## 4 OS POLIEDROS E A REALIDADE AUMENTADA

### 4.1 Realidade Aumentada

Nos últimos anos, percebe-se que é de extrema necessidade utilizarmos recursos tecnológicos nas aulas de Matemática visando despertar a atenção do aluno que encontra-se inserido no mundo tecnológico em que vive.

Em seu cotidiano, o ser humano ao encontrar com situações novas ou desafiadoras, dobra a atenção para dominá-las, isso ocorre porque essas atividades não são mecânicas, dessa forma a proposta de mudança nas aulas de matemática pode começar com atividades que agucem a curiosidade diante de desafios a serem resolvidos (STAREPRAVO, 2009). Verdadeiramente, as escolas que tem feito dos recursos tecnológicos ferramenta no processo de ensino e aprendizagem da Geometria estão estimulando os interesses dos alunos através da visualização dos poliedros com os aplicativos disponíveis.

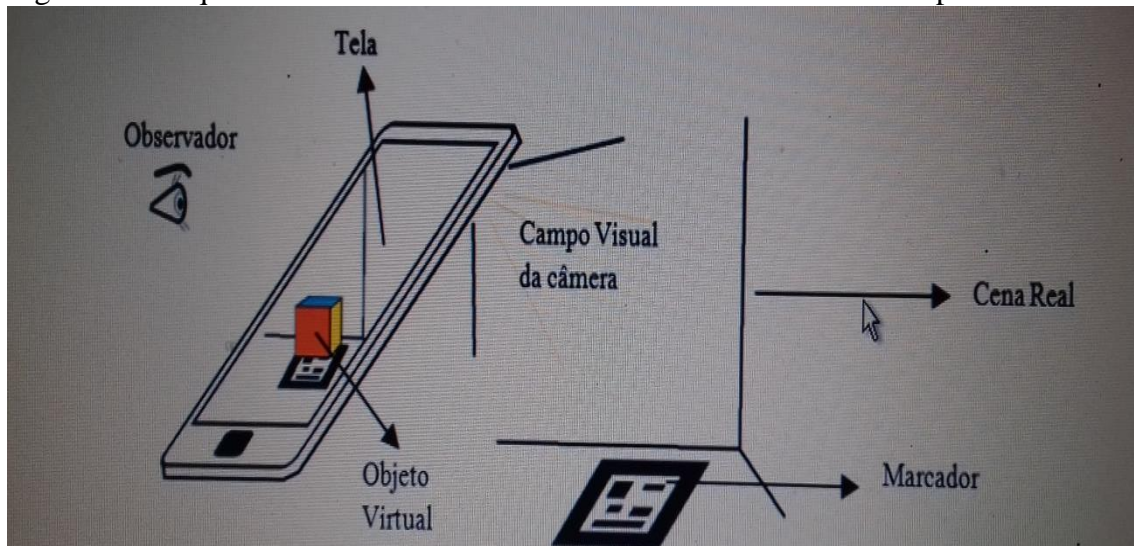
Segundo Kirner e Siscoutto (2007), a Realidade Aumentada(RA) surgiu na década de 90 com a ideia de sobreposição de objetos virtuais em ambientes reais através de algum dispositivo tecnológico.

A tecnologia Realidade Aumentada ou augmented-reality (AR) se constitui de técnicas computacionais que a partir de um dispositivo tecnológico, geram, posicionam e mostram objetos virtuais integrados a um cenário real. Assim, o usuário mantém o senso de presença no mundo real, o que não ocorre, por exemplo, em realidade virtual. Este mecanismo enfatiza a qualidade das imagens e a interação do usuário com esses objetos em tempo real. O tipo de interação mais comum em Realidade Aumentada é aquela em que o usuário se move livremente em torno do objeto, visualizando-o sob diferentes pontos de vista. (Kirner e Tori, 2006). O termo “aumentada” é usado, porque colocando outras informações num cenário real o usuário tem a imagem de um ambiente real com informações adicionais, podendo “manipular” os objetos reais ou virtuais dispostos no cenário sem a necessidade de nenhum aparato extra como uma luva ou o mouse.

As primeiras interações com a Realidade Aumentada ocorreram com o uso de um computador, sua webcam e um software que trata a imagem capturada pela câmera e mistura com os componentes virtuais que são criados pelo software.

Geralmente, o funcionamento deste sistema consiste na apresentação de um marcador (imagem que serve como referência para a posição do objeto virtual) no campo visual da câmera de um computador, notebook, tablet ou smartphone. Em seguida, o sistema, através de um aplicativo, detecta e rastreia os marcadores, projetando os objetos virtuais 3D ou qualquer outra mídia sobre a marca, e este por sua vez pode ser visualizado simultaneamente ao ambiente pelo observador via tela do dispositivo. Na maioria dos casos o marcador é uma imagem geométrica que serve como um código e, também, uma referência para a posição e orientação da câmera, conforme podemos ver na Figura 24.

Figura 24 - Esquema de funcionamento da Realidade Aumentada em dispositivo móvel



Fonte: MACEDO, 2016, p. 3.

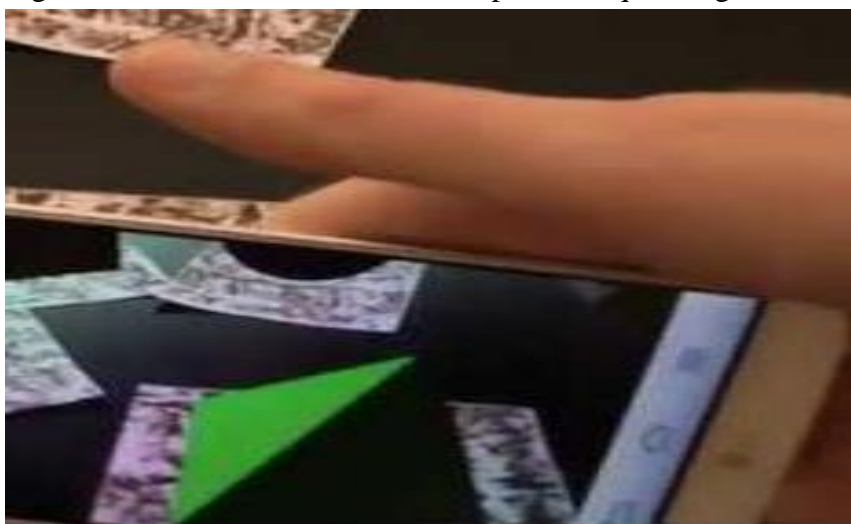
A tecnologia, quando utilizada como ferramenta para entender a Matemática, pode ser percebida nos aplicativos e programas que são utilizados pelo aluno na resolução de problemas, no teste de hipóteses e na criação de suas próprias conjecturas. Portanto, o fazer matemático através do uso das tecnologias deve provocar certa reflexão, e, sobretudo a organização consciente do conhecimento. Assim, o aluno pode ser capaz de criar para si um ambiente de conjecturas, argumentações e demonstrações acerca do objeto em estudo (D'Ambrosio, 1996, p. 19). Desta forma, é possível ver que o uso da tecnologia RA na sala de aula oferece aos educandos a possibilidade de explorar tópicos da disciplina de Matemática de maneira mais intensa, desenvolvendo sua intuição e sua consciência dos conteúdos.

Uma questão interessante é que o uso de tecnologia na sala de aula permite ao aluno fazer experimentações, descobrir, visualizar e compreender, tornando o conteúdo matemático mais significativo.

A Realidade Aumentada possui as seguintes vantagens: permite aos alunos a visualização do experimento em terceira dimensão; proporciona a interação dos estudantes com esses experimentos; permite simplicidade e economia do equipamento utilizado (os experimentos podem ser feitos com apenas uma webcam e um notebook). Vale lembrar que um data show com telão também pode ser utilizado juntamente com o notebook para enriquecer o experimento.

Os sistemas de RA seguem basicamente um mesmo modelo e possuem sempre três características básicas: combinação do real com o virtual, interação em tempo real e imagens tridimensionais. É possível perceber na Figura 25 a visualização de uma pirâmide quadrangular através da Realidade Aumentada.

Figura 25 - Realidade Aumentada e a pirâmide quadrangular



Fonte: Disponível em: <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.miragestudio.polygons&hl=en>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1998), com relação à tecnologia, um dos objetivos para o Ensino Fundamental é que os alunos saibam usar diferentes recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos. Ainda de acordo com os PCNs (BRASIL, 1997), os recursos computacionais, no que se refere ao banco de dados e visualizações, podem servir de alicerce para o ensino, bem como também pode ser uma “[...] fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades” (BRASIL, 1997, p.35).

O uso da Realidade Aumentada nas aulas de Geometria Espacial colabora muito para a aprendizagem daqueles alunos que apresentam dificuldades em visualizar figuras tridimensionais que são representadas nos livros didáticos de forma plana.

Kaleff (2003) enfatiza que a tecnologia pode contribuir para simplificar a solução de problemas relacionados ao ensino de Geometria, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento de habilidades de percepção e visualização de objetos. Nesse contexto, defende a importância para o aumento de softwares educacionais voltados para conteúdos de Matemática e, em especial, para o ensino da Geometria. Nesse campo têm-se como aliados diversos softwares educativos que podem colaborar para a visualização do aluno e para as articulações geométricas feitas em situações diversificadas, pois a partir destas visualizações é possível explorar, investigar e conduzir a generalização de propriedades e elaboração de justificativas na resolução de problemas. Assim, verifica-se que é fundamental o uso dos recursos tecnológicos nas aulas, pois oportunizam o aluno em ampliar seus conhecimentos.

#### 4.2 Polyèdres augmentès

Polyèdres augmentès trata-se de um aplicativo para Android que permite ver através da realidade aumentada vários sólidos, dentre eles os poliedros: cubo, tetraedro, pirâmides e prismas.

Para usar o Polyèdres augmentès é necessário baixar o aplicativo no smartphone ou tablet e imprimir os marcadores específicos para visualizar os sólidos geométricos. Esses marcadores podem ser obtidos no site <http://mirage.ticedu.fr>.

Vale lembrar que cada marcador que será posicionado perante a câmera do smartphone está associado a um sólido geométrico. Desta forma, verifica-se que o marcador é uma peça gráfica que serve como suporte para alcançar a realidade aumentada. O dispositivo móvel (tablet ou celular) digitaliza o marcador com a câmera e é assim que uma figura 3D aparece na tela, como podemos ver nas Figuras 26, 27 e 28.

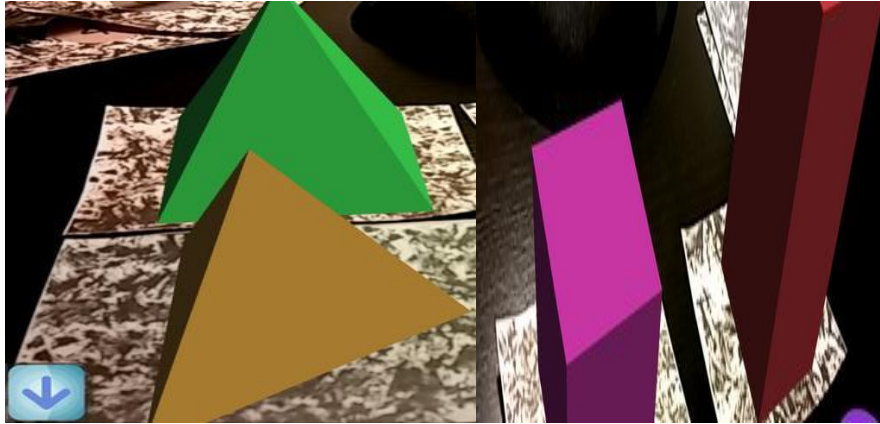
Figura 26 - Visualização de sólidos geométricos através do Polyèdres augmentès



Fonte: Disponível em: <<http://mirage.ticedu.fr/?p=2635>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

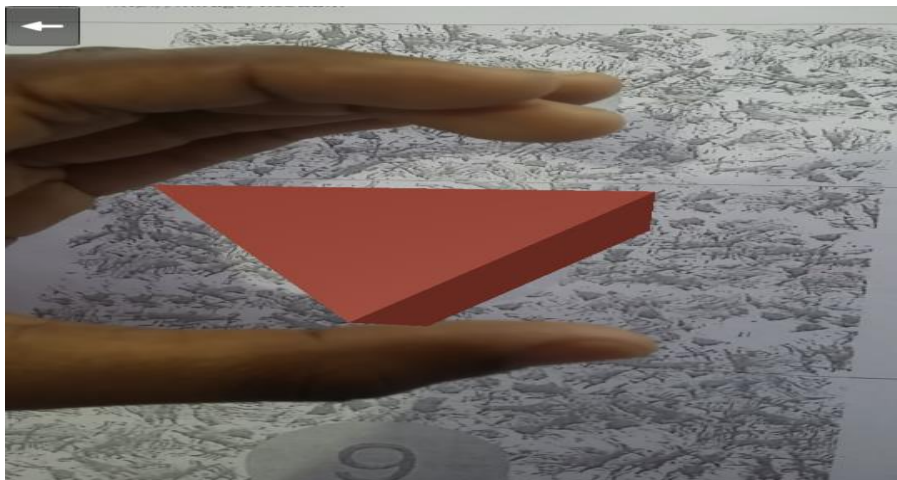


Figura 27 - Visualização de pirâmides e paralelepípedos com o Polyèdres augmentès



Fonte: Disponível em: <<https://augmented-polyhedrons-mirage.br.aptoide.com/>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

Figura 28 - Prisma triangular visto através do Poyèdres augmentès



Fonte: A autora, 2018.

O software Polyèdres augmentès é considerado como uma ferramenta de extrema importância em uma proposta de ensino que tenha como objetivo desenvolver conhecimentos geométricos no ano em questão.

### 4.3 Geometrix

Esse software permite explorar diferentes famílias de poliedros, dentre eles os platônicos, aqueles cujas faces são polígonos regulares, sempre do mesmo tipo, e em cada vértice tem-se o mesmo número de arestas.

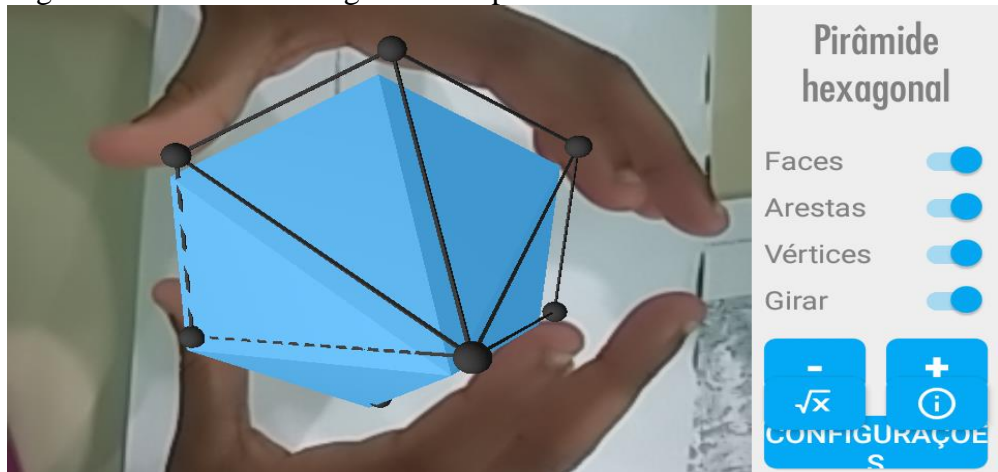
Geometrix é um aplicativo que possibilita a visualização dos elementos dos seguintes sólidos geométricos: poliedros regulares, pirâmides, prismas e sólidos de revolução através da Realidade Aumentada. Esse aplicativo também fornece informações sobre os sólidos geométricos como: número de faces, vértices, arestas, fórmula para calcular o volume e área externa. Por outro lado, as principais fórmulas apresentadas pelo Geometrix ajudam o aluno a resolver vários tipos de problemas e tarefas de Geometria. Podemos ver nas Figuras 29 e 30 poliedros através do Geometrix, que por sua vez permite destacar cada um de seus elementos.

Figura 29 - Visualização de um Hexaedro pelo Geometrix



Fonte: A autora, 2018.

Figura 30 - Pirâmide hexagonal vista pelo Geometrix



Fonte: A autora, 2018.

#### 4.4 Siseuler

O objetivo deste software é atuar como um objeto de aprendizagem, proporcionando ao aluno, por meio da visualização e da manipulação de objetos, um melhor entendimento da relação descoberta por Leonhard Paul Euler. O software SISEULER, é um programa livre disponível para download situado no site <https://sites.google.com/site/siseuler/download>.

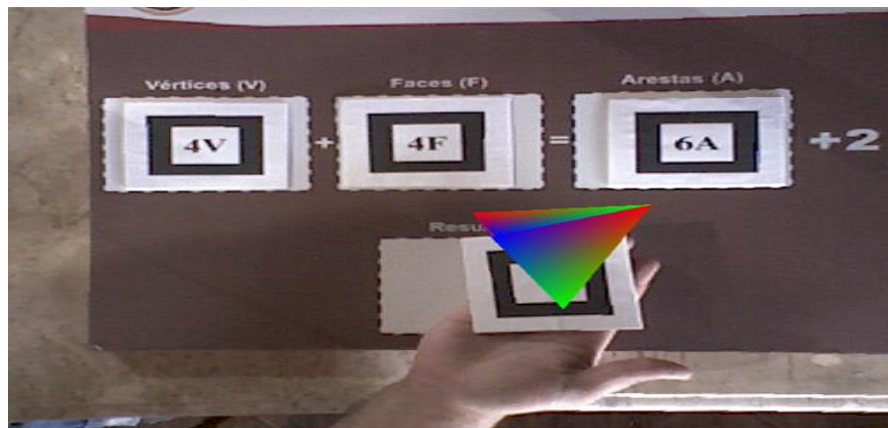
O software SISEULER foi construído com técnicas de Realidade Aumentada visando promover um apoio intenso no ensino da Relação de Euler e gerar uma representação autêntica de figuras tridimensionais através da manipulação dos marcadores.

O sistema foi desenvolvido em linguagem C sendo que para a construção dos desenhos virtuais utilizou o sistema gráfico OPENGL.

Todo o desenvolvimento de identificação dos marcadores desse aplicativo foi feito usando a biblioteca ARToolkit. O ARToolkit usa técnicas de visão computacional para calcular o ponto de vista da câmera em relação à marcadores quadrados que contém um padrão na parte interna, possibilitando o registro certo das imagens.

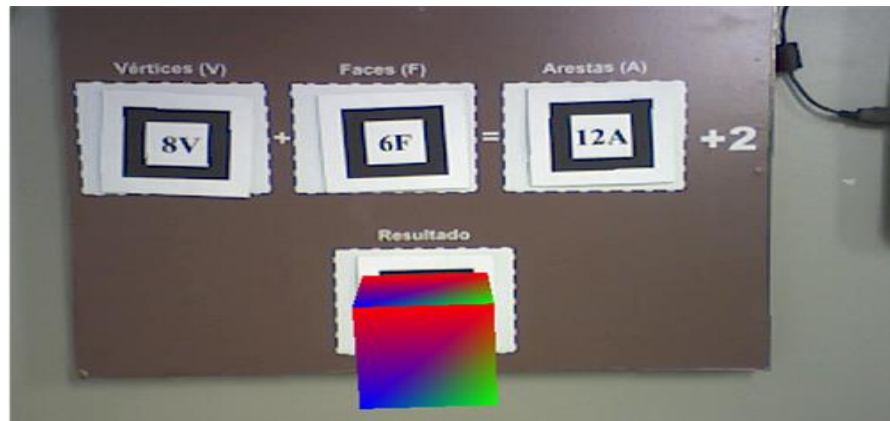
Vale destacar que esse software permite visualizar através da Realidade Aumentada o sólido gerado em um marcador próprio, conforme podemos ver nas Figuras 31, 32 e 33. O sólido só aparece se os marcadores estiverem dispostos de forma correta. Por outro lado, através de atalhos temos opções de mostrar/esconder somente os vértices ou as arestas ou as faces do sólido. Assim, fica mais fácil identificar e contar a quantidade de cada elemento dos sólidos.

Figura 31 - Visualização do tetraedro com SISEULER



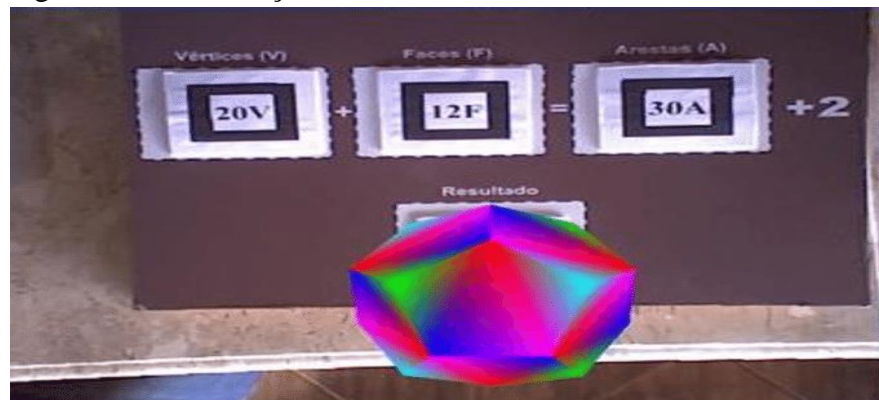
Fonte: LEMOS; CARVALHO, 2010, p. 7.

Figura 32 - Visualização de um cubo com SISEULER



Fonte: LEMOS; CARVALHO, 2010, p. 7.

Figura 33 - Visualização de um dodecaedro com SISEULER



Fonte: LEMOS; CARVALHO, 2010, p. 7.

Com o SISEULER, o ambiente real é capturado pela câmera de vídeo, a posição da câmera é estimada – geralmente por meio de rastreadores ou visão computacional – as coordenadas dos objetos gerados pelo computador são alinhadas com as da câmera e a imagem real incrementada com a imagem virtual é exibida. A utilização de uma webcam é apresentada como a maneira mais simples de realizar a captura das imagens reais para integrá-las com a imagem virtual (KIRNER e TORI 2004).

Para utilizar o software SISEULER é preciso além de instalar o SISEULER, imprimir os marcadores para cada número de arestas, faces e vértices. Esses marcadores, destinados a captura de imagens pela webcam, tem que ser disponibilizados para os alunos, que realizarão suas manipulações. Os marcadores 8V, 6F, 12A, 4V, 4F, 6A, 6V, 8F, 20A, 12F, 20F, 12V e 30A representam respectivamente: 8 vértices, 6 faces, 12 arestas, 4 vértices, 4 faces, 6 arestas, 6 vértices, 8 faces, 20 arestas, 12 faces, 20 faces, 12 vértices e 30 arestas. No entanto, o marcador R, conhecido como “marcador resultado” poderá representar qualquer um dos cinco

poliedros de Platão, pois dependerá da combinação dos outros marcadores no tabuleiro da Figura 34 . Caso o aluno não coloque os marcadores na posição correta, o software não reconhecerá a combinação e conseqüentemente não produzirá o poliedro esperado.

Figura 34 - Tabuleiro do SISEULER

The image shows a software interface for Euler's formula. It features a dark brown background with white dashed-line boxes. At the top, there are three boxes labeled 'Vértice (V)', 'Fases (F)', and 'Arestas (A)'. Below these boxes is a plus sign, followed by an equals sign, and then a plus sign followed by the number '2'. Below this row is a larger box labeled 'Resultado'.

Fonte: LEMOS; CARVALHO, 2010, p. 6.

## 5 EXPERIMENTO E ANÁLISES

### 5.1 Atividades com poliedros

O uso do material concreto tem como objetivo ressaltar a importância do lúdico no ensino dos poliedros, despertar o interesse dos alunos por eles, proporcionando uma aprendizagem significativa dos sólidos, auxiliar a construção do conhecimento e incentivar o desenvolvimento do trabalho, o convívio em grupo e a capacidade de resolver problemas.

Vale destacar que a aplicação de atividades lúdicas na sala de aula potencializa o aluno a associar os poliedros a objetos que fazem parte do seu cotidiano.

O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. Essas razões são suficientes para que o ensino da Geometria no 1º grau não seja desenvolvido através de automatismo, memorização e técnicas operatórias, nem baseado em um processo de formalização com crescente nível de rigor, abstração e generalização. (FAINGUELERNT, 1999, p.53).

#### 5.1.1 Sujeitos

As atividades com poliedros foram realizadas com 22 alunos, sendo 13 meninas e 9 meninos, do 6º ano no Colégio Estadual José Bonifácio, Niterói, RJ. O CEJB é um colégio que atualmente oferece o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio no turno da manhã.

Vale ressaltar que a idade predominante dos alunos que participaram das atividades foi 12 anos, e a opção pelo 6º ano foi feita já que consta no Currículo Mínimo desta série Poliedros como conteúdo a ser dado. As atividades foram realizadas numa sala de aula que passou a ser o Laboratório de Matemática desta escola.

A escolha dessa escola para realização das atividades se justifica pelo fato de lecionar neste estabelecimento.

### 5.1.2 Material

Os alunos utilizaram palitos de dentes, jujubas, folhas com as planificações de poliedros, palitos de churrasco, garrotes, canetas, cola, folhas das atividades e os aplicativos Polyèdres augmentès e Geometrix no smartphone.

### 5.1.3 Procedimento

As atividades ocorreram em dois dias de aula de Matemática com duração de uma hora e quarenta minutos em cada dia. Além disso, foram realizadas em duas etapas: numa terça-feira nos primeiros sessenta minutos da aula de Matemática cada aluno construiu poliedros usando jujubas e palitos de dentes, palitos de churrasco e garrotes ou montagem de planificações deles. Nesta terça-feira, nos quarenta minutos restantes da aula foi distribuído uma tabela para cada um aluno completá-la com as quantidades dos elementos dos três poliedros construídos. Por outro lado, na quarta-feira foi realizada uma atividade (questionário) com o uso dos softwares Polyèdres augmentès e Geometrix durante uma hora e quarenta minutos.

Após a entrega de cada atividade, foi feita a resolução de cada questão em voz alta, ao fim de cada etapa. Todas as questões foram resolvidas no quadro. Já o momento do uso dos softwares Polyèdres augmentès e do Geometrix foi marcante para os alunos, uma vez que eles transpareciam que nunca tiveram oportunidades nas escolas de origem de aprender os poliedros com Realidade Aumentada.

### 5.1.4 Desenho das atividades

As atividades foram compostas por duas partes: uma atividade com três técnicas de construções de poliedros disponíveis para utilizar no preenchimento de uma tabela com os elementos de três poliedros construídos e outra atividade com o uso dos aplicativos Polyèdres augmentès e Geometrix no smartphone para responder um questionário.

A metodologia utilizada foi qualitativa de caráter investigativo, apesar de necessário o uso de dados quantitativos, os quais serviram para subsidiar e verificar em quais níveis do raciocínio geométrico os alunos encontravam - se, e se houve evolução de um nível para outro.

Tabela 3 - Tabela dos poliedros

Nome do Poliedro	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	Número de Faces (F)

Fonte: A autora, 2018.

Na Figura 35 podemos ver alguns dos materiais que os alunos tiveram a oportunidade de utilizar para fazer diversas construções de poliedros no decorrer da atividade.

Figura 35 - O uso dos materiais na construção dos poliedros no CEJB



Fonte: A autora, 2018.

#### 5.1.4.1 Parte I

A primeira etapa dessas atividades consistiu na construção de três poliedros escolhidos pelos alunos e no preenchimento da tabela distribuída para cada aluno. Diversas eram as



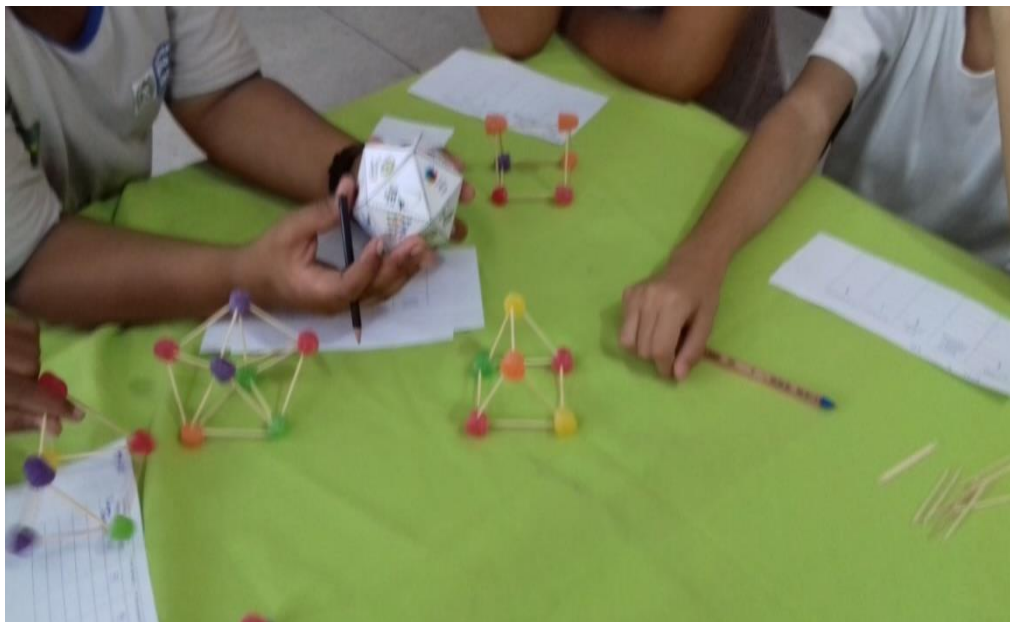
opções apresentadas como modelos de construções: o primeiro poliedro construído foi o cubo, onde este necessita de 8 jujubas e 12 palitos, o segundo foi o tetraedro, onde este precisa de 4 jujubas e 6 palitos, o terceiro foi a pirâmide com base quadrangular, onde se usa 5 jujubas e 8 palitos, o quarto foi o octaedro regular, onde se usa 6 jujubas e 12 palitos, o quinto foi o prisma triangular, que utiliza 6 jujubas e 9 palitos, dentre outros poliedros. Por outro lado, o alunos puderam também construir os poliedros usando palitos de churrasco e garrotes e as montagens das planificações distribuídas para eles.

Um fato interessante é que muitos alunos gostaram tanto de construir poliedros que após o término do preenchimento da tabela construíram diversos poliedros com todos os materiais disponíveis.

Os alunos se esforçaram para descobrir quantas arestas, vértices e faces tem cada poliedro que conseguia montar, distinguindo qual o tipo de face em cada um deles.

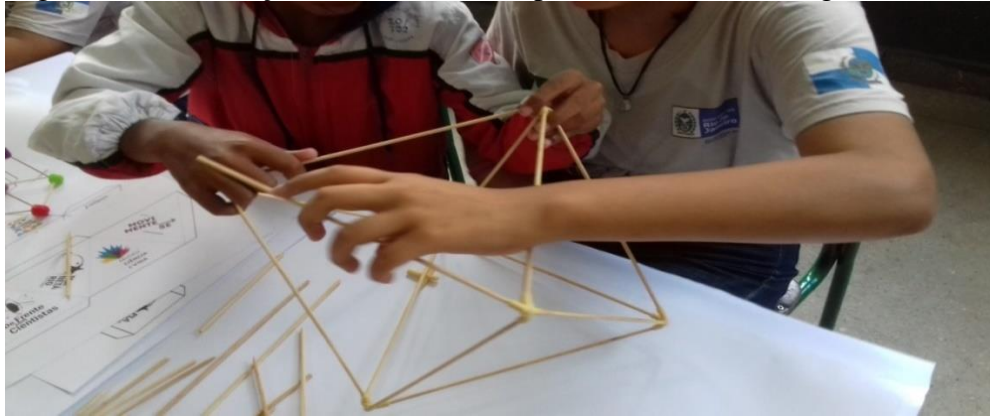
Podemos verificar nas Figuras 36 e 37 alguns dos poliedros construídos pelos alunos do CEJB no decorrer da atividade.

Figura 36 - Construções de poliedros



Fonte: A autora, 2018.

Figura 37 - Construção de octaedro com palitos de churrasco e garrotes

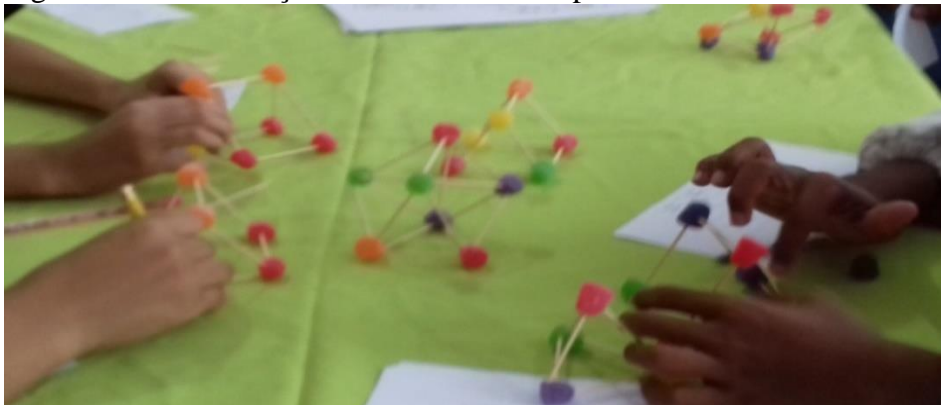


Fonte: A autora, 2018.

Uma questão interessante é que a cada momento que o poliedro era construído, os alunos percebiam que os vértices eram referentes as jujubas, as arestas os palitos de dentes, e as faces o polígono formado entre eles.

Na Figura 38 é perceptível como cada aluno encontrou facilidades para associar cada jujuba a um determinado vértice do poliedro e como contabilizá-lo manualmente. Por outro lado, tiveram também oportunidades de contar o número total de arestas de cada poliedro ao identificar a quantidade de palitos de dente que usaram para construí-lo.

Figura 38 - Identificação dos elementos nos poliedros construídos



Fonte: A autora, 2018.

O objetivo dessa questão é fazer com que o aluno possa ter uma melhor visão tridimensional ao construir o poliedro para poder identificar e contar os seus elementos sem dificuldades.

Nas Figuras 39 e 40 podemos ver também as construções dos poliedros platônicos feitos com as planificações disponíveis.

Figura 39 - Montagens de poliedros platônicos com planificações



Fonte: A autora, 2018.

Figura 40 - Diversas construções de poliedros



Fonte: A autora, 2018.

Os PCNs salientam que:

Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem [...] O uso de alguns softwares disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente. (BRASIL, 1997, p. 82-83).

Vale ressaltar que é através de observações, construções e explorações que o educando terá condições de perceber e reconhecer as distintas formas existentes e identificar suas propriedades.

#### 5.1.4.2 Parte II

O objetivo desta segunda parte é estimular o interesse do aluno através da visualização dos poliedros com o uso dos softwares Polyèdres augmentès e Geometrix. Esta etapa consistia em responder um questionário com base nas visualizações dos poliedros nos softwares Polyèdres augmentès e Geometrix. Dentre as perguntas deste questionário tinha uma que pedia para verificar a veracidade da Relação de Euler para um poliedro escolhido de ser visualizado, ou seja, se a soma do número de vértices com o número de face resulta na soma do número de arestas com dois.

Segundo Borba (1999), com relação à Educação Matemática, os ambientes de aprendizagem originados por aplicativos informáticos permitem potencializar os conteúdos curriculares e o processo de ensino e da aprendizagem voltados à “experimentação matemática”. Portanto, procura-se promover o uso da tecnologia na sala de aula, onde o professor deve ser visto como mediador do conhecimento, e os alunos, seres que participem ativamente do processo de aprendizagem com uma visão inovadora.

No decorrer das atividades, foi explicado o que é poliedro convexo e não convexo, regular e não regular, juntamente com exemplos práticos existentes na escola.

O Poyèdres augmentès foi usado pela primeira vez, no colégio CEJB, com alunos da turma 601 através de uma aula experimental com uma sequência didática devidamente preparada para tanto. Para esta intervenção, foi necessário preparar um material didático que abordasse o conteúdo de poliedros e que fosse capaz de correlacionar o conteúdo formal aos marcadores e cenas do Polyèdres augmentès e do Geometrix de forma a organizar as interações com a teoria e o questionário proposto.

É válido destacar que no dia anterior da aula foi solicitado a cada aluno para baixar os aplicativos Polyèdres augmentès e Geometrix no smartphone. Entretanto, como apenas alguns alunos conseguiram baixar o aplicativo, a atividade foi realizada em grupo de forma que pelo menos um integrante havia disponível os aplicativos para serem utilizados pelo grupo. Além disso, foi necessário ainda, para melhor coleta dos dados a elaboração do questionário que, por sua vez, buscou analisar o uso de dispositivos móveis em sala de aula e se tinham conhecimento ou contato com a tecnologia da Realidade Aumentada.

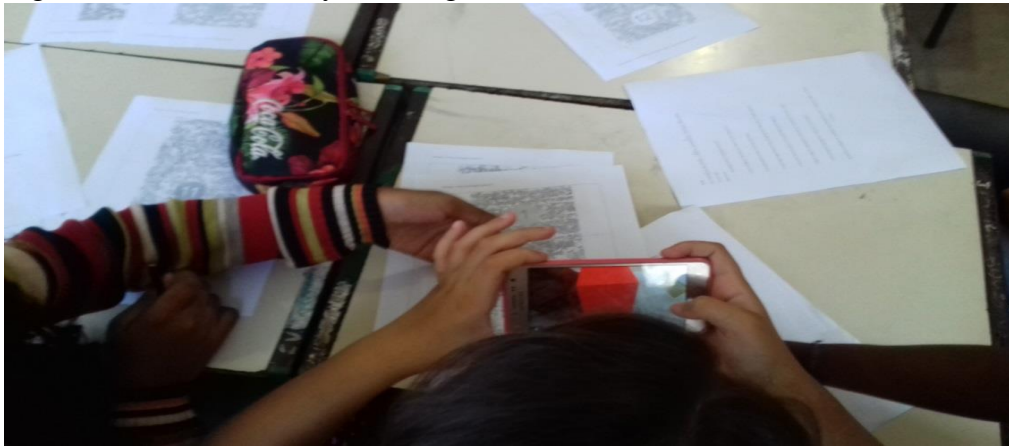
Nas Figuras 41 e 42 é possível perceber como os aplicativos Polyèdres augmentès e Geometrix despertaram e cativaram a atenção e o interesse dos alunos pelos poliedros.

Figura 41 - O uso do Geometrix no CEJB



Fonte: A autora, 2018.

Figura 42 - O uso do Polyèdres augmentès no CEJB



Fonte: A autora, 2018.

## 5.2 Atividade I do 6º ano do Ensino Fundamental

**Atividade 1:** Construa três poliedros utilizando jujubas e palitos de dentes, palitos de churrascos e garrotes ou planificações. Depois, complete a tabela identificando os elementos dos poliedros construídos.

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno produza poliedros e identifique o número de vértices, faces e arestas de cada um deles e preencha a tabela recebida com as quantidades de cada elemento dos poliedros construídos. Podemos ver na tabela 4 exemplos de poliedros que o aluno poderia ter escolhido para identificar seus elementos.

Tabela 4 - Identificação dos elementos dos poliedros

Nome do Poliedro	Número de Vértices (V)	Número de Faces (F)	Número de Arestas (A)
Tetraedro	4	4	6
Hexaedro	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

Fonte: A autora, 2019.

O aluno poderia escolher os prismas e as pirâmides para construir com os materiais presentes na atividade e identificar as quantidades de cada um de seus elementos conforme podemos ver nos exemplos da figura 43.

Figura 43 - Quantidades dos elementos dos prismas e das pirâmides

NOME DO POLIEDRO	Pirâmide triangular	Pirâmide quadrangular	Pirâmide pentagonal	Pirâmide hexagonal	Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
POLÍGONO DA BASE	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono
POLIEDRO								
N.º DE FACES	4	5	6	7	5	6	7	8
N.º DE ARESTAS	6	8	10	12	9	12	15	18
N.º DE VÉRTICES	4	5	6	7	6	8	10	12

Fonte: Disponível em: <<http://www.ipb.pt/~cmca/solidos>>. Acesso em: 10 jun. 2018.

É interessante ressaltar que a maioria dos alunos da turma 601 construiu hexaedros, tetraedros e prismas triangulares com jujubas e palitos de dentes, pois segundo eles são os poliedros mais práticos de se montar.

É possível verificar nas Figuras 44, 45 e 46 que os alunos construíram diversos poliedros utilizando também as planificações e os palitos de churrasco e os garrotes. Entretanto, se identificaram mais com a técnica das jujubas por envolver doces.

Figura 44 - Construções dos poliedros pela turma 601 do CEJB



Fonte: A autora, 2018.

Figura 45 - Construções dos poliedros com palitos e garrotes



Fonte: A autora, 2018.

Figura 46 - Aplicação da Atividade I na turma 601 no CEJB



Fonte: A autora, 2018.

Vale ressaltar que juntamente com a realização da atividade I com poliedros no CEJB surgiu a ideia de construir um Laboratório de Matemática para a escola numa sala disponível. Com isso, todos os poliedros montados pelos alunos foram utilizados para ornamentação do laboratório, que por sua vez passou a ser muito utilizado para realização das aulas de Matemática. Podemos ver na Figura 47 como ficou o Laboratório de Matemática do CEJB com os alunos da turma 601 realizando a atividade I.

Figura 47 - Realização da Atividade I na turma 601 no CEJB



Fonte: A autora, 2018.

### 5.3 Atividade II do 6ºano do Ensino Fundamental

**Atividade II:** Utilize os aplicativos Polyèdres augmentès e Geometrix para visualizar os poliedros e responda as perguntas do questionário.

A atividade II foi composta pelas seguintes questões:

**Questão(1):** Quantas faces o icosaedro possui?

O objetivo desta questão é verificar se o aluno identifica um icosaedro como um poliedro de 20 faces.

*Solução correta:*



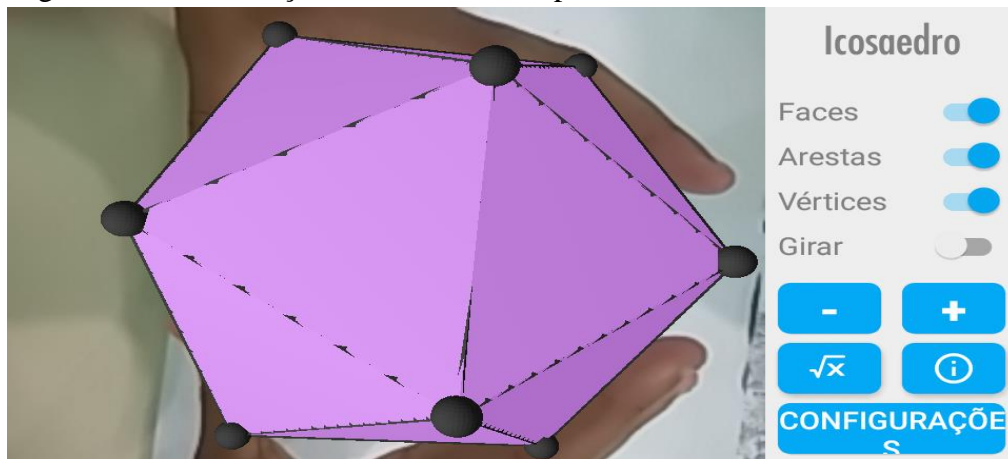
Utilizando o software Geometrix (Sólidos de Platão) para visualizar o icosaedro espera-se que o aluno afirme que é um poliedro de 20 faces.

*Soluções incorretas:*

Os educandos poderão trocar o número de faces pelo número de arestas ou pelo número de vértices do icosaedro.

Na figura 48 temos um aluno A da turma 601 visualizando o icosaedro através do Geometrix. Vale destacar que este aplicativo permite rotacionar o poliedro.

Figura 48 - Visualização de um icosaedro pelo Geometrix



Fonte: A autora, 2018.

**Questão (2):** Qual polígono representa a face de um octaedro?

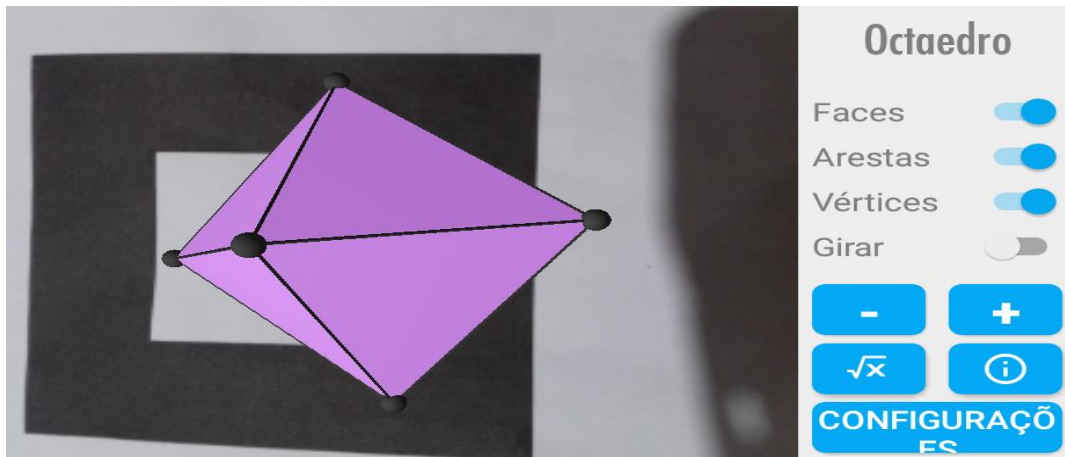
O objetivo desta questão é ver se o aluno identifica o triângulo como face de um octaedro.

*Solução correta:*

Após a visualização da face do octaedro através do Geometrix pelo enunciado espera-se que o aluno responda que trata-se de faces triangulares, ou seja, o polígono que representa a face do octaedro é um triângulo.

Na Figura 49 temos um aluno B visualizando as faces de um octaedro através do Geometrix.

Figura 49 - Visualização de um octaedro pelo Geometrix



Fonte: A autora, 2018.

*Solução incorreta:*

O aluno poderá se equivocar e afirmar que é um quadrilátero, por exemplo.

**Questão (3):** Qual figura geométrica plana representa a face de um dodecaedro?

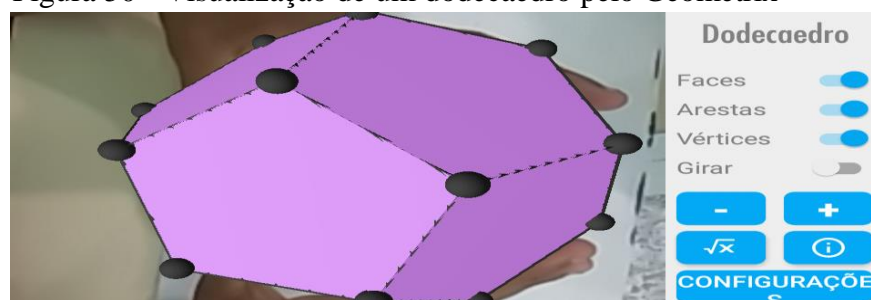
O objetivo desta questão é verificar se o aluno identifica o pentágono como face de um dodecaedro.

*Solução correta:*

Após o uso do aplicativo Geometrix espera-se que o aluno declare que cada face de um dodecaedro é representada por um pentágono, ou seja, por um polígono formado por cinco lados.

Na figura 50 temos um aluno C visualizando as faces de um dodecaedro através do Geometrix.

Figura 50 - Visualização de um dodecaedro pelo Geometrix



Fonte: A autora, 2018.

*Solução incorreta:*

O aluno poderá se equivocar e responder que é triângulo ou um hexágono, por exemplo.

**Questão(4):** Quantos vértices possui uma pirâmide quadrangular?

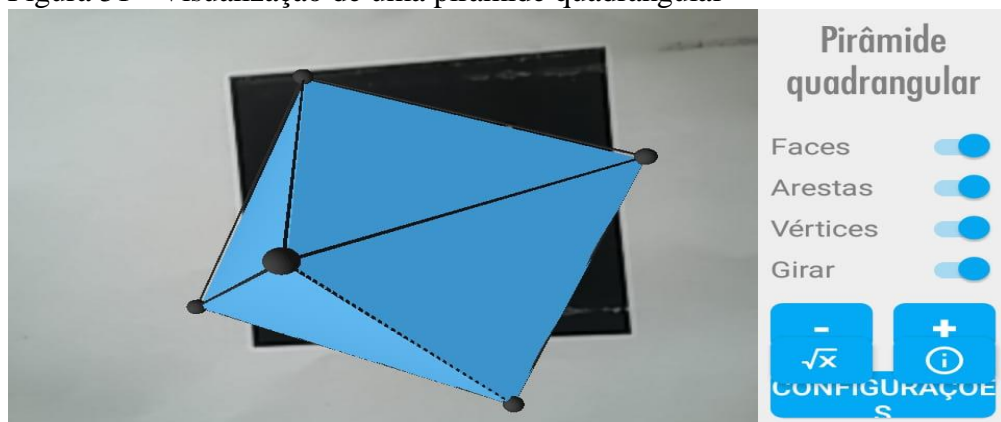
O objetivo desta questão é ver se o aluno sabe que a pirâmide quadrangular possui 5 vértices.

*Solução correta:*

Após a visualização desta pirâmide com um dos aplicativos espera-se que o aluno diga 5 vértices.

Na figura 51 é possível ver o aluno D visualizando a pirâmide quadrangular para contabilizar o total de vértices.

Figura 51 - Visualização de uma pirâmide quadrangular



Fonte: A autora, 2018.

*Solução incorreta:*

O aluno poderá trocar o número de vértices (5) pelo número de arestas (8), por exemplo.

**Questão (5):** Qual polígono representa a face de um hexaedro regular?

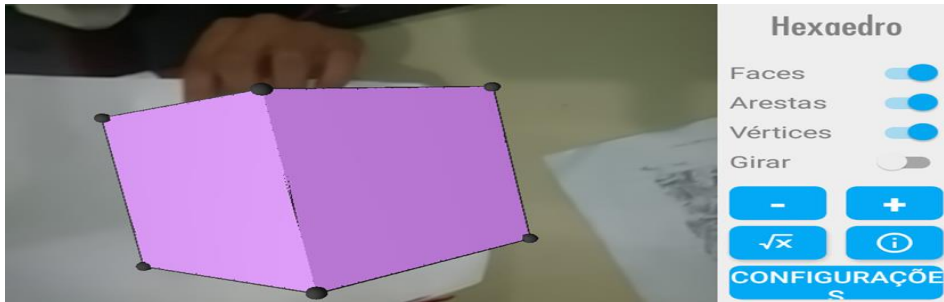
O objetivo desta questão é verificar se o aluno sabe que o hexaedro regular possui o quadrado como cada uma de suas faces.

*Solução correta:*

Usando o Geometrix ou o Polyèdres augmentès para visualizar o hexaedro regular, espera-se que o aluno responda que é quadrado.

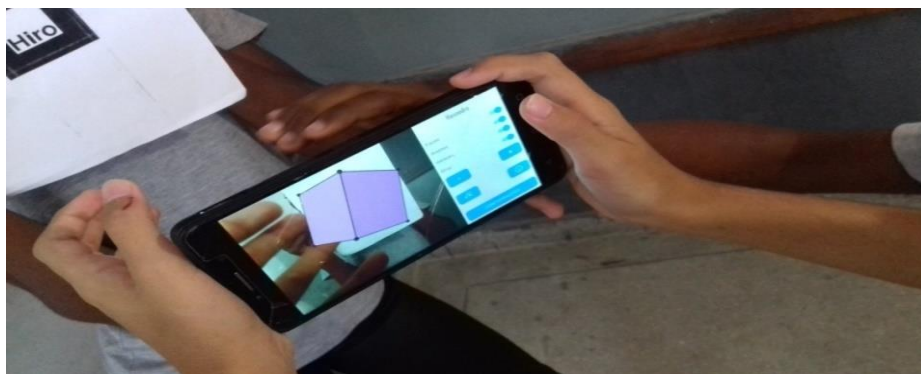
Nas figuras 52 e 53 temos alunos do CEJB visualizando o hexaedro por meio do Geometrix.

Figura 52 - Visualização da face do hexaedro com Geometrix



Fonte: A autora, 2018.

Figura 53 - Alunos do CEJB mostrando o hexaedro com o Geometrix para a turma 601



Fonte: A autora, 2018.

*Solução incorreta:*

O aluno poderá equivocar-se e afirmar triângulo, por exemplo.

**Questão (6):** Qual polígono representa a face de um tetraedro?

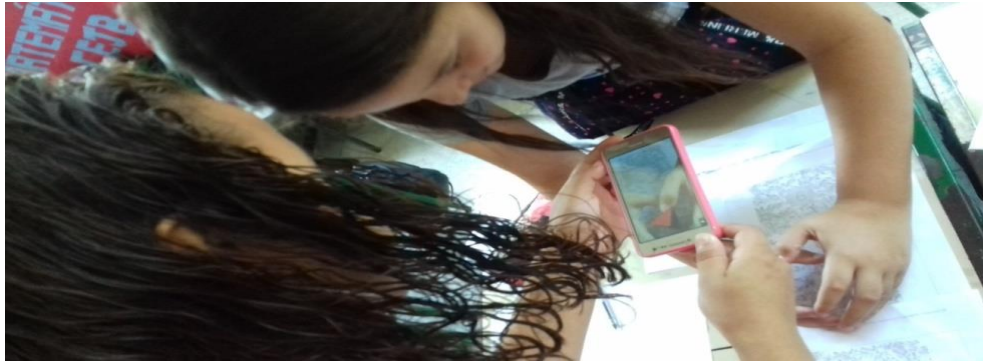
O objetivo desta questão é ver se o aluno sabe que o triângulo representa a face de cada tetraedro.

*Solução correta:*

Após visualizá-lo através do Polyèdres augmentès ou Geometrix espera-se que o aluno afirme que é triângulo.

Na figura 54 podemos ver duas alunas da turma 601 encantadas com o Polyèdres augmentès, visualizando o tetraedro.

Figura 54 - Alunas do CEJB visualizando o tetraedro com Polièdres augmentès



Fonte: A autora, 2018.

*Solução incorreta:*

O educando poderá equivocar-se e afirmar que a face é um quadrado, por exemplo.

**Questão(7):** Escolha um poliedro e verifique se a Relação de Euler:  $V+F=A+2$  é válida para o poliedro escolhido.

O objetivo desta questão é ver se o aluno sabe identificar a quantidade de elementos do poliedro e adicionar corretamente o número de vértices e faces de cada um deles. Além disso, procura-se também analisar se o aluno sabe verificar se uma igualdade é satisfeita.

*Solução correta:*

Espera-se que o aluno após identificar o número de cada elemento do poliedro escolhido, com o auxílio dos aplicativos, venha adicionar o número de vértices e de faces para verificar se é igual a soma do número de arestas com 2 unidades, ou seja, se a Relação de Euler é válida para o poliedro considerado, conforme é possível ver no exemplo da tabela 5.

Tabela 5 - Poliedros e Relação de Euler

Poliedro	V	F	A	V+F	A+2	Relação de Euler
Tetraedro	4	4	6	4+4=8	6+2=8	válida
Cubo	8	6	12	8+6=14	12+2=14	válida
Octaedro	6	8	12	6+8=14	12+2=14	válida

Fonte: A autora, 2018.

#### *Solução Incorreta:*

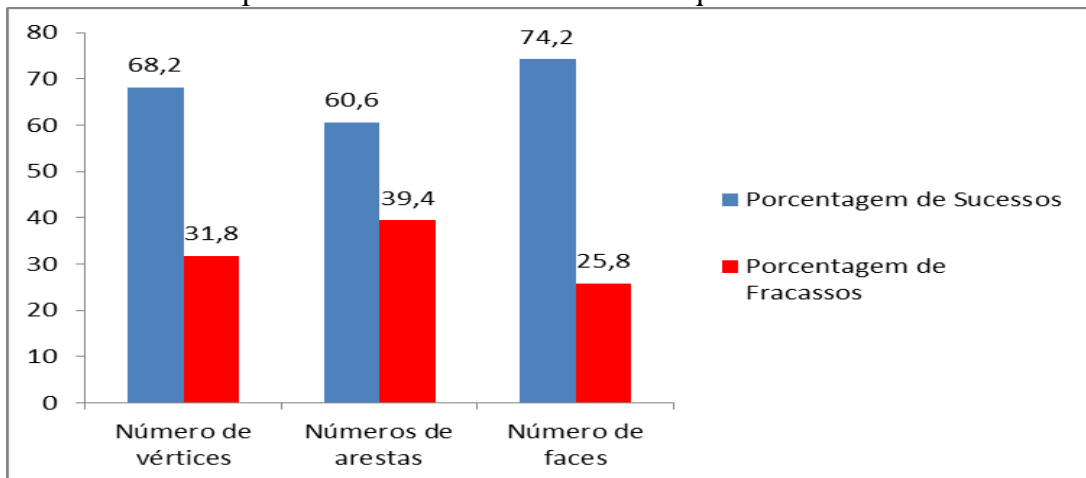
O aluno poderá equivocar-se e somar o número de vértices com o número de arestas, por exemplo.

## 5.4 Análises

### 5.4.1 Panorama geral da atividade I

Foi realizada uma análise em termos quantitativos dos sucessos e fracassos dos alunos na questão de cada atividade aplicada. A seguir cada gráfico apresentará o desempenho dos alunos da amostra na questão analisada da atividade I.

Gráfico 1 - Desempenho dos alunos da turma 601 na questão da atividade I



Fonte: A autora, 2018.

Em nossa amostra da atividade I, formada por 22 alunos, dentro das 198 possíveis respostas corretas, obtivemos 134, indicando um índice de sucesso geral de 67,7% aproximadamente.

Considerando as quantidades dos acertos dos números de vértices, arestas e faces do poliedros construídos da questão analisada, percebemos que os alunos encontraram maiores dificuldades na contagem do número de arestas, ou seja, um alto índice de fracasso na questão. Por outro lado, vale ressaltar que os alunos obtiveram melhor desempenho na identificação das quantidades de faces dos poliedros construídos, isto é, elevado percentual de sucesso. Já com relação ao número de vértices é possível ver que o índice de sucessos dos alunos foi maior do que o dobro do índice de fracassos.

#### 5.4.1.1 Panorama detalhado da atividade I

Primeiramente, após construir os poliedros escolhidos os alunos tinham que determinar quantos vértices cada poliedro possui. Os alunos da amostra obtiveram 68,2% de sucesso. Os alunos tinham três técnicas de construções disponíveis para escolher para montar e manusear os poliedros desejados e assim, poder contabilizar o número de vértices deles. A maioria dos alunos não apresentou dificuldade neste item da questão, principalmente por optarem pela técnica das jujubas e associá-las aos vértices, o que facilitou na contagem dos mesmos. O objetivo desta questão é de focar a contagem e identificação dos vértices dos poliedros construídos.

Já a segunda parte desta questão consistiu em encontrar o número de arestas do poliedros montados. Nessa questão verificamos um índice de sucesso de 60,6%. Neste item, os alunos apresentaram maiores dificuldades de contabilizar o número de arestas. O objetivo desta questão é a contagem e identificação das arestas.

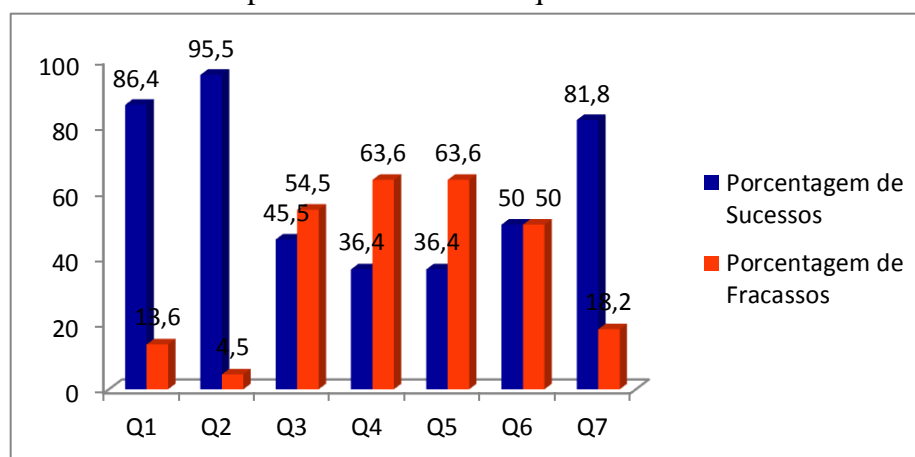
Com relação a terceira parte desta questão, trata-se de determinar o número de faces dos poliedros construídos. Os alunos obtiveram um índice de sucessos de 74,2%. O objetivo deste item é de realizar a contagem e identificação das faces dos poliedros.

Vale ressaltar que ao final desta atividade foi possível perceber que a maioria dos alunos encontrava no nível 1 reconhecendo e comparando os poliedros por sua aparência global e associando jujubas e garrotes aos vértices e os palitos utilizados às arestas, contabilizando cada elemento dos poliedros confeccionados.

#### 5.4.2 Panorama geral da atividade II

Primeiramente foi realizada uma análise em termos quantitativos dos sucessos e fracassos dos alunos nas questões da atividade II aplicada. No gráfico 2 é possível verificar o desempenho dos alunos da amostra nas questões analisadas da atividade II.

Gráfico 2 - Desempenho dos alunos nas questões da atividade II



Fonte: A autora, 2018.

Em nossa amostra da atividade II, formada por 22 alunos, dentro das 154 possíveis respostas corretas, obtivemos 96, indicando um índice de sucesso geral de 62,3% aproximadamente.

É importante destacarmos que consideraremos como índice satisfatório de sucesso quando este for maior ou igual a 75%.

Considerando as sete questões analisadas, percebemos que nas questões 1, 2 e 7 os alunos que compõem a amostra obtiveram um desempenho satisfatório (índice de sucesso superior a 75%). Já nas questões 3, 4, 5 e 6, os alunos obtiveram um fraco desempenho (índice de sucesso inferior a 75%).

A partir destas informações podemos afirmar que os alunos encontraram grandes dificuldades na questão 4 e 5, pois os alunos ficaram em dúvida se ao totalizar o número de vértices da pirâmide quadrangular deveriam considerar apenas os vértices da base dela e tiveram dificuldade em reconhecer um hexaedro regular, pois estão acostumados com a nomenclatura de se tratar de um poliedro chamado de cubo. Além disso, também tiveram dificuldades na questão 3, por terem dificuldades em nomenclatura de polígonos.



Parece-nos também que a metade dos alunos do 6º ano apresentou dificuldades em resolver a questão 6, pois tem dificuldades com nomenclatura de polígonos.

#### 5.4.2.1 Panorama detalhado da atividade II

##### **Questão 1**

Na questão 1, os alunos tinham que determinar quantas faces o icosaedro possui. Os alunos da amostra obtiveram 86,4% de sucesso.

Os educandos além de terem o aplicativo Geometrix para visualizar a figura e contabilizar o número de faces deste poliedro puderam manusear o icosaedro construído no dia anterior na atividade I para fazer a verificação.

A maioria dos alunos não apresentou dificuldade nesta questão pelo fato de utilizarem o icosaedro construído na aula anterior para efetuar a contagem do número de faces do mesmo. Entretanto, tiveram alunos que optaram por visualizar o icosaedro através do Geometrix para contar o total de faces dele.

O objetivo desta questão é de enfatizar a contagem e o reconhecimento das faces do icosaedro.

Nesta questão podemos perceber que a maioria os alunos encontrava-se no nível 2 conseguindo identificar que o icosaedro trata-se de um poliedro composto por 20 faces.

##### **Questão 2**

Na questão 2, os alunos precisavam identificar qual polígono representa a face de um octaedro. Nessa questão verificamos um índice de sucesso de 95,5%. A solução foi obtida ao visualizarem o octaedro pelo Geometrix e pelos diversos octaedros construídos pelos mesmos na aula anterior com jujubas e palitos.

O objetivo desta questão é trabalhar a identificação de face do octaedro e o reconhecimento da nomenclatura de um polígono que possui três lados.

Nesta questão podemos verificar que pelo menos a metade dos alunos encontrava-se no nível 1 reconhecendo que a face de um octaedro é representada por um triângulo.

### **Questão 3**

Na questão 3, os alunos deveriam dizer qual figura geométrica plana representa a face de um dodecaedro. Nessa questão podemos perceber que o índice de sucesso foi de 45,5%. As soluções de sucesso foram obtidas principalmente ao identificarem a face do dodecaedro através do Geometrix e contabilizarem o número de lados do polígono que a representa.

A principal causa do índice de fracasso de 54,4% dos alunos é devido às dificuldades deles em nomear polígonos.

O objetivo desta questão é trabalhar a identificação de face do dodecaedro e o reconhecimento da nomenclatura de um polígono que possui cinco lados.

### **Questão 4**

Na questão 4, os alunos tinham que determinar o número de vértices de uma pirâmide quadrangular. Nessa questão o índice de sucesso foi de 36,4% dos alunos.

O percentual de fracasso de 63,6% dos alunos está no fato deles contabilizaram apenas os vértices da base da pirâmide quadrangular.

O objetivo desta questão é a identificação de uma pirâmide quadrangular e determinar quantos vértices ela possui.

### **Questão 5**

Na questão 5, os alunos precisavam identificar qual polígono representa a face de um hexaedro regular. Nessa questão, o índice de sucesso foi 36,4% dos alunos.

O índice de fracasso de 63,6% dos alunos é devido às dificuldades em identificar o poliedro citado como hexaedro regular, pois estão acostumados desde as séries iniciais com a nomenclatura cubo. Alguns alunos conseguiram responder a questão, pois usaram o Polyèdres augmentès e o Geometrix para visualizá-lo.

O objetivo desta questão é identificar que o quadrado representa a face de um hexaedro regular.

### **Questão 6**

Na questão 6, os alunos tinham que dizer qual polígono representa a face de um tetraedro. Nesta questão tanto o índice de sucesso quanto o índice de fracasso foi igual a 50%. A metade da turma acertou, pois além de ter sido o poliedro que mais construíram na aula anterior, puderam visualizá-lo através do Polyèdres augmentès e Geometrix.

O objetivo desta questão é trabalhar a identificação da face do tetraedro e o reconhecimento da nomenclatura de um polígono que possui três lados: triângulo.

É possível ver nesta questão que a metade dos alunos encontrava-se no nível 1 reconhecendo e identificando a face de um tetraedro por triângulo.

### **Questão 7**

Na questão 7, os alunos precisavam escolher um poliedro e após identificar as quantidades de vértices, faces e arestas, verificar se a Relação de Euler é válida para o poliedro considerado. Nesta questão, o índice de sucesso foi de 81,8% dos alunos. As soluções de sucesso foram devido a escolha livre do poliedro a ser considerado por cada aluno e por envolver a operação da adição que é a mais dominada por cada aluno.

O objetivo desta questão é não só trabalhar a Relação de Euler como também identificar as quantidades de elementos de cada poliedro considerado.

É perceptível que nesta questão a maioria dos alunos encontrava-se no nível 1 identificando e contabilizando cada um dos elementos dos poliedros escolhidos.

A aplicação de atividades oportunizou os alunos a trabalhar com os conceitos geométricos de uma forma diferenciada, oposta daqueles que os livros didáticos exemplificam, pois antes dos alunos resolverem exercícios, tiveram oportunidade de vivenciar, construir, descobrir, refletir, questionar, trocar ideias, elaborar conjecturas sobre os conteúdos geométricos abordados, ampliando seu conhecimento geométrico e a aptidão para realização das atividades propostas.

## CONCLUSÃO

Esta pesquisa teve como finalidade colaborar para o aprimoramento da aprendizagem dos poliedros, buscando citar as possíveis soluções de práticas educacionais através das construções dos sólidos de formas lúdicas e do uso de recursos tecnológicos que tornam as aulas de Geometria mais atraentes e prazerosas. Foram apresentados alguns tipos de poliedros como os poliedros regulares, os prismas e as pirâmides. Além disso, foi abordada a Relação de Euler, visando facilitar a identificação dos elementos de cada poliedro para o qual ela é válida.

Com o intuito de saber em qual nível de maturidade geométrica os educandos se encontram foi feita uma abordagem da Teoria de Van Hiele, destacando as fases de aprendizagem a fim de apontar os possíveis caminhos para auxiliar o aluno a avançar de nível.

Procurando trabalhar os poliedros de uma forma tecnológica na sala de aula, foram usados os celulares dos alunos juntamente com aplicativos de Realidade Aumentada: Polyèdres augmentès e Geometrix com o objetivo de despertar o interesse do aluno pela aula. Essa metodologia com uso de softwares gerou um efeito positivo na sala de aula e deixou os alunos encantados pela Geometria. Entretanto, é perceptível que para minimizar a barreira da falta de acessibilidade do aluno à internet para realizar as tarefas tecnológicas é de extrema necessidade a implantação e liberação de internet nas escolas públicas como ferramenta de ensino-aprendizagem em sala de aula para que cada aluno possa por exemplo conseguir baixar os aplicativos de Realidade Aumentada e poder acompanhar passo a passo a aula e participar ativamente utilizando o seu dispositivo móvel. Ademais, buscando saber se o aluno reconhece os poliedros e seus elementos foram aplicadas atividades, onde observamos que os alunos apresentam dificuldades que podem ser superadas.

Vale lembrar que é importante nós educadores ser atualizar em um mundo tecnológico e virtual já que os recursos tecnológicos consistem numa inovação no ensino de Geometria que requer para um ótimo funcionamento da metodologia adotada a colaboração e participação do professor para intermediar na sala de aula de forma a proporcionar aulas dinâmicas.

É válido salientar que o procedimento de construção de poliedros de forma lúdica e a manipulação de cada um deles permitem ao aluno a chance de fazer conjecturas e questionamentos que ele provavelmente não realizaria se ocorresse em uma aula tradicional.

O bom professor é o que consegue, enquanto fala trazer o aluno até intimidade do movimento do seu pensamento. Sua aula é assim um desafio, e não uma cantiga de ninar. Seus alunos cansam, não dormem. Cansam porque acompanham as idas e vindas de seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezas. (Paulo Freire, 1966, p. 96).

## REFERÊNCIAS

- ANDRINI, ÁLVARO. *Praticando matemática 6* / Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos. – 4ª.ed.renovada. - São Paulo: Editora do Brasil, 2015- (coleção Praticando matemática v.6).
- BORBA, M. C.- *Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento*. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. SP. Editora Edgar Blucher Ltda. Tradução de Elza F. Gomide. 1974. 488 p.
- BRASIL. *Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL, *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria a prática*. 20ª. ed. Campinas: Papirus, 1996.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar, 10*. 5ª edição. São Paulo: Editora Atual, 1993.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Unicamp, 2004.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. De H.H. Domingues. Editora de Unicamp, Campinas, 1995.
- FAINGUELERNT, E. K. *Educação Matemática: representação e construção em Geometria*. 1ª ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. 7ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- KALEFF, Ana Maria M. R. *Vendo e Entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Editora da Universidade Federal Fluminense, 2006.
- KIRNER, C.; SISCOOTTO, R. *Realidade Virtual e Aumentada: Conceitos, Projeto e Aplicações*. Editora SBC - Sociedade Brasileira de Computação, Porto Alegre, 2007. Livro do pré-simpósio, IX Symposium on Virtual and Augmented Reality, Petrópolis - RJ, 2007.
- KIRNER, C; TORI, R. *Realidade Virtual: Conceitos e Tendências*. São Paulo: J. Garcia Comunicação Visual, 2004.
- KIRNER, C.; TORI, R.; SISCOUTO, R. (Ed.) *Fundamentos e Tecnologia da Realidade Virtual e Aumentada*. Pré Simpósio SVR2006. Belém: SBC. 2006.

KIRNER, Claudio. *Desenvolvimento de aplicações Educacionais Adaptáveis Online com Realidade Aumentada*. In: *Tendências e Técnicas em Realidade Aumentada*, v. 3, p. 9-25, 2013.

LEMOS, B. M.; CARVALHO, C. V. D. A. *Uso de realidade aumentada para apoio ao entendimento da relação de Euler*. *Novas Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, v. 8, nº. 2, julho 2010.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, E. W. A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. *Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis*. In: LORENZATO, Sérgio (org.). *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006.

MACEDO, Alex de Cassio *Usando Smartphone e Realidade aumentada para estudar Geometria espacial*. Paraná, PR: UFPR, 2016.

MIALICH, Flávia Renata. *Poliedros e Teorema de Euler*. São José do Rio Preto, SP: UNESP, 2013.

NASSER, L.; SANTANNA, N. P. *Geometria segundo a teoria de Van Hiele*. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997.

OLIVEIRA, L. L.; VELASCO, A. D. *O ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá*. In: GRAPHICA 2007, VII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design e XVII Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, 2007, Curitiba. *Desafio da Era Digital: ensino e tecnologia*. Curitiba: Departamento de Desenho UFPR, 2007. V. 1.

RAMALHO, Danielle Manera. *Como a aprendizagem acontece?*, 2010.

RÊGO, Rômulo Marinho do; RÊGO, Rogéria Gaudêncio do. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática*. In: LORENZATO, Sergio Aparecido (Org.). *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas: Autores Associados, 2006.

RESENDE, Ana Lucia Camarano; FERREIRA, Francinildo Nobre. *Uma Proposta para o Ensino de Geometria Espacial de Posição na EJA*. São João del-Rei, MG: UFSJ, 2013.

SAMPAIO, F. F.; ALVES, G. de S. *O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica*. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, nº. 5, p. 69–76, 2010.

STAREPRAVO. A. R. *Resolver problemas para ensinar e aprender matemática*. In: STAREPRAVO, A. R. ; PAROLIN, I. H. BOZZA, S. *Na escola sem aprender? Isso não! Três olhares sobre o aprender e o ensinar*. Pinhais: Editora Melo, 2009.

ROONEY, Anne. *A história da matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração infinito*. São Paulo. M. Books, 2012.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. *Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental*. In: SANTOS, C. A. B. et. al. *Ensino de ciências e matemática: a produção discente na pós-graduação*. São Paulo: Terracota, 2012.

VIEIRA, G; ALLEVATO N. S. G. *A produção de conhecimentos sobre sólidos geométricos à luz do modelo de Van Hiele*. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v.6, n.1, 2015.

VILLIERS, M. de. *Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele*. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

Disponível em: <<https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/32/novos-temas-e-reorganizacao-das-areas-sao-as-principais-novidades-em-matematica>>. Acesso em: 03 maio 2019.



**APÊNDICE A – Atividade I****CEJB****Nome** \_\_\_\_\_ **Turma:601****Atividade I**

1-Construa três poliedros utilizando os materiais das técnicas de construções de poliedros disponíveis e, em seguida, preencha a tabela com os seus elementos.

Tabela 6 - Tabela dos poliedros

Nome do Poliedro	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	Número de Faces (F)

Fonte: O autor, 2018.

Agora, divirtam-se! Construam outros poliedros para nosso Laboratório de Matemática do CEJB!

**APÊNDICE B – Atividade II****CEJB**Nome \_\_\_\_\_ **Turma:601****Atividade II**

Utilize os aplicativos Polyèdres augmentès e Geometrix para visualizar os poliedros e responda as perguntas a seguir.

**Questão(1):** Quantas faces o icosaedro possui?

---

**Questão (2):** Qual polígono representa a face de um octaedro?

---

**Questão (3):** Qual figura geométrica plana representa a face de um dodecaedro?

---

**Questão(4):** Quantos vértices possui uma pirâmide quadrangular?

---

**Questão (5):** Qual polígono representa a face de um hexaedro regular?

---

**Questão (6):** Qual polígono representa a face de um tetraedro?

---

**Questão(7):** Escolha um poliedro e verifique se a Relação de Euler:  $V+F=A+2$  é válida para o poliedro escolhido.