**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Educação e Humanidades

Faculdade de Formação de Professores

Monique Andrade da Conceição Couto

# Resolução de Problemas de Análise Combinatória e aplicação na Lousa Digital

São Gonçalo

2019

Monique Andrade da Conceição Couto

**Resolução de Problemas de Análise Combinatória e aplicação na Lousa Digital**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Profª. Dra. Marcele Câmara de Souza

Coorientador: Profª. Dra. Priscila Cardoso Petito

São Gonçalo

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CEH/D

C871 Couto, Monique Andrade da Conceição.
Resolução de Problemas de Análise Combinatória e Aplicação na Lousa Digital / Monique Andrade da Conceição Couto – 2019.
128f.: il.

Orientadora: Marcele Câmara de Souza
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Formação de Professores.

1. Análise Combinatória - Teses. 2. Resolução de Problemas - Teses. 3. Lousa Digital - Teses. I. Souza, Marcele Câmara. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Faculdade de Formação de Professores. III. Título.

CDU 519.1



Assinatura Data

Monique Andrade da Conceição Couto

**Resolução de Problemas de Análise Combinatória e aplicação na Lousa Digital**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 25 de abril de 2019.

Banca Examinadora:

_______________________________________________
Prof[a]. Dra. Marcele Câmara de Souza (Orientador)

Faculdade de Formação de Professores – UERJ

_______________________________________________
Prof[a]. Dra. Priscila Cardoso Petito (Coorientador)

Faculdade de Formação de Professores – UERJ

_______________________________________________
Prof. Dr. Fábio Silva de Souza

Faculdade de Formação de Professores – UERJ

_______________________________________________
Prof. Dr. Fábio Pacheco Ferreira

Universidade Federal Fluminense

São Gonçalo

2019

**DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho ao autor da minha fé Deus, ao meu esposo Carlos Eduardo, aos meus pais Aldenir e Vanderlea e a minha irmã Vânia.

## AGRADECIMENTOS

À Deus, pela força e por plantar em mim sonhos e fazê-los realidade em minha vida. Muito obrigada Senhor por sua fidelidade e força em todos os momentos.

Ao meu amado esposo Carlos Eduardo da Costa Couto pela paciência, amor, compreensão, ajuda nessa caminhada e por sonhar comigo todos os meus sonhos. Amo muito você!

À minha família, por sua capacidade de acreditar e investir em mim. Mãe, seu cuidado e dedicação me deram a esperança para seguir. Pai, sua presença e amizade significaram segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada. Vania, a certeza das suas orações me motiva a prosseguir. Sogro e Sogra, Sr Eduardo e Sra Lenir, obrigada pelas orações e carinho dedicados a mim.

Aos meus amigos que entenderam a minha ausência em vários momentos durante o desenvolvimento dessa dissertação.

Às professoras Marcele Câmara e Priscila Petito, por toda a paciência e calmaria que me transmitiram durante todo o período da escrita. Obrigada por entender a correria do meu dia a dia e confiar no meu potencial.

Agradeço também a todos os professores do PROTMAT – UERJ/FFP que foram importantíssimos na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desse trabalho. Abel, Agnaldo, Clícia, Fábio, Priscila e Rosa, muito obrigada. E aos meus amigos de curso: lutamos e vencemos!

E aos professores que aceitaram fazer parte da banca examinadora dessa monografia. Obrigada!

Que darei eu ao Senhor por todos os benefícios que me tens feito?

*Salmos 116.12*

# RESUMO

COUTO, Monique Andrade da Conceição. *Resolução de Problemas de Análise Combinatória e aplicação na Lousa Digital*. 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

Ensinar Análise Combinatória não é uma tarefa fácil! Apesar da disciplina trabalhar com muitas situações do cotidiano do aluno, nem sempre as situações são interpretadas da maneira como deveriam para chegar à solução correta. Pensando nessas dificuldades apresentamos um trabalho sobre Resolução de Problemas de Análise Combinatória e a Lousa Digital como facilitadora do aprendizado. O Ensino da Matemática Através da Resolução de Problemas revela um processo de ensino-aprendizagem que permite um estudo mais significativo e reflexivo. A lousa digital ou quadro interativo é um recurso que pode ser usado nas salas de aula para apresentar vídeos, fazer demonstrações, acessar a internet e, principalmente, escrever na tela (onde é utilizada uma caneta própria para esse fim). Desse modo, há uma interação maior entre o professor e o aluno, pois a aula deixa de ser a tradicional e torna-se mais motivadora, despertando o pensamento do aluno e incentivando a experimentação e generalização, além de um ganho maior no aproveitamento do tempo. Mudanças nem sempre são fáceis, na verdade são às vezes assustadoras, mas são necessárias. O corpo discente mudou e vai mudar sempre, o papel do professor passa de detentor do conhecimento para articulador do processo de ensino-aprendizagem. Visando articular novas tecnologias com o conhecimento matemático, esse trabalho tem como objetivo apresentar sugestões de resolução de alguns problemas de Análise Combinatória utilizando como recurso tecnológico a Lousa Digital.



Palavras-chave: Resolução de Problemas. Análise Combinatória. Lousa Digital.

## ABSTRACT

COUTO, Monique Andrade da Conceição. *Combinatorial Analysis Problem Solving and the Digital Whiteboard Application*. 2019. 128f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

Teaching Combinatorial Analysis is not an easy task! Although the discipline works with several situations in the student's daily life, not always these situations are seen in the same way they should in order to get to the solution. Thinking about these difficulties we present a work on Combinatorial Analysis Problem Solving and the Digital Whiteboard as a facilitator of learning. The teaching of Mathematics through Problem Solving reveals a process of teaching and learning that allows a kind of study more meaningful and reflective study. The digital whiteboard or interactive whiteboard is a teaching resource that can be used in classrooms to present videos, do demonstrations, access internet and especially to write on the screen (where a pen is used for this purpose). Thus, there is a greater interaction between teacher and student since the classroom is no longer the traditional one and it becomes more motivating. That encourages students to the experimentation and generalization. Therefore they get greater gain on achievement of their time. Changes are not always so easy, in fact they are sometimes scary, but necessary. The student body changed and it will always change. The teachers role changes from knowledge holder to articulator through the teaching learning process. Aiming to articulate new technologies with mathematical knowledge this work has the purpose to present suggestions for solving some combinatorial analysis problems using as technological resource the Digital Whiteboard.


Keywords: Problem Solving. Combinatorial Analysis. Digital Whiteboard.

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O processo do ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio nos mostra, como docentes, muitas dificuldades apresentadas pelos alunos. Essas dificuldades vão desde a má interpretação dos enunciados e, por consequência, os erros de cálculos, até a utilização dos processos de forma automática e o uso mecanizado das fórmulas, sem que haja um estímulo ao raciocínio lógico-matemático desses alunos, gerando neles uma repulsa aos conteúdos da Análise Combinatória.

Para amenizar tais dificuldades, os professores de Matemática buscam alguns auxílios que possam contribuir para o ensino desse conteúdo em sala de aula, de modo que não fiquem presos apenas às aulas tradicionais e possam ensinar de forma mais dinâmica e com uma participação mais ativa do corpo discente, facilitando o ensino-aprendizado. A lousa digital ou quadro interativo é uma dessas opções que são capazes de transformar a sala de aula num ambiente mais atrativo para o aluno, contudo é importante ressaltar que a utilização desses recursos deve ser bem estruturada e pensada para que o mesmo não tenha um efeito contrário, isto é, gerar mais trabalho ao professor sem beneficiar o processo de ensino-aprendizagem.

É necessário que professores e alunos estejam preparados para as mudanças tecnológicas existentes, e a escola deve acompanhar esse avanço, fornecendo assim maiores recursos para que estes sejam utilizados nas aulas. É claro que toda essa mudança assusta e talvez a escola não tenha condições financeiras de acompanhar, mas não podemos fechar os olhos para tal avanço. Muitas escolas públicas e particulares já contam com quadro interativo embora, em sua maioria, sejam subutilizados.

Resolver problemas de Análise Combinatória requer uma atenção especial, uma vez que esses problemas nem sempre são tão simples de interpretar. Trabalhar com Resolução de Problemas em sala de aula traz incontáveis vantagens tanto para o aluno como para o professor. Para o aluno, uma vez envolvidos com a Resolução de Problemas, o fato de errar ou acertar são partes da mesma situação. Descobrir que existem muitas maneiras para resolver um determinado problema faz com que esse aluno se sinta mais criativo e participante do processo. Para o professor, o fato da aula se tornar mais dinâmica e atrativa mantém o aluno mais engajado na aula, até por se sentir desafiado. Vale ressaltar que cabe ao professor conduzir muito bem as problematizações para que seja estimulado no aluno o raciocínio lógico-matemático.

O objetivo dessa dissertação é mostrar aos professores de Matemática que é possível utilizar a Lousa Digital como um recurso tecnológico facilitador para o ensino da Análise Combinatória. A escolha do tema surgiu durante minhas aulas de Matemática em turmas de 3º Ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Walter Orlandini, pois observei que muitos alunos não se interessavam pelas atividades propostas muitas vezes por falta de interesse, de atenção, de concentração ou ainda por falta de motivação em aprender e principalmente nos casos de exercícios que não estavam de acordo com sua realidade.

Estruturamos essa dissertação em seis capítulos. No primeiro apresentamos o pensamento de alguns pesquisadores que tratam a Resolução de Problemas como estratégia e/ou metodologia de ensino, além de uma base teórica do tema sob as ideias de George Pólya. Ainda neste capítulo citaremos um dos primeiros problemas que o docente percebe ao aplicar um problema matemático que é a dificuldade de interpretação do aluno, e isso, muitas vezes, deve-se ao fato da ideia enganosa de que para estudar Matemática não é necessário ler. O que é um grande equívoco, visto que uma boa interpretação do texto fará com que este aluno compreenda o problema matemático com muito mais agilidade.

No segundo capítulo, apresentamos a parte do conteúdo de Análise Combinatória relativo ao 3º ano do Ensino Médio com definições e exemplificações. No terceiro capítulo, analisamos quatro exercícios de Análise Combinatória que fizeram parte da minha primeira experiência de tentar utilizar a metodologia de Resolução de Problemas. Em seguida, no mesmo capítulo, apresentamos a resolução de alguns alunos das dez questões que foram propostas em sala com o objetivo de estimular a resolver seguindo a ideia de Pólya e sem interferência do professor.

No quarto capítulo, apresentamos a Lousa Digital como facilitadora para o ensino e fizemos um breve resumo sobre a Lousa TeamBoard, que será utilizada nas aplicações dos exercícios dessa Dissertação. No quinto capítulo, estruturamos as questões aplicadas no quarto capítulo, de modo a torná-las mais próximas da realidade do aluno e, de fato, permitir sua utilização segundo a Resolução de Problemas. Após essa modificação em cada questão, apresentamos uma possível resolução na Lousa TeamBoard, de modo que facilite a visualização e estimule a generalização. O objetivo neste capítulo é mostrar aos docentes que é possível ensinar Análise Combinatória levando em consideração a realidade do aluno e utilizando uma ferramenta tecnológica para facilitar a compreensão e resolução da questão. Neste contexto é criada uma questão baseada em um jogo popular entre os adolescentes, contemplando essas ideias.

Na Conclusão, retomaremos as discussões realizadas ao longo do trabalho sobre as experiências feitas e atividades sugeridas sob a ótica da Resolução de Problemas e o uso da Lousa Digital, além de analisar os possíveis desdobramentos das ideias propostas.

# 1 **A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

Vivemos em uma sociedade que exige cada vez mais dos cidadãos uma visão criativa e reflexiva sobre o mundo que nos cerca. Com o avanço das tecnologias, percebemos que cálculos rápidos ou repetitivos não são mais suficientes e passaram a exigir habilidades complementares, pois a humanidade evoluiu e essas atividades passaram a ser executadas pelas máquinas.

Mudanças curriculares apontam para uma aprendizagem mais prazerosa e significativa e que privilegie a criatividade, o senso crítico e que desperte o interesse dos alunos. Um problema matemático é uma situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tente resolvê-lo, e/ou construa uma conjectura que generalize o processo. Segundo Goldstein e Levin,

> ...a resolução de problemas faz parte das formas de pensamento. Considerada a mais complexa das funções intelectuais, resolver problemas é um processo cognitivo de alto nível que requer a modulação e o controle de várias rotinas ou habilidades. (GOLDSTEIN E LEVIN, 1987).

## 1.1 **O que se entende por Resolução de Problemas**

A Resolução de Problemas tem ocupado um lugar central nos currículos da Matemática escolar desde povos antigos, como egípcios, chineses, babilônios e gregos, até os dias de hoje. Porém, ao longo da história, as abordagens foram modificando e se aprimorando.

Nas propostas mais atuais, conceitos e ideias matemáticas tendem a ser abordados a partir de situações em que os alunos necessitam desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. Neste panorama, a Resolução de Problemas surge como uma orientação para a aprendizagem, pois propicia um contexto em que se pode compreender conceitos e desenvolver procedimentos matemáticos.

Apesar do termo “Resolução de Problemas” ser bastante utilizado nos textos e nos livros, o significado do termo nem sempre foi bem compreendido como afirmam Schroeder e Lester (1989). Dessa forma, pretendemos apresentar algumas diferentes concepções sobre resolução de problemas na visão de alguns educadores.

Ao falarmos de problemas matemáticos temos que deixar sua definição bem clara, para isso buscamos algumas definições em dicionários e também de autores estudiosos no assunto. O termo “problema” aparece com vários significados em dicionários, que vão de dificuldades e obstáculos até algo relacionado à Matemática.

Segundo Newell & Simon apud Ramos et all (2001), “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação” ou ainda segundo Chi, Glaser e Farr (2014) “um problema é uma situação na qual o indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia particular”.

Segundo Pais (1999), “problema é o elemento propulsor do saber matemático”, isto é, problema é a peça fundamental para a construção do conhecimento matemático.

Para Pozo (1998), problema é uma situação que necessita ser resolvida, mas que não se tem o caminho direto para a solução.

Para resolver um problema matemático é necessário o desenvolvimento de uma estratégia ou um meio para atingir o objetivo. Resnik apud Silveira (2001) apontou várias características, classificando os problemas que procuramos resumir no quadro a seguir.

**Sem algoritmização**: o caminho da resolução é desconhecido, ao menos em boa parte.
**Complexos**: precisam de vários pontos de vista.
**Exigentes**: a solução só é atingida após intenso trabalho mental; embora o caminho possa ser curto, ele tende a ser difícil.
**Necessitam de lucidez e paciência**: um problema começa com uma aparente desordem de ideias e é preciso adotar padrões que permitirão construir o caminho até a solução.
**Nebulosos**: nem sempre todas as informações necessárias estão aparentes; por outro lado, podem existir conflitos entre as condições estabelecidas pelo problema.
**Não há resposta única**: normalmente ocorre de existirem várias maneiras de resolver um dado problema, no entanto, pode acontecer de não existir uma melhor solução ou até de não haver solução – ou seja, resolver um problema não é o mesmo que achar a resposta.

Muitas vezes o professor trata problemas e exercícios como se fossem atividades equivalentes. Para estudiosos da Didática da Matemática, existe um problema quando há um obstáculo a ser enfrentado pelo aluno e neste processo o professor tem que desempenhar um papel muito importante, o de desafiador dos alunos. Em um exercício, em geral, o aluno possivelmente procederá a partir de um modelo, utilizando fórmulas ou algum processo operatório anteriormente ensinado à ele, isto é, um esquema padronizado, muitas vezes memorizado.

Para Pozo,

> As tarefas em que precisa aplicar uma fórmula logo depois desta ter sido explicada em aula, ou após uma lição na qual ela aparece explicitamente...servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para posterior solução de problemas. (POZO, 1998 apud SOARES e PINTO, 2001)

Para Soares e Bertoni (2001), tanto os exercícios quanto os problemas têm seu valor, cabe ao professor fazer uma dosagem dos mesmos durante todo o período letivo. Segundo Lester (1982) apud Dante (2010, p.12) “problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”.

Exemplo de exercício:

| |
|---|
| Resolva a expressão: $\{2\times[4+5-6\times(3+2)]\}$ |

Este exemplo foi caracterizado como exercício pois, segundo Dante (2003), o aluno lê o exercício e tira dele as informações necessárias para praticar as habilidades algorítmicas. Existem também problemas que na verdade são caracterizados como exercício de aplicação, pois são apresentados logo após a apresentação de um conceito.

Outro exemplo de exercício:

| |
|---|
| Paguei R$ 74,00 por uma bolsa e uma sandália. A bolsa foi R$ 23,00 mais barata do que a sandália. Qual o preço da sandália? |

Exemplo de problema:

| |
|---|
| A história conservou poucos dados sobre Diofanto. Tudo o que se conhece a seu respeito encontra-se no seguinte epigrama que figura no seu túmulo e está escrito sob a forma de um enigma matemático: Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril. Passou mais um quinquênio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogênito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho. Quantos anos tinha Diofanto quando morreu? |

Segundo Dante (2003), este enunciado é classificado como um problema, pois “não se tem um algoritmo que traga a solução imediata”.

Escolher problemas estimulantes e adequados não é uma tarefa fácil para o professor. Para Dante um bom problema deve:

- Ser desafiador para o aluno: geralmente os problemas propostos são padronizados e não tem o espírito de desafio.

Por exemplo:

| |
|---|
| Uma árvore tem galhos e passarinhos. Se pousar um passarinho em cada galho, fica um passarinho sem galho. Se pousarem dois passarinhos em cada galho, fica um galho sem passarinho. Quantos galhos e quantos passarinhos há? |

- Ser real: problemas do cotidiano deixarão os alunos mais motivados do que os problemas artificiais. No exemplo a seguir, o aluno pode imaginar-se na situação descrita.

| |
|---|
| Na classe de João há 30 alunos. Como choveu, faltaram 3 dos seus colegas. Sua professora pediu para que os alunos formassem equipes de 3 para resolverem problemas. Quantos problemas a professora precisa ter para que cada equipe resolva apenas um? |

• Ser interessante: problemas que sejam adequados para a idade do aluno. Um aluno do 6º ano não irá se motivar ao se deparar com um problema sobre situações econômicas, pois o tema, em geral, não interessa a crianças dessa faixa etária. No entanto, um problema adequado para crianças poderia ser relacionado a sua idade por exemplo. O problema a seguir é comumente utilizado por professores do Ensino Fundamental no fim do primeiro segmento e no início do segundo segmento.

> Luiz Eduardo comprou várias galinhas campeãs em pôr ovos. Ao testar a eficiência das galinhas, ele observou que de minuto em minuto o número de ovos na cesta duplicava. Às duas horas a cesta estava cheia. A que horas a cesta estava pela metade?

• Ser o elemento de um problema realmente desconhecido: que o aluno sinta-se participante da descoberta de algo desconhecido descrito no enunciado, como se ele ajudasse a desvendar um mistério. No exemplo a seguir, o aluno é envolvido no mistério ao ler o diálogo.

> Ao encontrar uma velha amiga (A), durante uma viagem de trem, um matemático (M) tem a seguinte conversa:
>
> ( M ) – Como vão os três filhos da senhora?
> ( A ) - Vão bem, obrigada!
> ( M ) - Qual a idade deles mesmo?
> ( A ) - Vou lhe dar uma dica. O produto das idades deles é 36.
> ( M ) - Só com essa dica é impossível!
> ( A ) - A soma das idades deles é igual ao número de janelas desse vagão.
> ( M ) – Ainda não sei!
> ( A ) – O mais velho toca violino!
> ( M ) – Agora eu sei !!!

• Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas, que o problema pressuponha alguma estratégia. Por exemplo,

| Complete a sequência: S, T, Q, __, __, __, __ |
|---|

• Ter um nível adequado de dificuldade: se os problemas forem muito além do nível de compreensão do aluno, podem levar ao desânimo ou à frustração.

Um dos primeiros matemáticos a escrever sobre o que é resolver um problema foi George Pólya (1995) em seu livro "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método Matemático".

Segundo este autor:

> Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado. Se o fim por si só não sugere os meios, se por isso temos de procurá-los refletindo conscientemente sobre como alcançar o fim, temos um problema. Resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar o fim desejado, mas não alcançável diretamente, por meio de obstáculos (PÓLYA apud KRULIK e REYS,1997).

Ainda segundo Pólya,

> Resolver problema é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como "animal que resolve problemas"; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançáveis. A maior parte de nosso pensamento consciente é sobre problemas; quando não nos entregamos à –simples contemplação, ou devaneios, nossos pensamentos estão voltados para algum fim. (POLYA apud KRULIK e REYS,1997).

Quando um problema for proposto ao aluno, o professor deverá estar ciente de que ele será capaz de reconhecer cada expressão verbal utilizada, para que possa transcrevê-lo, destacando as hipóteses, os dados, e o que se pretende descobrir. Para que a aula esteja dentro das orientações da Resolução de Problemas, Buriasco (1997) sugere as etapas a seguir:

| |
|---|
| 1- Os problemas a serem resolvidos serão apresentados pelo professor e, com o auxílio do aluno, decidirão qual problema resolver.<br>2- Através de conhecimentos prévios, os alunos tentarão resolver o problema.<br>3- Caso o professor perceba que falta no aluno alguns conteúdos que serão de grande importância para o desenvolvimento da questão, cabe a este professor atuar junto à turma e apresentar esses conteúdos.<br>4- Concluída a etapa de resolução, ou seja, quando o problema estiver resolvido, o professor deverá estimular junto à classe uma discussão referente à solução e os conteúdos utilizados. Neste momento, será |

Pólya (1978), o papel do professor na resolução de problemas é de auxiliador dos alunos, o que, ainda segundo o autor, não é nada fácil, pois requer do professor tempo, prática e dedicação.

Em sua obra “A arte de resolver problemas”, Pólya sugere uma aproximação à resolução de problemas em quatro etapas fundamentais e inúmeras estratégias que podem ser utilizadas quando apropriado. O quadro a seguir, mostra a descrição destas etapas.

| |
|---|
| 1. Entender o Problema<br><br>• Ler cuidadosamente o problema, se necessário, várias vezes.<br><br>• Compreender o significado de cada termo utilizado.<br><br>• Reescrever o problema.<br><br>• Identificar, claramente, as informações de que necessita para resolvê-lo.<br><br>2. Estabelecer um Plano<br><br>• Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita com o objetivo de definir uma estratégia / plano de resolução.<br><br>• Considerar eventuais problemas auxiliares ou particulares.<br><br>3. Executar o Plano<br><br>• Compreender e executar a estratégia definida.<br><br>• Verificar a correção de “cada passo”.<br><br>4. Refletir sobre a Resolução<br><br>• Refletir sobre a resolução do problema, “revendo-a e discutindo-a”.<br><br>• Procurar utilizar o resultado, ou o método, em outros problemas. |

Para Carraher (1995), “o professor deve ver seus alunos como sujeitos ativos, que organizam sua aprendizagem de modo racional, permitindo assim, aos alunos gerar suas respostas que não foram necessariamente ensinadas pelo professor”. Além disso, o professor deve estimular o aluno na construção do seu saber, levando-o a uma análise dos resultados que aparecerão durante o processo, mesmo que eventuais erros possam ocorrer.

Nas concepções de Krulik (1980), “um problema é uma situação quantitativa ou não, que pede uma solução para a qual os indivíduos implicados não conhecem meios ou caminhos evidentes para obtê-la”. Para Itacarambi (2011), “problema é uma situação que apresenta dificuldades para as quais não há uma solução evidente”.

Muitos autores acreditavam que a Resolução de Problemas ajudava de certo modo a resolver não só os problemas matemáticos, mas todos os outros, visto que para resolver um problema é necessária muita concentração e desejo de obter a solução. A seguir apresentamos algumas citações de autores que compactuam com estas ideias. Tais citações foram extraídas de (DANTE, 2011).

“A real justificativa para ensinar Matemática é que ela é útil e, em particular, auxilia na solução de problemas”. (EDWARD BEGLE)

“A razão principal de se estudar Matemática é para aprender como se resolvem problemas”. (LESTER JR.)

“A resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução Matemática desde o Papiro de ‘Rhind’”. (GEORGE PÓLYA)

“Aprender a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução Matemática. Certamente outros objetivos da Matemática devem ser procurados, mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. Desenvolver conceitos matemáticos, princípios e algoritmos através de um conhecimento significativo e habilidoso é importante. Mas o significado principal de aprender tais conteúdos matemáticos é ser capaz de usá-los na construção das soluções das situações-problema”. (LARRY L. HARTFIELD)

“A resolução de problemas é a própria razão do ensino da Matemática”. (STEPHEN KRULIK)

## 1.2 **A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino**

Em 1980, a partir da publicação do NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*, intitulado “Agenda para a Ação”, a Resolução de Problemas foi apontada como o principal foco do ensino da Matemática. Porém, muitas propostas sobre a forma como os professores devem utilizar a Resolução de Problemas como atividade em sala de aula ocorreram ao longo da história. Stanic e Kilpatrick (1988) registraram a história da Resolução de Problemas desde a antiguidade até o final do século XX. Eles analisaram a influência dos trabalhos de Pólya (1945, 1981) e Dewey (1933).

Onuchic em sua palestra de encerramento de I Seminário em Resolução de Problemas (ISERP), ocorrida em 2008 na UNESP, destaca:

> A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino em sala de aula, e designada por nós, "Metodologia de Ensino – Aprendizagem - Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas", é um conceito relativamente novo em Educação Matemática, apesar de a resolução de problemas ter uma longa história na Matemática escolar. (ONUCHIC, 2008).

No século XIX, a sociedade estava baseada em atividades agrícolas e de pecuária, poucos precisavam saber Matemática para aplicá-la em suas atividades. Para os educadores da época, a Resolução de Problemas deveria apenas suceder a aplicação dos conteúdos aprendidos. O professor tinha como objetivo ensinar o conteúdo e o aluno, por sua vez, mecanizava um procedimento e em seguida praticava na aplicação. Para Ray (1956), autor de livro texto da época, "o aluno só teria que aplicar aquilo que havia aprendido e nada mais", e essa visão, em muitas escolas, prevalece até os dias de hoje.

No início do século XX, com o crescimento da sociedade industrial, mais pessoas precisavam saber Matemática, porém, o seu ensino ainda era caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, onde o recurso à memorização de fatos básicos era considerado fundamental.

Em meados do século XX, novas mudanças sociais e culturais levaram à sociedade à era da informação e do conhecimento. Para manter seu desenvolvimento, toda sociedade passou a ter necessidade de compreender mais conceitos matemáticos. Estas transformações exigiram necessariamente mudanças no ensino de Matemática que antes era excessivamente mecanizado com a valorização da memorização. Assim, as escolas passaram a exigir mais dos alunos a análise e compreensão de conceitos.

Para que um indivíduo tenha condições de estar inserido profissionalmente na sociedade atual, o ensino precisou ser reavaliado. Neste panorama, passou-se, então, a se pensar na Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino.

Etimologicamente, a palavra metodologia significa o estudo dos métodos ou caminhos a percorrer para chegar a algum objetivo ou finalidade. A palavra é de origem grega e advêm de *methodos*, que significa META (objetivo, finalidade), *hodos* (caminho, intermediação), isto é, caminho para se atingir um objetivo, e *logia,* que quer dizer conhecimento, estudo. Ao longo dos anos, esta palavra apresentou várias concepções. Numa visão humanista escolanovista da educação, metodologia de ensino é entendida como uma estratégia que visa garantir um aprimoramento individual e social totalmente centrado no indivíduo. Essa linha de pensamento considera o aluno como um indivíduo em constante processo de descoberta.

Entre os anos 1960 e 1990, devido a interpretações limitadas do trabalho de Pólya, algumas propostas curriculares indicavam que fosse transmitida aos alunos uma visão da Resolução de Problemas como um procedimento seguindo passos rígidos e determinados. Algumas propostas curriculares incluíam a Resolução de Problemas como um capítulo ou como uma atividade à parte, e que, segundo Pólya (1978), deveria ser dividido em quatro processos: compreensão do problema, desenvolvimento de um plano, execução do plano e, por último, verificação da solução encontrada.

Desta forma, alguns autores consideravam a Resolução de Problemas como um processo de utilização de procedimentos algorítmicos obtidos por rotina ou por exaustivas repetições.

Dewey (1933) foi um grande incentivador do uso da Resolução de Problemas no ensino. Para ele o aluno deveria encarar os problemas e resolvê-los, não se preocupando com regras e procedimentos. Conteúdos ensinados sem ligação com suas experiências eram considerados "*inúteis; como entulho, criando barreiras e obstruindo a possibilidade de pensar sobre os problemas enfrentados*". Ele acreditava que os professores deveriam optar por envolver seus alunos na resolução de poucos problemas, porém bem escolhidos, ao invés de carregar o currículo com tantos conceitos e procedimentos.

As primeiras investigações sobre o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e suas implicações curriculares são ainda recentes. Estas análises por parte dos educadores ocorreram no início da década de setenta.

Em 1976, a Resolução de Problemas foi um dos temas destacados do importante evento de Educação Matemática: *3rd International Congress on Mathematical Education,* ICME 3, ocorrido em *Karlsruhe*, Alemanha.

No início dos anos oitenta, o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), apresentou diretrizes e estratégias para o ensino de Matemática que deveriam ser considerados nessa década, publicando *"Uma Agenda para a Ação*" que recomenda a Resolução de Problemas como foco da Matemática para os anos

80. A UNESCO, no início da década de 90, corrobora com este pensamento ao declarar que a Resolução de Problemas tem um papel tão importante quanto a leitura, a escrita e o cálculo.

Durante a década de 80, muitos recursos foram desenvolvidos, visando o trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho dos alunos. Muito desse material passou a ajudar os professores a tratar a Resolução de Problemas como ponto central de seu trabalho.

Em 1989, Schroeder e Lester divulgaram em suas pesquisas, três formas diferentes de se abordar Resolução de Problemas matemáticos, que ajudaram outros estudiosos a refletir sobre diferentes visões dessa estratégia de ensino: teorizar *sobre* resolução de problemas; ensinar Matemática *para* resolver problemas; e ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas.

Teorizar sobre Resolução de Problema normalmente é considerá-la como um novo conteúdo. O professor que ensina sobre Resolução de Problemas procura ressaltar alguma variação do modelo de Pólya. O professor que ensina Matemática *para* resolver problemas, usa a Matemática que faz parte do currículo na Resolução de Problemas, isto é, uma atividade que deverá ser realizada após o ensino de algum conceito novo, considerando que antes de utilizar a resolução de problemas é necessário ensinar Matemática para posteriormente aplicá-la.

Segundo Onuchic,

> O professor que ensina sobre Resolução de Problemas procura ressaltar o modelo de Polya ou alguma variação dele. Ao ensinar Matemática para resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. (ISERP, 2008)

No início da década de 90, pesquisadores em Educação Matemática passaram a questionar os efeitos das estratégias de ensino e começam a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas. Ela passou a ser pensada e recomendada como uma metodologia de ensino, isto é, um meio de se ensinar Matemática. Essa forma de ensinar, considerado por muitos como “Pós Pólya”, não aboliu as heurísticas nem a exigência sobre os alunos, porém, mudou o papel central do professor e o aluno passou a ser o protagonista de sua própria aprendizagem. Além disso, nesta concepção, o importante para se aprender Matemática é a capacidade de relacioná-la em contextos variados.

Apoiados nas ideias divulgadas nos s*tandards* do NCTM da década de 90, foram criados no Brasil, os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL; 1997, 1998, 1999), cujas diretrizes apontavam para a importância do desenvolvimento da capacidade de resolver problemas como ponto inicial das atividades matemáticas na sala de aula.

No Brasil, no início do Século XX, o ensino de Matemática foi pautado em processos de repetição, algoritmos decorados sem a compreensão dos porquês da execução de cada passo, e nem mesmo dos objetivos da execução desses processos. Até meados do século XX, a Resolução de Problemas não era vista como uma metodologia de ensino e, para entender que hoje é possível ensinar Matemática através da resolução de problemas, um enorme caminho foi percorrido.

Em 2017 é homologada a Base Nacional Comum Curricular, a BNCC, que vem corroborar as ideias dos PCN.  Segundo este documento normativo,

> No caso da resolução e formulação de problemas, é importante contemplar contextos diversos (relativos tanto à própria Matemática, incluindo os oriundos do desenvolvimento tecnológico, como às outras áreas do conhecimento). Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2017)

Neste mesmo documento podemos destacar ainda,

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2017)

Alguns educadores brasileiros se destacaram em pesquisas sobre a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino, como exemplo podemos citar: Allevato (2005); Huamán (2006), Onuchic( 2008), entre outros.

Para Onuchic,

> A caracterização da Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas, que a configuravam como um conjunto de fatos, como o domínio de procedimentos algorítmicos ou como um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. (ONUCHIC, 2008)

Em uma de suas pesquisas Onuchic e Allevato criticam as duas formas existentes de ensinar Matemática: por meio de repetição (a que o professor transmitia o conteúdo e o aluno memorizava, repetindo apenas as técnicas por meio dos exercícios); e a outra em que alunos deveriam aprender Matemática com compreensão. Esta forma de ensino de Matemática baseava-se no treino de técnicas e habilidades para a resolução de problemas formais ou para aprender um novo conteúdo. Sobre elas escreveram: "*Essas duas formas de ensino não lograram sucesso quanto à aprendizagem dos alunos. Na verdade, alguns alunos aprendiam, mas a maioria não".* (ONUCHIC e ALLEVATO, 2005, p. 214).

O Ensino – Aprendizagem - Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas difere das metodologias em que regras de "como fazer" são privilegiadas, pois "*reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental*". (ONUCHIC, 1999, p.203).

Para Huamán (2006), ensinar Matemática através da Resolução de Problemas é uma metodologia alternativa, geradora de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, cujo foco principal é a construção do conhecimento matemático do aluno. Mas, como ensinar Matemática através da resolução de problemas?

Para uma grande parte dos educadores matemáticos, a resolução de problemas permite que os alunos usem seu próprio conhecimento e assim administrem informações à sua volta. Desta forma, eles terão a oportunidade de aumentar seus conhecimentos, desenvolver habilidades de raciocínio lógico, encarar novas situações e compreender novas aplicações da Matemática. Muitas vezes, os problemas apresentados pelos professores não são de fato problemas, pois não consiste num desafio real nem na necessidade de uma validação no processo de solução. Um indivíduo está diante de uma situação-problema, de forma didática, quando é estimulado a traçar estratégias para resolvê-lo, mesmo que não alcance o sucesso a partir de procedimentos que supostamente o levaria a obter o êxito.

A Resolução de Problemas é vista como um fator determinante para o ensino da Matemática, pois é a partir dessas atividades que é dada aos alunos a oportunidade de vivenciar situações que os levam a adquirir novos saberes matemáticos. De acordo com Carvalho (1991), para que essas habilidades se desenvolvam no aluno é necessário que o professor esteja preparado para aceitar as diferentes técnicas dos alunos, pois nem sempre o procedimento que o professor julgar melhor será o caminho que o aluno irá tomar.

> A ciência está em constante movimento. Não se deve levar o aluno a pensar que só há uma forma de resolver um problema, até porque essa forma amanhã poderá estar superada. A dúvida, a pesquisa e a experimentação devem ser estimuladas em sala de aula para que nossos alunos compreendam que os conhecimentos matemáticos foram construídos por pessoas comuns e para que se sintam capazes de produzir novos conhecimentos (ROCHA, 2001, p.21)

Deste modo, percebemos que a Resolução de Problemas promove o raciocínio e enriquece as estruturas do pensamento e, além disso, proporciona a contextualização do ensino. Esta última observação pode ser fundamentada pelas pesquisas de Soares e Pinto, que ressaltam que:

> [...] o envolvimento e o interesse dos alunos na aprendizagem se dá no fato de haver uma relação entre as experiências do dia-a-dia com os conteúdos trabalhados através da resolução de problemas. (SOARES E PINTO, 2001)

Vale ressaltar que, de acordo com os PCN, a aprendizagem tem melhor resultado quando os conteúdos são trabalhados com as necessidades cotidianas da criança. Contudo, concordamos com Rocha quando diz que:

> [...] não se deve ensinar apenas aqueles conhecimentos necessários ao cotidiano dos alunos, porque isso seria negar-lhes o acesso a outros conhecimentos, resumir suas possibilidades (ROCHA, 2001 p.25).

Outro importante motivo para ensinar Matemática através da resolução de problemas se deve ao fato de que ela assegura, segundo Dante (2003), uma boa alfabetização Matemática, ajudando a desenvolver nos alunos, a partir de um determinado contexto, habilidades para a compreensão de outros conteúdos. Mas para que isso ocorra é necessário que o professor selecione e aplique problemas que estimulem o raciocínio e desenvolvam a criatividade do aluno. Cabe também ao educador estar atento a sua função de orientador, dar oportunidades para os alunos de pensar e agir com autonomia, favorecendo ao discente um ambiente para se repensar sobre suas próprias ações. Se "*o aluno for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxilio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso*". (PÓLYA,1978, p.1).

### 1.3 **Papel da Leitura e da Escrita no processo de Resolução de Problemas**

Um grande desafio em atividades envolvendo problemas matemáticos é a dificuldade na leitura a fim de identificar o que está sendo questionado ou quais os dados necessários para a resolução. Em geral, os alunos não conseguem relacionar o que está escrito com os conceitos matemáticos necessários para solucionar a proposta. Uma das causas dessa dificuldade na interpretação é a falsa ideia de que para estudar Matemática não é preciso ler. Acreditamos, porém, que estes obstáculos não serão ultrapassados enquanto nossos estudantes não atingirem alguma proficiência em leitura.

Percebemos, assim, a grande importância da leitura e da escrita para esse processo de ensino. Elas são consideradas como ferramentas essenciais na compreensão de situações-problema.

Nos deparamos sempre com alunos com dificuldades em interpretar o problema que lhe está sendo proposto. Perguntas do tipo: "*Professora esse é de mais ou de menos*? *Devo dividir ou multiplicar*? *Onde uso estes dados*?", evidenciam ainda mais essa falta de leitura e interpretação.

Baseado em trabalho com crianças, Smole e Dinniz afirmam:

> A dificuldade que os alunos encontram em ler e compreender textos de problemas está, entre outros fatores, ligada à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. O estilo no qual os problemas de Matemática geralmente são escritos, a falta de compreensão de um conceito envolvido no problema, o uso de termos específicos da

> Matemática que, portanto, não fazem parte do cotidiano do aluno e até mesmo palavras que têm significados diferentes na Matemática e fora dela – total, diferença, ímpar, média, volume, produto – podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão. (SMOLE e DINNIZ, 2001, p. 72)

As dificuldades na leitura e no entendimento do vocabulário aparecem em textos de Matemática em geral, por consequência, os alunos apresentam enormes dúvidas e, em muitos casos, um pavor pela disciplina, embora esse não seja o único problema que gera o desinteresse no aluno. Carrasco apresenta alguns problemas de leitura e de escrita, como responsáveis por dificuldades com tarefas de Matemática e questiona as soluções que se tem nesse sentido:

> A dificuldade de ler e escrever em linguagem Matemática, onde aparece uma abundância de símbolos, impede muitas pessoas de compreenderem o conteúdo do que está escrito, de dizerem o que sabem de Matemática e, pior ainda, de fazerem Matemática. Nesse sentido, duas soluções podem ser apresentadas. A primeira consiste em explicar e escrever, em linguagem usual, os resultados matemáticos (...). Uma segunda solução seria a de ajudar as pessoas a dominarem as ferramentas da leitura, ou seja, a compreenderem o significado dos símbolos, sinais e notações. (CARRASCO, 2000, p. 144)

Desse modo, conclui-se que ler não pode ser um ato mecânico e sim um meio de compreender e interpretar o que está sendo exposto pela linguagem. Para Lester (1983), entre a forma e a linguagem dos enunciados e a tradução matemática dos problemas, os processos mentais implícitos e explícitos utilizados pelos sujeitos durante o processo de resolução abrangem o maior número possível de fatores que podem influenciar o método de resolução de problemas.

No diálogo entre o estudante e o texto, o professor tem um papel importante para criar condições de reflexão e interpretação. Para facilitar a compreensão de um problema matemático, o professor pode conduzir os alunos a reescreverem o texto numa linguagem mais simples, escrevendo com as próprias palavras o que se sabe e os possíveis caminhos para a solução; identificarem as operações, oferecendo pistas para antecipar a interpretação e identificar qual o tipo de procedimento matemático irá utilizar; efetuarem as operações; fazerem uma nova leitura para analisar se o resultado encontrado de fato soluciona o problema.

Alguns fatores podem facilitar ou dificultar a atividade de resolução de problemas, tais como: a interpretação incorreta do enunciado; a falta de entendimento da linguagem ou do contexto do enunciado; a falta de conexão entre as variáveis matemáticas com a situação do enunciado; dificuldade de representar o raciocínio matemático por meio de símbolos e, ainda, quando a tarefa proposta é inadequada.

Para Echeverría (1998) diferentemente da linguagem cotidiana formada de ambiguidades linguísticas e semânticas, a linguagem Matemática é bastante precisa e, muitas vezes, diferenciada do conhecimento dos sujeitos. O procedimento que será tomado pelo aluno para resolver um problema depende do que ele entendeu, tornando a solução, muitas vezes, impossível ou sem lógica. Ler textos matemáticos envolve usar o ponto de vista matemático para compreender textos de diversos gêneros.

Percebe-se que a dificuldade com a leitura nas aulas de Matemática é muito visível, pois é necessário que o aluno leia em linguagem materna e também na linguagem matemática. A Matemática pode ser até vista como uma linguagem estrangeira, pois para Pimm (1999), sempre que um texto matemático é lido ele poderá ser traduzido para a linguagem materna. Contudo essa tradução vem se tornando um obstáculo maior nas aulas de Matemática.

Neste sentido, vale ressaltar que é fundamental que o aluno, ao longo da vida escolar, tenha contato com problemas com excesso de dados, para que faça escolhas de que informações irá precisar; ou com falta de dados, tornando o problema impossível de ser resolvido. Estas situações representam melhor a realidade porque os problemas não são necessariamente postos com os exatos dados que serão necessários para resolvê-los, de um modo geral, e faz com que o aluno não busque simplesmente fazer alguma conta com os números fornecidos no enunciado.

# 2 **ANÁLISE COMBINATÓRIA**

Este capítulo trata de uma introdução à Análise Combinatória, apresentando uma breve descrição do seu surgimento, assim como a definição de alguns conceitos básicos que são necessários para o entendimento das questões que serão apresentadas neste trabalho.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressalta, dentre outras coisas, a relevância do pensamento combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que os docentes devem tomar ao desenvolver no aluno esse raciocínio. Segundo o PCN:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).

Atualmente, um novo documento de que indica as competências, as habilidades e aprendizagens fundamentais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da escolaridade básica – Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio- foi aprovado nos anos de 2017 e 2018. Chamado Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que tem como objetivo garantir que todos os alunos, de rede pública ou privada, de todo o país, tenham o direito de aprender um conjunto de conhecimentos e habilidades comuns, desse modo, podendo reduzir as desigualdades do sistema educacional existente no Brasil, nivelando e aumentando a qualidade do ensino.

Sobre a Análise Combinatória, o BNCC, competência 3 habilidade 10:

> Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (BNCC, EM13MAT310, 2018)

Componente da grade curricular do Ensino Médio, a Análise Combinatória tem se tornado um tema de grande dificuldade para os alunos. A maneira como são abordados os conteúdos de Análise Combinatória causa nos alunos muitas dúvidas, uma vez que eles, desde o Ensino Fundamental, olham com dificuldades os problemas de contagem.

O estudo da Análise Combinatória na Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro é realizado do primeiro bimestre do terceiro ano do Ensino Médio. Porém, de acordo com a BNCC esse conteúdo poderá ser aplicado em qualquer série do Ensino Médio (BNCC, EM13MAT310). Os conteúdos estruturantes da Proposta Curricular de Matemática nesse bimestre são: Princípio Fundamental da Contagem; Principio Aditivo da Contagem; Arranjo Simples; Permutação, Permutação com elementos repetitivos, Combinações simples.

Uma das dificuldades na aprendizagem do conteúdo é a falta associação do enunciado do problema com a vertente da análise combinatória, por exemplo, diferenciar arranjos e combinações.

> O raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades são conceitos apresentados aos alunos desde as séries iniciais do segundo ciclo do Ensino Fundamental, etapa em que tais conceitos não costumam gerar qualquer dificuldade além dos habituais para esse segmento de ensino. Dessa maneira, trata-se agora, no Ensino Médio, de partir dos conhecimentos e das habilidades anteriormente construídos e promover os aprofundamentos necessários. (SÃOPAULO, 2009a, p. 9)

O desenvolvimento do Binômio de Newton $(1 + x)^n$ é um dos primeiros problemas, ligados à Análise Combinatória, que foi estudado. O caso $n = 2$ já pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, por volta de 300 a.C. O Triângulo de Pascal (ou Triângulo Aritmético) era conhecido por Chu Shih-Chich, na China, por volta de 1300, e antes disso pelos hindus e árabes.

No século XII, o matemático hindu Báskhara (1114-1185) – o mesmo da “Fórmula de Báskhara” – já possuía conhecimentos avançados de Combinatória, sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de $n$ objetos. No século XVIII, Euler já havia publicado livros a respeito de probabilidade que utilizavam importantes conceitos de Análise Combinatória.

Os jogos de azar foram o motivo principal para o desenvolvimento da Análise Combinatória, pois havia uma necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos jogos, o que motivou o estudo dos métodos de contagem.

De maneira geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas (MORGADO et al.,2016).

Dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:

1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas

Alguns conceitos são essenciais para a análise combinatória: Princípio Fundamental da Contagem e os Agrupamentos (as Permutações, os Arranjos e as Combinações). Os conceitos matemáticos apresentados sobre o tema foram baseados nos livros: *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2, escrito por Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, 6ª edição, Rio de Janeiro, 2006(LIMA et al., 2006), *Fundamentos da Matemática Elementar*, volume 5, escrito por Gelson Iezzi e *Análise Combinatória e Probabilidade*, escrito por Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez, 1991.

## 2.1 **Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**

### 2.1.1 <u>Princípio da Adição</u>

**Exemplo 2. 1 -** Em uma sala de aula existem 22 meninas e 18 meninos. De quantas maneiras o professor pode selecionar apenas um estudante?

Veja que a escolha só poderá ser de apenas uma pessoa, ou seja, o professor irá escolher 1 dentre os 18 meninos, tendo assim 18 possibilidades para fazer a escolha OU irá escolher 1 dentre as 22 meninas, o que gera para ele 22 possibilidades para a sua escolha.

Logo, ele terá 22 + 18 = 40 possibilidades para escolher 1 aluno.

Este exemplo ilustra o Princípio Aditivo da Contagem, o qual diz:

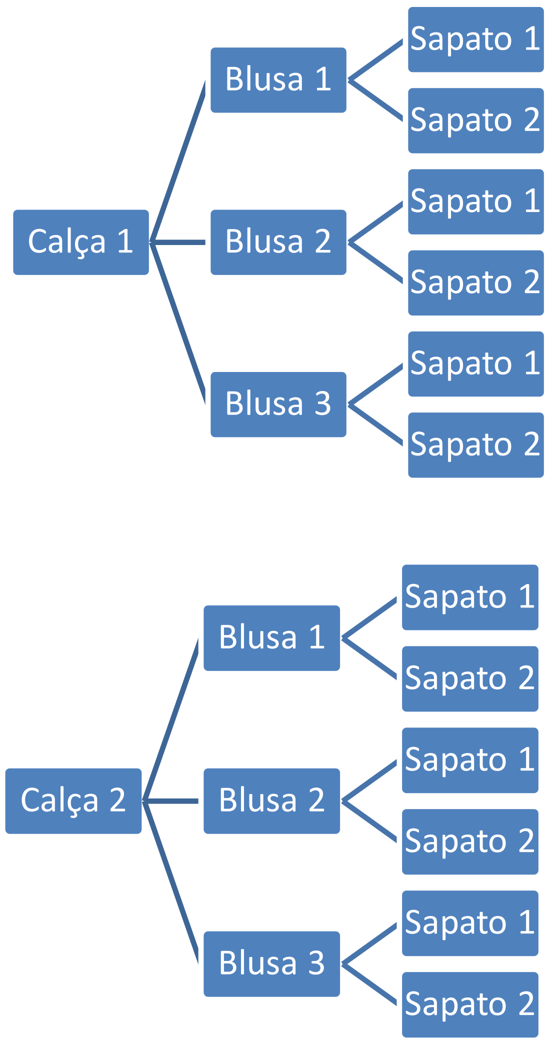
***Se A e B são dois conjuntos disjuntos (não há interseção entre eles), com m e n elementos, respectivamente, então A U B possui m+n elementos.***

2.1.2 Princípio da Multiplicação

**Exemplo 2. 2 -** De quantas maneiras Joana pode se vestir escolhendo uma entre duas calças, uma entre três blusas e um entre dois pares de sapato?

Usaremos a árvore de possibilidades para ilustrar as possibilidades.

Figura 1 - Árvore de Possibilidades




Fonte: O autor

Desse modo, para cada uma das opções de calça, há 3 opções de blusa, ou seja, 2 x 3 = 6 opções de escolha de calça e blusa e para cada uma delas, temos 2 opções de sapato. Sendo assim, temos 6 x 2 = 12 possibilidades.

O exemplo acima ilustra o Princípio Fundamental da Contagem, o qual diz:

> **Suponha que uma decisão $M_1$ possa ser tomada de $k_1$ maneiras e que, tomada a decisão $M_1$, uma outra decisão $M_2$ possa ser tomada de $k_2$ maneiras, então o número de total de maneiras a serem todas as decisões $M_1$ e $M_2$ é de $\boldsymbol{k_1 . k_2}$**

Observando que o produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de decisões independentes, isto é: se um evento contém *n* decisões, faremos:

$$\boldsymbol{k_1 . k_2 . k_3 . k_4 \ldots k_n}$$

onde $\boldsymbol{k_n}$ é o número de decisões que $\boldsymbol{M_n}$pode ser tomada.

## 2.2 **Fatorial**

Denotamos por fatorial de um número natural, o resultado do produto desse número por todos os seus antecessores até chegar ao número 1. O fatorial de um número *n* é denotado por *n!*.

$$n! = \begin{cases} 1, se, e\ somente\ se\ \ n = 0\ ou\ n = 1 \\ n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots 3.2.1, se, e\ somente\ se\ n > 1 \end{cases}$$

Por exemplo:

5!= 5.4.3.2.1=120

## 2.3 **Permutações**

Permutar é sinônimo de trocar. Nos problemas de contagem, devemos relacionar a permutação a essa noção de embaralhar. Trataremos neste trabalho, de três tipos de permutação: simples, com elementos repetidos e circulares.

### 2.3.1 Permutação Simples

**Exemplo 2.3 -** De quantos modos podemos dispor 3 pessoas numa fila do banco?

Fazendo uma releitura da pergunta percebe-se que a questão consiste em saber de quantos modos podemos trocar as pessoas de posição nessa fila.

Na tabela a seguir, consideraremos P1, P2 e P3 as três pessoas do enunciado.

Tabela 1 – Permutação das 3 pessoas

| ***1º Lugar*** | ***2º Lugar*** | ***3º Lugar*** |
|---|---|---|
| P1 | P2 | P3 |
| P1 | P3 | P2 |
| P2 | P1 | P3 |
| P2 | P3 | P1 |
| P3 | P1 | P2 |
| P3 | P2 | P1 |

Fonte: O autor

Desse modo, verificamos que para trocar as 3 pessoas de lugar existem 6 possibilidades, isto é, 3 possibilidades para o primeiro lugar na fila, 2 para o segundo lugar e 1 para o terceiro lugar. Sendo assim, pelo PFC, tem-se: 3.2.1 = 6 possibilidades.

De modo geral, de quantos modos podemos colocar *n* pessoas numa fila?

A escolha da primeira pessoa para ocupar o primeiro lugar na fila pode ser feita de *n* maneiras; a escolha da segunda pessoa poderá ser feita de *n*-1 modos; a escolha da terceira pessoa será feita de *n*-2 maneiras etc. A escolha da pessoa que ocupará a última posição na fila será de apenas 1 modo. Logo a resposta para a pergunta é: $n.(n-1).(n-2)...1 = n!$

Isto é, se temos *n* elementos distintos, indicamos por $P_n$ o número de permutações simples com *n* elementos:

$$P_n = n.(n-1).(n-2)\ldots.3.2.1$$

2.3.2 Permutação com elementos repetidos

**Exemplo 2.4 –** De quantas maneiras podemos permutar as letras da palavra ASA?

Sabemos que a letra A se repete, chamaremos $A_1$ e $A_2$ para diferenciar estas duas ocorrências da letra A.

Tabela 2 – Anagramas da palavra ASA

| | | | PALAVRA FORMADA |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | S | $A_2$ | ASA |
| $A_1$ | $A_2$ | S | AAS |
| S | $A_1$ | $A_2$ | SAA |
| S | $A_2$ | $A_1$ | SAA |
| $A_2$ | S | $A_1$ | ASA |
| $A_2$ | $A_1$ | S | AAS |

Fonte: O autor

Observe que na coluna que contém as palavras formadas após a permutação das letras da palavra ASA, formam-se *anagramas*[1] iguais pois, nesse momento, não podemos diferenciar o $A_1$ do $A_2$.

Sendo assim, podemos formar 3 anagramas: ASA, AAS e SAA.

Isto é, faremos a contagem do número de permutações das letras da palavra e dividiremos pela quantidade de permutações de letra que se repete.

[1] Palavra ou frase formada com a transposição ou inversão das letras de outra

$$\frac{3.2.1}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$$

Podemos generalizar afirmando que para permutar ***n*** itens, com ***a*** itens repetidos do tipo 1, ***b*** itens do tipo 2, ***c*** itens do tipo 3, e assim por diante, teremos:

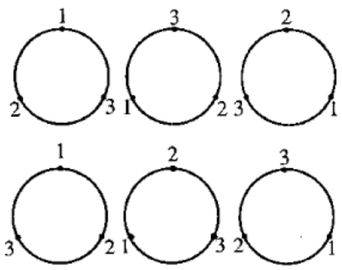
$$P_n^{a,b,c....} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!\,....}$$

2.3.3 Permutação Circular

**Exemplo 2.5 -** De quantos modos podemos colocar 3 crianças numa roda?

Vejamos a figura:

Figura 2 – Maneiras de dispor 3 crianças em uma roda




Percebe-se que algumas destas disposições se repetem, diferindo apenas por sofrerem rotação. Sendo assim, teremos apenas 2 possibilidades para dispor as 3 crianças.

Generalizando, para encontrar o número de permutações de *n* objetos em círculo, faremos a permutação de *n* e vamos dividir pelos número de elementos:

$$PC_n = \frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1).(n-2)\,....3.2.1}{n} = (n-1)!$$

## 2.4 **Arranjos**

Podemos definir, de forma mais simples, o arranjo como uma permutação de apenas alguns elementos de um dado conjunto. De modo mais formal dizemos que arranjos são agrupamentos nos quais a ordem dos elementos interfere no resultado. Agrupamentos formados com $k$ elementos, de forma que os $k$ elementos sejam distintos entre si pela **ordem** ou pela **espécie**. Os arranjos podem ser simples ou com repetição.

### 2.4.1 Arranjo Simples

**Exemplo 2.6 –** De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que a primeira ganhe um carro, a segunda ganhe uma moto e a terceira ganhe um patinete?

Teremos 10 opções para quem receberá o carro. Para cada uma delas, teremos 9 opções para quem receberá a moto (qualquer uma delas menos quem já ganhou o carro). Para cada uma dessas 10 x 9 = 90 opções, ainda temos 8 opções para quem receberá o patinete (qualquer uma das 10 menos quem recebeu o carro e quem recebeu a moto).

Temos, assim: 10 x 9 x 8 = 720 maneiras distintas.

No arranjo simples, não ocorre repetição de elementos em cada grupo de $p$ elementos. Considerando um conjunto com $n$ elementos, chama-se arranjo simples de taxa $p$ todo agrupamento de $p$ elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos.

Vamos considerar, por exemplo, dois agrupamentos dos números divisíveis por 3, com 4 algarismos distintos, formados com elementos do conjunto A= {1,2,3,4,5,6}.

Veja que os números 1245 e 5124 são divisíveis por 3 e tem 4 algarismos do conjunto A. Utilizamos os mesmos algarismos para construir esses dois números, porém como estão dispostos em ordens diferentes, são dois números diferentes. Isso é um exemplo de arranjo simples.

De modo geral, se desejamos permutar *p* elementos de um dado conjunto que possui *n* elementos no total, para escolher o primeiro elemento teremos *n* opções, para o segundo temos (*n-1*)*,* para o terceiro (*n-2*)*,* ao chegarmos no *p-ésimo* elemento teremos (*n-p+1*) opções disponíveis. Assim para calcular o arranjo de *n* elementos escolhidos *p* a *p* podemos fazer uso da seguinte fórmula:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

onde *n* é a quantidade de elementos de um conjunto e *p* é o número de elementos do agrupamento.

2.4.2 Arranjo com Repetição

**Exemplo 2.7 –** Numa pequena cidade as placas dos carros são constituídas por 7 símbolos. Qual o total de placas de carro que podem ser construídas, sendo os 3 primeiros símbolos compostos por letras e os 4 últimos por dígitos?

Considerando-se o alfabeto com 26 letras, podemos escolher os 3 primeiros símbolos usando 26 maneiras diferentes para cada um e os 4 últimos utilizando 10 opções de algarismos para cada posição.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos:

Para as letras: $26.26.26$

Para os algarismos: $10.10.10.10$

Logo, $26.26.26.10.10.10.10 = 26^3.10^4 = 175760000$ placas.

Caso sejam permitidas repetições de elementos, podemos na primeira posição escolher *n* elementos, na segunda posição também *n* elementos, e assim sucessivamente até a última posição do agrupamento desejado. Logo, o número de arranjos com repetição de *n* elementos tomados *p* a *p*, será denotado por:

$$AR = \underbrace{n.n.n.n.n.\ldots n}_{p\ vezes} = n^p$$

## 2.5 **Combinação**

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está evidentemente ligado à noção de escolher subconjuntos. Combinações são agrupamentos de *p* elementos, de forma que os *p* elementos sejam distintos entre si apenas pela **espécie**. A posição dos elementos não importa e não os distingue. Existem dois tipos: a combinação simples e a combinação completa.

### 2.5.1 Combinação Simples

**Exemplo 2.8 –** De quantas maneiras distintas, em um grupo de 10 pessoas podemos escolher 3 delas para que cada uma delas ganhe um carro (sendo os três carros idênticos)?

Representaremos essas pessoas por A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Teremos 10 opções para a primeira pessoa escolhida. Para cada uma delas, teremos 9 opções para a segunda (qualquer uma delas menos quem já foi escolhido). Para cada uma dessas 10 x 9 = 90 opções, ainda temos 8 opções para a terceira (qualquer uma das 10 menos as duas já selecionadas), resultando assim em 10 x 9 x 8 = 720 casos. Porém, as três pessoas receberão o mesmo prêmio, com isso, a ordem de seleção não representa casos distintos. Note que as pessoas A, B e C para serem as escolhidas foi contado seis vezes: ABC, ACB, BCA, BAC, CAB e CBA, o que aconteceu também com todas as outras opções de três pessoas escolhidas. Para corrigir esse erro, devemos dividir o resultado anteriormente obtido por 3!.

Temos, assim: $\frac{10.9.8}{3!} = \frac{720}{3.2.1} = \frac{720}{6} = 120$ maneiras distintas.

Combinações simples de ***n*** elementos distintos tomados ***p*** a ***p*** são subconjuntos formados por ***k*** elementos distintos escolhidos entre os ***n*** elementos dados. Duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, *não importando a ordem* em que os elementos são colocados.

Podemos generalizar que para escolher *p* itens entre *n* itens distintos, sem importar a ordem de escolha, faremos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

2.5.2 Combinação Completa

**Exemplo 2.9 –** De quantos modos é possível comprar 3 sorvetes em uma loja que os oferece em 4 sabores?

A solução para esse problema não é $C_{4,3}$. Seria esta a situação se ele afirmasse que deveríamos escolher 3 sorvetes diferentes, sabendo que temos a nossa disposição 4 tipos diferentes. Nesse caso, de 4 elementos diferentes, deveríamos escolher 3 desses elementos (sem que a ordem de escolha importe) e isso pode ser feito de $C_{4,3} = 4$ modos.

A resposta para esse caso é $CR_{4,3}$, isto é, de 4 tipos de sabores diferentes queremos escolher 3 tipos de sorvetes não, necessariamente, distintos.

Suponha que temos a nossa disposição 4 sabores, a saber: Baunilha (B), Chocolate (C), Morango (M) e Flocos (F).

Podemos escolher 3 tipos da seguinte forma:

Tabela 3 – Maneiras de escolher 3 sabores

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| BBB | BBC | CCB | MMB | FFB |
| BCM | CCC | BBM | CCM | MMC |
| FFC | BCM | MMM | BBF | CCF |
| MMF | FFM | BMF | FFF | CMF |

Fonte: O autor

Essas são as $CR_{4,3} = 20$ combinações completas possíveis para esse caso.

Outro modo de pensar de resolver problemas de combinação completa é usando uma equação. Para facilitar a compreensão da montagem da equação para esse tipo de problema, voltaremos com o **Exemplo 2.9.**

Seja $x_i$ a quantidade de sorvetes que compraremos de cada sabor, com $x_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 4$, isto é: $x_1$ é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor 1, $x_2$ é a quantidade que vamos comprar de sorvete do sabor 2, e assim em diante.

Mas nesse caso, temos que comprar apenas 3 sorvetes, logo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

É possível interpretar a combinação completa de dois modos:

1. $CR_{n,p}$ é o número de todas as maneiras de escolher p objetos, distintos ou não, entre os *n* objetos distintos dados.
2. $CR_{n,p}$ é o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$

Iremos calcular a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$ para resolver o problema do sorvete e no final generalizar para $CR_{n,p}$. Usaremos um método bola-traço para mostrar algumas possíveis soluções, onde: cada bola representa 1 unidade no valor da incógnita e cada traço será usado para separar duas incógnitas, veja Tabela 2.4 a seguir.

Tabela 4 – Duas possíveis soluções da equação usando bola-traço

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Possível Compra | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Bola-Traço | ● \| | ● \| | \| | ● |
| Possível Compra | 2 | 0 | 1 | 0 |
| Bola-Traço | ● ● \| | \| | ● \| | |

Fonte: O autor

Uma representação será formada arrumando em fila 3 bolas e 3 traços. E o número de modos para fazer isso é usando permutação com repetição:

$$P_{3+3}^{3,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = C_{6,3}$$

Desse modo, $CR_{4,3} = C_{6,3} = 20.$

Podemos generalizar para $CR_{n,p}$, ou seja, para encontrar o número de soluções inteiras e não negativas de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$ teríamos ***p*** bolas e ***n-1*** traços.

$$CR_{n,p} = P_{p+n-1}^{p,n-1} = \frac{(p+n-1)!}{p!\,(n-1)!} = C_{n+p-1,p}$$

## 2.6 **Número Binomial**

Número binomial é todo número da forma:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \quad , \quad (n, p \in N \ e \ 0 \leq p \leq n)$$

Para p = 0, teremos:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Para p = 1, teremos:

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Para p = n, teremos:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

## 2.7 **Triângulo de Pascal**

Blaise Pascal (1623-1662) foi um matemático, físico, filósofo e escritor francês. O nome de Pascal está também associado a uma disposição triangular de números que se reveste de propriedades, o Triangulo de Pascal. Este triângulo aritmético é formado por números que possuem diversas relações entre si.

A disposição ordenada dos números binomiais, como na tabela abaixo, recebe o nome de **Triângulo de Pascal**.

Figura 3 – Triângulo de Pascal na forma binomial

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\binom{k}{0} & \binom{k}{1} & & & & & \binom{k}{k} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Fonte: Fundamentos da Matemática, Gelson Iezzi, vol 5, 1977

Observe que cada linha do triângulo possui um número binomial a mais que a linha antecessora, de modo que toda linha *n* possui *n+1* elementos, sempre aplicando a primeira linha como sendo a linha 0.

Resolvendo cada número binomial acima, podemos substituí-los e obter um outro formato para o Triângulo de Pascal.

Figura 4 – Triângulo de Pascal desenvolvido

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Fonte: Fundamentos da Matemática, Gelson Iezzi, vol 5, 1977.

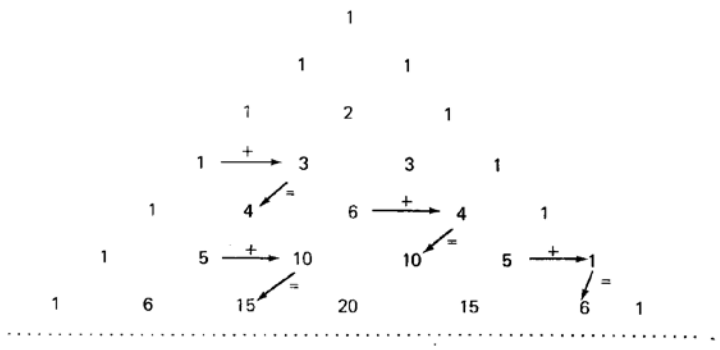
Algumas propriedades do triângulo permitem construir com facilidade a linha seguinte. As principais propriedades são:

1. O primeiro elemento de cada linha vale 1, pois quaisquer que seja a linha $\binom{n}{0} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2. O último elemento de cada linha vale 1, pois quaisquer que seja a linha $\binom{n}{n} = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele. Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel e afirma que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}, \qquad n \geq 2$$

Figura 5 – Relação de Stifel




Fonte: Fundamentos da Matemática, Gelson Iezzi, vol 5, 1977

4. Numa linha, dois números binomiais equidistantes dos extremos, são iguais.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

# 3 A EXPERIÊNCIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM SALA DE AULA

O trabalho que será descrito foi realizado em uma turma do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Walter Orlandini, em São Gonçalo, na região metropolitana do Rio de Janeiro, em 2018 com 30 alunos, ao longo do 1º Bimestre de 2018.

Resolver problemas matemáticos sempre foi uma enorme dificuldade para os alunos, seja por pela interpretação de textos ou por falta de conhecimentos matemáticos. Para iniciar de forma simples a ideia de resolver um problema usamos a heurística de Pólya. Seguindo esta premissa, apresentei no quadro negro um resumo baseado neste teórico, conforme ANEXO.

Introduzi o conteúdo de Análise Combinatória, exigido do Currículo Mínimo e muito cobrado nas provas externas, como ENEM, sem definir conceitos e fórmulas propus problemas e deixei que buscassem soluções sozinhos.

Perguntar a um aluno do 3º ano do Ensino Médio se ele sabe contar é uma coisa bem fácil de saber a resposta. Ao fazer a pergunta, muitos deles riram e acharam que era brincadeira. Mesmo assim responderam enfaticamente que sim. Desse modo, apresentei quatro problemas inicias sobre Análise Combinatória que envolviam contagem e sugeri que buscassem resolvê-los.

**1) Quantos números formados por algarismos distintos existem entre 10 e 1000?**

**2) De quantas maneiras dispor 4 alunos na primeira fila de uma determinada sala de aula com 4 cadeiras?**

**3) Num grupo de 8 pessoas, de quantas maneiras podemos escolher 4 delas?**

**4) De quantas maneiras podemos arrumar em uma prateleira 4 livros de Matemática e 3 de Física, de modo que os livros de uma mesma matéria estejam sempre juntos?**

Após um tempo realizando alguns cálculos, procurando resolver de forma intuitiva ou consultando amigos, obtive os seguintes resultados.

Tabela 5 - Total de acertos e erros

| Pergunta | Acertos | Erros |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 28 |
| 2 | 21 | 9 |
| 3 | 12 | 18 |
| 4 | 1 | 29 |
| Total | 36 | 84 |

Fonte: O autor

Observamos, desse modo, que o número total de erros é bem superior ao total de acertos. A ideia inicial é apenas despertar a vontade de resolver e a curiosidade, além de proporcionar a oportunidade de desenvolver maneiras próprias de resolver problemas simples, elaborando conjecturas.

A partir desse momento, ao longo do bimestre, o conteúdo de Análise Combinatória foi aplicado com as devidas definições e exemplificações. Com objetivo de obter uma comparação entre os resultados, propus novamente os quatro problemas aos alunos. Agora eles já possuíam o recurso das fórmulas e poderiam usar ou não, para a resolução das questões.

A tabela a seguir foi formulada no intuito de estabelecer uma relação entre a resolução com o uso de fórmulas ou com o uso de outro algoritmo neste segundo momento em que os quatro problemas foram reapresentados aos alunos.

Tabela 6 - Total de acertos e erros variando os métodos

| | **ACERTOS** | | **ERROS** | |
|---|---|---|---|---|
| Problema | Fórmula | Outro Método | Fórmula | Outro Método |
| 1 | 4 | 14 | 7 | 5 |
| 2 | 10 | 17 | 3 | 0 |
| 3 | 5 | 15 | 8 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 6 | 21 |
| Total | 20 | 48 | 24 | 28 |

Fonte: O autor

Analisando a **Tabela 5**, verifica-se que há um pouco de equilíbrio entre acertos e erros apenas em uma das perguntas, a 3ª. Nas questões 1 e 4, houve um maior percentual de erros e na questão 2, observa-se um maior percentual de acertos entre as 4 perguntas.

A **Tabela 6** foi organizada de maneira a evidenciar os acertos e erros dos alunos que usaram a fórmula ou não para obter as respostas dadas e dispostas na **Tabela 5**. Verificamos assim que das 44 tentativas usando fórmulas para resolver as questões, 20 acertaram e 24 erraram as respostas. Usando outro método para resolver cada questão, tivemos um total de 76 tentativas, o que gerou 48 de acertos e 28 de erros.

Observamos, desse modo, que há um equilíbrio entre os erros e acertos com o uso de fórmulas e uma grande diferença quando é utilizado outro método de resolução. Vale ressaltar que não é possível concluir que o uso da fórmula para resolver problemas de Análise Combinatória é o mais correto ou proveitoso, visto que o número de acertos usando outro método foi sempre maior (ver **Tabela 6**).

Nos dois métodos observados (uso de fórmula ou algoritmo), detectamos vários tipos de erros, vejamos alguns:

1. Não utilização Princípio Multiplicativo.

2. Não perceber que a ordem dos elementos nos agrupamentos a serem formados poderá produzir agrupamentos distintos.

3. Não possuir habilidades no desenvolvimento de diferentes estratégias de resolução.

4. Incompreensão do enunciado da situação-problema apresentada, isto é, a falta de interpretação textual.

5. Uso incorreto de fórmulas, por desconhecimento da distinção básica entre arranjos e combinações.

Outra observação importante é a de que a maioria dos alunos, mesmo conhecendo as fórmulas, decidiu utilizar outras formas de resolver os problemas, o que pode significar que não se apropriaram da teoria exposta.

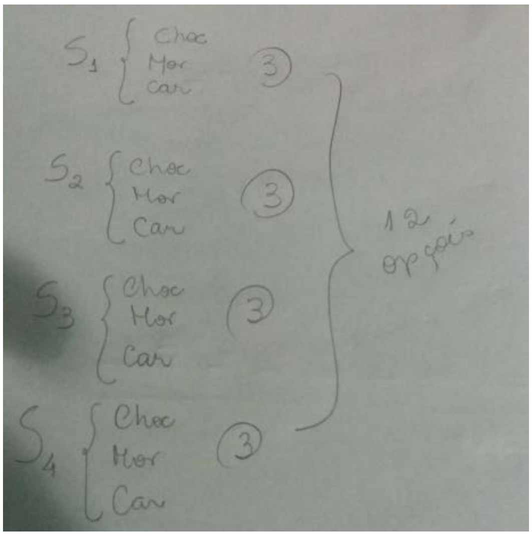
Após está abordagem inicial, foram propostos dez problemas clássicos, encontrados nas fontes geralmente acessadas pelos professores de Matemática de modo geral. Nas aulas posteriores os problemas eram propostos e os alunos estimulados a elaborar uma resolução (seguindo a ideia de Pólya) da forma que achassem mais conveniente, sem a minha interferência.

Em seguida, discutíamos as soluções propostas, repetindo esse processo para cada uma questão.

**QUESTÃO 3.1 (Adaptada – Temática e Cálculo disponível em http://tematicaecalculo.blogspot.com/2018/02/combinatoria.html) - Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate, de morango ou de caramelo. Se o sorvete pode ser escolhido entre 4 sabores diferentes, quantas são as opções para o cliente escolher a taça com um sabor de sorvete e uma cobertura?**

Muitos alunos tomaram como método de resolução a Árvore de possiblidades, como na figura a seguir.

Figura 6 - Resolução de um dos alunos




A construção de uma representação visual da situação descrita como, por exemplo, uma tabela ou um diagrama de possibilidades, permite que o aluno compreenda o princípio multiplicativo atribuindo significado ao produto que fornece o total de opções.

Desse modo, os alunos, cada um a seu tempo, passaram a substituir a construção de árvores por uma resolução aritmética, pois perceberam que no caso a multiplicação resolve o problema à medida que representa toda a estrutura do raciocínio empregado no processo.

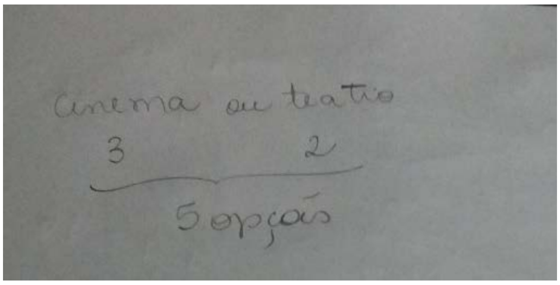
A solução da questão por PFC é 4.3 = 12 opções.

**QUESTÃO 3.2 (OBMEP - Portal do Saber disponível em: http://portaldosaber.obmep.org.br) - Supondo que existam cinemas e teatros**

**em sua cidade, e que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro diferentes para passarem no próximo sábado, e que você tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento, quantos são os programas que você pode fazer neste sábado?**

Os alunos resolveram de forma bem rápida essa questão percebendo que o método aditivo era o adequado e não o multiplicativo.

Figura 7 - Resolução Correta de um dos alunos

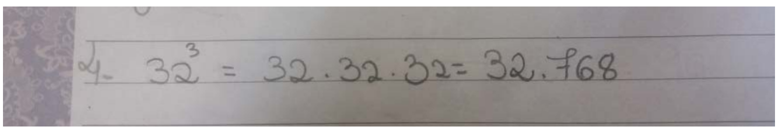



Como a pessoa só poderá escolher uma opção, cinema OU teatro, pelo princípio aditivo teremos 3+2 = 5 opções.

**QUESTÃO 3.3 (Tempo de Matemática disponível em http://tempodematematica.blogspot.com/2015/02/exercicios-sobre-fatorial-e-principio.html) - Suponha que 32 seleções disputem um campeonato mundial, sem divisão de chaves. Quantas são as possibilidades matemáticas de classificação dos três primeiros lugares?**

A Figura 8, a seguir, mostra uma das respostas obtidas. É perceptível que o aluno não associou o problema à realidade e vinculou a solução à busca pela palavra DISTINTOS no enunciado.

Figura 8 - Resolução incorreta de um dos alunos



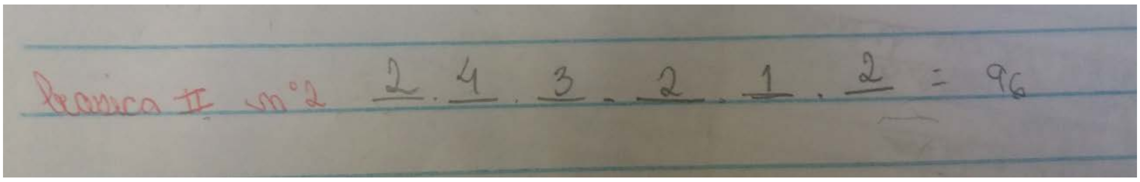
A solução correta seria: 32.31.30 = 29760 possibilidades, uma vez que para cada time deverá ser classificado uma só vez.

**QUESTÃO 3.4 (UNIFOR-CE – Exercícios Brasil Escola disponível em https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-fatorial-principio-fundamental-contagem.htm) - Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para a foto?**

Uma solução encontrada por um aluno foi: 2.4.3.2.1.2 = 96 poses distintas.

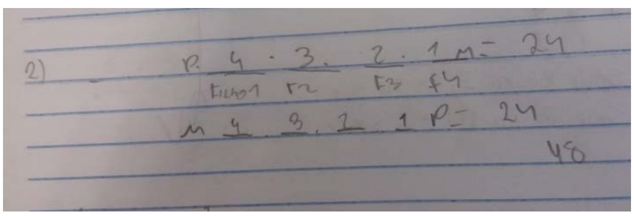
Observe que ele considerou 2 possibilidades para as posições dos pais (2 à direita e 2 à esquerda). Ou seja, ele não percebeu que para escolher a primeira extremidade tem-se 2 opções (mãe ou pai) porém, para escolher a outra extremidade, teremos apenas 1 (uma vez que foi escolhida a primeira extremidade).

Figura 9 - Resolução de um dos alunos




Vale ressaltar que muitos alunos acertaram essa questão. Outra resolução apresentada é mostrada na Figura 10.

Figura 10 - Resolução de um dos alunos



**QUESTÃO 3.5 (Unesp 2003 – Tutor Brasil disponível em https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=7516) - Dispomos de 4 cores distintas e temos que colorir o mapa mostrado na figura com os países**

**P, Q, R e S, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.**

| | |
|---|---|
| P | Q |
| R | S |

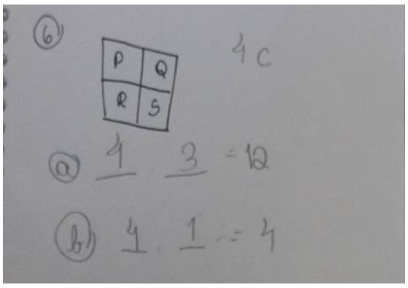
**Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:**

**a) os países P e S forem coloridos com cores distintas?**

**b) os países P e S forem coloridos com a mesma cor?**

Muitos alunos não resolveram a questão sem considerar a importância dos países P e S, ou seja, para preencher com as possibilidades era necessário começar com as possibilidades para esses dois países.

Figura 11 - Resolução de um dos alunos




Solução correta item a: Pintando os países na sequência **PSQR** teremos: 4.1.3.3 = 36 maneiras de colorir os países tendo P e S cores iguais.

Solução correta item b: Pintando os países na sequência **PSQR** teremos: 4.3.2.2 = 48 maneiras de colorir os países tendo P e S cores distintas.

**QUESTÃO 3.6 (Diniz - disponível em http://www.professordiniz.com/2/3) - Um jantar constará de três partes: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas maneiras distintas ele poderá ser composto, se há como opções oito entradas, cinco pratos principais e quatro sobremesas?**

**a) 160**

**b) 150**

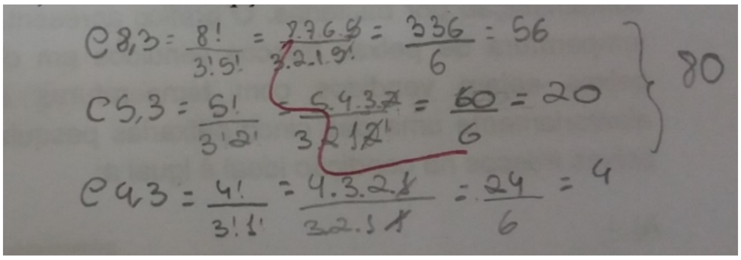
**c) 120**

**d) 80**

**e) 17**

A resolução esperada para esta questão utilizaria o PFC. Porém, um dos alunos respondeu usando um conjunto de combinações. Isto pode nos levar a concluir que este aluno não compreendeu o conceito de combinação.

Figura 12 - Resolução de um dos alunos




Solução da questão usando PFC é 8.5.4 = 160.

**QUESTÃO 3.7 (OSEC-SP – Blog da Matemática disponível em http://matematicanoarsenio.blogspot.com/2013/04/exercicio-01.html) - Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência (1ª, 2ª e 3ª opções). Então, o número de possível de formas de optar é:**

**a) 6.720**

**b) 336**

**c) 520**

**d) 120**

**e) 56**

A opção correta dessa questão é 336. Um número considerável de alunos fez corretamente, usando PFC ou a fórmula de Arranjo. Seguem as resoluções de dois alunos.

Figura 13 - Resolução de um dos alunos

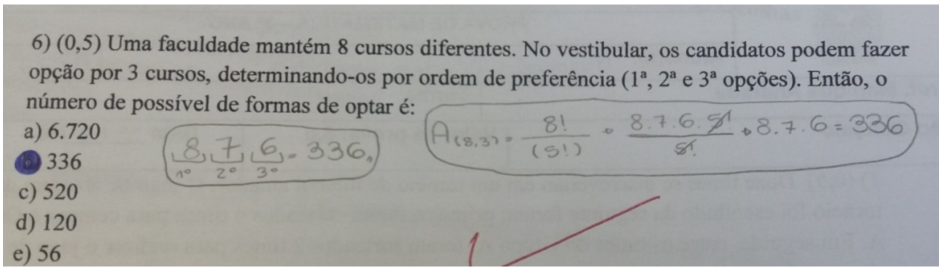
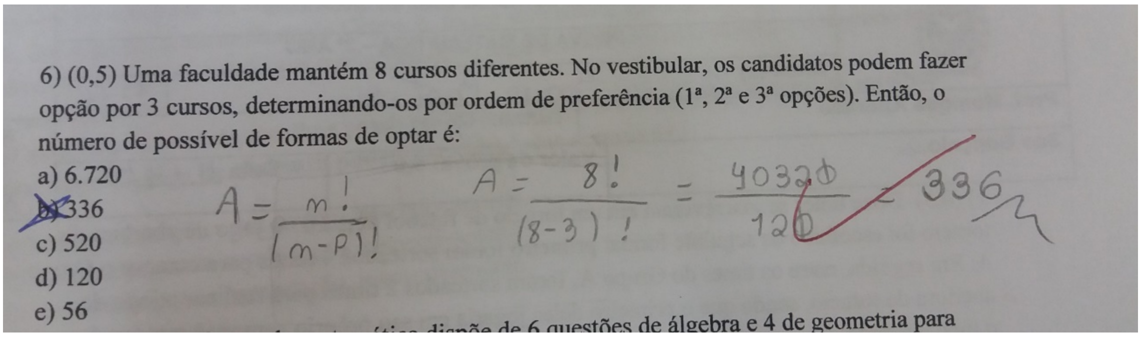



Figura 14 - Resolução de um dos alunos




**QUESTÃO 3.8 (UFRGS-RS modificada – Tutor Brasil disponível em https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=25986) - Duas retas paralelas, r e s, contém 4 e 6 pontos respectivamente. Quantos triângulos podem ser formados?**

Muitos alunos erraram essa questão. Diversos fatores levaram ao erro, vamos citar os mais observados:

- Construção de todos os triângulos de forma manual, como na Figura 15
- Falta de percepção de que era necessário um vértice na reta **r** e por consequência, dois vértices na reta **s**, ou dois em **s** e um em **r.**
- Perceber o uso de combinação, mas não associar à situação real, construindo triângulos com três vértices na mesma reta, como na Figura 16.

Figura 15 - Resolução de um dos alunos

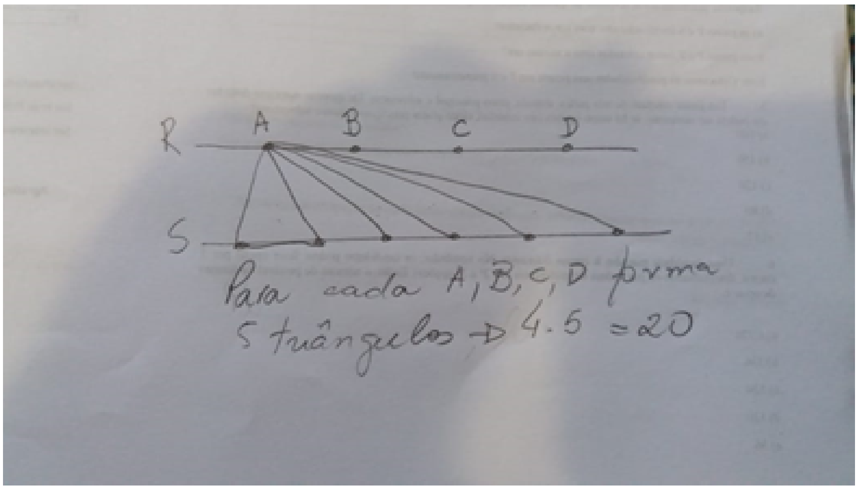



Figura 16 - Resolução de um dos alunos

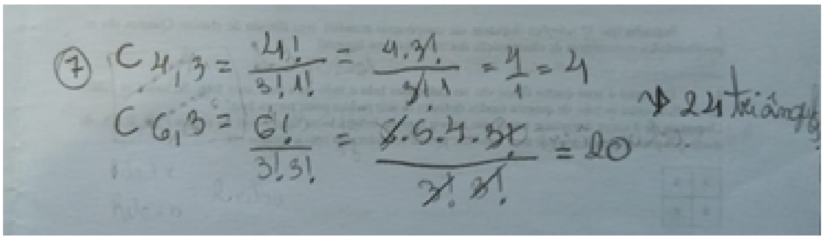
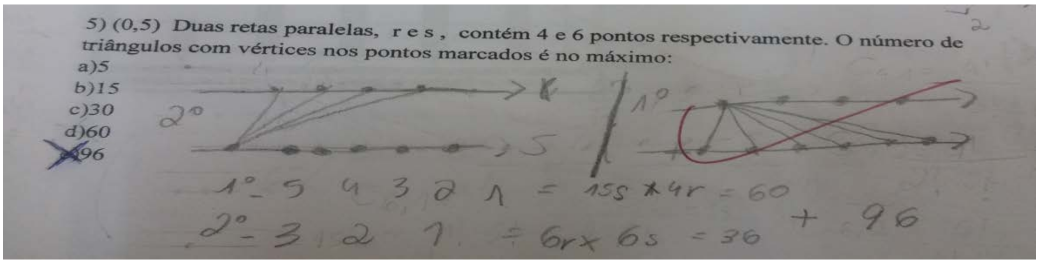



Figura 17 - Resolução correta de um dos alunos




Esperava-se que para solucionar esse problema, o aluno utilizasse PFC ou Combinação, separando o problema em dois casos. No primeiro caso, considerando um ponto da reta r e dois pontos da reta s e, no segundo caso, dois pontos da reta r e um da reta s.

A resposta da questão é 96.

**QUESTÃO 3.9 (Tadeu - disponível em http://professorwaltertadeu.mat.br/) - Diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos do polígono. Se um polígono convexo tem 9 lados, qual é o seu número total de diagonais?**

Nessa questão, o que gerou erro na solução da maioria dos alunos foi a falta de conexão com o que foi pedido no enunciado. O aluno percebeu o fato de que, para construir uma diagonal, era necessário escolher 2 dos 9 pontos do polígono, contudo, não fez uma análise completa na figura levando em consideração que algumas dessas combinações geravam os lados do polígono (veja Figura 18), sendo assim, o número de diagonais seria obtido com as combinações de 9 pontos escolhidos de 2 a 2 subtraído do número de lados do polígono, mostrado na Figura 19.

Figura 18 - Resolução de um dos alunos

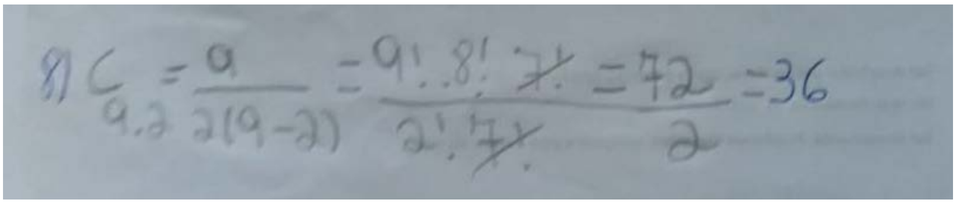
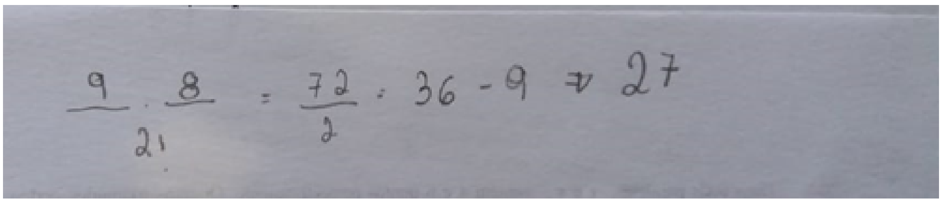


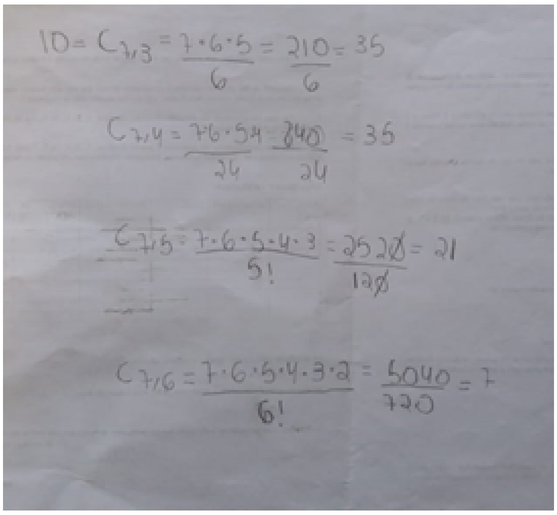

Figura 19 - Resolução correta de um dos alunos




**QUESTÃO 3.10 (Tadeu – Modificada disponível em http://professorwaltertadeu.mat.br/) - Em uma circunferência são marcados 7 pontos distintos: A, B, C, D, E, F e G. Com estes pontos, quantas cordas podem ser traçadas? Quantos triângulos, quadrados, pentágonos e heptágonos que podem ser formados?**

Nessa questão, os alunos entenderam que uma corda na circunferência é qualquer segmento que une dois pontos distintos. Além disso, para formar triângulo, por exemplo, basta encontrar o número de combinações do número de pontos da circunferência, tomados 3 a 3. Desta forma, fizeram o mesmo para os demais polígonos e resolveram de forma rápida a questão.

Figura 20 - Resolução correta de um dos alunos




Para formar cada item pedido é necessário fazer:

$$C_{7,2} = 21\ cordas$$

$$C_{7,3} = 35\ triângulos$$

$$C_{7,4} = 35\ quadradriláteros$$

$$C_{7,5} = 21\ pentágonos$$

$$C_{7,7} = 1\ heptágono$$

Ao introduzir o conteúdo de Análise Combinatória da forma descrita, o objetivo era utilizar a Resolução de Problemas como alternativa ao método tradicional.

Após aplicar e analisar as questões juntamente com os alunos, percebi que ainda existiam muitas dúvidas e erros em relação ao conteúdo aplicado. Algumas questões de Análise Combinatória não se aproximam da realidade do aluno, o que faz com que o discente não consiga associar sua resposta ao enunciado da questão. Então, com as questões que comumente temos acesso e com a resolução feita da forma tradicional, eu não alcançaria meu objetivo. Os problemas que encontramos na bibliografia tradicional ou na internet não contemplam o que sugerem tantos autores sobre o tema, até porque as questões são elaboradas sem considerar um significado real para meus alunos. Então percebi que era necessário descrever este processo reescrever o que encontramos para, de fato, utilizar a Resolução de Problemas, o que, até então, eu acreditava estar fazendo corretamente. Além disso, associar esta mudança no enunciado ao uso de uma ferramenta tecnológica que tornasse o processo de experimentação possível, parece ser uma construção mais completa deste processo.

# 4 A LOUSA DIGITAL

É fato que a tecnologia avançou e está presente no dia a dia de todos, inovações são vistas de forma frequente e muito rapidamente, sendo assim a escola não pode ignorar esse fato. Simplesmente, a instituição escolar deve acompanhar e andar lado a lado com esse desenvolvimento, pois não há possibilidade de continuar com o mesmo modelo de ensino numa época cheia de avanços tecnológicos, isto é, não é possível fechar os olhos para as descobertas, uma vez que essas podem contribuir grandemente para a melhor qualidade de ensino, se utilizadas da melhor forma.

Analisando hoje a nossa realidade escolar, verificamos que existe um distanciamento enorme entre o ensino e o uso de tecnologias. Mudar esta realidade exige esforço e políticas públicas para esta finalidade

Isto é nítido nos escritos de Elon Lages Lima ao trazer o exemplo do Japão

> Um dos países do mundo onde o número de computadores por habitante é o mais alto. Entretanto, apesar dos esforços das autoridades, a utilização de computadores no ensino da Matemática nas escolas japonesas teve que enfrentar resistência e demora pois a maioria dos professores não estava preparada e relutava em preparar-se para mudar seus métodos tradicionais de ensino. Essa demora, afinal de contas resultou benéfica pois hoje os japoneses parecem convencidos de que o uso de computadores no ensino da Matemática e de suas aplicações é muito mais eficiente para alunos a partir de 15 ou 16 anos, em cujos currículos tal uso realmente se justifica. (Lima, 2001)

Se no Japão, sociedade extremamente desenvolvida tecnologicamente, inserir eletrônicos em sala de aula foi, num primeiro momento, rejeitada pelos educadores, pois não se viam preparados para a utilização dos mesmos, o que vamos deduzir aqui no Brasil?

Sem dúvidas ainda não estamos preparados para essa evolução, mas é necessário que busquemos esse preparo. Não dá mais para justificar o não uso de tecnologias em sala de aula como algo que atrapalharia o andamento das aulas, pois isso não é verdade. Utilizar novas tecnologias favorece o desenvolvimento da aula à medida que desperta a curiosidade e o faz experimentar. Simão Neto faz a seguinte reflexão:

> A escola poderia aprender com essas novas formas comunicativas e implementar modelos educacionais que fossem igualmente descentralizados, participativos, colaborativos, permeados por múltiplos estímulos e que permitissem o acesso ampliado à informação e aos meios de produção do novo e de livre circulação das ideias. Uma escola que não tome o aluno como espectador passivo, mas sim como essa nova figura que ainda não foi nem batizada: o espectador que quer colocar a mão, participar, criar, modificar. [...] Os alunos que chegam hoje na escola não aceitam mais as velhas aulas expositivas “monomídia”, pouco interativas e pobres de estímulos. Esperam da escola o mesmo grau de envolvimento das mídias com as quais convivem fora dela. (Simão Neto apud Nakashima e Amaral, 2010, p. 390)

O computador é uma das tecnologias de informação e comunicação que mais faz parte do dia a dia da comunidade escolar, seja na escola, nos laboratórios de informática ou na casa dos alunos. E isso deveria fazer com que os professores buscassem inseri-lo em sua prática de ensino.

Kenski relata:

> O professor deve alterar seus procedimentos didáticos e a sua própria postura, ou seja, é preciso que ele se posicione não como o detentor do monopólio do saber, mas como um parceiro, um pedagogo, no sentido clássico do termo, que encaminhe e oriente o aluno diante das múltiplas possibilidades e formas de se alcançar o conhecimento e de se relacionar com ele. (Kenski apud Nakashima e Amaral,2006, p.35)

Diante disso, é notório que o papel da escola é apresentar aos docentes essas novas tendências, dispositivos e tecnologias surgidas, mas para isso, ela deve capacitar e investir nos professores, com o objetivo de auxiliar ao profissional a difícil tarefa de ensinar.

Ainda segundo Kenski

> As novas tecnologias de informação e comunicação, caracterizadas como midiáticas, são, portanto, mais do que simples suportes. Elas interferem em nosso modo de pensar, sentir, agir, de nos relacionarmos socialmente e adquirirmos conhecimentos. Criam uma nova cultura e um novo modelo de sociedade. (Kenski apud Nakashima e Amaral,2006)

Chegamos em um novo tempo com tecnologias que nos dão interatividade instantânea, é necessário sair da zona de conforto. O tempo passou, o simples: copia, explica e repete já não faz mais efeito. E a escola não pode ficar nesse universo, nesse círculo vicioso, que não faz mais efeito aos alunos.

Como afirma Rubem Alves,

> É muito fácil continuar a repetir as rotinas, fazer as coisas como têm sido feitas, como todo mundo faz. As rotinas e repetições têm um curioso efeito sobre o pensamento: elas o paralisam. A nossa estupidez e preguiça nos levam a acreditar que aquilo que sempre foi feito de um certo jeito deve ser o jeito certo de fazer. (Alves, 2004, p. 77-78)

Pensando nisso, usar a Lousa Digital no ambiente escolar para o ensino da matemática pode trazer uma real interatividade entre professores e alunos.

O objetivo do uso desse dispositivo é melhorar o ensino/aprendizado permitindo que ele seja mais dinâmico, o que proporciona maior construção do conhecimento, minimiza o tempo e, por consequência, é uma abordagem diferente do que os alunos estão acostumados.

Pavanelo se reporta ao ensino da Matemática neste modelo:

> A prática pedagógica presente nas aulas de matemática reserva ao aluno um papel passivo: a ele cabe apenas ouvir e registrar o que o professor expõe; efetuar exercícios semelhantes ao resolvido na lousa pelo mestre; memorizar regras, das quais nem sempre entende o significado, para a resolução de questões que não despertam seu interesse e que, em geral admitem uma única solução: responder corretamente questões propostas nas provas. (Pavanelo, 1994, p. 7)

Desse modo, busca-se aprender como trabalhar com a Lousa Digital e toda sua gama de atrativos. Como trazer para o ambiente de sala de aula os conteúdos de forma mais abrangente, proporcionando agilidade, instigando ainda mais a capacidade do aluno e aguçando exponencialmente sua busca pela participação em aula, na construção do conhecimento por meio da utilização deste dispositivo.

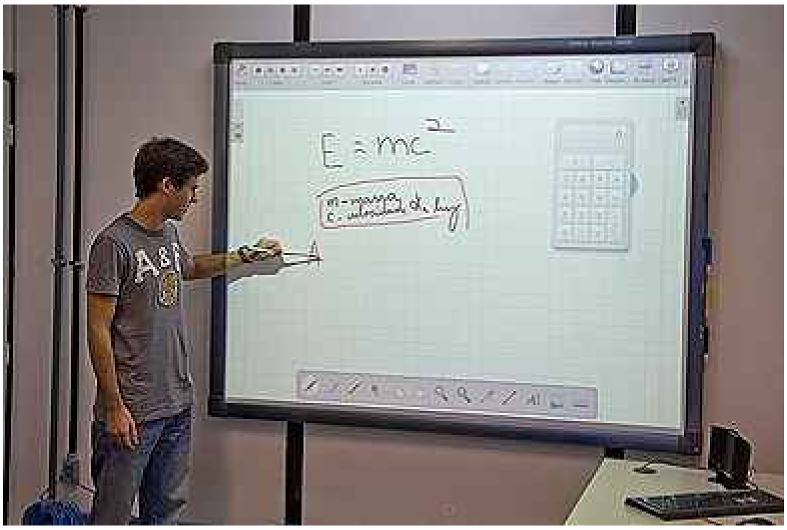
## 4.1 **Surgimento da Lousa Digital**

Criada e desenvolvida por Dave Martin, a primeira Lousa Digital (LD) surgiu em 1991, e foi chamada de SmartBoard, depois disso outras marcas e modelos foram surgindo, promovendo uma corrida tecnológica, objetivando vários segmentos, porém com maior foco na educação.

Há um pouco mais de uma década os professores se espantavam com a vinda dos computadores nas escolas, logo após, o projetor multimídia e internet.

Hoje, de forma rápida e abrupta, os aparelhos móveis (celulares, tablets e notebooks) e, por fim, a lousa digital.

Figura 20 – Um modelo de Lousa Digital




Fonte: www.correiobraziliense.com.br

Em muitas escolas da rede privada já existe pelo menos uma lousa digital. A LD na rede pública está chegando com passos lentos, visto que é necessário um investimento por parte da gestão pública, e nem sempre isso acontece.

Vale ressaltar que, ao inserir a LD nas salas de aula, é fundamental que haja a formação do professor para isso. Sem essas ações conjuntas, a LD passa a ser somente um projetor.

De forma simples podemos dizer que uma Lousa Digital é uma tela onde são projetadas imagens com as quais há algumas possibilidades de interação entre a lousa e quem a manipula. De maneira um pouco mais rigorosa, lousa digital interativa é composta por um conjunto de equipamentos tecnológicos dispostos a desempenhar uma dada tarefa.  Esses equipamentos são: um sistema de interação motora com os usuários; um projetor, para projetar as informações do computador; o computador, que comanda todas às interações, e, o software da lousa digital, que oferece diversas ferramentas possibilitando que seus usuários prepararem atividades, apresentações e ações, conjuntamente aos demais aplicativos do computador. A configuração do hardware da LD mais utilizada é formada por um projetor multimídia, um quadro branco e um computador. Podemos dizer que, na generalidade, a LD é como uma gigante tela de computador, pois é possível com a

LD executar todos os recursos de um computador (simulação de imagens, acesso à internet, multimídias, etc).

A LD pode ser usada como um auxiliador do professor durante a transmissão do conteúdo em suas práticas de ensino, fazendo com que o aluno utilize na LD algumas interações que já estão habituados a realizar no computador, como a navegação na internet.

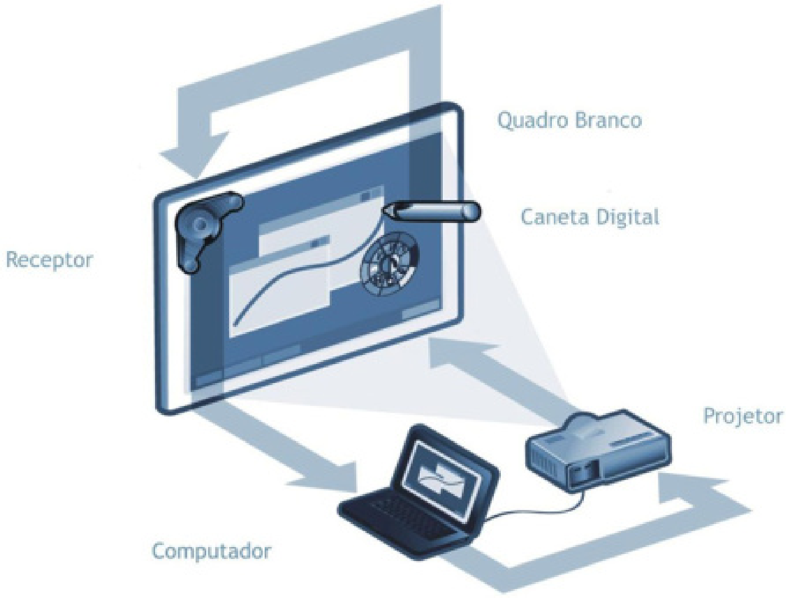
Existem diversas possibilidades do uso da LD como recurso didático em todas as áreas de conhecimento. Por exemplo, nas aulas de Português é possível fazer anotações na lousa ou consultar dicionários on-line de maneira rápida e prática. Em física, podemos utilizar alguns programas (já existentes) e simular experimentos físicos. Em geografia, pode-se acessar o Google Earth. Em matemática, utilizar programas como Geogebra ou Graph para construir gráficos de todas as funções ensinadas. Vale ressaltar, que tudo que é feito na lousa pode ser salvo e utilizado posteriormente ou até mesmo compartilhar com os alunos via email.

O uso da LD nas aulas pode modificar o ambiente escolar e as relações de ensino aprendizagem e a educação. Para Simão Neto apud Nakashima e Amaral (2007, p. 402).

> O trabalho com a informação multimídia não é simplesmente a aplicação de uma tecnologia acabada. Antes de tudo, envolve exploração, construção, descoberta, aprimoramento contínuo e aplicação pedagógica dessa tecnologia. Assim, por meio da utilização da lousa digital, oportuniza-se uma mudança metodológica, incorporando a linguagem interativa no processo de ensino e aprendizagem, considerada uma forte tendência da atualidade.

Os principais componentes da Lousa Digital são: tela, sensores, projetor e computador.

Figura 21 – Conexão da Lousa Digital




Fonte: caldeiraodeideias.wordpress.com

A tela deve ser plana, branca e possibilitar o contraste correto das imagens que serão projetadas nela. Os sensores permitem a interação entre a tela e o usuário. O projetor projeta as imagens e/ou programas enviadas pelo computador na tela, transformando-a num monitor. Por último, e não menos importante, o computador que tem como função controlar toda a interação entre o usuário e a tela.

No mercado de venda, as Lousas Digitais têm suas variações segundo cada componente citado acima e, nessas variedades, existem muitas ferramentas e funções que estão em todos eles, iremos destacar algumas:

- A caneta
- A ferramenta selecionar permite mudar objetos de lugar, mudar as dimensões, rotacionar
- A borracha
- O teclado virtual
- A ferramenta de formas geométricas
- Ferramentas digitais, tais como: régua, compasso, esquadro e transferidor, que com praticidade permite demonstrar como usar tais instrumentos;
- Captura de tela
- Galeria de imagens e recursos interativos

- Editor de equações matemáticas
- Inserir imagens, vídeos, som, animações em *flash*, tabelas, gráficos, *hiperlinks*;
- Importar documentos de outros programas, como PDF's, apresentações do *Power Point*;
- Acessar qualquer programa e arquivo do computador e editá-lo;
- Salvar, importar e exportar as aulas em diversos formatos;
- Refazer e desfazer qualquer alteração;
- Calculadora;
- Copiar e colar.

Existem vários modelos e marcas de LD disponíveis que utilizam diferentes tecnologias. Cada fabricante determina a forma como os sinais serão captados, os mais encontrados são: ultrassônica, resistiva, eletromagnética e infravermelha.

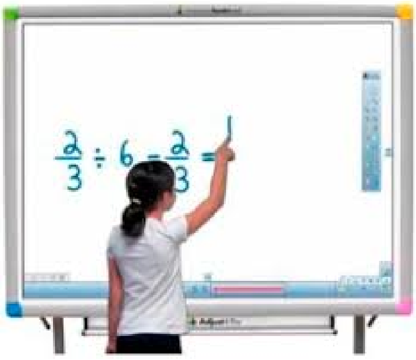
Iremos destacar alguns modelos e características, mas vale ressaltar que não é o propósito desse trabalho analisar e se aprofundar em todos os modelos existentes, e sim expor algumas possibilidades.

Listaremos alguns modelos que podem ser encontrados no mercado, dividimos em três categorias:

I) Tela sensível ao toque (Touch Screen)

Nesse modelo, o usuário pode interagir tocando a tela com o dedo ou com a caneta, e não há necessidade de uma bateria para manter a tela ativa.

Figura 22 – Lousa Touch Screen



Fonte: http://incluinformacao.blogspot.com

II) Tela e Sensores embutidos

Nesses modelos, a tela não é sensível ao toque do dedo, apenas ao toque da caneta especial que é adquirida junto ao equipamento, pois o mesmo possui sensores embutidos que detectam a posição da caneta.

Figura 23 – Lousa com uso apenas da caneta


Fonte: www.vtsbrasil.com.br

III) Apenas sensores embutidos

Nesse modelo, encontram-se as lousas que não são acompanhadas de uma tela, há apenas uma caneta especial e um sensor para detectar a posição dessa caneta sobre a projeção feita em alguma superfície lisa.

Figura 24 – Lousa sem tela

Fonte: louveira.sp.gov.br

Iremos nessa dissertação apresentar uma proposta de utilização da lousa digital como meio tecnológico interativo possibilitando o desenvolvimento das questões que serão propostas nos próximos capítulos. De forma que a LD seja usada no sentido de possibilitar o desenvolvimento cognitivo do discente no seu processo de aprendizagem.

O modelo utilizado será a LD Interativa **TeamBoard RT**, que é uma lousa Touch Screen composta por: *tela, projetor e caneta.*

Figura 25 - O TeamBoard

Fonte: Site Teamboard.com

Será apresentado no Apêndice deste trabalho um resumo com as principais características e funções da lousa digital TeamBoard.

# 5 ANÁLISE DAS QUESTÕES E APLICAÇÃO NA LOUSA DIGITAL

A partir da experiência de propor os problemas em sua forma original, surgiu a necessidade de transformar os enunciados e favorecer a generalização a partir da construção visual de soluções. A ideia desta proposta é reformular problemas e pensar em resoluções feitas de forma conjunta, construtiva, e vem para adequar a prática docente habitualmente observada nas escolas, e descrita anteriormente neste trabalho, às reais propostas da Resolução de Problemas. A principal motivação para isto foi a minha insatisfação com todo o processo de resolução destas questões, de perceber que os alunos não se apropriavam dos conceitos e dos algoritmos e obtinham, desta forma, respostas automáticas e, inúmeras vezes, incorretas.

Sendo assim, neste capítulo, serão analisados os dez problemas propostos à turma da escola básica e descritos no Capítulo 3, com a ideia de integrar a Matemática à realidade do aluno e introduzir novas tecnologias articuladas às suas vivências cotidianas. Dentre tantas fontes que tratam deste olhar sobre a Matemática escolar, podemos citar a BNCC, que afirma

> No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, conforme anteriormente anunciado. Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. (BNCC, Ensino Médio, p.518, 2018)

Neste sentido, será utilizada a Lousa Digital como recurso tecnológico e facilitador do processo de ensino e aprendizagem.

## 5.1 Análise da Questão 1

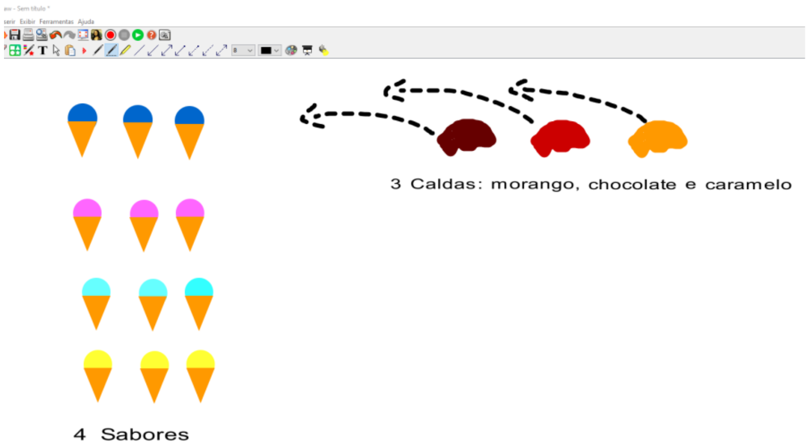
**Questão 1 - Uma sorveteria oferece uma taça de sorvete que pode vir coberto com calda de chocolate, de morango ou de caramelo. Se o sorvete**

**pode ser escolhido entre 4 sabores diferentes, quantas são as opções para o cliente escolher a taça com um sabor de sorvete e uma cobertura?**

Essa é uma questão que faz parte da realidade do nosso aluno e é muito provável que a maioria dos alunos já tenha passado por uma situação semelhante. O objetivo aqui é usar uma ferramenta tecnológica para construir a solução junto com os alunos de forma lúdica e construtiva.

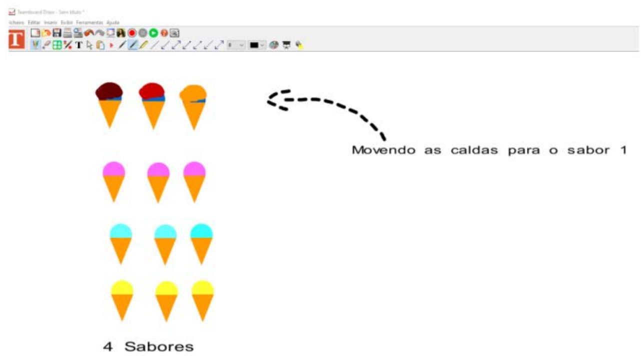
Utilizamos as figuras geométricas da Barra de Ação da lousa para construir os sorvetes com sabores diferentes (sabor 1, sabor 2, sabor 3 e sabor 4) e acrescentamos formas que correspondem às três caldas disponíveis na sorveteria (morango, chocolate e caramelo), como mostra a Figura 27.

Figura 27 – Aplicação na Lousa TeamBoard




Neste momento, movimentamos as três caldas para o primeiro sabor de sorvete. Na Figura 28, percebe-se que, ao movimentarmos as três caldas para o sabor 1, três possibilidades de sorvetes diferentes são formadas.

Figura 28 – Primeiro sabor com as três caldas



Faremos o mesmo processo para o sabor 2 e a seguir, para os sabores 3 e 4, como descrito na Figura 29, concluindo com os alunos, a cada passo, que também existem três possibilidades com as caldas para cada um destes sabores.

Figura 29 – Sorvetes dos sabores 1 e 2 com as caldas e a tela final com todos os sabores e caldas possíveis


Desse modo o aluno conclui que, para cada sabor, existem 3 possibilidades para a montagem de um sorvete. Como existem quatro sabores disponíveis, pelo Princípio Multiplicativo, temos 3.4 = 12 possíveis montagens da taça.

Naturalmente, esta última questão deve gerar nos alunos a construção intuitiva de algoritmo que permite a generalização do processo descrito. Para estimular esta generalização, propomos que, após a resolução da questão na LD, uma outra questão seja proposta, a Questão 1.1 descrita abaixo.

**Questão 1.1 – Esta mesma sorveteria decidiu expandir seus negócios. Agora, disponibiliza aos seus clientes 20 sabores de sorvete, 5 possibilidades de cobertura e 3 tipos de confeitos para colocar em cima. De quantas formas podemos montar uma taça com um sabor de sorvete, uma cobertura e um confeito em cima?**

Espera-se que, neste momento, os alunos usem o Princípio Multiplicativo de forma análoga ao que foi feito na Questão 1 para concluir que existem 20.5.3 = 300 possíveis taças a serem construídas desta forma. A utilização ou não da lousa deve ficar a cargo do professor, que pode querer explorar a visualização do processo mais uma vez na lousa ou, ao perceber que a turma pode avançar para o próximo passo, não usar mais a lousa ao construir o processo de encontrar a solução.

## 5.2 **Análise da Questão 2**

**Questão 2 - Supondo que existam cinemas e teatros em sua cidade, e que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro diferentes para passarem no próximo sábado, e que você tenha dinheiro para assistir a apenas 1 evento, quantos são os programas que você pode fazer neste sábado?**

Esta questão foi proposta em uma escola da rede pública de ensino no município de São Gonçalo e, analisando o enunciado, vemos que existe um distanciamento em relação à realidade dos nosso alunos. O Teatro Municipal de São Gonçalo nunca abriu para o público e uma pessoa que deseja assistir um espetáculo teatral e reside na cidade, deverá procurar as cidades vizinhas como Niterói ou Rio de Janeiro. Em geral, os moradores desconhecem estes lugares e a realidade do teatro em São Gonçalo. Neste sentido, propomos uma questão que leve a uma análise crítica sobre a vida cultural na cidade e, ao mesmo tempo, mostre que existem possibilidades nas cidades vizinhas, que talvez desconheça.

A seguir, apresentamos o enunciado modificado de acordo com as nossas sugestões.

**Questão 2 reformulada - Um morador de São Gonçalo deseja assistir a uma peça teatral ou um filme no cinema no próximo sábado. Na sua cidade não existe espetáculo teatral, há apenas o Teatro Municipal de São Gonçalo que custou 13 milhões, foi inaugurado mas nunca abriu de fato. Sendo assim, ele resolveu ir até Niterói e lá escolher entre cinema ou teatro. Sabendo que no cinema localizado no Plaza Shopping, o Cinemark, estão em cartaz 3 filmes e que ele tem como opção uma peça no Teatro Municipal de Niterói e outra no Teatro Abel, de quantos modos ele pode assistir a um filme no cinema ou uma peça de teatro, se ele só assistirá a um desses eventos culturais no sábado?**

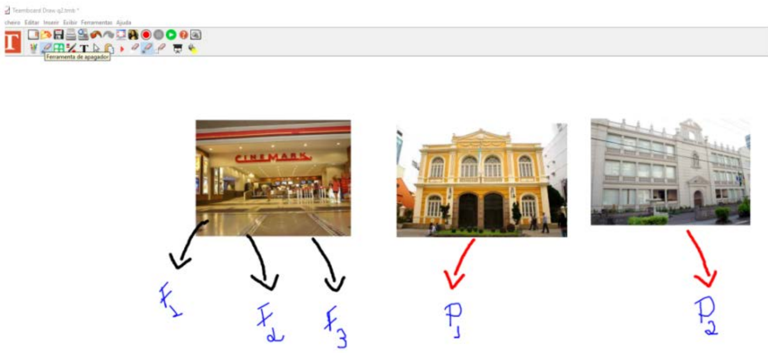
Para resolver essa questão na lousa, salvaremos algumas imangens do Cinemark, do Teatro Municipal e do Teatro Abel que podemos buscar diretamente no site de pesquisas Google. Este processo é mostrado na Figura 30.

Na barra de ferramentas da lousa vamos inserir as figuras com os comandos: INSERIR > FIGURA > DO ARQUIVO

Sabe-se que o problema para resolver essa questão é que a pessoa só irá a um desses eventos, isto é, a escolha por uma delas elimina a possibilidade de ir aos outros.

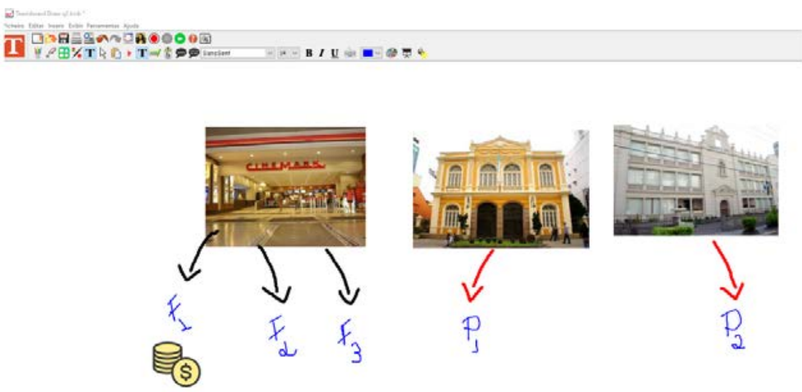
Chamaremos de P1 e P2 as peças em cartaz e F1, F2 e F3 os filmes.

Figura 30 – Imagens inseridas na LD



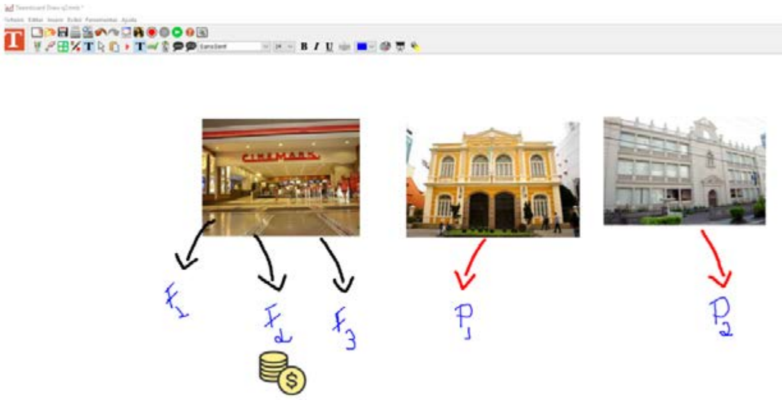

Para o aluno compreender que a escolha por uma opção exige a exclusão das outras, utilizamos a imagem de moedas movimentamdo-se para representar a escolha do evento a ser assistido.

Figura 31 – Movimentação das moedas, indicando a escolha do evento F1 (assistir ao filme F1)



Da mesma forma, ao escolher o filme F2, movimentamos as moedas para F2, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Movimentando as moedas para F2



Desse modo, após fazer todas as movimentações possíveis, conclui-se que a pessoa poderá escolher F1 ou F2 ou F3 ou P1 ou P2, isto é, existem 5 opções para o evento no sábado. A visualização e a contextualização facilitam o entendimento do aluno e a movimentação das moedas mostra que a escolha de uma das opções exclui a escolha das outras, o que leva a concluir que o número de escolhas é exatamente o número de eventos disponíveis, neste caso.

## 5.3 **Análise da Questão 3**

**Questão 3 - Suponha que 32 seleções disputem um campeonato mundial, sem divisão de chaves. Quantas são as possibilidades matemáticas de classificação dos três primeiros lugares?**

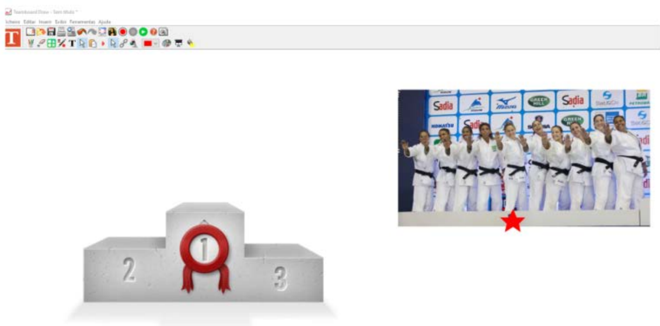
Essa é uma questão simples, porém fora de um contexto real se não explicitarmos o tipo de esporte. Ao ler a questão, muitos alunos me perguntaram qual esporte seria e associaram naturalmente ao futebol, por ser o esporte mais popular. Porém, a questão não considera a divisão do campeonato em chaves ou mais de uma partida com os mesmos times, o que é muito comum neste esporte.

Desta forma, a reformulação do enunciado propõe que seja analisada uma questão real de um esporte que tenha campeonatos desta forma. O esporte escolhido foi o judô, muito praticado em São Gonçalo em projetos sociais ou pequenas academias e que conta com campeonatos regionais. Muitos atletas gonçalenses têm bolsas de estudo em universidades por praticarem o judô nas equipes universitárias.

**Questão 3 reformulada - Haverá em São Gonçalo um campeonato de Judô Feminino, esporte tradicional na cidade. Disputarão apenas as candidatas da categoria Peso Médio Sub 18 (entre 15 e 18 anos, com pesos entre 57 a 63kg). Sabendo que nesta categoria existem 10 meninas na disputa, quantas são as possibilidades de classificação das três primeiras colocadas?**

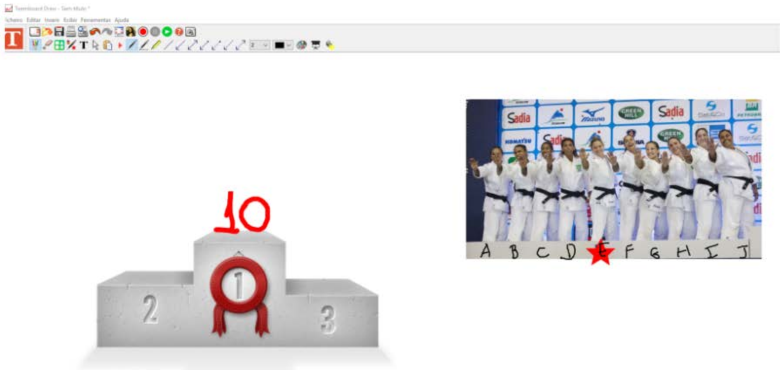
Na lousa digital, utilizaremos uma imagem com dez judocas e um pódio para analisar as classificações.

Figura 33 - Imagens usadas na lousa digital



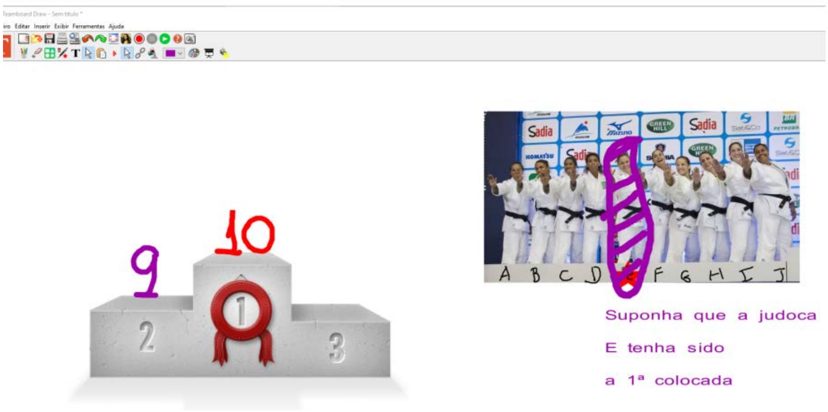
Para desenvolver os passos da resolução, perguntaremos aos alunos quantas são as possibilidades de classificação em cada colocação. Por exemplo, para a primeira colocação, quantas meninas estarão disputando. Nomearemos, para facilitar o processo, cada judoca com letras do alfabeto (de A a J), para isso usamos a ferramenta caneta da LD. A Figura 34 mostra a lousa com as imagens e anotações descritas.

Figura 34 - Possibilidades para o primeiro lugar



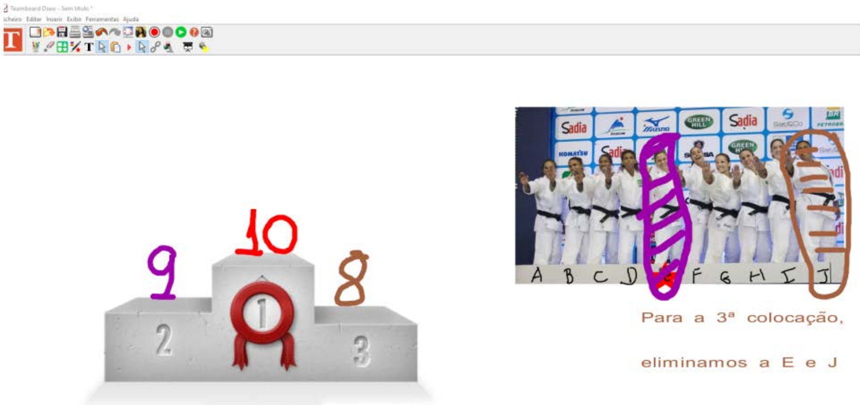

Para determinar quantas possibilidades existem para a 2ª colocação, vamos considerar que a atleta E tenha sido classificada em 1º lugar e, com isso, a eliminaremos como possível candidata a estar na 2ª colocação. É importante perceber nesse momento que cada judoca só poderá estar em um dos três lugares do pódio. Parece uma conclusão óbvia, mas representa um erro muito comum porque os alunos se distanciam da situação real. A Figura 35 mostra como representamos esta situação.

Figura 35 - Judoca E não pode estar em 2º lugar porque está classificada em 1º




Do mesmo modo, faremos a análise da 3ª colocada. Supondo que a judoca J tenha sido a 2ª colocada, também vamos eliminá-la na concorrência para a 3ª colocação. Sendo assim, restarão 8 possíveis concorrentes, como mostra a Figura 36.

Figura 36 - Escolha da 3ª colocada




Sendo assim, pelo Princípio Multiplicativo, teremos 10.9.8 = 720 possíveis maneiras de preenchermos o pódio com as três classificadas.

## 5.4 **Análise da Questão 4**

**Questão 4 - Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para a foto?**

Nesta questão, o problema é deixar de explorar fatos cotidianos e mencionar uma situação muito genérica que, embora seja real, não gera o envolvimento que esperamos. Na era digital com todo aparato tecnológico existente, a fotografia é algo muito comum. Para cada passeio, uma foto diferente. A questão a ser analisada está adequada ao cotidiano dos nossos alunos e a LD será um facilitador para visualização.

Modificamos o enunciado usando como base um dos memes (termo grego que significa imitação) mais reproduzidos em 2018. A famosa atriz Bruna Marquezine saiu de férias para Grécia e então fez várias publicações de fotos em suas redes sociais. Outros famosos, amigos da Bruna, resolveram fazer montagens com essas fotos como se estivessem passando as férias junto com a Bruna.

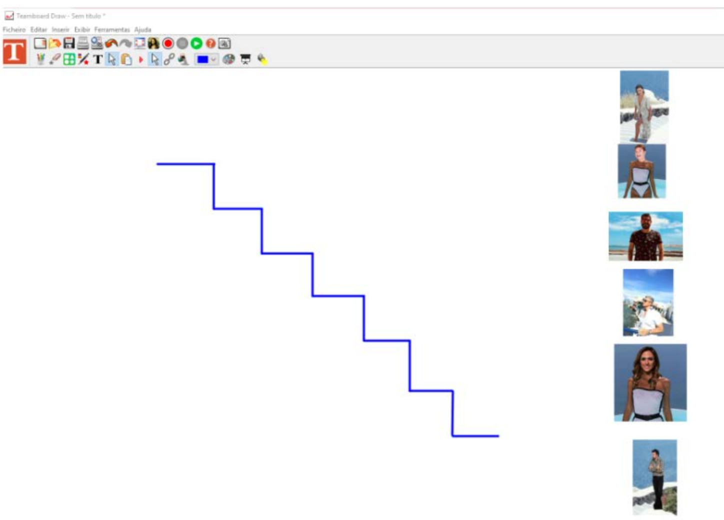
Vamos refazer a questão usando esse meme por ser um tema bem atual e ao qual nossos alunos, certamente, já tiveram acesso.

**Questão 4 reformulada – Em suas férias na Grécia, a atriz Bruna Marquezine fez diversas publicações de fotos compartilhando os lindos momentos no local. Alguns famosos, que são amigos da atriz, resolveram iniciar uma brincadeira: fizeram memes colando as suas fotografias nas fotos da Bruna, como fez o Padre Fábio de Melo na figura a seguir, para sugerir que também estavam curtindo as férias lá.**

**Logo após a montagem do padre, Tatá Werneck, David do Brasil, Otaviano Costa e Evaristo Costa postaram as suas montagens. Pensando em todas as possibilidades para um meme que tenha a Bruna, o Pe. Fábio, a Tatá, o David, o Otaviano e o Evaristo nos degraus dessa escada, mas que a Bruna e o Padre estejam nas extremidades, determine o número total de memes que podem ser gerados.**

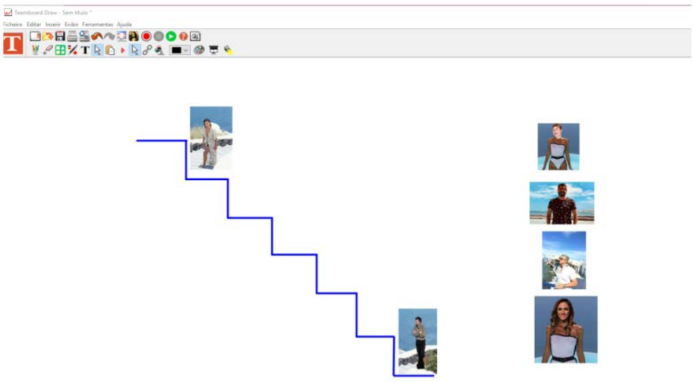
Na LD faremos uma escada usando as ferramentas do software. Logo após, inserimos as imagens dos famosos, como mostrado na Figura 37.

Figura 37 - Simulação da situação descrita na Questão 4 reformulada



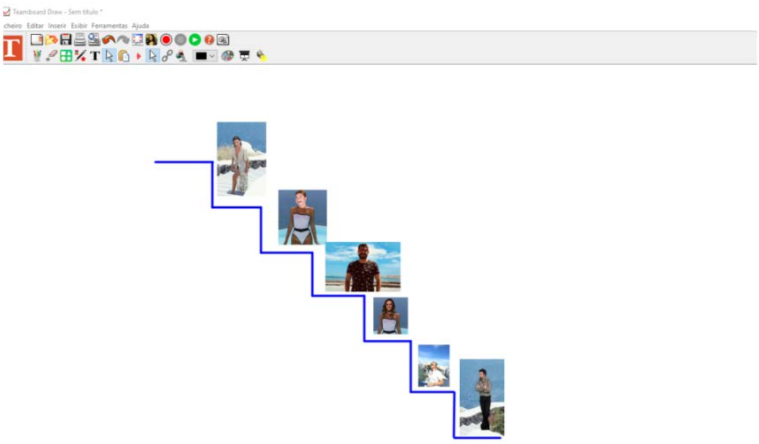
Como a Bruna e o Padre tem sempre que ficar nas extremidades, vamos mover a foto deles para o início e o fim da escada, para que os outros famosos possam ficar entre eles. Uma possibilidade é mostrada na Figura 38. Neste momento, como a construção na lousa é feita junto com os alunos, eles conseguem perceber que há duas possibilidades na escolha nesta primeira escolha, o que evita um erro muito comum neste tipo de enunciado.

Figura 38 - Distribuição das personalidades nas extremidades da escada



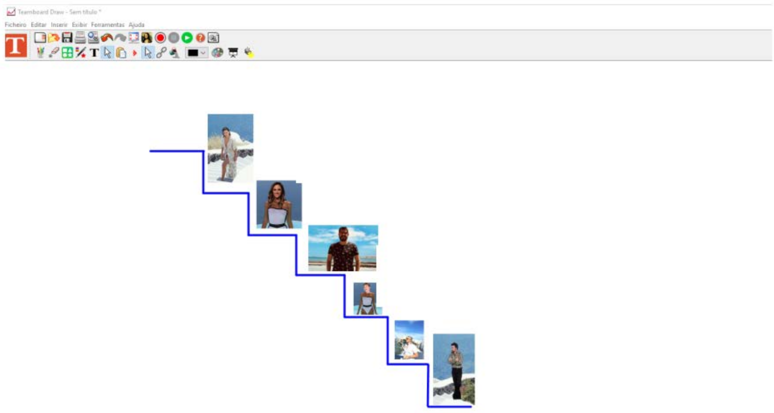
A seguir, de forma aleatória, colocaremos os outros famosos para a escada, obedecendo ao fato que devem ficar entre a Bruna e o Padre, como na Figura 39.

Figura 39 - Movendo as demais personalidades nos degraus da escada



Neste momento, é interessante fazer trocas entre as posições para mostrar como são elaboradas as possibilidades de arrumação na escada. A Figura 40 mostra outra possibilidade de organizar as pessoas.

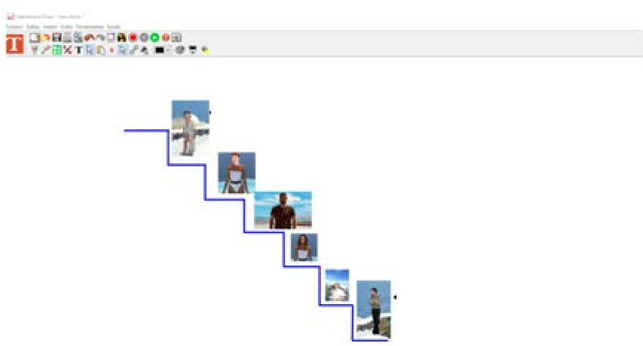
Figura 40 - Nova possibilidade com a troca entre a Tatá e o David



Como o aluno já sabe que trocar de posição é o mesmo que permutar, eles já saberão que para trocar os quatro famosos de posição terão 4! opções, isto é, 24 possibilidades de memes em que a Bruna está no início da escada e o Pe. Fábio está no final dela.

Neste momento, é necessário perguntar aos alunos se esta é a única possibilidade de ter a Bruna e o Padre na cena. Espera-se que eles percebam que ainda podem trocar a posição deles, gerando uma nova possibilidade para cada permutação já encontrada entre os membros do meio. Assim, podemos trocar os dois de posição movimentando as imagens na LD, como na Figura 41.

Figura 41 - Nova permutação onde o Padre e Bruna trocaram de posição



Sendo assim, concluímos a solução da questão analisando com alunos e chegando aos valores seguintes.

Número de possibilidades de alocarmos a Bruna e o Pe. Fábio: 2!

Número de possibilidades de alocarmos os outros famosos: 4!

Como no meme todos as personalidades estão alocadas na mesma escada, pelo princípio multiplicativo, temos 2!.4! = 2.24 = 48 memes distintos.

## 5.5 **Análise da Questão 5**

**Questão 5 - Dispomos de 4 cores distintas e temos que colorir o mapa mostrado na figura com os países P, Q, R e S, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.**

| | |
|---|---|
| P | Q |
| R | S |

**Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:**

**a) os países P e S forem coloridos com cores distintas?**

**b) os países P e S forem coloridos com a mesma cor?**

Analisando o enunciado da questão, percebemos que há muita necessidade de modificação ou reestruturação do mesmo. Porém podemos reescrevê-la trazendo um pouco mais para perto da realidade, uma vez que não é tão comum pensar em países cuja disposição seja na forma de um quadrado. Porém, encontramos no mapa dos Estados Unidos alguns estados com uma representação desta forma e adaptamos esta questão para permitir a interdisciplinaridade, fazendo uma comparação com o tamanho de alguns países.

**Questão 5 reformulada - O Estados Unidos da América (EUA ou USA) é composto por 50 Estados. É um país tão grande que seus estados podem ter o mesmo tamanho de alguns países. Abaixo, o primeiro mapa mostra os estados e o segundo, que país tem o mesmo tamanho de cada estado. Os nomes dos**

**países aparecem em inglês na imagem, será que você reconhece o nome de todos eles?**



Fontes: https://www.todamateria.com.br/estados-unidos/ e https://queminova.catracalivre.com.br/instrui/12-mapas-que-mostram-a-verdadeira-visao-do-mundo/

**Quatro cantos, ou *Four Corners*, é o nome de uma região do oeste onde se encontram quatro estados, o Colorado, o Novo México, Arizona e Utá. Esta singularidade geográfica fica em terras dos índios navajos e utes.**

**Para entregar uma atividade de Geografia, Joana dispõe de quatro cores distintas para colorir a região de Quatro Cantos de modo que estados cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor.**

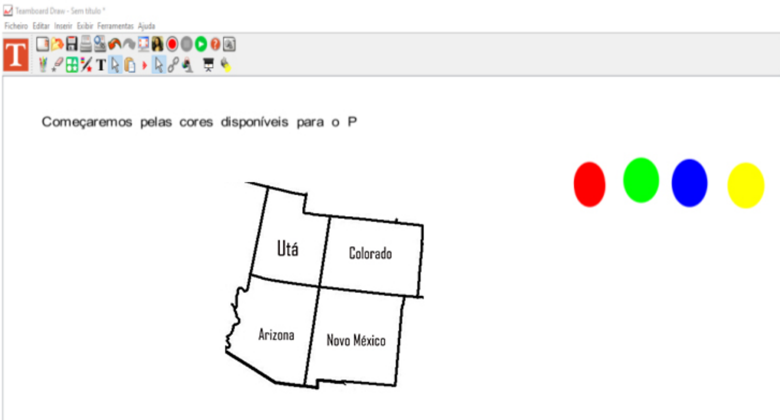

**Responda, justificando sua resposta, de quantas maneiras é possível colorir o mapa desta região, se:**

a) **os estados de Utá e Novo México forem coloridos com cores distintas?**
b) **os estados de Utá e Novo México forem coloridos com a mesma cor?**

Com o recurso *Copiar*, inserimos a imagem do enunciado na lousa, selecionamos a opção Formas Geométrica e colocamos ao lado alguns círculos coloridos (amarelo, azul, verde e vermelho) para representar as quatro cores que poderiam ser utilizados, como mostra a Figura 42.

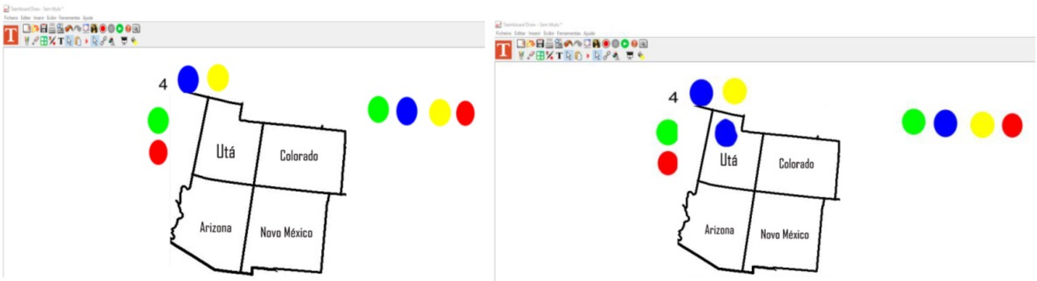
Para resolver essa questão, é necessário iniciar a coloração nos estados que são destaques do texto, ou seja, os países que devem ter cores distintas (Utá e Novo México).

Figura 42 - A região dos Quatro Cantos representada na lousa



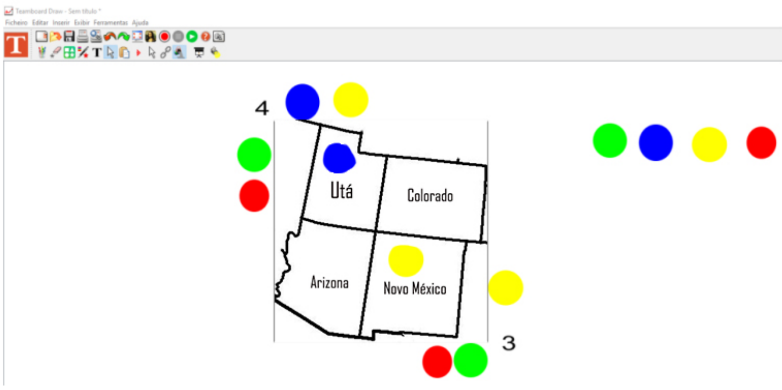

Iniciamos o processo aproximando círculos do estado de Utá correspondentes às quatro possíveis cores para colori-lo.  Ao fazer a escolha de uma das quatro cores para Utá, levaremos os círculos coloridos para próximo de Utá. Suponha que combinemos com os alunos de colorir este estado com a cor azul. Neste caso arrastamos o círculo azul para o interior da região de Utá. A Figura 43 mostra estes passos.

Figura 43 – Descrição da coloração do estado de Utá



Uma vez escolhida a cor de Utá, vamos analisar a cor a ser atribuída ao estado do Novo México, ressaltando que, no primeiro item da questão, ele não pode ter a mesma cor de Utá. Portanto, sobram as cores vermelha, verde e amarela, isto é, existem três opções para colorir o Novo México. Repetimos o mesmo processo para fazer a coloração deste estado junto com os alunos na lousa, como na Figura 44.

Figura 44 - Colorindo o Novo México




Agora podemos pensar nas opções para Arizona e Colorado. Como Colorado faz fronteira com Utá e com Novo México, não pode ter a mesma cor desses dois estados, ou seja, só podemos pintar o Colorado de verde ou vermelho. Arrastamos os dois círculos para perto do Colorado e, em seguida, escolhemos uma delas. Para escolher as opções de cores para o Arizona, basta lembrar que ele não pode ter a cor de Utá nem a cor do Novo México, ou seja, ele também só pode ser colorido de verde ou vermelho. Então, fazemos o mesmo processo. A Figura 45 mostra as escolhas para Arizona e Colorado e a Figura 46 nos mostra as possibilidades de cores para cada estado.

Figura 45 - Atribuição de cores a Colorado e Arizona

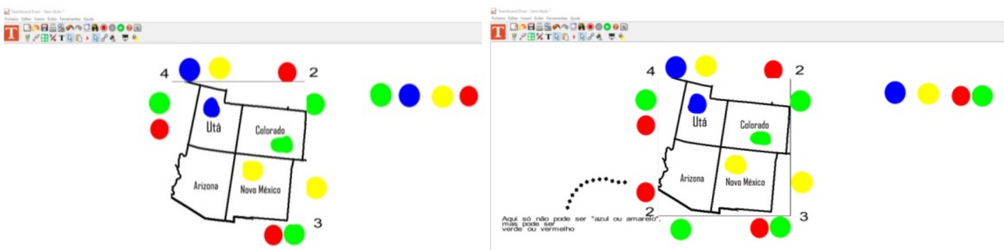
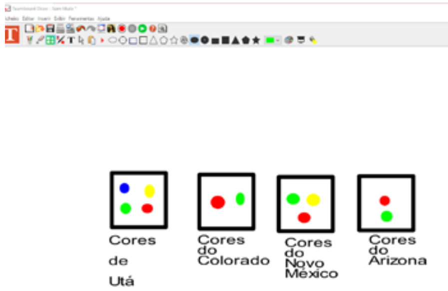


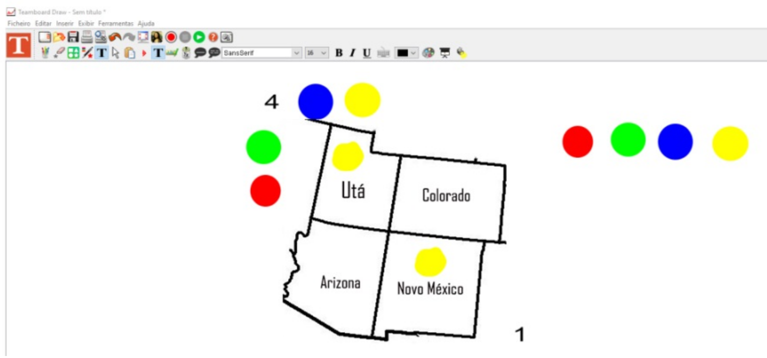
Figura 46 - Possibilidades de cores para cada estado




Sendo assim, para atribuir as cores a estes estados temos quatro opções para Utá, três para o Novo México e duas para Colorado e Arizona. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 4.2.3.2 = 48 opções para colorir o mapa da região de Quatro Cantos.

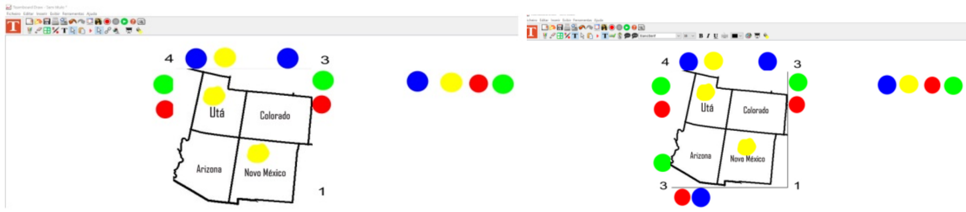
No item b, os estados de Utá e Novo México devem ser coloridos com a mesma cor e, novamente, iniciaremos colorindo os estados em destaque. Faremos o mesmo procedimento do item anterior para colorir Utá. Supondo que a cor de Utá é amarela, como o Novo México deve ter a mesma cor, moveremos a bolinha amarela para este estado também, isto é, só há uma possibilidade de colorir o Novo México. O processo é mostrado na Figura 47.

Figura 47 - Coloração do Novo México com a mesma cor de Utá



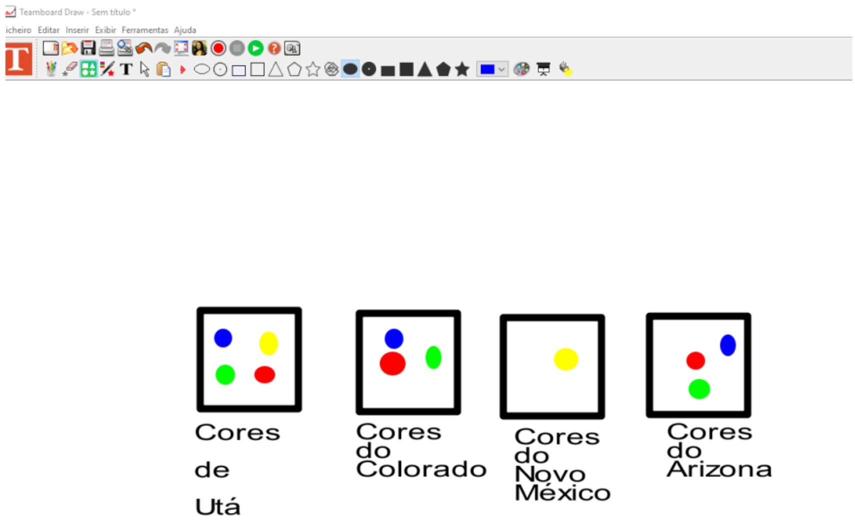

Sabendo que o Colorado não pode ter a mesma cor de Utá e do Novo México uma vez que a fronteira com estes estados é representada por uma linha, o Colorado não pode ser amarelo. Moveremos as cores restantes (azul, verde e vermelho) para perto deste estado e prosseguimos com a escolha de uma delas. Do mesmo modo, fazemos a escolha da cor do Arizona. A Figura 48 mostra estas escolhas.

Figura 48 - Escolha das cores restantes no segundo item




A seguir, na Figura 49, mostramos o esquema de distribuição de cores usadas.

Figura 49 - Possíveis cores dos estados no item b




Sendo assim, pelo PFC, existem 4.3.3.1 = 36 maneiras de colorir o mapa desta região de modo que Utá e Novo México tenham a mesma cor.

## 5.6 **Análise da Questão 6**

**Questão 6 - Um jantar constará de três partes: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas maneiras distintas ele poderá ser composto, se há como opções oito entradas, cinco pratos principais e quatro sobremesas?**

**a) 160**

**b) 150**

**c) 120**

**d) 80**

**e) 17**

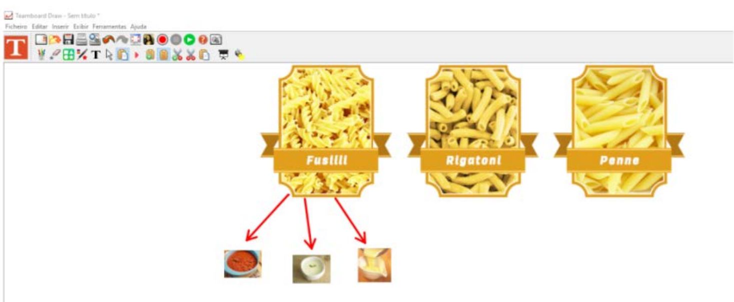
É claro que nossos alunos saem com amigos ou com a família, mas não é tão comum irem a locais com as opções de entrada, prato principal e sobremesa. Contudo, eles frequentam locais que dão opções para montagem de pratos e sanduiches. Porém, nesta questão, decidimos associar as escolhas a uma situação muito típica na região metropolitana do Rio de Janeiro, onde as comemorações em casa frequentemente têm alguma refeição elaborada pelos anfitriões servida aos convidados.

A modificação sugerida aborda a minha experiência pessoal, já que tenho como costume reunir amigos em minha residência e oferecer nosso “Self Service de Massas”, que consiste em disponibilizar alguns tipos de massa, de molhos e outros ingredientes adicionais. Este tipo de modificação pode contemplar também vários restaurantes que facilmente encontramos nos shoppings da cidade.

**Questão 6 reformulada - A professora Monique irá receber alguns amigos em sua casa, como de costume, fará o seu “Self Service de Massas”. Ela dará como opção aos convidados escolherem entre 3 tipos de massa, 3 tipos de molho (branco, bolonhesa, queijo) e 3 ingredientes adicionais (azeitona, camarão e bacon). Quantos pratos diferentes podem ser montados com uma massa, um molho e um ingrediente?**

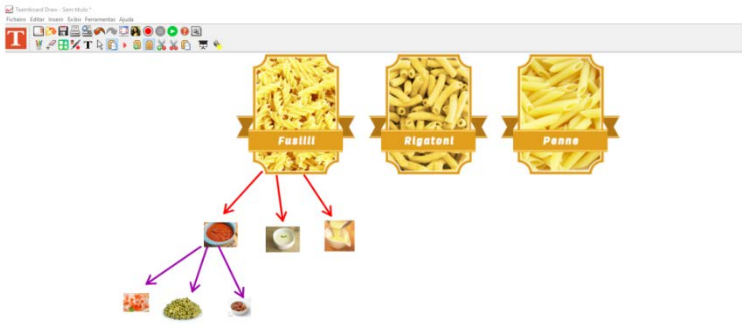
Para aplicar na LD, buscamos imagens de massas, molhos e ingredientes. Pelo enunciado, para cada tipo de massa, podemos escolher um dos três tipos de molho. A Figura 50 mostra estas três possibilidades de molho para uma massa.

Figura 50 - Distribuição dos molhos e massas



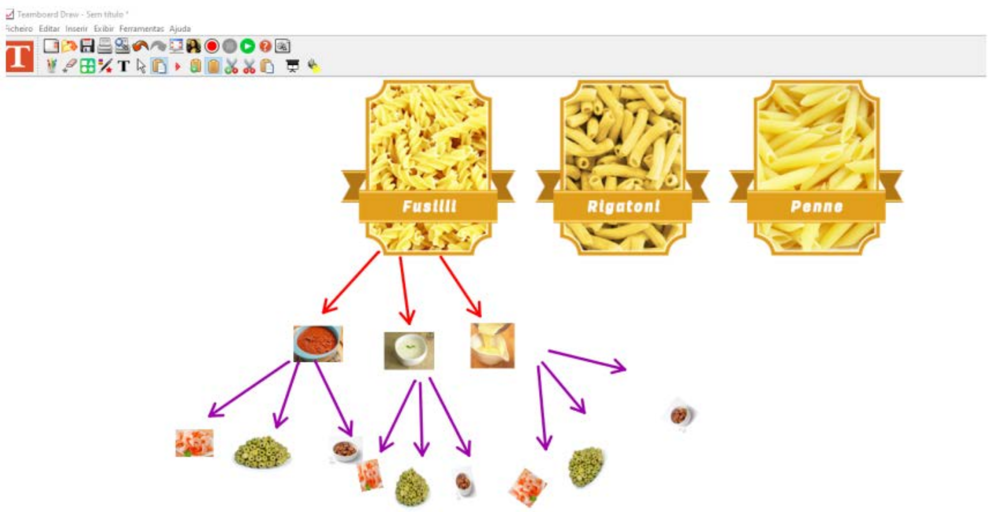
O próximo passo é acrescentar os ingredientes. Veja que, nesse momento, estamos usando como exemplo apenas a primeira massa e nela acrescentamos os possíveis molhos. Para acrescentar os ingredientes, vamos mostrar as possibilidades, após a escolha de uma massa e um molho, conforme Figura 51.

Figura 51 - Escolha dos ingredientes adicionais




Da mesma forma, os três ingredientes são adicionados como possibilidades para os outros tipos de molho, como mostra a Figura 52.

Figura 52 - Possíveis ingredientes para cada molho




Sendo assim, para o primeiro tipo de massa, após a escolha do molho e dos ingredientes obtém-se 9 maneiras distintas de montar um prato no “Self Service”.

O processo de utilizar a lousa com os alunos prossegue com a distribuição para os outros tipos de massa. A Figura 53 mostra os próximos passos na lousa.

Figura 53 - A distribuição feita com outras massas


Como, para cada massa existem nove possibilidades distintas de montar um prato escolhendo o molho e o ingrediente, concluímos que, pelo Princípio Aditivo existam 9+9+9 = 27 maneiras de montar pratos no Self Service de Massas da professora Monique.

## 5.7 **Análise da Questão 7**

**Questão 7 - Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência (1ª, 2ª e 3ª opções). Então, o número possível de formas de optar é:**

**a) 6.720**

**b) 336**

**c) 520**

**d) 120**

**e) 56**

Todo aluno ao iniciar o Ensino Médio começa também a pensar no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio). Após realizar o ENEM, os alunos poderão se candidatar a uma vaga nas universidades por meio do SISU (Sistema de Seleção Unificada).

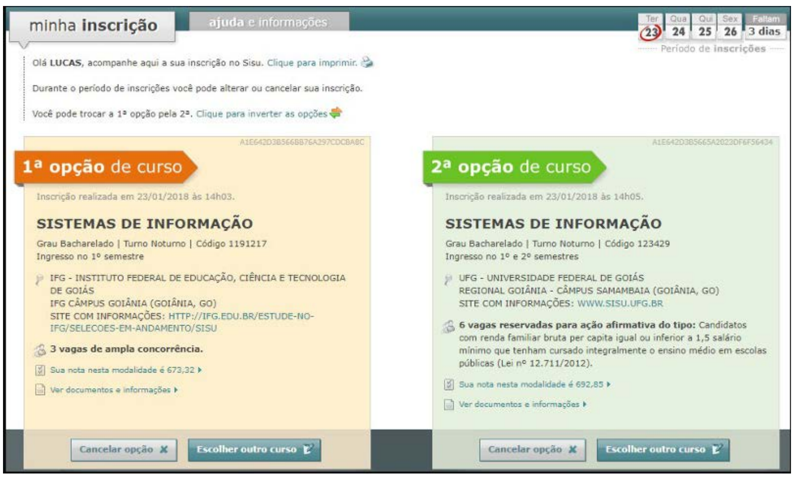
É muito comum que os alunos da escola pública da cidade não se sintam capazes de ingressar em uma universidade pública ou manter-se nela. A cidade de São Gonçalo tem uma única universidade pública que muitos moradores não conhecem, a Faculdade de Formação de Professores da UERJ. A escola em que trabalho fica ao lado desta instituição e muitos alunos desconhecem o processo de ingresso que não acontece por meio do SISU e sim por vestibular próprio.

Outra universidade de grande porte fica na cidade vizinha de Niterói, a Universidade Federal Fluminense. O ingresso, neste caso, acontece pelo SISU.

Muitos alunos da escola não fazem nenhum destes processos seletivos. Pensando neste contexto, surgiu a ideia de reformular a Questão 7 a fim de inserir os alunos nesta realidade e dar-lhes uma outra perspectiva de futuro. Vale ressaltar que a questão passa a dar informações iniciais dos processos seletivos mas só precisa de parte dos dados fornecidos, não sendo aplicação imediata dos conceitos sobre os números informados no enunciado.

**Questão 7 reformulada – Eduardo mora em São Gonçalo e deseja entrar em uma universidade no ano que vem. Ele pode, por exemplo, fazer o vestibular para a FFP/UERJ, de São Gonçalo, com duas chances de fazer a primeira fase e depois fazer a segunda fase já escolhendo o curso pretendido. Ou ainda, pode fazer o ENEM e, com as notas obtidas, se inscrever no SISU para a UFF ou UFRJ, por exemplo.**

**Se ele fizer o SISU, pretendendo ir para a UFF ou UFRJ, está pensando em tentar os cursos de Direito, História ou Serviço Social, que ambas oferecem. Sabendo que no SISU pode colocar a 1ª opção e a 2ª opção, como mostra a figura abaixo, de quantas formas ele pode escolher as opções do SISU?**

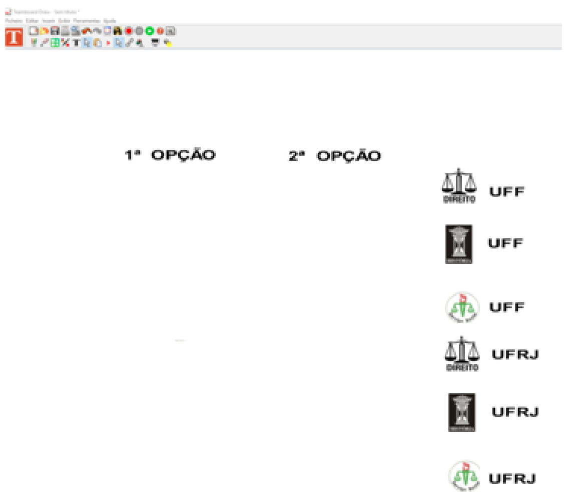


Vale ressaltar que Eduardo pode optar pelo mesmo curso, porém em universidades diferentes, isto é, ele pode escolher Serviço Social, como 1ª opção na UFF e 2ª opção na UFRJ ou vice-versa.

Na LD vamos acrescentar as imagens que são os símbolos dos cursos desejados por Eduardo. A Figura 54 mostra os símbolos que utilizamos. Sendo assim, apresentaremos as seis opções de curso que o Eduardo pode escolher, dentro das suas preferências. Em seguida vamos mover uma das possibilidades para a primeira opção como mostra a Figura 55. Neste momento, concluímos juntos que podemos escolher qualquer uma das seis opções como primeira opção.

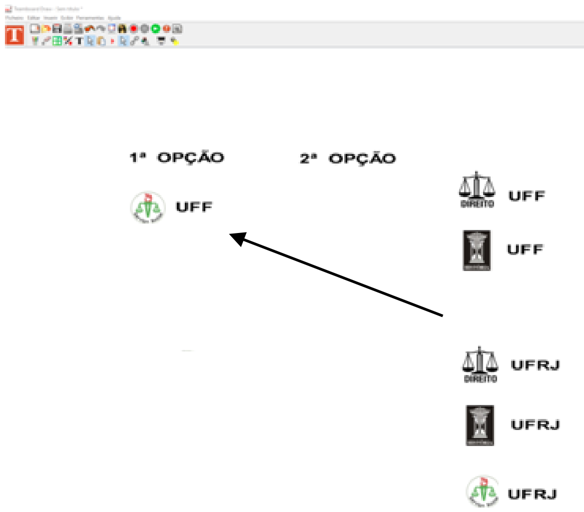
Figura 54 - Símbolos usados para cada curso


Figura 55 - A distribuição feita das possíveis escolhas de curso e a movimentação correspondente à escolha da primeira opção




Para escolher a segunda opção de curso, percebemos que só restaram cinco possibilidades a serem escolhidas, já que não faz sentido colocar o mesmo curso na mesma universidade nas duas opções. A Figura 56 mostra a Lousa no momento desta escolha.

Figura 56 - Tela após a escolha da primeira opção




Desse modo, pelo Princípio Multiplicativo, chegamos juntos à solução do problema. Existem, neste caso, 6.5 = 30 possíveis configurações do SISU para Eduardo, respeitando suas preferências.

## 5.8 **Análise da Questão 8**

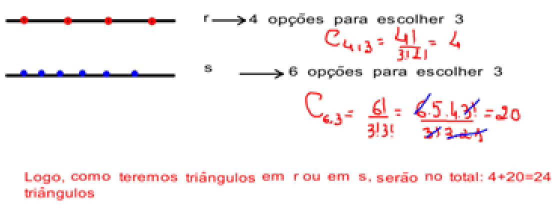
**Questão 8 - Duas retas paralelas, r e s, contém 4 e 6 pontos respectivamente. Quantos triângulos podem ser formados?**

Na resolução desta questão percebemos que alguns erros na interpretação eram comuns a vários alunos. Em situações como esta, é bastante válido usar na questão a análise de erro para que olhem de forma crítica para este tipo de solução equivocada e reavaliem o seu provável impulso inicial de resolverem desta mesma forma. A análise da resposta obtida já deve ser uma prática dos alunos, porém, neste caso, eles farão esta crítica à resposta de outra pessoa. A partir deste enfoque reescrevemos a Questão 8 como segue.

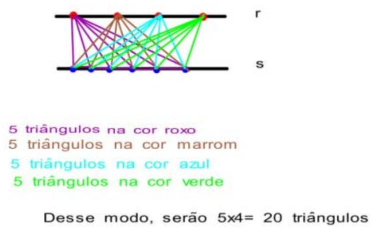
**Questão 8 reformulada – Durante uma aula de Matemática, a professora pergunta quantos triângulos podem ser formados usando como possíveis vértices 4 pontos de uma reta *r* e 6 pontos de uma reta *s*, sabendo que *r* e *s***

**são retas paralelas. Joana resolveu a questão de duas maneiras diferentes e obteve resultados diferentes, como podemos ver a seguir. Analise as soluções de Joana e verifique se algum processo feito por ela está correto. Como você resolveria esta questão?**

**Resolução 1:**

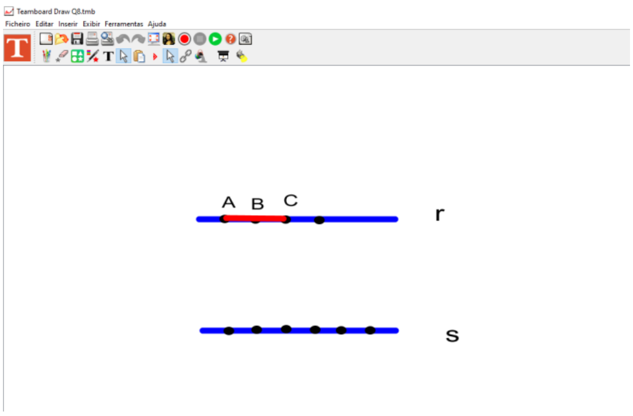



**Resolução 2:**



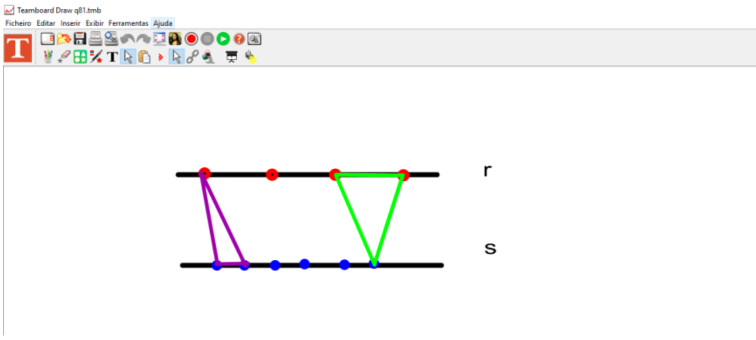

As duas resoluções de Joana estão incorretas, pois na primeira resolução, ela usa a combinação dos pontos de cada reta e deles escolhe 3, ou seja, não leva em consideração que para formar um triângulo não é possível escolher três pontos que estão na mesma reta, veja Figura 57, nomeamos três dos 4 pontos da reta *r* e tentamos formar com eles um triângulo, o que não é possível.

Figura 57 - Tentativa de formar um triângulo com três vértices na mesma reta




A resolução 2 da Joana está errada pois ela só pensou na possibilidade de ter triângulos formados com um vértice em *r* e dois vértices em *s*, descartando assim todas as configurações de triângulos que tenham dois vértices em *r* e um em *s,* como mostraremos na LD, como na Figura 58.

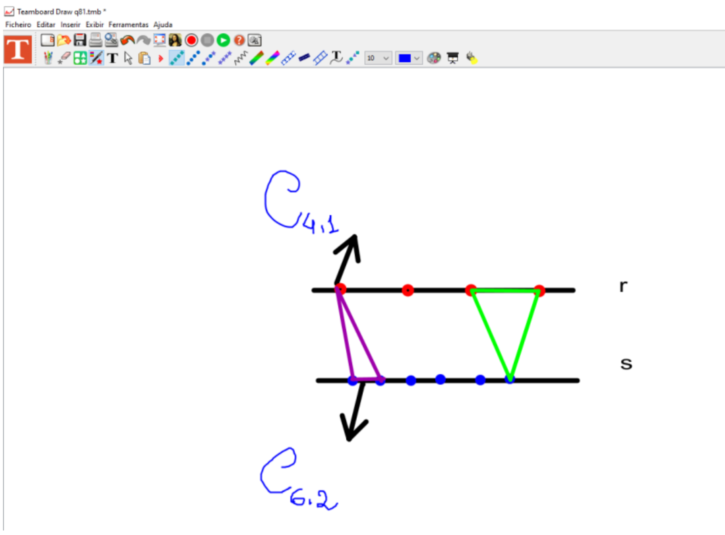
Figura 58 - As duas possíveis configurações para formar triângulo




Para resolver a questão devemos primeiramente mostrar ao aluno que é um problema que pode ser resolvido usando combinação, fazendo com que compreenda que um triângulo não muda se trocarmos a ordem dos vértices, isto é, $\Delta\text{ABC}$ é o mesmo que $\Delta\text{CBA}$.

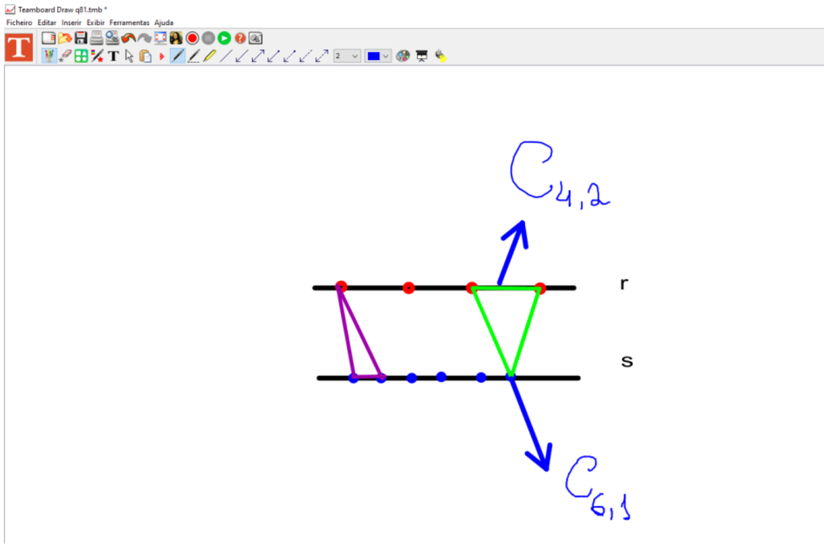
Assim ele terá para cada reta uma combinação. Começaremos tomando um ponto de *r* e dois de *s*, como mostra a Figura 59.

Figura 59 - As combinações para a primeira forma de triângulo




Desse modo, teremos: $C_{4,1} = 4$ e $C_{6,2} = 15$, logo, como teremos a escolha em *r* e em *s* para formar o triângulo, serão 4.15=60 triângulos formados. Da mesma maneira faremos para a escolha de dois pontos em *r* e um ponto em *s*, mostrado na Figura 60.

Figura 60 - As combinações para a segunda forma de triângulo




Com essa configuração, teremos: $C_{4,2} = 6$ e $C_{6,1} = 6$, logo, como teremos a escolha em *r* e em *s*, serão 6.6 = 36 triângulos formados.

Como o triângulo terá a primeira configuração ou a segunda, é possível montar 60+36 = 96 triângulos.

## 5.9 **Análise da Questão 9**

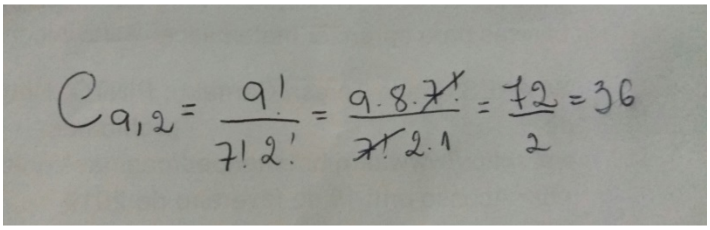
**Questão 9 - Diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos do polígono. Se um polígono convexo tem 9 lados, qual é o seu número total de diagonais?**

Analisando as resoluções dos alunos verificamos que o maior erro cometido foi considerar como diagonal o lado do polígono, mesmo o enunciado da questão conceituando a diagonal. Para facilitar o entendimento iremos reformular a Questão 9 usando análise de erro a partir da resposta de um dos alunos. Reescrevemos a Questão 9 como segue.

**Questão 9 reformulada – Durante uma aula de Matemática, a professora pergunta quantas diagonais tem um polígono convexo de 9 lados. Para isso**

**define diagonal como sendo o segmento de reta que une *dois* vértices não adjacentes do polígono. Joana prontamente responde que para resolver essa questão usaria o conceito de Combinação de 9 elementos escolhidos de 2 a 2. Analise a solução de Joana e verifique se o método escolhido por ela está correto. Como você resolveria a questão?**

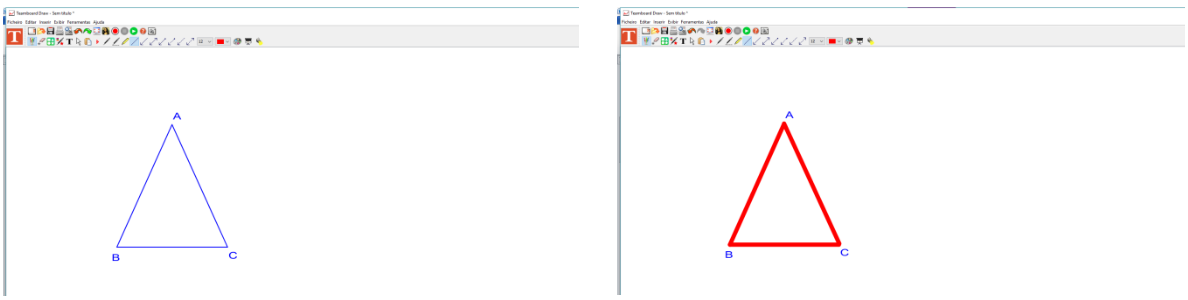
**Resolução de Joana:**




Para analisar a resolução de Joana, vamos fazer a aplicação do processo feito por ela em alguns outros polígonos: triângulo, quadrado, pentágono e, por fim, o eneágono (polígono de 9 lados).

No triângulo, usando o método da Joana teríamos: $C_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3.2!}{1.2!} = 3$ ou seja, o triângulo teria 3 diagonais. Observe as Figura 5.35 feita na LD, de um lado temos o triângulo azul e do outro unimos de dois em dois vértices, usando a cor vermelha. Perceba que unindo os vértices dois a dois não houve modificação na imagem, pois os vértices são consecutivos. É possível perceber que o triângulo não tem diagonais.

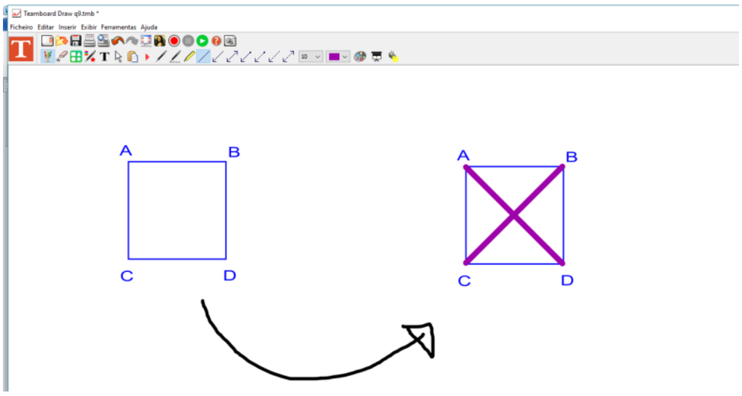
Figura 61 – Unindo vértices do Triângulo



Para facilitar o entendimento do aluno, ao unir dois vértices consecutivos usaremos a cor *VERMELHA* e ao unir vértices não consecutivos, usaremos a cor *ROXA*.

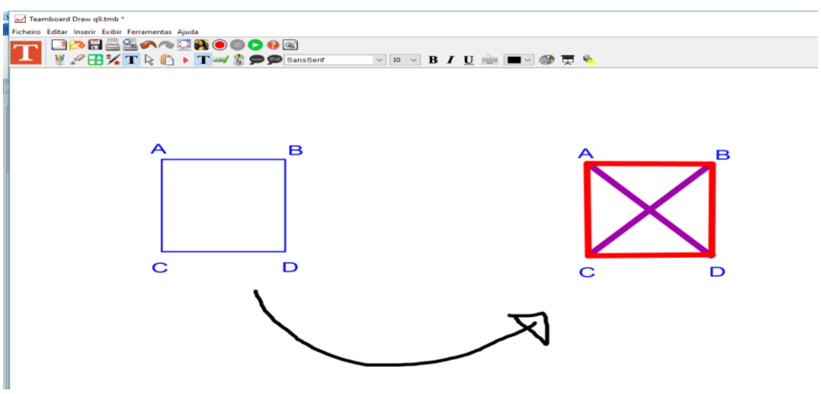
No quadrado, teremos pelo método de Joana: $C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2!} = 6$, ou seja 6 diagonais. Observe a Figura 62, usando vértices não consecutivos encontramos dois segmentos.

Figura 62 – Unindo vértice não consecutivo do quadrado




Já na Figura 63, ligando vértices consecutivos, encontramos 4 segmentos, que são iguais ao lado do quadrado, ou seja, os 4 segmentos em vermelho não podem ser diagonais, conclui-se então que o quadrado tem duas diagonais e não seis como seria usando a ideia da Joana. Vale ressaltar que se subtrairmos o número de lados do quadrado da combinação feita por Joana teremos exatamente o número de diagonais.

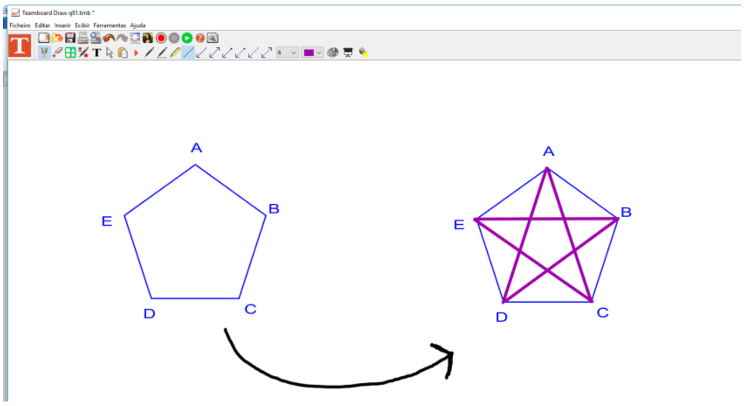
Figura 63 – Unindo vértice consecutivo do quadrado



Vamos verificar se também é válido para o pentágono.

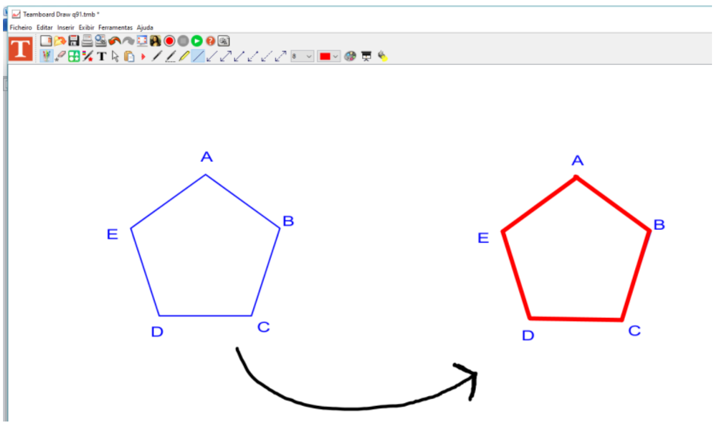
Pela resposta da Joana teríamos $C_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = 10$, ou seja 10 diagonais. Analisando a resposta na LD, na Figura 64, unindo dois vértices não consecutivos encontramos 5 segmentos, ou seja, 5 possíveis diagonais.

Figura 64 – Unindo vértice não consecutivo do Pentágono




Agora unindo os vértices consecutivos encontramos 5 segmentos, porém são os próprios lados do pentágono, ou seja, não podem ser diagonais como mostra a Figura 65 a seguir.

Figura 65 – Unindo vértice consecutivo do pentágono




Desse modo concluímos, novamente que o número de diagonais é a diferença entre a combinação deduzida por Joana e o número de lados do polígono.

Logo, para um eneágono serão $(C_{9,2} - 9)$ diagonais

$$C_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!\,2!} = \frac{9!}{7!\,2!} = \frac{9.8.7!}{7!\,.2!} = 36$$

Daí, o eneágono tem 36-9=27 diagonais.

## 5.10 **Análise da Questão 10**

**Questão 10 - Em uma circunferência são marcados 7 pontos distintos: A, B, C, D, E, F e G. Com estes pontos, quantas cordas podem ser traçadas? Quantos triângulos, quadrados, pentágonos e heptágonos que podem ser formados?**

Faremos uma sequência para deduzir o processo da resolução da questão. Não há necessidade de alterar o enunciado da questão por ela ser um problema de generalização. A generalização em Matemática é uma maneira de argumentar algum processo, mas só tem validade se o processo for provado como verdadeiro, isto é, uma verdade é assumida, porém necessita de uma prova para ser válida. De forma bem simples podemos dizer que generalizar é uma ação de conjecturar para todos os casos uma propriedade observada em alguns casos particulares.

Vamos chegar a solução da questão a partir de algumas aplicações na Lousa Digital.

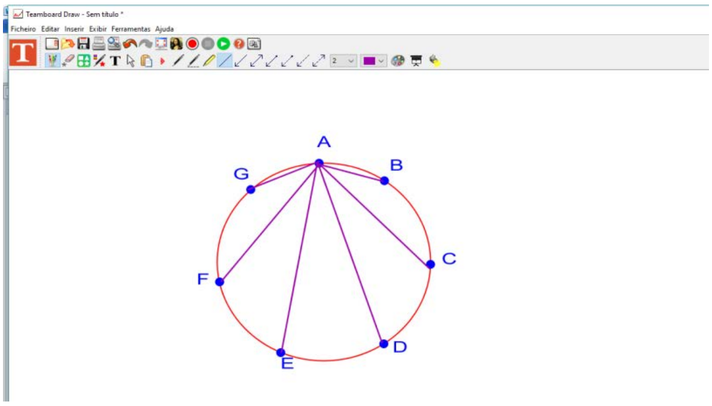
Na Figura 66, representamos uma circunferência com os 7 pontos descritos no enunciando e traçaremos todas as cordas que partem do vértice A. A Tabela 7 descreve as possíveis cordas com extremidades em A.

Tabela 7 – Cordas com extremidades em A.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{AB}$ | $\overline{AC}$ | $\overline{AD}$ | $\overline{AE}$ | $\overline{AF}$ | $\overline{AG}$ |

Fonte: O autor

Figura 66 – Unindo o ponto A aos outros pontos da circunferência



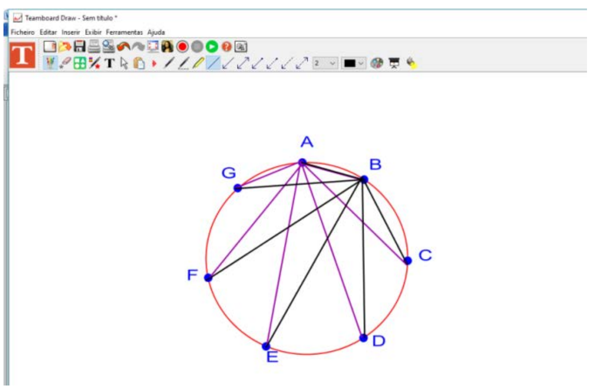

Unimos o vértice A à cada um dos outros pontos, formando assim 6 cordas (segmentos na cor roxa) na circunferência que possuem uma das extremidades em A. Vamos repetir o processo, partindo agora do vértice B, como na Figura 67. As possíveis cordas com extremidades em B são mostradas na Tabela 8.

Tabela 8 – Cordas com extremidades em B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{BA}$ | $\overline{BC}$ | $\overline{BD}$ | $\overline{BE}$ | $\overline{BF}$ | $\overline{BG}$ |

Fonte: O autor

Figura 67 – Unindo o ponto B aos outros pontos da circunferência




Observando as Figuras 66 e 67, verificamos que os segmentos $\overline{AB}$ $e$ $\overline{BA}$ são coincidentes, ou seja, não podemos conta-lo mais de uma vez. Logo, do vértice B partem 6 cordas, mas a corda $\overline{AB}$ foi contada mais uma vez.

Partindo do vértice C, teremos em verde as possíveis cordas. A Figura 68 mostra as cordas e a Tabela 9 descreve as possibilidades de cordas com extremidade em C.

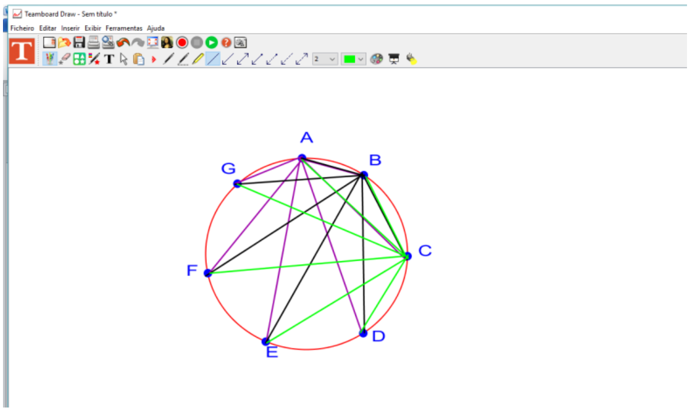
Tabela 9 – Cordas com extremidades em C.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{CA}$ | $\overline{CB}$ | $\overline{CD}$ | $\overline{CE}$ | $\overline{CF}$ | $\overline{CG}$ |

Fonte: O autor

As cordas $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ já foram marcadas. Desse modo, restam 4 cordas que tem C como um dos extremos.

Figura 68 – Unindo o ponto C aos outros pontos da circunferência




Em suma, com uma extremidade em A partem 6 cordas, com uma extremidade em B partem 5 cordas e com uma extremidade em C partem 4 cordas.

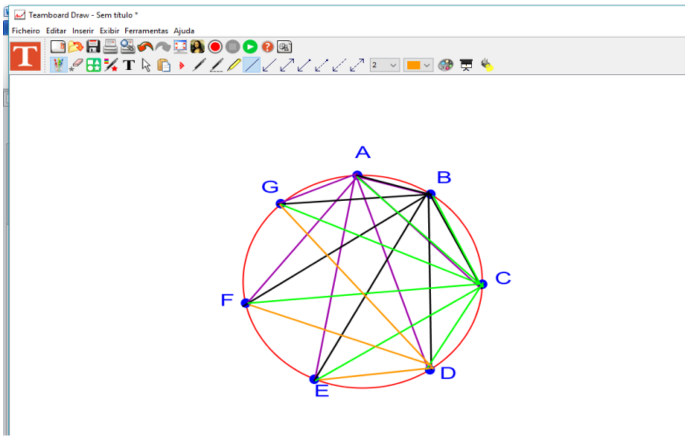
Na Figura 69 e na Tabela 10 é possível perceber que só restam 3 segmentos ($\overline{DE}$ , $\overline{DF}$ e $\overline{DG}$) com uma extremidade em D, pois os outros segmentos já foram contados quando tomamos as extremidades A, B e C.

Tabela 10 – Cordas com extremidades em D

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{DA}$ | $\overline{DB}$ | $\overline{DC}$ | $\overline{DE}$ | $\overline{DF}$ | $\overline{DG}$ |

Fonte: O autor

Figura 69 – Unindo o ponto D (segmentos amarelos) aos outros pontos da circunferência




Desse modo, tendo o vértice E como um dos extremos, restarão 2 cordas a serem contadas e o vértice F, apenas 1. A Tabela 11 resume estes resultados.

Tabela 11 – Número de cordas que partem de cada vértice, retirando as repetições

| VÉRTICE | NÚMERO DE CORDAS |
|---|---|
| A | 6 |
| B | 5 |
| C | 4 |
| D | 3 |
| E | 2 |
| F | 1 |
| G | 0 |

Fonte: O autor

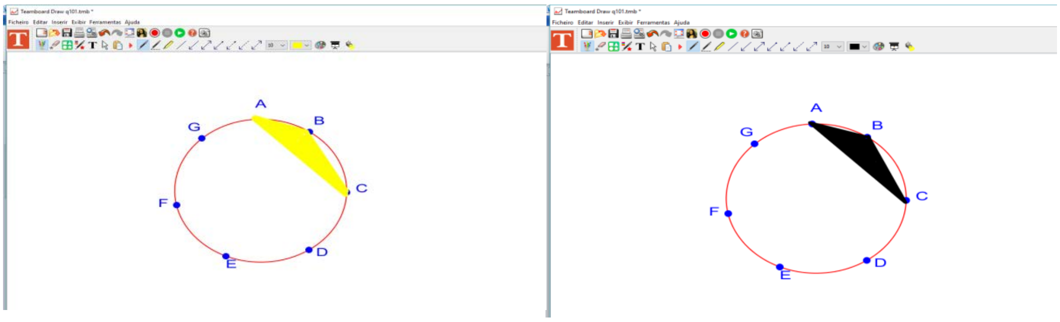
Pelo Princípio Aditivo da Contagem teremos: 6+5+4+3+2+1 = 21 cordas.

Essa questão poderia ser resolvida de forma simples e rápida usando combinação pois a ordem dos vértices não altera a corda, isto é, a corda $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$. Logo, faremos a combinação dos 7 pontos escolhidos 2 a 2.

$$C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7.6.5!}{5!\,2!} = \frac{42}{2} = 21$$

Para encontrar o número de triângulos, quadrados, pentágonos e heptágonos usaremos a mesma ideia da combinação acima, pois a formação dos polígonos independe da ordem dos vértices. Veja a Figura 70, à esquerda temos um triângulo cujos os vértices são A, B e C, chamaremos e $\Delta ABC$ e colorimos de amarelo. Já na imagem à direita, temos um triângulo com os mesmos vértices A, B e C, porém o nomeamos de $\Delta ACB$ e colorimos de preto.

Figura 70 – Colorindo os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta ACB$




Os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta ACB$ são iguais, portando a ordem dos vértices não importa para a formação do polígono. Sendo assim para encontrar o número de triângulos usando os 7 vértices da circunferência faremos:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!\,3!} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,3!} = \frac{210}{6} = 35$$

Logo, poderão ser formados 35 triângulos. O processo será repetido, estimulando a generalização, para encontrar o número de quadrados, pentágonos e heptágonos, como mostra a Tabela 12 a seguir.

Tabela 12 – Quantidade de cada polígono que pode ser formado

| Polígono | Quantidade de Polígonos |
|---|---|
| **Quadrado** | $C_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!\,4!} = \frac{7!}{3!\,4!} = \frac{7.6.5.4!}{3!\,4!} = \frac{210}{6} = 35$ |
| **Pentágono** | $C_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!\,5!} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7.6.5!}{2!\,5!} = \frac{42}{2} = 21$ |

| | |
|---|---|
| Heptágono | $C_{7,7} = \frac{7!}{(7-7)!\,7!} = \frac{7!}{0!\,7!} = \frac{7!}{7!} = 1$ |

Fonte: O autor

Este processo de modificar questões que encontramos facilmente leva naturalmente à necessidade de criar questões que já consideram os fatores que nos levaram a modificar as questões anteriores. Sendo assim, apresentaremos a seguir uma questão sobre Análise Combinatória que terá a Lousa como auxiliadora para sua resolução.

Os jogos online estão em alta entre os alunos tanto do Ensino Fundamental como, e principalmente, do Ensino Médio. Um jogo muito conhecido entre os alunos é o LOL - League of Legends. Pensando nisso formulei uma questão de Análise Combinatória utilizando algumas regras desse jogo para que a questão fosse bem próxima da realidade dos alunos.

Jogos com o LOL tem ganhado um espaço cada vez maior, com campeonatos, eventos de grande porte e um canal na TV fechada que mostra suas principais competições, atraindo um público cada vez mais diverso e permitindo que outras habilidades sejam também reconhecidas socialmente.

## 5.11 **Questão Nova**

**Questão 11 - LOL é um jogo de estratégia onde o jogador controla apenas um personagem. Ele é um tipo de jogo MOBA (Multiplayer Online Battle Arena) - sigla do inglês que significa *arena de batalha online para múltiplos jogadores*. No game, jogadores controlam campeões que devem unir suas forças para destruir a base inimiga. O mapa principal de "LoL" é o 'Summoner's Rift'. Nele, duas equipes de cinco campeões batalham em três rotas e numa selva. “Summoner's Rift' é dividido em três caminhos que conectam sua base à do inimigo além de uma área de selva, como na Figura 71. Esses caminhos são chamados de rotas (superior, meio e inferior), e é pelos caminhos e pela selva que as equipes se deslocam.**

Figura 71 - Mapa 'Summoner's Rift


Fonte: https://br.leagueoflegends.com/pt/game-info/champions/

**Para vencer a partida, é preciso avançar pelos caminhos até o coração da base inimiga e destruir o nexus (construção principal). Os campeões controlados pelos jogadores são classificados de acordo com suas funções e habilidades especiais. São no total 143 personagens disponíveis mostrados na Figura 72.**

Figura 72 - Personagens (heróis) do LOL

Fonte: https://br.leagueoflegends.com/pt/game-info/champions/

**Não existem regras ditando quais personagens devem ficar em determinadas partes do mapa. Em uma estratégia usual, a equipe de 5 jogadores posiciona 1 campeão na rota superior, 1 na rota do meio, 1 na selva e 2 na rota inferior. Cada um conta com técnicas comuns e especiais para combater inimigos, monstros e torres. O segredo para a vitória está no uso correto dessas habilidades.**

**Yang, Revolta, Kami, Pbo e Dioud são alguns dos jogadores mais conhecidos de LOL do Brasil (da esquerda para direita na Figura 73). Imagine que juntos eles irão formar uma equipe.**

Figura 73 – Os melhores jogadores de LOL no Brasil

Fonte: https://streamie.com.br/veja-como-ficou-selecao-brasileira-do-all-star-de-league-of-legends/

**A escolha dos personagens das equipes é intercalada, a primeira equipe escolhe o seu primeiro personagem e, a seguir, a segunda equipe faz o mesmo. Em seguida, a primeira equipe escolhe o próximo personagem e a segunda equipe o faz a seguir. Este processo continua até que os 5 personagens de cada equipe tenham sido escolhidos.**

**Agora imagine que, após a fase inicial de banimento, 10 personagens não poderão ser escolhidos por nenhuma das equipes. Sendo assim, responda:**

a) **Qual o total de possibilidades do time escolher seus 5 personagens uma vez que quando o personagem é escolhido por alguém, ninguém mais pode escolher o mesmo? (Considere que o time será o primeiro a começar a etapa de escolhas)**

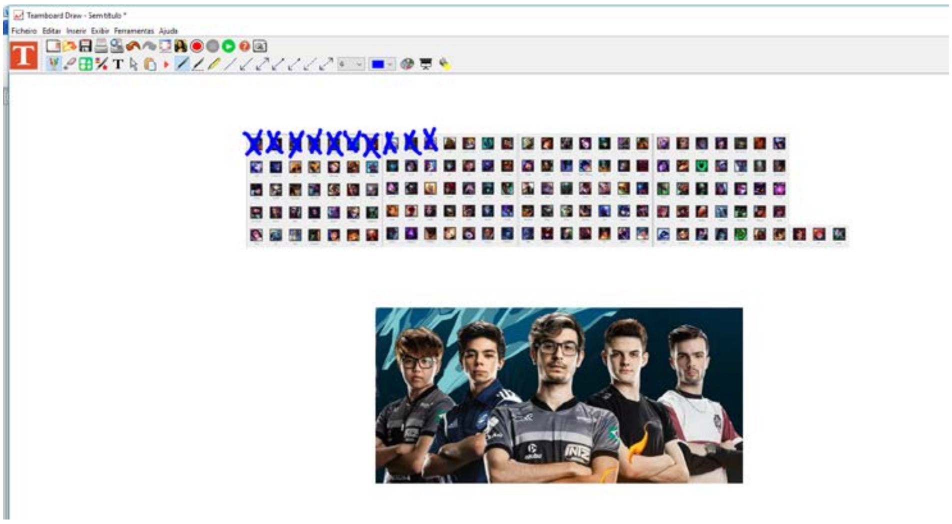
b) **Para que esses jogadores consigam destruir o Nexus é necessário uma estratégia para dividir o grupo de 5 entre os caminhos lembrando que a equipe posiciona 1 campeão na rota superior, 1 na rota do meio, 1 na selva e 2 na rota inferior. Pensando nisso, mostre de quantas maneiras distintas podemos distribuir os campeões escolhidos para atravessar as rotas, chegar na base inimiga e destruir o nexus?**

Resolução na Lousa Digital

**a) Qual o total de possibilidades do time escolher seus 5 personagens uma vez que quando o personagem é escolhido por alguém, ninguém mais pode escolher o mesmo? (Considere que o time será o primeiro a começar a etapa de escolhas)**

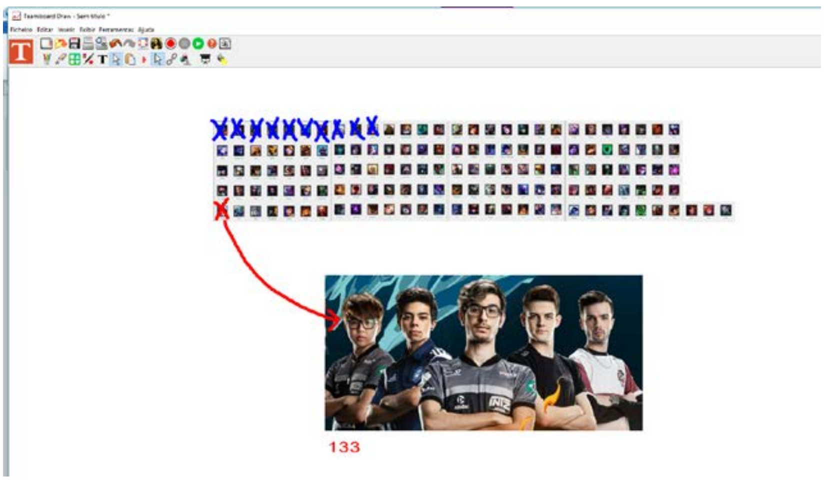
Colocaremos na Lousa a figura dos campeões à disposição (Figura b), já considerando os 10 excluídos no banimento, e a dos jogadores (Figura c) para melhor ilustrar a escolha da equipe. A Figura 74 mostra a Lousa Digital no início da elaboração do raciocínio da resposta.

Figura 74 – Campeões e jogadores



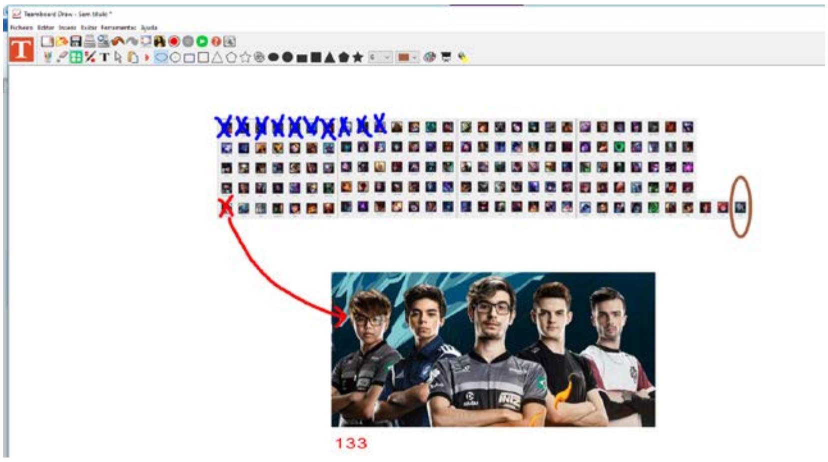
Agora analisaremos a sequência das escolhas para deduzir o número de possibilidades. É importante observar que o time analisado será o primeiro a escolher os personagens, isso faz diferença no número de possibilidades. O primeiro a escolher o campeão será o Yang. Ele poderá escolher qualquer um dos 133 campeões. A Figura 75 mostra este passo na Lousa.

Figura 75 – Número de possibilidades de escolha para Yang



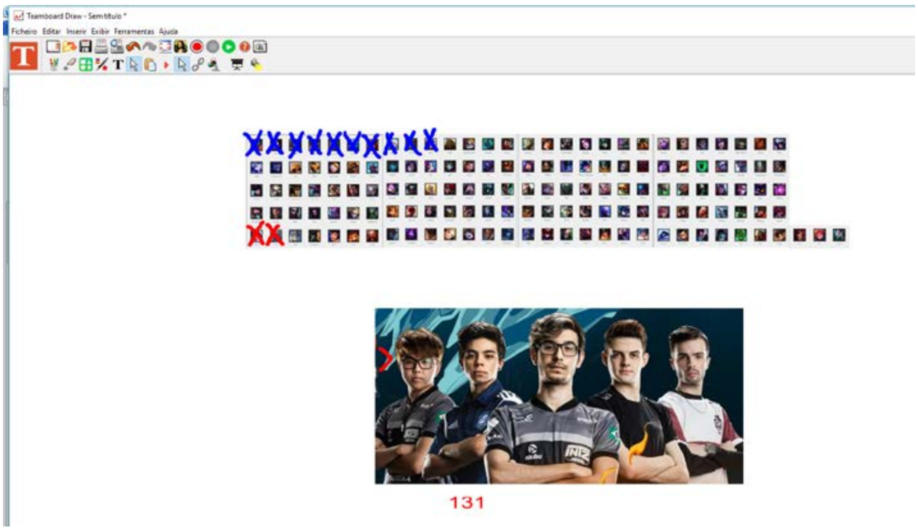
Neste momento, a outra equipe escolhe seu primeiro personagem, como mostra a Figura 76.

Figura 76 – Primeira escolha da outra equipe




Após esta escolha, perceba que o próximo jogador, Revolta, não poderá mais escolher 12 campeões, ou seja, tem 131 personagens disponíveis, como pode ser observado na Figura 77.

Figura 77 – Escolha para Revolta




Neste momento, os alunos são estimulados a continuar o processo mentalmente e deduzir que os próximos jogadores têm 129, 127 e 125 possíveis personagens para escolher, respectivamente.

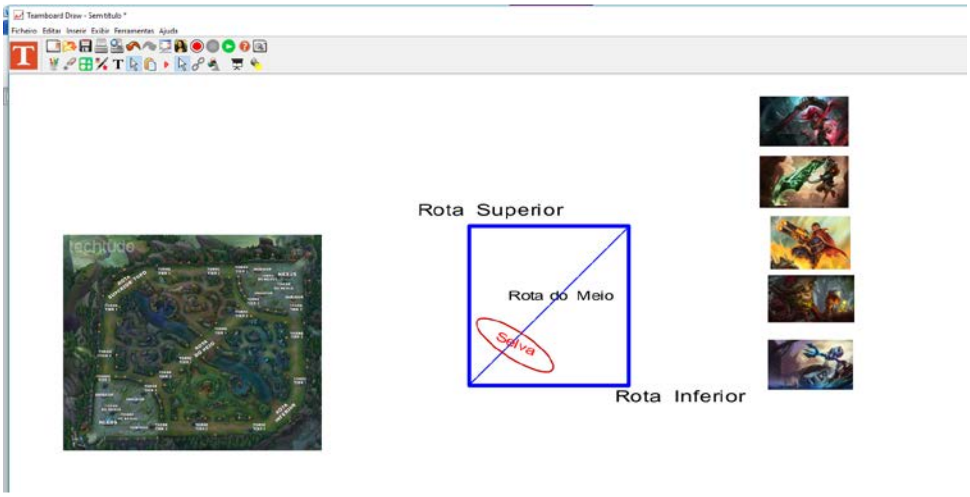
Conclui-se então que o número de possibilidades para a escolha dos 5 campeões será 133.131.129.127.125 = 35.680.126.125. É interessante aproveitar esta oportunidade de lidar com números grandes que normalmente os alunos não veem nos exemplos e exercícios para relembrar como fazer a leitura deste número, o que eles não têm o hábito de fazer.

**b) Para que esses jogadores consigam destruir o Nexus é necessário uma estratégia para dividir o grupo de 5 entre os caminhos lembrando que a equipe posiciona 1 campeão na rota superior, 1 na rota do meio, 1 na selva e 2 na rota inferior. Pensando nisso, mostre de quantas maneiras distintas podemos distribuir os campeões escolhidos para atravessar as rotas, chegar na base inimiga e destruir o nexus?**

Para resolver esse item é necessário ressaltar que o time deve escolher um dos 5 campeões para posicionar rota superior, outro para a rota do meio e um terceiro para a selva. Os 2 personagens restantes ficam juntos na rota inferior na fase inicial do jogo.

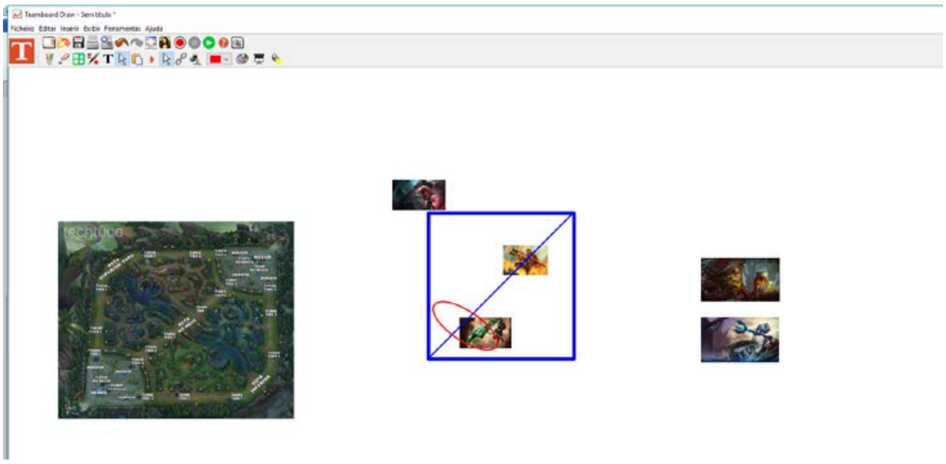
Na Lousa, com a ferramenta Formas Geométricas, vamos reproduzir as rotas. Utilizaremos cinco personagens do jogo para ilustrar a estratégia de resolução, simulando que estes foram os escolhidos pelo time. A Figura 78 mostra a Lousa no início do processo.

Figura 78 – À esquerda, reprodução das rotas e à direita, os possíveis campeões escolhidos pela equipe



Uma estratégia utilizada é colocar um campeão em cada caminho (exceto na Rota Inferior) e na Selva para que haja proteção destes espaços e, logo após, posicionar os dois restantes no caminho restante. Para isso movimentaremos os campeões para os caminhos e para a Selva, como na Figura 79.

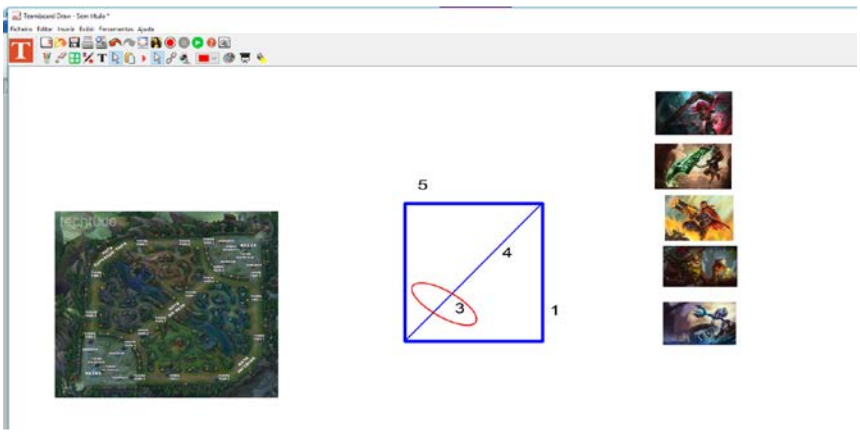
Figura 79 – Movimentando três campeões para os caminhos



Como sobraram dois campeões, estes são exatamente os que ficarão juntos na Rota Inferior.

Com isso, os alunos são convidados a estabelecer o número de possibilidades de ocupação de cada espaço até que juntos, tenhamos o cenário mostrado na Figura 80 na Lousa, considerando que a ordem de posicionamento dos personagens nos lugares foi: 1º Rota Superior, 2º - Rota do Meio, 3º - Selva e 4º - Rota Inferior.

Figura 80 – Analisando as possibilidades para cada espaço




O que os leva a concluir que o número de maneiras de posicionar a equipe é 5.4.3.1 = 60.

## CONCLUSÃO

Ao escrever essa dissertação, tenho por certo que o maior ensinamento que recebi está diretamente ligado ao papel desempenhado pelo professor em suas aulas. Desde a graduação meu objetivo era transmitir ao aluno o conteúdo de forma mais clara possível e fazer com que eles chegassem à solução de um problema utilizando o melhor processo. Porém, na caminhada profissional, comecei a tomar rumos diferentes, ensinar de um modo que eu mesma não aprovava, mas, por falta de motivação e por ser mais confortável, insistia em me manter nesse processo. Passei a ensinar de modo mecanizado, sem estimular e motivar meus alunos a pensarem na resolução de um problema. Iniciei o processo de pesquisa neste tema na Pós-Graduação realizada na Universidade Federal Fluminense e, por ser um assunto que me motiva, resolvi dar continuidade à pesquisa, porém com outra ênfase, nesta dissertação.

A escolha do tema Resolução de Problemas com a vertente tecnológica do uso da Lousa Digital foi feita com o objetivo de modificar de alguma maneira nossa prática de ensino e também multiplicar este processo de transformar as questões e usar um recurso tecnológico divulgando para outros professores.

A metodologia da Resolução de Problemas permite que o professor ensine a Matemática expondo aos alunos situações-problema que estejam próximos à realidade do aluno para que gere nele uma maior motivação e engajamento. Ligando as ideias de Resolução de Problemas à tecnologia, conseguimos uma atenção maior dos alunos, pois o ensino passa a ser mais atrativo e menos mecanizado. Para solucionar algum problema os alunos deverão investigar possíveis estratégias, explorar conceitos, analisar seus erros, chegar à solução e generalizar este processo.

Pensando assim, utilizei nas aulas algumas questões do cotidiano escolar retiradas de livros ou da internet para que os alunos resolvessem mesmo antes de iniciar o processo de orientação do mestrado, na tentativa de pôr em prática toda a teoria da Resolução de Problemas que eu já havia começado a pesquisar, como as ideias de Pólya, e adiantar a minha pesquisa. Porém a experiência não aconteceu como eu esperava porque muitos alunos erravam as questões ou percebia-se que tentavam reproduzir mecanicamente a resolução de outras questões. Então, a pesquisa passou a ser direcionada à teoria envolvida e às questões que eu havia utilizado porque a minha dificuldade na experiência pode ser a mesma que impede muitos professores de seguirem adiante até obterem êxito.

Desse modo, decidimos modificar o enunciado das questões a fim de torna-las mais próximas da realidade dos nossos alunos, para que se apropriassem e entendessem a história que estavam lendo, e aliamos ao recurso da Lousa Digital para auxiliar o desenvolvimento da resolução de todas as questões, permitindo esta experimentação e visualização. Como trabalho para um futuro próximo, pretendo repetir a experiência com esta nova abordagem, o que ainda não foi feito por não haver tempo hábil.

Em suma, este trabalho sugere que o professor reflita sobre as questões que ele costuma propor aos alunos, na perspectiva da Resolução de Problemas, e busque o apoio dos recursos tecnológicos muitas vezes já disponíveis nas escolas. A metodologia da Resolução de Problemas aliada à Lousa digital, por exemplo, é uma estratégia interessante que o docente pode utilizar para executar a difícil tarefa que é ensinar Matemática.

Sabemos que a longa jornada de trabalho dos docentes e a falta de recursos disponíveis podem ser fatores que impeçam a multiplicação destas ideias, mas esperamos que este trabalho seja motivador de diversas tentativas com êxito neste sentido.

**REFERÊNCIAS**


ALVES, Rubem. *Primeira lição para os educadores*. Disponível em: < http://fma.if.usp.br/~everton/texts/ralves/node1.html >. Acesso em 15 fev. 2019

BARBOSA, A. *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico da Universidade do Minho Portugal*, tese de Doutorado. 2010.

BLOG DA MATEMÁTICA. Disponível em: <http://matematicanoarsenio.blogspot.com/2013/04/exercicio-01.html> Acesso em: fev de 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática (5ª a 8ª séries)*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base nacional comum curricular*. Brasília, DF, 2018. Disponível em:< *http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf>. Acesso em: fev 2019*.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC/SEMT, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Parte I, II, III e IV. Brasília: MEC, 2000
BROUSSEAU, Guy. *Introdução ao estudo das Situações Didáticas*, Ed. Ática, 2007.

BURIASCO. Regina L. C. de. *Sobre a Resolução de Problemas* (II). Nosso Fazer, ano 1, n.º. 6, Secretaria Municipal de Educação - Londrina, 1995.

CARRAHER, Terezinha Nunes. *Uma construção em matemática*. AMAE Educando, Belo Horizonte, 1990.

CARRASCO, Lucia H.M. *Leitura e escrita na matemática*. In: NEVES, Iara C.B.et al. (orgs). Ler e escrever: Compromisso de todas as áreas. Porto alegre: Editora da Universidade, UFRGS, 2000.

CARVALHO, J. B. P; CARVALHO, P. C. P; FERNANDEZ, P; MORGADO, A. C de O. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. 1991

CARVALHO, J.B.P.F. *O que é Educação Matemática*. Temas e Debates, Rio Claro, vol.4, 1991.

CHI, M. T. H. & GLASER, R. A. *Capacidade para a Solução de Problemas*. In STERNBERG, R.J. *As Capacidades Intelectuais Humanas: Uma Abordagem em Processamento de Informações.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

CHI, M.T.H; Glaser,R.; Farr, M.J. *The Nature of expertise*. {S.I}: Psychology Press, 2014.

DANTE, L, R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 12. ed., São Paulo: Ática, 2000.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. 12. ed., São Paulo: Ática, 2002.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. 2. ed. São Paulo: Ática, 1991.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de matemática*. 2. ed. São Paulo: Ática, 1998.

DANTE, L. R*. Didática da Resolução de Problemas.* São Paulo: Ática, 1989.

DANTE, L. R. *Formulação e Resolução de Problemas de Matemática*: teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DANTE, L. R. *Formulação e Resolução de Problemas de Matemática*: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

DEVLIN, K.  Matemática: *A Ciências dos Padrões*. Tradução por Alda Maria Durães. Portugal: Porto Editora. 2002.

DEWEY, J. How we think: *A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: Heath, 1933.

DINIZ, L. *Exercícios*. Disponível em: <http://www.professordiniz.com/2/3 >. Acesso em: fev de 2019.

ECHEVERRÍA, M. *A solução de problemas em matemática*. In: POZZO, J. (Org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: Artes Médicas, p.43-66, 1998.

ECHEVERRÍA, M.D.P.P.; POZO, J.I. *Aprender a resolver problemas e resolver problemas* para. In *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver a aprender*. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed, 1998.
EXERCICÍOS BRASIL ESCOLA. Disponível em <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-fatorial-principio-fundamental-contagem.htm>. Acesso em fev de 2019.

GOLDSTEUIN F. C; LEVIN H. S. Disorders of reasoning and problem solving ability. In A. L. Benton, M. R. Meier, & L. Diller (Eds.), *Neuropsychological rehabilitation*. New York: Guilford Press, pages 327–344, 1987

HUAMAN, R. R. H. A *Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem Avaliação de Matemática na e além da sala de aula*. 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar. vol 5. São Paulo: Atual .1985.

ITACARAMBI, R. R. *Resolução de Problemas, Primeiro Ciclo do Ensino Fundamental, construindo uma Metodologia*. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática CIAEM, 2011, Recife. Anais da XIII CIAEM, 2011.

KRULIK, S., *A resolução de problemas na Matemática escolar*, 4 ed., São Paulo, Atual, 1997.

KRULIK, S; RUDNIK, J. A. *Reasoning and Problem Solving* – A Handbook for Elementary School Teachers. Massachussets: Allyn and Bacon, 1993.

LIMA, E. L. et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, V. 1, 2 e 3. 6 ed. - Rio de Janeiro: SBM. 2006.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A Matemática do Ensino Médio*. vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*. 3ªed. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: 2001.

LINS, R.C. Matemática, Monstros, *Significados e Educação Matemática*, IN: BICUDO, M.A.V. e BORBA, M. C. *Educação Matemática*: Pesquisa em Movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2004.

MICOTTI, M. C. de O. *O Ensino e as Propostas Pedagógicas*. In.: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, (p. 153 a 157).

MOREIRA, M. A. & MASINI, E. F. S., *Aprendizagem Significativa – a teoria de David Ausubel*. São Paulo, Moraes, 1982.

MORGADO, A.C.O.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. 9. ed. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAKASHIMA, R. H. R.; AMARAL, S. F. *A linguagem audiovisual da lousa digital interativa no contexto educacional. Pesquisas em Educação, Comunicação e Tecnologia*, v.8, n.1, p. 33-50, dez. 2006.

NAKASHIMA, Rosária Helena Ruiz; AMARAL, Sergio Ferreira do Amaral. Indicadores didático-pedagógicos da linguagem interativa da lousa digital. Caderno de Educação, Pelotas, set/dez. 2010. Disponível em: <http://www2.ufpel.edu.br/fae/caduc/downloads/n37/15.pdf>. Acesso em: 16 fev de 2019.

ONUCHIC, L. R. *Uma história da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo*. UNESP: 2008. Disponível em:< http://www.rj.gov.br/c/document_library/get_file?uuid=6d593edf-da1c-42aa-9e5f-808ad96eee19&groupId=91317>. Acesso em: 15/02/2019

ONUCHIC, L.L.R. & ZUFFI, E. M. *O ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores*. Revista Iberoamericana de matemática, 2007, 79- 97.

ONUCHIC, L.R., ALLEVATO, N. GOMES, S. *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas*. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo, A.V; Marcelo de Carvalho Borba. (Org.). Educação matemática: pesquisa em movimento. 3 ed. São Paulo: Cortez, 2005, cap. 12, p. 213-231.

ONUCHIC, L.R. *Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas*. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Pesquisa em educação matemática. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, p. 199-218.

PAIS, L. C. *Uma Introdução*. ed. PUC – São Paulo, 1999.

PAVANELO, R. M. *Educação matemática e criatividade*. A educação matemática em revista. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), Ano II, nº 3, 2º semestre de 1994.

PIMM, D. *EL Lenguaje matemático em El aula*. Madrid: Morata, 1999.

POLYA, G. *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1997.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PORTAL DO SABER. *Exercícios da OBMEP*. Disponível em: <http://portaldosaber.obmep.org.br >. Acesso em fev de 2019.

POZO, J. I. (Org.). *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprende*r. Porto Alegre: Artmed, 1998.

POZO, J.I.; ECHEVERRÍA, M.D. P. P. *Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.
RAMOS, A. P. et al. *Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias e resolução*. MAT450 - Seminários de Resolução de Problemas. Março de 2002.

ROCHA, I. C. B. da. *Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania? Educação Matemática em Revista*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, p. 22-31, n 9/10, Abril 2001

SCHOENFELD, A. *Mathematical Problem Solving*. New York, Academic Press, 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Jr. *Developing understanding in mathematics via problem solving*. In: P. R. Trafton (Ed.), New directions for elementary school mathematics, 1989 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Reston, VA: NCTM. p. 31–42. 1989.

SILVEIRA, J. F. P. *O que é matemática?* 2001. Disponível em:<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2009_uenp_matematica_md_arisoli_garagnani.pdf>. Acesso em: 15 fevereiro de 2019

SMOLE, K. S. S.; DINIZ, M. I. (Org.) L*er, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOARES, M. T. C; PINTO, N. B. *Metodologia da resolução de problemas*. Disponível em:<http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf> Acesso em: 15 de fevereiro de 2019

TADEU, W. *Exercícios de Matemática para o Colégio Pedro II e Vestibulares*. Disponível em <http://professorwaltertadeu.mat.br/GABlistsegcombinacoes.doc >. Acesso em: fev de 2019.

TEMÁTICA E CÁLCULO. *Exercícios de Matemática*. Disponível em: <http://tematicaecalculo.blogspot.com/2018/02/combinatoria.html>. Acesso em: fev de 2019.

TEMPO DE MATEMÁTICA. *Exercícios de Matemática*. Disponível em: <http://tempodematematica.blogspot.com/2015/02/exercicios-sobre-fatorial-e-principio.html>. Acesso em: fev de 2019.

TUTOR BRASIL. Disponível em <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=7516>. Acesso em: fev de 2019.

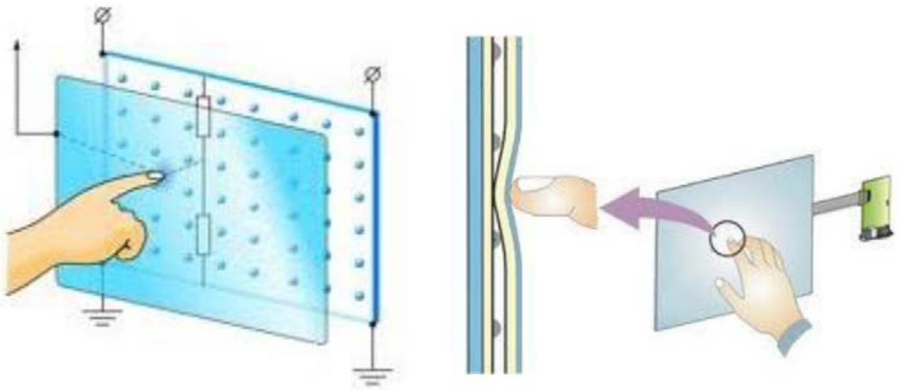
VERGNAUD, G. *Multiplicative structures*. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. 1983.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente*. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

**APÊNDICE** - A Lousa Digital TeamBoard

A LD TeamBoard é uma lousa Touch Screen, composta por: tela, projetor e caneta. A superfície de sua tela é EVS **(Egan Versa Surface)**, desenvolvida com a uma tecnologia de baixa reflexão e ângulo de 160°, possibilitando que as imagens sejam projetadas que forma clara e nítida.

Figura 1-Tecnologia Sensível ao toque

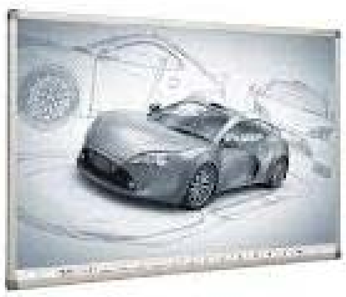


Fonte: Site Teamboard.com

O TeamBoard é um produto que pode ser usado de quadro maneiras:  tela de projeção, quadro branco, quadro inteligente e quadro interativo.

- Tela de projeção: apenas para projetar algo nela, por exemplo, um vídeo.

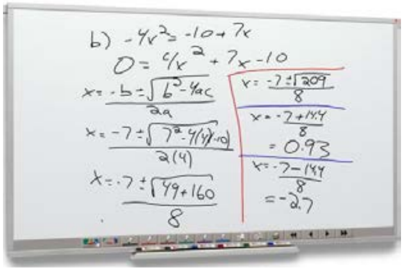
Figura 2 - O TeamBoard



Fonte: Site Teamboard.com

•Quadro branco: por sua superfície ser apropriada para escrita usando marcadores e canetas de quadro branco.

Figura 3- O TeamBoard



Fonte: Site Teamboard.com

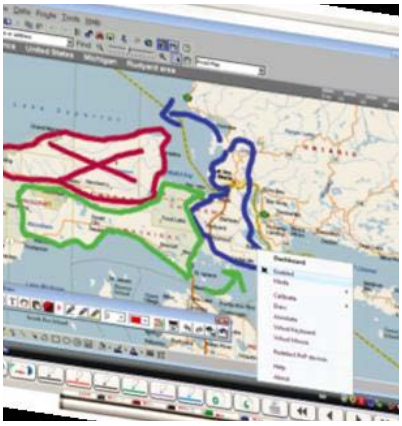
•Quadro inteligente: nele podemos escrever, salvar e imprimir as atividades feitas.

Figura 4 - Quadro inteligente

Fonte: Site Teamboard.com

•Lousa Interativa: por ser sensível ao toque, podemos esquecer o computador e fazer tudo diretamente na tela do TeamBoard, usando apenas os dedos.

Figura 5 - O TeamBoard



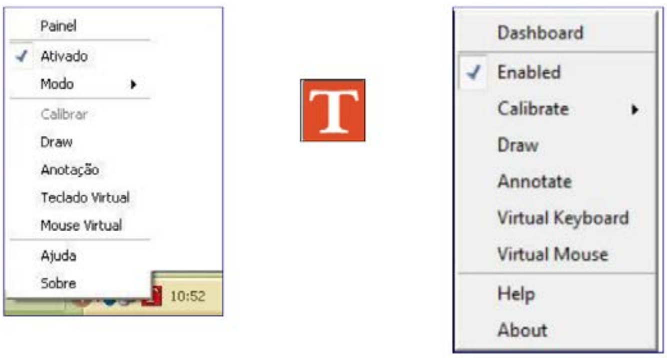
Fonte: Site Teamboard.com

Ao instalar o software do TeamBoard, um ícone, Figura 6, é inserido na barra de ferramentas do Windows e, ao clicar nele aparecerá um menu de funções da LD, conforme Figura 7.

Figura 6 - Ícone na barra de ferramentas do Windows.

Fonte: Site Teamboard.com

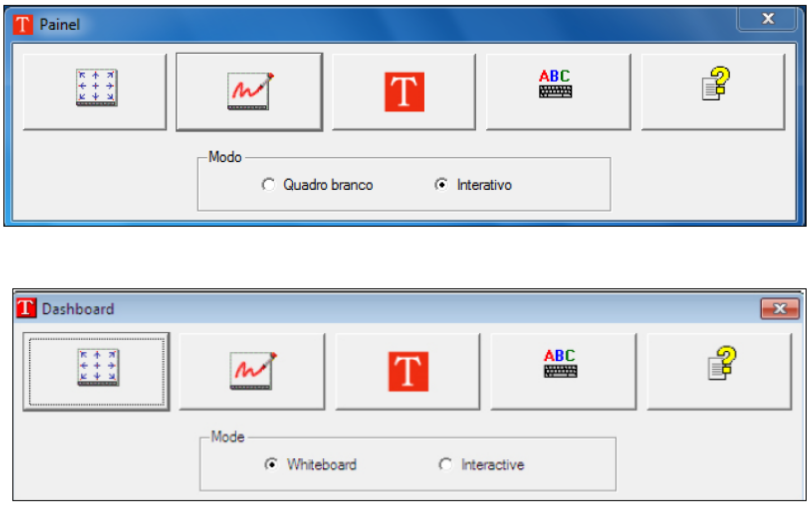
Figura 7 - Menu de Funções




Fonte: Site Teamboard.com

Ao iniciar o trabalho na LD, será aberto o Painel de comandos, que nos permite escolher o modo da LD, se quadro branco ou interativo, Figura 8.

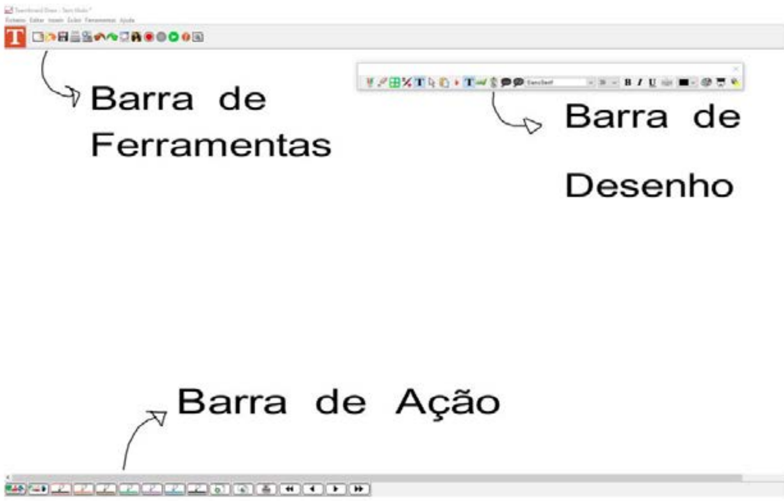
Figura 8 - Menu de Funções




Fonte: Site Teamboard.com

O TeamBoard, possui somente duas ferramentas de trabalho: a barra de ação e a barra de ferramentas de desenho.

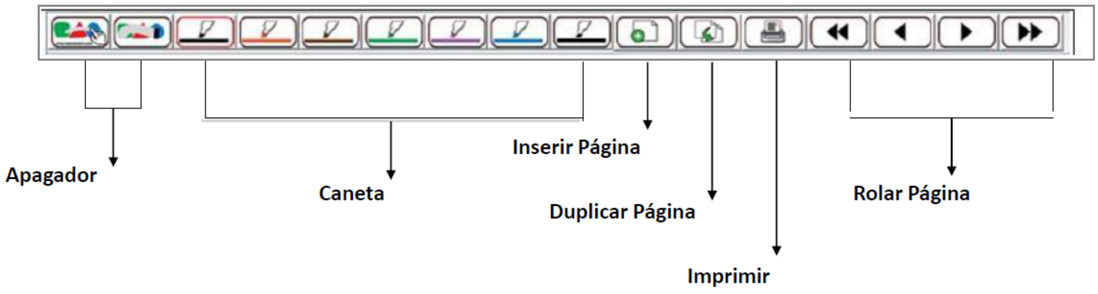
Figura 9 - Visão Geral do TeamBoard




Fonte: O autor

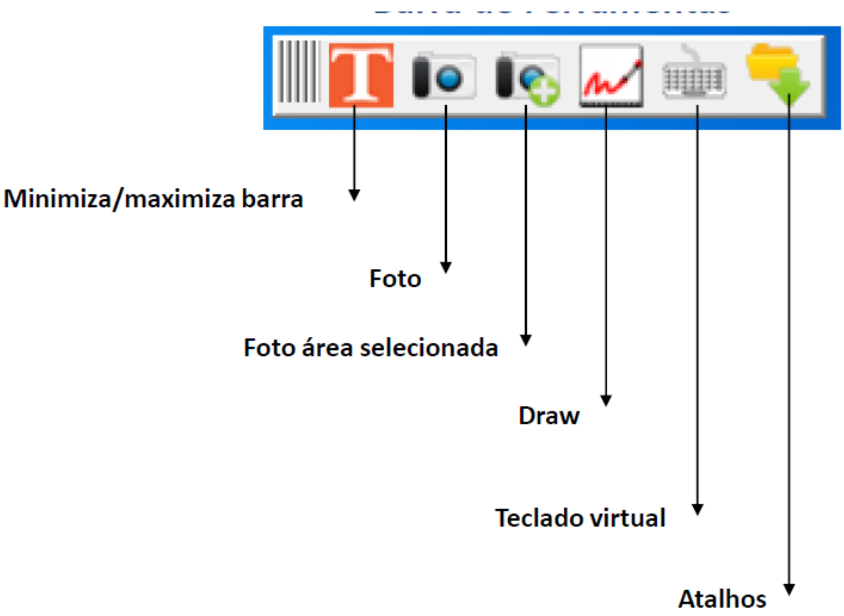
As figuras a seguir, mostram um resumo da utilidade de cada barra.

Figura 10 - Barra de Ação 1



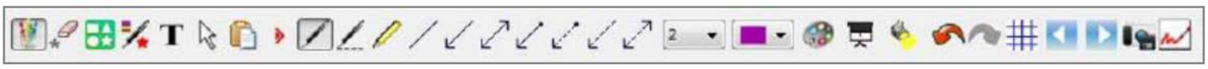

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 11 - Barra de Ação 2




Fonte: Site Teamboard.com

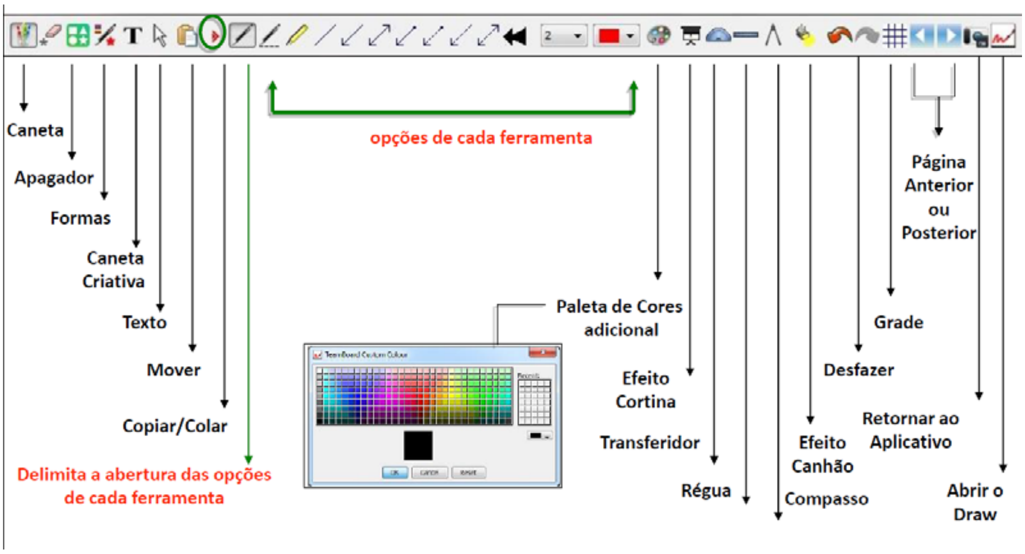
Figura 12 - Barra de Ferramenta de Desenho



Fonte: Site Teamboard.com

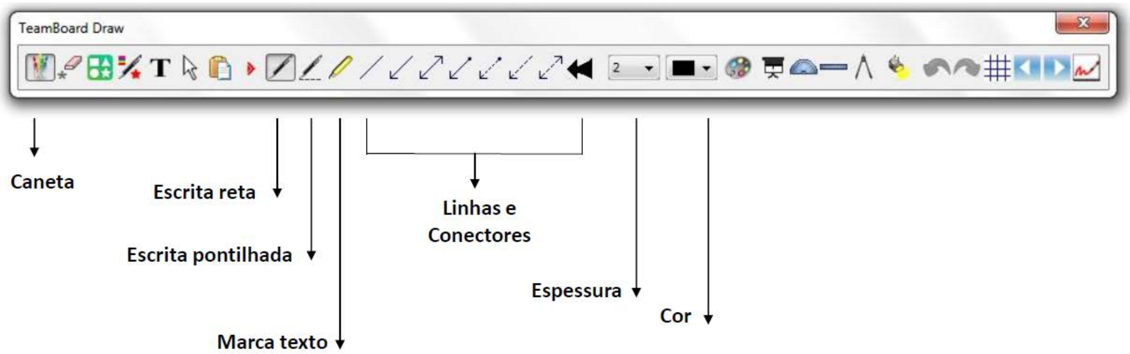
A barra de Ferramenta de Desenho é dividida em várias partes, como veremos nas figuras a seguir.

Figura 13 - Barra de Ferramenta do Draw



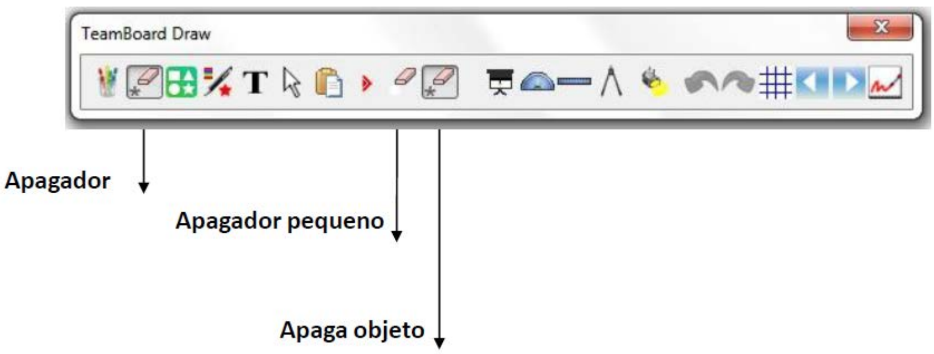

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 14 - Barra de Ferramenta – Caneta



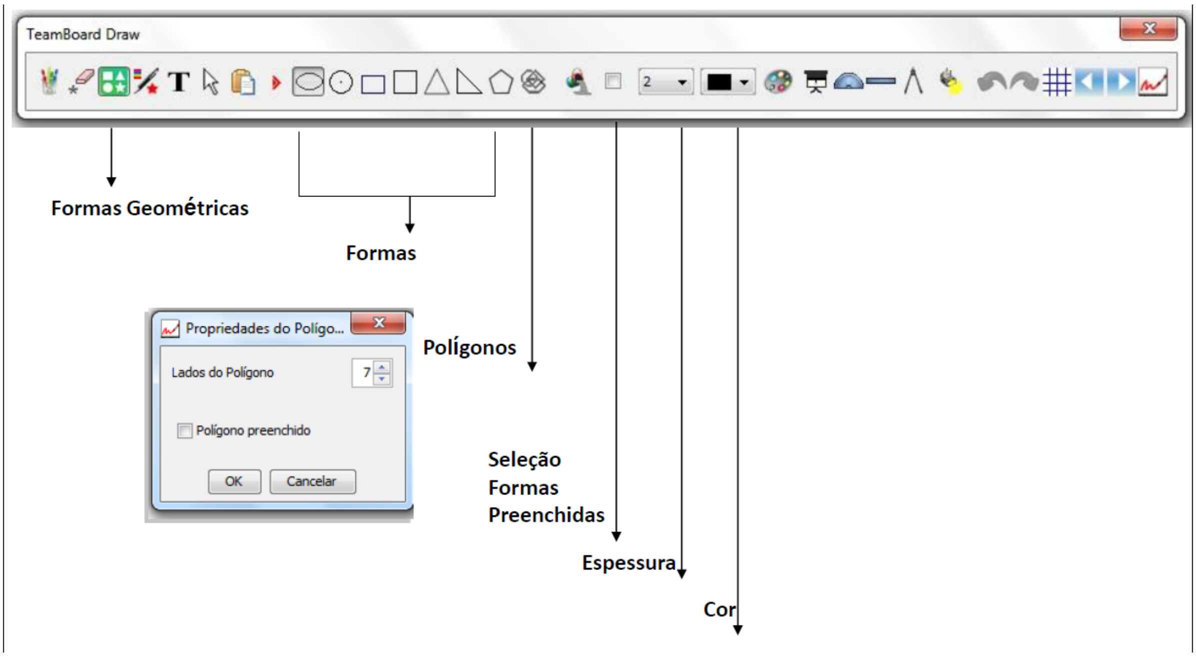

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 15 - Barra de Ferramenta - Apagador



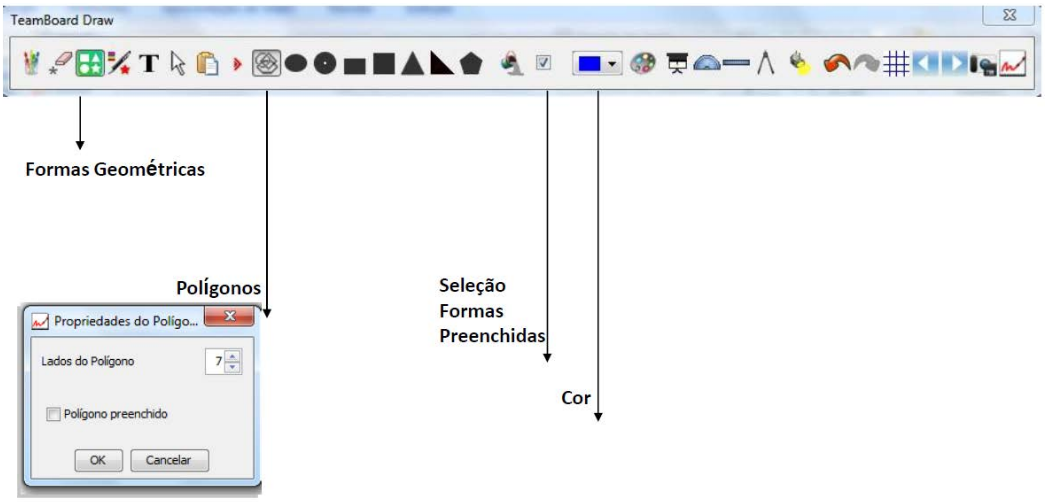

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 16 - Barra de Ferramenta – Formas Geométricas 1



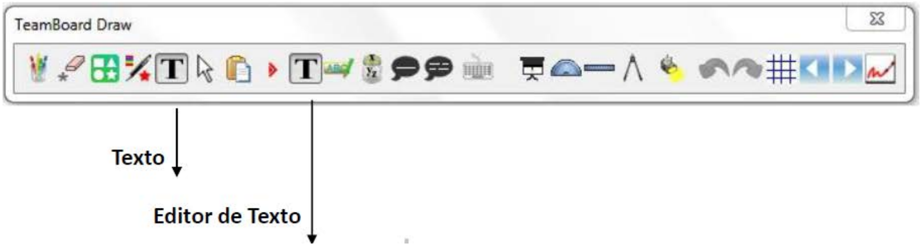

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 17 - Barra de Ferramenta – Formas Geométricas 2



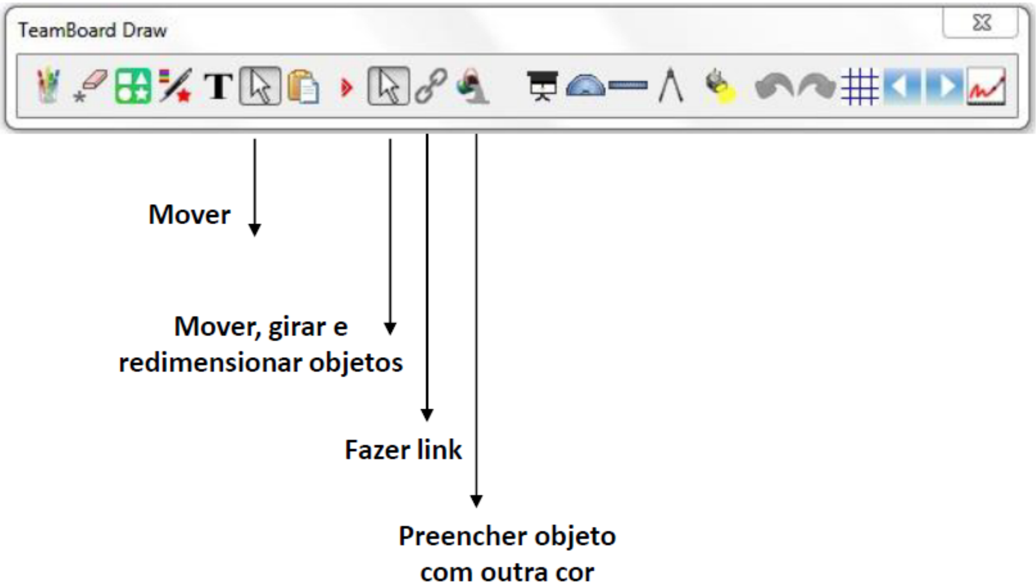

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 18 - Barra de Ferramenta – Editor de Textos



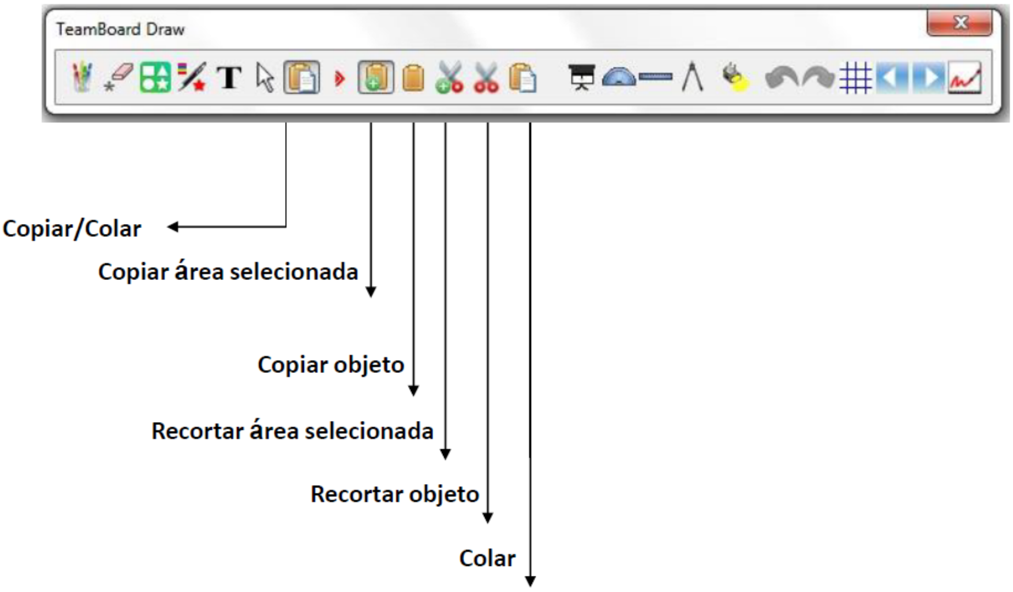

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 19 - Barra de Ferramenta - Mover



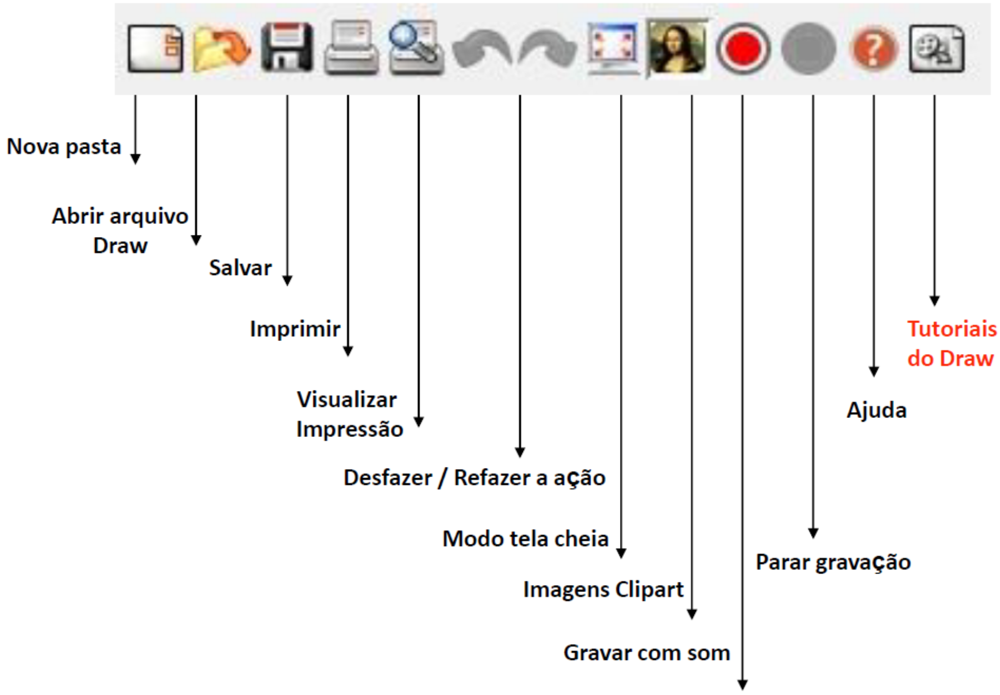

Fonte: Site Teamboard.com

Figura 20 - Barra de Ferramenta – Copiar, recortar e colar




Fonte: Site Teamboard.com

Figura 21 - Barra de Ferramenta - Padrão




Fonte: Site Teamboard.com

Figura 22 - Barra de Ferramenta – Importar imagens e filmes

Fonte: Site Teamboard.com

**ANEXO** – Resumo para Resolução de Problemas

Colégio Estadual Walter Orlandini.
Professora: Monique Andrade
Para resolver problemas matemáticos, seguiremos alguns passos sugeridos por Geoge Pólya.

*1º Passo- Compreender o problema*

Neste passo devemos tomar os seguintes questionamentos: quais são os dados? Quais são as restrições? O que se pretende neste problema? Quais incógnitas usar?
Um conselho para a execução desse passo é: não avançar enquanto não compreender realmente o problema.
É necessário investir o tempo que for preciso, o que em muitos casos, esse tempo é bem longo!

*2º Passo – Estabelecer um plano*

Fazer um esquema (por meio de cálculos ou desenho) se for possível; descrever a estratégia que vai utilizar.
Se não conseguir resolver o problema proposto, arranje outro mais simples e depois generalize (o que chamamos de problema correlato, ele vai te auxiliar na resolução do seu problema).

*3º Passo – Executar o plano*

Desenvolva a ideia do plano.
Faça os cálculos referentes no seu plano.
É necessário que o professor não interfira na execução do plano, e sim seja um auxiliador.

*4º Passo – Fazer um retrospecto sobre a resolução*

Neste passo iremos analisar a solução, para isso devemos verificar se a solução (ções) satisfaz (em) o problema.

Se o aluno fizer um retrospecto reconsiderando e reexaminando o resultado final, eles poderão consolidar seus conhecimentos e até mesmo ir em busca de novas soluções.