



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Marcelo Luiz de Carvalho Moura Moreira

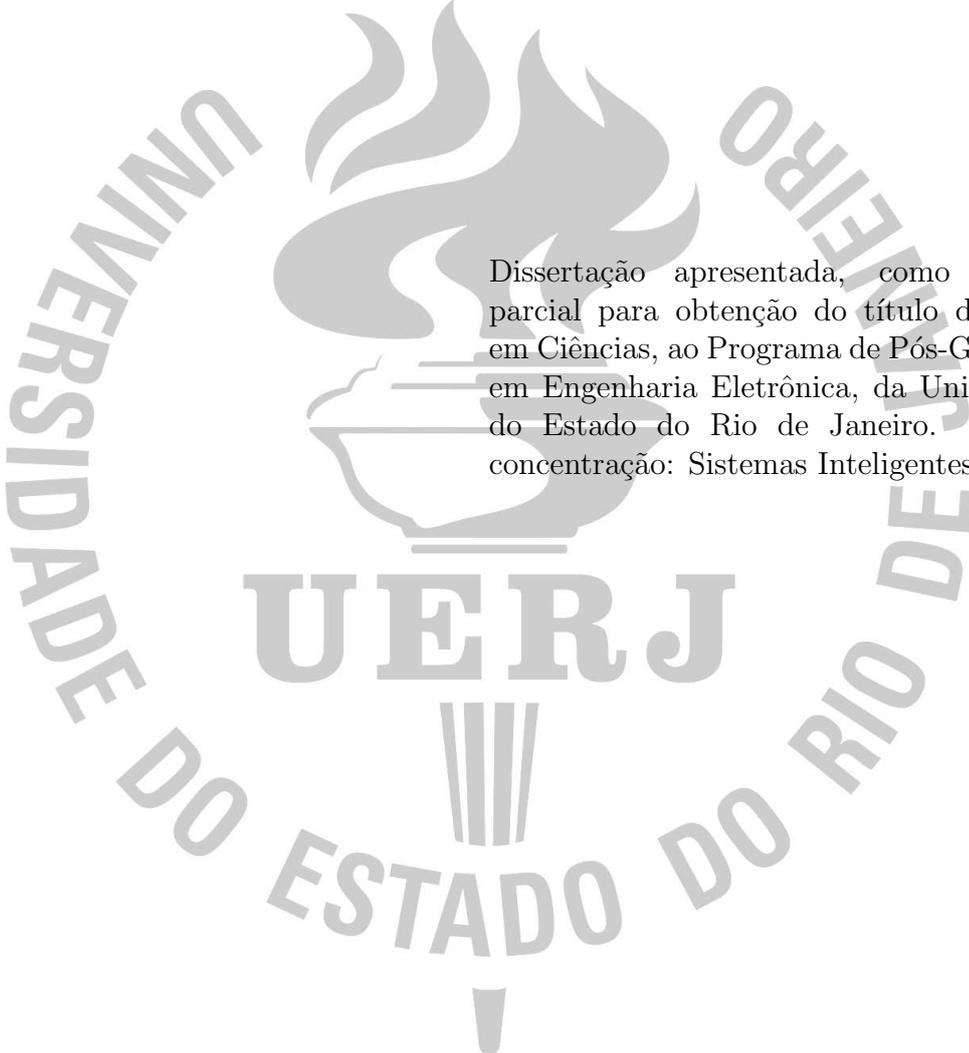
**Controlador Adaptativo Backstepping baseado em  
Diferenciador Global com Ganhos Dinâmicos**

Rio de Janeiro

2019

Marcelo Luiz de Carvalho Moura Moreira

**Controlador Adaptativo Backstepping baseado em  
Diferenciador Global com Ganhos Dinâmicos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2019

## CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

M838 Moreira, Marcelo Luiz de Carvalho Moura.  
Controlador adaptativo backstepping baseado em  
diferenciador global com ganhos dinâmicos / Marcelo Luiz de  
Carvalho Moura Moreira. – 2019.  
50f.

Orientador: Tiago Roux de Oliveira.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de  
Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas não-lineares -  
Teses. 3. Sistemas de controle ajustável - Teses. I. Oliveira, Tiago  
Roux de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Faculdade de Engenharia. III. Título.

CDU 681.511.4

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Marcelo Luiz de Carvalho Moura Moreira

**Controlador Adaptativo Backstepping baseado em  
Diferenciador Global com Ganhos Dinâmicos**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes.

Aprovado em: 23 de Agosto de 2019

Banca Examinadora:

---

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc. (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Andrei Giordano Holanda Battistel, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UFRJ

---

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc.

Faculdade de Engenharia - UFRN

Rio de Janeiro

2019

## AGRADECIMENTO

À minha mãe, Sonia Maria de Carvalho Moura, por todo o carinho e atenção durante essas quase três décadas (28 anos). Além de excelente mãe, é também uma avó e tanto! Te amo.

Ao meu pai, Armando Moreira filho, pelo legado que me trouxe de irmãs, sobrinhas e inclusive madrasta em uma etapa de vida da qual até então não havia consciência de existência dos mesmos. Também não teria conseguido sem esta nova família erguida e abençoada. Amo todos vocês.

Aos meus avós, mesmo que nem todos estejam presentes em corpo. Em especial à Maria Elisa das Graças Reis Moura, minha avó querida e bisavó surpreendente! Agradeço por cada bilhetinho deixado em minha mesa enquanto eu estava estudando fora de casa. Você está para sempre em meu coração. Te amo.

À minha tia, Ana Maria de Carvalho Moura, e ao meu tio, Jean Gui Eon, que me ofereceram ajuda ínfimas vezes. Suas presenças em minha vida são muito importantes.

À minha maior realização, Helena Valente Moura. Você foi e sempre será o meu maior feito. Amo você incondicionalmente!

À minha atual noiva, Ivana Harter Albuquerque, obrigado pelo suporte e muito carinho. Além de tudo o que você faz por mim, consegue ser a melhor tia do universo para a Helena. Te amo.

A meus amigos, João Luchini, João Pedro Tavares, Thiago Drummond, Lucas Martins, Gustavo Carapiá e Guilherme Vieira pelos acertos e erros. Pela ajuda nos momentos mais difíceis. Obrigado por estarem sempre ao meu lado.

Ao meu amigo e companheiro na elaboração desta dissertação, Victor Hugo Pereira Rodrigues cujo maior ensinamento foi o de aceitar a condição dos outros e a própria. Obrigado pela amizade!

Ao meu amigo Paulo César da graduação ao mestrado e quem sabe até o doutorado? Obrigado pela parceria e risadas. Você é único. Aos amigos que o PEL me deu: Denis, Elly e Dayane.

Aos técnicos do Laboratório de Engenharia Elétrica (LEE) e professores que fizeram parte de minha vida acadêmica. Que tanto me ensinaram e permitiram meu cresci-

mento pessoal e profissional.

Ao meu professor orientador, Tiago Roux Oliveira, por criar uma oportunidade de novos conhecimentos. Com certeza o senhor foi o melhor professor que eu já tive e terei em toda a minha vida. Um exemplo de pessoa e de amigo. Seu apoio também foi necessário para o término de mais uma decisão e escolha arbitrada por mim. Obrigado.

Ao meu professor “coorientador” Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz, por aceitar me ajudar em cima da hora e contribuir muito em minha dissertação com seu trabalho publicado no SBAI 2013. Obrigado.

*As pessoas têm medo das mudanças.  
Eu tenho medo que as coisas nunca mudem.*

Francisco Buarque de Hollanda

## RESUMO

**MOREIRA**, Marcelo Luiz de Carvalho Moura. *Controlador Adaptativo Backstepping baseado em Diferenciadores Globais com Ganhos Dinâmicos*. 50f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

A presente dissertação propõe a aplicação do diferenciador global baseado em modos deslizantes de ordem superior (*Higher-Order Sliding Mode - HOSM*) com ganhos dinâmicos no controle adaptativo *backstepping* para sistemas incertos não lineares do tipo *strict-feedback*. O uso deste tipo de diferenciador na lei de controle do sistema em malha fechada permite que o mesmo seja globalmente uniformemente estável para quaisquer condições iniciais, já que trata-se de um diferenciador exato com ganho dinâmico. Além disto prova-se o rastreamento de saída assintótico. Para ilustrar o novo Teorema proposto o novo controlador é aplicado em um sistema *wing-rock* de terceira ordem com a comparação entre os diferenciadores linear, *HOSM* com ganho fixo e *HOSM* com ganho dinâmico. São analisados o estado, o sinal de controle, o plano de fase e o ganho entre os diferenciadores.

Palavras-chave: *Backstepping*; Controle Adaptativo; Diferenciador Global; Sistemas Não Lineares.

## ABSTRACT

**MOREIRA**, Marcelo Luiz de Carvalho Moura. *Adaptive Backstepping Controller based on Global Differentiator with Dynamic Gains*. 50f. Master Thesis (Master in Science of Electronic Engineering) - Engineering Faculty, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

The present dissertation proposes the application of the higher-order sliding mode (*HOSM*) based on global differentiator with dynamic gains in adaptive *backstepping* control for nonlinear uncertain systems of *strict-feedback* type. The use of this type of differentiator in the closed loop system control law allows it to be globally uniformly stable for any initial conditions, since it is an exact differentiator with dynamic gain. In addition, asymptotic output tracking is also guaranteed. In order to illustrate our new Theorem, the proposed controller is applied to a third order *wing-rock* system by comparing the results with the linear differentiator, the differentiator *HOSM* with fixed gain and the differentiator *HOSM* with dynamic gain. In these simulations we analyse the state variables, the control signal, the phase plane as well as the main differences between the differentiation schemes.

Keywords: *Backstepping*; Adaptive control; Global differentiator; Nonlinear Systems.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Planta não-linear <i>strict feedback</i> de segunda ordem .....	14
Figura 2	Sistema não linear do tipo <i>strict-feedback de ordem n</i> .....	18
Figura 3	Avião de alta performance com os ângulos $\phi, p, \delta$ . Imagem adaptada de <a href="https://images.app.goo.gl/GyAYQTzedvucavB76">https://images.app.goo.gl/GyAYQTzedvucavB76</a> (última visualização em 27/08/2019).....	40
Figura 4	Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada). .....	43
Figura 5	Sinal de controle para o controlador adaptativo <i>backstepping</i> proposto para o sistema <i>Wing Rock</i> . .....	43
Figura 6	Estado do sistema em malha fechada. ....	43
Figura 7	Ganho dinâmico do diferenciador exato <i>HOSM</i> proposto. ....	43
Figura 8	Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada) com diferenciador linear.....	44
Figura 9	Sinal de controle para o controlador adaptativo <i>backstepping</i> proposto com diferenciador linear.....	44
Figura 10	Estado do sistema em malha fechada com diferenciador linear. ....	44
Figura 11	Ganho do diferenciador Linear em malha fechada. ....	44
Figura 12	Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada) de diferenciador <i>HOSM</i> com ganho fixo. ....	45
Figura 13	Sinal de controle para o controlador adaptativo <i>backstepping</i> proposto com <i>HOSM</i> de ganho fixo para o sistema <i>Wing Rock</i> . ....	45
Figura 14	Estado do sistema em malha fechada aplicando-se o diferenciador <i>HOSM</i> de ganho fixo.....	46
Figura 15	O Ganho fixo $C_{[2]}$ do diferenciador exato <i>HOSM</i> escolhido é próximo de 1000.....	46

## LISTA DE SIGLAS

HOSM	Higher Order Sliding Mode
RED	Robust Exact Differentiator
CLF	Control Lyapunov Function

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	11
1	<b>CONTROLE ADAPTATIVO BACKSTEPPING</b> .....	13
1.1	Planta de segunda ordem com controlador não adaptativo <i>Backstepping</i> ...	13
1.2	Planta de segunda ordem com controlador adaptativo <i>Backstepping</i> .....	16
1.3	O Controle Adaptativo <i>Backstepping</i> tradicional.....	18
2	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	24
3	<b>DIFERENCIADOR HOSM GLOBAL COM GANHO DINÂMICO</b>	26
4	<b>BACKSTEPPING VIA FUNÇÕES DE SINTONIA E DIFERENCIADORES HOSM GLOBAIS</b> .....	35
5	<b>RESULTADOS DE SIMULAÇÕES</b> .....	40
5.1	O Diferenciador Exato <i>HOSM</i> com Ganho Dinâmico.....	41
5.2	O Diferenciador Linear .....	43
5.3	O Diferenciador Exato <i>HOSM</i> com Ganhos Fixos .....	45
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	47
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	49

## INTRODUÇÃO

Basicamente a teoria de controle não linear pode ser dividida de modo geral em controle robusto e controle adaptativo. Em sistemas adaptativos a lei de controle é projetada utilizando estimativas dinâmicas para os parâmetros desconhecidos da planta. Dessa forma, os ganhos são ajustados o tempo todo a partir de uma dada lei de adaptação. No controle robusto, em geral, procura-se garantir propriedades de estabilidade com ganhos fixos (ou mesmo dinâmicos) para uma dada faixa de variação dos parâmetros da planta, que é o caso, por exemplo, do controle por Modos Deslizantes [1]. A origem da técnica de controle não linear *Backstepping* não é muito clara e, embora não haja consenso, alguns atribuem o seu desenvolvimento ao trabalho da equipe do professor Petar V. Kokotovic da Universidade da Califórnia [2]. O controle Backsproposto permite fazer com que certas variáveis de estado funcionem como “entradas de controle virtuais” de outras variáveis, formando um projeto de controle em cascata. Esta técnica é restrita a uma certa classe de sistemas denominada de *strict-feedback* cujo nome é dado pela presença de recursividade nas equações de estado que são dependentes entre si (as não linearidades na equação de  $\dot{x}_i$  dependem apenas das variáveis de estado  $x_1, x_2, \dots, x_i$ ). Esta estratégia de controle possui diversas aplicações, por exemplo, em motores elétricos [3], a diesel [4], a jato [5], posicionamento de navios, robótica e controle de veículos aéreos [6].

Com o trabalho de Krstić, Kanellakopoulos e Kokotović [7] foi possível atenuar o grau de complexidade do controlador *backstepping* original já que o número de parâmetros a serem adaptados tornou-se menor com a introdução das funções de sintonia. Apesar deste esforço, a tarefa de análise e projeto de tais controladores continua árdua.

Em [8], com auxílio dos diferenciadores exatos locais baseados em modos deslizantes de ordem superior e com ganho fixo [9], surgiu uma nova perspectiva para o controle adaptativo *backstepping*. A proposta de [8] simplifica drasticamente o projeto de controle uma vez que extingue o cálculo de derivadas parciais das funções de estabilização necessárias no *backstepping* por funções de sintonia [7]. O trabalho, no entanto, não apresentou a prova da estabilidade para a classe de sistemas não lineares considerada (do tipo *strict-feedback*) e, com isso, nos deu a oportunidade de avançar neste tema e obtermos uma prova rigorosa até então não apresentada na literatura.

O principal ingrediente proposto para essa generalização foi um diferenciador global

baseado em modos deslizantes de ordem superior *HOSM* com ganhos dinâmicos [10], a fim de garantir a estabilidade global do controlador *backstepping*. Esse resultado é inovador uma vez que com o diferenciador de ganhos fixos em [8], apenas resultados locais poderiam ser alcançados ou classes de sistemas bem restritas poderiam ser consideradas.

### Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada em cinco capítulos. O primeiro capítulo traz um breve panorama sobre o controlador *backstepping*. Introduzimos o assunto cronologicamente, apresentando algumas referências e suas ideias principais. Para fins didáticos, analisamos passo a passo o cerne do projeto de controle *backstepping* para dois exemplos utilizando uma mesma planta de segunda ordem e explorando a técnica adaptativa e não adaptativa, assim como em [11]. A última seção do capítulo é dedicada à teoria completa do controle *backstepping* tradicional [12].

O segundo capítulo engloba a formulação do problema, apresentando o tipo de planta a ser estudada (*strict-feedback*) e a abordagem do controle adaptativo *backstepping* através de funções de sintonia [8].

O terceiro capítulo descreve o diferenciador exato *HOSM* com ganho dinâmico em sistemas de controle adaptativo *backstepping* para o caso geral.

O quarto capítulo envolve a formulação de um Teorema que apresenta a prova da estabilidade global do sistema controlado em malha fechada em função do uso do diferenciador *HOSM* com ganho dinâmico.

O quinto capítulo expõe os resultados de simulações envolvendo o novo controle proposto através do diferenciador *HOSM* com ganho dinâmico e de outros dois diferenciadores: o diferenciador linear e o diferenciador *HOSM* com ganho fixo. Em um exemplo numérico do sistema *Wing Rock*, abordam-se o estado, plano de fase, sinal de controle e ganho de cada diferenciador associado à mesma planta.

Por fim, a conclusão envolve o alcance de nossos objetivos e observações acerca de investigações futuras. O último tópico destina-se àqueles que forem dar continuidade a este trabalho.

## 1 CONTROLE ADAPTATIVO BACKSTEPPING

O controle adaptativo *backstepping* é um método de projeto de controle sistemático iterativo para sistemas não lineares. Ele é baseado na realimentação do estado com uma lei de controle final dada a partir de uma função de *Lyapunov* de controle (*Control Lyapunov Function - CLF*) e as dinâmicas do sistema de malha fechada. Com isso ele satisfaz o critério de estabilidade de *Lyapunov*.

O procedimento envolve selecionar recursivamente funções de estabilização apropriadas de variáveis de estado para atuarem como entradas de um pseudo-controle (leis de controle virtuais) em subsistemas de menor dimensão, obtidas no decorrer do projeto de controle para todo o sistema. Cada estágio de controle adaptativo produz uma nova entrada de pseudo-controle para cada subsistema, que é novamente expressa em termos do sinal do pseudo-controle obtido anteriormente. Este processo é repetido até que a lei de controle real seja obtida no estágio final.

A primeira ideia deste controlador baseado em recursividade veio de Kokotovic [2]. Em cada etapa o procedimento introduz novos parâmetros de projeto e os incorpora em uma nova função de *Lyapunov*, que também é construída passo-a-passo. No entanto, a lei de controle torna-se extensa com derivadas parciais envolvendo cada uma das variáveis de estado do sistema. Assim, em cada fase do projeto *backstepping* é produzida uma nova pseudo-entrada de controle até que a lei de controle real seja obtida na etapa final.

Antes que a teoria seja apresentada formalmente, nas próximas subseções dois exemplos de projeto para uma planta de segunda ordem serão explorados para clarificar os principais passos dessa estratégia de controle.

### 1.1 Planta de segunda ordem com controlador não adaptativo *Backstepping*

Para entendermos melhor o princípio básico do *backstepping* para plantas “*strict feedback*” será apresentado o exemplo encontrado em [11], ver Figura 1.

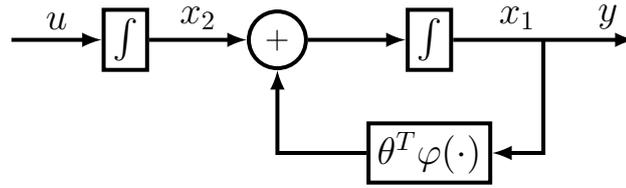


Figura 1 Planta não-linear *strict feedback* de segunda ordem

Considere a planta

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta^T \varphi(x_1), \quad \varphi(0) = 0, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = u, \quad (2)$$

$$y = x_1, \quad (3)$$

onde  $\theta$  é o vetor de parâmetros conhecidos,  $\varphi(x_1)$  é uma função não linear suave,  $x^T = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de entrada,  $y \in \mathbb{R}$  é a saída.

Nosso objetivo é alcançar o equilíbrio do sistema em  $x_1 = x_2 = 0$ . A seguir, serão mostrados os passos que nos levarão a este resultado utilizando a teoria dos controladores *backstepping*.

### Passo 1

Como fora dito, o objetivo é que a saída  $y = x_1$  seja igual ao nosso valor de referência  $y_{\text{ref}}$  que é igual a zero. Primeiramente, faremos o estado  $x_2$  atuar como um controle virtual de  $x_1$  em (1) e apresentaremos a nossa primeira função de estabilização  $\alpha_1(x_1)$ . O objetivo da função de estabilização é permitir que o sistema fique em formato de “cascata” e sempre deixe de forma isolada a variável da iteração seguinte:

$$\alpha_1(x_1) = -c_1 x_1 - \theta^T \varphi(x_1), \quad c_1 > 0 \quad (4)$$

As seguintes variáveis de erro  $z$  são introduzidas

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_{\text{ref}} = x_1, \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1. \end{aligned} \quad (5)$$

O sistema completo (1)–(2) é então expresso através de (4)–(5) em coordenadas de  $z$ :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_2 + \theta^T \varphi(x_1) = z_2 + \alpha_1 + \theta^T \varphi(x_1) = -c_1 z_1 + z_2, \quad (6)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \theta^T \varphi), \quad (7)$$

onde  $\dot{\alpha}_1$  é implementado analiticamente sem o uso de um diferenciador.

A candidata a função de *Lyapunov* para o sistema  $z_1$  a fim de garantir a estabilidade é dada por:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2, \quad (8)$$

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2. \quad (9)$$

Como  $c_1 > 0$ , temos a estabilização do sistema  $z_1$  restando agora a estabilização do sistema  $z_2$ , pois de acordo com o Teorema de *Lyapunov*: quando a função de *Lyapunov* é definida positiva e sua derivada é definida negativa, o sistema (no ponto de equilíbrio) é assintoticamente estável.

## Passo 2

Para o novo sistema (6)–(7) podemos agora desenvolver uma lei de controle  $u = \alpha_2(x_1, x_2)$  para processar a derivada temporal da função de *Lyapunov*  $V_2(x_1, x_2)$ . O interesse é aplicar a função de *Lyapunov* e resolver o sistema de  $z_2$  em (5), como a seguir:

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2, \quad (10)$$

$$\dot{V}_2 = z_1(-c_1 z_1 + z_2) + z_2 \left( u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \theta^T \varphi) \right), \quad (11)$$

$$= -c_1 z_1^2 + z_2 \left( u + z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \theta^T \varphi) \right). \quad (12)$$

Uma maneira simples de alcançar  $\dot{V}_2$  negativa definida é através da lei de controle  $u$ , na expressão entre parênteses, cancelando os termos e mantendo a expressão final  $-c_2 z_2$  com  $c_2 > 0$ , ou seja,

$$u = \alpha_2(x_1, x_2) = -c_2 z_2 - z_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \theta^T \varphi). \quad (13)$$

Essa lei de controle faz com que  $\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ , provando o equilíbrio globalmente assintoticamente estável com  $z = 0$  e  $x = 0$  também.

Caso o sistema tivesse mais variáveis de estado, o procedimento poderia se repetir iterativamente, assumindo que uma variável de estado independente das anteriores faria o papel de sinal de controle. Esse é o motivo para o nome “*backstepping*”.

Lembrando que o exemplo apresentado é o de um projeto de controle não adaptativo *backstepping*, a versão adaptativa será apresentada no exemplo seguinte.

## 1.2 Planta de segunda ordem com controlador adaptativo *Backstepping*

Neste exemplo será verificado que o controle e os parâmetros da lei adaptativa são também projetados de maneira recursiva. A cada passo, uma função de sintonia é desenvolvida e com isso surge uma nova lei adaptativa, mas esta não é implementada como tal. Apenas a última função de sintonia será usada como a lei adaptativa do controlador.

Iremos nos basear no mesmo sistema estudado anteriormente em (1)–(3), porém assumindo-se que  $\theta^*$  é um parâmetro desconhecido, tal que

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta^{*T} \varphi(x_1), \quad \varphi(0) = 0, \quad (14)$$

$$\dot{x}_2 = u. \quad (15)$$

Para resolver este tipo de problema é preciso considerar  $\hat{\theta}$  que é o valor estimado de  $\theta^*$  na função de estabilização em (4) e na mudança de coordenadas em (5). O resultado deste sistema em coordenadas  $z$  e de suas respectivas derivadas temporais fica

$$z_1 = x_1 - y_r, \quad \dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 - \dot{y}_r, \quad (16)$$

$$z_2 = x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1, \quad \dot{z}_2 = u - \ddot{y}_r - \frac{d\alpha_1}{dx_1}(x_2 + \theta^{*T} \varphi). \quad (17)$$

A primeira candidata à função de *Lyapunov* é apresentada e esta é em função tanto de  $z$  quanto do termo não linear  $\varphi$  e do erro do parâmetro desconhecido:

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}. \quad (18)$$

Sua derivada temporal aparece a seguir:

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}. \quad (19)$$

O termo  $v_2 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{\hat{\theta}}$  é escolhido de forma a eliminar o termo  $-\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{\hat{\theta}}$  em (17). Essa expressão pode ser implementada uma vez que estará disponível através da nova lei adaptativa. Portanto, obtemos como sistema do erro

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \tilde{\theta}^T \varphi, \quad (20)$$

$$\dot{z}_2 = z_1 - c_2 z_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \tilde{\theta}^T \varphi, \quad (21)$$

onde  $\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$  é o erro de adaptação. Quando  $\tilde{\theta} = 0$ , o sistema se torna linear e assintoticamente estável. O nosso próximo passo é selecionar a lei adaptativa. Para isso vamos fazer a análise de estabilidade da função de *Lyapunov*:

$$V_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}. \quad (22)$$

Como  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$ , a derivada temporal de  $V_2$  é

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_1 \tilde{\theta}^T \varphi - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \tilde{\theta}^T \varphi - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \quad (23)$$

$$= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\Gamma \varphi z_1 - \Gamma \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi z_2 - \dot{\tilde{\theta}}). \quad (24)$$

A única maneira de eliminar o parâmetro desconhecido do erro de estimação  $\tilde{\theta}$  é selecionando uma lei adaptativa baseada nas funções de sintonia  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , tal que

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Gamma \tau_2(x, \hat{\theta}) = \Gamma (z_1 \varphi - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi z_2). \quad (25)$$

Então, encontra-se  $\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$  negativa semi definida, o que significa que a estabilidade global de  $z = 0$ ,  $\tilde{\theta} = 0$  é encontrada. Nesse sistema as funções de sintonia são

$$\tau_1(x_1) = \varphi z_1. \quad (26)$$

$$\tau_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = \tau_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi z_2. \quad (27)$$

### 1.3 O Controle Adaptativo *Backstepping* tradicional

Primeiramente, vamos considerar um sistema não linear do tipo *strict-feedback* conforme a Figura 2 e descrito a seguir de acordo com o detalhamento apresentado em [12]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \theta^{*T} \varphi_1(x_1) \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \theta^{*T} \varphi_2(x_1, x_2) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \theta^{*T} \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\
 \dot{x}_n &= \beta u + \theta^{*T} \varphi_n(x) \\
 y &= x_1.
 \end{aligned} \tag{28}$$

O vetor  $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  são o vetor de estados e os sinais de entrada e saída do sistema, respectivamente. O vetor de constantes desconhecidas  $\theta^*$  precisará ser estimado ao longo do projeto do controlador. O vetor que apresenta funções conhecidas e não lineares é dado por  $\varphi$ , sendo  $\varphi_i \in \mathbb{R}^p$  para  $i = 1, \dots, n$ . O termo  $\beta \neq 0$  é uma constante conhecida. Nesse sistema, as não linearidades dependem puramente das variáveis que estão sendo realimentadas.

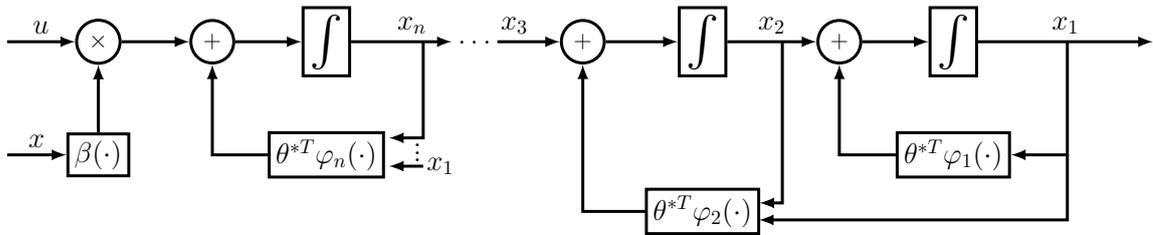


Figura 2 Sistema não linear do tipo *strict-feedback* de ordem  $n$

O objetivo de controle é forçar a saída  $y(t)$  para rastrear o sinal de referência  $y_r(t)$ , enquanto mantém todos os sinais da malha fechada uniformemente limitados. O controlador é desenvolvido adotando um procedimento iterativo como indicado a seguir.

#### 1. Definição das variáveis de erro $z_1$ e $z_2$

$$z_1 = x_1 - y_r, \tag{29}$$

$$z_2 = x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1, \tag{30}$$

onde  $z_1$  é o erro de rastreamento de saída e pretende-se assegurar que este venha a conver-

gir para zero no infinito, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$ . A derivada temporal de  $z_1$  é definida como

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \dot{y} - \dot{y}_r, \\ &= x_2 + \theta^{*T} \varphi_1 - \dot{y}_r, \\ &= z_2 + \alpha_1 + \theta^{*T} \varphi_1,\end{aligned}\tag{31}$$

onde  $\alpha_1$  é a primeira entrada de controle virtual para estabilizar o erro de rastreamento de saída  $z_1$ . Ela é definida como

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \varphi_1.\tag{32}$$

Aqui a constante  $c_1$  é positiva e  $\hat{\theta}(t)$  é a estimativa de  $\theta^*$ . A primeira entrada de controle virtual  $\alpha_1$  atua como o valor desejado de  $x_2$  a fim de fazer o subsistema  $z_1$  estável.

A primeira função de *Lyapunov* é definida como

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta},\tag{33}$$

sendo aqui  $\Gamma$  uma matriz positiva definida e  $\tilde{\theta}$  o erro de estimação, definido como  $\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$ . Através das equações (31) e (32), a primeira derivada temporal de  $V_1$  é calculada

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= z_1 \left( -c_1 z_1 + z_2 + \tilde{\theta}^T \varphi_1 \right) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}, \\ &= z_1 \left( -c_1 z_1 + z_2 \right) - \tilde{\theta}^T \left( \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \varphi_1 z_1 \right).\end{aligned}\tag{34}$$

A função de sintonia é definida como

$$\tau_1 = \varphi_1 z_1.\tag{35}$$

Substituindo (35) em (34), tem-se

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - \tilde{\theta}^T \left( \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \tau_1 \right).\tag{36}$$

Aqui é possível concluir que para garantir  $\dot{V}_1 \leq 0$ , o termo  $z_1 z_2$  precisa ser cancelado.

## 2. Definição da variável de erro $z_3$

Agora a próxima variável de erro  $z_3$  será definida e, em seguida, o subsistema  $(z_1, z_2)$  é apresentado:

$$z_3 = x_3 - \ddot{y}_r - \alpha_2 \quad (37)$$

Tomando-se a derivada de  $z_2$  de (30) e usando (32), chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_2 \\ &= z_3 + \alpha_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 + \theta^{*T} \left( \varphi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1 \right) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \end{aligned} \quad (38)$$

onde  $\alpha_2$  é a segunda entrada de controle virtual para estabilizar o sistema  $(z_1, z_2)$  em (31) e (38),

$$\alpha_2 = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta}^T \left( \varphi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1 \right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 \quad (39)$$

garantindo-se, assim, a estabilidade do subsistema (31), (38). Na equação (39) tem-se  $c_2$  como uma constante positiva e a segunda função de sintonia  $\tau_2$  baseada em  $\tau_1$  como a seguir

$$\tau_2 = \tau_1 + \left( \varphi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1 \right) z_2. \quad (40)$$

A condição de prova da estabilidade do subsistema  $(z_1, z_2)$  faz necessária uma segunda função candidata de Lyapunov que é escolhida por

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2. \quad (41)$$

A partir das equações (36), (38)-(40), a derivada de  $V_2$  pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 - \tilde{\theta}^T \left( \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} - \tau_1 \right) + z_2 (-z_1 - c_2 z_2 + z_3) + z_2 \tilde{\theta}^T \left( \varphi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \varphi_1 \right) + \\ &\quad + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}} \right), \\ \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right) + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

## 3. Definição da variável de erro $z_4$

Analogamente aos passos anteriores, definimos

$$z_4 = x_4 - \ddot{y}_r - \alpha_3. \quad (43)$$

Agora, o subsistema é  $(z_1, z_2, z_3)$  e para lidar com este utilizamos o erro dinâmico  $z_3$  que é encontrado a partir da derivada de (38) e através de (65), (40), (43) chegamos a

$$\dot{z}_3 = z_4 + \alpha_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 + \theta^{*T} \left( \varphi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varphi_2 \right) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r - \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (44)$$

A terceira entrada de controle virtual é  $\alpha_3$ :

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & -z_2 - c_3 z_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - \hat{\theta}^T \left( \varphi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varphi_2 \right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r \\ & + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_3 + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left( \varphi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varphi_2 \right) \end{aligned} \quad (45)$$

sendo  $c_3$  como uma constante positiva e a terceira função de sintonização  $\tau_3$  baseada em  $\tau_2$  definida como

$$\tau_3 = \tau_2 + \left( \varphi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varphi_2 \right) z_3. \quad (46)$$

Considerando a terceira candidata a função de Lyapunov  $V_3$  para trabalharmos no novo subsistema  $(z_1, z_2, z_3)$ :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2. \quad (47)$$

. A partir de (43), (45) e (46), a derivada de  $V_3$  pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_3 z_4 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_3 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right) + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}} \right) + z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \varphi_3 - \dot{\hat{\theta}} \right) \\ & + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left( \varphi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varphi_2 \right) z_3, \end{aligned} \quad (48)$$

sabendo que,

$$\begin{aligned} z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}} \right) &= z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \tau_3 - \dot{\hat{\theta}} \right) + z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma (\tau_2 - \tau_3) \\ &= z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \left( \Gamma \tau_3 - \dot{\hat{\theta}} \right) - z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left( \varphi_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \varphi_1 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \varphi_2 \right) z_3. \end{aligned} \quad (49)$$

Por último, substituindo (49) em (48), tem-se

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + z_3 z_4 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_3 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right) + \left( z_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} + z_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \hat{\theta}} \right) \left( \Gamma \tau_3 - \dot{\hat{\theta}} \right). \quad (50)$$

#### 4. Definição da variável de erro $z_i$ em diante

Define-se o erro  $z_i$  e sua derivada a seguir:

$$z_i = x_i - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}$$

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \theta^{*T} \left( \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k \right) - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}. \quad (51)$$

Obtém-se agora a entrada de controle virtual  $\alpha_i$ :

$$\begin{aligned} \alpha_i = & -z_{i-1} - c_i z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \hat{\theta}^T \left( \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k \right) + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} \\ & + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_i + \sum_{k=1}^{i-1} z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left( \varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \varphi_j \right), \end{aligned} \quad (52)$$

onde a constante  $c_i$  é positiva e  $\tau_i$  é a “i”-ésima função de sintonia definida como

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \left( \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k \right) z_i. \quad (53)$$

A candidata a função de *Lyapunov* para trabalharmos no subsistema  $(z_1, z_2 \dots z_i)$  é definida como

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 \quad (54)$$

cuja derivada através de (51) é

$$\dot{V}_i = - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + z_i z_{i+1} + \tilde{\theta}^T \left( \tau_i - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right) + \left( \sum_{k=2}^i z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \right) \left( \Gamma \tau_i - \dot{\hat{\theta}} \right). \quad (55)$$

#### 5. Definição da última variável de erro

Finalmente, define-se o último erro  $z_n$  e sua respectiva derivada

$$z_n = x_n - y_r^{(n-1)} - \alpha_{n-1} \quad (56)$$

$$\dot{z}_n = \varphi_0 + \beta u - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \theta^{*T} \left( \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \varphi_k \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} - y_r^{(n)} - \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}}. \quad (57)$$

A lei de controle  $u$  pode assim ser expressa

$$u = \frac{1}{\beta} (\alpha_n + y_r^{(n)}) . \quad (58)$$

A entrada de controle virtual  $\alpha_n$  é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_n = & -z_{n-1} - c_n z_n - \varphi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} x_{k+1} - \hat{\theta}^T \left( \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \varphi_k \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial y_r} y_r^{(k-1)} + \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_n + \sum_{k=2}^{n-1} z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \left( \varphi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} \varphi_j \right) , \end{aligned} \quad (59)$$

cujas constantes  $c_n$  mais uma vez é positiva e  $\tau_n$  é a última função de sintonia definida como

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \left( \varphi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} \varphi_k \right) . \quad (60)$$

A candidata a função de *Lyapunov* e sua respectiva derivada para o subsistema  $(z_1, z_2 \dots z_n)$  são,

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 \quad (61)$$

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right) + \left( \sum_{k=2}^n z_k \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \right) \left( \Gamma \tau_n - \dot{\hat{\theta}} \right) . \quad (62)$$

Finalmente, escolhendo-se

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n , \quad (63)$$

e substituindo em (62), pode-se mostrar que

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 < 0 . \quad (64)$$

Como a função  $V_n$  é negativa, prova-se a estabilidade assintótica do erro de rastreamento das variáveis  $z_i$  (considerando  $i= 1, \dots, n$ ) e limitação do erro do parâmetro estimado  $\tilde{\theta}$ .

A fim de evitar as derivadas parciais presentes na abordagem tradicional do *backstepping*, como apresentado neste capítulo, formularemos no Capítulo 2 o nosso problema de controle utilizando a versão modificada deste controlador, assim como em [8].

## 2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere novamente o sistema não-linear do tipo *strict-feedback*, conforme descrito em [13, p.100]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \theta^{*T} \varphi_1(x_1), \\
 \dot{x}_2 &= x_3 + \theta^{*T} \varphi_2(x_1, x_2), \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \theta^{*T} \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \\
 \dot{x}_n &= \beta u + \theta^{*T} \varphi_n(x), \\
 y &= x_1,
 \end{aligned} \tag{65}$$

onde  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}$  é a entrada,  $y \in \mathbb{R}$  a saída do sistema,  $\theta^* \in \mathbb{R}^p$  um vetor constante de parâmetros desconhecidos e os termos  $\beta \in \mathbb{R}$  e  $\varphi_i \in \mathbb{R}^p$  com  $i = 1, \dots, n$  são funções não-lineares suaves conhecidas.

O objetivo de controle é garantir que a saída  $y(t)$  rastreie o sinal de referência  $y_r(t)$  enquanto todos os demais sinais de malha fechada permaneçam uniformemente limitados.

A referência  $y_r(t)$  é a saída de um modelo de referência com uma entrada  $r(t)$  limitada e contínua por partes, ou ainda um sinal cujas primeiras  $n$  derivadas são conhecidas, uniformemente limitadas e contínuas por partes. Utilizando o paradigma do modelo de referência, considere o seguinte sistema linear estável

$$y_r(s) = \frac{k_m}{s^n + m_{n-1}s^{n-1} + \dots + m_0} r(s), \tag{66}$$

onde  $s^n + m_{n-1}s^{n-1} + \dots + m_0$  é um polinômio *Hurwitz* e o ganho  $k_m$  é positivo.

Para alcançar o objetivo de controle, emprega-se o controlador adaptativo *backstepping* baseado em funções de sintonia [13]. A maior vantagem de se utilizar esta abordagem é a eliminação das derivadas parciais na estrutura do controlador.

Considere as seguintes variáveis de erro em (67) e as funções de estabilização em (68):

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_r, \\ z_i &= x_i - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \varphi_1, \\ \alpha_i &= -c_i z_i - z_{i-1} - \hat{\theta}^T \varphi_i + \dot{\alpha}_{i-1}, \end{aligned} \quad (68)$$

onde  $c_i$  são constantes positivas e as funções de sintonia são dadas por

$$\tau_1 = \varphi_1 z_1, \quad (69)$$

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \varphi_i z_i, \quad (70)$$

para  $i = 2, \dots, n$  e  $\alpha_0 = z_0 = \tau_0 = 0$ . Além disso, a estimativa do vetor de parâmetros  $\theta^*$  é obtida através da lei de adaptação

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n, \quad (71)$$

onde  $\Gamma$  é a matriz de ganhos de adaptação.

Finalmente, chega-se à lei de controle baseada na realimentação de estado:

$$u = \frac{1}{\beta} (\alpha_n + y_r^{(n)}), \quad (72)$$

onde  $\alpha_n$  é definida de acordo com (68) para  $i = n$  como

$$\alpha_n = -c_n z_n - z_{n-1} - \hat{\theta}^T \varphi_n + \dot{\alpha}_{n-1}. \quad (73)$$

Por mais que a lei de controle (72) pareça simples, ainda há uma questão a ser superada: é necessário obter a derivada do sinal  $\alpha_{n-1}$  que, *a priori*, não está disponível para o projeto de realimentação. Para tentar eliminar essa dificuldade, o diferenciador exato com ganho dinâmico baseado em *higher-order sliding modes (HOSM)*, como apresentado em [10] e [14], será utilizado. Dessa forma, além da diferenciação exata, propriedades de estabilidade global podem ser asseguradas em malha fechada.

### 3 DIFERENCIADOR HOSM GLOBAL COM GANHO DINÂMICO

Nesta seção é introduzida a classe de diferenciadores HOSM que garante a diferenciação exata de sinais para quaisquer condições iniciais. Como apenas a primeira derivada de cada sinal  $\alpha_j(t)$ ,  $j = i-1$ , é necessária, a ideia é usar o diferenciador HOSM com ganhos dinâmicos  $\mathcal{L}_j(x, u, t)$  para cada sinal  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , como se segue:

$$\dot{\zeta}_0^{i-1} = v_0^{i-1} = -\lambda_0^{i-1} \mathcal{L}_{i-1}^{1/2}(x, u, t) |\zeta_0^{i-1} - \alpha_{i-1}|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_0^{i-1} - \alpha_{i-1}) + \zeta_1^{i-1}, \quad (74)$$

$$\dot{\zeta}_1^{i-1} = -\lambda_1^{i-1} \mathcal{L}_{i-1}(x, u, t) \operatorname{sgn}(\zeta_1^{i-1} - v_0^{i-1}), \quad (75)$$

onde o índice  $i-1$  é usado para indicar a qual variável  $\alpha_{i-1}$  o diferenciador está associado.

**Lema 1** *Considere o ganho dinâmico do diferenciador (74)–(75) definido como*

$$\mathcal{L}_{i-1}(x, u, t) := k_1^{i-1} \|\alpha\| + k_2^{i-1} \|z\| + k_3^{i-1} (\|x\| + \|y_R\|) + k_4^{i-1} |u| + \bar{\phi}(x, t), \quad (76)$$

onde  $\alpha^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ,  $z^T = [z_1, \dots, z_n]$  e  $y_R^T = [y_r, \dots, y_r^{(n)}]$ . Além disso,  $\bar{\phi}(x, t)$  é um majorante para os termos não-lineares  $\varphi^T = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$  e  $\dot{\varphi}^T = [\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n]$ , enquanto  $k_1^{i-1}$ ,  $k_2^{i-1}$ ,  $k_3^{i-1}$  e  $k_4^{i-1}$  são constantes positivas. Dessa forma, o seguinte majorante pode ser obtido, para algum tempo finito  $T > 0$ :

$$|\ddot{\alpha}_{i-1}| \leq \mathcal{L}_{i-1}(x, u, t), \quad \forall t \geq T. \quad (77)$$

**Prova 1** *Não é difícil mostrar que a equação (68) pode ser reescrita como*

$$\dot{\alpha}_{i-1} = c_i z_i + z_{i-1} + \hat{\theta}^T \varphi_i + \alpha_i, \quad (78)$$

cuja derivada temporal é

$$\ddot{\alpha}_{i-1} = c_i \dot{z}_i + \dot{z}_{i-1} + \dot{\hat{\theta}}^T \varphi_i + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i + \dot{\alpha}_i. \quad (79)$$

Com o auxílio das equações (67), (68), (70), (71), (78)

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{i-1} = & \alpha_{i+1} + c_{i+1}z_{i+1} + z_i + \hat{\theta}^T \varphi_{i+1} + c_i \dot{x}_i - c_i y_r^{(i)} - c_i \alpha_i - c_i^2 z_i - c_i z_{i-1} + \\ & - c_i \hat{\theta}^T \varphi_i + \dot{x}_{i-1} - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1} - c_{i-1} z_{i-1} - z_{i-2} - \hat{\theta}^T \varphi_{i-1} + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i + \dot{\hat{\theta}}^T \varphi_i, \end{aligned} \quad (80)$$

e com alguma manipulação matemática podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{i-1} = & \alpha_{i+1} + c_{i+1}z_{i+1} + z_i + \hat{\theta}^T \varphi_{i+1} + c_i \dot{x}_i - c_i y_r^{(i)} - c_i \alpha_i - c_i^2 z_i - c_i z_{i-1} + \\ & - c_i \hat{\theta}^T \varphi_i + \dot{x}_{i-1} - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1} - c_{i-1} z_{i-1} - z_{i-2} - \hat{\theta}^T \varphi_{i-1} + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i + \\ & + \varphi_i^T \Gamma \sum_{l=1}^n (\dot{\varphi}_l z_l + \varphi_l \dot{x}_l - \varphi_l y_r^{(l)} - \varphi_l \alpha_l - \varphi_l c_l z_l - \varphi_l z_{l-1} - \varphi_l \hat{\theta}^T \varphi_l), \end{aligned} \quad (81)$$

que tem por majorante

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{i-1} \leq & (2 + c_i) \|\alpha\| + (2 + c_{i-1} + c_i + c_i^2 + c_{i+1}) \|z\| + (1 + c_i) \|x\| + (1 + c_i) \|y_R\| + \\ & + (2 + c_i) \|\hat{\theta}\| \|\varphi\| + (1 + c_i) \|\theta^*\| \|\varphi\| + \|\hat{\theta}\| \|\dot{\varphi}\| + n \|\Gamma\| \|\varphi\| \|\dot{\varphi}\| \|z\| + \\ & + n \|\Gamma\| \|\varphi\|^2 (\|x\| + \|y_R\| + \|\alpha\|) + n \|\Gamma\| (\|c\| + 1) \|z\| \|\varphi\|^2 + n \|\Gamma\| \|\theta^*\| \|\varphi\|^3 + \\ & + n \|\Gamma\| \|\hat{\theta}\| \|\varphi\|^3. \end{aligned} \quad (82)$$

Definindo-se as constantes

$$\begin{cases} k_1^{i-1} > (2 + c_i), \\ k_2^{i-1} > (2 + c_{i-1} + c_i + c_i^2 + c_{i+1}), \\ k_3^{i-1} > (1 + c_i), \\ k_4^{i-1} > n \|\Gamma\| (\|c\| + 1) > 0, \end{cases} \quad (83)$$

e o majorante para os termos não-lineares

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, t) > & k_1^{i-1} \|\hat{\theta}\| \|\varphi\| + k_3^{i-1} \bar{\theta} \|\varphi\| + k_4^{i-1} (\|\hat{\theta}\| \|\dot{\varphi}\| + \|\varphi\| \|\dot{\varphi}\| \|z\| + \|\varphi\|^2 (\|x\| + \\ & + \|y_R\| + \|\alpha\|) + \|z\| \|\varphi\|^2 + \|\theta^*\| \|\varphi\|^3 + \|\hat{\theta}\| \|\varphi\|^3), \quad \|\theta^*\| \geq \bar{\theta}, \end{aligned} \quad (84)$$

a desigualdade (82) pode ainda ser majorada por

$$\ddot{\alpha}_{i-1} \leq k_1^{i-1} \|\alpha\| + k_2^{i-1} \|z\| + k_3^{i-1} (\|x\| + \|y_R\|) + k_4^{i-1} |u| + \bar{\phi}(x, t). \quad (85)$$

Assim sendo, pode-se definir o ganho dos diferenciadores como (76) tal que (77) seja satisfeita.  $\square$

A dificuldade para o cálculo do majorante  $\mathcal{L}_{n-1}$  de  $\dot{\alpha}_{n-1}$  está no fato deste, estar sempre em função de  $\dot{\alpha}_{n-1}$ , ou seja, o diferenciador precisa ter o sinal que será diferenciado. Além disso, não foi possível substituir as funções de estabilização, as funções de erro e as funções de sintonia por funções conhecidas, como por exemplo, apenas em função de  $\alpha_1$ ,  $z_1$ , dos estados  $x_i$  que são medidos ou até em função dos termos não lineares  $\varphi_i$  e, suas respectivas derivadas e dos parâmetros desconhecidos  $\theta^*$  que poderiam ser majorados. Por esses motivos, ficou difícil eliminar a repetição (vulgo *looping*) dos mesmos sinais e derivadas do sinal majorado.

Assim, para manter o tema do *backstepping* e o uso dos diferenciadores *HOSM* propostos, assumimos majorantes para as funções de estabilização e dessa forma pudemos reconstruir o ganho, mantendo o mesmo algoritmo do diferenciador em (74) e (75) como será apresentado novamente a seguir.

O algoritmo dos diferenciadores é reescrito abaixo:

$$\dot{\zeta}_0^{i-1} = v_0^{i-1} = -\lambda_0^{i-1} \mathcal{L}_{i-1}^{1/2}(x, \hat{\theta}, u, t) |\zeta_0^{i-1} - \alpha_{i-1}|^{1/2} \operatorname{sgn}(\zeta_0^{i-1} - \alpha_{i-1}) + \zeta_1^{i-1}, \quad (86)$$

$$\dot{\zeta}_1^{i-1} = -\lambda_1^{i-1} \mathcal{L}_{i-1}(x, \hat{\theta}, u, t) \operatorname{sgn}(\zeta_1^{i-1} - v_0^{i-1}), \quad (87)$$

onde o novo ganho  $\mathcal{L}_{i-1}$  pode ser obtido tal que

$$|\ddot{\alpha}_{i-1}| \leq \mathcal{L}_{i-1}(x, \hat{\theta}, u, t), \quad \forall t \geq T, \quad (88)$$

sendo  $T > 0$  algum tempo finito. Note que o novo ganho está em função dos termos  $(x, u, t)$  e agora também depende de  $(\hat{\theta})$ .

No lema a seguir será apresentado que  $\dot{\alpha}_i$  sempre estará em função do estado, do tempo e de uma constante, ou seja,  $\dot{\alpha}_i(x_1, y_r, \dots, x_n, y_r^{(n)})$ . Assim sendo, por conta do conhecimento do estado da planta e do modelo de referência, é possível definir funções conhecidas que majorem  $|\dot{\alpha}_i, i = 1, \dots, n|$ .

**Lema 2** *Existem majorantes conhecidos para os sinais  $\dot{\alpha}_i, i = 1, \dots, n$ , tal que*

$$|\dot{\alpha}_i| \leq \psi_i(x, t), \quad \forall t \geq T > 0, \quad (89)$$

$$|\dot{\alpha}_n| \leq \psi_n(x, u, t) \quad \forall t \geq T > 0. \quad (90)$$

**Prova 2** *A prova abrangerá os cálculos até a definição do sinal  $\dot{\alpha}_3$  em função de  $\alpha_1$  e suas respectivas derivadas e está baseada nas equações em (68) reescritas a seguir:*

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \varphi_1,$$

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - \hat{\theta}^T \varphi_i + \dot{\alpha}_{i-1},$$

*É fácil verificar que  $\alpha_2$  está em função de  $\dot{\alpha}_1$ , logo pularemos esta etapa para o cálculo de  $\alpha_3$ :*

$$\alpha_3 = -c_3 z_3 - z_2 - \hat{\theta}^T \varphi_3 + \dot{\alpha}_2, \quad (91)$$

$$\dot{\alpha}_2 = -c_2 \dot{z}_2 - \dot{z}_1 - \frac{d}{dt}(\hat{\theta}^T \varphi_2) + \ddot{\alpha}_1, \quad (92)$$

$$\alpha_3 = -c_3 z_3 - z_2 - \hat{\theta}^T \varphi_3 - c_2 \dot{z}_2 - \dot{z}_1 - \frac{d}{dt}(\hat{\theta}^T \varphi_2) + \ddot{\alpha}_1. \quad (93)$$

*O mesmo processo é repetido para o cálculo de  $\alpha_4$ :*

$$\alpha_4 = -c_4 z_4 - z_3 - \hat{\theta}^T \varphi_4 + \dot{\alpha}_3, \quad (94)$$

$$\dot{\alpha}_3 = -c_3 \dot{z}_3 - \dot{z}_2 - \frac{d}{dt} \hat{\theta}^T \varphi_3 - c_2 \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 - \frac{d^2}{dt^2}(\hat{\theta}^T \varphi_2) + \ddot{\alpha}_1, \quad (95)$$

$$\alpha_4 = -c_4 z_4 - z_3 - \hat{\theta}^T \varphi_4 - c_3 \dot{z}_3 - \dot{z}_2 - \frac{d}{dt} \hat{\theta}^T \varphi_3 - c_2 \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 - \frac{d^2}{dt^2}(\hat{\theta}^T \varphi_2) + \ddot{\alpha}_1. \quad (96)$$

*As variáveis de erro e suas respectivas derivadas temporais (67) também podem ser convertidas em funções dependentes de  $\alpha_1$  e suas “ $i - 1$ ” derivadas temporais:*

$$z_1 = x_1 - y_r, \quad \dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_r, \quad \ddot{z}_1 = \ddot{x}_1 - \ddot{y}_r, \quad (97)$$

$$z_2 = x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1, \quad \dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1, \quad (98)$$

$$z_3 = x_3 - \ddot{y}_r - \alpha_2. \quad (99)$$

Substituindo  $\alpha_2$  em (99) por uma expressão em função de  $\alpha_1$ , obtemos

$$z_3 = x_3 - \ddot{y}_r + c_2 z_2 + z_1 + \hat{\theta}^T \varphi_2 - \dot{\alpha}_1, \quad (100)$$

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \ddot{y}_r + c_2 \dot{z}_2 + \dot{z}_1 + \frac{d}{dt} \hat{\theta}^T \varphi_2 - \ddot{\alpha}_1. \quad (101)$$

E por último substituindo as derivadas das variáveis de erro, tem-se

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \ddot{y}_r + c_2(\dot{x}_2 - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1) + \dot{x}_1 - \dot{y}_r + \frac{d}{dt} \hat{\theta}^T \varphi_2 - \ddot{\alpha}_1. \quad (102)$$

A expressão em (96) fica estabelecida em função apenas das variáveis conhecidas, ou seja, de  $\alpha_1$  e suas respectivas derivadas, do estado, do modelo de referência e da lei adaptativa:

$$\begin{aligned} \alpha_4 = & -c_4(x_4 - \ddot{y}_r - (-c_3(x_3 - \ddot{y}_r + c_2(x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1) + (x_1 - y_r) + \hat{\theta}^T \varphi_2 - \dot{\alpha}_1) + \\ & - (x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1) - \hat{\theta}^T \varphi_3 - c_2(\dot{x}_2 - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1) - (\dot{x}_1 - \dot{y}_r) - \frac{d}{dt}(\hat{\theta}^T \varphi_2) + \ddot{\alpha}_1)) + \\ & - (x_3 - \ddot{y}_r - (-c_2(x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1) - x_1 + y_r) - \hat{\theta}^T \varphi_2 + \dot{\alpha}_1) - \hat{\theta}^T \varphi_4 + \\ & - c_3(\dot{x}_3 - \ddot{y}_r + c_2(\dot{x}_2 - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1) + \dot{x}_1 - \dot{y}_r + \frac{d}{dt} \hat{\theta}^T \varphi_2 - \ddot{\alpha}_1) - (\dot{x}_2 - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1) + \\ & - \frac{d}{dt} \hat{\theta}^T \varphi_3 - c_2(\ddot{x}_2 - \ddot{y}_r - \ddot{\alpha}_1) - (\ddot{x}_1 - \ddot{y}_r) - \frac{d^2}{dt^2}(\hat{\theta}^T \varphi_2) + \ddot{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (103)$$

Por indução matemática, finalmente chega-se à definição do sinal  $\alpha_4$  e a conclusão de que todo sinal  $\dot{\alpha}_i, \dot{z}_i$  pode ser construído em função de sinais conhecidos, ou seja,  $\dot{\alpha}_i(x, t)$  ou  $\dot{\alpha}_n(x, t, u)$ .  $\square$

**Lema 3** Considere o novo ganho dinâmico do diferenciador (86)–(87) definido como

$$\mathcal{L}_{i-1}(x, \hat{\theta}, u, t) := k_1^{i-1} \|x\| + k_2^{i-1} \|y_R\| + k_3^{i-1} |u| + \bar{\phi}(x, \hat{\theta}, t), \quad (104)$$

onde  $y_R^T = [\dot{y}_r, \dots, y_r^{(n)}]$ . Além disso,  $\bar{\phi}(x, t)$  é um majorante para os termos não-lineares  $\varphi^T = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$  e  $\dot{\varphi}^T = [\dot{\varphi}_1, \dots, \dot{\varphi}_n]$ , enquanto  $k_1^{i-1}, k_2^{i-1}$  e  $k_3^{i-1}$  são constantes não negativas. Dessa forma, que o majorante (88) pode ser obtido, para algum tempo finito  $T > 0$ .

**Prova 3** Como já fora apontado, é possível mostrar que a equação (68) pode ser reescrita

como

$$\dot{\alpha}_{i-1} = c_i z_i + z_{i-1} + \hat{\theta}^T \varphi_i + \alpha_i, \quad (105)$$

cuja derivada temporal é

$$\ddot{\alpha}_{i-1} = c_i \dot{z}_i + \dot{z}_{i-1} + \dot{\hat{\theta}}^T \varphi_i + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i + \dot{\alpha}_i. \quad (106)$$

Com o auxílio das equações (67), (68), (70), (71) e (105), obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{i-1} &= c_i(\dot{x}_i - y_r^i - \dot{\alpha}_{i-1}) + (\dot{x}_{i-1} - y_r^{i-1} - \dot{\alpha}_{i-2}) + \dot{\hat{\theta}}^T \varphi_i + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i + \dot{\alpha}_i \\ &= c_i(\dot{x}_i) + (x_i + \theta^{*T} \varphi_{i-1}) + \dot{\hat{\theta}}^T \varphi_i + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i - c_i(y_r^i + \dot{\alpha}_{i-1}) - y_r^{i-1} - \dot{\alpha}_{i-2} + \dot{\alpha}_i \\ &= c_i(\dot{x}_i) + (x_i + \theta^{*T} \varphi_{i-1}) + \left[ \Gamma \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k z_k \right) \right]^T \varphi_i + \hat{\theta}^T \dot{\varphi}_i - c_i y_r^i - y_r^{i-1} + \\ &\quad - c_i \dot{\alpha}_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-2} + \dot{\alpha}_i. \end{aligned} \quad (107)$$

Agora, o majorante de (107) pode ser calculado usando-se as equações (89)-(90) e seguindo a mesma analogia feita na prova do Lema 1, ou seja, que tanto as funções estabilizantes, quanto as funções de erro são dependentes do estado  $x$ , do modelo de referência  $y_r$  e de uma constante:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{i-1} &\leq (c_i \beta) |u| + (c_i + 1) \|y_R\| + \|\theta^*\| \|\varphi\| (c_i + 1) + |x_i| + \|\Gamma \left( \sum_{k=1}^n \varphi_k z_k \right) \varphi_i\| + \|\hat{\theta}\| \|\dot{\varphi}_i\| + \\ &\quad + c_i \psi_{i-1} + \psi_{i-2} + \psi_i, \\ &\leq (c_i \beta) |u| + (c_i + 1) \|y_R\| + \bar{\theta} \|\varphi\| (c_i + 1) + |x_i| + \|\Gamma\| \|\varphi\|^2 \left( p_1 \|x\| + p_2 \|y_R\| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^i \psi_l(x, t) \right) + \|\hat{\theta}\| \|\dot{\varphi}\| + c_i \psi_{i-1} + \psi_{i-2} + \psi_i, \\ &\leq (c_i \beta) |u| + (c_i + 1) \|y_R\| + |x_i| + \bar{\theta} \|\varphi\| (c_i + 1) + \|\Gamma\| \|\varphi\|^2 (p_1 \|x\| + p_2 \|y_R\|) + \\ &\quad + \sum_{l=1}^i \psi_l(x, t) + \|\hat{\theta}\| \|\dot{\varphi}\| + c_i \psi_{i-1} + \psi_{i-2} + \psi_i. \end{aligned} \quad (108)$$

sendo  $p_1$  e  $p_2$  constantes dependentes da ordem do sistema e  $\|\theta^*\| \leq \bar{\theta}$  o majorante do termo desconhecido.

Definindo-se as constantes

$$\begin{cases} k_1^{i-1} > 1, \\ k_2^{i-1} > (c_i + 1), \\ k_3^{i-1} > (c_i \beta), \end{cases} \quad (109)$$

não negativas, pode-se obter o majorante para os termos não lineares como

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, \hat{\theta}, t) &> \bar{\theta} \|\varphi\| (c_i + 1) + \|\Gamma\| \|\varphi\|^2 (p_1 \|x\| + p_2 \|y_R\|) + \sum_{l=1}^i \psi_l(x, t) + \|\hat{\theta}\| \|\dot{\varphi}\| + c_i \psi_{i-1} + \\ &+ \psi_{i-2} + \psi_i. \end{aligned} \quad (110)$$

A desigualdade (88) pode ainda ser majorada por

$$\ddot{\alpha}_{i-1} \leq k_1^{i-1} \|x\| + k_2^{i-1} \|y_R\| + k_3^{i-1} |u| + \bar{\phi}(x, \hat{\theta}, t). \quad (111)$$

Assim sendo, pode-se definir o ganho dos diferenciadores como (104) tal que (88) seja satisfeita.  $\square$

O Lema 3, portanto, propõe que o novo ganho independe das funções estabilizantes, que segundo o Lema 2, estão em função de  $\psi_i(x, t)$  e  $\psi_n(x, u, t)$ . A seguir será apresentada a prova da estabilidade deste diferenciador.

**Lema 4** Considere o diferenciador HOSM (86)–(87) com ganhos dinâmicos (104) satisfazendo (88). Então, se os parâmetros  $\lambda_j^{i-1} > 0$  forem escolhidos de maneira recursiva [9], as seguintes equações

$$\zeta_0^{i-1}(t) = \alpha_{i-1}(t), \quad \zeta_1^{i-1}(t) = \dot{\alpha}_{i-1}(t), \quad (112)$$

são satisfeitas de forma global e em tempo finito.

**Prova 4** Os ganhos dinâmicos  $\mathcal{L}_{i-1}$  do diferenciador HOSM precisam satisfazer as mesmas condições de convergência em tempo finito dadas em [15], isto é, a desigualdade (88).

Considere o erro de estimação como  $e_i \triangleq \alpha_{i-1} - \zeta_1^{i-1}$  tal que

$$\bar{z}_i = \frac{e_i}{\mathcal{L}_{i-1}(x, u, t)}, \dots, \bar{z}_{i+1} = \frac{e_{i+1}}{k_{i-1}\mathcal{L}_{i-1}(x, u, t)}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (113)$$

Considerando a candidata à função de Lyapunov de acordo com [15, eq.3]

$$V(\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \bar{Z}_i(\bar{z}_i, \bar{z}_{i+1}) + \beta_n \frac{1}{p} |\bar{z}_n|^p, \quad \beta_i > 0, \quad p \geq 2n-1, \quad (114)$$

sendo  $n$  igual à ordem imediatamente superior à derivada exata que se deseja, como é apontado em (88). Sendo  $j = 1, \dots, n$ , temos

$$\bar{Z}_j(\bar{z}_j, \bar{z}_{j+1}) = \frac{n+1-j}{p} |\bar{z}_j|^{\frac{p}{n+1-j}} - \bar{z}_j [\bar{z}_{j+1}]^{\frac{p-n-1+j}{n-1}} + \left( \frac{p-n-1+j}{p} \right) |\bar{z}_{j+1}|^{\frac{p}{n-j}}, \quad (115)$$

tal que as funções sejam contínuas, diferenciáveis e positivas definidas para  $j = 1, \dots, n-1$ . Então, assumindo ganhos  $k_j > 0$  e (114) suave, positiva definida e radialmente ilimitada para cada  $p \geq 2n-1$  e além disso  $V(\bar{z})$  satisfazendo para algumas constantes  $k > 0$  e  $\beta_j > 0$ , a sua derivada temporal é dada pela seguinte inequação

$$\dot{V} \leq -kV(\bar{z})^{\frac{p-1}{p}} - \frac{\dot{\mathcal{L}}_{i-1}}{\mathcal{L}_{i-1}} \gamma(\dot{\mathcal{L}}_{i-1}) V(\bar{z}). \quad (116)$$

A função  $\gamma(\dot{\mathcal{L}}_{i-1})$  é

$$\gamma(\dot{\mathcal{L}}_{i-1}) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{se } \dot{\mathcal{L}}_{i-1} \geq 0 \\ \gamma_2 & \text{se } \dot{\mathcal{L}}_{i-1} < 0 \end{cases} \quad (117)$$

sendo  $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ . Assim, três casos podem ser admitidos:

- 1) Quando o ganho  $\mathcal{L}_{i-1}$  é constante, o segundo termo de (116) é zero e  $\dot{V} < 0$  provando que  $\bar{z} = 0$  é globalmente estável em tempo finito. Este caso também é abordado em [9].
- 2) Quando o ganho  $\mathcal{L}_{i-1}$  é diferenciável e cresce no máximo exponencialmente  $\left( \frac{|\dot{\mathcal{L}}_{i-1}|}{|\mathcal{L}_{i-1}|} \leq M_{i-1} \right)$  para uma dada constante  $M_{i-1} > 0$ . Podemos concluir que  $V(\bar{z})$  é também uma Função de Lyapunov, provando que  $\bar{z} = 0$  é globalmente estável em tempo finito. Esse caso é abordado em [16].

3) Quando o ganho  $\mathcal{L}_{i-1}$  é diferenciável e cresce ilimitadamente ( $\dot{\mathcal{L}}_{i-1} \geq 0$ ), vemos que o segundo termo em (116) é negativo. Podemos concluir que o erro de estimação  $\bar{z} = 0$  é globalmente estável em tempo finito [15].  $\square$

Em malha fechada, o diferenciador converge e o sinal de controle faz com que o sistema estabilize e as trajetórias venham a convergir, ou seja, decrescem. Dessa forma o ganho decresce e entra em uma região compacta em que todos os resultados dados em [9] ou [16] poderiam ser também invocados. Por isso, a convergência de (112) é garantida através do uso dos mesmos argumentos e demonstrações em [9, 15, 16].

## 4 BACKSTEPPING VIA FUNÇÕES DE SINTONIA E DIFERENCIADORES HOSM GLOBAIS

Nesta seção, mostra-se que o Controlador Adaptativo *Backstepping* via Funções de Sintonia apresentado na Seção 2 pode finalmente ser implementado de um modo alternativo [8], uma vez que as estimativas exatas das derivadas  $\dot{\alpha}_{i-1}$  podem ser obtidas com o uso dos diferenciadores globais apresentados na Seção 3 anterior. Basicamente a mudança consiste em utilizar funções de estabilização do tipo

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \varphi_1, \quad \alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - \hat{\theta}^T \varphi_i + \zeta_1^{i-1}, \quad (118)$$

em vez daquelas apresentadas em (79). O Teorema a seguir apresenta os principais resultados de estabilidade.

**Teorema 1** *Considere a planta (65), variáveis de erro em (67), funções de sintonia em (70), lei de adaptação (71), sinal de controle (72), diferenciadores HOSM (86)–(87) com ganhos dinâmicos (104) satisfazendo (88) e funções de estabilização (118). Então, para qualquer condição inicial, todos os sinais em malha fechada são globalmente uniformemente limitados, e o rastreamento da saída  $y(t)$  do sistema, em relação ao sinal de referência  $y_r(t)$  é alcançado assintoticamente.*

**Prova 5** *A prova está dividida em alguns passos. Primeiro, provaremos que as estimativas exatas de  $\dot{\alpha}_{i-1}$  são obtidas em tempo finito, ou seja,  $\zeta_1^{i-1}(t) = \dot{\alpha}_{i-1}(t)$ .*

**Passo 1:** *Da prova do Lema 2 é possível concluir que cada ganho dinâmico  $\mathcal{L}_{i-1}$  dos diferenciadores (86) e (87) satisfaz as seguintes condições introduzidas em [16] e [15] para rápida convergência em tempo finito.*

*Então, existem instantes de tempo finito  $T_j > 0$  para cada  $\alpha_j$  que se quer derivar tal que a desigualdade (88) é satisfeita,  $\forall t > \max\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ . Então, os erros dos diferenciadores são forçados a atingir um conjunto compacto em que as condições dadas em [16] e [15] podem ser invocadas e conclui-se que a equação (112) é satisfeita. Consequentemente, a derivada da função de estabilização  $\dot{\alpha}_{i-1}$  é exatamente estimada, i.e.,  $\zeta_1^{i-1} \equiv \dot{\alpha}_{i-1}$ , tal que a partir de (118), pode-se escrever (68) após um tempo finito  $T := \max\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ . Uma vez que essa igualdade é obtida, os passos seguintes, dis-*

poníveis em [8], serão apresentados a seguir, sempre considerando que os resultados são válidos para  $\forall t > T$ .

**Passo 2:** Considere que o erro de saída (29) e a sua derivada através de (65) são dados por

$$\dot{z}_1 = x_2 + \theta^{*T} \varphi_1(x_1) - \dot{y}_r. \quad (119)$$

Substituindo  $x_2 = z_2 + \dot{y}_r + \alpha_1$  em (67) para  $i = 2$ , temos

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1 + \theta^{*T} \varphi_1. \quad (120)$$

Agora, considerando o erro de estimação

$$\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}, \quad (121)$$

a candidata à Função de *Lyapunov* para cálculo da estabilidade do sistema  $(z_1, \tilde{\theta})$  é dada por

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \quad (122)$$

e sua derivada, através de (120) e (121), é

$$\dot{V}_1 = z_1 \left( z_2 + \alpha_1 + \hat{\theta}^T \varphi_1 \right) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \left( \dot{\hat{\theta}} - \Gamma \varphi_1 z_1 \right). \quad (123)$$

Escolhendo-se a função de estabilização

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \varphi_1, \quad (124)$$

obtem-se a seguinte expressão

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \quad (125)$$

onde a primeira função de sintonia é

$$\tau_1 = \varphi_1 z_1. \quad (126)$$

**Passo 3:** Supondo o erro  $z_2$  (67) e calculando-se sua derivada através de (65), obtemos

$$\dot{z}_2 = x_3 + \theta^{*T} \varphi_2(x_1, x_2) - \ddot{y}_r - \dot{\alpha}_1. \quad (127)$$

Substituindo  $x_3 = z_3 + \ddot{y}_r + \alpha_2$  obtido em (67) e  $\dot{\alpha}_1$  por  $\zeta_1^1$  através de (112) temos

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2 + \theta^{*T} \varphi_2 - \zeta_1^1. \quad (128)$$

A nova candidata à Função de *Lyapunov* é

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2, \quad (129)$$

e sua derivada

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 + z_2 \left( z_1 + z_3 + \alpha_2 + \hat{\theta}^T \varphi_2 - \zeta_1^1 \right) + \tilde{\theta}^T \left( \tau_1 + \varphi_2 z_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \quad (130)$$

usando-se (121), (125) e (128). Selecionando a função de estabilização

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 + \zeta_1^1 - \hat{\theta}^T \varphi_2, \quad (131)$$

obtém-se a expressão

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \quad (132)$$

onde a segunda função de sintonia é

$$\tau_2 = \tau_1 + \varphi_2 z_2. \quad (133)$$

**Passo i:** O erro  $z_i$  tem sua equação geral (67) e sua derivada através de (65) com mudança de  $\dot{\alpha}_{i-1}$  por  $\zeta_1^{i-1}$  através de (112), dada por

$$\dot{z}_i = x_{i+1} + \theta^{*T} \varphi_i(x_1, \dots, x_i) - y_r^{(i)} - \zeta_1^{i-1}. \quad (134)$$

Substituindo  $x_{i+1} = z_{i+1} + y_r^{(i)} + \alpha_i$  obtido de (67) para  $i = i + 1$ , tem-se

$$\dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i + \varphi_i^T \theta - \zeta_1^{i-1}. \quad (135)$$

A candidata à Função candidata de *Lyapunov* é

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2, \quad (136)$$

e, em seguida, sua derivada pode ser calculada como:

$$\dot{V}_i = - \sum_{k=1}^{i-1} c_k z_k^2 + z_i \left( z_{i-1} + z_{i+1} + \alpha_i + \varphi_i^T \hat{\theta} - \zeta_1^{i-1} \right) + \tilde{\theta}^T \left( \tau_{i-1} + \varphi_i z_i - \Gamma^{-1} \hat{\theta} \right). \quad (137)$$

Por fim, a escolha da função de estabilização

$$\alpha_i = -c_i z_i - z_{i-1} - \varphi_i^T \hat{\theta} + \zeta_1^{i-1}, \quad (138)$$

nos leva à expressão

$$\dot{V}_i = - \sum_{k=1}^i c_k z_k^2 + z_i z_{i+1} + \tilde{\theta}^T \left( \tau_i - \Gamma^{-1} \hat{\theta} \right). \quad (139)$$

onde a função geral de sintonia é

$$\tau_i = \tau_{i-1} + \varphi_i z_i. \quad (140)$$

**Passo n:** Considerando o último erro como  $z_n$  (67), sua derivada através de (65) e a troca de  $\dot{\alpha}_{n-1}$  por  $\zeta_1^{n-1}$  com auxílio de (112) dada por

$$\dot{z}_n = \beta(x)u + \varphi_n(x)^T \theta - y_r^{(n)} - \zeta_1^{n-1}. \quad (141)$$

A última candidata à função de *Lyapunov* é

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2, \quad (142)$$

e sua derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n \left( z_{n-1} + \beta u + \varphi_n^T \hat{\theta} - y_r^{(n)} - \zeta_1^{n-1} \right) + \\ & + \tilde{\theta}^T \left( \tau_{n-1} + \varphi_n z_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (143)$$

Finalmente, encontra-se a função de controle do sistema definida como

$$u = \frac{1}{\beta} \left( -c_n z_n - z_{n-1} - \varphi_n^T \hat{\theta} + \zeta_1^{n-1} + y_r^{(n)} \right), \quad (144)$$

e a expressão final para cálculo da estabilidade do sistema em malha fechada completo

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 + \tilde{\theta}^T \left( \tau_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \right), \quad (145)$$

onde a última função de sintonia é

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \varphi_n z_n. \quad (146)$$

Escolhendo a lei de adaptação de parâmetros como

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n, \quad (147)$$

temos

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2, \quad (148)$$

garantindo assim que  $[z^T, \tilde{\theta}^T]^T = [0, 0]^T$  é um ponto de equilíbrio globalmente uniformemente estável. Utilizando o Teorema de *LaSalle-Yoshizawa* [17], pode-se concluir que os erros  $z_i \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 5 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Nesta seção alguns resultados de simulações para um sistema não-linear de terceira ordem serão apresentados. O fenômeno apresentado aqui é o *Wing Rock*<sup>1</sup> que corresponde à existência de um ciclo limite no eixo longitudinal de um avião de alta performance indicado na Figura 3. O exemplo proposto nesta seção é semelhante ao descrito no trabalho de Krstić et al [13, pág. 180] e também [18].

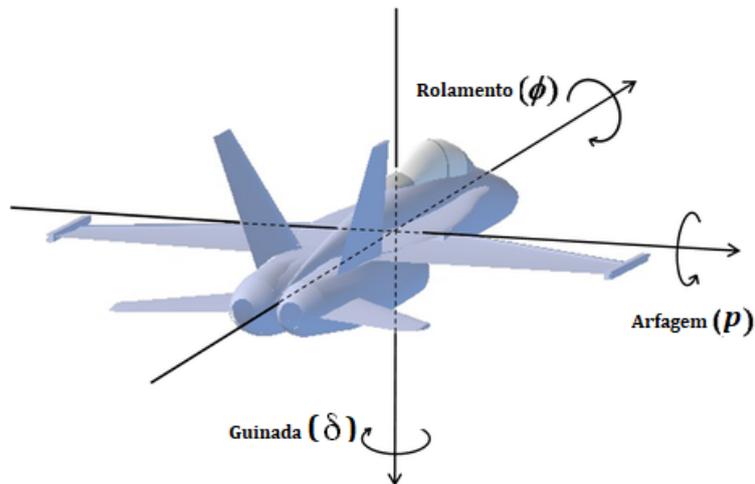


Figura 3 Avião de alta performance com os ângulos  $\phi, p, \delta$ . Imagem adaptada de <https://images.app.goo.gl/GyAYQTzedvucavB76> (última visualização em 27/08/2019).

Considere o sistema de terceira ordem com  $x = [\phi, p, \delta]^T$ :

$$\dot{\phi} = p, \quad (149)$$

$$\dot{p} = \delta + \theta^{*T} \varphi(\phi, p), \quad (150)$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{\tau} u - \frac{1}{\tau} \delta. \quad (151)$$

O vetor  $\varphi(\phi, p) = [1, \phi, p, |\phi|p, |p|p]^T$  representa a não-linearidade do sistema em função do estado e  $\theta^* = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$  são os parâmetros desconhecidos. O modelo de

<sup>1</sup>Assista ao vídeo disponibilizado pela NASA on-line no endereço <http://www.youtube.com/watch?v=9NALjLJkCOM>.

referência adotado é

$$\phi_r(s) = \frac{1}{(s+10)(s^2+4s+24.25)}r(s), \quad (152)$$

A entrada é  $r(s) = 0$ . O objetivo é conduzir  $\phi$  suavemente para a origem com um desempenho especificado pelo modelo de referência.

### 5.1 O Diferenciador Exato *HOSM* com Ganho Dinâmico

Para o exemplo em questão apenas a derivada de  $\alpha_2$  precisará ser estimada com o diferenciador HOSM global

$$\dot{\zeta}_0 = v_0 = -\lambda_0 \mathcal{L}_2^{\frac{1}{2}} |\zeta_0 - \alpha_2|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(\zeta_0 - \alpha_2) + \zeta_1, \quad (153)$$

$$\dot{\zeta}_1 = -\lambda_1 \mathcal{L}_2 \text{sgn}(\zeta_1 - v_0). \quad (154)$$

O diferenciador apresenta ganho dinâmico

$$\mathcal{L}_2(x, \hat{\theta}, u, t) := k_1^2 |\delta| + k_2^2 \|y_R\| + k_3^2 |u| + \bar{\phi}(x, \hat{\theta}, t), \quad (155)$$

com as seguintes constantes:

$$k_1^2 = \frac{c_2}{\tau} + c_2 c_1 + 1 + \frac{c_1}{\tau}, \quad (156)$$

$$k_2^2 = c_2 + c_1 + c_2 c_1 + 1, \quad (157)$$

$$k_3^2 = \frac{c_2}{\tau} + \frac{c_1}{\tau}, \quad (158)$$

e com o majorante dos termos não lineares  $\bar{\phi}$  definido por

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= (c_2 + c_1) \bar{\theta} \|\dot{\varphi}\| + (c_1 c_2 + 1 + \|\Gamma\| \|\varphi\|^2) \bar{\theta} \|\varphi\| + \|\hat{\theta}\| \|\ddot{\varphi}\| + \\ &+ \|\Gamma\| \left( \|\dot{\varphi}\| \|\varphi\| \left[ |p| + |y_R| + c_1 (|\phi| + |y_r|) \right] + \|\varphi\|^2 \left[ |\delta| + |\ddot{y}_r| + c_1 (|p| + |\dot{y}_r|) \right] \right) + \\ &+ 2\Gamma \|\dot{\varphi}\| \left( \|\varphi\| \left[ |p| + |\dot{y}_r| + c_1 (|\phi| + |y_r|) \right] \right), \end{aligned} \quad (159)$$

sendo  $\|\theta^*\| \leq \bar{\theta}$  o majorante do termo desconhecido. Neste exemplo não foi necessário utilizar os majorantes conhecidos dos sinais, como fora apresentado no Lema 2.

As variáveis que representam os erros são:

$$z_1 = \phi - \phi_r, \quad (160)$$

$$z_2 = p - \dot{\phi}_r - \alpha_1, \quad (161)$$

$$z_3 = \delta - \ddot{\phi}_r - \alpha_2, \quad (162)$$

enquanto que, as funções de estabilização com o auxílio do diferenciador global são

$$\alpha_1 = -c_1 z_1, \quad (163)$$

$$\alpha_2 = -c_2 z_2 - z_1 - \hat{\theta}^T \varphi + \zeta_1^1. \quad (164)$$

Por fim, a lei de controle (165) e em seguida a lei adaptativa (166) são dadas por:

$$u = \tau \left( -c_3 z_3 - z_2 + \frac{1}{\tau} \delta + \zeta_1^2 + \ddot{\phi}_r \right), \quad (165)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_2 = \Gamma \varphi z_2. \quad (166)$$

As condições iniciais adotadas foram  $\phi(0) = 0.5$ ,  $p(0) = \delta(0) = 0$ , e os parâmetros desconhecidos de  $\theta^*$  no sistema são

$$\theta^* = [0, -26.67, 0.76, -2.92, 0]^T.$$

O ganho adaptativo foi escolhido como  $\Gamma = 0.02I$ , sabendo-se que  $I$  é a matriz identidade.

Condições iniciais do vetor de parâmetros estimado foram

$$\hat{\theta}(0) = [0, -36.00, 1.03, -3.94, 0]^T,$$

enquanto que os demais parâmetros do controlador  $c_1 = c_2 = c_3 = 5$ , do diferenciador  $\lambda_0^{[2]} = 1.5$ ,  $\lambda_1^{[2]} = 1.1$  e  $\bar{\theta} = 30$ . O método numérico para resolver as equações foi o método de Euler, com o passo de integração  $h = 10^{-4}s$ . Os resultados de simulação podem ser vistos nas Figuras (4 – 7).

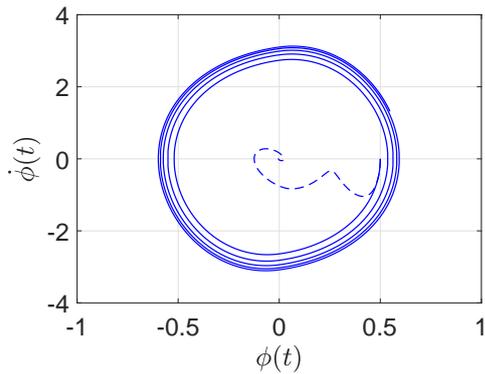


Figura 4 Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada).

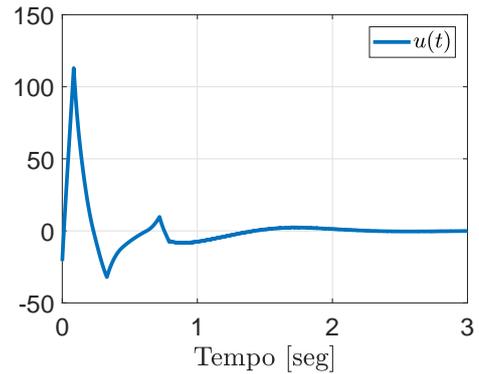


Figura 5 Sinal de controle para o controlador adaptativo *backstepping* proposto para o sistema *Wing Rock*.

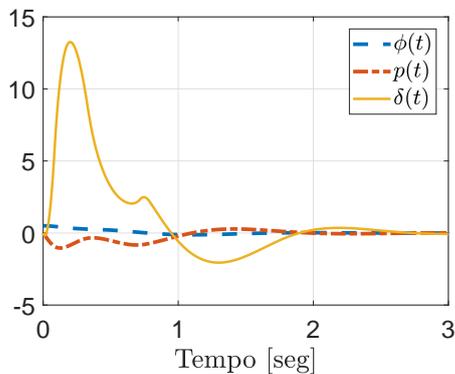


Figura 6 Estado do sistema em malha fechada.

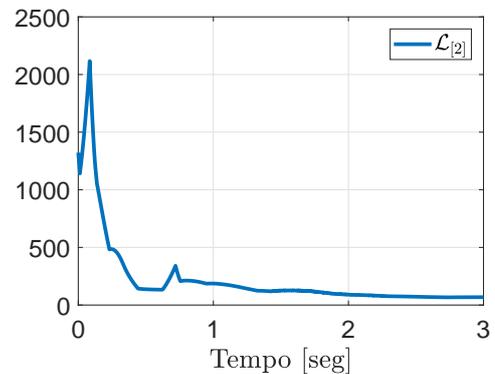


Figura 7 Ganho dinâmico do diferenciador exato *HOSM* proposto.

## 5.2 O Diferenciador Linear

Também chamado de filtro *lead*, este diferenciador é mais utilizado em sistemas lineares e é baseado na seguinte função de transferência:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{s}{\tau_f s + 1} \alpha_2(t) \quad (167)$$

onde  $y_{out}$  corresponde a saída,  $0 < \tau_f \ll 1$  a constante de tempo do filtro, e  $\alpha_2(t)$  o sinal de entrada a ser diferenciado. O uso deste diferenciador requer um  $\tau_f$  bem baixo, tendendo à zero de forma que o erro entre a saída (estimativa para a derivada) e o valor ideal também aproxime-se de zero. Apesar de ser um estimador global (válido para quaisquer condições iniciais), ele não é exato, pois é um filtro de sinal que cria atrasos

dinâmicos por conta do  $\tau_f$ .

Apesar de atender o objetivo de controle na Figura 8, o esforço de controle na Figura 9 é muito maior que na Figura 7 devido ao fenômeno de *peaking* [19].

Os resultados de simulação para o cálculo de  $\dot{\alpha}_2$  na planta do *Wing Rock* através do Diferenciador Linear com  $\tau_f = 0.01$  podem ser vistos nas Figuras (8 – 11).

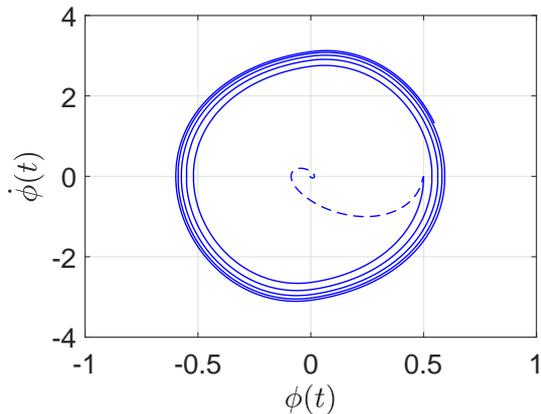


Figura 8 Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada) com diferenciador linear.

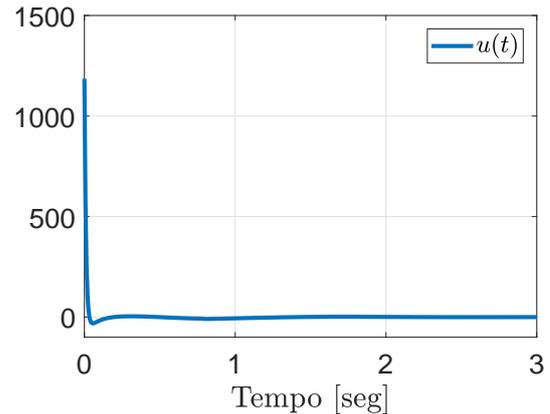


Figura 9 Sinal de controle para o controlador adaptativo backstepping proposto com diferenciador linear.

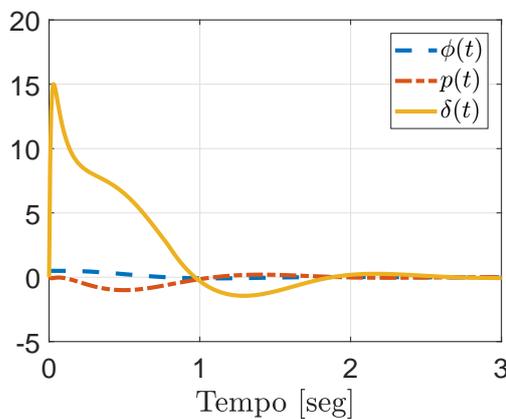


Figura 10 Estado do sistema em malha fechada com diferenciador linear.

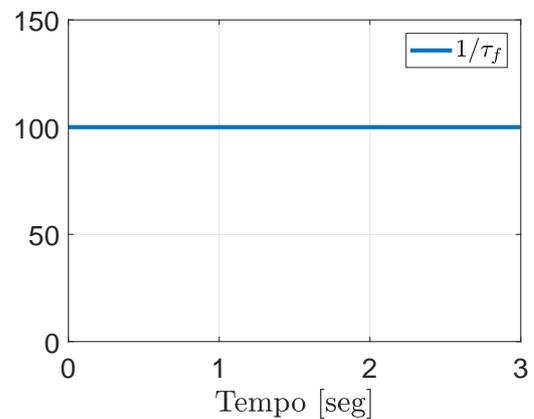


Figura 11 Ganho do diferenciador Linear em malha fechada.

### 5.3 O Diferenciador Exato *HOSM* com Ganhos Fixos

Baseado em um algoritmo descrito em [16], o diferenciador *HOSM* com Ganhos Fixos para um sinal base  $\alpha_2$  cuja segunda derivada apresenta uma constante *Lipschitz*  $C_{[2]} > 0$  é dado por

$$\dot{\zeta}_0^{[2]} = v_0^{[2]} = -\lambda_0^{[2]} C_{[2]}^{1/2} \left| \zeta_0^{[2]} - \alpha_{[2]} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \left( \zeta_0^{[2]} - \alpha_{[2]} \right) + \zeta_1^{[2]}, \quad (168)$$

$$\dot{\zeta}_1^{[2]} = -\lambda_1^{[2]} C_{[2]} \operatorname{sgn} \left( \zeta_1^{[2]} - v_0^{[2]} \right). \quad (169)$$

O algoritmo garante que  $\zeta_0^{[2]}(t) = \alpha_{[2]}(t)$ ,  $\zeta_1^{[2]}(t) = \dot{\alpha}_{[2]}(t)$  se

$$|\ddot{\alpha}_{[2]}| \leq C_{[2]}, \quad \forall t \geq T, \quad (170)$$

com algum  $T > 0$  finito. Neste diferenciador o estado deve estar confinado em uma região do espaço de estado e por isso não se aplica a qualquer condição inicial, salvo exceções, quando, por exemplo, o sistema em malha fechada for homogêneo: resultados locais implicam em resultados globais [16].

Nas simulações a constante  $C_{[2]}$  foi considerada igual à metade do maior valor do ganho dinâmico encontrado na Seção 5.1 (*HOSM* com ganho dinâmico). Os resultados de simulação podem ser vistos nas Figuras (12 – 15).

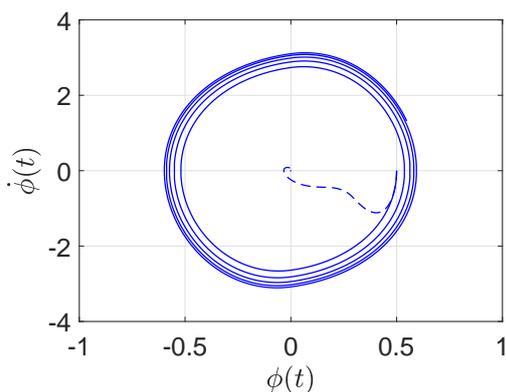


Figura 12 Plano de fase para o sistema em malha aberta (linha cheia) e fechada (linha pontilhada) de diferenciador *HOSM* com ganho fixo.

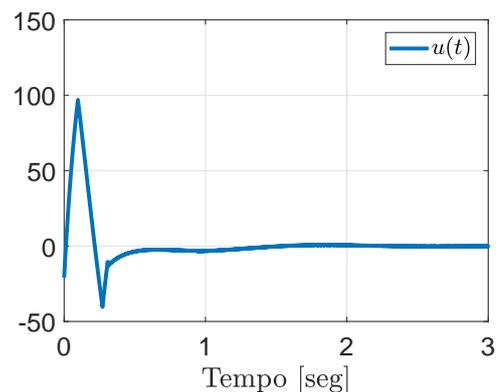


Figura 13 Sinal de controle para o controlador adaptativo backstepping proposto com *HOSM* de ganho fixo para o sistema *Wing Rock*.

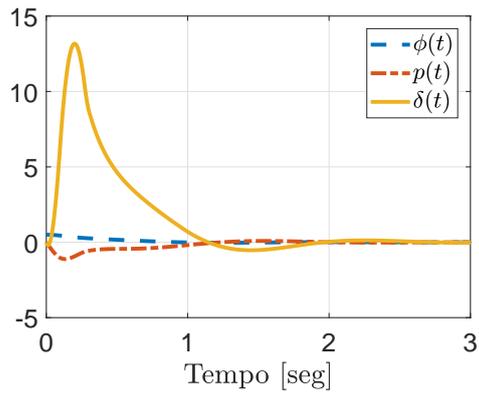


Figura 14 Estado do sistema em malha fechada aplicando-se o diferenciador *HOSM* de ganho fixo.

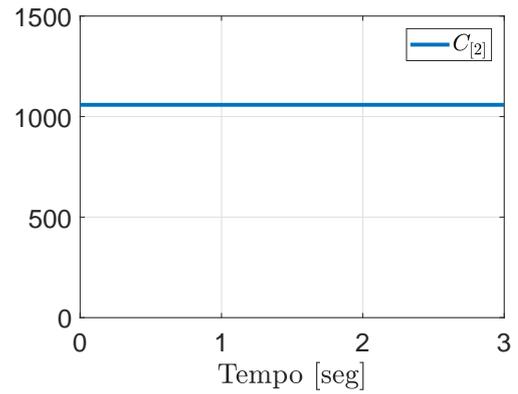


Figura 15 O Ganho fixo  $C_{[2]}$  do diferenciador exato *HOSM* escolhido é próximo de 1000.

Além de ser válido apenas localmente, a principal desvantagem do diferenciador *HOSM* com ganho fixo é que, como o próprio nome diz, o ganho é fixo e por isso não decresce com o tempo como acontece no ganho dinâmico na Figura 7. Assim, o *HOSM* com ganho fixo pode ser mais sensível a ruídos de medição em aplicações práticas.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentado um novo controlador adaptativo *backstepping* para uma classe de sistemas não-lineares do tipo *strict-feedback*. Além de simplificar o controlador adaptativo *backstepping* original, evitando-se o uso de derivadas parciais em sua lei de controle, o uso do diferenciador *HOSM* com ganho dinâmico garantiu o controle do sistema em malha fechada globalmente estável. Assim, para quaisquer condições iniciais, o controlador irá atuar buscando a convergência da saída para uma trajetória desejada.

Para ilustrar o Teorema desenvolvido, foi aplicado o controle adaptativo *backstepping* no problema de *Wing-Rock* conforme fora abordado em [8]. Foi concluído que o diferenciador *HOSM* com ganho dinâmico é assintoticamente estável.

De acordo com o estudo final, o controlador com diferenciador Linear apresenta modificação em seu sinal de controle, ilustrando o fenômeno adverso de *peaking*. Por outro lado, o diferenciador com ganhos fixos é válido apenas localmente. Para aumentar o domínio de atração é necessário aumentar o ganho constante do diferenciador, o que resulta em um potencial aumento de sensibilidade com relação a fenômenos práticos, por exemplo, ruído de medição.

### Trabalhos Futuros

Com relação a trabalhos futuros, visando dar continuidade a todo estudo desenvolvido na presente dissertação, alguns casos de pesquisas interessantes, seriam:

- 1) desenvolver o controle adaptativo *backstepping* com Diferenciador HOSM com Ganho Dinâmico utilizando apenas medição da saída, ou seja, estimando as outras variáveis de estado (no exemplo de *Wing Rock* a única variável de estado conhecida seria  $\phi$ );
- 2) estudar rigorosamente o efeito de atrasos na entrada ou saída do sistema;
- 3) generalizar os resultados para sistemas multivariáveis.

Inúmeros outros trabalhos podem ser desenvolvidos a partir da combinação dos resultados desta dissertação e do livro [13]. Neste livro são citados, por exemplo, o projeto de *output-feedback MIMO* (pag.294) e projeto de controlador adaptativo com observador *backstepping* (pag. 301).

## Produção Científica

Publicação do artigo [20] e apresentação de poster durante o DINCON 2019:

1. MOREIRA, M. L. C. M.; OLIVEIRA, T. R.; QUEIROZ, K. I. P. M. Controlador Adaptativo Backstepping baseado em Diferenciadores Globais com Ganhos Dinâmicos. XIV Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, ID: 1551, 2019, São Carlos.

## REFERÊNCIAS

- [1] UTKIN, V. I. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, p. 212–222, 1977.
- [2] KOKOTOVIĆ, P. V. The joy of feedback: nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 12, p. 7–17, 1992.
- [3] ALRIFAI, M. T.; CHOW, J. H.; TORREY, D. A. A Backstepping Nonlinear Control Approach to Switched Reluctance Motors. In: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA, USA: [s.n.], 1998. p. 4652–4657.
- [4] FREDRIKSSON, J.; EGARDT, B. Backstepping Control with Local LQ Performance Applied to a Turbocharged Diesel Engine. In: *IEEE 40th Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, USA, USA: [s.n.], 2001. p. 111–116.
- [5] KRSTIĆ, M.; KOKOTOVIC, P. V.; PADUANO, J. Useful nonlinearities and global stabilization of bifurcations in a model of jet engine surge and stall. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, p. 1739–1745, 1998.
- [6] STRAND, J. P. et al. Nonlinear control of ships: A locally optimal design. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 31, p. 705–710, 1998.
- [7] KRSTIĆ, M.; KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIĆ, P. V. Adaptive nonlinear control without overparametrization. *Systems and Control Letters*, v. 19, p. 177–185, 1992.
- [8] QUEIROZ, K. et al. Simplificação de um controlador adaptativo *backstepping* para uma classe de sistemas não-lineares utilizando um diferenciador híbrido global. *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, p. 1–6, 2013.
- [9] LEVANT, A. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, v. 34, p. 379–384, 1998.
- [10] OLIVEIRA, T. R.; ESTRADA, A.; FRIDMAN, L. Global and exact HOSM differentiator with dynamic gains for output-feedback sliding mode control. *Automatica*, v. 81, p. 156–163, 2017.

- [11] KRSTIĆ, M.; KOKOTOVIĆ, P. V. *Control Systems, Robotics and Automation - Vol.X - Adaptive Nonlinear Control*. 1. ed. [S.l.]: Encyclopedia of Lyfe Support Systems (EOLSS), 2009.
- [12] NIZAMI, T. K. *Design and Implementation of Online Estimation Based Backstepping Controller for DC-DC Buck Converters*. Tese (Doutorado) — Indian Institute of Technology Guwahati, India, July 2017.
- [13] KRSTIĆ, M.; KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIĆ, P. V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995.
- [14] OLIVEIRA, T. R.; RODRIGUES, V. H. P.; FRIDMAN, L. Generalized model reference adaptive control by means of global HOSM differentiators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 64, n. 5, p. 2053–2060, 2019.
- [15] MORENO, J. A. Exact differentiator with varying gains. *International Journal of Control*, v. 91, p. 1983–1993, 2018.
- [16] LEVANT, A.; LIVNE, M. Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, p. 1076–1080, 2012.
- [17] KRSTIĆ, M.; KANELLAKOPOULOS, I.; KOKOTOVIĆ, P. V. Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, p. 752–783, 1994.
- [18] MONAHEMI, M. M.; KRSTIĆ, M. Control of wing rock motion using adaptive feedback linearization. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, v. 19, n. 4, p. 905–912, 1996.
- [19] ATASSI, A. N.; KHALIL, H. K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. *European Control Conference (ECC)*, p. 3829–3834, 1997.
- [20] MOREIRA, M. L. C. M.; OLIVEIRA, T. R.; QUEIROZ, K. I. P. M. Controlador Adaptativo Backstepping baseado em Diferenciadores Globais com Ganhos Dinâmicos. *XIV Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, ID: 1551*, São Carlos, Brasil, Novembro 2019.