



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto Politécnico

Naim Jessé dos Santos Carvalho

**Simulação numérica do escoamento bifásico em um duto
horizontal empregando o método Smoothed Particle
Hydrodynamics**

Nova Friburgo

2021

Naim Jessé dos Santos Carvalho

**Simulação numérica do escoamento bifásico em um duto horizontal
empregando o método Smoothed Particle Hydrodynamics**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Helio Pedro Amaral Souto
Orientador: Prof. Dr. Grazione de Souza

Nova Friburgo

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/E

C331 Carvalho, Naim Jessé dos Santos.
Simulação numérica do escoamento bifásico em um duto horizontal empregando o método Smoothed Particle Hydrodynamics / Naim Jessé dos Santos Carvalho. – 2021. 58 f. : il.

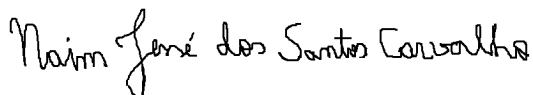
Orientadores: Helio Pedro Amaral Souto e Grazione de Souza.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

1. Escoamento bifásico - Soluções numéricas - Teses. 2. Dinâmica dos fluidos – Modelos matemáticos - Teses. 3. Partículas – Escoamento – Métodos de simulação – Teses. I. Souto, Helio Pedro Amaral. II. Souza, Grazione de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 531.3:519.6

Bibliotecária Cleide Sancho CRB7/5843

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.



Assinatura

02 de Março de 2021

Data

Naim Jessé dos Santos Carvalho

Simulação Numérica do Escoamento Bifásico em um Duto Horizontal Empregando o Método Smoothed Particle Hydrodynamics

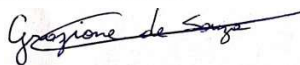
Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 24 de fevereiro de 2021.

Banca examinadora:



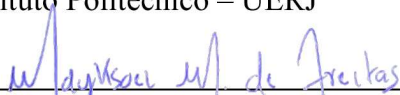
Prof. Helio P. A. Souto, Docteur de L'INPL – Orientador
Instituto Politécnico – UERJ



Prof. Grazione de Souza Boy, D.Sc. - Orientador
Instituto Politécnico – UERJ



Prof. Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues, Ph.D.
Instituto Politécnico – UERJ



Prof. Mayksoel Medeiros de Freitas, D.Sc.
Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB

Nova Friburgo

2021

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Helio Pedro Amaral Souto por, ao me aceitar como orientado, ter acreditado em minhas capacidades; por suas críticas e cobranças ao longo da execução do trabalho, fundamentais para que eu pudesse concluir o mesmo e por sua disponibilidade e compreensão durante este percurso.

Ao professor Grazione de Souza, meu coorientador, sem o auxílio do qual não teria sido possível executar todas as simulações para este trabalho.

Ao professor Josecley Fialho Góes que, ao ser meu orientador na graduação, me apresentou e instruiu na fluidodinâmica computacional, área que tanto gosto hoje.

Ao meus amigos, Ana Paula, Ellen e Érick, com quem dividi as ansiedades e por me manter distraído principalmente no período de elaboração da dissertação, ainda estivéssemos fisicamente distantes.

À minha mãe, por ter sempre acreditado em mim, me estimulando a continuar, fornecendo tanto apoio quanto possível ao longo da minha vida acadêmica e pelo incentivo para seguir em frente durante os momentos difíceis desta etapa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

CARVALHO, N. J. S. *Simulação numérica do escoamento bifásico em um duto horizontal empregando o método Smoothed Particle Hydrodynamics*. 2021. 58 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2021.

O código numérico *DualPhysics*, baseado no método de partículas lagrangiano e livre de malha *Smoothed Particle Hydrodynamics*, foi empregado na resolução do escoamento bifásico isotérmico, de dois fluidos ligeiramente compressíveis, em um duto horizontal. São resolvidas as equações da continuidade e do *momentum* e a equação de estado modificada de Tait é empregada na determinação da pressão. Além disso, a versão multifásica do código utiliza uma técnica de reposicionamento de partículas e leva em consideração os efeitos da tensão superficial. O escoamento de Couette de dois fluidos com massa específica e viscosidade diferentes foi simulado e os resultados comparados com a solução analítica. Como aplicação, considerou-se a resolução numérica do escoamento bifásico água-óleo bidimensional em um duto horizontal para a identificação dos padrões de escoamento, primeiramente empregando condições periódicas, bem como o caso onde a água e o óleo são misturados através de uma junção em Y de 45 graus colocada na entrada do tubo. Os resultados mostraram o potencial de uso do código numérico, embora ainda algumas modificações e alterações sejam necessárias para que ele possa ser utilizado na resolução de problemas práticos da engenharia de petróleo e gás.

Palavras-chave: Dinâmica dos fluidos computacional. Escoamentos bifásicos. Métodos de partículas. Smoothed Particle Hydrodynamics.

ABSTRACT

CARVALHO, N. J. S. *Numerical two-phase flow simulation in a horizontal duct using the Smoothed Particle Hydrodynamics method*. 2021. 58 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2021.

The numerical code DualPhysics, based on the Lagrangian particle and mesh-free Smoothed Particle Hydrodynamics method, was used to solve the two-phase isothermal flow of two slightly compressible fluids in a horizontal duct. The continuity and momentum equations are solved, and we use the modified Tait state equation to determine the pressure. Besides, the multiphase version of the code uses a particle repositioning technique, and we take into account the effects of surface tension. We simulated the Couette flow of two fluids with different densities and viscosities, and we compared the results with the analytical solution. As an application, we considered the numerical resolution of the two-dimensional two-phase water-oil flow in a horizontal duct to determine the flow patterns. Firstly we used periodic conditions and then mixed water and oil flow through a junction in 45 degrees Y placed at the tube inlet. The results showed the potential for using the numerical code. Nevertheless, some modifications and changes are still necessary so that we can use the code to solve practical problems of oil and gas engineering.

Keywords: Computational Fluid Dynamics. Two-Phase Flows. Particle Methods.
Smoothed Particle Hydrodynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Regimes de escoamento em um duto horizontal	13
Figura 2 - Função de suavização cúbica e sua derivada	24
Figura 3 - Função de suavização quártica e sua derivada	25
Figura 4 - Domínio de suporte de uma partícula	25
Figura 5 - Fluxograma SPH	31
Figura 6 - Etapas de execução do DualSPHysics	33
Figura 7 - Configuração geométrica para o escoamento de Couette	43
Figura 8 - Perfis de velocidade para o escoamento Couette	45
Figura 9 - Configuração geométrica para o escoamento bifásico bidimensional . . .	46
Figura 10 - Resultados para condições de contorno periódicas	49
Figura 11 - Configuração geométrica para o problema do escoamento no duto . . .	50
Figura 12 - Visualização do escoamento no duto principal - Caso 1	51
Figura 13 - Visualização do escoamento no duto principal - Caso 2	52
Figura 14 - Escoamento na entrada do duto - Caso 3	53
Figura 15 - Visualização do escoamento no duto principal - Caso 4	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros para o caso do escoamento de Couette	43
Tabela 2 - Parâmetros para o teste com condições de periodicidade	47
Tabela 3 - Velocidades iniciais para as duas fases	48

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	MODELAGEM MATEMÁTICA	16
1.1	Equações Governantes	16
1.1.1	<u>Equação da continuidade</u>	16
1.1.2	<u>Equação do <i>momentum</i></u>	16
1.1.3	<u>Equação da energia</u>	17
1.2	Modelagem da pressão	18
2	O MÉTODO SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS	20
2.1	Aproximação integral de uma função	21
2.1.1	<u>Escolha do núcleo</u>	22
2.2	Aproximação por partículas	25
2.3	Equações de balanço discretizadas no formalismo do método SPH	28
2.4	Métodos de integração temporais	29
2.5	Equação de estado	29
2.6	Condições de contorno	30
2.7	Etapas do método SPH	31
3	O CÓDIGO NUMÉRICO <i>DUALSPHYSICS</i>	32
3.1	Principais etapas do código	32
3.2	Tratamento multifásico	33
3.2.1	<u>Algoritmo de reposicionamento de partículas</u>	34
3.2.2	<u>Equação de estado modificada</u>	34
3.3	Tensão superficial	35
3.3.1	<u>Tratamento viscoso</u>	37
3.4	Evolução temporal	38
3.4.1	<u>Método de integração de Verlet</u>	38
3.5	Condições de contorno	40
3.5.1	<u>Condição de contorno dinâmica</u>	40
3.5.2	<u>Condição de contorno periódica aberta</u>	40
4	RESULTADOS	42
4.1	Escoamento de Couette modificado	42
4.2	Escoamento bifásico em um duto horizontal com condições peri- ódicas	46
4.3	Escoamento bifásico em um duto horizontal com o uso de reser- vatórios	50
	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	54
	REFERÊNCIAS	56

INTRODUÇÃO

Governados pela primeira e a segunda lei da termodinâmica, pelos princípios de conservação da quantidade de movimento e da conservação da massa, os problemas da fluidodinâmica são, em geral, complexos e não é uma tarefa fácil encontrar as suas soluções na forma analítica (exceto para casos de baixa complexidade ou com hipóteses simplificadoras), uma vez que devem ser, frequentemente, consideradas simultaneamente as equações da continuidade, de Navier-Stokes e da energia. Assim, é normalmente requerida a utilização de uma técnica numérica computacionalmente eficiente para a resolução de tais equações.

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) dispensa o uso de malhas computacionais, uma vez que todo o domínio do problema é representado por partículas dinâmicas e utiliza-se as equações de balanço para calcular as propriedades físicas necessárias das partículas. Quando do uso do método SPH integra-se diversas áreas do conhecimento ao conciliar-se a dinâmica dos fluidos, a resolução numérica de equações diferenciais, os métodos de buscas, as estruturas de dados, a representação de superfícies discretas e as aproximações geométricas (LIU; LIU, 2003).

Assim como outros métodos da classe de métodos de partículas, seu uso em simulações de problemas de escoamento pode incluir as micro e macro escalas. Há ainda a possibilidade de ser realizado o acoplamento de fenômenos, o que permite o tratamento de problemas considerando fluidos multifásicos, fluidos com elevadas viscosidades, interface fluido-sólido dentre outros (LIU; LIU, 2003; VIOLEAU, 2012; FRAGA FILHO, 2019).

A simulação de um problema, inclusive com um método livre de malhas, requer o conhecimento das equações governantes e das suas condições auxiliares (iniciais e/ou de contorno) bem definidas; o emprego de uma técnica de discretização do domínio; a aplicação de técnicas de discretização numérica e, por fim, a utilização de métodos numéricos para a resolução de sistemas de equações algébricas ou de equações diferenciais ordinárias (PAIVA et al., 2009).

De natureza lagrangiana, trata-se de uma descrição onde os fluidos são representados por um conjunto de elementos (partículas) que se movem à medida que o tempo passa, o método SPH foi proposto visando à simulação de problemas astrofísicos por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977). Nesses problemas, métodos com malhas (eulerianos) não eram totalmente aplicáveis (VIOLEAU, 2012). Posteriormente, o método SPH foi empregado com sucesso em problemas apresentando grandes deformações e fraturas e, no início da década de 1990, foi utilizado para estudos hidrodinâmicos em escoamentos quase incompressíveis e, então, expandido para problemas realmente incompressíveis.

Por possuir uma formulação simples baseada em partículas, o método pôde ser aplicado a vários tipos de problemas como, por exemplo, a dinâmica dos fluidos, as de-

formações de materiais, as ondas de choque, os fluxos de lava, os fenômenos magnéticos etc. A simplicidade com que os fenômenos complexos são modelados faz do SPH uma ferramenta de solução interessante, tendo sido estudada extensivamente e estendida para diversos problemas e áreas de atuação (LIU; LIU, 2003).

A discretização do domínio no método SPH é feita por um conjunto de partículas, sem o uso de uma malha computacional. As partículas são definidas como pontos no espaço e a elas podem ser atribuídas uma massa, posição, velocidade etc. Também é possível associá-las às propriedades individuais relacionadas à física do fenômeno simulado, tais como a massa específica, a temperatura, a pressão, dentre outras (VIOLEAU, 2012). Neste método, as partículas se movem no espaço à medida que o tempo evolui, interagindo entre si e carregando todas as informações físicas do escoamento.

A obtenção das propriedades desejadas via o SPH é feita de modo iterativo, começando com a inicialização do sistema, a partir das definições iniciais das propriedades físicas do problema e prosseguindo com a determinação da vizinhança de cada uma das partículas. Em seguida, as interações entre partículas são consideradas, de acordo com as equações governantes e, finalmente, o sistema é atualizado, etapa na qual verifica-se se a condição de parada pré-estabelecida foi alcançada.

Escoamentos bifásicos

Escoamentos entre duas fases imiscíveis estão presentes em diversas aplicações industriais e científicas como, por exemplo, na indústria do petróleo, em processos químicos, em instalações de usinas geotérmicas, na indústria espacial e em reatores nucleares entre outros.

Na indústria do petróleo, escoamentos bifásicos ocorrem na produção e no transporte de gás e óleo, em dutos verticais, horizontais ou inclinados (SHOHAM, 2005; HERNANDEZ, 2016). Nessa área, estudos são realizados para determinar, por exemplo, a queda de pressão ao longo do escoamento, de forma a dimensionar corretamente os dutos, os *risers* e as instalações de separação.

Em sistemas térmicos, os escoamentos bifásicos podem ser observados nos evaporadores, condensadores e reatores. Estão também presentes em processos de destilação e refrigeração, onde é necessário prever, além de queda de pressão, a razão volumétrica de líquido. Em usinas de energia geotérmica, ocorrem na forma do escoamento água-vapor nas tubulações verticais e de abastecimento do sistema (SHOHAM, 2005).

Dentre os quatro tipos de escoamento bifásicos (gás-líquido, gás-sólido, líquido-líquido e líquido-sólido), os escoamentos gás-líquido são particularmente complexos dada a presença da interface deformável e da fase compressível.

Para um dado escoamento e geometria, a distribuição da interface pode se apre-

sentar em inúmeras formas. No entanto, um menor número de tipos de regimes de escoamento, ou padrões de escoamento, é utilizado na classificação dessas combinações (SHOHAM, 2005).

Esses padrões de escoamento, em um dado sistema bifásico, dependem de diversas variáveis: parâmetros operacionais, como as vazões de líquido e gás; variáveis geométricas, como a inclinação e o diâmetro do duto, além das propriedades físicas de cada uma das fases, como a massa específica, a viscosidade e a tensão superficial (HASAN; KABIR; SARICA, 2002; SHOHAM, 2005). Assim, determinar os padrões de escoamento se torna um problema central na análise de um escoamento bifásico devido ao grande número de parâmetros envolvidos.

A habilidade de determinar os padrões de escoamento característicos permite a predição da queda de pressão e da transferência de calor em função do tamanho do duto/canal, das vazões utilizadas e de outros parâmetros operacionais (HERNANDEZ, 2016).

A partir da queda de pressão, por exemplo, é possível determinar quais características do escoamento devem ser verificadas a fim de minimizar a corrosão ou a erosão. Para processos da indústria química, ou para o transporte de óleo e gás, a predição dos regimes de escoamento permite a eliminação do aumento excessivo da pressão do gás, do colapso dos dutos e de potenciais explosões (HAUKE, 2008).

Shoham (2005) menciona que, em geral, a forma da interface entre as fases é complexa e que a sua velocidade não é conhecida a priori. Além disso, dificuldades adicionais são provenientes do transporte de massa e, possivelmente, da transferência de calor ao longo da interface.

Duas variáveis importantes no estudo do escoamentos multifásicos são a razão volumétrica de líquido (a fração de um elemento de volume ocupada pela fase líquida), H_l , e a fração de vazio α , para a fase gasosa. Em um escoamento entre duas fases, essas variáveis verificam as seguintes restrições: $0 < H_l$, $\alpha < 1$ e $H_l + \alpha = 1$. As velocidades superficiais, v_{sl} e v_{sg} , representam os fluxos volumétricos das fases por unidade de área e podem ser interpretadas como sendo as velocidades que ocorreriam caso apenas a fase estudada estivesse presente no duto (SHOHAM, 2005).

Ainda que os escoamentos bifásicos horizontais sejam similares em muitos aspectos aos verticais, diferenças surgem principalmente em função dos efeitos da gravidade sobre os fluidos. Nesse caso, a distribuição das fases tende a ser assimétrica, com a fase gasosa se concentrando próximo à parede superior (HERNANDEZ, 2016).

Para um escoamento bifásico horizontal, ou quase horizontal, Hasan, Kabir e Sarica (2002) lista a existência de seis grandes regimes, que podem ser observados na Fig. 1, que são:

1. *Stratified Smooth Flow* (Fig. 1(a)): neste regime, que ocorre sob baixas vazões para as fases, a separação gravitacional é completa e o líquido flui através da parte

inferior do duto com o gás na parte superior. Uma interface suave entre ambos é criada.

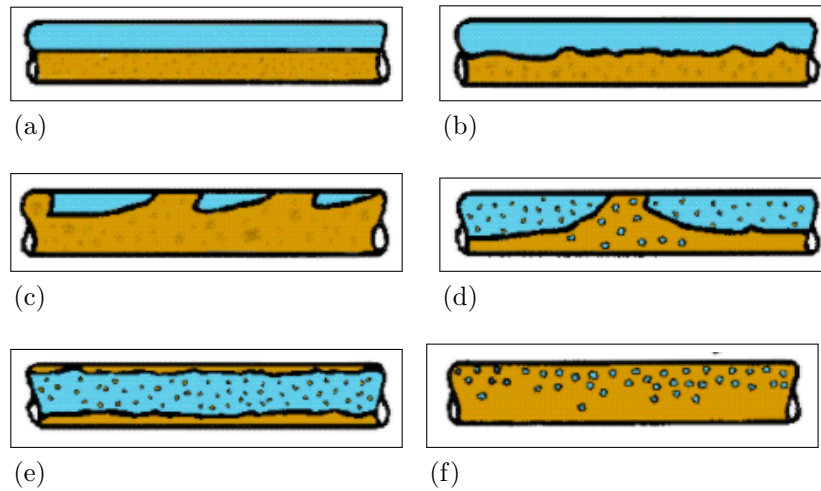
2. *Stratified Wavy Flow* (Fig. 1(b)): este regime ocorre na presença de uma vazão maior para a fase gasosa e, ainda que as fases estejam separadas, a forma da interface se torna irregular assemelhando-se a uma ondulação.
3. *Plug/Elongated Bubble Flow* (Fig. 1(c)): ocorre com uma combinação de baixas vazões para a fase gasosa e mais altas vazões para a fase líquida (maior que em *Stratified Wavy Flow*). O líquido pode preencher todo o duto, forçando o gás a escoar como bolhas alongadas próximo ao topo da tubulação.
4. *Slug Flow* (Fig. 1(d)): neste regime as bolhas se tornam maiores e preenchem uma porção maior da seção transversal do escoamento. As ondulações tocam o topo do duto e formam um escoamento em golfadas, elas são transportadas rapidamente ao longo da extensão do canal. Os regimes *Slug Flow* e *Plug Flow* são dificilmente diferenciados e podem ser combinados em uma única classificação chamada de *Regime Intermitente* (TAITEL; LEE; DURKLER, 1978).
5. *Annular Flow* (Fig. 1(e)): com altas vazões de gás o líquido se move próximo as paredes e o gás escoar através do centro do duto criando um anel. Pode ser formado a partir de um escoamento estratificado, como o *stratified wavy* e *stratified smooth*, quando a vazão de líquido diminui e a de gás aumenta suficientemente para espalhar o líquido ao longo do canal.
6. *Dispersed Bubbly Flow* (Fig. 1(f)): com as altas vazões da fase líquida, bolhas de gás são formadas e dispersadas no meio líquido, ainda que haja alguma separação em função da gravidade.

Simulação de escoamentos multifásicos com o método SPH

Poucos estudos utilizando o SPH podem ser encontrados para a identificação de padrões de escoamento em problemas bifásico em dutos.

Rezavand, Zhang e Hu (2019) buscaram minimizar os problemas da simulação com o SPH de escoamentos multifásicos (para fluidos apresentado uma alta razão entre as suas massas específicas) como o surgimento de vazios não-naturais no escoamentos e a incorreta separação entre as fases, utilizando uma formulação fracamente compressível baseada na solução do problema de Riemann para o escoamento multifásico, mas os testes foram realizados apenas para problemas como o do tanque hidrostático de duas fases e variações do problema clássico do rompimento de barragens.

Figura 1 - Regimes de escoamento em um duto horizontal



Legenda: Padrões identificáveis para escoamentos bifásicos em um duto horizontal: (a) *Stratified Smooth Flow* (b) *Stratified Wavy Flow* (c) *Plug Flow* (d) *Slug Flow* (e) *Annular Dispersed* e (f) *Dispersed Bubbly Flow*.

Fonte: [HEWITT, 2010](#).

[Alcântara \(2018\)](#), utilizando inicialmente o código numérico *DualSPHysics* e a formulação multifásica proposta por [Colagrossi e Landrini \(2003\)](#), estudou algumas soluções numéricas voltadas especificamente para a indústria de óleo e gás, implementando escoamentos multifásicos e modelos de advecção, com um interesse particular por escoamentos com a presença de sedimentos. A aplicação realizada pelo autor foi feita mediante a realização de três estudos principais:

1. O rompimento de uma barragem contendo água e óleo;
2. A sedimentação de areia em água parada;
3. O rompimento de uma barragem na presença de sedimentos de areia.

[Douillet-Grellier et al. \(2018\)](#) avaliaram o perfis de escoamento obtidos quando da simulação do escoamento com dois fluidos imiscíveis, em duas configurações geométricas distintas (duto horizontal e outro inclinado) e corretamente identificaram os padrões preditos pela literatura. Quatro conjuntos de perfis de velocidades constantes foram utilizados nos testes. O modelo utilizado, no entanto, conta com diversas alterações com relação à formulação tradicional do método SPH. Pode-se citar, por exemplo, as modificações na avaliação da massa específica que deixam de considerar a massa específica das partículas vizinhas o que, segundo os autores, permite o tratamento das discontinuidades presentes. Outras alterações notáveis são a forma diferente de determinação do passo de tempo

(verificando a condição de CFL), a introdução de uma força repulsiva atuando sobre as partículas das duas fases próximas à interface de separação, com o objetivo de impedir um fenômeno chamado de micro mistura de sub-kernel, uma vez que as partículas apresentam a tendência a se misturarem. Outra alteração, proposta pelos autores, foi a adição de uma força de interação na equação do *momentum* para modelar os efeitos da tensão superficial entre os fluidos.

[Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#) estudaram os efeitos do uso de uma viscosidade artificial e um algoritmo de *shifting*, que reposiciona as partículas em áreas de menor concentração de partículas, de forma a manter uma distribuição de partículas no domínio sem o aparecimento de vazios artificiais que podem ocorrer no escoamento quando do uso do método SPH. Os resultados dessas alterações no formalismo multifásico foram validados com o estudo do escoamento bifásico de Poiseuille e de Couette, com o movimento induzido pelo deslocamento (com velocidade constante) da placa superior. Além disso, os autores buscaram observar dois tipos de instabilidade: de Rayleigh-Taylor, ao ser inserida uma perturbação no domínio com os dois fluidos imiscíveis em repouso, e a instabilidade de Kelvin-Helmholtz, com condições de periodicidade e uma perturbação senoidal inserida na interface dos fluidos. Eles também buscaram determinar os padrões de escoamento observados em um duto horizontal, mediante a inserção de duas fases escoando com propriedades diferentes e para quatro perfis de velocidade distintos, utilizando uma configuração geométrica ligeiramente diferente daquela empregada por [Douillet-Grellier et al. \(2018\)](#). Os quatro padrões previstos na literatura foram corretamente identificados nos testes numéricos.

Objetivos

Como parte dos pesquisadores do Laboratório de Modelagem Multiescala e Transporte de Partículas (LABTRAN) desenvolve as suas atividades de pesquisa voltadas para a Simulação de Reservatórios, o objetivo inicial deste trabalho de dissertação é o de verificar a viabilidade do uso do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* na simulação dos escoamentos multifásicos que geralmente estão presentes nos processos de exploração, desenvolvimento, produção, refino, transporte e distribuição na indústria do petróleo e gás. Mas especificamente, pretende-se verificar a possibilidade de aplicação/modificação do código *DualSPHysics*, desenvolvido por pesquisadores das Universidades de Vigo (Espanha), Manchester (Reino Unido), *degli studi di Parma* (Itália), da Catalunha (Espanha) e *New Jersey Institute of Technology* (Estados Unidos), sob a licença GNU (*Lesser General Public License*), na simulação dos escoamentos multifásicos em dutos. Portanto, este é um trabalho pioneiro no laboratório no que diz respeito ao seu escopo de aplicação.

Organização do Trabalho

Após a contextualização desta introdução, o presente trabalho aborda no Capítulo 1 a modelagem matemática da fluidodinâmica, necessária para descrever o escoamento de fluidos. Além das equações da continuidade, da energia e de Navier-Stokes, resultados da aplicação dos princípios de conservação da massa, quantidade de movimento e energia, a formulação adotada para a determinação da pressão (equação de estado) é apresentada.

No Capítulo 2, o foco é o método SPH, onde é apresentado o detalhamento da aproximação integral e da aproximação por partículas, que formam a base do método adotado. Neste capítulo, são introduzidas também a função de suavização e os operadores SPH, bem como são escritas as equações de balanço em termos dessa nova formulação, além de alguns detalhes específicos necessários para a simulação do escoamento.

O terceiro capítulo apresenta o código numérico DualSPHysics, baseado no método de partículas SPH, que prescinde do uso de malha computacional, usa uma descrição lagrangiana e foi projetado para tratar de problemas práticos de engenharia. Nesse capítulo, são discutidas as principais características e vantagens do *software*, as quais levaram a sua adoção neste trabalho.

Por outro lado, o Capítulo 4 apresenta os problemas de escoamentos bifásicos aqui estudados. Nele são descritos e mostradas as configurações geométricas adotadas, as propriedades físicas dos fluidos, as condições iniciais e de contorno e os resultados encontrados através da simulação numérica empregando o código numérico já mencionado e selecionado para a resolução dos escoamentos.

O capítulo final foca nas principais conclusões obtidas com a conclusão deste trabalho, além de apresentar algumas perspectivas futuras para a continuidade da pesquisa aqui iniciada.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA

São apresentadas, neste capítulo, as equações que regem o escoamento de fluidos newtonianos. Estas equações expressam as conservações de massa, do *momentum* e da energia e são oriundas, respectivamente, dos balanços de massa, de quantidade de movimento e de energia, levando em consideração a hipótese do meio contínuo.

1.1 Equações Governantes

O escoamento de fluidos newtonianos compressíveis é governado por um conjunto de equações diferenciais parciais e são descritos, por exemplo, em termos de campos de velocidade, de pressão e de temperatura. A forma pela qual estas variáveis evoluem no tempo é obtida graças às equações que são descritas a seguir, apresentadas em sua representação lagrangiana e considerando um fluido newtoniano compressível.

1.1.1 Equação da continuidade

A equação da continuidade é baseada na conservação da massa e é amplamente usada na Mecânica dos Fluidos. Para uma dada região do espaço, livre de fontes e sumidouros, ele expressa o fato de que a variação do fluxo de massa que entre e sai dessa região deve ser igual à taxa de flutuação da massa específica do fluido em um determinado período de tempo (SLATTERY, 1999)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

onde a equação está escrita em termos da derivada material ($D\rho/Dt$), descrição lagrangiana, ρ é a massa específica, t é o tempo e $\vec{v}$ é o vetor velocidade.

1.1.2 Equação do *momentum*

A equação que expressa a conservação da quantidade de movimento linear é obtida a partir do balanço do *momentum*. Na Mecânica do Contínuo, para corpos deformáveis, ela é deduzida a partir da primeira lei de Euler que diz que a taxa de variação do *momentum* linear deve ser igual ao somatório das forças agindo sobre o corpo (SLATTERY,

1999),

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \vec{f}_e$$

onde $\mathbf{T}$ representa o tensor de tensões e $\vec{f}_e$ as forças externas que atuam no fluido, em geral causadas pela gravidade.

Agora, em se tratando de um fluido newtoniano compressível, a equação constitutiva para o tensor de tensões é dada por (SLATTERY, 1999)

$$\mathbf{T} = -P\mathbf{I} + (\lambda \nabla \cdot \vec{v})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$$

onde P é a pressão termodinâmica, $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ (assumindo a hipótese de Stokes), μ é a viscosidade cinemática do fluido e o tensor $\mathbf{D}$ representa a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade.

Portanto, feitas as substituições, chega-se à forma final da equação do *momentum* aqui utilizada

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} - \frac{2}{3} \nabla (\mu \nabla \cdot \vec{v}) + \vec{f}_e \quad (2)$$

onde ∇P representa as forças de pressão por unidade de volume e $\mu \nabla^2 \vec{v}$ as forças viscosas por unidade de volume (tomando a viscosidade como constante para um fluido newtoniano).

Caso se considere um fluido newtoniano incompressível, a massa específica não varia e como resultado, da equação da continuidade, tem-se que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, de modo que:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}_e$$

1.1.3 Equação da energia

No que diz respeito à equação da energia, sabe-se que ela é derivada considerando-se o postulado da conservação de energia: a taxa de variação da energia interna mais a energia cinética de um corpo é igual a taxa de trabalho realizado sobre o corpo mais a taxa de energia fornecida ao corpo. Considerando o corpo como contínuo e aplicando a conservação de energia obtém-se (SLATTERY, 1999)

$$\rho \frac{De}{Dt} = \text{tr}(\mathbf{TD}) - \nabla \cdot \vec{Q} + \dot{q}$$

onde e é a energia específica interna, tr indica o operador traço de um tensor, $\vec{Q}$ é o vetor fluxo de energia e $\dot{q}$ é a taxa de energia transferida devido a uma fonte externa.

Em seguida, assumindo como válida a lei de Fourier ([SLATTERY, 1999](#))

$$\vec{Q} = -K \nabla T$$

e que o fluido é newtoniano e compressível, determina-se a forma final empregada no método SPH

$$\rho \frac{De}{Dt} = -P (\nabla \cdot \vec{v}) + \varepsilon_v + \nabla \cdot (K \nabla T) + \dot{q} \quad (3)$$

onde $\varepsilon_v = \text{tr}(\mathbf{TD})$ representa a taxa de dissipação viscosa da energia, K é a condutividade térmica, T é a temperatura e $\nabla \cdot (K \nabla T)$ representa a taxa de energia transferida devida à condução de calor.

1.2 Modelagem da pressão

Nas simulações aqui apresentadas, os fluidos incompressíveis serão, de fato, substituídos por fluidos quase incompressíveis. Tal abordagem é possível e vem sendo utilizada com frequência no método SPH ([FRAGA FILHO, 2019](#)).

Portanto, neste caso, uma equação de estado pode ser proposta para a determinação da pressão. Dentre diversas possibilidades, a equação de Tait foi a escolhida para o seu uso quando da simulação de escoamentos com superfícies livres.

[Batchelor \(2000\)](#) propôs uma versão dessa equação de estado para a água que descrevia precisamente a propagação de ondas sonoras. Uma outra forma alternativa foi introduzida por [Monaghan e Kos \(1999\)](#), cujas modificações resultaram na seguinte relação

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (4)$$

que permite que a pressão seja calculada em função da massa específica determinada. Nela, B é um parâmetro associado às flutuações na massa específica (em unidades de

pressão) e dependente do problema estudado, ρ_0 é a massa específica de referência do fluido e γ é uma constante politrópica, em geral $\gamma = 7$. A subtração da unidade na equação proporciona uma redução dos efeitos de fronteira em se tratando de um escoamento com fronteiras livres. Pode-se perceber também que pequenas variações na massa específica podem acarretar em grandes mudanças na pressão. Então, a especificação do parâmetro B assume uma grande importância (LIU; LIU, 2003).

O coeficiente B depende da velocidade do som e pode ser determinado através da relação:

$$B = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma},$$

onde c_0 representando a velocidade do som no fluido, que deve ser imposta de modo a garantir que ocorram pequenas variações de pressão. Assim sendo, o parâmetro B é responsável por impor um limite máximo de variação para a massa específica, uma vez que considera-se um fluido quase incompressível (LIU; LIU, 2003).

2 O MÉTODO SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS

Criado para resolver problemas no espaço sideral (aberto e tridimensional) por Lucy (1977) e Gingold e Monaghan (1977), o método SPH foi elaborado observando que o movimento das partículas, modelado utilizando as equações governantes da hidrodinâmica (newtoniana) clássica, era similar ao movimento das partículas de fluido em um escoamento de gás.

Liu e Liu (2003) listam as diversas aplicações possíveis, apresentando entre elas problemas envolvendo escoamentos incompressíveis ou altamente compressíveis, escoamentos com superfícies livres, impactos a altas velocidades, mitigação de choques, explosões submersas entre outros. Os autores listam os conceitos empregados para a implementação e tratamento dos problemas no âmbito deste método:

1. O problema é representado por um conjunto de partículas, sem conexão requerida. Essa característica estabelece a natureza livre de malhas do método.
2. Utiliza-se o método da representação integral para a aproximação das funções de campo (também conhecida como aproximação de núcleo/*kernel*). Essa representação garante a estabilidade necessária do método, uma vez que a representação integral tem um efeito de suavização que se comporta como uma formulação fraca que, em geral, é estável se a integração numérica é feita de forma acurada.
3. A aproximação de núcleo é então realizada por meio de uma aproximação por partículas: a representação integral de uma função e suas derivadas é substituída por um somatório sobre todas as partículas consideradas vizinhas da partícula avaliada, no chamado domínio de suporte (ou suporte compacto). Essa etapa produz um sistema de matrizes esparsas, importantes quando se avalia o esforço computacional empregado no método.
4. A aproximação por partículas é avaliada a cada passo de tempo. Essa aproximação fornece adaptabilidade ao método: como ela é uma das primeiras operações realizadas na etapa de aproximação das variáveis de campo, a formulação do método não é afetada pela distribuição arbitrária das partículas que varia no tempo. Ao final dessa etapa, uma massa é atribuída às partículas, o que implica que elas são uma representação real das partículas materiais físicas.
5. As aproximações por partículas são aplicadas a todos os termos relacionados às funções de campo nas equações diferenciais parciais governantes, produzindo um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) cuja variável independente é o tempo. Esse procedimento reflete a natureza lagrangiana do método.

6. As EDOs são, então, resolvidas usando um algoritmo de integração explícito, dentre os que são comumente usados na resolução de problemas dinâmicos, ainda que algoritmos implícitos possam também ser utilizados.

As equações de Navier-Stokes, que governam o escoamento de fluidos newtonianos na dinâmica dos fluidos, no processo de discretização são integradas localmente para cada uma das partículas do domínio e a sua avaliação depende das propriedades físicas das partículas vizinhas da partícula em questão.

A vizinhança é determinada por uma função baseada na distância entre as partículas, nos arredores e partícula avaliada, e pode assumir uma forma circular (para um problema bidimensional) ou esférica (para problemas tridimensionais), possuindo um comprimento característico (ou comprimento de suavização) associado, que é geralmente denotado por h .

A cada passo de tempo novos valores das propriedades físicas são calculados para cada partícula, que se movem de acordo com as equações governantes (CRESPO, 2019).

2.1 Aproximação integral de uma função

A fundamentação do método SPH utiliza a teoria da interpolação integral. Nessa formulação, num domínio Ω que contém um ponto x , a representação integral de uma função $f(x)$ é dada por uma convolução tal que:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (5)$$

onde f é uma função do vetor posição x e $\delta(x - x')$ é a função delta de Dirac expressa por:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{se } x = x' \\ 0 & \text{se } x \neq x' \end{cases}$$

Com o uso da função delta de Dirac, a representação integral da Eq. (5) é exata quando a função f é contínua no domínio Ω . Se a função delta, $\delta(x - x')$, for substituída por uma função de suavização com suporte compacto (também chamada de função núcleo ou *kernel*), $W(x - x', h)$, e introduzido o *operador aproximação de núcleo*, denotado por $< >$, a representação integral se torna:

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (6)$$

onde h é o comprimento de suavização, controlando o tamanho do domínio do suporte compacto da função W (ou seja, definindo quais são as partículas vizinhas da partícula considerada).

2.1.1 Escolha do núcleo

A escolha do *kernel* não pode ser arbitrária, uma vez que ele determina o padrão de aproximação, a dimensão do suporte de partículas, bem como a consistência e a precisão das aproximações (PAIVA et al., 2009). Entre os critérios que são frequentemente atendidos ao ser definido uma função núcleo estão:

1. O núcleo deve ser normalizável:

$$\int_{\Omega} W^h(x) d^n x = 1$$

2. O núcleo deve satisfazer à condição de aproximação da função delta de Dirac:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x) = \delta(x)$$

3. O núcleo deve possuir um suporte compacto:

$$W^h(x) = 0, \quad \text{quando } \|x\| > kh$$

4. O núcleo deve ser suave:

$$W \in C^k, k > 1$$

5. O núcleo deve ser decrescente:

$$W^h(x) < W^h(u), \quad \text{se } \|x\| > \|u\|$$

6. O núcleo de ser simétrico:

$$W^h(x) = W^h(\|x\|)$$

7. O núcleo deve ser positivo:

$$W^h(x) \geq 0$$

O primeiro critério pode ser chamado também de condição de unidade, uma vez que a integração da função de suavização tem um resultado unitário e garante a consistência de ordem 0 (C^0) para a representação integral de uma função contínua (LIU; LIU, 2003).

O segundo critério garante a reprodução da função delta Dirac quando o comprimento de suavização se aproxima de zero. No terceiro critério, onde k é um fator de escala, é garantido que a integração sobre o domínio do problema possa ser reduzida a uma integração sobre o suporte compacto do núcleo e, dessa forma, quando da sua discretização o somatório aproximando a integral é uma operação local (considerando apenas as partículas contidas no suporte compacto da função núcleo). A constante k é um fator de escala relacionado ao núcleo e, efetivamente, define uma distância, área ou volume (dependendo do número de dimensões do problema) para o suporte compacto de W .

A quarta condição é associada à obtenção de melhores aproximação através do processo de interpolação: melhores resultados são obtido quanto mais suave for a função W (GÓES, 2016b).

Os critérios cinco e seis, ainda que não sejam fundamentais, determinam a influência das interações em função da distância entre as partículas. As implicações são, respectivamente, que as partículas mais próximas à partícula considerada têm uma maior influência do que as partículas que se encontram mais distantes (que corresponde ao comportamento fisicamente esperado), enquanto que as partículas localizadas em direções diferentes que se encontrem a uma mesma distância, da partícula em questão, possuem peso igual (LIU; JUN; ZHANG, 1995).

O último critério traduz o fato de que a função núcleo deve ser não-negativa dentro do domínio de suporte, para garantir que as aproximações reflitam a natureza das propriedades físicas. Como exemplo, uma massa específica negativa poderia ser obtida caso a função fosse negativo (GÓES, 2016b).

Ainda que os núcleos possam ter diferentes formas, os mais comumente utilizados são os das funções pares (LIU; LIU, 2003; CRESPO, 2019). Os núcleos são expressos em função do comprimento de suavização (h) e de uma distância adimensional (q) entre as partículas dada por $q = r/h$, onde r é a distância ente duas partículas i e j (ou $r = x - x'$). Como exemplos de núcleos, apresenta-se a seguir dois núcleos do tipo *splines* comumente usados:

1. Spline cúbico (MONAGHAN; LATTANZIO, 1985),

$$W(r, h) = \alpha_d \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^4 & \text{se } 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3 & \text{se } 1 \leq q \leq 2 \\ 0 & \text{se } q \geq 2 \end{cases}$$

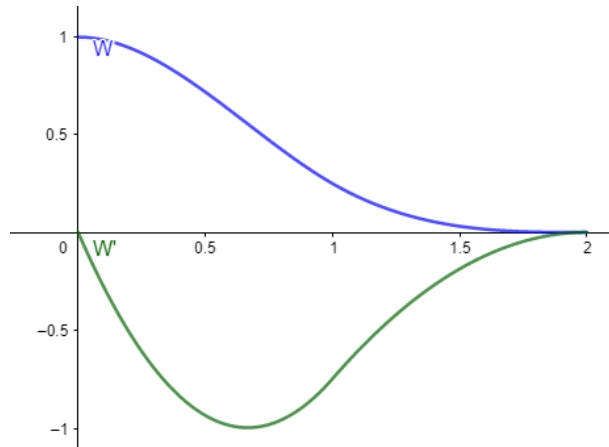
onde $\alpha_d = 10/7\pi h^2$ (para problemas bidimensionais) e $1/\pi h^3$ (para problemas tridimensionais). A Fig. 2 apresenta o gráfico da função e da sua derivada, para valores positivos de x .

2. Spline quártico ([WENDLAND, 1995](#)),

$$W(r, h) = \alpha_d \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (2q + 1) \quad 0 \leq q \leq 2$$

onde $\alpha_d = 7/4\pi h^2$ e $21/16\pi h^3$ para problemas bidimensionais e tridimensionais, respectivamente. Essa função e a sua derivada, para valores positivos de x , podem ser observadas na Fig. 3.

Figura 2 - Função de suavização cúbica e sua derivada

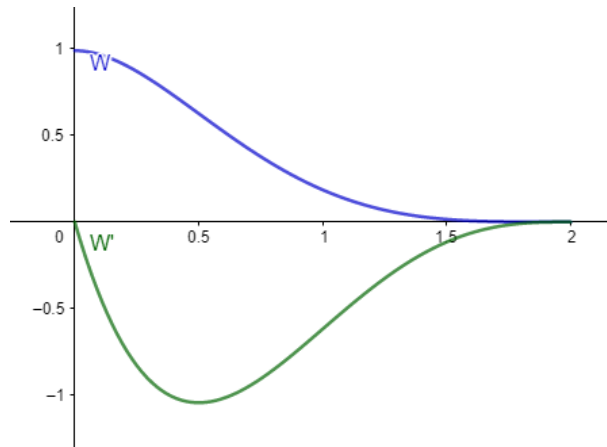


Legenda: Em azul, a curva *spline* cúbica; em verde, a sua derivada.

Fonte: O autor, 2021.

Outras funções de suavização frequentemente utilizados no método SPH são listados em [Fraga Filho \(2019\)](#) e [Lucy \(1977\)](#) para duas versões de kernels quárticos, em [Góes \(2016b\)](#) para o kernel hiperbólico e [Yang, Peng e Liu \(2014\)](#) para um kernel cossenoidal duplo.

Figura 3 - Função de suavização quíntica e sua derivada



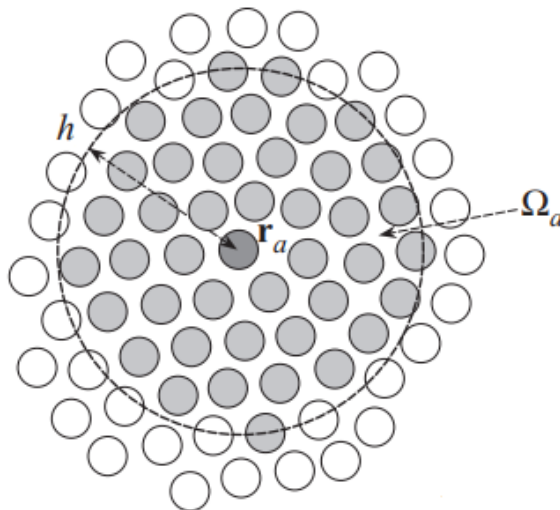
Legenda: Em azul, *spline* quíntico; em verde, a sua função derivada.

Fonte: O autor, 2021.

2.2 Aproximação por partículas

As representações contínuas do método SPH, como a Eq. (6), podem ser transformados em uma forma discreta através de um somatório considerando todas as partículas no domínio de suporte, conforme mostrado na Fig. 4.

Figura 4 - Domínio de suporte de uma partícula



Nota: Domínio Ω de uma partícula a .

Fonte: [VIOLEAU, 2012](#)

Trata-se de uma soma ponderada pela função núcleo, considerando os valores da função em todas as partículas contidas na vizinhança da partícula avaliada. Uma partícula

j é considerada vizinha de uma partícula i se a distância entre elas satisfaz a relação $r_{ij} = |x_i - x_j| < kh$ ou seja, se ela estiver contida no suporte compacto de i . Góes (2016a) apresenta duas alternativas para a determinação do comprimento de suavização.

Com essa representação, a aproximação por partículas de uma função é dada por (LIU; LIU, 2003):

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij}^h \quad (7)$$

Os termos da Eq. (7) podem ser interpretados como: $\langle f(x_i) \rangle$ o valor aproximado da função f na posição da partícula i (fixa); $f(x_j)$ valor aproximado da função na posição da partícula vizinha, j ; m_j é a massa da partícula vizinha j ; ρ_j é a massa específica da partícula vizinha j ; W_{ij}^h é a função núcleo avaliada na posição $x_i - x_j$ e N é o número de partículas vizinhas da partícula i .

De maneira similar, os operadores gradiente e divergente são expressos por (LIU; LIU, 2003):

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij}^h \cdot f(x_j)$$

e

$$\langle \nabla \otimes f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij}^h \otimes f(x_j)$$

Nessa representação, $W_{ij}^h = W(r_{ij}, h)$ e o gradiente é determinado em relação à partícula i tal que:

$$\nabla_i W_{ij}^h = \frac{x_{ij}}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}^h}{\partial r_{ij}}$$

onde x_{ij} e r_{ij} representam a distância entre duas partículas i e j ($x_{ij} = x_i - x_j$ e $r_{ij} = |x_i - x_j|$) (GÓES, 2016b).

Essas representações são obtidas utilizando como aproximação a relação $dx' \cong \Delta V_j = \frac{m_j}{\rho_j}$, as propriedades dos operadores diferenciais e o fato da função de suavização ter suporte compacto, conforme demonstrado em Liu e Liu (2003).

A acurácia da aproximação depende da existência de um número de partículas suficiente e satisfatório dentro do suporte compacto da partícula avaliada, com números

mínimos de 5, 21 e 57 partículas para problemas uni, bi e tridimensionais, respectivamente (LIU; LIU, 2003).

Entretanto, não existe uma única maneira de se discretizar os operadores diferenciais. Na literatura encontram-se outras alternativas (GÓES, 2016b) e reproduz-se, aqui, algumas delas:

1. operador SPH divergente diferença:

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij}^h \cdot [f(x_j) - f(x_i)]$$

2. operador SPH divergente simétrico:

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij}^h \cdot \left[\frac{f(x_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(x_i)}{\rho_i^2} \right]$$

3. operador SPH gradiente diferença:

$$\langle \nabla f(x_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij}^h \otimes [f(x_j) - f(x_i)]$$

4. operador SPH gradiente simétrico:

$$\langle \nabla f(x_i) \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij}^h \otimes \left[\frac{f(x_j)}{\rho_j^2} + \frac{f(x_i)}{\rho_i^2} \right]$$

5. operador SPH laplaciano diferença:

$$\langle \nabla^2 f(x_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij}^h \cdot [\nabla \otimes f(x_j) - \nabla \otimes f(x_i)]$$

6. operador SPH laplaciano simétrico:

$$\langle \nabla^2 f(x_i) \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij}^h \cdot \left[\frac{\nabla \otimes f(x_j)}{\rho_j^2} + \frac{\nabla \otimes f(x_i)}{\rho_i^2} \right]$$

onde

$$\nabla \otimes f(x_i) = \frac{1}{\rho_s} \sum_{l=1}^N m_l \nabla_s W_{sl}^h \cdot [\nabla \otimes f(x_l) - \nabla \otimes f(x_s)]$$

7. operador SPH laplaciano Taylor:

$$\langle \nabla^2 f(x_i) \rangle = 2 \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[\frac{f(x_i) - f(x_j)}{|x_i - x_j|^2} \right] (x_i - x_j) \nabla_i W_{ij}^h$$

2.3 Equações de balanço discretizadas no formalismo do método SPH

Utilizando as aproximações integral e por partículas e tomando $v_{ij} = v_i - v_j$ as formas discretizadas das equações governantes (1), (2) e (3) podem ser obtidas no formalismo do método SPH. Ressalta-se, mais uma vez, que as formas discretizadas dessas equações não é única e que o leitor pode encontrar em outros trabalhos diferentes aproximações, como em (FRAGA FILHO, 2019) e Violeau (2012).

Inicialmente, apresenta-se a forma discretizada da equação da continuidade

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j v_{ij} \cdot \nabla W_{ij}^h \quad (8)$$

e, em seguida, a forma discreta da equação de Navier-Stokes

$$\frac{D\vec{v}_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla W_{ij}^h + 2\nu_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nu_{ij} \frac{x_{ij}}{|x_{ij}|^2} \cdot \nabla W_{ij}^h + \vec{g} \quad (9)$$

finalizando com a equação de energia

$$\frac{De_i}{Dt} = -P_i \sum_{j=1}^N m_j v_{ij} \cdot \nabla W_{ij}^h + \frac{\mu_i}{2\rho_i} \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{T}_i - \sum_{j=1}^N m_j \nabla W_{ij}^h \cdot \left(\frac{\vec{Q}_i}{\rho_i^2} + \frac{\vec{Q}_j}{\rho_j^2} \right) + \dot{q} \quad (10)$$

Detalhes sobre a aplicação da aproximação por partículas na obtenção das formas discretizadas, além de uma análise do erro associada às aproximações de uma função e sua derivada pelo formalismo SPH, podem ser encontradas em Liu e Liu (2003), Góes

(2016b) e Fraga Filho (2019).

2.4 Métodos de integração temporais

Conforme pôde ser visto, a solução numérica das equações de balanço requer, além das aproximações por partículas dessas equações, um método de integração numérica para que seja obtida a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes do processo de discretização espacial, Eqs. (8), (9) e (10).

Sabe-se que existem vários métodos passíveis de utilização e algumas alternativas frequentemente utilizadas podem ser encontradas nos trabalhos de Gomez-Gesteira et al. (2012) e Fraga Filho (2019). Dentre os métodos explícitos, lista-se aqui:

1. Método *Symplectic*: um algoritmo de integração de dois estágios, numericamente estável mas computacionalmente mais custoso. Este método de integração temporal de segunda ordem é reversível no tempo na ausência de efeitos viscosos ou atrito.
2. Esquema *Leap-Frog*: de segunda ordem, apresenta como atrativo uma única chamada da função principal a cada passo de tempo. A velocidade é calculada em pontos intermediários no tempo, fazendo com que a posição e a velocidade sejam calculadas alternadamente. A inicialização das velocidades pode ser feita empregando o método de Euler.
3. Esquema *Verlet*: um método de integração de segunda ordem no espaço que não necessita de múltiplos passos de cálculo a cada iteração temporal. Detalhes de como são determinadas as velocidades e as posições, nesse esquema, são apresentados na Seção 3.4

2.5 Equação de estado

O fluido, no *DualSPHysics*, é tratado como sendo fracamente compressível e, conforme proposto por Monaghan (1994), uma equação de estado é utilizada para no cálculo da pressão do fluido conhecida a massa específica, conforme mostrado na Eq. (4).

A compressibilidade é ajustada de tal forma que o coeficiente de velocidade do som pode ser diminuída artificialmente. Isso significa dizer que o incremento de tempo, para qualquer instante, pode ser mantido em um valor razoável (CRESPO, 2019).

No entanto, fazer esse tipo de ajuste leva a velocidade do som a ser, pelo menos, 10 vezes maior que a maior velocidade de fluido, mantendo-se as variações na massa específica dentro de uma tolerância de 1%.

2.6 Condições de contorno

Técnicas que visam à especificação das condições de contorno nas fronteiras representam uma parte significativa da aplicação do método *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Próximo das fronteiras do domínio, o número de partículas vizinhas cai significativamente, prejudicando a acurácia das soluções obtidas (LIU; LIU, 2003; VIOLEAU, 2012). Diferentes soluções são viáveis e, em geral, elas baseiam-se na introdução de partículas adicionais (virtuais/fictícias) nas fronteiras do sistema, ainda que este seja um tópico atual e que suscita a busca por novas abordagens. Fraga Filho (2019) apresenta uma lista com alguns métodos recentes que vêm estudando essa questão.

Entre os tratamentos possíveis lista-se: as partículas virtuais e as forças repulsivas artificiais, as condições de contorno dinâmicas, as condições de contorno refletivas e as condições de contorno periódicas abertas.

O objetivo das partículas virtuais é o de evitar que as partículas de fluido atravessem os limites físicos do domínio, a partir da aplicação de uma força sobre elas. Tal efeito é alcançado com a utilização dessas partículas nos limites do domínio ou próximo a eles.

As partículas virtuais são, normalmente, classificadas em dois tipos: tipo I, para as partículas posicionadas no contorno; e tipo II, para as partículas virtuais alocadas fora dos limites e, frequentemente, elas são posicionadas simetricamente em relação às partículas reais do problema. Propriedades físicas podem ser atribuídas às partículas virtuais como a temperatura e a velocidade (Condição de Dirichelet) ou a pressão em paredes sólidas (Condição de Newman) (FRAGA FILHO, 2019).

Nas condições de contorno dinâmicas, as partículas são fixadas nas fronteiras e exercem uma força nas partículas que se aproximam delas. Essas partículas dinâmicas também são governadas pelas equações de conservação e a equação de Tait (para prever a pressão dinâmica) (FRAGA FILHO, 2019). Mais detalhes sobre essa técnica podem ser encontrados na Seção 3.5.1.

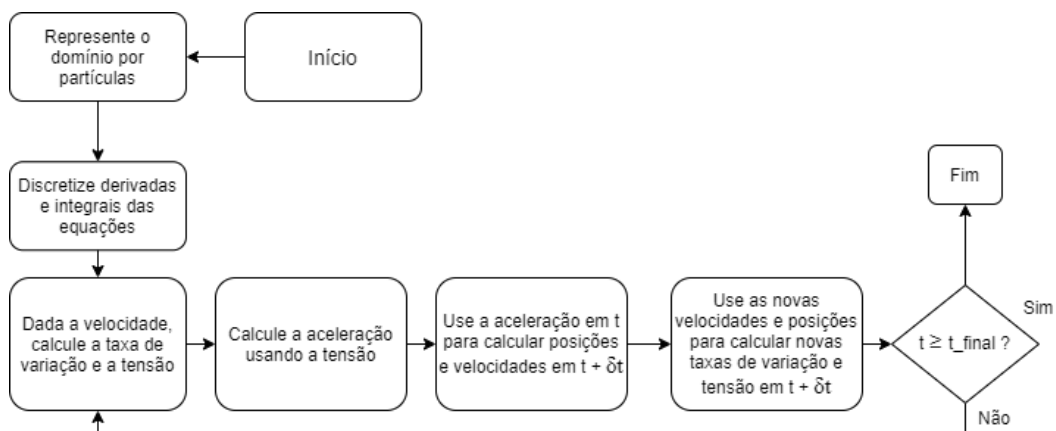
O tratamento de fronteira reflexivo é um modelo para se tratar das colisões nos métodos de partículas, buscando definir como as partículas interagem com os contornos, a fim de prevenir o contato direto delas com o meio. Neste método um algoritmo de detecção e resposta é implementado, responsável por trazer a partícula alvo de volta para o domínio. Assim que a colisão é detectada, a partícula é refletida; se a partícula não retorna ao domínio imediatamente, o algoritmo de detecção e resposta continua a atuar até que a partícula esteja contida na região do escoamento (HOUSE; KEYSER, 2017). Em Fraga Filho (2019) pode-se ver em detalhes um algoritmo de detecção de colisão e resposta.

2.7 Etapas do método SPH

Conforme mostrado na Fig. 5 a simulação numérica de um problema de fluidodinâmica, no método SPH, consiste de etapas que são comuns aos métodos de partículas:

1. Representa-se o domínio do problema com partículas de tal forma que as propriedades físicas iniciais sejam conhecidas, em cada partícula discreta, em um instante inicial t_0 . As condições de contorno devem ser impostas segundo as técnicas apresentadas;
2. Na sequência, discretiza-se espacialmente as equações governantes através das suas aproximações por partículas correspondentes.
3. A partir da velocidade/posição, calcula-se a taxa de variação da mesma, e dessa informação determina-se a tensão em cada partícula discreta em um dado instante t .
4. Prosseguindo, avalia-se a aceleração de cada partícula discreta usando a tensão encontrada que atua nela.
5. A aceleração no instante t é, então, usada para calcular as novas velocidades e as novas posições no instante de tempo $t + \delta t$, onde δt é o incremento de tempo.
6. Utilizando-se as novas velocidades/posições, estima-se outra vez as novas taxas de variação e, então, a tensão no instante $t + \delta t$. As etapas 4, 5 e 6 são repetidas, e o processo iterativo prossegue avançando até que o instante de tempo final pré-definido seja atingido.

Figura 5 - Fluxograma SPH



Nota: Etapas de execução do método SPH.

Fonte: Adaptado de [LIU; LIU, 2003](#).

3 O CÓDIGO NUMÉRICO *DUALSPHYSICS*

O código *DualSPHysics* é uma implementação numérica do método SPH em código aberto, utilizando C++ e desenvolvido para executar simulações de problemas reais da engenharia com até milhões de partículas, com paralelização via a API OpenMP, para execuções em processadores, ou CUDA, em se tratando de placas de vídeo.

Entre os principais exemplos fornecidos que representam a funcionalidade do código estão: o rompimento de barragem (*dam break*, tanto para o caso monofásico quanto para o problema bifásico, incluído um exemplo tridimensional do mesmo), as simulações contendo objetos flutuantes, a colisão contra estruturas fixas, o teste com geração de ondas e mitigação de impacto, os exemplos com condições do tipo *inlet* e *outlet* para problemas monofásicos.

A versão utilizada nas simulações realizadas neste trabalho é a versão multifásica 4.0, disponível para *download* em <https://dual.sphysics.org>.

O problema que deseja-se simular deve ser implementado através de um arquivo do tipo *.xml* que deve conter todas as informações do escoamento: geometria do domínio, parâmetros de controle e pertinentes à simulação (tempo de simulação, algoritmo de evolução temporal, intervalo para que os dados sejam armazenados em arquivos, etc.), além das propriedades físicas dos fluidos utilizados na simulação.

O código conta também com a possibilidade de importar arquivos que definam a geometria do domínio físico do problema. Por exemplo, programas de desenho auxiliado por computador que possam exportar geometrias no formato de estereolitografia (*.stl*) podem ser utilizados. Uma extensão, chamada *DesignSPHysics*, é compatível com algumas versões do código e permite a integração com o *software* FreeCad, disponibilizando uma interface para a definição de problemas.

Às geometrias que representam os corpos no domínio é possível associar movimento, através de uma série de funções disponíveis ou também definir o movimento a partir de fontes externas, permitindo a simulação de estruturas do tipo bombas hidráulicas.

3.1 Principais etapas do código

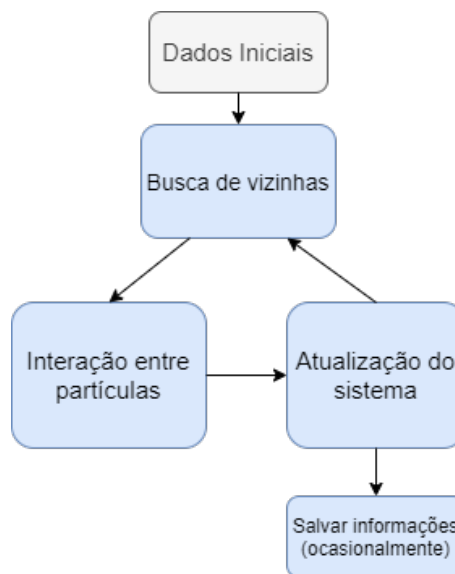
Crespo (2019) diz que uma simulação utilizando o DualSPHysics consiste na execução iterativa de três etapas, apresentadas na Fig. 6. As quais são descritas em seguida:

1. Etapa 1 (busca pelas partículas vizinhas): nessa etapa o domínio é dividido em células de lados com tamanho igual a $2h$. Em seguida, uma lista de partículas é criada, ordenadas de acordo com a célula a qual elas pertencem. Por fim, todas as matrizes contendo as variáveis físicas atribuídas às partículas são reordenadas de

acordo com a *Lista de Partículas*.

2. Etapa 2 (computação das forças): agora, todas as partículas de uma mesma célula e de suas células adjacentes se tornam candidatas a vizinhas. Cada partícula, então, interage com todas as suas partículas vizinhas (a uma distância de até $2h$) exercendo e sofrendo a ação de forças de diferentes origens. Estas forças são calculadas nesta etapa.
3. Etapa 3 (atualização do sistema): inicialmente, um novo valor para o passo de tempo é computado. Então, as quantidades físicas são atualizadas a partir dos valores das variáveis físicas conhecidas, no tempo atual ou anteriores, usando as equações que descrevem as interações de partículas. Nessa etapa, as informações das partículas, como massa específica e velocidade, são salvas localmente, em tempos pré-definidos.

Figura 6 - Etapas de execução do DualSPHysics



Fonte: Adaptado de [CRESPO, 2019](#).

3.2 Tratamento multifásico

Como o interesse principal deste trabalho de pesquisa é o de verificar a viabilidade de uso do código *DualSPHysics* no que diz respeito à simulação de escoamentos multifásicos em dutos, os principais recursos disponíveis na versão multifásica do código, aqui empregado, são apresentados e detalhados a seguir.

3.2.1 Algoritmo de reposicionamento de partículas

Uma das instabilidades que podem ocorrer nas simulações utilizando o método SPH é o aglutinamento de partículas, também chamado de espaçamento anisotrópico de partículas. Esse fenômeno é particularmente comum em simulações de escoamentos complexos, onde as partículas não conseguem manter uma distribuição uniforme no interior do domínio (CRESPO, 2019). Como resultado, um ruído é inserido nos campos de pressão e velocidade, além da criação de “vazios” não-físicos dentro do escoamento em certos casos.

Mokos (2013) observou o aparecimento do fenômeno da formação de vazios quando simulando um escoamento bifásico em um rompimento de barragem, especificamente quando a onda gerada atinge a parede direita do domínio e, portanto, passa a se mover em direção oposta ao ser refletida no obstáculo físico.

Xu, Stansby e Laurence (2009) propuseram uma solução para este problema, através do reposicionamento das partículas (*shifting algorithm*). O algoritmo foi originariamente criado para o seu uso em simulações de escoamentos incompressíveis com o método SPH, mas o mesmo pode ser estendido e aplicado ao caso de escoamentos fracamente compressíveis. Neste algoritmo, as partículas são movidas para áreas com menor concentração de partículas, de forma a permitir que o domínio mantenha uma distribuição uniforme de partículas, eliminando os vazios indesejados.

Lind et al. (2012) realizou uma correção na versão inicial desse algoritmo, utilizando a lei de Fick da difusão para controlar a magnitude e a direção do deslocamento. A demonstração e a forma final da equação utilizada no algoritmo de reposicionamento para definir a distância a qual a partícula deve ser deslocada, δr_s , implementada no *DualSPHysics*, pode ser obtida em Crespo (2019).

3.2.2 Equação de estado modificada

Para o tratamento do escoamento multifásico de dois fluidos, o código *DualSPHysics* disponibiliza o modelo proposto por Mokos (2013). O modelo multifásico utiliza para a determinação da pressão uma versão modificada da equação de estado de Tait (Eq. 4) escrita na forma da Eq. 3.2.2:

$$p(\rho) = \frac{c_s^2 \rho_0}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] + P_f - a\rho^2$$

onde γ é um fator isentrópico de expansão (tipicamente $\gamma = 7$), ρ_0 é a massa específica inicial do fluido, c_s é a velocidade do som, P_f é a pressão de fundo (definida pelo usuário ou calculada a partir da configuração inicial do problema) e o último termo é responsável pela

introdução das forças de coesão que atuam entre as partículas de uma fase. O coeficiente a é determinado baseando-se nas propriedades das diferentes fases e no comprimento característico do problema, L :

$$a = 1,5g \left(\frac{\rho_w}{\rho_a} \right) L$$

onde ρ_w e ρ_a são as massas específicas iniciais das duas fases presentes no escoamento. O comprimento característico é uma constante empírica que depende das dimensões do domínio e da distância inicial entre as partículas. [Douillet-Grellier et al. \(2018\)](#) propõe que, para escoamentos em dutos, o comprimento característico deva ser tomado como sendo igual ao diâmetro do duto.

O coeficiente de coesão a é similar ao termo de força repulsiva proposto por [Mognaghan \(2011\)](#) e foi inicialmente sugerido com base no parâmetro equivalente presente na equação de estado de van der Waals ([MOKOS, 2013](#)).

Neste tipo de problema, devido à presença de uma fase gasosa e às enormes discontinuidades da massa específica na interface separando as fases, a formulação tradicional utilizada no método SPH não é mais aplicável neste contexto. Portanto, um termo extra é adicionado à equação do momento (o segundo termo do lado direito do sinal de igualdade) de modo a contabilizar as forças coesivas da fase menos densa:

$$\frac{D\vec{v}_i}{Dt} = - \sum m_j \left(\frac{P_i + P_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij} - 2a\rho_a^2 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} + \vec{F}_s + \vec{g} \quad (11)$$

onde $\vec{F}_s$ corresponde à força externa adicionada que leva em conta os efeitos da tensão superficial. Na próxima seção é mostrado como ela pode ser calculada numericamente.

3.3 Tensão superficial

O método da Tensão Superficial Contínua (*Continuum Surface Stress method*) usa a curvatura da interface de separação (κ) para calcular a força superficial por unidade de área

$$\vec{F}_s = \kappa \sigma_\alpha \hat{n}$$

onde σ_α é a tensão superficial da fase α e $\hat{n}$ é a normal unitária à superfície.

Entretanto, como não é uma tarefa fácil a determinação da curvatura da interface,

Lafaurie et al. (1994) propuseram calcular essa força diretamente do tensor de pressão capilar ($\mathbf{\Pi}$)

$$\vec{F}_s = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}$$

onde o tensor é dado por (DOUILLET-GRELLIER et al., 2018)

$$\mathbf{\Pi} = -\sigma (\mathbf{I} - \hat{n} \otimes \hat{n}) |\nabla C| \quad (12)$$

Aqui, $|\nabla C|$ é o gradiente da *função cor* C , que apresenta um salto unitário na interface e a normal unitária pode ser determinada a partir desse gradiente

$$\hat{n} = \frac{\nabla C}{|\nabla C|}$$

No *DualSPHysics* a função cor é definida para uma partícula da fase α como sendo dada por

$$C_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \alpha \\ 0 & \text{se } i \notin \alpha \end{cases}$$

No formalismo do método SPH, define-se o gradiente da função cor, que existe apenas na presença de partículas vizinhas da fase β ($\beta \neq \alpha$), na forma:

$$\nabla C_i^{\alpha\beta} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (C_j^\beta - C_i^\beta) \frac{\partial W}{\partial r_{ij}}$$

Utilizando-se esse gradiente de cor, o tensor de tensão superficial pode ser calculado a partir da Eq. (12) (LAFURIE et al., 1994)

$$\mathbf{\Pi}_i^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} \frac{1}{|\nabla C_i^{\alpha\beta}|} \left(\frac{1}{d} |\nabla C_i^{\alpha\beta}|^2 \mathbf{I} - \nabla C_i^{\alpha\beta} \otimes \nabla C_i^{\alpha\beta} \right)$$

e, então, a força de tensão superficial, introduzida na equação do *momentum* (11) como uma força externa (CRESPO, 2019), pode ser finalmente computada

$$\vec{F}_s = \sum_j m_j \frac{\Pi_i^{\alpha\beta} + \Pi_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W}{\partial r_{ij}}$$

3.3.1 Tratamento viscoso

Duas formas de tratamento para avaliar os efeitos dissipativos, presentes na equação do momento (2), estão disponíveis no DualSPHysics.

A primeira decompõe o termo de tensão viscosa em duas contribuições: uma devida à tensão viscosa laminar e outra à tensão viscosa SPS (*Sub-Particle Scale*). O conceito foi proposto por [Gotoh, Shibahara e Sakai \(2001\)](#) para introduzir os efeitos da turbulência em seu modelo MPS (*Moving Particle Semi-implicit model*)

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}_i}{Dt} = & - \sum_b m_j \left(\frac{P_j + P_i}{\rho_j \rho_i} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_j m_j \left[\frac{4v_0 r_{ij} \cdot \nabla_i W_{ij}}{(\rho_i + \rho_j) (r_{ij}^2 + \eta^2)} \right] \\ & + \sum_j m_j \left(\frac{\tau_{ij}^j}{\rho_j^2} + \frac{\tau_{ij}^i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W_{ij} + \vec{F}_s + \vec{g} \end{aligned}$$

onde τ_{ij} representa as componentes do tensor de tensão sub-partícula e η é um número pequeno introduzido para manter o denominador diferente de zero e, geralmente, é considerado como sendo igual a $0,1h$.

A segunda alternativa é um esquema que introduz uma viscosidade artificial. Uma das formas de transferência de energia se dá mediante a dissipação viscosa, devida à transformação de energia cinética em calor (que pode ocorrer em problemas de escoamento não-viscoso apresentando ondas de choque, por exemplo) e ela deve ser mensurada de alguma forma. O uso de uma viscosidade artificial tem por objetivo evitar o surgimento de instabilidades numéricas e a interpenetração entre partículas ([FRAGA FILHO, 2019](#)) mesmo em escoamentos invíscidos (não-viscosos).

$$\frac{D\vec{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{P_j + P_i}{\rho_j \rho_i} + \Lambda_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + \vec{F}_s + \vec{g}$$

sabendo que Λ_{ij} é o termo responsável pela introdução da viscosidade artificial e que ele pode assumir dois valores:

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & \text{se } v_{ij} \cdot r_{ij} < 0 \\ 0 & \text{se } v_{ij} \cdot r_{ij} > 0 \end{cases}$$

onde os valores médios são dados por $\bar{c}_{ij} = 0,5(c_i + c_j)$ e $\bar{\rho}_{ij} = 0,5(\rho_i + \rho_j)$, sendo que aqui c representa a velocidade do som. O controle do coeficiente α deve ser feito pelo usuário e é responsável por inserir corretamente a dissipação.

3.4 Evolução temporal

Para a implementação do método SPH adotada, o algoritmo de evolução temporal selecionado é o esquema de integração numérica de *Verlet*. A título de simplificação da representação, nesta subseção as equações governantes, para um **escoamento isotérmico**, são representadas a partir de formas abreviadas:

$$\frac{D\vec{v}_a}{Dt} = \vec{F}_a$$

$$\frac{D\rho_a}{Dt} = R_a$$

$$\frac{D\vec{r}_a}{Dt} = \vec{v}_a$$

onde a primeira representa a equação do momento, a segunda a da continuidade e a terceira é utilizada para se calcular o deslocamento das partículas de fluido.

3.4.1 Método de integração de Verlet

Geralmente utilizado na dinâmica molecular ([Verlet \(1967\)](#)) devido ao seu baixo custo computacional, quando o esquema Verlet é aplicado na resolução de escoamentos quase compressíveis, *Weakly Compressible SPH* (WCSPH), as variáveis são calculadas de acordo com o seguinte esquema:

$$\vec{v}_a^{n+1} = \vec{v}_a^{n-1} + 2\Delta t \vec{F}_a^n$$

$$\vec{r}_a^{n+1} = \vec{r}_a^n + \Delta t \vec{v}_a^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{F}_a^n$$

$$\rho_a^{n+1} = \rho_a^{n-1} + 2\Delta t R_a^n$$

Devido à natureza do método, os valores da massa específica e da velocidade em $n + 1$ são calculados de forma desacoplada, uma vez que eles não levam em consideração os seus respectivos valores determinados no instante de tempo n (utilizando somente as informações disponíveis em $n - 1$). Tal fato pode levar à divergência do método numérico (CRESPO, 2019). Assim, um passo intermediário é requerido a cada Ns passos:

$$\vec{v}_a^{n+1} = \vec{v}_a^n + \Delta t \vec{F}_a^n$$

$$\vec{r}_a^{n+1} = \vec{r}_a^n + \Delta t \vec{v}_a^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \vec{F}_a^n$$

$$\rho_a^{n+1} = \rho_a^n + 2\Delta t R_a^n$$

onde o índice n denota o instante de tempo atual e $t = n\Delta t$. Para o número de intervalos do esquema, Ns , Crespo (2019) recomenda a utilização de $Ns=40$.

Conforme sabido, a estabilidade do esquema de integração explícito (condicionalmente estáveis) é assegurada caso a condição de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) seja verificada. No código numérico *DualSPHysics* utiliza-se um passo de tempo variável, conforme sugerido por Monaghan (1994), e ele é determinado de modo a satisfazer a condição de estabilidade:

$$\Delta t_f = \min_a \left(\sqrt{\frac{h}{|f_a|}} \right)$$

$$\Delta t_{cv} = \min_a \left(\frac{h}{c_s + \max_b \left(\frac{h v_a \cdot r_a}{r_{ab}^2 + \eta^2} \right)} \right)$$

$$\Delta t = C_{CFL} \min(\Delta t_f, \Delta t_{cv})$$

onde Δt_f é calculado a partir da cômputo da força por unidade de massa atuando na partícula e Δt_{cv} , por sua vez, reflete a estimativa da relação entre a distância percorrida

pela partícula e a sua velocidade de deslocamento acrescida da velocidade do som, condição de CFL (h é o comprimento de suavização, v_i é a magnitude da velocidade e c_s a velocidade do som), combinando o número de Courant e o controle do intervalo de tempo viscoso. Por último, o valor utilizado é o mínimo entre esses dois valores multiplicado pelo fator C_{CFL} .

3.5 Condições de contorno

Na implementação utilizada neste trabalho, as fronteiras são representadas por um conjunto de partículas que são consideradas separadamente das partículas de fluido. Condições para a simulação de fronteiras sólidas impermeáveis e abertas periódicas estão disponíveis no código numérico (CRESPO, 2019).

3.5.1 Condição de contorno dinâmica

A condição de contorno dinâmica é o método padrão disponível no *DualSPHysics*. De acordo com o descrito em Crespo, Gómez-Gesteira e Dalrymple (2007), esse método enxerga as partículas posicionadas nas fronteiras como sendo governadas pelas mesmas equações que governam o movimento das partículas de fluido sem, no entanto, se moverem em função das forças exercidas sobre elas.

Quando uma partícula de fluido se aproxima de uma fronteira e a distância entre elas se torna duas vezes menor que o comprimento de suavização h , a massa específica das partículas de fronteira são afetadas e têm o seu valor aumentado, levando a um aumento de pressão. Assim, uma força repulsiva é criada e exercida sobre a partícula do fluido que se aproxima (devido ao termo de pressão na equação do *momentum*).

A estabilidade dessa técnica depende do tamanho do passo de tempo, que deve ser pequeno o suficiente de modo que a técnica possa lidar com a mais alta velocidade presente, para qualquer partícula de fluido, que possa interagir com as partículas de fronteira (CRESPO, 2019).

3.5.2 Condição de contorno periódica aberta

Suporte para fronteiras abertas, na forma de condição de contorno periódica, também estão disponíveis no *DualSPHysics*.

Isto é possível ao se permitir a interação entre as partículas que encontram-se próximas a uma extremidade do domínio aberta e as partículas de fluido posicionadas próximas da fronteira do domínio aberta complementar (ou seja, que se encontram do

lado oposto do domínio).

Como consequência dessa implementação, o suporte compacto da função de suavização associada a uma dada partícula, saindo do domínio, é truncado na fronteira aberta mais próxima e restaurado na fronteira aberta complementar ([CRESPO, 2019](#)).

4 RESULTADOS

Tendo sido apresentadas as equações que governam o escoamento de fluidos newtonianos compressíveis, introduzido o método *Smoothed Particle Hydrodynamics* e abordadas as especificidades da versão multifásica do código numérico *DualPhysics* passa-se, agora, à descrição dos problemas de escoamento bifásicos resolvidos e à apresentação dos resultados obtidos.

Inicialmente, com o intuito de se verificar a acurácia dos resultados do simulador numérico, resolveu-se o problema do escoamento de Couette, entre dois planos paralelos, de dois fluidos com diferentes propriedades físicas. Para esse problema específico, uma solução analítica pode ser obtida e os seus resultados são confrontados com os respectivos valores calculados numericamente.

Na sequência, abordou-se o caso propriamente dito do escoamento bifásico em um duto horizontal. Duas abordagens foram utilizadas, a primeira considerou o uso de condições periódicas nas extremidades do duto, enquanto a segunda empregou dois reservatórios contendo separadamente os dois fluidos que são injetados no duto através de uma conexão tipo “Y”.

As especificações da máquina Dell *PowerEdge* T620 do Laboratório de Modelagem Multiescala e Transporte de Partículas, utilizada em todas as execuções dos casos apresentados, são as seguintes:

1. Processador: Intel Xeon CPU E5-2620
2. Número de núcleos: 2×6
3. Número de *Threads*: 2×12
4. Armazenamento: 7 Terabytes
5. Memória RAM: 16 Gigabytes
6. Sistema Operacional: Linux OpenSUSE Leap 15.1

4.1 Escoamento de Couette modificado

No problema clássico do escoamento de Couette, um fluido viscoso contido entre duas placas, separadas por uma distância y , escoa em função do movimento horizontal da placa superior, enquanto a placa inferior é mantida em repouso (ÇENGEL; CIMBALA, 2006). Portanto, trata-se do problema do escoamento bidimensional laminar entre duas

placas paralelas infinitas, com a placa superior se movendo no sentido crescente do eixo x com velocidade constante.

Por outro lado, no escoamento de Couette modificado, conforme o trabalho de [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#), o escoamento se dá na presença de dois fluidos que possuem massa específica e viscosidade distintas. A velocidade inicial da placa que se desloca horizontalmente é $V = 1,0 \times 10^{-3}$ m/s na direção do eixo x . A distância de separação entre as placas é $y = 0,001$ m, sendo que as duas fases dividem igualmente a altura total. Assim sendo, as respectivas alturas das colunas de fluido são $h_1 = h_2 = 0,0005$ m, conforme esquematicamente apresentado na Fig. 7.

Figura 7 - Configuração geométrica para o escoamento de Couette



Fonte: O autor, 2021

Neste problema teste, as condições de contorno são implementadas utilizando condições periódicas. O mesmo se aplica no que diz respeito às partículas que representam as placas superior e inferior. Os demais parâmetros da simulação encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros para o caso do escoamento de Couette

Parâmetro	Nomenclatura	Valor
Distância entre partículas	dp	$5,0 \times 10^{-5}$ m
Massa específica da Fase 1	ρ_1	1.000 kg/m ³
Massa específica da Fase 2	ρ_2	2.000 kg/m ³
Viscosidade da Fase 1	μ_1	$0,5 \times 10^{-6}$ m ² /s
Viscosidade da Fase 2	μ_2	$1,0 \times 10^{-6}$ m ² /s

Fonte: O autor, 2021

O algoritmo de resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias escolhido

foi o esquema Verlet com $Ns = 40$. A opção para o algoritmo de reposicionamento escolhido é selecionada nos parâmetros de execução do problema como “full”, com coeficiente -6, conforme os exemplos fornecidos para o código *DualSPHysics* e os escoamentos bifásicos.

No trabalho de [çengel e Cimbala \(2006\)](#) pode-se encontrar a solução analítica que fornece as velocidades teóricas das duas fases (v_{ρ_1} e v_{ρ_2}), em regime permanente, em função da altura y . Então, as expressões que fornecem as referidas velocidades são dadas pelas Eqs. (13) e (14):

$$v_{\rho_1} = \left(\frac{V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} \right) [\mu_1 (y - h_1) + \mu_2 h_1] \quad (13)$$

$$v_{\rho_2} = \left(\frac{\mu_2 V}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} \right) y \quad (14)$$

Como pode ser facilmente constatado, para $y = 0$ obtém-se que v_{ρ_1} é nula, em conformidade com a condição de não deslizamento na superfície sólida. Agora, para $y = h_1 + h_2$ observa-se que a velocidade do fluido em contato com a placa superior é igual a V , verificando a condição de contorno superior.

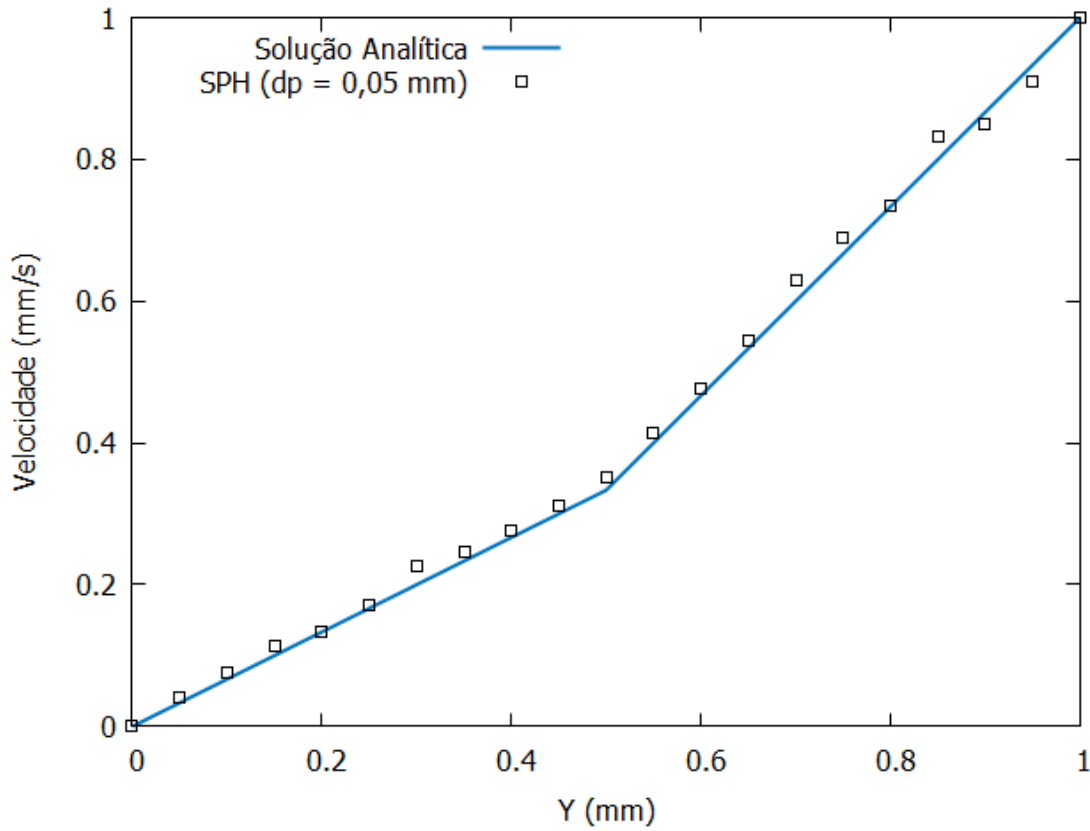
O objetivo desse teste é o de comprovar a acurácia do perfil de velocidade calculado pelo código numérico, mediante a sua comparação com os perfis previstos pela solução analítica, Eqs. (13) e (14). Além disso, pode-se verificar a pertinência do uso da versão multifásica do código numérico na resolução desse tipo de problema.

A Fig. 8 apresenta o gráfico contendo a curva representando a solução analítica, para os valores das velocidades teóricas v_{ρ_1} e v_{ρ_2} , assim como os valores discretos das velocidades, representados pelos pequenos quadrados, calculados utilizando-se o método SPH na simulação do respectivo problema. As velocidades foram obtidas ao longo de 21 pontos espaçados ao longo do eixo y e para uma dada posição fixa no eixo x , correspondente à metade do comprimento do domínio.

Conforme predito pelas equações e corroborado pelos valores numéricos, a velocidade das partículas em contato com a placa inferior deve ser nula e ela será máxima para as partículas que se encontram aderidas à placa superior que se encontra em movimento. Ressalta-se, também, a notável mudança de perfil a partir da interface de separação entre os dois fluidos ($y=0,0005$ m).

A partir dos valores computados através da solução analítica, a acurácia dos resultados pode ser estimada avaliando-se o erro relativo, calculado segundo a equação:

Figura 8 - Perfis de velocidade para o escoamento Couette



Legenda: Em linha contínua a solução analítica enquanto que os pequenos quadrados representam a solução numérica.

Fonte: O autor, 2021

$$\%RMSE = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum (v_{SPH} - v_{analítico})^2}$$

onde N é o número de pontos correspondentes aos dados coletados, v_{SPH} é a velocidade aproximada obtida com o método SPH, $v_{analítico}$ são os valores provenientes das Eqs. (13) e (14) e $RMSE$ é o erro quadrático médio relativo. Para o problema simulado, o valor obtido para o erro foi de $1,94 \times 10^{-5} \%$. Então, conclui-se que os resultados numéricos reproduziram acuradamente os valores preditos pela teoria. A título de comparação, [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#) encontraram um erro da ordem de $10^{-6} \%$ na resolução do mesmo problema. Entretanto, eles utilizaram um método SPH especificamente desenvolvido e adaptado pelos autores para a simulação de escoamentos multifásicos.

Uma última observação deve ser feita em relação aos valores numéricos que foram confrontados com os respectivos valores analíticos. Como o método SPH prescinde

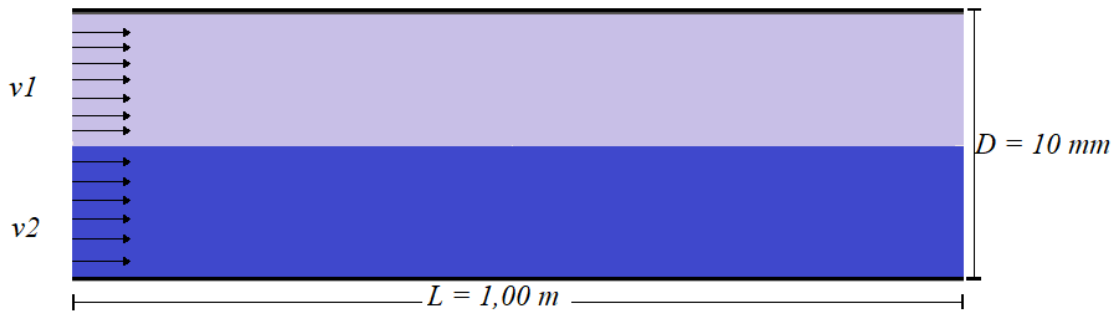
do uso de uma malha computacional, as partículas se movem espacialmente com o seu deslocamento determinado a partir das equações governantes. Por conseguinte, diferentemente do caso de uma malha computacional, para uma determinada ordenada y não se pode garantir que todas as 21 partículas se encontram na abscissa x previamente fixada. Então, as velocidades são efetivamente aquelas das 21 partículas que se encontram o mais próximo possível da tal abscissa. Tal fato introduz um erro na estimativa da acurácia dos valores aproximados.

4.2 Escoamento bifásico em um duto horizontal com condições periódicas

Este problema tenta reproduzir as condições geométricas do trabalho de [Douillet-Grellier et al. \(2018\)](#). O referido estudo simula o escoamento empregando o método SPH, em um duto bidimensional, de duas fases no intuito de identificar os diferentes padrões de escoamento previstos na literatura.

A Fig. 9 representa, fora de escala, a configuração geométrica adotada para reproduzir o escoamento bifásico bidimensional utilizando condições de periodicidade espacial. As dimensões do domínio L (comprimento) e D (altura) são respectivamente iguais a 1,0 m e 10,0 mm.

Figura 9 - Configuração geométrica para o escoamento bifásico bidimensional



Nota: Fora de escala.

Fonte: O autor, 2021

Como atualmente condições do tipo *inlet* e *outlet* não estão disponíveis na versão multifásica 4.0 do *DualSPHysics* aqui utilizada, a primeira tentativa de implementação do problema deu-se mediante o uso de condições de contorno periódicas, uma vez que as mesmas encontram-se disponíveis nessa versão do código.

Os parâmetros e as propriedades dos fluidos são as definidas na Tabela 2. Eles foram escolhidos com o objetivo de reproduzir o escoamento bifásico bidimensional es-

tudado em [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#). Entretanto, esses autores não utilizaram condições de periodicidade espacial na simulação numérica, tendo sido empregadas duas tubulações, contendo as duas fases, que estão conectados ao duto de maior diâmetro por uma conexão tipo Y a 45 graus, responsável pela mistura das duas fases quando da injeção das mesmas. Essa geometria e a respectiva técnica de injeção também foram reproduzidas no presente trabalho, conforme será visto mais adiante na Seção 4.3.

Tabela 2 - Parâmetros para o teste com condições de periodicidade

Parâmetro	Nomenclatura	Valor
Distância entre partículas	dp	$7,5 \times 10^{-5} \text{ m}$
Massa específica da Fase 1	ρ_1	840 kg/m^3
Massa específica da Fase 2	ρ_2	998 kg/m^3
Coeficiente α (Eq. 14)	α_1	0,045
Coeficiente α (Eq. 14)	α_2	0,01

Fonte: O autor, 2021

Nos testes aqui realizados, os fluidos são postos em movimento ao serem atribuídas velocidades iniciais uniformes, na direção x , para cada fase associada aos fluidos escolhidos. Para o primeiro teste (Caso 1) Fase 1, a velocidade inicial utilizada foi de $v_1 = 0,085 \text{ m/s}$ enquanto que para a Fase 2 empregou-se $v_2 = 0,16 \text{ m/s}$. Para os demais casos, as velocidades selecionadas podem ser vistas na Tabela 3, na tentativa de reproduzir os regimes de escoamento observados por [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#) ao serem adotados esses valores:

Caso 1: *Smooth Stratified*;

Caso 2: *Wavy Stratified*;

Caso 3: *Bubbly*;

Caso 4: *Dual Continuous Flow*.

Contudo, com estas configurações: condições de contorno periódicas e um tempo de simulação de 5 s, não foi possível capturar os padrões de escoamento esperados e que podem ser vistos em [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#).

Ainda que para Caso 1, regime *Smooth Stratified*, a Fig. 10a remeta ao apresentado na representação das fases para o regime correspondente (Fig. 1a), não é possível concluir, baseado apenas nesse resultado, que esta implementação foi capaz de reproduzir corretamente os regimes multifásicos estudados, uma vez que a partir das visualizações

Tabela 3 - Velocidades iniciais para as duas fases

Teste	Velocidade da Fase 1	Velocidade da Fase 2
Caso 1	0,085 m/s	0,16 m/s
Caso 2	0,250 m/s	0,20 m/s
Caso 3	0,085 m/s	1,00 m/s
Caso 4	0,650 m/s	0,16 m/s

Fonte: Adaptado de [ALVARADO-RODRÍGUEZ et al., 2019](#)

dos demais casos simulados (Figs. 10b, 10c e 10d) percebe-se que eles não condizem com o padrão físico esperado para os regimes associados a cada par de velocidades empregado (Figs. 1a, 1b e 1c).

Figura 10 - Resultados para condições de contorno periódicas



Legenda: Visualização do escoamento simulado com condições de contorno periódicas e para $t=5$ s: (a) Caso 1, (b) Caso 2, (c) Caso 3 e (d) Caso 4.

Fonte: O autor, 2021.

A utilização de um tempo de simulação maior (de 10 segundos) também não modificou significativamente os resultados encontrados. Como existe uma grande diferença entre os resultados determinados com as condições de contorno periódicas e os obtidos na próxima seção (com o uso de reservatórios), pode-se dizer que estudos ainda mais aprofundados são necessários para se saber a razão da não adequação do uso desse tipo de condição de contorno na reprodução do fenômeno considerado.

A apresentação das visualizações através da Fig. 10 exibe apenas um recorte do duto, uma vez que apresentar a totalidade da geometria prejudicaria a visualização dos fenômenos na interface entre os fluidos devido seu comprimento. Assim, não há uma

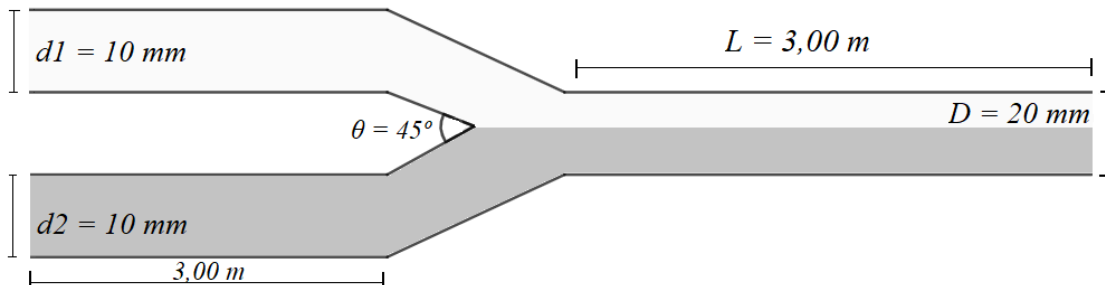
equivalência direta entre a saída e entrada, como deveria ser esperado quando do uso de condições de periodicidade espacial, já que apenas a metade esquerda do duto é exibida.

4.3 Escoamento bifásico em um duto horizontal com o uso de reservatórios

Conforme já adiantado, além da utilização de condições de contorno periódicas, uma outra forma de reproduzir o escoamento bifásico foi avaliada, baseada no trabalho de [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#), que consiste no emprego de reservatórios contendo separadamente as duas fases.

O domínio do problema bem como a sua geometria são exemplificados na Fig. 11. O duto principal onde se dá o escoamento bifásico tem 3,00 m de comprimento e 20 mm de diâmetro (D). Uma conexão tipo Y, com $\theta = 45^\circ$, é responsável pela injeção e mistura dos fluidos no sistema formado pelo duto horizontal. Cada uma das entradas possui um diâmetro igual a 10 mm. Os dutos de diâmetros $d1$ e $d2$ encontram-se inicialmente preenchidos pelos dois fluidos, sendo que a fase superior corresponde ao óleo (Fase 1, a menos densa) e a fase inferior à água (Fase 2, a mais densa).

Figura 11 - Configuração geométrica para o problema do escoamento no duto



Nota: Desenho fora de escala.

Fonte: O autor, 2021

A dificuldade do uso dessa alternativa reside no número elevado de partículas que deve ser empregado, resultando num maior esforço computacional. Portanto, a criação de dois reservatórios, na forma de tubos, de maneira a que o escoamento bifásico seja mantido por um período de tempo mínimo, a fim de que os padrões de escoamento possam ser identificados, aumenta consideravelmente o número de partículas necessárias para que todo o domínio seja representado.

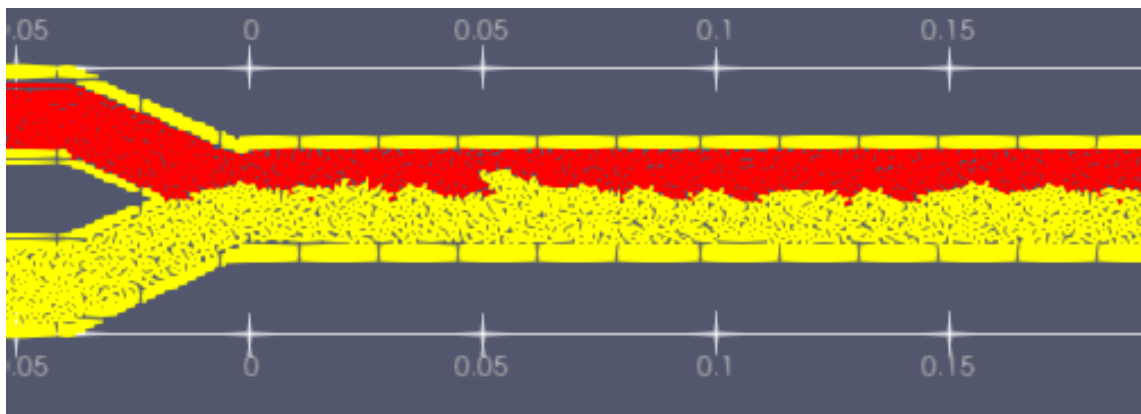
Para este problema, para um tempo de simulação real equivalente a 4 segundos e para um número total de partículas igual a 197.367, o tempo de simulação foi de aproximadamente 6,47 horas. As etapas mais custosas do ponto de vista computacional são o

cálculo das forças de interação entre as partículas e a execução do algoritmo de reposicionamento das mesmas.

Aos fluidos são atribuídas velocidades iniciais de entrada no duto principal e elas correspondem às já apresentadas na Tabela 3. Essas velocidades são alcançadas com o auxílio de estruturas emulando pistões (recurso disponível no *DualPhysics*), posicionadas nas extremidades das tubulações de alimentação. Essa é uma solução compatível e em linha com a adotada no trabalho de [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#).

Inicia-se com a visualização de um padrão de escoamento do tipo *Smooth Stratified Flow*, ou seja, o correspondente ao Caso 1 da Tabela 3. Na Fig. 12, vê-se nitidamente que a interface de separação entre as fases varia suavemente e que o escoamento é do tipo estratificado, com as duas fases escoando separadamente nas partes inferior e superior da tubulação horizontal.

Figura 12 - Visualização do escoamento no duto principal - Caso 1



Nota: Mapa de cores indicando os valores da massa específica de ambas as fases.

Fonte: O autor, 2021

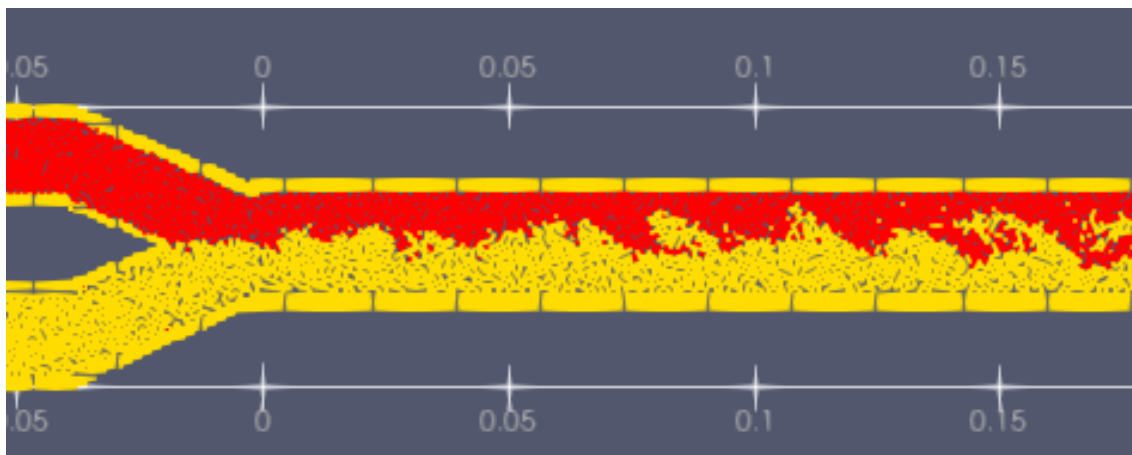
O escoamento estratificado ocorre quando as velocidades das duas fases são relativamente baixas. Em função da ação da gravidade, a fase com a maior densidade estará separada e irá ocupar a parte inferior do duto enquanto a fase menos densa se localizará na parte superior. Esse tipo de escoamento é frequentemente subdividido em estratificado suave (*Smooth Stratified Flow*) e estratificado ondulado (*Wavy Stratified Flow*).

A visualização, realizada através do *software Paraview*, se assemelha ao resultado encontrado em [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#) e demonstra que o código numérico foi capaz de capturar corretamente o padrão de escoamento esperado para o caso implementado.

Para o Caso 2, a Fig. 13 apresenta o resultado observado da distribuição de partículas no trecho inicial do duto, sendo que o mapa de cores representa a variação

da massa específica de ambas as fases. O regime de escoamento esperado devido às velocidades impostas é o *Wavy Stratified Flow*. Ainda que as fases estejam separadas, a interface encontra-se agora bem mais ondulada. Conforme mencionado anteriormente, trata-se de uma subdivisão do escoamento estratificado que é observado experimentalmente quando aumenta-se os valores das velocidades de ambas as fases em relação àquelas do caso estratificado suave.

Figura 13 - Visualização do escoamento no duto principal - Caso 2



Nota: Mapa de cores indicando os valores da massa específica de ambas as fases.

Fonte: O autor, 2021

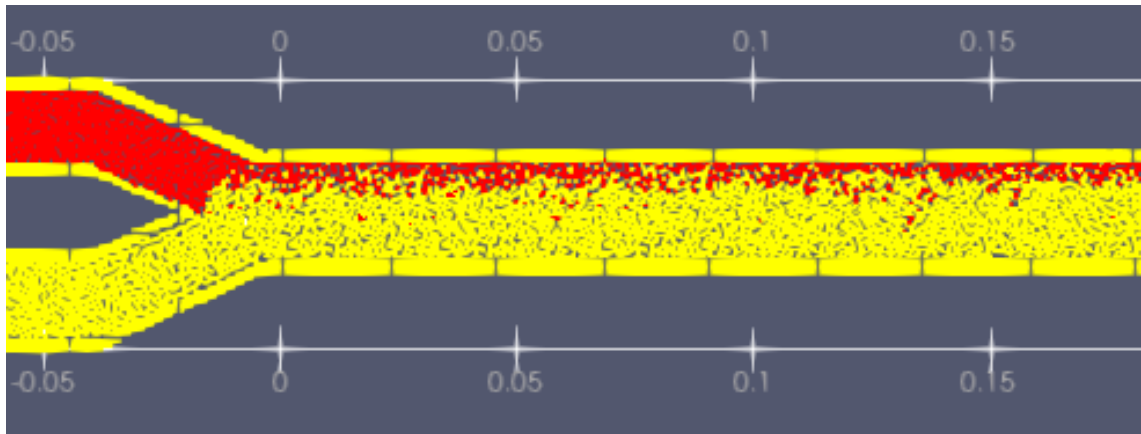
Considerando, agora, o Caso 3, tem-se que para esse conjunto de velocidades o padrão de escoamento deve corresponder ao *Bubbly Flow*. Ao final do tempo real de simulação, a Fig. 14 mostra a distribuição das fases no interior do duto. Uma vez mais, as cores representam os valores da massa específica das partículas de fluido de ambas as fases.

Portanto, aumentando ainda mais a velocidade da Fase 2 e diminuindo a da Fase 1, a fase mais densa pode ser caracterizada, agora, como sendo contínua e contendo regiões dispersas formadas pela fase menos densa ou simplesmente a fase menos densa na forma de bolhas discretas. A transição é estabelecida com o aparecimento das bolhas em suspensão ou quando as regiões dispersas da fase menos densa atingem a parte superior do duto, dando origem às bolhas e fazendo com que a maioria delas estejam distribuídas na região superior do duto.

Por último, em se tratando do padrão *Dual Continuous Flow* (Caso 4), com o aumento da velocidade do óleo (fase menos densa), o escoamento do tipo estratificado converte-se nesse outro padrão de escoamento, vide a Fig. 15.

O padrão de escoamento chamado de duplo contínuo é caracterizado pelo fato de que ambas as fases ainda mantêm a sua continuidade na parte superior e inferior do tubo

Figura 14 - Escoamento na entrada do duto - Caso 3

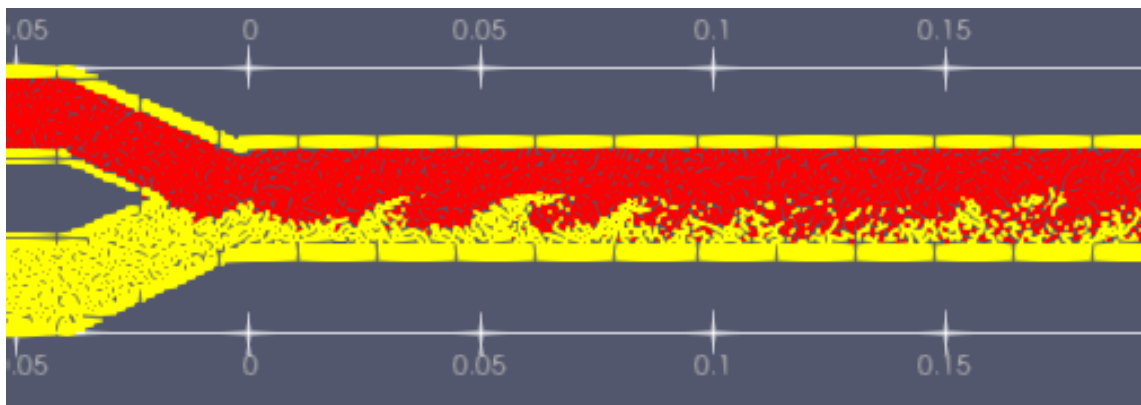


Nota: Mapa de cores indicando os valores da massa específica de ambas as fases.

Fonte: O autor, 2021

enquanto há uma interdispersão. Ele surge durante o escoamento no interior de um tubo horizontal na presença de duas fases líquidas imiscíveis.

Figura 15 - Visualização do escoamento no duto principal - Caso 4



Nota: Mapa de cores indicando os valores da massa específica de ambas as fases.

Fonte: O autor, 2021

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Escoamentos bifásicos são de natureza diversa e possuem numerosas aplicações na engenharia como, por exemplo, na indústria de óleo e gás. Portanto, a predição dos padrões de escoamento é o ponto de partida para a determinação das condições de operação e projeto e, devido ao grande número de parâmetros envolvidos, é primordial para esta análise.

A modelagem físico-matemática via as equações de balanço que governam o escoamento de fluidos requer, em geral, a utilização de uma técnica numérica para resolver esse sistema acoplado de equações diferenciais parciais. Dentre as várias possibilidades, surge como um método passível de ser utilizado na resolução destes escoamentos o *Smoothed Particle Hydrodynamics*, que vem sendo amplamente utilizado entre os métodos de partículas voltados especificamente para os problemas da Dinâmica dos Fluidos.

Neste trabalho, foi avaliada a viabilidade de aplicação do código numérico *DualSPHysics*, baseado no método SPH, no estudo de problemas de escoamentos bifásicos óleo-água em dutos. Trata-se de uma implementação em código aberto, sendo que o *DualSPHysics* encontra-se atualmente em estágio maduro de desenvolvimento, podendo ser utilizado na resolução de inúmeros fenômenos físicos já suportados.

O código apresenta como principais atrativos o grande número de ferramentas disponíveis para a descrição e simulação de diferentes problemas físicos e a acurácia já atingida em diversos testes, além de uma formulação multifásica e a possibilidade da sua paralelização via a API OpenMP. Neste trabalho, três problemas foram analisados a fim de se verificar a sua aplicabilidade no caso de escoamentos bifásicos em dutos horizontais.

Para o caso do escoamento de Couette, a solução numérica obtida apresentou uma boa acurácia quando comparada com o perfil de velocidade da solução analítica: as observações numéricas apresentaram-se quase que sobrepostas a curva para as velocidades das fases em função da profundidade. A análise do erro quadrado médio relativo mostrou que o valor obtido é somente ligeiramente inferior ao determinado em [Alvarado-Rodríguez et al. \(2019\)](#), que também utilizaram uma versão do método SPH destinada à resolução de escoamentos multifásicos.

Para o teste do escoamento bifásico ao longo do duto principal, no entanto, o uso de condições de contorno periódicas não se mostrou adequado para a resolução do fenômeno estudado, uma vez que não foi possível reproduzir os regimes de escoamento listados na literatura. Assim sendo, estudos aprofundados ainda serão necessários para que se possa determinar a causa da falha. Por outro lado, conforme indicado no trabalho de [Douillet-Grellier et al. \(2018\)](#), o mais adequado seria o uso de condições do tipo *inlet* e *outlet*, as quais ainda não foram implementadas na versão multifásica do *DualSPHysics*.

Para o terceiro teste, os fluidos considerados (óleo e água) são injetados no duto

horizontal principal através de uma conexão do tipo Y. Inicialmente, eles se encontram armazenados ao longo de dois tubos horizontais que servem como reservatórios. Para essa configuração, foi possível identificar alguns dos regimes de escoamento, em dutos horizontais, correspondentes ao esperado para as faixas de velocidades iniciais impostas para as duas fases. Como consequência, entende-se que a correta captura dos padrões de escoamento demonstra a viabilidade de utilização do *DualSPHysics* para a simulação de escoamentos bifásicos em dutos horizontais.

Uma desvantagem do uso das tubulações horizontais para o armazenamento inicial dos fluidos é a necessidade de se empregar um grande número de partículas na discretização do domínio computacional. Tal fato resulta no aumento significativo do custo computacional e na inevitabilidade do emprego de recursos da computação de alto desempenho.

Perspectivas futuras

Prevê-se a inclusão de condições de contorno do tipo *inlet* e *outlet*: a proposição inicial é a de adicionar ao código multifásico suporte para esses tipos de condições. Assim, os dutos podem ser supridos continuamente com partículas e as velocidades de entrada podem ser controladas mais precisamente. Essa alternativa também eliminaria os custos computacionais envolvidos quando os reservatórios são utilizados ao diminuir o número de partículas requeridas para a discretização do domínio.

Também sugere-se a alteração do modelo multifásico utilizado: a alternativa seria uma alteração do modelo multifásico adotado no código, de forma a que ele se aproxime mais do proposto por [Douillet-Grellier et al. \(2018\)](#), alterando-se a forma como a massa específica e o passo de tempo são avaliados e da adição das modificações realizadas pelos autores na equação do momento. Além disso, deve-se realmente verificar se para os problemas estudados esta é a formulação mais adequada.

Por fim, considerar a simulação de escoamentos bifásicos em dutos verticais: entende-se que a evolução natural deste trabalho é a sua futura aplicação a outros problemas de interesse na área, como os escoamentos verticais que possuem características que os distinguem dos horizontais. Os regimes de escoamento em dutos verticais/inclinados assemelham-se ainda mais aos problemas reais de engenharia encontrados quando do transporte do óleo extraído de reservatórios.

REFERÊNCIAS

- ALCÂNTARA, I. *SPH modelling and validation of mutiphase flows and sediment transport - Aplication to the oil and gas industry*. Tese (Doutorado) — Universidade de Edimburgo, Edimburgo, 2018.
- ALVARADO-RODRÍGUEZ, C. E. et al. Multiphase Flows Simulation with the Smoothed Particle Hydrodynamics Method. *Spring Nature Switzerland*, v. 1151, p. 282–301, 2019.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. (Cambridge Mathematical Library).
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Fluid Mechanics: fundamentals and applications*. [S.l.]: Mc-Graw Hill, 2006.
- COLAGROSSI, A.; LANDRINI, M. Numerical simulation of interfacial flows by Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, v. 191, p. 448–475, 2003.
- CRESPO, A.; GÓMEZ-GESTEIRA, M.; DALRYMPLE, R. Boundary conditions generated by dynamic particles in SPH methods. *Computers, Materials and Continua*, Tech Science Press, v. 5, n. 3, p. 173–184, 2007.
- CRESPO, A. J. C. *DualSPHysics: User wiki*. [S.l.], 2019. Disponível em: (<https://github.com/DualSPHysics/DualSPHysics/wiki>). Acesso em: 25 de Setembro 2020.
- DOUILLET-GRELLIER, T. et al. Simulations of intermittent two-phase flows in pipes using Smoothed Particle Hydrodynamics. *Computers —& Fluids*, v. 177, p. 101 – 122, 2018.
- FRAGA FILHO, C. A. D. *Smoothed Particle Hydrodynamics: Fundamentals and Basic Applications in Continuum Mechanics*. [S.l.]: Springer, 2019.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, n. 3, p. 375–389, 1977.
- GÓES, J. F. *Simulação numérica do escoamento com superfícies livres empregando o método Weakly Compressible Smoothed Particle Hydrodynamics (WCSPH) e o processamento em paralelo*. Tese (Doutorado) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2016.
- GÓES, M. L. *Estudo de interfaces livres empregando o método Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) e as equações de estado de van der Waals e de Martin*. Tese (Doutorado) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2016.
- GOMEZ-GESTEIRA, M. et al. SPHysics – development of a free-surface fluid solver – Part 1: Theory and formulations. *Computers —& Geosciences*, v. 48, p. 289–299, 2012.
- GOTOH, H.; SHIBAHARA, T.; SAKAI, T. Sub-particle-scale turbulence model for the MPS method. *Computational Fluid Dynamics Journal*, v. 9, p. 339–347, 2001.

- HASAN, A.; KABIR, C.; SARICA, C. *Fluid Flow and Heat Transfer in Wellbores*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2002.
- HAUKE, G. *An Introduction to Fluid Mechanics and Transport Phenomena*. [S.l.]: Springer, 2008.
- HERNANDEZ, A. *Fundamentals of Gas Lift Engineering: Well Design and Troubleshooting*. [S.l.]: Elsevier Science, 2016.
- HEWITT, G. F. *Two-Phase Flows*. 2010. Disponível em: (<http://www.thermopedia.com/content/2/>). Acesso em: 17 de Agosto de 2020.
- HOUSE, D.; KEYSER, J. *Foundations of Physically Based Modeling and Animation*. [S.l.]: A K Peters/CRC Press, 2017.
- LAFARIE, B. et al. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *Journal of Computational Physics*, v. 113, n. 1, p. 134–147, 1994.
- LIND, S. et al. Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: a generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves. *Computers, Materials and Continua*, Journal of Computational Physics, v. 213, p. 1499–1523, 2012.
- LIU, G.; LIU, M. *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2003.
- LIU, W. K.; JUN, S.; ZHANG, Y. F. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 20, n. 3, p. 1081–1106, 1995.
- LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, v. 82, n. 12, p. 1013–1024, 1977.
- MOKOS, A. *Muti-phase Modelling of Violent Hydrodynamics using Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) on Graphics Processing Units (GPU)*. Tese (Doutorado) — School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, Faculty of Engineering and Physical Sciences, University of Manchester, Manchester, 2013.
- MONAGHAN, J.; KOS, A. Solitary Waves on a Cretan Beach. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering*, v. 125, 05 1999.
- MONAGHAN, J. J. Simulating Free Surface Flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, v. 110, p. 399–406, 1994.
- MONAGHAN, J. J. A simple and efficient algorithm for multi-fluids. In: 6th International SPHERIC Workshop, 6., 2011, Hamburg. Germany, 2011. p. 60–85.
- MONAGHAN, J. J.; LATTANZIO, J. C. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, v. 149, n. 1, p. 135–143, 1985.
- PAIVA, A. et al. *Simulação de fluidos sem malha: uma introdução ao método SPH*. [S.l.]: IMPA: Rio de Janeiro, 2009. 198 p.

- REZAVAND, M.; ZHANG, C.; HU, X. A weakly compressible SPH method for violent multi-phase flows with high density ratio. *Journal of Computational Physics*, v. 402, p. 109092, 2019.
- SHOHAM, O. *Mechanistic Modeling of Gas-liquid Two-phase Flow in Pipes*. [S.l.]: Society of Petroleum Engineers, 2005.
- SLATTERY, J. C. *Advanced Transport Phenomena*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- TAITEL, Y.; LEE, N.; DURKLER, A. Transient Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes: Modeling the flow pattern transitions. *The American Institute of Chemical Engineers Journal*, v. 4, n. 5, p. 920–934, 1978.
- VERLET, L. Computer "Experiments" on Classical Fluids - Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules. *Physical Review*, v. 159, p. 98–103, 1967.
- VIOLEAU, D. *Fluid Mechanics and the SPH Method: Theory and Applications*. [S.l.]: OUP Oxford, 2012.
- WENDLAND, H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv Comput Math*, n. 4, p. 389–396, 1995.
- XU, R.; STANSBY, P.; LAURENCE, D. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 18, p. 6703–6725, 2009.
- YANG, X.; PENG, S.; LIU, M. A new kernel function for sph with applications to free surface flows. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, n. 15, p. 3822–3833, 2014.