Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Vitor dos Santos Ferreira

Limitações impostas por modelos de estrutura nuclear tipo RPA sobre decaimento beta duplo

Rio de Janeiro
2020

Vitor dos Santos Ferreira

Limitações impostas por modelos de estrutura nuclear tipo RPA sobre decaimento beta duplo

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Coorientador: Prof. Dr. Arturo Rodolfo Samana

Rio de Janeiro
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

F383 Ferreira,Vitor dos Santos.
Limitações impostas por modelos de estruturas nuclear tipo RPA sobre decaimento beta duplo / Vitor dos Santos Ferreira.- 2020.
121 f. : Il.

Orientador: Marcelo Chiapparini
Coorientador: Arturo Rodolfo Samana
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Modelos nucleares - Teses. 2. Estrutura nuclear - Teses.3. Partículas (Física nuclear) - Teses. 4. Neutrinos - Teses. I.Chiapparini, Marcelo. II. Samana, Arturo Rodolfo. III. Universidade do Estado d o Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 539.142

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

_____ _____

Assinatura Data

Vitor dos Santos Ferreira

Limitações impostas por modelos de estrutura nuclear tipo RPA sobre decaimento beta duplo

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 18 de Fevereiro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Arturo Rodolfo Samana (Coorientador)
Universidade Estadual de Santa Cruz

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Andre Sznajder
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Jesús Lubián Ríos
Universidade Federal Fluminese

Prof. Dr. Roberto Linares
Universidade Federal Fluminese

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe Raimunda (*in memorian*) com todo meu amor e gratidão.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo cuidado e por ter me sustentado durante toda a minha trajetória principalmente no momento mais difícil da minha vida, que foi o falecimento de minha mãe.

A meu orientador Marcelo Chiapparini por seu acolhimento, ajuda, paciência e compreensão, que junto com o meu coorientador Arturo Samana e o professor Francisco krmpotić disponibilizaram tempo e esforço, que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família: pai, irmã, esposa e filho, por compreender a minha ausência em momentos familiares aos quais não pude estar presente.

De maneira especial agradeço a banca examinadora pela leitura da minha tese e pelas contribuições para o aperfeiçoamento da minha pesquisa.

A FAPERJ pelo apoio financeiro nos dois primeiros anos do doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta etapa da minha vida, muito obrigado!

RESUMO

FERREIRA, V. S. **Limitações impostas por modelos de estrutura nuclear tipo RPA sobre decaimento beta duplo**. 2020. 121 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Nesse trabalho foram obtidos os momentos nucleares para ambos os modos de decaimento beta duplo, com e sem emissão de neutrinos, usando modelos de estrutura nuclear microscópicos, do tipo RPA (*Random Phase Approximation*). Para isso, foi elaborado um novo método de implementação do modelo pn-QRPA (*proton neutron-Quasiparticle Randon Phase Approximation)* ao decaimento beta duplo, resolvendo apenas uma equação de pn-QRPA para o núcleo intermediário, além de recorrer a restauração parcial de simetria SU(4) para fixar os parâmetros da interação residual, tornando o método preditivo, uma vez que os momentos nucleares obtidos estão na mesma ordem dos momentos experimentais para os seguintes núcleos ^{48}Ca, ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr, ^{100}Mo, ^{128,130}Te e ^{150}Nd. É importante mencionar que o modelo de pn-QRPA foi desenvolvido como objetivo descrever a estrutura nuclear das transições que envolvem troca de carga simples, $(N, Z) \rightarrow (N \mp 1, Z \pm 1)$ e quando este é aplicado a transições troca de carga dupla surgem limitações em descrever alguns observáveis tais como: energias de excitação do núcleo filho, valores Q de reação e Elementos de Matriz Nuclear de estados excitados, além de apresentar uma extrema sensibilidade com a parametrização do canal partícula-partícula. Para superar essas limitações recorremos a uma extensão do modelo de QTDA (*Quasiparticle Tamm-Dancoff Approximation*) com quatro quasipartículas, aplicado pela primeira vez ao decaimento beta duplo nesse trabalho utilizando o campo médio de BCS. Esse modelo foi denominado (pn,2p2n)-QTDA e supera às limitações enfrentadas pelo modelo de pn-QRPA, além disso obtém as energias de todos os estados excitados 0^+ e 2^+, fornece também os espectros de energia das transições de Fermi e Gamow-Teller DCE, bem como como as localizações das ressonâncias correspondentes e suas regras de soma, quando esse é aplicado ao decaimento beta duplo. Essas últimas são relevantes para as reações com dupla troca de carga e o decaimento beta duplo, uma vez que as estrutura nuclear é a mesma; essa correlação não existe dentro do modelo pn-QRPA. Assim, o modelo (pn,2p2n)-QTDA, é considerado uma extensão natural do modelo de pn-QRPA, direcionado para deescrever os fenômenos nucleares presentes em transições com Dupla Troca de Carga. Assim os cálculos numéricos detalhados são apresentados para os processos $(N, Z) \rightarrow (N - 2, Z + 2)$ em ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti e o processo $(N, Z) \rightarrow (N + 2, Z - 2)$ em ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo, envolvendo todos os estados finais 0^+ e 2^+.

Palavras-chave: Modelo de pn-QRPA. Dupla Troca de Carga. Neutrinos. Modelo de (pn,2p2n)-QTDA.

ABSTRACT

FERREIRA, V. S. **Limitations imposed by RPA type nuclear structure models on double beta decay**. 2020. 121 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

In this work, nuclear moments were obtained for both double beta decay modes, with and without neutrino emission, using nuclear microscopic structure models, of the RPA type (*Random Phase Approximation*). For this purpose, a new method to implement the pn-QRPA model was developed (*proton-neutron-Quasi-particle Random Phase Approximation)* to double beta decay, solving only one pn-QRPA equation for the intermediate nucleus. In addition, the method leads to a partial restoration of SU(4) symmetry to fix the parameters of the residual interaction, making the method predictive, since the nuclear moments obtained are in the same order as the experimental moments for the following nucleus ^{48} Ca, ^{76}Ge, ^{82} Se, ^{96}Zr, ^{100}Mo, ^{128,130}Te and ^{150}Nd. It is important to mention that the pn-QRPA model was developed to describe the nuclear structure of the transitions that involves simple charge exchange, $(N, Z) \rightarrow (N \mp 1, Z \pm 1)$ and, when this is applied to double charge exchange transitions, some limitations arise in describing some observable such as excitation energies of the daughter nucleus, Q values of reaction, and Nuclear Matrix Elements of excited states, besides presenting an extreme sensitivity with the parametrization of the particle-particle channel. To overcome these limitations, we resorted to an extension of the QTDA model (*Quasi-particle Tamm-Dancoff Approximation*) with four quasi-particles, applied for the first time to double beta decay in this work using the BCS mean-field. This model was named (pn,2p2n)-QTDA and solves the limitations shown by pn-QRPA model. Also it obtains the energies of all excited states 0^+ and 2^+, giving the energy spectra of the Fermi transitions and Gamow-Teller Double charge exchange transitions,as well as the locations of the corresponding resonances and their sum rules, when this is applied to double beta decay. The last ones are relevant to reactions with the double charge exchange and double beta decay, since the nuclear structure is the same. This correlation does not exist within the pn-QRPA model. Thus, the (pn, 2p2n)-QTDA model is considered a natural extension of the pn-QRPA model, aimed at describing the nuclear phenomena present in Double Charge Exchange transitions. Thus, detailed numerical calculations are shown for processes $(N, Z) \rightarrow (N - 2, Z + 2)$ in ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti and the process $(N, Z) \rightarrow (N + 2, Z - 2)$ in ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo, involving everyone the final states 0^+ and 2^+.

Keywords: pn-QRPA model. Double Charge-Exchange. Neutrinos. (pn,2p2n)-QTDA Model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Carta de Nuclídeos. 12
Figura 2 - Energias dos grupo isobárico de massa $A = 76$. 13
Figura 3 - Diagrama de Feynman para o decaimento beta duplo. 14
Figura 4 - Representação gráfica dos numeradores para os NMEs no decaimento $2\beta^-$. 20
Figura 5 - Representação gráfica da aplicação do modelo de pn-QRPA ao decaimento beta duplo. 51
Figura 6 - Representação gráfica das correlações sobre os núcleos pai (N,Z) e filho (N-2,Z+2). 54
Figura 7 - Representação diagramática do modelo pn-QRPA aplicado ao DBD. . . 54
Figura 8 - Representação gráfica da (pn,2p2n)-QTDA aplicado ao DBD.. 58
Figura 9 - Representação diagramática do modelo (pn,2p2n)-QTDA quando aplicado ao DBD. 61
Figura 10 - Observáveis vetoriais (Fermi) em função do raio s e observáveis axial-vetoriais (Gamow-Teller) em função do raio t. 68
Figura 11 - Momentos nucleares, 2ν e 0ν, com o Método II para ^{76}Ge. 76
Figura 12 - Momentos nucleares do 0ν-DBD obtidos por vários modelos de estrutura nuclear. 79
Figura 13 - Energias de campo médio, para nêutrons e prótons, do núcleo ^{48}Ca. . . 82
Figura 14 - $M_F^{2\nu}$, $M_{GT}^{2\nu}$ e $M^{2\nu}$ em função do parâmetro do canal pp obtidos com o modelo (pn,2p2n)-QTDA para o estado fundamental 0^+. 83
Figura 15 - Comportamento dos Valores-Q em função dos parâmetros t e s. 93
Figura 16 - Energias de excitação obtidas para os núcleos filhos ^{48}Ti e ^{96}Mo. 94
Figura 17 - Distribuições das duplas amplitudes de transição $B_{J\mathcal{J}}^{\{+2\}}$ para a transformação ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti. 99
Figura 18 - Distribuições das duplas amplitudes de transição $B_{J\mathcal{J}}^{\{+2\}}$ para a transformação ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Pd. 100
Figura 19 - Distribuições das duplas amplitudes de transição $B_{J\mathcal{J}}^{\{-2\}}$ para o processo ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo. 101
Figura 20 - Distribuições das duplas amplitudes de transição de Fermi $B_{00}^{\{+2\}}$ para o processo ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti. 102
Figura 21 - Comparação entre os quadrados dos NMEs com as duplas amplitudes de transição. 103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Energias de partícula única em unidades de MeV, para os núcleos ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr e ^{100}Mo. 65

Tabela 2 - Energias de partícula única em unidades de MeV, para os núcleos ^{128}Te, ^{130}Te e ^{150}Nd. 66

Tabela 3 - Valores das constantes de emparelhamento e potenciais químicos 67

Tabela 4 - Energias do IAS e da GTR, experimentais e teóricas, para o núcleo pai da transição. 67

Tabela 5 - Momentos nucleares do 2ν-DBD, dentro das aproximações de BCS e QRPA comparados com os valores experimentais. 69

Tabela 6 - Os momentos nucleares para o decaimento $0\nu 2\beta^-$, calculados dentros das aproximações de BCS e QRPA. 72

Tabela 7 - Estrutura fina dos momentos nucleares 0ν-DBD para o núcleo ^{76}Ge. . . 73

Tabela 8 - Momentos nucleares $M^{2\nu}$ e $M^{0\nu}$ com os Métodos II e IV. 75

Tabela 9 - Limites sobre a meia vida e a massa efetiva do neutrino. 80

Tabela 10 - Constantes de acoplamento para BCS e Nível de Fermi. 84

Tabela 11 - Enegias de partícula única (spe) para o ^{96}Ru. 84

Tabela 12 - Os NMEs para 2νDBDs dos núcleos ^{48}Ca e ^{96}Ru. 89

Tabela 13 - As Meias-Vidas calculadas $\tau_{2\nu}^{2\beta^-}(\mathcal{J}_f^+ = 0_1^+, 0_2^+, 2_1^+)$ para a transição ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti. 92

Tabela 14 - As meias-vidas calculadas $\tau_{2\nu}^{\alpha}(\mathcal{J}_f^+ = 0_1^+)$ em unidades de anos para o 2ν-DBD ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo. 92

Tabela 15 - Os Valores $Q_{2\beta}$ e Q_{2e} em função dos parâmetros T1, T2 e T3. 95

Tabela 16 - Contribuições de Fermi e Gamow-Teller da dupla amplitude total de transição e suas regras de soma para os núcleos ^{48}Ca e ^{96}Ru. 97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BCS	Bardeen–Cooper–Schrieffer theory: Teoria de Bardeen–Cooper–Schrieffer
DBD	Double Beta Decay: Decaimento Beta Duplo
DCE	Double Charge Exchange: Dupla Troca de Carga
DIAS	Double Isobaric Analog State: Duplo Estado Análogo Isobárico
GSC	Ground State Correlations: Correlações do Estado Fundamental
GTR	Giant Gamow-Teller Resonance: Ressonância Gigante de Gamow-Teller
IAS	Isobaric Analog State: Estado Análogo Isobárico
NMEs	Nuclear Matrix Elements: Elementos de Matriz Nuclear
ph	particle-hole: partícula-buraco
pp	particle-particle: partícula-partícula
pn-QRPA	proton-neutron-QRPA: próton-nêutron-Aproximação de Quasipartículas de Fases Aleatórias
PSU4SR	Partial SU(4) Symmetry Restoration: Restauração Parcial de Simetria SU(4)
QRPA	Quasiparticle-RPA: Aproximação de Quasiartículas de Fases Aleatórias
QTDA	Quasiparticle Tamm-Dancoff Approximation: Aproximação de Quasipartículas de Tamm-Dancoff
RPA	Random Phase Approximation: Aproximação de Fases Aleatórias
SCE	Single Charge Exchange: Troca de Carga Única
SRC	Short-Range Correlations: Correlações de Curto-Alcance
0νDBD	Neutrinoless Double Beta Decay: Decaimento Beta Duplo sem neutrinos
2νDBD	Double Beta Decay with two neutrinos: Decaimento Beta Duplo com emissão de dois neutrinos

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	**DECAIMENTO BETA DUPLO**	22
1.1	0ν**-DBD :** $(N, Z) \rightarrow (N-2, Z+2) + 2e^-$	23
1.2	2ν**-DBD:** $(N, Z) \rightarrow (N-2, Z+2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$	30
1.3	**Regras de Soma Simples e Dupla**	32
2	**MODELOS MICROSCÓPICOS DE ESTRUTURA NUCLEAR**	35
2.1	**Hamiltoniano Nuclear: Modelo de Camadas**	37
2.2	**Aproximação de BCS**	39
2.3	**Aproximação de Fases Aleatórias de Quasipartículas (QRPA)**	43
3	**QRPA COM TROCA DE CARGA APLICADO AO DBD**	47
3.1	**Método I**	48
3.2	**Método II**	49
3.3	**Método III**	51
3.4	**Método IV**	53
4	**UM MODELO PARA DBD: O (PN,2P2N)-QTDA**	56
5	**RESULTADOS NUMÉRICOS: PN-QRPA**	63
5.1	**Características do formalismo One-QRPA com PSU4SR**	63
5.2	**Resultados Numéricos com One-QRPA**	65
5.3	**Comparação entre os resultados obtidos com os Métodos II e IV**	74
6	**RESULTADOS NUMÉRICOS: (PN,2P2N)-QTDA**	81
6.1	**Campo Médio**	81
6.2	**Interação Residual**	85
6.3	**Elementos de matriz nuclear (NMEs)**	88
6.4	**Meia-Vida**	91
6.5	**Valor-Q e espectro de energia**	92
6.6	**Dupla amplitude de transição e suas regras de soma**	95
6.7	**Distribuições espectrais para duplas amplitudes de transição**	99
6.8	**Comparação entre as duplas amplitudes de transição os NMEs do 2νDBD do estado fundamental**	102
	CONCLUSÃO	104
	REFERÊNCIAS	108
	APÊNDICE A – Símbolos $3j$, $6j$ e $9j$	117
	APÊNDICE B – QRPA para Modelo de Modo Único (SMM)	119
	APÊNDICE C – Dupla Regra de Soma de Fermi: Aplicação ao caso simples	121

INTRODUÇÃO

O núcleo atômico é caracterizado por um sistema de $A = Z + N$ núcleons interagentes, onde N representa o número de nêutrons, Z o número de prótons e A o número de massa. Todos os núcleos conhecidos, naturais ou instáveis, estão organizados em um plano Z por N,conhecido como carta de nuclídeos. Esse plano é principalmente preenchido ao longo ou próximo da diagonal $N = Z$ onde estão localizados os núcleos estáveis, estáveis contra qualquer emissão de partículas ou outras transformações. Apenas um número relativamente pequeno de núcleos são estáveis, esses estão representados pela região escura presente na Figura 1. Ao redor dessa zona escura, a região amarela, encontram-se os núcleos instáveis que podem sofrer transformações devido ao excesso de nêutrons ou prótons através do decaimento beta simples, que pode ser:

- Beta menos (β^-), acontece quando um núcleo (N, Z) é transformado em um isóbaro $(N - 1, Z + 1)$ com emissão simultânea de um elétron e um anti-neutrino,

$$(\text{N,Z}) \rightarrow (\text{N-1,Z+1}) + e^- + \tilde{\nu}.$$

- Beta mais (β^+), que consiste numa transformação de um núcleo (N, Z) em um isóbaro $(N + 1, Z - 1)$ com emissão simultânea de um pósitron e um neutrino,

$$(\text{N,Z}) \rightarrow (\text{N+1,Z-1}) + e^+ + \nu.$$

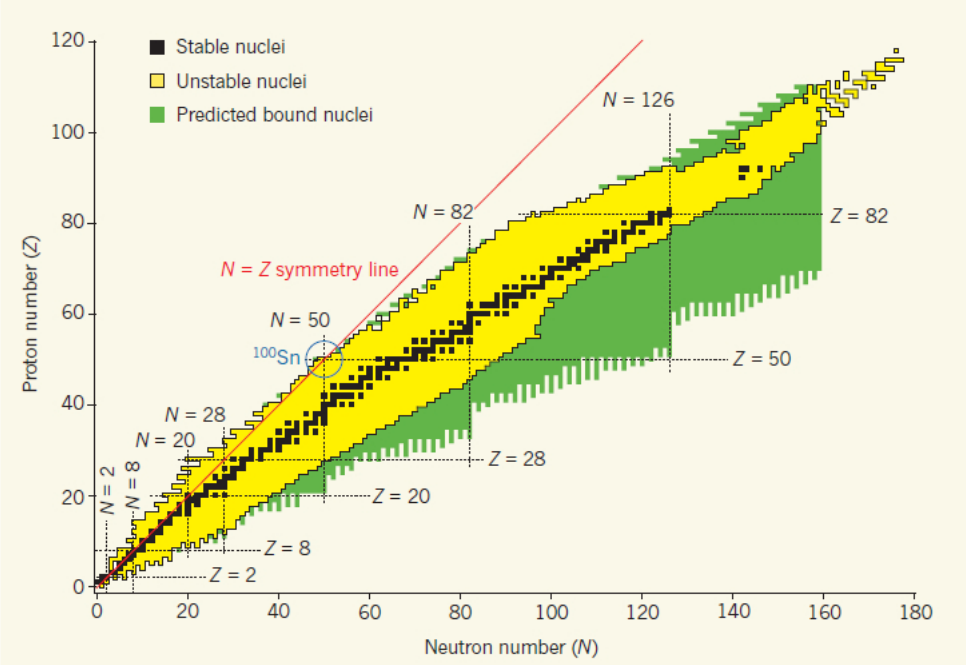
- Captura Eletrônica (EC), ocorre quando o núcleo (N, Z) absorve um elétron originando-se um isóbaro $(N + 1, Z - 1)$ com a emissão simultânea de um neutrino,

$$(\text{N,Z}) + e^- \rightarrow (\text{N+1,Z-1}) + \nu,$$

onde ν e $\tilde{\nu}$ representa, respectivamente o neutrino e anti-neutrino respectivamente.

Em 1935 Goeppert-Mayer (GOEPPERT-MAYER, 1935), estudando estabilidade dos núcleos, aponta que em um grupo de isóbaros não é correto assumir que todos possuam a mesma energia, uma vez que esses apresentam diferentes números atômicos. Assim, deve existir um núcleo nesse grupo que apresenta menor energia que os outros e esse núcleo é denomindado estável e os outros eram chamados de instáveis. O problema surge quando um núcleo instável demora muito tempo para decair e atingir a estabilidade. A explicação desse fenômeno foi apresentada por Heisenberg, e por Goeppert-Mayer (GOEPPERT-MAYER, 1935), e reside no fato de que quando são graficadas as energias dos núcleos do mesmo peso atômico em termos de Z, esses núcleos se encontram distribuídos em duas curvas suaves devido à estabilidade peculiar da partícula alfa, deslocadas uma da outra por uma quantidade aproximadamente constante. Os isobáros com Z par estão

Figura 1 - Carta de Nuclídeos.



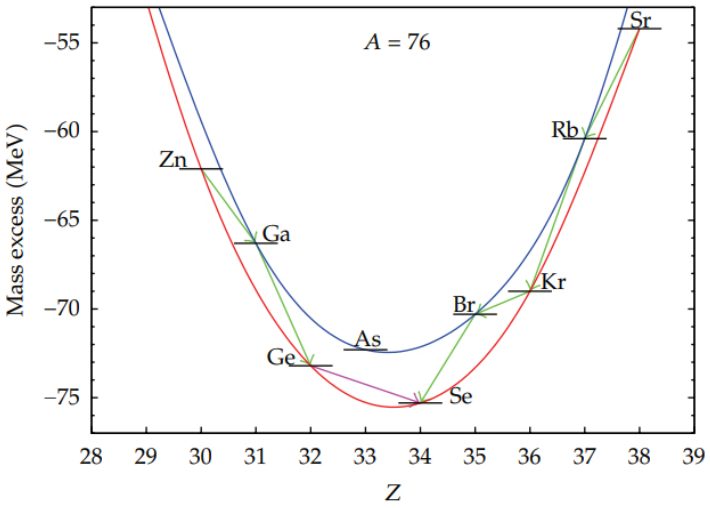
Legenda: A Carta de nuclídeos mostra a localização de todos os núcleos em função de seus números atômicos (Z) e números de nêutrons (N). As linhas tracejadas idicam a localização dos núcleos mágicos, que correspondem as camadas completas de prótons ou nêutrons. Os núcleos duplamente mágicos estão localizados nas interseções das linhas tracejadas (BAZIN, 2012).

Fonte: BAZIN, 2012, f. 1.

localizados na curva inferior, e os isobáros com Z ímpar, ficam distribuídos na curva superior (ver Figura. 2). Uma desintegração beta simples, conduz um núcleo a partir de um ponto da curva inferior para um ponto situado na curva superior (beta menos), ou vice-versa (beta mais ou captura eletrônica). Os núcleos presentes na curva superior são todos instáveis. Mas pode acontecer que o núcleo da curva inferior, como exemplo o ^{76}Ge que está localizado na vizinhaça do mínimo ^{76}Se, mesmo que não seja estável, fica impedido de sofrer uma transformação beta simples, pois o próximo núcleo, nesse caso o ^{76}Ar, se encontra na curva superior, ou seja, possui energia superior, impedindo assim a transição.

Essa diferença de energia entre os isóbaros aparece devido a força de emparelhamento nuclear, que eleva a massa do isóbaro ímpar-ímpar relativo aos isobáros vizinhos par-par dentro de um triplete isobárico (N, Z), $(N \mp 1, Z \pm 1)$, $(N \mp 2, Z \pm 2)$. A consequência direta desse efeito é o bloqueio energético do decaimento beta simples, como mostra a Figura 2 onde o isobáro ^{76}Ge possui energia inferior ao seu vizinho ^{76}As, de modo que a única transição permitida é para o isobáro ^{76}Se através de dois decaimentos

Figura 2 - Energias dos grupo isobárico de massa $A = 76$.



Legenda: Representação das energias, em unidades de MeV, para os núcleos com massa $A = 76$. A parábola superior (azul), representa os núcleos que possuem Z ímpar e a parábola inferior (vermelha) os núcleos com Z par. As linhas verdes expõem o decaimento beta simples de um isóbaro em seu vizinho e a linha roxa mostra a possibilidade de um decaimento beta duplo(GIULIANI; POVES, 2012).

Fonte: GIULIANI; POVES, 2012, f. 2.

beta simples sucessivos, conhecido como decaimento beta duplo (DBD).

O DBD é um processo eletro-fraco de segunda ordem, cujo o análogo eletromagnético é o espalhamento atômico Raman e o decaimento gamma duplo (KRAMP et al., 1987). Esse decaimento é a transição mais lenta já observada e o mais estudado no campo de reações com dupla troca de carga (DCE)[1]. Os modos pelos quais podem ocorrer o DBD estão relacionados com a distinção neutrino(ν)-antineutrino($\tilde{\nu}$). Se ν e $\tilde{\nu}$ são identificados pelas transições

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}, \\ \nu + n &\rightarrow p + e^-, \end{aligned} \tag{1}$$

ocorre o DBD com emissão de dois neutrinos 2νDBD, passando por estados virtuais do núcleo intermediário $(N-1, Z+1)$,

$$\begin{aligned} (N,Z) &\xrightarrow{\beta^-} (N-1, Z+1) + e^- + \tilde{\nu}, \\ &\xrightarrow{\beta^-} (N-2, Z+2) + 2e^- + 2\tilde{\nu}, \end{aligned} \tag{2}$$

onde os primeiros cálculos da meia vida foram realizados por Goeppert-Mayer em (GOEPPERT-

[1] Processos que conectam o núcleo (N, Z) com os núcleos $(N-2, Z+2)$ e $(N+2, Z-2)$.

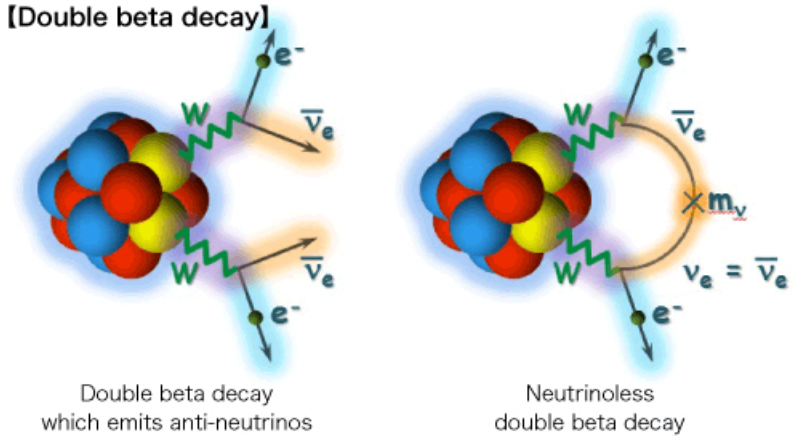
MAYER, 1935) e a primeira detecção experimental direta foi obtida em 1987 (ELLIOTT; HAHN; MOE, 1987).

Sabe-se que o neutrino é o único férmion que não possui nenhum número quântico cuja soma se conserva e que nos permita diferenciar o ν do $\tilde{\nu}$. Isso torna possível que o neutrino seja uma partícula de Majorana, ou seja, o neutrino é idêntico ao antineutrino ($\nu = \tilde{\nu}$), como ocorre com o π^0. Nesse caso, também estaria permitido o DBD sem emissão de neutrinos (0νDBD), que foi proposto por (FURRY, 1939),

$$\begin{aligned} (N,Z) &\xrightarrow{\beta^-} (N-1,Z+1) + e^- + \tilde{\nu} \equiv (N-1,Z+1) + e^- + \nu, \\ &\xrightarrow{\beta^-} (N-2,Z+2) + 2e^-, \end{aligned} \tag{3}$$

ou seja, o neutrino emitido por um nêutron é absorvido por outro nêutron dentro do núcleo. Para isso acontecer são necessárias duas condições (KOTANI; TAKASUGI et al., 1985): A primeira é que o neutrino deve ser um férmion de Majorana e a segunda condição é que ambos neutrinos, emitido e absorvido, devem possuir mesma componente de helicidade para ocorrer um acoplamento entre os dois neutrinos [2] que são aniquilados, produzindo uma transição sem a presença de neutrinos no estado final.

Figura 3 - Diagrama de Feynman para o decaimento beta duplo.



Legenda: Diagrama de Feynman para os modos de decaimento beta duplo: A esquerda tem-se o decaimento com emissão de dois neutrinos ($2\nu-$DBD) e a direita tem-se o decaimento sem emissão de neutrinos ($0\nu-$DBD) (GROUP, 2020).

Fonte: GROUP, 2020.

As duas transições apresentadas acima, Eqs. (2) e (3), descrevem o decaimento beta menos duplo, com emissão de dois neutrinos $2\nu2\beta^-$ e sem emissão de neutrinos $0\nu2\beta^-$

[2] Como mínimo dentro do Modelo Padrão, os dois neutrinos não podem ser acoplados.

respectivamente. Além disso, de acordo com o número e o tipo de léptons, pode-se ter ainda os seguintes tipos de DBD: dupla emissão de pósitrons ($2\beta^+$), captura de elétron e emissão de pósitron ($e\beta^+$) e dupla captura de elétrons ($2e$). Cada um destes podem ocorrer com ou sem a presença de neutrinos no estado final.

É importante notar que para o 0νDBD, ocorre a violação de simetria no número de léptons em duas unidades, ou seja, o número de léptons antes do decaimento e depois são diferentes, promovendo a violação de paridade na interação eletrofraca devido a ausência dos neutrinos direitos (anti-neutrinos esquerdos). Esse fato, desperta o interesse da comunidade científica, uma vez que produz a capacidade de testar propriedades de simetrias do modelo padrão das interações eletrofracas, tais como massividade dos neutrinos e não existências das correntes fracas direitas (TOMODA, 1991). Assim o 0νDBD desempenha um papel crucial na formulação de qualquer nova teoria que vai além do modelo padrão $SU(2)_L \times U(1)$ de interações eletrofracas. Por outro lado, nenhum princípio teórico impossibilita os neutrinos de terem massa e as extensões mais atrativas do modelo padrão requerem que os neutrinos sejam massivos. A teória não é capaz de predizer a escala de massa dos neutrinos melhor do que se pode fixar a massa dos quarks e dos léptons carregados. Esse fato inspirou a pesquisa experimental desse processo em uma grande quantidade de núcleos, ao mesmo tempo de buscar também o 2νDBD, posto que esse está relacionado com o 0νDBD, por meio de efeitos de estrutura nuclear.

As taxas dos decaimentos $0\nu DBD$ dependem de vários parâmetros desconhecidos tais como a massa do neutrino, constantes de acoplamentos das componentes direitas do Hamiltoniano fraco e a única maneira de colocar esses termos em evidência é tendo suficiente controle sobre a estrutura nuclear, ou seja, as funções de onda nucleares dos estados intermediários do núcleo ímpar-ímpar dentro do triplete isobárico [3]. É nesse ponto que as transições $2\nu 2\beta^{\mp}$, $2\nu e\beta^+$ e $2\nu 2e$ são importantes, pois esses acrescentam em torno de 34 núcleos para o $2\nu 2e$, 26 núcleos para $2\nu e\beta^+$ e 6 núcleos para $2\nu 2\beta^+$, além dos 35 núcleos que sofrem $2\nu 2\beta^-$ (BARABASH, 2015).

Através dos experimentos de oscilações de neutrinos realizado por Takaaki Kajita na Colaboração Super-Kamiokande (FUKUDA et al., 1998), confirmando que os mesmos sofrem oscilações de sabor (neutrino eletrônico, muônico e tauônico), impulsionou a busca do 0νDBD, uma vez que este modo fornece a possibilidade de inferir a massa efetiva do neutrino. No entanto, apesar desse grande progresso, algumas propriedades fundamentais ainda são desconhecidas na física dos neutrinos, como a natureza dos neutrinos Dirac ou

[3] Entretanto para o modo 0νDBD, diferente do modo 2νDBD, os antineutrinos trocados entre os núcleons são partículas virtuais e os momentos médios trocados são da ordem 100 MeV, ou seja é muito maior que a energia de excitação dos estados intermediários que é da ordem de 10 MeV, desta forma a variação no denominador de energia pode ser negligênciada, trocando a energia dos estados intermediários pelo valor esperado da energia média dos estados coletivos de Gamow-Teller usando a relação de fechamento, necessitando apenas das funções de onda dos núcleos incial e final (TOMODA, 1991).

Majorana (sejam eles próprios suas antipartículas) ou a escala de massa e a hierarquia absoluta dos neutrinos. Os resultados mais recentes ainda não mostram sua detecção, mas direcionam o neutrino a ser uma partícula de Majorana (AGOSTINI et al., 2018; AALSETH et al., 2018; ALDUINO et al., 2018; ALBERT et al., 2018). Desse modo, a observação das oscilações de neutrinos implica na necessidade de realizar uma extensão do Modelo Padrão de Partículas Elementais, uma vez que ele foi construído levando em conta que os neutrinos não possuem massa e que são partículas diferentes dos antineutrinos (partícula de Dirac). O melhor caminho em busca de respostas sobre a natureza do neutrino (Dirac ou Majorana) ou a existência de correntes de neutrinos direitas e a compreensão da não conservação do número de léptons se dá através do 0νDBD.

As meias-vidas dos modos de decaimento beta duplo, 2νDBD e 0νDBD, são,

$$[\tau^{\alpha}_{2\nu}(\mathcal{J}^{+}_{f})]^{-1} \;=\; g^{4}_{A}\mathcal{G}^{\alpha}_{2\nu}(\mathcal{J}^{+}_{f})|M_{2\nu}(\mathcal{J}^{+}_{f})|^{2} \tag{4}$$

e

$$[\tau^{\alpha}_{0\nu}(\mathcal{J}^{+}_{f})]^{-1} \;=\; \mathcal{G}^{\alpha}_{0\nu}(\mathcal{J}^{+}_{f})|M_{0\nu}(\mathcal{J}^{+}_{f})|^{2}\langle m_{\nu}\rangle^{2}, \tag{5}$$

respectivamente, sendo $\alpha = (2\beta^{-},\ 2\beta^{+},\ e\beta^{+}$ e $2e)$, $\mathcal{J}^{+}_{f} = 0^{+}, 2^{+}$ e g_A a constante de acoplamento axial. Os $\mathcal{G}^{\alpha}_{2\nu}$ e $\mathcal{G}^{\alpha}_{0\nu}$ são os fatores cinemáticos (em unidades de anos^{-1}), que estão relacionados com o valor do Q_{α} de reação envolvendo integrais do espaço de fase leptônico; os $M_{2\nu}$ e $M_{0\nu}$ são os Elementos de Matriz Nuclear (NMEs), dados em unidades naturais ($\hbar = m_e = c = 1$) que contém a contribuição puramente hadrônica da interação eletrofraca e $\langle m_{\nu}\rangle^2$ é a massa efetiva do neutrino, representando o diferencial ingrediente presente no modo 0νDBD, uma vez que os experimentos de oscilações de neutrinos, fornecem com alta precisão apenas as diferenças quadráticas da massa do neutrino.

É importante mencionar que a Eq. (5), só é válida, se as constantes de acoplamento λ e η presentes nas correntes direitas forem nulas (BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998), ou seja, quando é levado em conta somente as contribuições esquerdas das correntes Eletrofracas $(V - A)$. Outra observação, como foi mencianado no texto, é que para o decaimento 0νDBD a meia-vida está relacionada de maneira direta com a massa efetiva do neutrino. Esse fato é de grande interesse em física de partículas, pois uma vez detectado, permite descobrir a natureza exótica do neutrino, como sua massa efetiva, que não é conhecida, além de fornecer respostas sobre o caracter de Dirac ou Majorana do neutrino. Já em Física Nuclear, através dos limites experimentais das meias-vidas é possível extrair os NMEs experimentais, tornando possível considerar o DBD como um laborátorio para métodos aproximativos da física de muitos corpos.

Segundo Escuderos *et al.* (ESCUDEROS et al., 2010), os cálculos dos NMEs são realizados principalmente com os seguintes modelos microscópicos : i) Aproximação de fases quase aleatória de Quasipartículas (QRPA); ii) Modelo de Camadas (SM); iii)

Modelo de Bósons Interagentes (IBM) e iv) o método Hartree-Fock-Bogoliubov (HBF). O modelo de QRPA tem vantagem de permitir usar uma base de partícula única grande. Assim é capaz de incluir para cada orbital o seu parceiro spin-órbita, garantindo assim que a regra de soma de Ikeda seja satisfeita, o que é essencial para descrever completamente a amplitude de Gamow-Teller. Já o modelo de camadas, ainda é restrita a uma base de quatro a cinco níveis de partícula única para a descrição do DBD. Portanto, dependendo do núcleo em estudo, nem todos os pares spin-órbita podem ser incluídos provocando assim uma violação na regra de Ikeda. Por outro lado, o modelo de camadas podem incluir todas as configurações de muitos corpos em uma dada base de partícula única. As diferenças entre HFB e IBM aproxima-se das diferenças presentes nos modelos QRPA e SM. O HFB permite apenas pares de nêutrons com estados de paridade positiva quando os coeficientes da transformação forem reais e o IBM é restrito a pares de nêutrons "S"e "D", ou seja , estados de nêutrons com momentos angulares 0+ e 2+.

Do ponto de vista computacional o modelo de QRPA é mais simples do que o modelo de camadas. Uma importante diferença entre esses modelos é que o modelo de pn-QRPA permite apenas cálculos de transições com dupla troca de carga entre estados fundamentais. De fato, se houver um interesse em estudar estrutura nuclear de estados excitados é necessário levar em consideração equações de QRPA sem troca de carga extra, ou seja, (pp+nn)-QRPA como foi realizado por Suhonen *et al.* (SUHONEN, 2012; DELION; SUHONEN, 2017). O problema é que com a introdução de novas equações de QRPA aparecem parâmetros livres adicionais e os estados excitados são limitados a um e dois fônos quadupolares.

Nesse contexto, para aplicar o modelo de QRPA é necessário que se adote as teorias de campos médios como ponto de partida mas, infelizmente elas violam as simetrias do Hamiltoniano nuclear. Tal como no caso da aproximação de BCS (John Bardeen, Leon Cooper, e John Robert Schrieffer), que é uma excelente aproximação de ordem zero, entretanto, viola as simetrias de números de partículas e a simetrias spin-isospin $SU(4)$. A violação de simetria no número de partículas não desempenha um papel muito importante, mas a simetria spin-isospin $SU(4)$ é crucial na descrição do decaimento beta duplo [4]. Existe em geral um consenso em relação a esta questão: i) a simetria $SU(4)$ é restaurada pela interação residual e ii) e que essa restauração não deve ser completa, pois poderia inibir ambos modos de decaimentos (BERNABEU et al., 1990; DESPLANQUES;

[4] Bohr e Mottelson pontuaram (BOHR; MOTTELSON, 1998):"A simetria supermultipleto tem validade aproximada para o espectro de núcleos leves, mas é gravemente quebrada em núcleos pesados como consequência do forte acoplamento spin-órbita, que conduz ao acoplamento jj. As correlações responsáveis para o efeito de renormalização dos momentos de GT (Gamow-Teller) e para os momentos de spin magnético podem ser vistas como uma tendência de afastamento do acoplamento (jj) em direção ao acoplamento LS. "Equivalentemente, pode-se afirmar que a interação residual "restaura"a simetria $SU(4)$. Ver também as referências (VOGEL; ORMAND, 1993; LUTOSTANSKY; TIKHONOV, 2015; LUTOSTANSKY; TIKHONOV, 2016).

NOGUERA; BERNABEU, 1991). Por conta disso, nesse trabalho é apresentado o termo Restauração Parcial de Simetria $SU(4)$ (PSU4SR), ao qual foi desenvolvido uma receita para implementar a PSU4SR (FERREIRA et al., 2017).

As simetrias quebradas pela aproximação de BCS são restauradas pela interação residual via o modelo de QRPA, e recentemente muita atenção tem sido direcionada para a restauração de isospin nos cálculos dos NMEs, dentro desse esquema (ŠIMKOVIC et al., 2013; DESPLANQUES; NOGUERA; BERNABEU, 1991; HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015). Isso foi realizado separando o parâmetro de renormalização g_{pp} da interação próton-nêutron partícula-partícula em uma parte isovetorial $g_{pp}^{T=1}$ e uma parte isoescalar $g_{pp}^{T=0}$, onde a parte isovetorial é escolhida essecialmente como a constante de emparelhamento média. Dessa maneira, a exigência que o termo do NMEs tipo Fermi ($M_F^{2\nu}$) desaparece completamente, enquanto o correspondente vetorial do NMEs $M_V^{0\nu}$ do decaimento 0νDBD é substancialmente reduzido, e o NMEs completo $M^{0\nu}$, que vem pricipalmente do NMEs axial-vetorial $M_A^{0\nu}$, é reduzido em 10% aproximadamente. O parâmetro $g_{pp}^{T=0}$ é ajustado de maneira que os valores dos NMEs do 2νDBD ($M^{2\nu}$) reproduzam os valores experimentais. Por outro lado, a PSU4SR tem sido estudada recentemente na estrutura dos modelos esquemáticos (ŠTEFÁNIK; ŠIMKOVIC; FAESSLER, 2015; ÜNLÜ; ÇAKMAK, 2015).

É importante ressaltar que o modelo de pn-QRPA foi implementado nesse trabalho usando a filosofia da PSU4SR para fixar as constantes $g_{pp}^{T=1}$ e $g_{pp}^{T=0}$ sem fazer uso de valores dos NMEs experimentais, como é feito por outros grupos de pesquisa. Para implementar a PSU4SR, foi elaborado um protocolo baseado nas ressonâncias de Fermi (F) e Gamow-Teller (GT), no canal partícula-buraco ph, e no mínimo das amplitudes de transição β^+, no canal pp. Assim, a essência física desse procedimento é a mesma realizada pelo pesquisador Francisco Krmpotić nos seus trabalhos envolvendo o modelo de QRPA (HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990b; HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990a; HIRSCH; BAUER; KRMPOTIC, 1990; KRMPOTIĆ; HIRSCH; DIAS, 1992; KRMPOTIĆ, 1993; KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994; BARBERO et al., 1999a). Assim, parte dessa tese contém uma atualização dos trabalhos citados, levando em consideração as contribuições das componentes pseudoescalar (P) e de magnetismo fraco (M) na corrente hadrônica para os cálculos dos NMEs do 0νDBD, como sugerido por Šimkovic *et al.* (ŠIMKOVIC et al., 1999) (ver também (ŠIMKOVIC et al., 2008, Appendix A)). Para o cálculo do NMEs do 2νDBD, além de fixar as constantes de acoplamento, pp e ph, sem fazer de ajuste experimental, o modelo de pn-QRPA foi aplicado de forma inédita, ou seja, foi resolvida somente uma equação de pn-QRPA sobre o núcleo intermediário, usando a filosofia da PSU4SR em ambos modos 2νDBD e 0νDBD (FERREIRA et al., 2017).

Sabe-se que a estrutura nuclear envolvida nas transições 0νDBD e 2νDBD é a mesma descrita nas reações com DCE. Esse fato reacendeu o interesse nas medidas de reações com dupla troca de carga induzida por íons pesados, tais como as realizadas pelo projeto NUMEN (CAPPUZZELLO et al., 2015; CARBONE et al., IOP Publishing, 2018)

envolvendo a seguinte reação $^{48}Ca(^{18}O,^{18}Ne)^{40}Ar$. Simultaneamente, o interesse no estudo teórico de reações com DCE foi renovado (SAGAWA; UESAKA, 2016; AUERBACH; LOC, 2018). Assim Shimizu, Menéndez e Yako (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018) notaram uma correlação entre as reações com DCE e decaimento $0\nu2\beta^-$. Em todos os estudos teóricos mencionados, os cálculos de estrutura foram realizados dentro do modelo de camadas.

Então, para lidar com os processos de DCE recorrereu-se à Aproximação de Tamm-Dancoff Modificada (MTDA), proposta por Raj, Ram, e M. L. Rustgi (RAJ; RUSTGI, 1969), que foi e aplicado ao 2ν-DBD, pela primeira vez ao DBD por F. Krmpotić há mais de uma década dentro do limite de partícula-buraco ph (KRMPOTIĆ, 2005). Aqui resgatamos essa filosofia e extendemos para o campo médio de BCS, resultando assim no modelo idêntificado por (pn, 2p2n)-QTDA. Nesse modelo, assume-se que os núcleos inicial, intermediário e final como vácuo BCS, excitações de pn e excitações de $2p2n$ respectivamente. As principais diferenças entre os modelos pn-QRPA e (pn, 2p2n)-QTDA são ilustradas na Fig. 4.

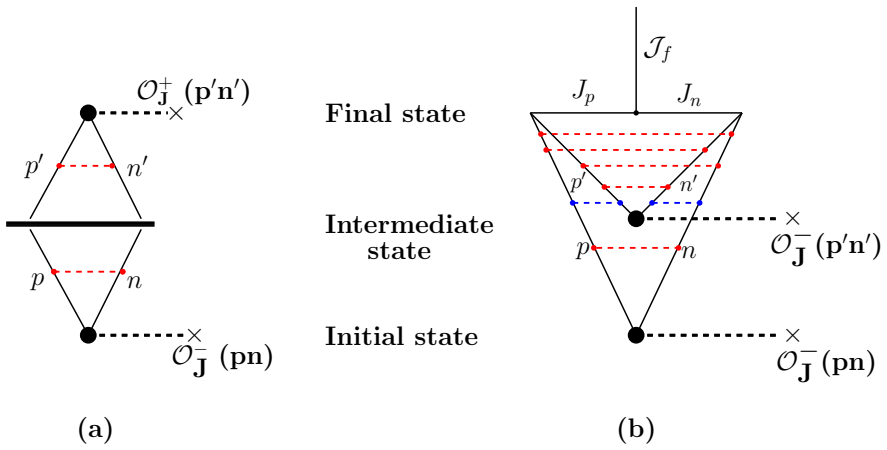
Quando comparado com o modelo de pn-QRPA, que foi originalmente proposto por Halbleib e Sorensen em 1967 (SR; SORENSEN, 1967) para descrever o decaimento beta simples, identificou-se que o (pn, 2p2n)-QTDA comporta-se como uma extensão natural para duplicar a troca de carga, ou seja, é um modelo destinado a reações com dupla troca de carga. Como tal, permite a avaliação dos NMEs, não apenas para os estados fundamentais, mas também de todos os estados finais 0^+ e 2^+ excitados, bem como os valores dos Q de reação para o decaimento de $2\beta^-$ ($Q_{2\beta^-}$) e para a captura de $2e$ (Q_{2e}). Também nos permite calcular as energias no núcleo final e a localização dos centróides de energia da distribuições das duplas amplitudes de transição além de suas regras de soma dupla.

No primeiro capítulo, elaboramos o formalismo, baseado na expansão de Bessel-Fourier introduzida previamente,que nos permite calcular de uma maneira mais simples os momentos nucleares para o modo 0νDBD levando em conta a corrente hadrônica em sua forma completa, ou seja, contendo as contribuções Vetorial, Axial-Vetorial, Pseudoscalar e de Magnetismo Fraco. E para o modo 2νDBD, são levadas em consideração as contribuições vetorial e axial da corrente hadrônica esquerda. Além disso, é apresentado as definições das Regras de Soma simples e dupla.

No segundo capítulo, com o Hamiltoniano nuclear do modelo de camadas, introduzindo a formulação de quasipartículas através da aproximação de BCS para descrever o campo médio e a interação residual sendo trabalhada com o método de linearização equações de movimento (BARANGER, 1960; ROWE, 1968), obtendo assim as equações de pn-QRPA.

No terceiro capítulo, são apresentadas as diferentes maneiras de aplicar o modelo de pn-QRPA ao DBD presentes na literatura. Além disso, foi desenvolvido uma nova

Figura 4 - Representação gráfica dos numeradores para os NMEs no decaimento $2\beta^-$.



Legenda: Representação gráfica dos numeradores dos NME no 2ν-DBD, onde os pontos pretos indicam os decaimentos beta simples. O lado esquerdo (a) $\langle 0^+_f||\mathcal{O}^+_J||J^+_\alpha\rangle\langle J^+_\alpha|J^+_{\alpha'}\rangle\langle J^+_{\alpha'}||\mathcal{O}^-_J|0^+_i\rangle$ no modelo de pn-QRPA, onde a superposição entre as soluções de QRPA final e inicial para o núcleo intermediário, $\langle J^+_\alpha|J^+_{\alpha'}\rangle$ é representado por uma linha espessa. O lado direito (b) $\langle\mathcal{J}^+_f||\mathcal{O}^-_J||J^+_\alpha\rangle\langle J^+_\alpha||\mathcal{O}^-_J|0^+_i\rangle$ no modelo (pn,2p2n)-QTDA, indica que o primeiro decaimento β^- acontece no estado inicial e o segundo decaimento β^- no estado intermediário. Os NMEs do decaimento $2\beta^+$ são representados da mesma maneira depois de fazer a substituição $\mathcal{O}^\mp_J \leftrightarrow \mathcal{O}^\pm_J$. As interações nucleares entre nêutrons (nn) e entre prótons (pp) são indicadas pelas linhas tracejadas azuis e a interação entre próton-nêutron (pn) estão indicadas as linhas tracejadas vermelhas.

Fonte: FERREIRA et al., 2020, p.2.

metodologia para aplicar o modelo de QRPA ao DBD, denominada *One-QRPA*, e que foi publicada em (FERREIRA et al., 2017). Esse esta descrito como Método IV, ao qual representa uma maneira mais simples de se obter os NMEs de ambos modos, 0νDBD e 2νDBD.

No quarto capítulo, utilizamos o modelo de MTDA (Modifield-TDA), proposto por (RAJ; RUSTGI, 1969) e que foi aplicado pela primeira vez ao 2νDBD por Krmpotić no limite partícula-buraco a mais de uma década (KRMPOTIĆ, 2005). A partir desse (KRMPOTIĆ, 2005), foi realizada uma expansão para o campo médio de BCS, considerando agora configurações de quatro quasipartículas, o que nos permite descrever os multipolos do núcleo filho do DBD a partir do núcleo inicial, tornando o modelo apropriado para transições com dupla troca de carga, esse modelo foi publicado em (FERREIRA et al., 2020).

No quinto capítulo, primeiro é apresentado o protocolo para implementar a restauração parcial de simetria SU(4) com a finalidade de fixar os parâmetros de ambos os

canais, *pp* e *ph*, que serão utilizados nos cálculos dos momentos nucleares dos dois modos de DBD. Em seguida, os resultados numéricos obtidos com o modelo de One-QRPA (Método IV, presente no capítulo 3) são apresentados para o seguinte conjunto de núcleos ^{48}Ca, ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr, ^{100}Mo, ^{128}Te, ^{130}Te e ^{150}Nd, uma vez que esses possuem resultados experimentais dos NMEs do modo 2νDBD (BARABASH, 2015). Para o modo 0ν-DBD, uma vez que este modo não possui medida experimental, os resultados numéricos foram confrontados com outros cálculos teóricos presentes na literatura. Além disso, foi realizada uma comparação direta entre os resultados obtidos a partir do modelo One-QRPA desenvolvido nesse trabalho com o os obtidos pelo modelo usual encontrado na literatura (Método II).

No sexto capítulo, são apresentados os resultados numéricos obtidos com o modelo (pn, 2p2n)-QTDA para os núcleos ^{48}Ca e ^{96}Ru no modo 2ν-DBD, obtendo: i) Os momentos nucleares para os estados fundamental e excitados com multipolos 0^+ e 2^+; ii) o Q de reação para os decaimentos $2\nu 2\beta^-$ e $2\nu 2e$; iii) as amplitudes de transição simples, dupla e suas regras de soma; iv) as energias de excitação do núcleo filho e as distribuições espectrais das duplas amplitudes de transição.

Finalmente, no sétimo capítulo, são apresentadas as conclusões obtidas através da análise dos resultados numéricos desse trabalho junto com as perspectivas futuras.

1 DECAIMENTO BETA DUPLO

A descrição de processos nucleares fracos é fundamentada na interação entre quadricorrente vetoriais, que consistem de uma parte hadrônica e outra parte leptônica. O decaimento beta duplo é um processo semileptônico, pois envolve léptons e hâdrons, de segunda ordem, que é gerado através da interação entre quadricorrentes, o que implica uma analogia com as interações eletromagnéticas. Assim, no decaimento beta, a corrente hadrônica corresponde a densidade de corrrente de carga nuclear, enquanto a corrente leptônica é formalmente análoga ao quadripotencial eletromagnético (BOHR; MOTTELSON, 1998).

Nesse capítulo, será apresentado o formalismo utilizado para obter os elementos de matriz nuclear (NMEs) para o decaimento beta duplo, tanto para o modo com emissão de neutrinos (2ν-DBD) quanto e para o modo sem emissão de neutrinos (0ν-DBD). Esses NMEs, ou momentos nucleares, são obtidos realizando uma expansão de Bessel-Fourier nas correntes hadrônicas junto com os reacoplamentos de momentos angulares. Tal procedimento foi realizado por Barbero em (BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998), resultando em expressões mais simples para os NMEs, especialmente adaptadas para os cálculos da estrutura nuclear.

Assim, foi realizado uma atualização do trabalho do Barbero (BARBERO, 1999.; BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998) levando em conta as contribuições de magnetismo fraco (M) e pseudoescalar (P) na corrente hadrônica, como sugerido por Šimkovic *et al.* (ŠIMKOVIC et al., 1999) (ver também(ŠIMKOVIC et al., 2008, Appendix A)), de modo que podemos considerar a corrente hadrônica em sua forma completa, com a estrutura $(V \mp A)$

$$J^{\mu\dagger}_{L,R}(\mathbf{x}) \;=\; \bar{\Psi}(\mathbf{x})\tau^{+}\left[g_{V}\gamma^{\mu} \mp g_{A}\gamma^{\mu}\gamma_{5} - ig_{M}\frac{\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2M_{N}} \pm g_{P}q^{\mu}\gamma_{5}\right]\Psi(\mathbf{x}), \tag{6}$$

onde o operador $\tau^{+} = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$ converte um nêutron em um próton e q_μ representa o quadrimomento transferido, $(L = Left)$ representa a componente esquerda e $(R = Right)$ é a componente direita da corrente hadrônica e as constantes de acoplamento vetorial (g_V), axial-vetorial (g_A), magnetismo-fraco (g_M) e pesudoescalar (g_P) definidas como

$$g_V = 1.00,\ g_A = (1.0 - 1.27),\ g_M = \frac{-3.7}{2M_N} \text{ e } g_P = \frac{2M_N g_A}{m_\pi^2 - q^2},$$

em que M_N é a massa do núcleon e m_π representa a massa do píon.

1.1 0ν-DBD : $(N, Z) \rightarrow (N-2, Z+2) + 2e^-$

Para essa transição o estado final é representado por $|f\rangle = |F, e_1 e_2\rangle$, onde $|F\rangle$ é o estado nuclear final do núcleo $(N-2, Z+2)$ com energia E_F e spin 0^+ e $|e_1 e_2\rangle$ é o estado com dois elétrons. Já o estado inicial $|i\rangle = |I\rangle$, onde $|I\rangle$ é o estado nuclear incial com energia E_I e spin 0^+. Deste modo, a amplitude de transição para 0ν-DBD nuclear, é obtida através de uma pertubação de segunda ordem no hamiltoniano eletrofraco entre os estado final $|f\rangle$ e inicial $|i\rangle$,

$$R_{0\nu}(e_1, e_2) \;=\; \sum_N \sum_{s_\nu} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\langle F; e_1, e_2 | H_W | N; e_1, \nu \rangle \langle N; e_1, \nu | H_W | I \rangle}{E_I - E_N - \epsilon_1 - \omega}, \tag{7}$$

onde $e \equiv (\epsilon, p, s_e)$ ($\nu \equiv (\omega, \mathbf{k}, s_\nu)$) representa energia, momento e projeção do spin do elétron (neutrino) e N representa todos os estados do núcleo intermediário $(N-1, Z+1)$.

O Hamiltoniano da interação fraca efetiva devido a troca de bósons W, relativa ao decaimento beta, é dado por (KOTANI; TAKASUGI et al., 1985; TOMODA, 1991; BARBERO, 1999.)

$$H_W = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\ell=1}^{2n} \int d\mathbf{x} [j_{L\ell\mu}(\mathbf{x}) \tilde{\mathcal{J}}^{\mu\dagger}_{L\ell}(\mathbf{x}) + j_{R\ell\mu}(\mathbf{x}) \tilde{\mathcal{J}}^{\mu\dagger}_{R\ell}(\mathbf{x}) + hc], \tag{8}$$

onde a soma é sobre todos os geradores de léptons $(e, \mu, \tau, ...)$, $G = (2.996 \pm 0.002) \times 10^{12}$ é a constante de acoplamento fraco em unidades naturais, as correntes leptônicas esquerdas (L) e direitas (R), $j_{L,R\ell\mu}(x)$ definidas como

$$j_{L,R\ell\mu}(x) = 2\bar{\Psi}_e(x) \gamma^\mu P_{L,R} N_l(x), \tag{9}$$

construídas a partir dos operadores de campo do elétron Ψ_e e do neutrino N_l com massa m_l, sendo $P_L = (1-\gamma_5)/2$ e $P_R = (1+\gamma_5)/2$, as projeções esquerda e direira, respectivamente. E as correntes hadrônicas definidas como

$$\tilde{\mathcal{J}}^{\mu\dagger}_{L\ell} = U_{el} J^{\mu\dagger}(x) \text{ e } \tilde{\mathcal{J}}^{\mu\dagger}_{R\ell} = V_{el} [\lambda J^{\mu\dagger}_R(x) + \eta J^{\mu\dagger}_L(x)] \tag{10}$$

onde U_{el} e V_{el} são as matrizes de misturas de neutrinos, que devem satisfazer as seguintes condições

$$\sum_{l=1}^{2n} |U_{el}|^2 = \sum_{l=1}^{2n} |V_{el}|^2 = 1 \text{ e } \sum_{l=1}^{2n} U_{el} V_{el} = 0,$$

definidas em (DOI; KOTANI, 1993).

Desse modo, conduzindo o Hamiltoniano Eletrofraco (8) para a amplitude de tran-

sição (7), e realizando a soma sobre as projeções de spin s_ν em (KOTANI; TAKASUGI et al., 1985; BARBERO, 1999.) obtém-se

$$\begin{aligned} R_{0\nu} &= \frac{G^2}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{2n} \sum_{N} \sum_{\alpha,\beta=L,R} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \langle F|\tilde{\mathcal{J}}^{\nu\dagger}_{\beta\ell'}(y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}|N\rangle\langle N|\tilde{\mathcal{J}}^{\mu\dagger}_{\beta\ell'}(x) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}|I\rangle \\ &\times [1 - P(e_1, e_2)] \frac{\bar{\psi}(\epsilon_2, \mathbf{y})\gamma_\nu P_\beta(\omega\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\gamma + m_l) P_\alpha \gamma_\mu \psi^C(\epsilon_1, \mathbf{x})}{\omega(\epsilon_1 + \omega + E_N - E_I)} \end{aligned} \tag{11}$$

onde $\psi(\epsilon_1, \mathbf{x})$ e $\psi(\epsilon_2, \mathbf{x})$ são as funções de onda dos elétrons emitidos, e o operador $P(e_1, e_2)$ troca as partículas e_1 por e_2 (BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998; BARBERO, 1999.). A estrutura da amplitude de transição sugere que pode ser conveniente introduzir a transformada de Fourier sobre a parte hadrônica.

Então, os momentos nucleares para o 0ν-DBD, a partir de um estado incial $|I\rangle$ no núcleo (N, Z) para o estado fundamental final $|F\rangle$ no núcleo $(N-2, Z+2)$ (ambos com energias E_I e E_F, respectivamente), podem ser expressos como (ver, por exemplo Eq. (14) em (BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998)

$$M^{0\nu} = \frac{R}{4\pi} \sum_N \int d\mathbf{k} v(k; N) \mathsf{M}^{0\nu}(\mathbf{k}, N) \tag{12}$$

onde

$$\mathsf{M}^{0\nu}(\mathbf{k}; N) \equiv \langle F|J^\dagger_\mu(\text{-}\mathbf{k})|N\rangle\langle N|J^{\mu\dagger}(\mathbf{k})|I\rangle, \tag{13}$$

e

$$J^{\mu\dagger}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} J^{\mu\dagger}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{14}$$

é a transformada de Fourier da corrente hadrônica[5] (7) no espaço dos momentos. Além disso, $R = 1.2A^{1/3}$ é o raio nuclear com dimensões em femtômetros (fm) que é incluído com a finalidade de fazer os momentos nucleares para o 0νDBD adimensionais, e

$$v(k, N) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k(k + \omega_N)}, \tag{15}$$

com

$$\omega_N = E_N - \frac{1}{2}(E_I + E_F) \tag{16}$$

é o potencial de neutrinos, onde $k = |\mathbf{k}|$ é o módulo da parte espacial do quadrimomento

[5] Nesse trabalho não foi considerado componentes direitas da corrente hadrônica para os cálculos dos momentos nucleares.

transferido e a soma abrange todos os estados intermediários N.

Dentro da aproximação não-relativística ($\gamma_4 \to 1$ e $\gamma_k\gamma_5 \to i\sigma_k$) e omitindo os termos de velocidade a corrente handrônica torna-se (FERREIRA et al., 2017)

$$J^{\mu}_{NRA}(\mathbf{x}) = \Big(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{j}(\mathbf{x})\Big), \tag{17}$$

onde

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x}) &= g_V \sum_n \tau_n^+ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_n), \\
\mathbf{j}(\mathbf{x}) &= \sum_n \tau_n^+ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{r}_n)\left[-g_A\boldsymbol{\sigma}_n + f'_M \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\sigma}_n - g'_P \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n\right],
\end{aligned} \tag{18}$$

são as densidades de um-corpo e correntes, com $f_M = g_V + g_M$, $f'_M = f_M/(2M_N)$ e $g'_P = g_P/(2M_N)$.

Os momentos nucleares dependentes dos estados intermediário $|N\rangle$, Eq. (13), são expressos da seguinte maneira

$$\mathsf{M}^{0\nu}(\mathbf{k};N) = \sum_X \mathsf{M}^{0\nu}_X(\mathbf{k};N), \tag{19}$$

com $X = V, A, P, M$, e[6]

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}^{0\nu}_V(\mathbf{k};N) &= g_V^2 \langle F|\sum_n \tau_n^+ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}|N\rangle\langle N|\sum_m \tau_m^+ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}|I\rangle, \\
\mathsf{M}^{0\nu}_A(\mathbf{k};N) &= -g_A^2 \langle F|\sum_n \tau_n^+ \boldsymbol{\sigma}_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}|N\rangle\langle N|\sum_m \tau_m^+ \boldsymbol{\sigma}_m e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}|I\rangle, \\
\mathsf{M}^{0\nu}_P(\mathbf{k};N) &= -g'_P(g'_P k^2 - 2g_A)\langle F|\sum_n \tau_n^+ \boldsymbol{\sigma}_n\cdot\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}|N\rangle\langle N|\sum_m \tau_m^+ \boldsymbol{\sigma}_m\cdot\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}|I\rangle, \\
\mathsf{M}^{0\nu}_M(\mathbf{k};N) &= f'^2_M \langle F|\sum_n \tau_n^+ \boldsymbol{\sigma}_n\times\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}|N\rangle\langle N|\sum_m \tau_m^+ \boldsymbol{\sigma}_m\times\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m}|I\rangle.
\end{aligned} \tag{20}$$

Agora realizando a expansão multipolar dos momentos nucleares, utilizando a relação de Bessel-Fourier

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi\sum_L i^L j_L(kr)[Y_L(\hat{\mathbf{k}})\cdot Y_L(\hat{\mathbf{r}})], \tag{21}$$

com o objetivo de expressar os momentos nucleares em termos dos operadores tensoriais esféricos

$$\begin{aligned}
\mathsf{Y}_{JM}(k) &= \sum_n \tau_n^+ j_J(kr_n) Y_{JM}(\hat{\mathbf{r}}_n), \\
\mathsf{S}_{LJM}(k) &= \sum_n \tau_n^+ j_L(kr_n)[\boldsymbol{\sigma}_n \otimes Y_L(\hat{\mathbf{r}}_n)]_{JM}.
\end{aligned} \tag{22}$$

[6] Por uma questão de conveniência, os momentos para $0\nu2\beta$ de Fermi-F and Gamow-Teller-GT serão rotulados como, momentos Vetorial-V e Axial-A, respectivamente.

onde $j_L(kr)$ é a função de Bessel esférica de ordem L, $Y_L(\hat{\mathbf{k}})$ é o harmônico esférico tensorial de ordem L, $\tau_\pm$ são os operadores que transformam um nêutron em um próton, enquanto $\boldsymbol{\sigma}_n$ é a componente do vetor spin de Pauli.

Dessa maneira, depois de realizar a integração angular sobre Ω_k

$$\int d\Omega_k \mathsf{M}^{0\nu}_X(\mathbf{k}, N) \equiv \mathsf{M}^{0\nu}_X(k, N), \tag{23}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}^{0\nu}_V(k,N) &= g_V^2(4\pi)^2 \sum_J \langle F|\mathsf{Y}_J(k)|N\rangle \cdot \langle N|\mathsf{Y}_J(k)|I\rangle, \\
\mathsf{M}^{0\nu}_A(\ k,N) &= g_A^2(4\pi)^2 \sum_{LJ} (-1)^{L+J} \langle F|\mathsf{S}_{LJ}(k)|N\rangle \cdot \langle N|\mathsf{S}_{LJ}(k)|I\rangle, \\
\mathsf{M}^{0\nu}_P(k,N) &= g'_P(g'_P k^2 - 2g_A)(4\pi)^2 \sum_{LL'Jl} (-)^{(L+L')/2} (1010|l0)(L0L'0|l0) \hat{L}\hat{L}' \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & l \\ L & L' & J \end{array} \right\} \\
&\times \langle F|\mathsf{S}_{LJ}(k)|N\rangle \cdot \langle N|\mathsf{S}_{L'J}(k)|I\rangle \\
\mathsf{M}^{0\nu}_M(k,N) &= -f'^2_M(k^2)(4\pi)^2 \sum_{LL'Jl} (-)^{(L+L')/2} \hat{L}\hat{L}' (1010|l0)(L0L'0|l0) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & l \\ L & L' & J \end{array} \right\} \\
&\times [2 - l(l+1)/2] \langle F|\mathsf{S}_{LJ}(k)|N\rangle \cdot \langle N|\mathsf{S}_{L'J}(k)|I\rangle,
\end{aligned} \tag{24}$$

onde os termos entre chaves representa o símbolo $6j$ de Wigner, definidos no Apêndice (A.3) e o termo $(1010|l0)$ é o coeficiente de Clebsch-Gordon, que possui sua origem no produto vetorial [7] entre as componentes da corrente hadrônica.

A expressão (12) é escrita novamente na forma (19), *i.e.* como $M^{0\nu} = \sum_X M^{0\nu}_X$, onde os momentos $M^{0\nu}_X$ são derivados a partir dos momentos (24), depois multiplicando

---

[7] O produto escalar e o produto vetorial entre os vetores **A** e **B** na base esférica podem ser rescritos em termos dos coeficientes de Glebsch-Gordan. No caso do produto escalar, temos

$$\begin{aligned}
(A \cdot B) &= \sum_\mu A^\mu B_\mu = \sum_\mu A_\mu B^\mu = \sum_\mu (-1)^\mu A^\mu B^{-\mu} = \sum_\mu (-1)^\mu A_\mu B_{-\mu} \\
&= -\sqrt{3}(A \otimes B)_0
\end{aligned}$$

e para o produto vetorial

$$\begin{aligned}
(A \times B) &= \sum_{\nu\nu'} A_\nu B_{\nu'} e_\nu \times e_{\nu'} \\
&= i\sqrt{2} \sum_{\nu\nu'\mu} A_\nu B_{\nu'} (1\nu 1\nu'|1\mu) e_\mu \\
&= i\sqrt{2} \sum_{\nu\nu'\mu\mu'} (A \otimes B)_{\mu'} (1\nu 1\nu'|1\mu)(1\nu 1\nu'|1\mu') e_\mu \\
&= i\sqrt{2} \sum_\mu (A \otimes B)_\mu e_\mu,
\end{aligned}$$

com $(A \otimes B)_\mu \equiv -i\sqrt{2} \sum_{\nu\nu'} (1\nu 1\nu'|1\mu) A_\nu B_\nu$

estes pelo fator $\mathsf{R}k^2v(k;N)/4\pi$, e integrando sobre k. Por exemplo,

$$M_A^{0\nu} = 4\pi\mathsf{R}g_A^2\sum_{LJN}(-1)^{L+J}\int v(k,N)k^2dk\langle F|\mathsf{S}_{LJ}(k)|N\rangle\cdot\langle N|\mathsf{S}_{LJ}(k)|I\rangle. \quad (25)$$

Para incorporar a estrutura nuclear, utiliza-se a seguinte relação (ver (BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998, Eq. 36)))

$$\begin{aligned}\sum_N\langle F|\mathsf{T}_J(k)|N\rangle\cdot\langle N|\mathsf{T}_J(k)|I\rangle &= (-)^J\sum_{\alpha\pi pnp'n'}\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi)\\ &\quad\times\langle p||\mathsf{T}_J(k)||n\rangle\langle p'||\mathsf{T}_J(k)||n'\rangle, \quad (26)\end{aligned}$$

onde, $\mathsf{T}_J(k)$ representa um operador tensorial esférico no espaço de Fock e $\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi)$ é a matriz densidade de dois-corpos, definida como

$$\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi) = \rho^-(pn;J_\alpha^\pi)\rho^+(p'n';J_\alpha^\pi), \quad (27)$$

onde

$$\begin{aligned}\rho^-(pnJ_\alpha^\pi) &= \hat{J}^{-1}\langle 0_F^+||(a_p^\dagger a_{\bar{n}})_{J^\pi}||J_\alpha^\pi\rangle\\ \rho^+(pnJ_\alpha^\pi) &= \hat{J}^{-1}\langle J_\alpha^\pi||(a_n^\dagger a_{\bar{p}})_{J^\pi}||0_I^+\rangle, \quad (28)\end{aligned}$$

são as matrizes densidades de um-corpo $\beta^\mp$, o índice α refere-se aos diferentes estados intermediários com mesmo spin J e paridade π, e $\hat{J}\equiv\sqrt{2J+1}$. Por conveniência, foi feita a seguinte substituição

$$|I\rangle,|F\rangle,|N\rangle \rightarrow |0_I^+\rangle,|0_F^+\rangle,|J_\alpha^\pi\rangle. \quad (29)$$

Por exemplo, Eq. (25) lê agora

$$\begin{aligned}M_A^{0\nu} &= 4\pi\mathsf{R}g_A^2\sum_{LJ}(-1)^{1+L}\\ &\quad\times\sum_{\alpha\pi pnp'n'}\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi)\int v(k,\omega_{J_\alpha^\pi})k^2dk\langle p||\mathsf{S}_{LJ}(k)||n\rangle\langle p'||\mathsf{S}_{LJ}(k)||n'\rangle, \quad (30)\end{aligned}$$

onde os elementos de matriz dos operadores tensoriais esféricos Eq. (22) são

$$\begin{aligned}\langle p||\mathsf{Y}_J(k)||n\rangle &= (4\pi)^{-1/2}W_{J0J}(pn)R_J(pn;k),\\ \langle p||\mathsf{Y}_J(k)||n\rangle &= (4\pi)^{-1/2}W_{J0J}(pn)R_J(pn;k),\end{aligned}$$

com as partes angulares: [8]

$$W_{LSJ}(pn) = \sqrt{2}\hat{S}\hat{J}\hat{L}\hat{l}_n\hat{j}_n\hat{j}_p(l_n0L0|0l_p)\left\{\begin{array}{ccc} l_p & \frac{1}{2} & j_p \\ L & S & J \\ l_n & \frac{1}{2} & j_n \end{array}\right\}, \tag{31}$$

sendo $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$, as chaves representam o símbolo $9j$ de Wigner, definido no apêndice (A.4) e a parte radial

$$R_L(pn;k) = \int_0^\infty u_{n_pl_p}(r)u_{n_nl_n}(r)j_L(kr)r^2dr, \tag{32}$$

é a integral radial de um-corpo, e u_{nl} as funções radiais de partícula simples.

Assim, os resultados finais para os momentos nucleares são:

$$\begin{aligned}
M_V^{0\nu} &= \sum_{J_\alpha^\pi}(-)^J \sum_{pp'nn'} \rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi)W_{J0J}(pn)W_{J0J}(p'n')\mathcal{R}^V_{JJ}(pnp'n';\omega_{J_\alpha^\pi}), \\
M_A^{0\nu} &= \sum_{LJ_\alpha^\pi}(-)^{L+1} \sum_{pp'nn'} \rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi)W_{L1J}(pn)W_{L1J}(p'n')\mathcal{R}^A_{LL}(pnp'n';\omega_{J_\alpha^\pi}), \\
M_P^{0\nu} &= -\sum_{J_\alpha^\pi LL'l}(-)^{J+(L+L')/2}\hat{L}\hat{L}'(L0L'0|l0)(1010|l0)\sum_{pp'nn'}\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi) \\
&\times W_{L1J}(pn)W_{L'1J}(p'n')\left\{\begin{array}{ccc} L & L' & l \\ 1 & 1 & J \end{array}\right\}\mathcal{R}^P_{LL'}(pnp'n';\omega_{J_\alpha^\pi}), \\
M_M^{0\nu} &= -\sum_{J_\alpha^\pi LL'l}(-)^{J+(L+L')/2}\hat{L}\hat{L}'(L0L'0|l0)(1010|l0)\sum_{pp'nn'}\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha^\pi) \\
&\times W_{L1J}(pn)W_{L'1J}(p'n')\left\{\begin{array}{ccc} L & L' & l \\ 1 & 1 & J \end{array}\right\}[2-l(l+1)/2]\mathcal{R}^M_{LL'}(pnp'n';\omega_{J_\alpha^\pi}),
\end{aligned} \tag{33}$$

sendo $(1010|l0) = 0$ para l ímpar e $(L0L'0|0l) = 0$ para $L+L'+l$ ímpar e $\mathcal{R}^X_{LL'}(pnp'n';\omega_{J_\alpha^\pi})$ integral radial de dois-corpos definida como

$$\mathcal{R}^X_{LL'}(pnp'n';\omega_{J_\alpha^\pi}) = \mathsf{R}\int dkk^2v_X(k;\omega_{J_\alpha^\pi})R_L(pn;k)R_{L'}(p'n';k). \tag{34}$$

Finalmente, o potencial efetivo do neutrino em $v_X(k;\omega_{J_\alpha^\pi})$ (34) torna-se

$$\begin{aligned}
v_V(k;\omega_{J_\alpha^\pi}) &= g_V^2(k^2)v(k;\omega_{J_\alpha^\pi}), \\
v_A(k;\omega_{J_\alpha^\pi}) &= g_A^2(k^2)v(k;\omega_{J_\alpha^\pi}), \\
v_M(k;\omega_{J_\alpha^\pi}) &= k^2f_M'^2(k^2)v(k;\omega_{J_\alpha^\pi}), \\
v_P(k;\omega_{J_\alpha^\pi}) &= k^2g_P'(k^2)[2g_A(k^2)-k^2g_P'(k^2)]v(k;\omega_{J_\alpha^\pi}),
\end{aligned} \tag{35}$$

[8] Aqui foi usado o esquema de acoplamento $|(\frac{1}{2},l)j\rangle$.

lembrando que $f'_M = \frac{f_M}{2M_N}$ com $f_M = g_V + g_M$. Dentro da nova notação apresenta na Eq. (29), Eqs. (15) e (16) são agora expressas como

$$v(k;\omega_{J^\pi_\alpha}) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k(k+\omega_{J^\pi_\alpha})}, \tag{36}$$

com

$$\begin{aligned}\omega_{J^\pi_\alpha} &= E_{J^+_\alpha} - \frac{E_{0_{+I}} + E_{0^+_F}}{2} \\ &= E_{J^+_\alpha} - E_{0^+_I} + \frac{1}{2}Q_{\beta\beta}\end{aligned} \tag{37}$$

onde $Q_{\beta\beta} = E_{0^+_I} - E_{0^+_F}$ é o valor Q de reação do DBD.

Para o cálculo dos momentos nucleares são levados em conta os efeitos das correlações de tamanho finito do núcleo (FNS) através dos fatores de forma de dipolo usuais

$$\begin{aligned} g_V &\rightarrow g_V(k^2) \equiv g_V\left(\frac{\Lambda_V^2}{\Lambda_V^2+k^2}\right)^2, \\ g_A &\rightarrow g_A(k^2) \equiv g_A\left(\frac{\Lambda_A^2}{\Lambda_A^2+k^2}\right)^2, \\ f'_M &\rightarrow f'_M(k^2) \equiv f'_M\left(\frac{\Lambda_V^2}{\Lambda_V^2+k^2}\right)^2, \\ g'_P &\rightarrow g'_P(k^2) \equiv g'_P\left(\frac{\Lambda_A^2}{\Lambda_A^2+k^2}\right)^2, \end{aligned} \tag{38}$$

como nas Refs. (KRMPOTIĆ; HIRSCH; DIAS, 1992; ŠIMKOVIC et al., 1999; YAO et al., 2015), e $\Lambda_V = 0.85$ GeV e $\Lambda_A = 1.086$ GeV, são respectivamente os parâmetros de corte Vetorial e Axial-Vetorial.

As constantes fracas são fixadas como segue: $g_V = 1$ e $g_M = 3.7$ através da hipótese de Conservação da Corrente Vetorial (CVC), $g_A = 1.27$ a partir dos dados experimentais (BERINGER et al., 2012) e $g_P = 2M_N g_A/(q^2 + m_\pi^2)$ a partir da hipótese de corrente axial parcialmente conservada (PCVC) (WALECKA, 2004).

As correlaçãoes de curto alcance (SRC) entre dois nucleons são tomadas em conta de maneira padrão via a função de correlação (BROWN et al., 1977; TOWNER, 1987)

$$f^{SRC}(r) = 1 - j_0(k_c r), \tag{39}$$

onde $k_c = 3.93$ fm^{-1} é o comprimento de onda de Compton do méson-ω. Isto conduz para a seguinte modificação dos potenciais $v_X(k;\omega_{J^\pi_\alpha})$ no espaço dos momentos (ver Eqs. (2.14) and (2.15) na Ref. (KRMPOTIĆ; HIRSCH; DIAS, 1992), bem como as Refs. (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994; BARBERO; KRMPOTIĆ; TADIĆ, 1998; BARBERO et al., 1999a;

BARBERO et al., 1999b; FERREIRA, 2016).

$$v_X(q;\omega_J) \;\rightarrow\; v_X(q;\omega_J) - \Delta v_X(q;\omega_J), \tag{40}$$

com

$$\Delta v_X(q;\omega_J) \;=\; \frac{1}{2q_c^2}\int_{-1}^{1} dx \int dk k^2 v_X(k;\omega_J)\delta(\sqrt{q^2+k^2+2xqk} - q_c). \tag{41}$$

Não é díficil ver que

$$\Delta v_X(q;\omega_J) \;=\; \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx v_X(\sqrt{q^2+q_c^2+2xqq_c};\omega_J), \tag{42}$$

e esta expressão pode ser usada para calcular a SRC.

1.2 2ν-DBD: $(N,Z) \rightarrow (N-2, Z+2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e$

Independente do modelo nuclear adotado, quando somente as transições permitidas [9] são levadas em conta, ou seja, transições de Fermi (F) e Gamow-Teller (GT), os NMEs para o $2\nu 2\beta^{\pm}$ a partir do estado fundamental 0_i^+ do núcleo pai (N,Z) para um estado 0_f^+ no núcleo filho $(N \pm 2, Z \mp 2)$, são definidos como

$$\begin{aligned} M^{2\nu^{\pm}}(0_f^+) \;&=\; M_F^{2\nu^{\pm}}(0_f^+) + M_{GT}^{2\nu^{\pm}}(0_f^+) \\ &\equiv\; \sum_{J=0,1}(-)^J g_J^2 \sum_{\alpha}\left[\frac{\langle 0_f^+||\mathcal{O}_J^{\pm}||J_\alpha^+\rangle\langle J_\alpha^+||\mathcal{O}_J^{\pm}||0_i^+\rangle}{\mathcal{D}^{2\nu^{\pm}}_{J_\alpha,0_f}}\right], \end{aligned} \tag{43}$$

onde $g_0 \equiv g_V$ e $g_1 \equiv g_A$ são as constantes de acoplamento fraco, vetorial e axial-vetorial, respectivamente, e a soma sobre todos os estados intermediários virtuais $\mid J_\alpha^+\rangle$ no núcleo $(A, Z \mp 1)$.

Os operadores de um-corpo são

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_J^- \;&=\; \hat{J}^{-1}\sum_{pn}\langle p||\mathrm{O}_J||n\rangle\left(c_p^\dagger c_{\bar{n}}\right)_J, \\ \mathcal{O}_J^+ \;&=\; \hat{J}^{-1}\sum_{pn}\langle n||\mathrm{O}_J||p\rangle\left(c_n^\dagger c_{\bar{p}}\right)_J, \end{aligned} \tag{44}$$

com $\mathrm{O}_0 = 1$, e $\mathrm{O}_1 = \sigma$ para as transições F e GT, respectivamente e $c_k^\dagger \equiv c^\dagger_{j_k,m_k}$ e $c_{\bar{k}} \equiv (-)^{j_k-m_k}c_{j_k,-m_k}$ sendo os operados de criação e destruição de partículas única, e $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$.

[9] Para os NMEs das transições primeiras proibidas ver Ref. (BARBERO; KRMPOTIĆ; MARIANO, 1995)

O denominador de energia na Eq. (43) é[10]

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{2\nu^{\pm}}_{J_\alpha,\mathcal{J}_f} &= E^{\{\mp 1\}}_{J_\alpha} - \frac{E^{\{0\}}_{0^+} + E^{\{\mp 2\}}_{\mathcal{J}_f}}{2} \\ &= E^{\{\mp 1\}}_{J_\alpha} - E^{\{0\}}_{0^+} + \frac{E^{\{0\}}_{0^+} - E^{\{\mp 2\}}_{\mathcal{J}_f}}{2},\end{aligned} \tag{45}$$

onde $E^{\{0\}}_{0^+}$, $E^{\{\pm 1\}}_{J_\alpha}$ e $E^{\{\pm 2\}}_{\mathcal{J}_f}$ são respectivamente, as energias do decaimento do núcleo inicial (N, Z) em seu estado fundamental, do núcleo $(N \mp 1, Z \pm 1)$ em seu estado intermediário J^+_α, e para o núcleo $(N \mp 2, Z \pm 2)$ em seu estado final $\mathcal{J}^+_f$.

Os elementos de matriz $\langle J^+_\alpha || \mathcal{O}^{\pm}_J || 0^+_i \rangle$ podem ser expressos como um produto de densidades de um-corpo dependentes do modelo de estrutura nuclear adotado.

$$\begin{aligned}\rho^-(pnJ_\alpha) &= \hat{J}^{-1} \langle J_\alpha || (c^\dagger_p c_{\bar{n}})_J || 0^+_i \rangle, \\ \rho^+(pnJ_\alpha) &= \hat{J}^{-1} \langle J_\alpha || (c^\dagger_n c_{\bar{p}})_J || 0^+_i \rangle,\end{aligned} \tag{46}$$

e um fator puramente geométrico (angular)[11]

$$\begin{aligned}O_J(pn) &\equiv \langle p || \mathrm{O}_J || n \rangle \\ &= \delta_{l_p l_n} \sqrt{2} \hat{J} \hat{j}_n \hat{j}_p (-)^{j_p + l_p + J + \frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_p & j_n & J \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & l_n \end{Bmatrix},\end{aligned} \tag{47}$$

que é o elemento de matriz nuclear de uma partícula-única com $O_J(np) = (-)^{j_n - j_p} O_J(pn)$. Assim,

$$\langle J^+_\alpha || \mathcal{O}^{\pm}_J || 0^+_i \rangle = \sum_{pn} \rho^{\pm}(pnJ^\pi_\alpha) O_J(pn). \tag{48}$$

De forma similar,

$$\langle \mathcal{J}^+_f || \mathcal{O}^{\pm}_J || J^+_\alpha \rangle = \sum_{np} \rho^{\pm}(pnJ_\alpha, \mathcal{J}^+_f) O_J(pn), \tag{49}$$

[10] O último termo no denominador Eq. (45) baseia-se no presuposto que as energias dos léptons podem ser trocadas por $e + \nu \cong (E^{\{0\}}_{0^+} - E^{\{\mp 2\}}_{\mathcal{J}_f})/2$, cuja a validade para o modo misto foi questionada por Hirsch *et. al* (HIRSCH et al., 1994). Seguindo sua ídeia sobre igual compartilhamento da energia liberada entre os léptons. Suhonen (SUHONEN, 2012) derivou as fórmulas para os três modos DBD$^+$ e usou em seu cálculo da vida-média da desintegração ^{96}Ru $\rightarrow ^{96}$Mo. Infelizmente, ele omitiu um fator 2 em sua equação (13), o que torna o resultado do modo $2\beta^+$ incorreto. O mesmo erro é propagado em trabalhos subseqüentes (PIRINEN; SUHONEN, 2015; LI; REN et al., 2017). Neste trabalho continuamos usando a estimativa representada pela Eq. (45).

[11] O esquema de acoplamento de momento angular adodato neste trabalho foi $|(\frac{1}{2}, l)j\rangle$.

onde

$$\begin{aligned}\rho^{+}(pnJ_\alpha,\mathcal{J}_f^{+}) &= \hat{J}^{-1}\langle\mathcal{J}_f^{+}||(c_n^{\dagger}c_{\bar{p}})_J||J_\alpha\rangle,\\ \rho^{-}(pnJ_\alpha,\mathcal{J}_f^{+}) &= \hat{J}^{-1}\langle\mathcal{J}_f^{+}||(c_p^{\dagger}c_{\bar{n}})_J||J_\alpha\rangle,\end{aligned} \tag{50}$$

são as matrizes de densidades para as transições a partir do estado intermediário $|J_\alpha\rangle$ para os estados finais $|\mathcal{J}_f^{+}\rangle$, com $\mathcal{J}=0,2$.

Os correspondentes elementos de matriz são:

$$\begin{aligned}M_F^{2\nu^{\pm}}(0_f^{+}) &= g_V^2\sum_\alpha \frac{\langle 0_f^{+}||\mathcal{O}_J^{\pm}||0_\alpha^{+}\rangle\langle 0_\alpha^{+}||\mathcal{O}_J^{\pm}|0_i^{+}\rangle}{\mathcal{D}^{2\nu^{\pm}}_{0_\alpha^{+},0_f^{+}}},\\ M_{GT}^{2\nu^{\pm}}(\mathcal{J}_f^{+}) &= \frac{-g_A^2}{\sqrt{\mathcal{J}+1}}\sum_\alpha \frac{\langle\mathcal{J}_f^{+}||\mathcal{O}_J^{\pm}||1_\alpha^{+}\rangle\langle 1_\alpha^{+}||\mathcal{O}_J^{\pm}|0_i^{+}\rangle}{\left(\mathcal{D}^{2\nu^{\pm}}_{1_\alpha^{+},\mathcal{J}_f^{+}}\right)^{\mathcal{J}+1}},\end{aligned} \tag{51}$$

onde os NMEs de Gamow-Teller para os estados finais 2_f^{+} tem sido incluídos por(DOI; KOTANI, 1992; RADUTA; RADUTA, 2007; SHUKLA; SAHU; KOTA, 2009).

Todas as informações sobre a estrutura nuclear esta contida nas matrizes de densidade (46) e (50), ou mais precisamente nas matrizes densidades de dois-corpos:

$$\rho^{\pm}(pnp'n';J_\alpha,\mathcal{J}_f^{+}) = \rho^{\pm}(pn;J_\alpha)\rho^{\pm}(p'n';J_\alpha,\mathcal{J}_f^{+}). \tag{52}$$

1.3 **Regras de Soma Simples e Dupla**

As regras de soma formam uma importante ferramenta na teoria de excitações coletivas, permitindo o cálculo de propriedades globais de uma maneira simples e são portanto usadas para testar diferentes esquemas de aproximação (RING; SCHUCK,). Sabemos que o decaimento beta simples do núcleo (N,Z) para os estados J_α dos núcleos $(N-1,Z+1)$ e $(N+1,Z-1)$, estão relacionados com a amplitude de transição com troca de carga simples

$$\begin{aligned}S_J^{\{\pm1\}} &\equiv \sum_\alpha B_{J_\alpha}^{\{\pm1\}}\\ &= \hat{J}^{-2}\sum_\alpha |\langle J_\alpha^{+}||\mathcal{O}_J^{\mp}||0_i^{+}\rangle|^2.\end{aligned} \tag{53}$$

Quando $|J_\alpha^{+}\rangle$ é um conjunto completo de estados excitados que pode ser alcançado com a atuação do operador $\mathcal{O}_J^{\pm}$ sobre o estado incial $|0_i^{+}\rangle$, eles satisfazem a regra de soma com troca de carga simples, conhecida como regra de soma de Ikeda, para as transições

de Fermi e Gamow-Teller

$$\begin{aligned} S_J^{\{1\}} &\equiv S_J^{\{+1\}} - S_J^{\{-1\}} \\ &= (-)^J \hat{J}^{-2} \langle 0_i^+ | [\mathcal{O}_J^+, \mathcal{O}_J^-]_0 | 0_i^+ \rangle = N - Z. \end{aligned} \tag{54}$$

Analogamente, ambos $M^{2\nu 2\beta^\pm}(\mathcal{J}_f^+)$ e $M^{0\nu 2\beta^\pm}(\mathcal{J}_f^+)$ estão relacionados com os operadores de dupla troca de carga $(\mathcal{O}_J^\pm \mathcal{O}_J^\pm)_\mathcal{J}$ e as suas distribuições espectrais no núcleo filho $(N \mp 2, Z \pm 2)$ que são dadas por

$$\begin{aligned} S_{J\mathcal{J}}^{\{\pm 2\}} &\equiv \sum_f B_{J\mathcal{J}_f}^{\{\pm 2\}} \\ &= \hat{J}^{-2} \sum_f |\sum_\alpha \langle \mathcal{J}_f^+ || \mathcal{O}_J^\mp || J_\alpha^+ \rangle \langle J_\alpha^+ || \mathcal{O}_J^\mp | 0_i^+ \rangle|^2. \end{aligned} \tag{55}$$

Quando ambos $|J_\alpha^+\rangle$ e $|\mathcal{J}_f^+\rangle$ formam um conjunto completo de estados excitados que podem ser alcançado operando com $\mathcal{O}_J^\pm$ e $(\mathcal{O}_J^\pm \mathcal{O}_J^\pm)_\mathcal{J}$ sobre os estados inicial $|0_i^+\rangle$, suas diferenças

$$\begin{aligned} S_{J\mathcal{J}}^{\{2\}} &= S_{J\mathcal{J}}^{\{+2\}} - S_{J\mathcal{J}}^{\{-2\}} \\ &= \hat{J}^{-2} \sum_f \left[\left| \sum_\alpha \langle \mathcal{J}_f^+ || \mathcal{O}_J^- || J_\alpha^+ \rangle \langle J_\alpha^+ || \mathcal{O}_J^- | 0_i^+ \rangle \right|^2 - \left| \sum_\alpha \langle \mathcal{J}_f^+ || \mathcal{O}_J^+ || J_\alpha^+ \rangle \langle J_\alpha^+ || \mathcal{O}_J^+ | 0_i^+ \rangle \right|^2 \right], \end{aligned} \tag{56}$$

obedecem as regras de soma para dupla troca de carga (DCESR) que foram calculadas nas referências (AUERBACH; LOC, 2018; VOGEL; ERICSON; VERGADOS, 1988; MUTO, 1992; ZHENG; ZAMICK; AUERBACH, 1989; SAGAWA; UESAKA, 2016) com os seguintes resultados

$$\mathsf{S}_{DF} \equiv \mathsf{S}_{00}^{\{2\}} = 2(N-Z)(N-Z-1), \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_{DGT,0} &\equiv \mathsf{S}_{10}^{\{2\}} \\ &= 2(N-Z)\left(N-Z+1+2S_1^{\{+1\}}\right) - \frac{2}{3}C, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_{DGT,2} &\equiv \mathsf{S}_{12}^{\{2\}} \\ &= 10(N-Z)\left(N-Z-2+2S_1^{\{+1\}}\right) + \frac{5}{3}C, \end{aligned} \tag{59}$$

onde C é uma quantidade relativamente pequena e é definida em (MUTO, 1992, Eq. (4)). Essas equações estão de acordo com a equação (8) na Ref. (AUERBACH; LOC, 2018) exceto por um fator de 3 e pela omissão do termo $S_1^{\{+1\}}$.

Combinando as Eqs. (58) e (59), obtém-se a regra de soma para a amplitude total de Gamow-Teller

$$\mathsf{S}_{DGT} = 12(N-Z)\left(N-Z-\frac{3}{2}+2S_1^{\{+1\}}\right) + C, \tag{60}$$

que é independente da estrutura das funções de onda do estado fundamental (MUTO, 1992). A relação entre o DBD e a DCE tem sido discutidas nas referências (CAPPUZZELLO et al., 2015; SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018).

2 MODELOS MICROSCÓPICOS DE ESTRUTURA NUCLEAR

Sabe-se que o núcleo atômico é constituído por Z prótons e N nêutrons, o que caracteriza um sistema de $A = N + Z$ núcleons fortemente interagentes. Uma vez que as transições estudadas nessa tese é da ordem de poucos MeVs, é uma boa aproximação, considerar os prótons e nêutrons como corpos sólidos, ou seja, sem estrutura interna. Desse modo, a interação entre os núcleons será descrita através dos elementos de matriz da interação de dois-corpos. A essa interação, deve-se adicionar a interação de Coulomb entre os prótons. Sistemas nucleares de muitos corpos são geralmente caracterizado por um Hamiltoniano microscópico genérico, que é acessível somente através de e métodos aproximativos. Uma das formas de tratar esse problema é transformando o sistema de partículas fortemente interagentes em um sistema de quasipartículas fracamente interagentes para tratar a interação residual entre as quasipartículas como uma perturbação sobre o campo médio nuclear (SUHONEN, 2007). O campo médio é caracterizado por um Hamiltoniano H, contendo a energia cinética e a energia potencial de interação entre dois corpos,

$$H = \sum_{i}^{A} \frac{-\hbar}{2m_N} \nabla_i^2 + \sum_{i<j}^{A} v(\vec{r}_i, \vec{r}_j),$$

onde m_N é a massa do núcleon e $\vec{r}_i$ é a coordenada do núcleon i. Adicionando e subtraindo a soma das energias potenciais dos núcleons indivíduais ao Hamiltoniano H, podemos definir o campo médio nuclear

$$H_{MF} = \sum_{i}^{A} \frac{-\hbar}{2m_N} \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^{A} v(\vec{r}_i)$$

e a interação residual

$$V_{RES} = \sum_{i<j}^{A} v(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \sum_{i=1}^{A} v(\vec{r}_i).$$

Na aproximação de campo médio, um sistema de muitos férmions fortemente interagentes torna-se um sistema de férmions não interagentes (quaseparículas) presentes em um potencial externo $v(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{A} v(\vec{r}_i)$. Com isso, é fácil encontrar os estados estacionários de uma partícula, possibilitando assim a construção da função de onda para A-núcleons, através do produto tensorial das funções de onda de partícula única. No entanto, esse potencial externo central não reproduz qualitativamente o comportamento das energias de partícula única, uma vez que estas se encontram distribuídas em grupos ou camadas. Para isso deve-se incluir ao potencial de campo médio a o potencial spin-órbita,

que tem por finalidade separar os estados de mesmo momento angular orbital l em duas partes $j = l + 1/2$ e $j = l - 1/2$ (SUHONEN, 2007).

Agora, devido a presença do termo spin-órbita no Hamiltoniano de campo médio, o momento angular e o spin não podem ser trabalhados separadamente, assim os autoestados desse Hamiltoniano deverão ser representados em uma base acoplada de momento angular $|l\frac{1}{2}jm\rangle$. Então, os estados de partícula única ($|\phi_\alpha\rangle$) e suas respectivas energias (s.p.e), seguiram a simbologia adotada por Suhonen (SUHONEN, 2007).

$$|\phi_\alpha\rangle \equiv |\alpha\rangle \equiv |am_\alpha\rangle, \qquad a = n_a l_a j_a$$

onde l_a respresenta o número quântico de momento angular orbital, j_a é o número quântico de momento angular total, n_a é o número quântico principal que está relacionado a energia e finalmente m_a é a projeção z do momento angular total. A representação coordenada do vetor de estado $|\alpha\rangle$ é a função de onda de partícula única

$$\phi_\alpha(\vec{x}) = \eta_\alpha g_{n_a l_a}(r) \sum_{mm'} (l_\alpha m \frac{1}{2} m' | j_a, m_\alpha) Y_{l_\alpha m}(\theta, \varphi) \chi_{\frac{1}{2}m'}$$

sendo $g_{n_a l_a}(r)$ a parte radial da função de onda, que nesse trabalho é adotada como funções de oscilador harmônico, $Y_{l_\alpha m}(\theta, \varphi)$ é a autofunção do memento angular orbital, $\chi_{\frac{1}{2}m'}$ é o spinor de spin-$\frac{1}{2}$ e η_α é o fator de fase.

Na liguagem de segunda quantização, o Hamiltoniano que descreve a dinâmica do núcleo é dado por

$$H = \sum_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger \langle\alpha|T|\beta\rangle c_\beta + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger \langle\alpha\beta|v|\gamma\delta\rangle c_\delta c_\gamma \tag{61}$$

onde T é a energia cinética de cada nucleon (nêutron ou próton) e v é a energia potencial de interação que atua simultaneamente sobre dois núcleons, para uma densidade nuclear em equilíbrio (WALECKA, 2004). Os índices gregos designa todos os números quânticos $\{n, l, s, j, m_j\}$ dos estados de partícula única e o par de operadores $c^\dagger$ e c estão associados a criação e aniquilação de partículas, respectivamente, obdecendo as regras de anticomutação

$$\begin{aligned} \{c_\alpha, c_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta} \\ \{c_\alpha, c_\beta\} &= \{c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger\} = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

2.1 **Hamiltoniano Nuclear: Modelo de Camadas**

Iniciando com o Hamiltoniano Nuclear dentro do modelo de camadas em sua representação holomórfica, ou seja em segunda quantização, onde os operadores de interesse físico são expressos em termos dos operadores de criação e destruição, e seus autoestados são estados coerentes (NEGELE; ORLAND, 1998), dado por

$$H = H_p + H_n + H_{pn}$$

onde H_p e H_n são os campos médios de próton e nêutron, respectivamente e H_{pn} é a interação residual próton-nêutron. Toda a descrição utilizada no modelo de camadas nuclear e no tratamento das correlações (BCS) deste capítulo esta fundamentada no trabalho de Baranger (BARANGER, 1960). Baranger desenvolveu uma aproximação adequada para calcular as propriedades de todos os níveis de baixa energia num núcleo par-par esférico, a partir do hamiltoniano do modelo de camada.

O Hamiltoniano nuclear, escrito em segunda quantização, é dividido em duas partes: uma que é a soma das energias de partículas simples e a outra contendo somente o hamiltoniano de interação protón-nêutron.

$$H = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} a^{\dagger}_{\alpha} a_{\alpha} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} c^{\dagger}_{\alpha} c^{\dagger}_{\beta} c_{\delta} c_{\gamma}, \tag{63}$$

com $\bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathcal{V}_{\alpha\beta\delta\gamma}$ sendo o operador de dois-corpos antissimetrizado, onde os subíndices gregos representam os estados de partícula simples dentro do modelo de camadas, tais como os números quânticos $\alpha \equiv \{n, l, j, m\}$ e o isospin. Os operadores de criação e destruição de partículas são $c^{\dagger}_{\alpha}$ e c_{α}, respectivamente. Esses operadores devem satisfazer as relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{c_{\alpha}, c_{\beta}\} &= \{c^{\dagger}_{\alpha}, c^{\dagger}_{\beta}\} = 0, \\ \{c^{\dagger}_{\alpha}, c_{\beta}\} &= \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

e as seguintes relações de antissimetria devem ser mantidas

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{V}_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\mathcal{V}_{\alpha\beta\delta\gamma} = +\mathcal{V}_{\beta\alpha\delta\gamma} = \langle\alpha\beta|\mathcal{V}|\gamma\delta\rangle_{n.as}. \tag{64}$$

Como vimos, o hamiltoniano nuclear possui duas partes, uma constituida da soma das energias de partículas únicas (H_p e H_n) e a outra sendo o hamiltoniano de interação (H_{pn}). O hamiltoniano de interação próton-nêutron, em segunda quantização, é intermédiado por um operador de 2-corpos($\mathcal{V}$). Esse operador tem a finalidade de atuar simultaneamente sobre duas partículas (pp) ou dois buracos (hh) ou, uma partícula e um

buraco (ph) [12].

O operador $\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ deve exibir uma invariância sobre as rotações e reflexões. Isto é, acompanhado pelo acoplamento de duas partículas (protón-nêutron) a um momento angular JM, acoplado com outras duas partículas também acopladas a JM, escrevendo na forma de um produto tensorial invariante, no qual podemos escrever $\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ como

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{2}\sum_{JM}(j_a m_\alpha j_b m_\beta|JM)(j_c m_\gamma j_d m_\delta|JM)G(abcd;J), \tag{65}$$

sendo que os termos entre parênteses, representam os coeficientes de Clebsch-Gordon (acoplamento de dois momentos angulares). O sinal de menos é introduzindo por conveniência, uma vez que as interações são mais atrativas. Vale lembrar que o hamiltoniano de interação H_{pn} é hermitiano e também é invariante sob a ação de reversão temporal, o que nos conduz que o termo $G(abcd, J)$ da interação deve ser real e

$$G(abcd;J) = G(cdab;J).$$

Observe que escrevemos $\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ fazendo o acoplamento de α e β a um JM e também acoplando γ e δ a JM. Mas além destes dois acoplamentos, podemos acoplar α e γ a um $J'M'$ e β e δ a um $J'M'$, ou similarmente acoplar α e δ a um $J''M''$ e β e γ a um $J''M''$. Deste modo se define a função $F(acdb, J)$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\frac{1}{2}\sum_{J'M'}(-1)^{j_c-m_\gamma}(-1)^{j_b-m_\beta}(j_a m_\alpha j_c - m_\gamma|J'M')(j_d m_\delta j_b - m_\beta|J'M')F(acdb;J') \\ &= \frac{1}{2}\sum_{J''M''}(-1)^{j_\dagger-m_\delta}(-1)^{j_b-m_\beta}(j_a m_\alpha j_d - m_\delta|J'M')(j_c m_\gamma j_b - m_\beta|J'M')F(adcb;J'').\end{aligned} \tag{66}$$

Comparando as expressões (65) e (66), nota-se que a função G está associado ao acoplamento partícula-partícula (PP) e F ao acoplamento partícula-buraco (PH).

Seja $|ab;J\rangle$ um estado acoplado de partícula-partícula (PP) dado por

$$|\alpha\beta;J\rangle = \sum_{m_\alpha m_\beta}(j_a m_\alpha j_b m_\beta|JM)|j_a m_\alpha j_b m_\beta\rangle; \qquad |\alpha\rangle \equiv |(\frac{1}{2}l_a)j_a\rangle \tag{67}$$

e $|\alpha\beta^{-1};J\rangle$ é um estado de acoplamento partícula-buraco (PH)

$$|\alpha\beta^{-1};J\rangle = \sum_{m_\alpha m_\beta}(-1)^{j_a-m_\alpha}(j_a m_\alpha j_b - m_\beta|JM)|j_a m_\alpha (j_b m_\beta)^{-1}\rangle, \tag{68}$$

[12] Uma descrição mais detalhada sobre a terminologia aqui usada, partícula, buraco, quasipartícula encontrase no livro de Rowe (ROWE, 2010).

onde

$$|\alpha^{-1}\rangle = \mathbf{a}|0\rangle = |(j_a m_\alpha)^{-1}\rangle = (-1)^{j_a - m_\alpha}|j_a - m_\alpha\rangle.$$

O estado (PP) antissimetrizado é descrito por

$$|\alpha\beta; J\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{\alpha,\beta}}} \sum_{m_\alpha m_\beta} (j_a m_\alpha j_b m_\beta | JM) |j_a m_\alpha j_b m_\beta\rangle, \tag{69}$$

com a propriedade

$$|\alpha\beta; J\rangle = (-1)^{j_a + j_b - J + 1}|\beta\alpha; J\rangle_\alpha.$$

O elemento de matriz do canal PP é definido como:

$$G(abcd, J) = -\frac{1}{2}\sqrt{1+\delta_{ab}(-1)^J}\sqrt{1+\delta_{cd}(-1)^J}\langle ab; J|V|cd; J\rangle, \tag{70}$$

e o elemento de matriz do canal PH é

$$F(abcd, J) = -\frac{1}{2}\langle ab^{-1}; J|V_{RES}|cd^{-1}; J\rangle \tag{71}$$

onde

$$\mathcal{V}^{PH}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle \alpha\beta^{-1}|\mathcal{V}|\gamma\delta^{-1}\rangle = \langle \alpha\delta|\mathcal{V}|\beta\gamma\rangle = \mathcal{V}^{PP}_{\alpha\delta\beta\gamma}.$$

Os elementos de matriz PH e PP estão relacionados por

$$F(abcd; J) = \sum_J \hat{J'}^2 (-1)^{j_\beta + j_\gamma + J'} \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\beta & J \\ j_\gamma & j_\delta & J' \end{array} \right\} G(adbc; J'), \tag{72}$$

e a relaçaõ inversa é

$$G(adbc; J) = \sum_J \hat{J'}^2 (-1)^{j_\beta + j_\gamma + J'} \left\{ \begin{array}{ccc} j_\alpha & j_\delta & J \\ j_\gamma & j_\beta & J' \end{array} \right\} F(abcd; J'). \tag{73}$$

2.2 **Aproximação de BCS**

Um dos efeitos mais importantes do operador de dois-corpos sobre um núcleo esférico de camada aberta, é produzir correlações de emparelhamento. Esta correlação acontece quando os núcleons são distribuídos a pares, todos acoplados a um momento angular 0 (zero).

Uma maneira de introduzir essas correlações na função de onda é realizando a tranformação de Bogoliubov-Valatin (BARANGER, 1960), conhecida como transformação canônica de quasipartículas, no Hamiltoniano (63),

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\alpha &= u_a \tilde{c}_\alpha - v_a c_\alpha^\dagger \\ a_\alpha^\dagger &= u_a c_\alpha^\dagger + v_a \tilde{c}_\alpha, \end{aligned} \tag{74}$$

sendo que, a_α corresponde ao operador de aniquilação de quasipartícula, e $\tilde{a}_\alpha = (-1)^{j_\alpha + m_\alpha} a_{-\alpha}$ é seu associado com boas propriedades tensoriais (SUHONEN, 2007). u_a e v_a são números reais que obedecem a condição de normalização

$$u_a^2 + v_a^2 = 1,$$

onde para um nível acima do nível de Fermi ($u_a \approx 1$ e $v_a \approx 0$) e, a quasipartícula é o mesmo que a partícula para um nível abaixo do nível de Fermi temos ($u_a \approx 0$ e $v_a \approx 1$) e a quasipartícula é um buraco. Então podemos associar v_a com a amplitude de ocupação e u_a com a amplitude de desocupação de partícula, do orbital $\alpha = (a, m_\alpha)$ com $a = (n_\alpha, l_\alpha, j_\alpha)$ gerado. Os operadores $a_\alpha^\dagger$ e a_α são os operadores de criação e destruição de quasipartículas, que satisfazem as relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{a_\alpha, a_\beta\} &= 0, \\ \{a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger\} &= 0, \\ \{a_\alpha, a_\beta^\dagger\} &= \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Para introduzir as correlações de emparelhamento em (63), devemos escrever o hamiltoniano nuclear em termos dos operadores de quasipartículas. Lembrando que $H = T + V$, onde T é representado por um operador de um-corpo e V por um operador de dois-corpos. Assim, devemos trabalhar com a interação de dois corpos, que conforme (63) é dado por

$$V = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma. \tag{75}$$

Utilizando o teorema de Wick para escrever o produto dos quatro operadores em (75), na forma de produto ordenado [13], e usando as propriedades de contração (SUHONEN,

[13] O produto ordenado é representado pelo símbolo ::, no qual os operadores de aniquilação são ordenados a direita dos operadores de criação.

2007), se obtém

$$
\begin{aligned}
4V &= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger |BCS\rangle : c_\delta c_\gamma : \\
&- \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\alpha^\dagger c_\delta |BCS\rangle : c_\beta^\dagger c_\gamma : + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\alpha^\dagger c_\gamma |BCS\rangle : c_\beta^\dagger c_\delta : \\
&+ \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\beta^\dagger c_\delta |BCS\rangle : c_\alpha^\dagger c_\gamma : - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\beta^\dagger c_\gamma |BCS\rangle : c_\alpha^\dagger c_\delta : \\
&+ \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\delta c_\gamma |BCS\rangle : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger : + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger |BCS\rangle \langle BCS| c_\delta c_\gamma |BCS\rangle \\
&- \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\alpha^\dagger c_\delta |BCS\rangle \langle BCS| c_\beta^\dagger c_\gamma |BCS\rangle \\
&+ \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle BCS| c_\alpha^\dagger c_\gamma |BCS\rangle \langle BCS| c_\beta^\dagger c_\delta |BCS\rangle
\end{aligned} \tag{76}
$$

onde $|BCS\rangle$ é o vácuo de BCS, ou seja, o vácuo de quasipartícula.

Então, usando a transformação inversa de (74) em (76) e em seguinda levando V para (63), obtém-se o Hamiltoniano nuclear em termos dos operadores de criação e aniquilação de quasipartícula (SUHONEN, 2007),

$$
H = H_0 + \sum_b H_{11}(b) \Big[a_b^\dagger \tilde{a}_b \Big]_{00} + \sum_b H_{20}(b) \Big([a_b^\dagger a_b^\dagger]_{00} - [\tilde{a}_b \tilde{a}_b]_{00} \Big) + V_{RES} \tag{77}
$$

com

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \sum_a \epsilon_a \hat{j}_a^2 v_a^2 + \frac{1}{2} \sum_{abJ} v_a^2 v_b^2 \hat{J}^2 [\mathcal{N}_{ab}(J)]^{-2} \langle ab; J|V|ab; J\rangle \\
&\qquad + \frac{1}{2} \sum_{ab} \hat{j}_a \hat{j}_b u_a v_a u_b v_b \langle aa; 0|V|bb; 0\rangle \\
H_{11}(b) &= \epsilon_b \hat{j}_b (u_b^2 - v_b^2) - 2 u_b v_b \sum_a \hat{j}_a u_a v_a \langle aa; 0|V|bb; 0\rangle \\
&\qquad + \hat{j}_b^{-1} (u_b^2 - v_b^2) \sum_{aJ} v_a^2 \hat{J}^2 [\mathcal{N}_{ab}(J)]^{-2} \langle ab; J|V|ab; J\rangle \\
H_{20}(b) &= \epsilon_b \hat{j}_b u_b v_b + \hat{j}_b^{-1} u_b v_b \sum_{aJ} v_a^2 \hat{J}^2 [\mathcal{N}_{ab}(J)]^{-2} \langle ab; J|V|ab; J\rangle \\
&\qquad + \frac{1}{2} (u_b^2 - v_b^2) \sum_a \hat{j}_a u_a v_a \langle aa; 0|V|bb; 0\rangle
\end{aligned} \tag{78}
$$

onde $\mathcal{N}_{ab}(J) = \frac{\sqrt{1+\delta_{ab}(-1)^J}}{1+\delta_{ab}}$. O último termo de (77) é a chamado de interação residual

$$
V_{RES} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta} : c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma : . \tag{79}
$$

Desse modo, pode-se definir alguns parâmetros que contém uma interpretação

física, presentes no Hamiltoniano (77). O gap de emparelhamento (Δ_b),

$$\Delta_b \equiv -\hat{j}_b^{-1} \sum_a \hat{j}_a u_a v_a \langle aa;0|V|bb;0\rangle = \hat{j}_b^{-1} \sum_a \hat{j}_a u_a v_a G(aabb;0) \tag{80}$$

a auto-energia(μ_b), que descreve a renormalização da energia de partícula simples(ϵ_a) devido ao fato de que a energia de um núcleon no orbital a recebe uma contribuição adicional a partir das interações com outros nucleons,

$$\mu_b \equiv -\hat{j}_b^{-2} \sum_{aJ} v_a^2 \hat{J}^2 [\mathcal{N}_{ab}]^{-2} \langle ab;J|V|ab;J\rangle. \tag{81}$$

No entanto, surge uma dificuldade com o Hamiltoniano (77), pois esse não comuta com operador número de quasipartículas. Esse problema é resolvido quando empregamos o método de multiplicadores de Lagrange, onde o parámetro λ é introduzido de para determinar os $u's, v's$ com o método variacional. Dessa forma, devemos usar um Hamiltoniano auxiliar $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= H - \lambda \sum_\alpha c_\alpha^\dagger c_\alpha \\ &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{11}(b) + \mathcal{H}_{20}(b) + V_{RES} \end{aligned} \tag{82}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \sum_b \hat{j}_b^2 \Big[v_b^2 (\eta_b + \frac{1}{2}\mu_b) - \frac{1}{2} u_b v_b \Delta_b \Big], \\ \mathcal{H}_{11}(b) &= \hat{j}_b \Big[(u_b^2 - v_b^2)\eta_b + 2u_b v_b \Delta_b) \Big], \\ \mathcal{H}_{20}(b) &= \hat{j}_b \Big[u_b v_b \eta_b - \frac{1}{2}(u_b^2 - v_b^2)\Delta_b \Big], \end{aligned} \tag{83}$$

onde a somatória sobre $b = \{p, n\}$ se estende sobre prótons e nêutrons. Exigindo que o termo $\mathcal{H}_{20}(b)$ se anule para ter excitações somente de um par de quasipartículas, obtémos a chamada equação do gap:

$$2(\epsilon_b - \lambda) u_b v_b = (u_b^2 - v_b^2)\Delta_b, \tag{84}$$

que junto com as condições de normalização, $(u_b^2 + v_b^2 = 1)$, temos como soluções as ocupações

$$u_b^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon_b - \lambda_b}{E_b}\right), \qquad v_b^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon_b - \lambda}{E_b}\right), \tag{85}$$

onde a energia de quasipartícula é definida por

$$E_b = \sqrt{(\epsilon_b - \lambda_b)^2 + \Delta_b}. \tag{86}$$

Como as equações de BCS foram resolvidas em um núcleo com (Z, N) pares, também se cumpre a seguinte condição para o valor médio do operador número de partículas $\hat{N}$ (para prótons e para nêutrons)

$$\langle BCS|\hat{N}|BCS\rangle = \sum_{t=n\ (p)} (2j_t+1)v_t^2 = N\ (Z) \tag{87}$$

Finalmente, é conveniente definir as energias de quasipartículas relativas ao nível de Fermi $E_{j_k}^{(\pm)} = \pm E_{j_k} + \lambda_k; (k = p, n)$, que usualmente são utilizadas como primeira aproximação para as energias de partículas independentes nos núcleos vizinhos impares.

É importante notar que, nesta secção o Hamiltoniano nuclear em termos dos operadores de quasipartículas (84), possuem quatro termos, dos quais apenas o V_{RES} não é diagonal. Portanto a teoria de BCS, os coeficientes $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_{11}(b)$ e $\mathcal{H}_{20}(b)$ estão acompanhando um par de operadores de quasipartícula acoplados a $J = 0$, no qual o potencial V é um potencial de emparelhamento de curto alcance. Na próxima secção iremos trabalhar no termo V_{RES}, utilizando o método de equações de movimento (ROWE, 2010).

2.3 **Aproximação de Fases Aleatórias de Quasipartículas (QRPA)**

Esta secção, está fundamentada nos trabalhos (HIRSCH; BAUER; KRMPOTIC, 1990; SAMANA; KRMPOTIĆ; BERTULANI, 2010; SUHONEN, 2007; ROWE, 2010; FERREIRA, 2016). Com a aproximação de BCS estamos incluindo o campo médio em H_p e H_n, e uma parte de curto alcance da interação residual, que não é mais que a interação de emparelhamento. A interação residual entre prótons e nêutrons será incluída dentro do marco da aproximação de fases aleatórias de quasipartículas (QRPA). Aplicando a transformação de Bogoliuvov (76) na interação residual e resolvendo o produto normal ordenado de operadores fermiônicos, obtemos

$$\begin{aligned} V_{RES} &= \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\mathcal{V}}_{\alpha\beta\gamma\delta}\Big[u_a u_b v_c v_d a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger \tilde{a}_\delta^\dagger \tilde{a}_\gamma^\dagger - 2u_a u_b u_c v_d a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger \tilde{a}_\delta^\dagger a_\gamma + u_a u_b u_c u_d a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\delta a_\gamma \\ &- 2u_a v_b v_c v_d a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\delta^\dagger \tilde{a}_\gamma^\dagger \tilde{a}_\beta - 4u_a v_b u_c v_d a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\delta^\dagger \tilde{a}_\beta a_\gamma - 2u_a v_b u_c u_d a_\alpha^\dagger \tilde{a}_\beta a_\delta a_\gamma \\ &+ v_a v_b v_c v_d \tilde{a}_\delta^\dagger \tilde{a}_\gamma^\dagger \tilde{a}_\alpha \tilde{a}_\beta - 2v_a v_b u_c v_d \tilde{a}_\delta^\dagger \tilde{a}_\alpha \tilde{a}_\beta a_\gamma + v_a v_b u_c u_d \tilde{a}_\alpha \tilde{a}_\beta a_\delta a_\gamma\Big] \end{aligned} \tag{88}$$

realizando a mudança de $a = p$, $b = n$, $c = p'$ e $d = n'$ e, organizado-os obtemos

$$H_{pn} = H_{pn}^{22} + H_{pn}^{04} + H_{pn}^{40} \tag{89}$$

com

$$
\begin{aligned}
H_{pn} &= \sum_{pp'nn'} \Big[\langle pn|V|p'n'\rangle_{\mathcal{A}}(u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) \\
&\qquad -\langle p\bar{n'}|V|p'\bar{n}\rangle_{\mathcal{A}}(u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p n_n v_{p'} n_{n'})\Big] a_p^\dagger a_n^\dagger a_{p'} a_{n'}, \\
H_{pn}^{40} &= H_{pn}^{04} = \sum_{pp'nn'} [\langle pn|V|p'n'\rangle_{\mathcal{A}} u_p u_n v_{p'} v_{n'} a_p^\dagger a_n^\dagger a_{p'}^\dagger a_{n'}^\dagger. \qquad (90)
\end{aligned}
$$

Dentro da QRPA os estados nucleares excitados $|J_\alpha^\pi M\rangle$ (onde α corresponde ao estado α com spin J, projeção M em z, e paridade π, se obtém pela ação dos operadores com troca de carga $\Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M)$ sobre o estado fundamental correlacionado exato $|\tilde{0}\rangle$:

$$|J_\alpha^\pi M\rangle = \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M)|\tilde{0}\rangle.$$

Para chegar às equações de pn-QRPA, partimos da equação de movimento (ROWE, 2010)

$$\langle\tilde{0}|[\delta\Gamma(J_\alpha^\pi), [H, \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi]]|\tilde{0}\rangle = \omega_{J_\alpha^\pi}\langle\tilde{0}|[\delta\Gamma(J_\alpha^\pi), \Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi)]|\tilde{0}\rangle, \qquad (91)$$

onde $\omega_{J_\alpha^\pi}$ é a energia de excitação e $\delta\Gamma(J_\alpha^\pi)$ que representa uma variação arbitrária do operador. Nesta aproximação, o operador de excitação com bom momento angular está dado por

$$\Gamma^\dagger(J_\alpha^\pi M) = \sum_{pn}[X_{J_\alpha^\pi}(pn)A_{JM}^\dagger(pn) - Y_{J_\alpha^\pi}(pn)A_{\overline{JM}}(pn)], \qquad (92)$$

na base dos operadores acoplados

$$
\begin{aligned}
A_{JM}^\dagger(pn) &= (a_p^\dagger a_n^\dagger)_{JM} \equiv \sum_{m_p m_n}(j_p m_p j_n m_n|JM)a_p^\dagger a_{n'}^\dagger, \\
A_{J\bar{M}}(pn) &= (-1)^{J+M}A_{J-M}(pn), \qquad (93)
\end{aligned}
$$

sendo $(j_p m_p j_n m_n|j_p j_n JM)$ o coeficiente de Clebsh-Gordon do acoplamento dos momentos angulares $J = j_p + j_n$. Neste operador de excitação se introduz as correlações de dois corpos para o estado fundamental mediante:

(i) a amplitude $Y_{J_\alpha^\pi}(pn)$ (chamada de "backward") que contempla que um estado excitado pode obter-se por aniquilação de quasipartículas, e

(ii) a amplitude $X_{J_\alpha^\pi}(pn)$ (chamada de "forward") que corresponde à criação quasipartículas sobre a componente BCS do estado fundamental.

O vazio $|\tilde{0}\rangle$ deve ser gerado numa forma autoconsistente aplicando a condição

$$\Gamma(J_\alpha^\pi)|\tilde{0}\rangle = 0, \qquad (94)$$

para todo estado α com momento angular total J e projeção M.
Para calcular as matrizes que entram na equação de movimento (91) se assume que o vazio exato é aproximadamente idêntico à função de BCS, ou seja, $|\tilde{0}\rangle = |BCS\rangle$. Isto fica conhecido como a aproximação quasibosônica. Assim, os operadores $A_{J\pm M}(pn)$ se comportam dentro desta aproximação como bósons nos valores esperados dos comutadores

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{0}|[A_{J\pm M}(pn), A_{J\pm M}(p'n')]|\tilde{0}\rangle &\approx 0, \\
\langle\tilde{0}|[A^{\dagger}_{J\pm M}(pn), A^{\dagger}_{J\pm M}(p'n')]|\tilde{0}\rangle &\approx 0, \\
\langle\tilde{0}|[A_{J\bar{\pm}M}(pn), A^{\dagger}_{J\pm M}(p'n')]|\tilde{0}\rangle &\approx \delta_{pp'}\delta_{nn'}.
\end{aligned} \tag{95}$$

Desta maneira, a equação de movimento (91), nos conduz aos coeficientes $X_{J^{\pi}_{\alpha}}(pn)$ e $Y_{J^{\pi}_{\alpha}}(pn)$, e aos autovalores $\omega_{J^{\pi}_{\alpha}}$ como uma solução do problema de autovalores. Em forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix}, \tag{96}$$

com

$$\begin{aligned}
A(pnp'n') &= \langle BCS|[A_{\bar{J}}(pn), [H, A^{\dagger}_{\bar{J}}(p'n')]]|BCS\rangle, \\
&= (E_p + E_n)\delta_{pp'}\delta nn' + (u_p v_n u_p v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'})F(pnp'n'; J) \\
&\qquad +(u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'})G(pnp'n'; J),
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
B(pnp'n') &= -\langle BCS|[A_{\bar{J}}(pn), [H, Al_{\bar{J}}(p'n')]]|BCS\rangle, \\
&= (v_p u_n u_{p'} v_{n'} + u_p v_n v_{p'} u_{n'})F(pnp'n'; J) \\
&\qquad +(u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'})G(pnp'n'; J),
\end{aligned} \tag{98}$$

onde F e G são, respectivamente, os elementos de matriz dos graus de liberdade de partícula-buraco e partícula-partícula para a interação residual definidos como

$$G(pnp'n'; J) = \langle pn; J|V|p'n'; J\rangle, \qquad F(pnp'n'; J) = \langle pn^{-1}; J|V|p'n'^{-1}; J\rangle,$$

Observa-se que na aproximação quasibosônica, nós não necessitamos conhecer a estrutura do estado fundamental exato. Ainda com a QRPA conseguimos o mesmo espectro de energia para os núcleos com igual número de prótons e nêutrons dados por $(Z \pm 1, N \mp 1)$. O problema de autovalores nas equações de QRPA tem a importante propriedade de simetria de obter um conjunto de autovalores $\pm\omega$, onde as energias ω positivas e onde os coeficientes (X, Y) das autofunções representam o núcleo $(Z+1, N-1)$, enquanto que as energias ω negativas e onde os coeficientes (Y^*, X^*) das autofunções representam o núcleo $(Z-1, N+1)$, onde ambas autofunções tem o mesmo valor absoluto da norma pela diferença do sinal (ROWE, 2010). Ou seja, é suficiente resolver uma só

equação de autovalores e estender as soluções vistas no outro ramo com as considerações mencionadas. Finalmente, as energias perturbadas na QRPA estão definidas por:

$$E_\mu = \omega + \mu(\lambda_p - \lambda_n), \tag{99}$$

onde $\mu = \pm 1$ para o núcleo $(Z \pm 1, N \mp 1)$.

3 QRPA COM TROCA DE CARGA APLICADO AO DBD

Todo formalismo apresentado no capítulo 1, para as transições 0ν-DBD e 2ν-DBD são válidas para qualquer modelo de estrutura nuclear, sendo que essa estrutura é incorporada através das matrizes dendidades de um-corpo (28). O modelo frequentemente utilizado é o de pn-QRPA. Esse modelo foi formulado e aplicado ao decaimento beta simples ($\beta^{\pm}$) e a ressonância coletiva de Gamow-Teller (GTR) por Halbleib e Sorensen em 1967 (SR; SORENSEN, 1967), seguindo as seguintes etapas:

1. As equações de BCS para prótons e nêutrons (84) são resolvidas para o núcleo inicial par-par (N, Z) com a finalidade de encontrar: as amplitudes de propabilidades de ocupação $(v_n, v_p)(u_n = \sqrt{1 - v_n^2}, u_n = \sqrt{1 - v_n^2})$; as energias de quasipartículas (ϵ_n, ϵ_p); os potenciais químicos (λ_n, λ_p) para nêutrons e prótons; as energias do estado fundamental E_{0_I} e o vácuo de BCS

$$|0_I\rangle = \prod_p (u_p + v_p c_p^\dagger c_{\bar{p}}^\dagger) \prod_n (u_n + v_n c_n^\dagger c_{\bar{n}}^\dagger)|\rangle, \tag{100}$$

onde o $|\rangle$ é o vácuo de partículas padrão. Os $u's$ e $v's$ dos núcleos pais são determinados de acordo com as seguintes condições

$$\sum_{j_p} (2j_p + 1)v_p^2 = Z, \quad \sum_n (2j_n + 1)v_n^2 = N, \tag{101}$$

onde Z e N são os números de prótons e nêutrons respectivamente, dos núcleos pais.

2. As matrizes densidades de transição $\beta^{\mp}$

$$\begin{aligned} \rho^-(pnJ_\alpha^\pi) &= u_p v_n X_{J_\alpha^\pi}(pn) + u_n v_p Y_{J_\alpha^\pi}(pn), \\ \rho^+(pnJ_\alpha^\pi) &= u_n v_p X_{J_\alpha^\pi}(pn) + u_p v_n Y_{J_\alpha^\pi}(pn), \end{aligned} \tag{102}$$

e as energias de excitação dos núcleos vizinhos ímpar-ímpar $(N \pm 1, Z \mp 1)$,

$$E_{J_\alpha^\pi}^{N\pm1,Z\mp1} = E_{0_I^+} + \Omega_{J_\alpha^\pi} \pm \lambda_n \mp \lambda_p, \tag{103}$$

são obtidas resolvendo a equação de pn-QRPA

$$\begin{pmatrix} A_{J^\pi} & B_{J^\pi} \\ B_{J^\pi} & A_{J^\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{J_\alpha^\pi} \\ Y_{J_\alpha^\pi} \end{pmatrix} = \Omega_{J_\alpha^\pi} \begin{pmatrix} X_{J_\alpha^\pi} \\ -Y_{J_\alpha^\pi} \end{pmatrix}, \tag{104}$$

onde $X_{J_\alpha^\pi}(pn)$ e $Y_{J_\alpha^\pi}(pn)$ são as amplitudes de *forward* e *backword*, respectivamente e

$\Omega_{J^\pi_\alpha}$ representa as energias de excitação da QRPA sobre o vácuo (100). As amplitures de transição de Fermi e Gamow-Teller, definidas na Eq. (54), cumprem a conhecida regra de soma de Ikeda

$$S^\beta = S^- - S^+ = N - Z. \tag{105}$$

É importante mencionar que as correlações do estado fundamental (GSCs) para o decaimento com simples troca de carga $(N, Z) \xrightarrow{\beta^-} (N-1, Z+1)$ é dada através da transição $(N, Z) \xrightarrow{\beta^+} (N+1, Z-1)$ e vice-versa. Com efeito, a troca de $\rho^-(pnJ^\pi_\alpha) \leftrightarrow \rho^+(pnJ^\pi_\alpha)$ em na Eq. (102) é obtida através da troca de $X_{J^\pi_\alpha}(pn) \leftrightarrow Y_{J^\pi_\alpha}(pn)$.

Quando a QRPA é aplicada ao DBD, é preciso lidar simultaneamente com dois estados fundamentais E_{0_I} e E_{0_F}, o que requer etapas adicionais na modelagem da teória, além de finalizar com algum tipo de média entre esses dois estados fundamentais.

Ao longo dos anos, a maneira pela qual é aplicado o modelo de QRPA varia de grupo a grupo de pesquisa. Em geral, nos cálculos de estrutura nuclear do DBD, utilizando o modelo de QRPA, são empregadas duas equações de pn-QRPA, uma sobre o núcleo pai (N, Z) e outra sobre o núcleo filho $(N \mp 2, Z \pm 2)$ afim de descrever as funções de onda do núcleo intermediário $(N \mp 1, Z \pm 1)$. Assim, nesse capítulo será apresentado quatro maneiras existentes de se aplicar o modelo pn-QRPA ao DBD presentes na literatura. Sendo que a quarta foi elaborada durante o desenvolvimento desta tese e publicada em (FERREIRA et al., 2017).

3.1 **Método I**

Definiu-se como Método I, o primeiro trabalho que o modelo de pn-QRPA foi implementado ao DBD. Vogel e Zirnbauer descobriram que as correlações do estado fundamental incia uma regra essencial na supressão das taxas do decaimento $2\nu2\beta^-$ (VOGEL; ZIRNBAUER, 1986). Em seus cálculos para os NMEs de Gamow-Teller, $M^{2\nu}_{GT}$, eles aplicaram o modelo de pn-QRPA aos núcleos inicial (N, Z) e final $(N-2, Z+2)$ e depois realizaram uma média sobre dos elementos de matriz resultantes. Isso é, eles repetiram os passos 1 e 2 descritos anteriormente, para os estados fundamentais dos núcleos pai (N, Z) e filho $(N-2, Z+2)$ e para os estados intermediários 1^+_α e $\bar{1^+_\alpha}$ no núcleo $(N-1, Z+1)$. Para o núcleo intermediário $(N-1, Z+1)$, o vácuo de BCS é definido por

$$|0_F\rangle = \prod_p (\bar{u}_p + \bar{v}_p c^\dagger_p c^\dagger_{\bar{p}}) \prod_n (\bar{u}_n + \bar{v}_n c^\dagger_n c^\dagger_{\bar{n}})|\rangle, \tag{106}$$

derivados sobre as restrições

$$\sum_p (2j_p+1)\bar{v}_p^2 = Z+2, \quad \sum_n (2j_n+1)\bar{v}_n^2 = N-2, \tag{107}$$

que cumprem a regra de soma

$$\bar{S}^\beta = N - Z - 4. \tag{108}$$

O denominador de energia $\mathcal{D}^{2\nu^\pm}_{1^+_\alpha,0}$ presente na Eq. (45), pode ser calculado a partir de dados experimentais ou de maneira auto-consistente dentro do formalismo BCS-QRPA. Quando for obtido dentro do formalismo BCS-QRPA, encontra-se que (RING; SCHUCK, , Sec. 6.3.4)

$$Q_{\beta\beta} = E_{0^+_I} - E_{0^+_F} = 2(\lambda_n - \lambda_p), \tag{109}$$

e portanto, a partir da Eq. (104)

$$E_{1^+_\alpha} - E_{0^+_I} = \Omega_{1^+_\alpha} - \frac{1}{2}Q_{\beta\beta}, \tag{110}$$

que da Eq. (16) produz

$$\mathcal{D}^{2\nu^\pm}_{1^+_\alpha,0} \;=\; \Omega_{1^+_\alpha}. \tag{111}$$

ou seja, no formalismo de BCS-QRPA, o denominador de energia são os autolavores $\Omega_{J^\pi_\alpha}$ da equação de pn-QRPA.

Seguindo os mesmos passos para o estado final 0_F, conclui-se que o momento nuclear médio de Gamow-Teller $M^{2\nu}_{GT}$

$$M^{2\nu}_{GT} \;=\; -\frac{g_A^2}{2}\sum_{pnp'n'\alpha} W_{011}(pn)W_{011}(p'n')\left[\frac{\rho^{ph}(pnp'n';1^+_\alpha)}{\Omega_{1^+_\alpha}} + \frac{\rho^{ph}(pnp'n';\bar{1}^+_\alpha)}{\Omega_{\bar{1}^+_\alpha}}\right]. \tag{112}$$

3.2 **Método II**

O método II, desenvolvido por Civitarese, Faessler e Tomoda (CIVITARESE; FAESSLER; TOMODA, 1987), ao qual fizeram seus cálculos repetindo os passos (1) e (2) para os estados fundametais dos núcleos (N,Z) e $(N-2,Z+2)$ e para os estados intermediários 1^+_α e $1^+_{\alpha'}$ no núcleo $(N-1,Z+1)$ e chegaram a mesma conclusão a respeito das correlações do estado fundamental (ver ref. (STAUDT; MUTO; KLAPDOR-KLEINGROTHAUS, 1990)).

Diferentemente de Vogel e Zirnbauer (VOGEL; ZIRNBAUER, 1986), o grupo de Civitarese, introduziram dois superposições em seus cálculos, uma para BCS e outra para

QRPA, com a justificativa que os estados intermediários $|1^+_\alpha\rangle$ e $|\bar{1}^+_{\alpha'}\rangle$ gerados a partir de estados fundamentais diferentes, não são ortogonais um com o outro. Quando essa não-ortogonalidade é pronunciada, os resultados numéricos podem não ser confiáveis. A representação gráfica dos métodos I e II é exibida na Figura 5. Assim o momento nuclear para a transição $2\nu2\beta^-$,

$$M^{2\nu}_{GT} = -g_A^2 \sum_{pnp'n'\alpha\alpha'} W_{011}(pn)W_{011}(p'n')\frac{\rho^{ph}(pn;1^+_\alpha)\langle 1^+_\alpha|\bar{1}^+_{\alpha'}\rangle\rho^{ph}(p'n';\bar{1}^+_{\alpha'})}{m_e c^2 + \frac{1}{2}Q_{\beta\beta} + E_{1^+_\alpha} - E_{0_i}}, \quad (113)$$

onde a superposição é dada por

$$\langle 1^+_\alpha|\bar{1}^+_{\alpha'}\rangle = \sum_{pn}\left[X_{1^+_\alpha}(pn)X_{\bar{1}^+_{\alpha'}}(pn) - Y_{1^+_\alpha}(pn)Y_{\bar{1}^+_{\alpha'}}(pn)\right]. \quad (114)$$

Fazendo uso da eq. (110) o denominador de energia da Eq. (113) torna-se $m_e c^2 + \Omega_{1^+_\alpha}$.

Nas mais recentes aplicações do Método II (PACEARESCU; FAESSLER; ŠIMKOVIC, 2004; YOUSEF et al., 2009a; YOUSEF et al., 2009b; SARRIGUREN; MORENO; GUERRA, 2016) esse denominador é substituído por $(\Omega_{1^+_\alpha} + \Omega_{\bar{1}^+_{\alpha'}})/2$. O fator de superposição de BCS, que é cerca de $0,8$, tem sido incorporado nesses últimos estudos. Assim, os momentos nucleares para o decaimento $2\nu2\beta^-$

$$M^{2\nu}_{GT} = -2g_A^2\langle 0^+_I|0^+_F\rangle \sum_{pnp'n'\alpha\alpha'} W_{011}(pn)W_{011}(p'n')\frac{\rho^{+}(p'n';\bar{1}^+_{\alpha'})\langle\bar{1}^+_{\alpha'}|1^+_\alpha\rangle\rho^{-}(pn;1^+_\alpha)}{\Omega_{1^+_\alpha} + \Omega_{\bar{1}^+_{\alpha'}}}, \quad (115)$$

onde

$$\langle 0^+_I|0^+_F\rangle = \prod_p(u_p\bar{u}_p + v_p\bar{v}_p)\prod_n(u_n\bar{u}_n + v_n\bar{v}_n). \quad (116)$$

Para calcular os momentos nucleares do modo 0ν-DBD ($M^{0\nu}$) com esse método, deve-se substituir o operador densidade de dois-corpos

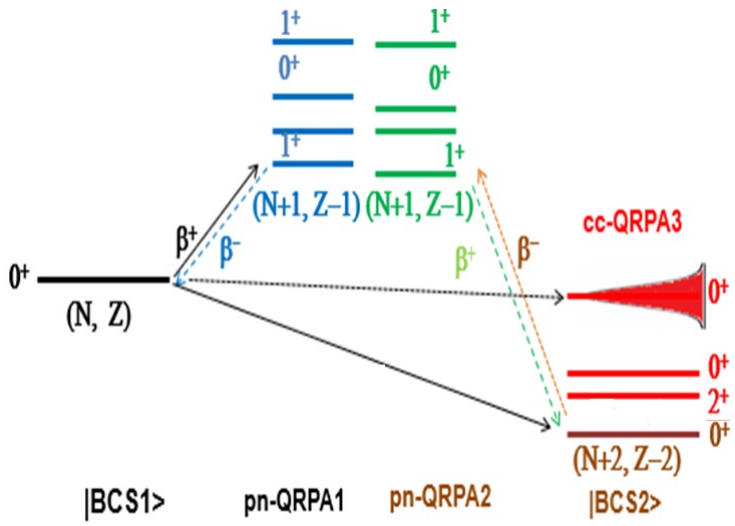
$$\sum_{J^\pi_\alpha} \quad \rho^{ph}(pnp'n';J^\pi_\alpha) \to \langle 0^+_I|0^+_F\rangle \sum_{J^\pi\alpha\alpha'} \rho^+(p'n';\bar{J}^+_{\alpha'})\langle\bar{J}^+_{\alpha'}|J^+_\alpha\rangle\rho^-(pn;J^+_\alpha). \quad (117)$$

em (33), junto com

$$\omega_{J^\pi_\alpha} \to (\Omega_{J^+_\alpha} + \Omega_{\bar{J}^+_{\alpha'}})/2, \quad (118)$$

em (36).

Figura 5 - Representação gráfica da aplicação do modelo de pn-QRPA ao decaimento beta duplo.



Legenda: Contém a descrição metodológica de adaptação do modelo pnQRPA para descrever transições entre estados fundamentais ($0^+_{gs} \rightarrow 0^+_{gs}$) e para estados excitados do DBD. Transições entre estados fundamentais, são necessárias duas equações de pnQRPA, uma sobre o núcleo pai (N, Z) e outra sobre o núcleo filho $(N+2, Z-2)$ seguindos de uma média sobre os estados intermediários. Caso tenha interesse em estudar a estrutura de estados finais excitados é necessário aplicar uma equação extra de cc-QRPA (*conserved charge*-QRPA).

Fonte: O autor, 2020.

3.3 **Método III**

As equações acima (112) e (113) para o $M^{2\nu}_{GT}$ não podem ser derivadas matematicamente, mas elas são fisicamente adequadas para as equações apresentadas por Halbleib e Sorensen (100-105) originalmente designadas para o decaimento beta simples, para se fazer possível os cálculos de estrutura nuclear no modo 2ν-DBD. Em vista disso, uma nova pn-QRPA, especialemente adaptado para os processos $2\nu2\beta^-$, foi derivada analiticamente por J. Hirsch e F. Krmpotić em (HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990a). Esse modelo foi baseado em transformações canônicas de quasipartículas para os quais as GSCs das transições $\beta^\mp$ no núcleo intermediário $(N-1, Z+1)$ são as transições $\beta^\pm$ no mesmo núcleo. [14] Assim,

[14] O núcleo intermediário é agora representado como uma combinação de excitações próton-partícula e nêutron-buraco sobre o núcleo inicial e próton-buraco e nêutron-partícula sobre o núcleo final $(N-2, Z+2)$.

apenas uma equação de pn-QRPA é resolvida

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{J^\pi} & \tilde{B}_{J^\pi} \\ \tilde{B}_{J^\pi} & \tilde{A}_{J^\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_{J^\pi_\alpha} \\ \tilde{Y}_{J^\pi_\alpha} \end{pmatrix} = \tilde{\Omega}_{J^\pi_\alpha} \begin{pmatrix} \tilde{X}_{J^\pi_\alpha} \\ -\tilde{Y}_{J^\pi_\alpha} \end{pmatrix}, \tag{119}$$

para o vácuo

$$|\tilde{0}\rangle = \prod_p (u_p + \bar{v}_p c_p^\dagger c_{\bar{p}}^\dagger) \prod_n (\bar{u}_n + v_n c_n^\dagger c_{\bar{n}}^\dagger)|\rangle, \tag{120}$$

que contém a informação de ambos estados fundamentais, inical $|0_I\rangle$ e final $|0_F\rangle$. As quantidades com barra e sem barra são derivadas como antes, resolvendo as equações de BCS para os núcleos inicial e final com as restrições (101) e (107), respectivamente. As matrizes $\tilde{A}_{J^\pi}$ e $\tilde{B}_{J^\pi}$ são dadas por (HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990a, Eq. (3)) e o momentos nucleares de Gamow-Teller é dado por

$$M^{2\nu}_{GT} = -g_A^2 \sum_{pnp'n'\alpha} W_{011}(pn) W_{011}(p'n') \frac{\tilde{\rho}^-(pn1^+_\alpha)\tilde{\rho}^+(p'n'1^+_\alpha)}{\tilde{\Omega}_{1^+_\alpha}} \tag{121}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^-(pnJ^\pi_\alpha) &= \sqrt{\sigma_p \sigma_n}(u_p v_n \tilde{X}_{J^\pi_\alpha}(pn) + \bar{u}_n \bar{v}_p \tilde{Y}_{J^\pi_\alpha}(pn)), \\ \tilde{\rho}^+(pnJ^\pi_\alpha) &= \sqrt{\sigma_p \sigma_n}(\bar{v}_p \bar{u}_n \tilde{X}_{J^\pi_\alpha}(pn) + u_p v_n \tilde{Y}_{J^\pi_\alpha}(pn)), \end{aligned} \tag{122}$$

e

$$\sigma_p^{-1} = u_p^2 + \bar{v}_p^2, \quad \sigma_n^{-1} = u_n^2 + \bar{v}_n^2. \tag{123}$$

As amplitudes de Gamow-Teller ($\tilde{S}_{GT}$)

$$\tilde{S}^\mp_{GT} = \sum_{pn\alpha} |\tilde{\rho}^\mp(pn1^+_\alpha) W_{011}(pn)|^2, \tag{124}$$

cumpre agora a regra de soma

$$\tilde{S}^\beta = \tilde{S}^- - \tilde{S}^+ \cong N - Z - 2. \tag{125}$$

Note que aqui a média não é mais realizada no nível do QRPA, mas dentro das aproximações do BCS. Além de ser fisicamente e matematicamente justificado, o Método III possui vários avanços sobre os Métodos I e II, tais como: i) apenas uma equação de QRPA é resolvida em vez de duas; ii) não é necessário lidar com as superposições problemáticas (114); iii) O $M^{2\nu}_{GT}$ pode ser calculado sem diagonalizar a matriz de QRPA (115), bastando inverter a matriz (HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990a) e iv) nos permite formular o Modelo de Modo Único (SMM: Single Model Mode), como é mostrado no Apêndice A.

3.4 **Método IV**

Nos estudos do decaimento beta simples, Cha (CHA, 1983) argumentou que "por causa da interseção entre duas quasipartículas no núcleo residual, deveríamos calcular energias de quasipartículas e os parâmetros de BCS do núcleo filho". Motivado por este argumento e na busca de realizar o cálculo de QRPA de uma maneira simples para DBD sem perder o conteúdo físico do modelo, foi dado aqui um passo adicional ao trabalho (KRMPOTIĆ et al., 1997) no cálculo dos momentos nucleares $M^{2\nu}_{GT}$. Em vez de lidar com dois vácuos de BCS como (HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990a), as equações de BCS são resolvidas para o núcleo intermediário $(N-1, Z+1)$, obtendo o vácuo de BCS

$$|0'_{int}\rangle = \prod_p (u'_p + v'_p c^\dagger_p c^\dagger_{\bar{p}}) \prod_n (u'_n + v'_n c^\dagger_n c^\dagger_{\bar{n}})|\rangle, \tag{126}$$

onde os parâmetros $(u_{n(p)}, v_{n(p)})$ são determinados a partir das restrições

$$\sum_p (2j_p+1) v'^2_p = Z+1, \quad \sum_n (2j_n+1) v'^2_n = N-1, \tag{127}$$

satisfazendo a regra de soma de Ikeda para o decaimento beta

$$S'^{\beta^-} = N - Z - 2. \tag{128}$$

Assim, os momentos nucleares de Gamow-Teller para a transição $2\nu2\beta$

$$M^{2\nu}_{GT} = -g_A^2 \sum_{pnp'n'\alpha} W_{011}(pn) W_{011}(p'n') \frac{\rho'^-(pn1^+_\alpha)\rho'^+(p'n'1^+_\alpha)}{\Omega'_{1^+_\alpha}}, \tag{129}$$

onde as primeiras quantidades possuem o mesmo significado que as equações (102) e (104). Os momentos nucleares $M^{0\nu}$ são calculados da mesma maneira, através da matriz densidade de dois-corpos (27)

$$\rho^{ph}(pnp'n'; J^\pi_\alpha) = \rho'^-(pn; J^\pi_\alpha)\rho'^+(p'n'; J^\pi_\alpha). \tag{130}$$

e a eq. (36) como

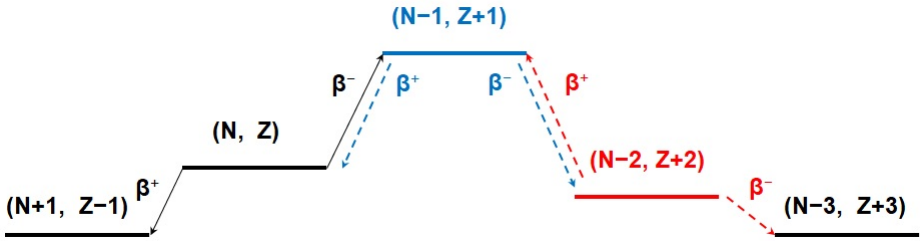
$$v(k; \omega_{J^\pi_\alpha}) = v(k; \Omega'_{J^\pi_\alpha}). \tag{131}$$

Finalmente, as matrizes densidade de um-corpo não pertubadas (BCS) são

$$\begin{aligned} \rho'^-_{BCS}(pnJ^\pi_\alpha) &= u'_p v'_n, \\ \rho'^+_{BCS}(pnJ^\pi_\alpha) &= u'_n v'_p. \end{aligned} \tag{132}$$

Como já foi pontuado em (KRMPOTIĆ, 2005), o método que envolve duas QRPA

Figura 6 - Representação gráfica das correlações sobre os núcleos pai (N,Z) e filho (N-2,Z+2).

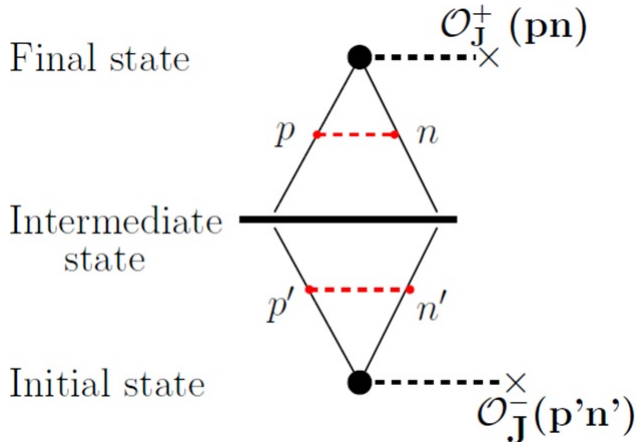


Legenda: Resultado das correlações do estado fundamental presente no modelo de QRPA. Uma vez que os métodos I e II, são aplicadas duas equações de QRPA os núcleos $(N+1, Z-1)$ e $(N-3, Z+3)$, que não participam da transição.

Fonte: O autor, 2020.

(Método I e II), os núcleos $(N+1, Z-1)$ e $(N-3, Z+3)$ participam da transição. Isto ocorre por causa das correlações no estado fundamental (GSCs) para as transições $(N, Z) \xrightarrow{\beta^-} (N-1, Z+1)$ e $(N-1, Z+1) \xrightarrow{\beta^-} (N-2, Z+2) \cong (N-2, Z+2) \xrightarrow{\beta^+} (N-1, Z+1)$ correspondendo, respectivamente, as transições $(N, Z) \xrightarrow{\beta^+} (N+1, Z-1)$ e $(N-2, Z+2) \xrightarrow{\beta^-} (N-3, Z+3)$, representadas na Figura 6 e representação diagramática do modelo pn-QRPA aplicado ao DBD é exibida na Figura 7.

Figura 7 - Representação diagramática do modelo pn-QRPA aplicado ao DBD.



Legenda: O modelo de pn-QRPA, quando aplicado ao DBD usando os métodos I ou II, onde a superposição entre as soluções de QRPA final e inicial para o núcleo intermediário, $\langle J^+_\alpha | J^+_{\alpha'} \rangle$ é representado por uma linha espessa.

Fonte: FERREIRA et al., 2020, p.2.

Já os métodos que envolve apenas uma QRPA (Métodos III e IV), só participam da transição apenas os núcleos dentro do triplete isobárico (N, Z), $(N-1, Z+1)$, $(N-2, Z+2)$ onde o DBD ocorre. Também nos métodos III e IV, similarmente o que acontece no decaimento beta simples, as GSC para o decaimento $(N, Z) \xrightarrow{\beta^-} (N-1, Z+1)$ é o decaimento $(N-1, Z+1) \xrightarrow{\beta^-} (N-2, Z+2) \cong (N-2, Z+2) \xrightarrow{\beta^+} (N-1, Z+1)$ e vice-versa.

O método IV foi desenvolvido nesse presente trabalho e publicado em (FERREIRA et al., 2017), que consiste em um estudo simultâneo de ambos modos de decaimento, 2ν-DBD e 0ν-DBD. Essa foi precisamente a principal motivação para os resultados numéricos que serão apresentados no capítulo 5, baseada no método IV (definido como *One*-QRPA) ao qual o parâmetro da amplitude isoescalar t foi fixado a partir do PSU4SR.

4 UM MODELO PARA DBD: O (PN,2P2N)-QTDA

As equações de pn-QRPA, quando aplicadas ao DBD, são geralmente limitadas para o estado fundamental do núcleo final, ou seja, os cálculos de $M_{2\nu}(0_1^+)$ e $M_{0\nu}(0_1^+)$ são realizados somente para o estado fundamental. Por mais que as regras de soma simples (54) sejam completas dentro desse modelo, as regras de soma dupla não são, uma vez que a pn-QRPA não nos permite calcular a dupla amplitude de transição total $S_{J\mathcal{J}}^{\beta\beta^{\pm}}$ dada por (56), que por sua vez nos inpede em discutir as duplas regras de somas listadas nas Eqs. (57)-(60).

Para descrever os estados intermediários J_α^+ em ambos modelos pn-QRPA e (pn,2p2n)-QTDA, é utilizado o Hamiltoniano nuclear dentro da aproximação de quasipartículas, do tipo

$$H_1 = H_0 + H_{pn}, \tag{133}$$

onde

$$H_0 = \sum_\alpha E_k a_k^\dagger a_k \tag{134}$$

é o hamiltoniano de quasipartículas independentes, com $a_\alpha^\dagger$ e $a_{\bar{\alpha}}$ sendo os operadores de criação e aniquilação de quasipartículas únicas, definidas pela transformação de Bogoljubov (SUHONEN, 2007, Eqs. (13.10))

$$\begin{aligned} a_k^\dagger &= u_a c_k^\dagger + v_k c_{\bar{k}}, \\ a_{\bar{k}} &= u_a c_{\bar{k}} - v_a c_k^\dagger. \end{aligned} \tag{135}$$

A interação de emparelhamento de prótons e nêutrons estão contidas nos coeficientes u_a e v_a da transformação, e na energia de quasipartícula

$$E_k = [(e_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2]^{\frac{1}{2}}, \tag{136}$$

onde e_k é a energia de partícula única (spe) dentro do modelo de camada, e λ é o potencial químico ou nível de Fermi. Os parâmetros do gap de energia Δ_k e as constantes de acoplamento são determindadas para reproduzir a diferença de massa ímpar experimental para cada núcleo. Finalmente, H_{pn} é a interação quasipróton-quasinêutron.

Dentro dos estados pn-QRPA, $|J_\alpha\rangle$ com energias de excitação ω_{J_α} são criados a partir de estados fundamentais 0^+ incial e final, correlacionados pelos operadores de criação de um fônon próton-nêutron Q_{J_α}. Estes são definidos como uma superposição

linear de pares de operadores criação e destruição de quasipartículas próton-nêutron

$$\begin{aligned} A^{\dagger}(pnJ) &\equiv A^{\dagger}(pnJM) = [a_p^{\dagger}a_n^{\dagger}]_{JM}, \\ A(pn\bar{J}) &= (-1)^{J-M}A(pnJ,-M). \end{aligned} \tag{137}$$

Assim

$$\begin{aligned} |J_\alpha\rangle &= Q_{J_\alpha}^{\dagger}|0^+\rangle \\ &\equiv \sum_{pn}\left[X_{pnJ}^{\alpha}A^{\dagger}(pnJ) - Y_{pnJ}^{\alpha}A(pn\bar{J})\right]|0^+\rangle, \end{aligned} \tag{138}$$

e

$$Q_{J_\alpha}|0^+\rangle = 0, \quad H_1|J_\alpha\rangle = \omega_{J_\alpha}|J_\alpha\rangle. \tag{139}$$

Geralmente isso é feito para os estados fundamentais incial $|0_I^+\rangle$ e final $|0_F^+\rangle$, obtendo dois conjuntos para os estados intermediários J_α e $J_{\alpha'}$ do núcleo $(N-1, Z+1)$, que são diferentes um do outro. Portanto, nos cálculos dos NMEs do DBD são necessários considerar suas sobreposições, como indicado na Figura. 4, e corresponde a seguinte substituição

$$\sum_{J_\alpha}\rho^{ph}(pnp'n';J_\alpha) \to \langle 0_I^+|0_F^+\rangle \times \sum_{J^\pi\alpha\alpha'}\rho^{+}(p'n';J_{\alpha'})\langle J_{\alpha'}|J_\alpha\rangle\rho^{-}(pn;J_\alpha). \tag{140}$$

O estado fundamental definido na Eq. (139) é mais preciso que o estado fundamental de BCS ($a_k|BCS\rangle = 0$), pois contém termos com $0, 4, 8, \cdots$ quasipartículas (ESCUDEROS et al., 2010). Mesmo assim, no presente modelo, aproximamos o estado fundamental inicial no núcleo pai (N, Z) por um vácuo de BCS e os estados $|J_\alpha\rangle$ para o núcleo intermediário $(N \pm 1, Z \mp 1)$ como

$$\begin{aligned} |J_\alpha\rangle &= \sum_{pn} X_{pnJ_\alpha}A^{\dagger}(pnJ)|BCS\rangle, \\ H_1|J_\alpha\rangle &= \omega_{J_\alpha}|J_\alpha\rangle. \end{aligned} \tag{141}$$

Essa disvantagem do presente modelo é neutralizada pela descrição que é feita para os estados finais no núcleo filho $(N \pm 2, Z \mp 2)$. Ou seja, em vez de um estado final correlacionado $|0_F^+\rangle$, como definido em (138), têm-se

$$|\mathcal{J}_f^+\rangle = \sum_{p_1p_2n_1n_2J_nJ_p}\mathcal{X}_{\mathrm{p_1p_2J_p,n_1n_2J_n};\mathcal{J}_f^+}|p_1p_2J_p, n_1n_2J_n;\mathcal{J}^+\rangle_A, \tag{142}$$

onde $\mathcal{J}^+ = 0^+, 2^+$ e

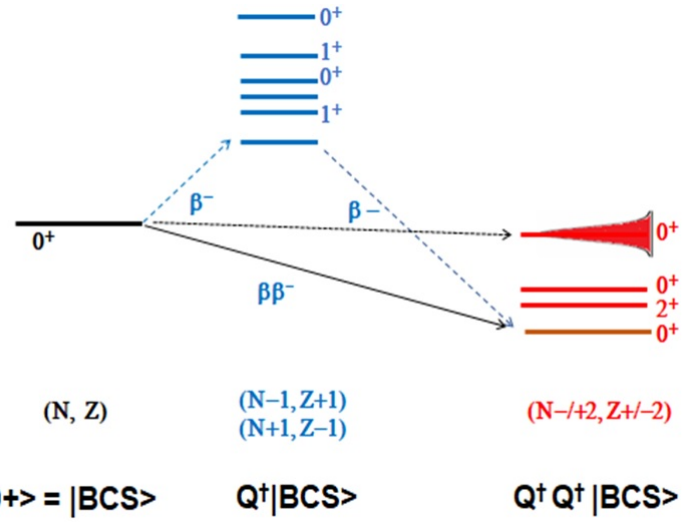
$$|p_1p_2J_p, n_1n_2J_n;\mathcal{J}^+\rangle_A = \left[\mathcal{A}^{\dagger}(p_1p_2J_p)\mathcal{A}^{\dagger}(n_1n_2J_n)\right]^{\mathcal{J}^+}|BCS\rangle, \tag{143}$$

são os estados de quasipartículas 2p2n normalizados e antissimetrizado, com

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\dagger}(abJ) &= N(ab)A^{\dagger}(abJ), \\ N(ab) &= \frac{1}{\sqrt{1+\delta_{ab}}}, \end{aligned} \tag{144}$$

sendo os estados de duas quasipartículas normalizados.

Figura 8 - Representação gráfica da (pn,2p2n)-QTDA aplicado ao DBD..



Legenda: Nesse modelo, o estado inicial, representado pelo núcleo (N, Z), é o vácuo de BCS e o estado intermediário $(N \mp 1, Z \pm 1)$ e o estado final $(N \mp 2, Z \pm 2)$ envolvem envolvem respectivamente excitações de duas e quatro quasipartículas sobre esse vácuo.

Fonte: O autor, 2020.

A amplitude $\mathcal{X}_{\mathrm{p_1p_2J_{12},n_1n_2J'_{12};\mathcal{J}_f^+}}$ são obtidas através da diagonalização do Hamiltonian (PAL; GAMBHIR; RAJ, 1967; RAJ; RUSTGI, 1969)

$$\begin{aligned} &H_2 = H_0 + H_{pn} + H_{nn} + H_{pp}, \\ &H_2|\mathcal{J}_f^+\rangle = \omega_{\mathcal{J}_f^+}|\mathcal{J}_f^+\rangle, \end{aligned} \tag{145}$$

na base (143) com H_{nn} e H_{pp} sendo as interações nêutron-nêutron e próton-próton.

Os elementos de matriz H_{pn} para o núcleo ímpar-ímpar $(N \mp 1, Z \pm 1)$

$$\begin{aligned} \langle BCS|A(npJ)H_{pn}A^{\dagger}(n'p'J)|BCS\rangle &= G(npn'p'J)(u_pu_nu_{p'}u_{n'} + v_pv_nv_{p'}v_{n'}) \\ &+ F(npn'p'J)(u_pv_nu_{p'}v_{n'} + v_pu_nv_{p'}u_{n'}), \end{aligned} \tag{146}$$

onde as funções G e F são definidas de maneira padrão em (PAL; GAMBHIR; RAJ, 1967; RAJ; RUSTGI, 1969). Elas diferem daquelas definidas em (BARANGER, 1960), por um fator de -2. As funções G e F utilizadas aqui também são diferentes das efinidas por Suhonen em (SUHONEN, 2007).

Os elementos de matriz de H_{pn} na base (143) são derivadas usando a relação (1A-

25) presente no livro (BOHR; MOTTELSON, 1998). Obtendo assim

$$\begin{aligned}
&\langle BCS|\left[\mathcal{A}^{\dagger}(n_1n_2J_n)\mathcal{A}^{\dagger}(p_1p_2J_p)\right]^{\mathcal{J}\dagger} H_{pn}\left[\mathcal{A}^{\dagger}(n_1'n_2'J_n')\mathcal{A}^{\dagger}(p_1'p_2'J_p')\right]^{\mathcal{J}}|BCS\rangle \\
&= \hat{J}_n\hat{J}_p\hat{J}_n'\hat{J}_p' N(n_1n_2)N(n_1'n_2')N(p_1p_2)N(p_1'p_2')\bar{P}(n_1n_2J_n)\bar{P}(p_1p_2J_p) \\
\times\ & \bar{P}(n_1'n_2'J_n')\bar{P}(p_1'p_2'J_p')\sum_{J_1J_2}\hat{J}_1^2\hat{J}_2^2 \left\{\begin{array}{ccc} n_1 & n_2 & J_n \\ p_1 & p_2 & J_p \\ J_1 & J_2 & \mathcal{J}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{ccc} n_1' & n_2' & J_n' \\ p_1' & p_2' & J_p' \\ J_1 & J_2 & \mathcal{J}\end{array}\right\} \\
\times\ & \langle BCS|A(n_1p_1J_1)H_{pn}A^{\dagger}(n_1'p_1'J_1)|BCS\rangle\delta_{p_2p_2'}\delta_{n_2n_2'}, \qquad (147)
\end{aligned}$$

onde o operador

$$\bar{P}(p_1p_2J) = 1 + (-1)^{p_1-p_2+J}P(p_1 \leftrightarrow p_2), \qquad (148)$$

troca as partículas p_1 e p_2.

Finalmente, os elementos de matriz do Hamiltoniano nêutron-nêutron H_{nn} na mesma base é

$$\begin{aligned}
&\langle BCS|\left[\mathcal{A}^{\dagger}(n_1n_2J_n)\mathcal{A}^{\dagger}(p_1p_2J_p)\right]^{\mathcal{J}\dagger} H_{nn}\left[\mathcal{A}^{\dagger}(n_1'n_2'J_n')\mathcal{A}^{\dagger}(p_1'p_2'J_p')\right]^{\mathcal{J}}|BCS\rangle \\
=\ & \delta_{J_pJ_p'}\delta_{J_nJ_n'}\delta_{p_1p_1'}\delta_{p_2p_2'}\langle BCS|\mathcal{A}^{\dagger}(n_1n_2J_n)H_{nn}\mathcal{A}^{\dagger}(n_1'n_2'J_n)|BCS\rangle \\
=\ & \delta_{J_pJ_p'}\delta_{J_nJ_n'}\delta_{p_1p_1'}\delta_{p_2p_2'}N(n_1n_2)N(n_1'n_2')\,[\,(u_{n_1}u_{n_2}u_{n_1'}u_{n_2'}+v_{n_1}v_{n_2}v_{n_1'}v_{n_2'})G(n_1n_2n_1'n_2'J_n) \\
+\ & (u_{n_1}v_{n_2}u_{n_1'}v_{n_2'}+v_{n_1}u_{n_2}v_{n_1'}u_{n_2'})F(n_1n_2n_1'n_2'J_n) \\
-\ & (-1)^{n_1+n_2-J_{12}}(u_{n_1}v_{n_2}v_{n_1'}u_{n_2'}+v_{n_1}u_{n_2}u_{n_1'}v_{n_2'})F(n_2n_1n_1'n_2'J_n)\,]\,, \qquad (149)
\end{aligned}$$

e analogamente para o Hamiltoniano próton-próton H_{pp}.

Os denominadores de energia $\mathcal{D}^{2\nu^{\pm}}_{J_\alpha,\mathcal{J}_f}$, definidos por (45), são

$$\begin{aligned}
E^{\{\pm1\}}_{J_\alpha} - E^{\{0\}}_{0^+} &= \omega_{J_\alpha} \pm \lambda_p \mp \lambda_n, \\
E^{\{\pm2\}}_{\mathcal{J}_f} - E^{\{0\}}_{0^+} &= \omega_{\mathcal{J}_f} \pm 2\lambda_p \mp 2\lambda_n, \qquad (150)
\end{aligned}$$

onde λ_p e λ_n são os potencias químicos de prótons e nêutrons, respectivamente. Portando, para ambos decaimentos $2\beta^+$- e $2\beta^-$, são

$$\mathcal{D}^{2\nu^{\pm}}_{J_\alpha,\mathcal{J}_f} \equiv \mathcal{D}^{2\nu}_{J_\alpha,\mathcal{J}_f} = \omega_{J_\alpha} - \frac{\omega_{\mathcal{J}_f}}{2}. \qquad (151)$$

As energias mais baixas $E^{\{\pm2\}}_{0_f^+}$ são diretamente relacionadas com os valores Q de reação para o decaimento $2\beta^-$ ($Q_{2\beta^-}$) e para os valores Q da dupla captura de elétrons

(Q_{2e}), definidas como [15]

$$\begin{aligned} Q_{2\beta^-} &= \mathcal{M}(Z,A) - \mathcal{M}(Z+2,A), \\ Q_{2e} &= \mathcal{M}(Z,A) - \mathcal{M}(Z-2,A), \end{aligned} \tag{152}$$

onde os $\mathcal{M}$'s são as massas atômicas. Assim,

$$\begin{aligned} Q_{2\beta^-} &= E_{0^+}^{\{0\}} - E_{0_1^+}^{\{+2\}} = -\omega_{0_1^+} - 2(\lambda_p - \lambda_n), \\ Q_{2e} &= E_{0^+}^{\{0\}} - E_{0_1^+}^{\{-2\}} = -\omega_{0_1^+} + 2(\lambda_p - \lambda_n). \end{aligned} \tag{153}$$

Note que $Q_{2e} - Q_{2\beta^-} = 4(\lambda_p - \lambda_n)$, e $Q_{2e} + Q_{2\beta^-} = -2\omega_{0_1^+}$.

Para calcular as densidades de um-corpo (46) e (50), foi utilizado a Eq. (15.4) de (SUHONEN, 2007) obtendo

$$\begin{aligned} \left(c_p^\dagger c_{\bar{n}}\right)_J &\rightarrow u_n v_p A^\dagger(npJ), \\ \left(c_n^\dagger c_{\bar{p}}\right)_J &\rightarrow u_p v_n A^\dagger(pnJ), \end{aligned} \tag{154}$$

que a partir de (44) e (47) resultam imediatamente

$$\rho^\pm(pnJ_\alpha) = X_{pnJ_\alpha} \left\{ \begin{array}{c} u_n v_p \\ u_p v_n \end{array} \right\}, \tag{155}$$

e

$$\langle J_\alpha^+ || \mathcal{O}_J^\pm || 0_i^+ \rangle = \sum_{pn} X_{pnJ_\alpha} O_J^\pm(pn), \tag{156}$$

com

$$O_J^\pm(pn) = O_J(pn) \left\{ \begin{array}{c} u_n v_p \\ u_p v_n \end{array} \right\}. \tag{157}$$

[15] Os valores Q de reação para os decaimentos $2\beta^+$ e $\beta^+ e$ são:

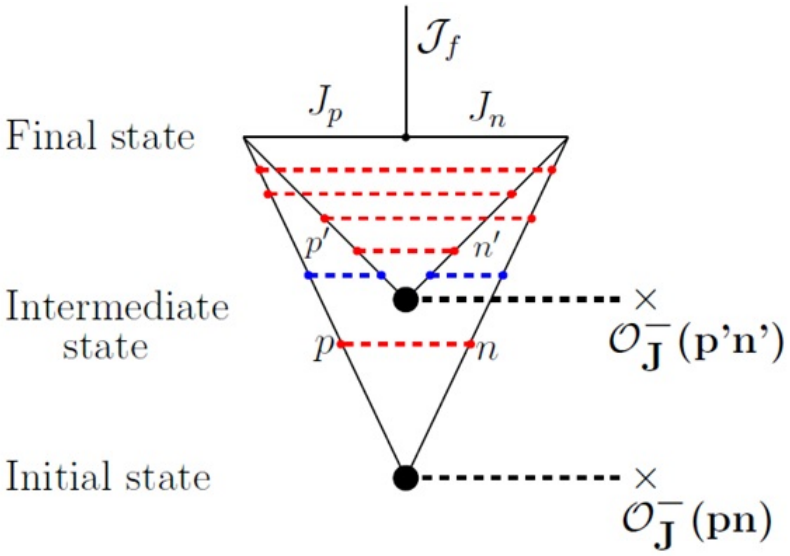
$$\begin{aligned} Q_{2\beta^+} &= \mathcal{M}(Z,A) - \mathcal{M}(Z-2,A) - 4m_e, \\ Q_{\beta^+ e} &= \mathcal{M}(Z,A) - \mathcal{M}(Z-2,A) - 2m_e. \end{aligned}$$

A derivação de $\langle \mathcal{J}_f^+ || \mathcal{O}_J^\pm || J_\alpha^+ \rangle$ é um processo mais desenvolvido e se obtém

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}_f^+ || \mathcal{O}_J^\pm || J_\alpha^+ \rangle &= \hat{J}\hat{\mathcal{J}}_f \sum_{pnp'n'J_pJ_n} (-)^{J_p+J_n} \hat{J}_p \hat{J}_n N(nn') N(pp') \\ &\times \mathcal{X}_{\mathrm{pp'J_p,nn'J_n};\mathcal{J}_f^+} \bar{P}(nn'J_n)\bar{P}(pp'J_p) \begin{Bmatrix} p & p' & J_p \\ n & n' & J_n \\ J & J & \mathcal{J} \end{Bmatrix} X_{p'n'J_\alpha} O_J^\pm(pn). \quad (158)\end{aligned}$$

Assim as densidades $\rho^\pm(pn; J_\alpha^\pi, \mathcal{J}_f^+)$ resultam de (49) e (158).

Figura 9 - Representação diagramática do modelo (pn,2p2n)-QTDA quando aplicado ao DBD.



Legenda: O ponto no estado inicial e o segundo ponto no estado intermediário indica o decaimento beta simples em cada ponto Os NMEs do decaimento $2\beta^+$ são representados da mesma maneira depois de fazer a substituição $\mathcal{O}_J^- \leftrightarrow \mathcal{O}_J^+$. As interações nucleares (nn + pp) entre prótons e nêutrons são indicadas pelas linhas tracejadas vermelha e azul respectivamente. Os cinco vertices desse diagrama correspondem aos cinco dos seis momentos angulares acoplados no simbolo 9j na Eq. (157). O sexto acoplamento (JJ)J correspondem às três linhas não conectadas.

Fonte: FERREIRA et al., 2020, p.2.

Fazendo uso das condições de ortogonalidade e completude de ambas as bases $|J_\alpha\rangle$ e $A^\dagger(pnJ)|BCS\rangle$ em (141), a relação (55) pode ser expressa em uma forma mais compacta.

Ou seja, como

$$B^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}_f} = \hat{\mathcal{J}}^2 \left| \sum_{pp'nn'J_pJ_n} (-)^{J_p+J_n} \hat{J}_p \hat{J}_n N(nn') N(pp') \; \mathcal{X}_{\mathrm{pp'J_p,nn'J_n};\mathcal{J}_f^+} \bar{P}(nn'J_n) \bar{P}(pp'J_p) \right.$$
$$\left. \times \left\{ \begin{array}{ccc} p & p' & J_p \\ n & n' & J_n \\ J & J & \mathcal{J} \end{array} \right\} O^{\mp}_J(p'n') O^{\mp}_J(pn) \right|^2 , \tag{159}$$

Dessa maneira, a amplitude de transição acaba sendo independente dos estados intermediários.

É importante enfatizar que os operadores de permutação nas duas últimas equações atuam apenas sobre o lado direito. O significado físico dessas permutações podem ser inferidos a partir do diagrama na Figura 9, onde estão representados graficamente os elementos de matriz de uma transição DCE $\sum_\alpha \langle \mathcal{J}_f^+ || \mathcal{O}_J^- || J_\alpha^+ \rangle \langle J_\alpha^+ || \mathcal{O}_J^- || 0_i^+ \rangle$. Essa quantidade é usada nos cálculos dos NME e das amplitudes de transição DCE (55), mas a Eq. (159) é aplicável apenas neste último caso.

As energias de excitação no núcleo final são calculadas a partir

$$\mathcal{E}_f = E^{\{+2\}}_{0_f^+} - E^{\{+2\}}_{0_1^+}. \tag{160}$$

Note-se que, assim como no modelo pn-QRPA, as energias de excitação nos núcleos $(Z, A\pm 1)$ são iguais, no modelo atual as energias de excitação nos $(Z, A \pm 2)$ núcleos são os mesmos. Finalmente, os centroídes de energias das amplitudes de transição DCE são definidas como

$$\bar{E}^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}} = \frac{\sum_f \mathcal{E}_{\mathcal{J}_f^+} B^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}_f}}{S^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}}}. \tag{161}$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS: PN-QRPA

No Capítulo 3, foi apresentado o modelo de *one*-QRPA (Método IV), que foi implementado de forma inédita ao cálculo dos NMEs dos 2ν-DBD e 0ν-DBD (FERREIRA et al., 2017). Assim, nesse capítulo serão exibidos os resultados numéricos para os NMEs para ambos modos de decaimentos (2ν-DBD e 0ν-DBD) obtidos com os modelos descritos pelos Métodos II e IV. Uma vez que, para realizar os cálculos com o Método IV não há necessidade de utilizar os NMEs experimentais para ajustar os parâmetros do canal *pp*, como é usualmente feito com o Método II, pois esses são ajustados apoiados em argumentos de de restauração parcial de simetria $SU(4)$, será apresentado as principais características junto com uma receita para implementar a PSU4SR.

5.1 Características do formalismo One-QRPA com PSU4SR

As principais características desse formalismo são:

1. A equação de pn-QRPA é resolvida apenas uma vez, para o núcleo intermediário $(N-1, Z+1)$, enquanto geralmente é resolvido duas equações de pn-QRPA, uma para o núcleo pai (N, Z) e outra para o núcleo filho $(N-2, Z+2)$, seguido de algum tipo de procedimento de média. Essa é uma diferença marcante, pois como será mostrado a seguir, esse método produz resultados significamente menores para os momentos nucleares do $0\nu 2\beta^-$ do que o Método II.

2. A interação residual entre os núcleons é governada por uma força do tipo-δ (em unidades de MeV $\cdot$ fm^3)

$$V = -4\pi(v^s P_s + v^t P_t)\delta(r), \tag{162}$$

onde os parâmetros spin-singlete e spin-triplete do canal partícula-partícula, *i.e.* v^s_{pp} e v^t_{pp} correspondem, respctivamante, a $g^{T=1}_{pp}$ e $g^{T=0}_{pp}$ (ŠIMKOVIC et al., 2013).

3. O parâmetro v^s_{pp} é fixado da mesma maneira que $g^{T=1}_{pp}$. Ou seja, é necessário que a amplitude vetorial-β^+ (S^-_F, definida em (53) com $J = 0^+$) seja mínima, o que é alcançado quando o raio $s = v^s_{pp}/\overline{v}^s_{pair}$, se iguala a um ($s_{sym} = 1$), onde $\overline{v}^s_{pair} = (v^s_{pair}(\mathrm{p}) + v^s_{pair}(\mathrm{n}))/2$. Esse é um sinal forte que a simetria de isospin é restaurada dentro do modelo de pn-QRPA, conduzindo

$$S^-_F \cong 0, M^{2\nu}_F \cong 0 \text{ e } M^{0\nu}_V(J^\pi = 0^+) \cong 0, \tag{163}$$

além da amplitude vetorial-β^-, S_F^-, se concentrar no Estado Análogo Isobárico (IAS, ver a Figura 10). Para o decaimento $0\nu2\beta$, $M_V^{0\nu}(J^\pi = 0^+)$ representa a contribuição dos estados intermediários $J^\pi = 0^+$ para os elementos de matriz $M_V^{0\nu}$.

4. Para fixar o parâmetro v_{pp}^t, foi adotado o mesmo procedimento utilizado no caso v_{pp}^s, *i.e.* através do parâmetro que torna a amplitude de Gamow-Teller-β^+ (S_{GT}^- definida em (53) com $J = 1^+$) torne-se mínima, indicando a restauração parcial de simetria SU(4), como é mostrado na Figura (10). Com o correspondente raio *pp* $t = v_{pp}^t/\overline{v}_{pair}^s$, resulta em um $t_{sym} \neq 1$, com

$$S_{GT}^- \neq 0, M_{GT}^{2\nu} \neq 0, 0 M_A^{0\nu}(J^\pi = 1^+) \neq 0, \tag{164}$$

e não toda amplitude-β^- de GT é concentrada na ressonância de GT (GTR); $M_A^{0\nu}(J^\pi = 1^+)$ possui significado semelhante ao $M_V^{0\nu}(J^\pi = 0^+)$ na Eq. (163).

5. A principal diferença com os outros estudos é que os momentos experimentais 2ν-DBD, não são usados para calibrar o parâmetro da parte isoescalar da interação *pp* (t). Dessa maneira, o modelo *One*-QRPA acaba por ser preditivo com relação ao $M^{2\nu}$. Na verdade, na Ref. (ŠIMKOVIC et al., 2013), e na maioria dos cálculos utilizando pn-QRPA, as condições impostas sobre $g_{pp}^{T=0}$ é para reproduzir o valor experimental $\left|\mathcal{M}_{exp}^{2\nu}\right|$.

6. A restauração das simetria de isospin e $SU(4)$, quebradas nas aproximações de campo médio, são manifestadas não apenas no canal *pp* mas também no canal *ph*. Desta forma, os parâmetros *ph*, v_s^{PH} e v_t^{PH}, foram monitorados a partir das energias experimentais do IAS e da GTR (em unidades de MeV) (NAKAYAMA; GALEAO; KRMPOTIĆ, 1982):

$$E_{GTR} - E_{IAS} = 26A^{-1/3} - 18.5(N - Z)/A, \tag{165}$$

onde o primeiro termo do lado direito vem da quebra de simetria $SU(4)$ causada pelo acoplamento spin-órbita, enquanto o segundo do termo lado direito pode ser interpretado como o efeito da restauração de simetria induzida pela interação residual (NAKAYAMA; GALEAO; KRMPOTIĆ, 1982; SUZUKI, 1982), que desloca o GTR para o IAS com o aumento de $N-Z$ (NAKAYAMA; GALEAO; KRMPOTIĆ, 1982; SUZUKI, 1982).

Em resumo, podemos dizer que o modelo de *One*-QRPA, não possui parâmetros livres.

5.2 **Resultados Numéricos com One-QRPA**

Para obter os resultados numéricos dos NMEs, as amplitudes de transição de Fermi e Gamow-Teller, energias do IAS e GTR, são necessários fixar os parâmetros presentes no modelo. Esse modelo contém seis parâmetros: duas constantes de emparelhamento, uma para próton v_s^{pairZ} e outra para nêutron v_s^{pairN}, duas constantes de acoplamento do canal pp – uma para o canal singlete s e outra para o canal triplete t, e duas constantes de acoplamento ph – uma para o canal singlete v_s^{ph} e outra para o canal triplete v_t^{ph}.

Para os núcleos ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr, ^{100}Mo, ^{128}Te,^{130}Te e ^{150}Nd foram utilizados um espaço de 11 níveis, incluindo todos os orbitais de partícula única das camadas $3\hbar\omega$ $4\hbar\omega$ mais os níveis $1h_{9/2}$ e $1h_{11/2}$ da camada $5\hbar\omega$. Já para o ^{48}Ca, foi utilizado um espaço de 7 níveis de partícula única. Os espectros de energia desses níveis são obtidos através do procedimento de Conci (CONCI; KLEMT; SPETH, 1984), que consiste em utilizar as energias experimentais junto com as energias obtidas com o potencial combinado de Wood-Saxon e BCS. Essas energias estão dispostas nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 - Energias de partícula única em unidades de MeV, para os núcleos ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr e ^{100}Mo.

Camada	^{76}Ge		^{82}Se		^{96}Zr, ^{100}Mo	
	spe(Z)	spe(N)	spe(Z)	spe(N)	spe(Z)	spe(N)
$1h_{9/2}$	13,446	10,320	12,560	8,560	9,460	4,020
$1h_{11/2}$	4,456	1,330	1,600	-0,100	-0,250	-4,000
$1g_{7/2}$	1,508	-0,310	1,190	-1,710	-1,290	-6,100
$2d_{3/2}$	2,226	-0,860	1,680	-1,870	0,270	-5,050
$3s_{1/2}$	1,382	-2,340	0,270	-3,190	-0,640	-5,910
$2d_{5/2}$	-0,444	-3,570	-1,930	-4,620	-2,990	-7,720
$1g_{9/2}$	-5,692	-7,510	-7,370	-8,750	-8,520	-12,190
$2p_{1/2}$	-9,220	-10,110	-8,650	-11,230	-9,550	-14,380
$1f_{5/2}$	-10,126	-10,970	-10,130	-12,320	-11,540	-15,980
$2p_{3/2}$	-11,090	-11,980	-10,800	-13,000	-11,380	-15,930
$1f_{7/2}$	-15,306	-16,150	-15,940	-17,170	-16,340	-20,020

Legenda: Energias de partícula única em unidades de MeV, para os núcleos ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr e ^{100}Mo.

Fonte: FERREIRA, 2016, f. 90.

Os parâmetros de emparelhamento v_s^{pairZ} e v_s^{pairN} localizados na Tabela 3, são ajustados para reproduzir o gap experimental Δ^N para nêutrons e Δ^Z para prótons, como descrito em (SAMANA; KRMPOTIĆ; BERTULANI, 2010), resolvendo as equações de BCS (84) de uma maneira autoconsistente. Os gaps experimentais, de acordo

Tabela 2 - Energias de partícula única em unidades de MeV, para os núcleos ^{128}Te, ^{130}Te e ^{150}Nd.

Camada	^{128}Te		^{130}Te		Camada	^{150}Nd	
	spe(Z)	spe(N)	spe(Z)	spe(N)		spe(Z)	spe(N)
$2f_{5/2}$	5,29	-0,29	4,75	-0,42	$1i_{13/2}$	4,60	-1,42
$3p_{1/2}$	5,03	-0,96	4,59	-1,04	$3p_{1/2}$	6,97	-2,04
$1h_{9/2}$	3,47	-1,11	2,79	-1,31	$2f_{5/2}$	5,59	-2,33
$3p_{3/2}$	3,65	-1,88	3,18	-1,96	$3p_{3/2}$	6,31	-2,62
$2f_{7/2}$	1,16	-3,35	0,61	-3,45	$2f_{7/2}$	3,49	-4,32
$1h_{11/2}$	-4,84	-7,82	-5,44	-7,92	$1h_{9/2}$	1,52	-5,11
$2d_{3/2}$	-3,83	-8,51	-4,41	-8,61	$1h_{11/2}$	-5,76	-11,99
$3s_{1/2}$	-4,17	-8,89	-4,72	-8,97	$3s_{1/2}$	-4,64	-12,08
$1g_{7/2}$	-6,44	-10,44	-7,08	-10,57	$2d_{3/2}$	-5,55	-12,69
$2d_{5/2}$	-6,71	-10,81	-7,26	-10,88	$2d_{5/2}$	-7,26	-14,54
$1g_{9/2}$	-12,37	-15,27	-12,96	-15,32	$1g_{7/2}$	-10,52	-17,65
					$1g_{9/2}$	-16,04	-22,82

Legenda: Energias de partícula única em unidades de MeV, para os núcleos ^{128}Te, ^{130}Te e ^{150}Nd.

Fonte: FERREIRA, 2016, f. 90.

com (BOHR; MOTTELSON, 1998, Eq. (2.96)), são:

$$\Delta^N = -\frac{1}{2}\{\mathcal{B}(Z,N-1) - 2\mathcal{B}(Z,N) + \mathcal{B}(Z,N+1)\}$$
$$\Delta^Z = -\frac{1}{2}\{\mathcal{B}(Z-1,N) - 2\mathcal{B}(Z,N) + \mathcal{B}(Z+1,N)\}$$

onde $\mathcal{B}(N,Z)$ é a energia de ligação do núcleo par-par (N,Z).

Para configurar as constantes do canal ph, foram usadas as energias do Estado Análogo Isobárico (IAS) e a Ressonância de Gamow-Teller (GTR) (NAKAYAMA; GALEAO; KRMPOTIĆ, 1982), resultando em $v_s^{ph} = 55$ e $v_t^{ph} = 92$ em unidades de MeV·fm^3. Esses valores são adotados em todos os núcleos, com exceção do ^{48}Ca que foram utilizados $v_s^{ph} = 27$ e $v_t^{ph} = 64$, em unidades MeV·fm^3. Dentro do canal pp, os parâmetros v_s^{pp} e v_t^{pp}, ou mais precisamente, os raios $s = v_s^{pp}/v_s^{pair}$ and $t = v_t^{pp}/v_t^{pair}$, com $v_s^{pair} = (v_s^{pairN} + v_s^{pairZ})/2$, são determinados de modo que as amplitudes vetoriais-β^+, S_F^- e S_{GT}^-, sejam mínimas.

A Figura 10, mostra o comportamento dos observáveis vetoriais em função do parâmetros s (lado esquerdo), e os observáveis axiais-vetoriais em função do parâmetro t (lado direito) para os núcleos ^{48}Ca, ^{76}Ge, ^{82}Se e ^{96}Zr. Seus comportamentos são similares, o que nos leva propor uma receita para o conjunto de amplitudes isoescalares. Pode-se vê que $s_{sym} = 1,0$, enquanto os valores de t_{sym} (indicados por pontos sobre o eixo t são

Tabela 3 - Valores das constantes de emparelhamento e potenciais químicos

Núcleo	v_s^{pairZ}	v_s^{pairN}	λ_n	λ_p
^{48}Ca	28,15	38,05	1,021	3,507
^{76}Ge	22,05	25,62	-8,020	-10,710
^{82}Se	24,06	23,00	-8,007	-10,049
^{96}Zr	20,10	25,50	-7,451	-9,322
^{100}Mo	21,65	25,15	-7,054	-8,773
^{128}Te	23,44	29,49	-7,653	-7,797
^{130}Te	23,77	28,72	-7,447	-8,322
^{150}Nd	22,70	30,78	-5,083	-7,769

Legenda: Valores das constantes de emparelhamento dos prótons e nêutrons ajustadas para os níveis de Fermi de prótons e nêutrons reproduzirem os gaps experimentais, mais seus respectivos potenciais químicos.

Fonte: O autor, 2020.

maiores que 1, e variam com o número de massa A. O mesmo acontece com os outros núcleos (^{100}Mo, ^{128}Te, ^{130}Te e ^{150}Nd) e os valores de s_{sym} e t_{sym} estão listados na Tabela 4. Os valores exibidos na Tabela 4, estão muito próximos daqueles obtidos na (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994, Tabela 4), onde o Método III foi empregado para calcular os NMEs. A similaridade acima é a principal razão para associar a restauração de simetria $SU(4)$ (PSU4SR) com restauração de simetria de isospin no 2ν-DBD.

Tabela 4 - Energias do IAS e da GTR, experimentais e teóricas, para o núcleo pai da transição.

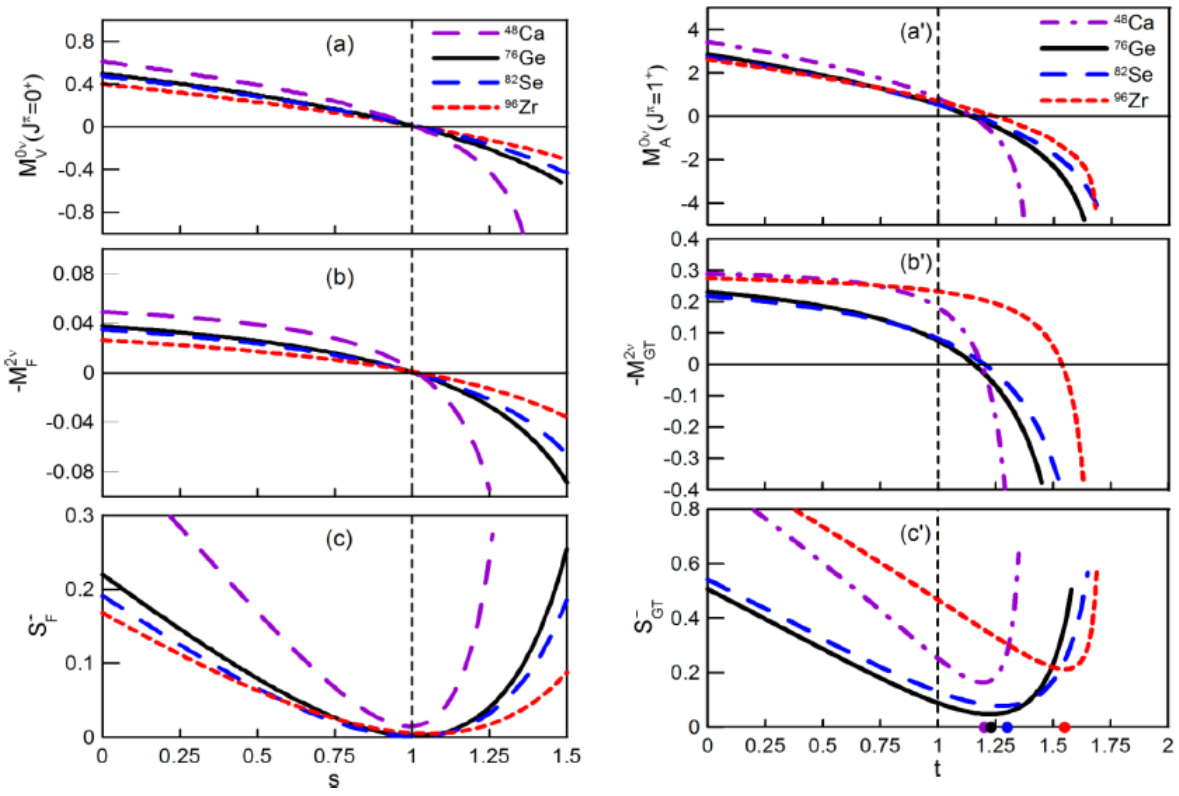
$^A Z$	s_{sym}	t_{sym}	E_{IAS}^{cal}	E_{IAS}^{exp}	E_{GTR}^{cal}	E_{GTR}^{exp}
^{48}Ca	1,00	1,20	8,70	7,36	13,66	11,43
^{76}Ge	1,00	1,23	11,47	10,21	13,92	13,42
^{82}Se	1,00	1,30	12,25	10,59	15,59	13,41
^{96}Zr	1,00	1,55	14,18	11,85	16,10	14,45
^{100}Mo	1,00	1,49	13,70	12,29	15,83	14,93
^{128}Te	1,00	1,41	13,74	14,06	14,36	15,75
^{130}Te	1,00	1,45	14,71	13,98	14,95	15,42
^{150}Nd	1,00	1,29	20,21	15,42	18,46	16,61

Legenda: Os valores dos parâmetros s_{sym} e t_{sym}, e as energias (em unidades de MeV), experimentais e teóricas, do IAS e GTR para o núcleo pai.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 9.

Na literatura, a amplitude isoescalar é geralmente ajustada através dos valores experimentais das meias-vidas do decaimento 2νDBD, afim de extrair o valor absoluto

Figura 10 - Observáveis vetoriais (Fermi) em função do raio s e observáveis axial-vetoriais (Gamow-Teller) em função do raio t.



Legenda: (a) & (a'): contém os momentos nucleares para 0ν-DBD normalizados por g_A^2; (b) & (b'): contém os momentos nucleares para 2ν-DBD, dados em unidades naturais; e (c) & (c'): ilustram as amplitudes de transição do decaimento β^+. Onde o raio $s = v^s_{pp}/\overline{v}^s_{pair}$ sobre o lado esquerdo e $t = v^t_{pp}/\overline{v}^s_{pair}$ sobre o lado direito. Os valores do t_{sym} são indicados através de pontos sobre o eixo t.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 8.

do momento nuclear $M^{2\nu}$, mas não seu sinal. Ao fazê-lo, dois valores diferentes de t são obtidos: um ($t = t_\uparrow$) quando $M^{2\nu}$ é assumido positivo, e um outro ($t = t_\downarrow$) quando $M^{2\nu}$ é assumido negativo ($M^{2\nu} \equiv M^{2\nu}_\downarrow < 0$). [16] Além desta desvantagem é claro que, nesse caso, o modelo não é mais preditivo. Os cálculos realizados por Krmpotić em (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994) com o método III, encontra que em todos os casos $t_{sym} \approx t_\uparrow$.

Também na Tabela 4, as energias teóricas de F e as ressonâncias de GT são exibidas. Elas são definidas, respectivamente, como

$$E_{IAS} = \frac{\sum_{pn\alpha} |\rho'^{-}(pn0^+_\alpha)|^2 \Omega'_{0^+_\alpha}}{\sum_{pn\alpha} |\rho'^{-}(pn0^+_\alpha)|^2}, \tag{166}$$

[16] Em nossos cálculos numéricos $M^{2\nu}$ é negativo para $s = t = 0$, como é mostrado nas figuras (10) e (11). Olhar também a Eq. (129).

Tabela 5 - Momentos nucleares do 2ν-DBD, dentro das aproximações de BCS e QRPA comparados com os valores experimentais.

	BCS			QRPA			
^{A}Z	$M_F^{2\nu}$	$M_{GT}^{2\nu}$	$M^{2\nu}$	$M_F^{2\nu}$	$M_{GT}^{2\nu}$	$\lvert M^{2\nu}\rvert$	$\lvert M_{exp}^{2\nu}\rvert$
^{48}Ca	-0,148	-0,545	-0,693	-0,004	0,022	$0,018^{+0,110}_{-0,035}$	$0,038 \pm 0,003$
^{76}Ge	-0,193	-0,693	-0,886	-0,000	0,051	$0,051^{+0,035}_{-0,030}$	$0,113 \pm 0,006$
^{82}Se	-0,217	-0,686	-0,903	-0,001	0,062	$0,062^{+0,033}_{-0,029}$	$0,083 \pm 0,004$
^{96}Zr	-0,107	-0,878	-0,985	-0,001	0,024	$0,023^{+0,157}_{-0,036}$	$0,080 \pm 0,004$
^{100}Mo	-0,126	-1,213	-1,339	-0,001	0,035	$0,034^{+0,182}_{-0,115}$	$0,185 \pm 0,005$
^{128}Te	-0,296	-1,174	-1,470	-0,003	0,086	$0,083^{+0,029}_{-0,026}$	$0,046 \pm 0,006$
^{130}Te	-0,263	-1,025	-1,288	-0,002	0,083	$0,081^{+0,022}_{-0,020}$	$0,031 \pm 0,004$
^{150}Nd	-0,057	-0,887	-0,944	-0,001	0,067	$0,067^{+0,011}_{-0,011}$	$0,058 \pm 0,004$

Legenda: Elementos de matriz nuclear do decaimento $2\nu 2\beta^-$ calculados dentro das aproximações de BCS e pn-QRPA comparadas coms os resultados experimentais $|M_{exp}^{2\nu}|$ recomendados por Barabash (BARABASH, 2015). Todas as quantidades são dadas em unidades naturais. Como explicado no texto os erros teóricos superiores e inferiores sobre o $M^{2\nu}$ foram calculados com $t = 1,03 \times t_{sym}$ e $t = 0,97 \times t_{sym}$, respectivamente, onde os valores para os t_{sym} encontram-se listados na Tabela 1.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 10.

e

$$E_{GTR} = \left. \frac{\sum_{pn\alpha} |\rho'^{-}(pn1^{+}_{\alpha})|^2 \Omega'_{1^{+}_{\alpha}}}{\sum_{pn\alpha} |\rho'^{-}(pn1^{+}_{\alpha})|^2} \right|_{\Omega'_{1^{+}_{\alpha}} > 10MeV}, \tag{167}$$

onde a restrição sobre as energias de GT foi imposta, pois uma amplitude de GT significativa é sempre observada na região de baixas energias, longe da localização da GTR. Isso é particulamente verdade no caso do ^{96}Zr, com que a energia calculada da GTR é relativamente baixa. Resaltando que, para $s = s_{sym}$ e $t = t_{sym}$, as amplitudes totais (β^+) de S_F^- e S_{GT}^- não são apenas mínimas, mas as concentrações de intensidades de transição (β^-) S_F^+ e S_{GT}^+ em estados ressonantes são também máximas.

As corresposndentes energias experimentais do IAS são calculadas com

$$E_{IAS}^{Exp} = \mathcal{E}_{Coul}(Z+1, A) - \mathcal{E}_{Coul}(Z, A), \tag{168}$$

onde (ver Eq. (69) na Ref, (BOHR; MOTTELSON, 1998))

$$\mathcal{E}_{Coul}(Z, A) = 0.70 \frac{Z^2}{A^{1/3}} [1 - 0.76 Z^{-2/3}] \text{MeV}. \tag{169}$$

A diferença de energia $E_{GTR}^{Exp} - E_{IAS}^{Exp}$ é estimada a partir da expressão (165). Um acordo

relativamente bom entre os cálculos e as estimativas experimentais indicam que: i) a escolha das constantes de acoplamento do canal *ph* é razóavel, e ii) na aproximação de fechamento para o decaimento 0ν-DBD é apropriado subistituir as energias intermediárias $\omega_{J^+_\alpha}$ na Eq. (34) por um valor médio $\overline{\omega}_{J^+_\alpha} = 12$ MeV. Deve-se dizer, no entanto, que as energias calculadas E^{cal}_{IAS} apresentam uma diferença apreciável quando comparadas com as energias experimentais E^{exp}_{IAS}, no caso dos núcleos ^{48}Ca e ^{150}Nd. A diferença entre as energias E^{cal}_{GTR} e E^{exp}_{GTR} no caso do ^{96}Zr também é bastante significativa. Infelizmente não foi encontrado nenhuma explicação satisfatória para explicar estas discrepâncias.

Para apreciar o efeito da interação residual, e consequentemente da restauração parcial de simetria SU(4), são apresentado na Tabela 5 os momentos nucleares para o 2ν-DBD, dentro das aproximações de campo médio de BCS e pn-QRPA (interação residual), além de comparar com os momentos experimentais recomendados por Barabash (BARABASH, 2015). Os valores calculados e experimentais estão em unidades naturais, junto com os chamados momentos efetivos $|M^{2\nu}_{exp}| = g^2_A|M^{2\nu}|$ definidos em (BARABASH, 2015). Para a constante de acoplamento axial-vetorial foi adotado o valor de $g_A = 1.27$ (BERINGER et al., 2012).

Mesmo que o protocolo apresentado acima para definir os parâmetros no canal *pp* torna a teoria preditiva, isso não significa necessariamente que as previsões teóricas devem corresponder aos dados experimentais. Ainda assim, não é possível suprimir completamente a conhecida sensibilidade de $M^{2\nu}$ no parâmetro t na vizinhança do t_{sym} (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994; KRMPOTIĆ et al., 1997). Isso siginifica que pequenas variações do t produzem grandes variações em $M^{2\nu}$, sendo particulamente pronunciada para o ^{48}Ca e ^{100}Mo. Aqui deve se ter em mente que ^{48}Ca é um núcleo de dupla camada fechada e que ^{100}Mo tem subcamada fechada $Z = 40$. Portanto, o modelo de QRPA não é o método completamente apropriado para esses dois casos.

O comportamento acima pode ser visto claramente apelando para o SMM (Single Mode Model) discutido no apêndice A, onde t_{sym} é bem definido ($t_{sym} \equiv t_0$) e t_0 depende do estado intermediário dominante $|pn; 1^+\rangle$. Isso, entretanto, não acontece nos cálculos numéricos completos onde t_{sym} depende de maneira significamente do campo médio, através das constantes de emparelhamento $\overline{v}^{pair}_s$, e das energias de partícula única (spe). Essas quantidades são determinadas de uma maneira fenomenológica e portanto, não são bem estabelecidas [17].

Para as incertezas teóricas sobre o $M^{2\nu}$ na Tabela 5 foi assumido uma margem de $\pm 3\%$ sobre o t_{sym}. Assim foram calculados os $M^{2\nu}$ com $t = 1,03 \times t_{sym}$ e com $t = 0,97 \times t_{sym}$, onde os t_{sym} são aqueles listados na Tabela 4. Acontece porém que o valor do $|M^{2\nu}_{exp}|$ nos núcleos ^{76}Ge, ^{128}Te e ^{130}Te estão fora dessa margem de $\pm 3\%$. Mesmo

[17] Apenas para ^{150}Nd foi utilizado o spe calculado teoricamente dentro do modelo (DD-ME2) por Nils Paar *et al.* (PAAR et al., 2003).

que a concordância entre teoria e dados não seja tão boa quanto se poderia desejar, é interessante notar que os resultados do BCS diferem a partir $|M^{2\nu}_{exp}|$ de maneira similar às diferenças dadas pelos resultados do QRPA. De fato, enquanto os $|M^{2\nu}_{exp}|$ são menores por um fator que varia de $7,2$ no ^{100}Mo para 42 no ^{130}Te, os resultados de QRPA são menores por um fator que varia de $14,0$ no ^{150}Nd para $42,8$ no ^{96}Zr. As grandes diferenças entre os momentos obtidos com BCS e QRPA vem da PSU4SR, que é crucial para fazer a teoria consistente com os dados experimentais.

Vale resaltar que, enquanto a aproximação de BCS para os momentos de Fermi ($M^{2\nu}_F$) contribuem significativamente para os momentos totais $M^{2\nu}$, já na aproximação de QRPA eles podem ser negligenciados para todos os fins práticos. Além disso, dado que não há parâmetros livres no modelo de *One*-QRPA (Método IV), o acordo entre os resultados calculados e os experimentais, presentes nas duas últimas colunas da Tabela 5, podem ser considerados bastante satisfatório.

É importante lembrar que o formalismo apresentado no Capítulo 2 para o 0ν-DBD, contém quatro contribuições para os momentos nucleares: $M^{0\nu}_V$, $M^{0\nu}_A$, $M^{0\nu}_P$ e $M^{0\nu}_M$, sendo que não foi retirado a parte de Gamow-Teller da contribuição tensorial e nem foi dividido a parte pseudoscalar $M^{0\nu}_P$ em dois pedaços PP e AP, como feito em (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015). Assim para realizar uma comparação entre os resultados obtidos com o formalismo apresentado aqui com os presentes em (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015), deve-se seguir a seguinte correspondência:

$$\begin{aligned}
M^{0\nu}_V &\rightarrow M^{VV}_F, \\
M^{0\nu}_A &\rightarrow M^{AA}_{GT}, \\
M^{0\nu}_M &\rightarrow M^{MM}_{GT} + M^{MM}_T, \\
M^{0\nu}_P &\rightarrow M^{PP}_{GT} + M^{PP}_T + M^{AP}_{GT} + M^{AP}_T.
\end{aligned} \tag{170}$$

Os momentos rotulados como GT e T sobre o lado direito são respectivamente as partes de $m = 0$ e $m = 2$ dos momentos $M^{0\nu}_M$ e M_P na Eq. (33). Essa expressão também nos permite uma fácil visualização do significado dos momentos rotulados como AP e PP.

Os valores obtidos para as quatro contribuições dos momentos nucleares do 0ν-DBD e suas somas $M^{0\nu}$, dentro das duas aproximações BCS e pn-QRPA, são mostrados na Tabela 6. Em ambos os casos, os efeitos das correlações FNS e SRC são incluídos, e as somas sobre J^π_α presentes na Eq. (33) vão de $J = 0$ até $J = 10$ para ambas as paridades. Os resultados numéricos estão normalizados por g^2_A para comparar com outros cálculos. Alguns resultados adicionais para os momentos nucleares 0ν-DBD para o núcleo ^{76}Ge foram mostrados também na Tabela 6, tais como: i) ^{76}Ge *: sem o efeito da SRC, ii) ^{76}Ge **: sem os efeitos das FNS e SRC, e iii) ^{76}Ge ***: resultados obtidos por Hyvärinen e Suhonen (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) com $g_A = 1.26$, e relacionados com os resultados apresentados aqui através da correspondência apresentada em (170).

Tabela 6 - Os momentos nucleares para o decaimento $0\nu2\beta^-$, calculados dentros das aproximações de BCS e QRPA.

	BCS					QRPA				
^AZ	$M_V^{0\nu}$	$M_A^{0\nu}$	$M_P^{0\nu}$	$M_M^{0\nu}$	$M^{0\nu}$	$M_V^{0\nu}$	$M_A^{0\nu}$	$M_P^{0\nu}$	$M_M^{0\nu}$	$M^{0\nu}$
^{48}Ca	1,91	9,10	-1,54	0,49	9,96	0,58	2,57	-0,76	0,33	$2,72^{-0,40}_{+0,32}$
^{76}Ge	2,52	12,35	-2,15	0,71	13,42	0,64	3,02	-0,86	0,40	$3,19^{-0,24}_{+0,46}$
^{82}Se	2,61	12,58	-2,21	0,72	13,70	0,65	2,76	-0,84	0,39	$2,96^{-0,23}_{+0,22}$
^{96}Zr	2,43	12,70	-2,15	0,71	13,70	0,70	1,89	-0,74	0,38	$2,22^{-0,42}_{+0,35}$
^{100}Mo	2,85	15,17	-2,51	0,84	16,35	0,82	2,48	-0,90	0,45	$2,85^{-0,43}_{+0,42}$
^{128}Te	2,78	13,55	-2,13	0,66	14,87	0,84	3,31	-0,97	0,41	$3,59^{-0,19}_{+0,19}$
^{130}Te	2,48	12,12	-1,91	0,60	13,29	0,75	2,81	-0,84	0,36	$3,07^{-0,16}_{+0,16}$
^{150}Nd	2,02	10,94	-1,75	0,57	11,77	0,77	3,95	-0,93	0,37	$4,16^{-0,12}_{+0,11}$
^{76}Ge*	2,54	12,54	-2,21	0,71	13,57	0,65	3,14	-0,90	0,40	3,29
^{76}Ge**	2,90	13,72	-2,55	1,08	15,14	0,85	3,83	-1,11	0,65	4,22
^{76}Ge***						1,74	5,48	-1,60	0,29	5,26

Legenda: Os NMEs para o modo $0\nu2\beta$, $M_X^{0\nu}$, bem como os momentos totais $M^{0\nu} = \sum_X M_X^{0\nu}$ (normalizdos para g_A^2, com $g_A = 1,27$), foram calculados dentro das aproximações de BCS e QRPA. Em ambos os casos as correlações FNS e SRC foram incluídos. Os limites teóricos superiores e inferiores para o $M^{0\nu}$, foram calculados com $t = 1,03 \times t_{sym}$ e $t = 0,97 \times t_{sym}$, respectivamente, utilizando os valores do t_{sym} presentes na Tabela 4. Na parte inferior da tabela, são mostrados os resultados para o ^{76}Ge: (i) sem o efeito das correlações SRC incluídos, na linha que rotulamos de ^{76}Ge*; (ii) sem o efeito de nenhuma das correlações FNS e SRC, na linha que rotulamos de ^{76}Ge **; e (iii) ^{76}Ge*** são os momentos obtidos na Ref. (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) e derivados a partir das relações (170).

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 10.

Os momentos $M^{0\nu}$ com o modelo de pn-QRPA, também são sensitivos ao parâmetro t na vinzinhaça do t_{sym}, mas não tanto quanto os momentos $M^{2\nu}$. As incertezas teóricas com a pn-QRPA também são pronunciadas da mesma maneira que $M^{2\nu}$. Elas veem basicamente a partir das contribuições $M_A^{0\nu}$, um pouco a partir de $M_P^{0\nu}$ e $M_M^{0\nu}$ e nenhuma de $M_V^{0\nu}$. Os momentos mais afetados são para os núcleos ^{48}Ca e ^{100}Mo

A partir dos resultados dispostos na Tabela 6, pode-se concluir os seguintes resultados sobre os momentos nucleares $M^{0\nu}$:

i) O papel da interação residual, através da PSU4SR, é crucial na redução dos momentos nucleares. Essa redução é entretanto menor que a presente nos momentos $M^{2\nu}$, uma vez que os momentos $M^{0\nu}$ da interação resifual (QRPA) são de $\sim 5-7$ vezes menores que os momentos do campo médio de BCS.

Tabela 7 - Estrutura fina dos momentos nucleares 0ν-DBD para o núcleo ^{76}Ge.

	BCS					QRPA				
J^π	$M_V^{0\nu}$	$M_A^{0\nu}$	$M_P^{0\nu}$	$M_M^{0\nu}$	$M^{0\nu}$	$M_V^{0\nu}$	$M_A^{0\nu}$	$M_P^{0\nu}$	$M_M^{0\nu}$	$M^{0\nu}$
0^+	1,06	0,00	0,00	0,00	1,06	0,02	0,00	0,00	0,00	0,02
1^+	0,00	4,75	-0,48	0,05	4,33	0,00	-0,39	-0,05	0,01	-0,43
2^+	0,36	0,54	0,00	0,05	0,95	0,14	0,24	0,00	0,03	0,40
3^+	0,00	1,01	-0,35	0,06	0,72	0,00	0,45	-0,16	0,03	0,32
4^+	0,14	0,23	0,00	0,04	0,42	0,08	0,14	0,00	0,03	0,24
5^+	0,00	0,40	-0,18	0,04	0,27	0,00	0,24	-0,11	0,03	0,16
6^+	0,06	0,10	0,00	0,03	0,18	0,04	0,07	0,00	0,02	0,13
7^+	0,00	0,15	-0,07	0,02	0,11	0,00	0,11	-0,05	0,02	0,08
8^+	0,02	0,03	0,00	0,01	0,06	0,01	0,02	0,00	0,01	0,05
9^+	0,00	0,06	-0,03	0,01	0,05	0,00	0,04	-0,02	0,01	0,03
10^+	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$\pi = +$	1,64	7,27	-1,11	0,33	8,15	0,29	0,92	-0,39	0,19	1,00
0^-	0,00	0,15	-0,07	0,00	0,08	0,00	0,07	-0,04	0,00	0,03
1^-	0,47	0,62	0,00	0,03	1,12	0,15	0,24	0,00	0,01	0,40
2^-	0,00	2,26	-0,47	0,06	1,85	0,00	0,66	-0,16	0,02	0,52
3^-	0,24	0,43	0,00	0,06	0,72	0,11	0,23	0,00	0,03	0,37
4^-	0,00	0,80	-0,29	0,06	0,57	0,00	0,40	-0,15	0,03	0,28
5^-	0,12	0,21	0,00	0,05	0,38	0,06	0,13	0,00	0,03	0,23
6^-	0,00	0,36	-0,15	0,05	0,26	0,00	0,21	-0,09	0,03	0,15
7^-	0,05	0,10	0,00	0,04	0,19	0,03	0,07	0,00	0,03	0,12
8^-	0,00	0,10	-0,05	0,02	0,08	0,00	0,07	-0,03	0,01	0,05
9^-	0,00	0,01	0,00	0,00	0,02	0,00	0,01	0,00	0,00	0,02
10^-	0,00	0,02	-0,01	0,00	0,01	0,00	0,02	-0,01	0,00	0,01
$\pi = -$	0,88	5,06	-1,04	0,37	5,28	0,35	2,11	-0,48	0,19	2,18

Legenda: Estrutura fina para os momentos nucleares do 0ν-DBD, normalizados por g_A^2, com $g_A = 1,27$) para o ^{76}Ge. As contribuições dos diferentes momentos angulares dos estados intermediários J^π são listados para ambas paridades $\pi = \pm$.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 11.

ii) Esse efeito de redução é menor sobre os momentos $M_P^{0\nu}$ e $M_M^{0\nu}$ do que sobre os momentos $M_V^{0\nu}$ e $M_A^{0\nu}$.

iii) Os valores para $M_M^{0\nu}$ são maiores que outros calculados por um fator de $(f_M/g_M)^2 = 1.61$, uma vez que foi incluído o termo $g_V/2M_N$ na aproximação não relativística do Hamiltoniano eletro-fraco, como é usualmente feito em estudos de decaimento beta simples. Isso pode ser claramente visto na Tabela 6, onde todos os momentos $M_X^{0\nu}$ para o ^{76}Ge a partir de (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015). Observe que as diferenças entre ambos cálculos são maiores que as incertezas numéricas apresentadas.

iv) Comparado com o papel desempenhado pela interação residual no canal *pp*, os efeitos FNS e SRC são relativamente pequenos. De fato, os efeitos da FNS geram um decréscimo por volta de $\sim 15-20\%$ e quando a SRC é acionada, surge uma redução adicional de $\sim 3-5\%$. Esses resultados são totalmente consistentes com os exibidos na Tabela 1 da Ref. (ŠIMKOVIC et al., 2009), quando as SRC são calculadas na estrutura do método de cluster acoplado. Entretanto, de acordo com os estudos baseados sobre o método do operador de correlação unitário (UCOM) (MENENDEZ et al., 2008; ENGEL; HAGEN, 2009), a SRC tem um efeito de redução marginal ($< 10\%$) sobre os momentos nucleares 0ν-DBD. Devido a esse fato, além de dificuldades computacionais, suas contribuições foram omitidas diretamente no artigo (YAO et al., 2015). Dentro do formalismo apresentado, a SRC dada pela Eq. (39) não garante uma normalização correta da função de onda de dois corpos. Mas, essa é uma pequena correção de um efeito, que por si só é pequeno e, portanto, não pode ser relevante. Também nota-se que os efeitos da correlações de curto alcance (SRC) são menores que a estimativa das incertezas teóricas.

A estrutura fina dos momentos $M^{0\nu}$ no caso do ^{76}Ge é exibida na Tabela 7, onde as contribuições para diferentes momentos angulares J^π do estado intermediário são listados para ambas paridades $\pi = \pm$. Os problemas mais notáveis nesta tabela são:

1) Para $M_V^{0\nu}$, apenas as paridades naturais dos estados intermediários, $\pi = (-)^J$, *i.e.* $J^\pi = 0^+, 1^-, 2^+, \cdots$, contribuem.

2) Para $M_P^{0\nu}$, apenas as paridade não naturais dos estados intermediários $\pi = -(-)^J$, *i.e.* $J^\pi = 0^-, 1^+, 2^-, \cdots$, contribuem.

3) A interação residual no canal *pp* afeta principalmente o momento $M_V^{0\nu}$ para $J^\pi = 0^+$ e o momento $M_A^{0\nu}$ para $J^\pi = 1^+$.

4) Na pn-QRPA, os estados de paridade negativa dominam os estados de paridade positiva, comportamento contrário quando é considerada somente a aproximação de BCS.

5.3 Comparação entre os resultados obtidos com os Métodos II e IV

Resultados relevantes para a comparação dos momentos nucleares dos 2ν-DBD e 0ν-DBD são obtidos dentro do formalismo de QRPA com os dois métodos apresentados no capítulo 4: Método II (*two*-QRPA) e Método IV (*One*-QRPA). Os resultados numéricos estão dispostos na Tabela 8. Lembrando que o Método IV fixa o parâmetro t através da PSU4SR obtendo o t_{sym} sem utilizar os resultados experimentais dos momentos nucleares do 2ν-DBD para ajustar o parâmetro t do canal *pp*. Por outro lado, o Método II, faz uso dos momentos nucleares experimentais 2νDBD, extraindo assim dois parâmetros $t_\uparrow$ e $t_\downarrow$, como ilustrado na Figura 11 para o núcleo ^{76}Ge.

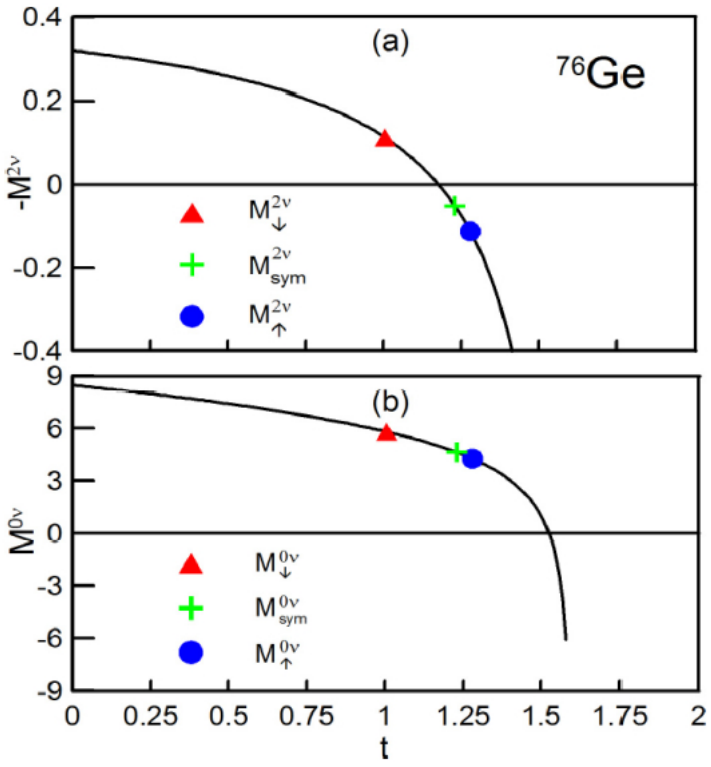
Tabela 8 - Momentos nucleares $M^{2\nu}$ e $M^{0\nu}$ com os Métodos II e IV.

		Método II			Método IV		
Núcleo	App	t	$M^{2\nu}$	$M^{0\nu}$	t	$M^{2\nu}$	$M^{0\nu}$
^{48}Ca	sym	1,200	0,124	3,66	1,200	0,018	2,72
	↑	1,186	0,040	4,08	1,209	0,038	2,64
	↓	1,168	-0,039	4,50	1,170	-0,038	2,96
^{76}Ge	sym	1,230	0,052	4,63	1,230	0,051	3,19
	↑	1,280	0,113	4,27	1,296	0,113	2,79
	↓	1,005	-0,113	5,81	0,887	-0,113	4,79
	Ref,			5,26			
^{82}Se	sym	1,300	0,051	3,35	1,300	0,062	2,96
	↑	1,359	0,083	3,08	1,326	0,083	2,81
	↓	0,906	-0,083	4,70	1,003	-0,083	4,37
	Ref,			4,69			
^{96}Zr	sym	1,550	0,014	4,89	1,550	0,023	2,22
	↑	1,573	0,081	4,60	1,573	0,081	2,04
	↓	1,506	-0,080	5,35	1,481	-0,080	2,68
	Ref,			3,14			
^{100}Mo	sym	1,490	0,173	4,45	1,490	0,034	2,85
	↑	1,495	0,186	4,39	1,525	0,186	2,48
	↓	1,229	-0,185	6,37	1,347	-0,185	3,92
	Ref,			3,90			
^{128}Te	sym	1,410	0,073	3,14	1,410	0,083	3,59
	↑	1,354	0,046	3,32	1,351	0,046	3,86
	↓	1,119	-0,046	4,04	1,165	-0,046	4,64
	Ref,			4,92			
^{130}Te	sym	1,450	0,119	3,77	1,450	0,081	3,07
	↑	1,302	0,031	4,34	1,343	0,031	3,48
	↓	1,192	-0,031	4,78	1,175	-0,031	4,07
	Ref			4,00			
^{150}Nd	sym	1,290	-0,084	4,66	1,290	-0,067	4,16
	↑	1,636	0,058	3,71	1,637	0,058	3,10
	↓	1,365	-0,058	4,47	1,324	-0,058	4,06

Legenda: Momentos nucleares $M^{2\nu}$ e $M^{0\nu}$ usando os Métodos II e IV, com três Aproximações diferentes (App) para o parâmetro t, tais como: os valores obtidos através da PSU4SR (t_{sym}) e a partir $|M^{2\nu}_{exp}|$ ($t_\uparrow$ e $t_\downarrow$). Além disso, estão dispostos os resultados rotulados por Ref, foram retirados de (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) para $g_A = 1,26$, que deve ser comparado com os resultados obtidos quando é usado $t_\downarrow$ no Método II.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 12.

Figura 11 - Momentos nucleares, 2ν e 0ν, com o Método II para ^{76}Ge.



Legenda: Parâmetros Isoescalar t no ^{76}Ge com o Método II para $|M^{2\nu}_{exp}| = 0,113$. Os momentos $M^{2\nu}$ são dados em unidades naturais, enquanto os momentos $M^{0\nu}$ é adimensional. Note que $M^{2\nu}$ é negativo para $t = 0$.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 13.

Em comparação os resultados com os métodos II e IV, utilizando os mesmos valores do t_{sym} presentes na Tabela 4, nota-se uma diferença significativa para ambos momentos nucleares, 2νDBD e 0νDBD. Era de se esperar que os momentos de 2ν discordassem significativamente, pois são muito sensíveis ao parâmetro t. Mas, é um tanto surpreendente que, exceto no caso de ^{128}Te, os momentos 0ν tenham sido consideravelmente maiores usando o Método II em vez do Método IV.

Como já foi observado por (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994), a amplitude isoscalar não pode ser determinada univocamente ajustando o cálculo à vida média medida, pois apenas o módulo de $M^{2\nu}_{exp}$ é obtido a partir de dados experimentais. Como consequência, são obtidos dois valores de t para cálcular os momentos nucleares: um quando $M^{2\nu}_{exp}$ é assumido positivo ($t = t_{\uparrow}$), e o outro quando o $M^{2\nu}_{exp}$ é assumido negativo ($t = t_{\downarrow}$). Devido a uma variação suave de $M^{0\nu}$ calculada na vizinhança onde $M^{2\nu}$ passa por zero, os valores de $M^{0\nu}_{\uparrow}$ e $M^{0\nu}_{\downarrow}$ não são severamente diferentes um do outro e, na maioria dos casos, $M^{0\nu}_{\uparrow} \sim M^{0\nu}_{sym}$.

A declaração acima, sobre a diferença nos valores de $M^{0\nu}$ obtidos para t_{sym} ao

usar o Método II ou o Método IV, chama a atenção. Para nos convencer disso, também comparamos na Tabela 8 os resultados obtidos para $M^{0\nu}$ a partir de $t_{\uparrow}$ e $t_{\downarrow}$, chegando quase à mesma conclusão. Como as duas comparações são consistentes, nossa declaração tem maior confiabilidade. Para calcular os momentos 0ν na literatura $t_{\downarrow}$ é usualmente escolhido ou seu equivalente (ŠIMKOVIC et al., 2013; HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015), (ver por exemplo, (RODIN et al., 2003, Fig. 1) e (ENGEL; MENÉNDEZ, 2017, Fig. 6)), mesmo que não haja motivo a priori para desconsiderar os resultados obtidos com $t_{\uparrow}$. Portanto, é apropriado comparar os valores de $M^{0\nu}$ relatado nesses trabalhos para $g_A = 1,27$ e $g_A = 1,26$, respectivamente, com os resultados obtidos aqui.

A principal diferença é que em (ŠIMKOVIC et al., 2013) e (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015), a interação residual entre dois núcleons é baseada sobre a matriz G de Bonn com troca de um bóson, diferente da interação residual tipo δ que foi usada nesse trabalho, dada pela Equação (109). Apesar dessa diferença importante, a discrepância entre os resultados obtidos aqui com os presentes em (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) não são drasticamente grandes, como pode ser visto na Tabela 6. De fato, as diferenças entre os resultados presentes e aqueles de (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015, Tabela III) são da mesma ordem entre os resultados presentes em (ŠIMKOVIC et al., 2013) e (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015).

Mais explicitamente, se procedermos da mesma maneira que (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) e quantificar as diferenças pelas diferenças relativas $(|M^{0\nu}[10] - M^{0\nu}_{\downarrow}|/M^{0\nu}_{\downarrow})$, obteríamos $(9, 0, 41, 38, 22, 16)\%$ para (^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr, ^{100}Mo, ^{128}Te, ^{130}Te), que deve ser confrontado com as diferenças $(6, 35, 6, 50, 3, 9)\%$, listadas na última coluna da (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015, Tabela III) para o mesmo conjunto de núcleos. Já para os nossos cálculos as diferenças aumentam por volta de $\sim 40\%$ no ^{96}Zr e ^{100}Mo por causa do valor de t está na região de colapso da QRPA, refletida nos erros teóricos mostrados na Tabela 5.

Esse comportamento da QRPA é um quebra-cabeça bem conhecido no 2ν-DBD, e ainda não foi totalmente resolvido, apesar de muito esforço ser investido nesse processo, através do QRPA renormalizado (RQRPA) (KRMPOTIĆ et al., 1997; TOIVANEN; SUHONEN, 1995; RODIN; FAESSLER, 2002). Entretanto, os resultados para ^{100}Mo mostra em (KRMPOTIĆ et al., 1997, Fig. 3) e (TOIVANEN; SUHONEN, 1995, Fig. 3) poderiam ser considerados auspiciosos, pois na RQRPA (*Renormalized* QRPA) o momento $M^{2\nu}$ se comporta suavemente na região de t onde o QRPA comum entra em colapso.

Rodin *et al.* (RODIN et al., 2005) justificam o procedimento de fixar t a partir dos dados experimentais 2ν-DBD, já que dessa maneira os valores do $M^{0\nu}$ tornam-se essecialmente independentes do tamanho da base de partícula única, ou seja da quantidade de orbitais adotados no campo médio. O mesmo acontece, quando esse parâmetro é fixado pelo procedimento da PSU4SR. Isso pode ser visto, por exemplo, a partir da figura 2 da

referência (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994), onde foram utilizados três bases de partícula única diferentes para o ^{48}Ca seguindo a estrutura do Método III com uma QRPA.

Os autores da referência (RODIN et al., 2005) também argumentam que: "Segue-se do estudo da referência (ŠIMKOVIC; PACEARESCU; FAESSLER, 2004) que escolher o sinal negativo do $|M^{2\nu}_{exp}|$ levaria a um desacordo completo com a sistemática de decaimentos beta simples."Essa afirmação é baseada principalmente em um trabalho que utiliza QRPA deformada (ŠIMKOVIC; PACEARESCU; FAESSLER, 2004), onde o mecanismo de supressão do 2ν-DBD é atribuído a deformação nuclear. Essa visão está obviamente em total oposição à apresentada aqui, que é baseada na restauração parcial da simetria SU(4). Em adição, o procedimento de duas pn-QRPA é usado em (ŠIMKOVIC; PACEARESCU; FAESSLER, 2004).

Afirmando em maior detalhe: enquanto o modelo apresentado aqui é formulado para descrever núcleos esféricos, um campo médio deformado é usado em (ŠIMKOVIC; PACEARESCU; FAESSLER, 2004), complementado com uma interação residual esquemática separável spin-isospin que contém duas partes, um um potencial *ph* atrativo e um um potencial *pp* repulsivo, com amplitudes de acoplamento χ^{ph} e κ^{pp}, respectivamente.

Executando um cálculo detalhado dos NMEs para o 2ν-DBD do ^{76}Ge, verifica-se que: i) o valor positivo do $|M^{2\nu}_{exp}|$ é reproduzido bem para $\kappa^{pp}_{\downarrow} = 0,028$ MeV, que foi deduzido por Homma*et al.* (HOMMA et al., 1996) a partir do estudo sistemático de decaimentos beta simples, e ii) o valor negativo de $|M^{2\nu}_{exp}|$ é desfavorecido devido a uma completa discordância com este estudo, uma vez que um grande valor de $\kappa^{pp}_{\uparrow}$ ($\cong 0,07 - 0,075$ MeV) é requerido acima do valor crítico $\kappa^{pp} \equiv \kappa^{pp}_{c} \cong 0,06$ MeV, onde a QRPA deformada colapsa (HOMMA et al., 1996).

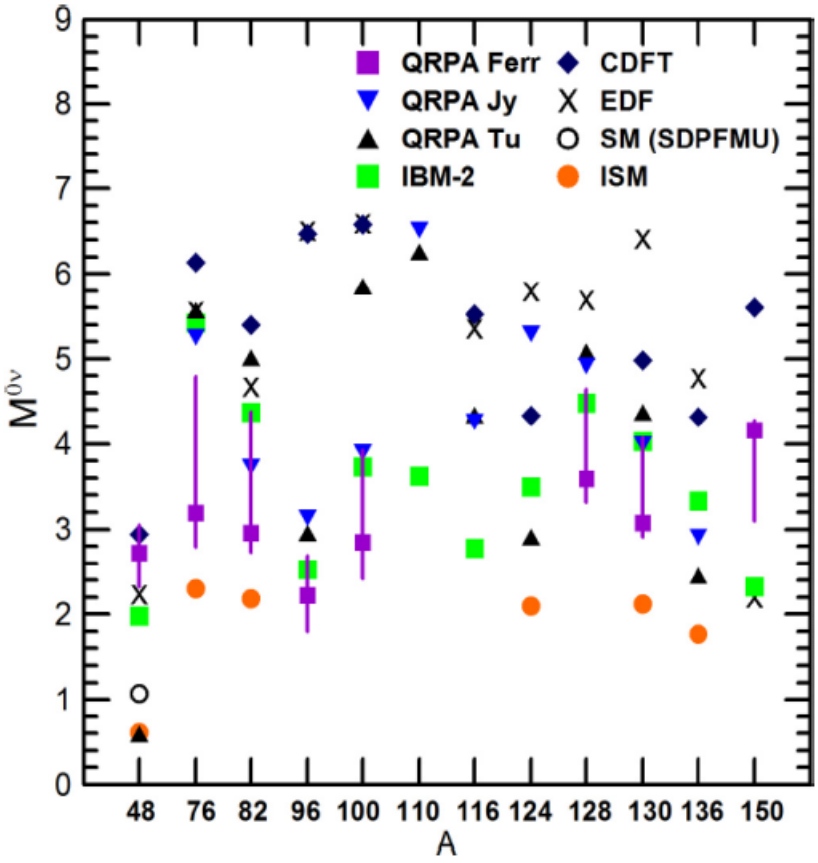
Essa grande diferença por um fator de ~ 3 entre $\kappa^{pp}_{\uparrow}$ e $\kappa^{pp}_{\downarrow}$ deve ser comparada com a pequena diferença de um fator $\sim 25\%$ entre o t_{sym} e $t_{\downarrow}$, encontrado aqui para o ^{76}Ge. Portanto, não será encontrado necessariamente as mesmas dificuldades em reproduzir um decaimento beta simples com o PSU4SR quando confrontado com $\kappa^{pp}_{\uparrow}$ em (ŠIMKOVIC; PACEARESCU; FAESSLER, 2004). Os cálculos realizados para a amplitude de Gamow-Teller do decaimento β^{-} simples confirmam esse fato, mas um estudo detalhado ainda é necessário.

Finalmente, comparamos as diferenças relativas entre $M^{0\nu}$ obtidas com o método proposto, com o t_{sym} e o método IV, com os cálculos usuais de QRPA (baseado sobre $t_{\downarrow}$ e o Método II). Ou seja, avaliando a quantidade $|M^{0\nu}_{sym}(\text{IV}) - \text{M}^{0\nu}_{\downarrow}(\text{II})|/\text{M}^{0\nu}_{\downarrow}(\text{II})$, resultando em $(40, 45, 37, 58, 55, 11, 36, 7)\%$ para (^{48}Ca,^{76}Ge, ^{82}Se, ^{96}Zr, ^{100}Mo, ^{128}Te, ^{130}Te,^{150}Nd). Portanto, os resultados com o Método IV, conduz os momentos nucleares menores em aproximadamente $\sim 40\%$ quando comparados com os cálculos padrões (Método II). Como pode ser visto na Tabela 8, essa diferença basicamente aparece quando é aplicado o método *one*-QRPA empregado aqui, em vez do método de *two*-QRPA usado atualmente. A diferença é parcialmente devida à maneira de empregar a restauração de simetria de

spin-isospin.

Como explicado no Capítulo 4, o Método IV envolve apenas os núcleos que participam do DBD, enquanto o Método II contém a participação dos núcleos vizinhos devido as GCS. Além disso, a interação residual reduz significamente os resultados de campo médio. Portanto, não surpreende que em todos os estudos teóricos mostrados na Figura 12, produzam resultados semelhantes para os momentos 0ν-DBD, quando comparados com os resultados do campo médio.

Figura 12 - Momentos nucleares do 0ν-DBD obtidos por vários modelos de estrutura nuclear.



Legenda: Os momentos nucleares do 0ν-DBD calculados com vários modelos de estrutra nuclear: i) QRPA Tü (ŠIMKOVIC et al., 2013) com $g_A = 1,27$, ii) QRPA Jy (HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) com $g_A = 1,26$; iii) QRPA Ferr (FERREIRA et al., 2017) com $g_A = 1,27$; iv) Modelo de camadas de Grande Escala [SM (SDPFMU)] (IWATA et al., 2016), v) Interativo (ISM) (MENENDEZ et al., 2008) com $g_A = 1,25$, v) Modelo de Interação do Bóson (IBM-2) (BAREA; KOTILA; IACHELLO, 2013) com $g_A = 1,269$ Método Funcional de Densidade de Energia (EDF) com $g_A = 1,25$, Modelo da Teoria Funcional da Densidade Covariante (CDFT) com $g_A = 1,254$ (YAO et al., 2015; SONG et al., 2014). Todos os resultados são normalizados por g_A^2.

Fonte: FERREIRA et al, 2017, p. 14.

Finalmente, usando os valores numéricos dos elementos de matriz nuclear dispostos

na Tabela 6 na Equação (5), junto com os limites inferiores das meias vidas do modo sem emissão de neutrinos e dos fatores cinemáticos, podemos inferir os limites superiores da massa efetiva do neutrino e vizualizar o efeito que o erro teórico de 3% sobre os $M^{0\nu}$ produz sobre a massa efetiva do neutrino. Portanto, são apresentados na Tabela 9, os momentos nucleares em unidades de MeV, os fatores cinemáticos e os limites inferiores da meia vida. Nota-se que o efeito do erro teórico de 3% sobre a massa efetiva do neutrino é maior para a transição ^{96}Zr$\rightarrow$ ^{96}Mo.

Tabela 9 - Limites sobre a meia vida e a massa efetiva do neutrino.

Núcleo	t_{sym}	$(M_{0\nu})_{sym}[MeV]$	$\mathcal{G}_{0\nu}^{2\beta-}(0_1^+)[anos^{-1}]$	$> \tau_{0\nu}^{2\beta^-}[anos]$	$\langle m_\nu \rangle$ [eV]
^{48}Ca	$1,20$	$2,24^{-0,33}_{+0,26}$	$24,81 \times 10^{-15}$	$5,80 \times 10^{22}$	$< 10,5 - 13,8$
^{76}Ge	$1,23$	$2,63^{-0,20}_{+0,38}$	$2,372 \times 10^{-15}$	$8,00 \times 10^{25}$	$< 0,8 - 0,9$
^{82}Se	$1,30$	$2,44^{-0,19}_{+0,18}$	$10,14 \times 10^{-15}$	$3,60 \times 10^{23}$	$< 6,3 - 7,4$
^{96}Zr	$1,55$	$1,83^{-0,35}_{+0,29}$	$20,48 \times 10^{-15}$	$9,20 \times 10^{21}$	$< 34,4 - 49,1$
^{100}Mo	$1,49$	$2,35^{-0,35}_{+0,35}$	$15,84 \times 10^{-15}$	$9,50 \times 10^{22}$	$< 9,6 - 12,9$
^{128}Te	$1,41$	$2,96^{-0,16}_{+0,16}$	$0,5783 \times 10^{-15}$	$1,50 \times 10^{24}$	$< 10,9 - 12,1$
^{130}Te	$1,45$	$2,53^{-0,13}_{+0,13}$	$14,24 \times 10^{-15}$	$3,20 \times 10^{25}$	$< 0,6$
^{150}Nd	$1,29$	$3,43^{-0,10}_{+0,09}$	$61,94 \times 10^{-15}$	$1,80 \times 10^{22}$	$< 8,5 - 9,0$

Legenda: Os momentos nucleares $(M_{0\nu})_{sym}$ para o modo $0\nu2\beta^-$ em unidades de MeV com $g_A = 1.00$ obtidos com o t_{sym}, junto com os fatores cinemáticos $\mathcal{G}_{0\nu}^{2\beta-}(0_1^+)$ retirados de (STOICA; MIREA, 2019) e os limites inferiores das meias vidas experimentais retiradas de (AGOSTINI et al., 2018) para o ^{76}Ge; (LEE, 2020) para o ^{100}Mo; (COLLABORATION et al., 2020)para o ^{130}Te e para o restante dos núcleos (BAREA; KOTILA; IACHELLO, 2012). Na última coluna estão presentes os limites superiores das massas efetivas do neutrino em unidades de elétron-volt.

Fonte: O autor, 2020.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS: (PN,2P2N)-QTDA

No Capítulo 4 foi elaborado um novo modelo de estrutura nuclear denominado $(pn, 2p2n)-$QTDA que tem como objetivo superar as limitações presentes no modelo de pn-QRPA quando aplicado ao DBD. Suas vantagens são: nos permite estudar não apenas os NMEs para o estado fundamental mais também para estados excitados; não possui uma extrema sensibilidade dos NMEs com relação ao modelo de parametrizão; permite obter as energias de excitação do núcleo filho $(N \mp 2, Z \pm 2)$ ao mesmo tempo que se obtém os valores-Q de reação; junto com os NMEs nos fornece o espectro de energia de Fermi e Gamow-Teller das amplitudes totais bem como a localização de suas correspondentes ressonâncias e regras de soma. Dessa forma, o modelo (pn,2p2n)-QTDA é apresentado como uma extensão natural do modelo de pn-QRPA direcionado para as reações com dupla troca de carga.

A grande quantidade de informação que pode ser obtida com o modelo (pn,2p2n)-QTDA indica a superação das limitações presentes quando utilizamos o modelo de pn-QRPA [18]. Como exemplo, foram realizados cálculos numéricos para os processos ^{48}Ca$\rightarrow^{48}$Ti e ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Pd, com emissão de neutrinos no estado final.

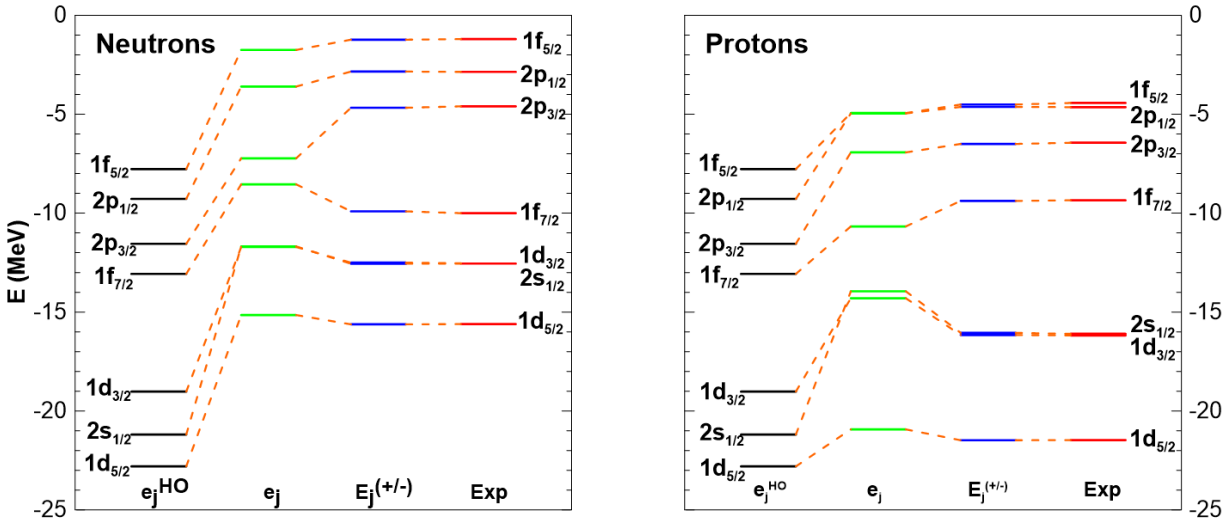
6.1 Campo Médio

O campo médio é definido por um Hamiltoniano não perturbado H_0 e as energias de partícula única (spe) estão especificadas mais abaixo, na Tabela 11. Como usual, as amplitudes de emparelhamento para prótons e nêutrons, v_s^{pair}(p) e v_s^{pair}(n), são obtidas de modo a produzir os gaps experimentais (ver tabela 10).

O decaimento $2\nu2\beta^-$ da transição ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti é um caso único, uma vez que o núcleo ^{48}Ca é um núcleo de dupla camada fechada e podemos utilizar o spe experimental, rotulado com e_j^{exp}, que contém as energias dos estados de partícula-única e buraco-único. Todas as energias foram extraídas das energias de ligação e excitação, ponderadas por fatores espectroscópicos dos núcleos vizinhos de massa ímpar: ^{47}Ca e ^{49}Ca para nêutrons e ^{47}K e ^{49}Sc. Essas energias estão listadas na figura 13 e foram retiradas da (SCHWIERZ; WIEDENHOVER; VOLYA, 2007, Tabela II), exceto para o orbital $f_{5/2}$, que foi estimada a partir da divisão $f_{5/2} - f_{7/2}$ dada em (KORTELAINEN et al., 2014). Esse orbital é essencial para saturar ambas as regras de soma, SCE e DCE. Feito isso, o spe e_j^{exp} foi

[18] Todos os resultados numéricos presentes nesse capítulo foram submetidos para a revista *Physical Review C*. As correções apontadas pelo revisor já foram implementadas e o trabalho reenviado para a revista e publicado pela mesma (FERREIRA et al., 2020)

Figura 13 - Energias de campo médio, para nêutrons e prótons, do núcleo ^{48}Ca.



Legenda: Energias de campo médio (em unidades de MeV) para nêutrons (painel esquerdo) e para prótons (painel direito). Em ambos os casos são mostrados: (i) energias de oscilador harmônico e_j^{HO}, (ii) energias de partícula única ajustadas e_j, (iii) energias de BCS relativas ao, nível de Fermi ($E_j^{(\pm)}$) e (iv) energias experimentais (e_j^{exp}).

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 7.

usado de duas maneiras diferentes:

1. Os seguintes passos foram adotados na manipulação das equações de BCS (CONCI; KLEMT; SPETH, 1984; BARBERO; KRMPOTIĆ; MARIANO, 1995):
   a) As energias de BCS relativas ao nível de Fermi λ,

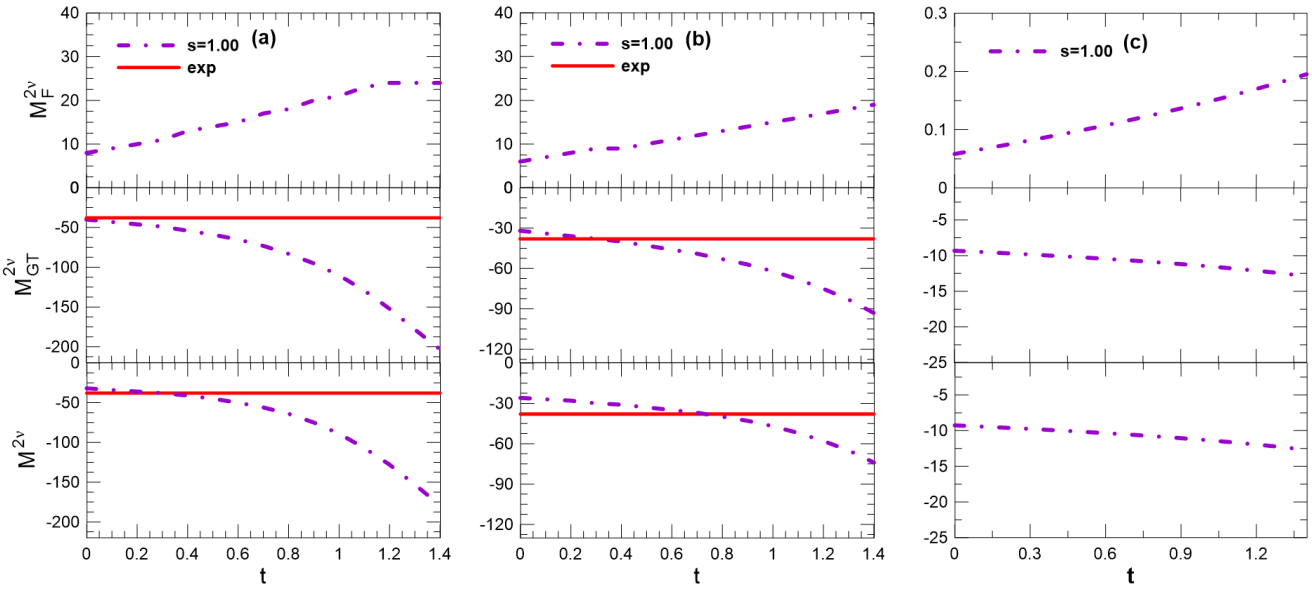
$$E_j^{(\pm)} = \pm E_j + \lambda, \tag{171}$$

   são introduzidas, onde o sinal positivo é adotado para um estado de partícula e o sinal negativo para um estado de buraco.
   b) É assumido que o nível de Fermi λ_n e λ_p fica entre os estados $j_n = 2p_{3/2} - 1f_{7/2}$ e $j_p = 1f_{7/2} - 2s_{1/2}$, respectivamente, e que todos os estados acima de λ são excitações de quasipartículas $E_j^{(+)}$ e todos os estados abaixo de λ são excitações de quasiburaco $E_j^{(-)}$.
   c) Iniciando com o conjunto de energias de oscilador harmônico e_j^{HO}, as energias $E_j^{(\pm)}$ são ajustadas para o espectro experimental e_j^{exp} por meio de um χ^2, variando as constantes de emparelhamento v_s^{pair} e o valor da energia de partícula única e_j, que aparecem na equação de BCS para o gap (136). Todas as energias envolvidas neste procedimento estão presentes na Figura 13.

2. Por uma questão de completeza, os parâmetros de emparelhamento v_s^{pairZ} e v_s^{pairN} foram fixados de forma idêntica ao descrito no capítulo 5, ou seja, através do ajuste do gap de emparelhamento calculado Δ_j, com o gap experimental. Nesse caso para nêutrons $j = 1f_{7/2}$ e para prótons $j = 2s_{1/2}$.

A diferença mais relevante entre os spe e_j^{exp} e e_j, é o desaparecimento do gap de energia entre as partículas e buracos no último caso. Os parâmetros resultantes v_s^{pair} e λ são dados na Tabela 10 para os dois conjuntos de spe e_j e e_j^{exp}. As energias de quasipartículas $E_j^{\pm}$ com e_j^{exp} são obviamente um pouco diferentes daquelas mostradas na Figura 13.

Figura 14 - $M_F^{2\nu}$, $M_{GT}^{2\nu}$ e $M^{2\nu}$ em função do parâmetro do canal *pp* obtidos com o modelo (pn,2p2n)-QTDA para o estado fundamental 0^+.



Legenda: $M_F^{2\nu}$, $M_{GT}^{2\nu}$ e $M^{2\nu}$ em função do parâmetro do canal *pp* (t e s) obtidos com o modelo (pn,2p2n)-QTDA para o estado fundamental 0^+ (em unidades naturais $\times 10^{-3}$) para: a) ^{48}Ca com o spe e_j^{exp}, b) ^{48}Ca com o spe e_j, e c) ^{96}Ru. O valor experimental para ^{48}Ti $|M^{2\nu}(0_1^+)| = (38 \pm 3) \times 10^{-3}$ é indicado por uma linha vermelha, cuja a largura representa o erro experimental.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 10.

O núcleo ^{96}Ru é um núcleo de camada aberta e o espectro de energia é claramente rotacional. Este fato gera uma forte interação entre os graus de liberdades coletivos e os graus de liberdade de partícula única na região de baixa energia no espectro dos núcleos de massa ímpares vizinhos ^{95}Ru, ^{97}Ru, ^{95}Tc, e ^{97}Rh. Por exemplo, é muito provável que o estado fundamental $5/2^+$ em ^{95}Ru é uma consequência da anomalia $j - 1$, devido ao cluster de três nêutrons $(1g_{7/2})^3$ (ALMAR; CIVITARESE; KRMPOTIĆ, 1973; PAAR, 1973). Uma estrutura nuclear tão complexa torna difícil determinar os espectros spe e a

Tabela 10 - Constantes de acoplamento para BCS e Nível de Fermi.

Núcleo	spe	$v_s^{pair}(n)$	$v_s^{pair}(p)$	λ_n	λ_p
^{48}Ca	e_j^{exp}	31,45	34,77	-6,587	-13,000
	e_j	25,20	28,35	-7,091	-12,702
^{96}Ru		33,20	38,91	-8,412	-5,663

Legenda: Resultados para as constantes de acoplamento de emparelhamento (BCS) e os níveis de Fermi. Os λ's estão dados em unidades de MeV, e as constantes de acoplamento em unidades de MeV.fm^3.

Fonte: O autor, 2020.

interação de emparelhamento a partir do espectro experimental, como foi feito no caso do ^{48}Ca.

Tabela 11 - Enegias de partícula única (spe) para o ^{96}Ru.

level	Nêutrons		Prótons	
	e_j	$E_j^{(\pm)}$	e_j	$E_j^{(\pm)}$
$3s_{1/2}$	$-5,396$	$-5,182$	$4,916$	$5,006$
$2d_{3/2}$	$-5,236$	$-4,983$	$4,792$	$4,897$
$1g_{7/2}$	$-6,878$	$-6,527$	$2,308$	$2,502$
$2d_{5/2}$	$-7,401$	$-10,051$	$2,493$	$2,627$
$1g_{9/2}$	$-14,401$	$-14,500$	$-5,424$	$-7,448$
$2p_{1/2}$	$-17,802$	$-17,913$	$-7,718$	$-8,478$
$2p_{3/2}$	$-19,389$	$-19,484$	$-9,295$	$-9,773$

Legenda: Energias de partícula única de nêutron e próton para o núcleo ^{96}Ru, que foram obtidos da maneira explicada no texto, juntamente com as energias de quasipartículas

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 7.

Assim, foi utilizado o spe fornecido por N. Paar, obtidos através de calculados com o modelo de Hartree-Bogoliubov, conforme descrito em (PAAR et al., 2008). Elas são mostradas na Tabela 11, junto com as energias de quasipartículas, que foram obtidas seguindo o Método II, para o caso do ^{48}Ca. Ou seja, os cálculos dos gaps Δ_j são ajustados aos gaps experimentais, com $j = 1g_{7/2}$ para nêutrons e com $j = 1g_{9/2}$ para prótons. A similaridade entre o spe e_j e as energias de quasipartículas $E_j^{(\pm)}$ é notável. Os correspondentes parâmetros de emparelhamento v_s^{pair} e os potenciais químicos λ estão listados na Tabela 10.

É importante notar que para o ^{48}Ca, $\lambda_n > \lambda_p$, enquanto para o ^{96}Ru, temos $\lambda_n < \lambda_p$. Logo veremos que esse fato é decisivo no que diz respeito aos valores-Q de

reação no DBD. Mais precisamente, isso vai explicar porque o $2\nu2\beta^-$ ocorre com o ^{48}Ca e os decaimentos $2\nu2\beta^+$, $2\nu e\beta^+$ e $2\nu ee$ ocorrem para ^{96}Ru.

Esse método de cálculo é similar em vários aspectos aos usados no esquema do Modelo de Camadas presente nas referências (SAGAWA; UESAKA, 2016; AUERBACH; LOC, 2018). A grande diferença entre os dois modelos, além das interações residuais usadas, decorre do tamanho dos espaços de configurações dos estados finais $\mathcal{J}_f^+$. Nesse trabalho, para a transição ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti, temos 664 estados finais 0^+ e 2470 estados finais 2^+, enquanto Auerbach e Bui Minh Loc (AUERBACH; LOC, 2018), para a mesma transição com o espaço-fp (4 níveis, menor que no nosso caso) apresentam 14177 estados finais 0^+ e 61953 estados finais 2^+. No caso da transição ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo, temos a mesma quantidade de estados finais 0^+, porém para os estados 2^+ finais, temos 2583.[19]

6.2 **Interação Residual**

Para realizar os cálculos numéricos dos elementos de matriz $G(npn'p'J)$, $F(npn'p'J)$, $G(n_1n_2n_1'n_2'J_n)$, $F(n_1n_2n_1'n_2'J_n)$, $G(p_1p_2p_1'p_2'J_p)$, e $F(p_1p_2p_1'p_2'J_p)$ dos Hamiltonianos H_{pn}, H_{pp}, H_{pn}, dados pelas Eqs. (147) e (149), as mesmas constantes de acoplamento v_{pp}^s, v_{pp}^t, v_{ph}^s e v_{ph}^t são usadas. Ou seja, adotou-se que a interação residual é a mesma para partículas idênticas (H_{nn} ou H_{pp}) e não idênticas (H_{pn}), o que é uma restrição muito forte nos parâmetros do modelo.

Em todos os trabalhos anteriores de Krmpotić, dentro do modelo de pn-QRPA (FERREIRA et al., 2017; KRMPOTIĆ, 1993; KRMPOTIĆ et al., 1993; KRMPOTIC, 1989; KRMPOTIĆ; HIRSCH; DIAS, 1992; HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990b; KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994, 1994) os valores destas constantes de acoplamento em ambos os canais, pp e ph, foram definidas a partir da restauração parcial de simetria SU(4) (PSU4SR) induzida pela interação residual. As motivações físicas correspondentes para isso e para o procedimento foram discutidas em detalhes, no Capítulo 5 e publicadas em (FERREIRA et al., 2017).

1. **Canal partícula-buraco (ph)**

   A simetria $SU(4)$ é dinamicamente quebrada pelo campo spin-órbita e pela a estrutura supermultipleto que destrói as interações residuais. Mas, esses dois efeitos possuem uma tendência de cancelarem um ao outro. Na verdade, é um fato experimental que a diferença de energia entre a ressonância GT e o Estado Análogo

[19] Ver também a figura 4, onde encontra-se ilustrado a diferença padrão entre os modelos pn-QRPA e (pn,2p2n)-QTDA para calcular os NMEs.

Isobárico (IAS) se comportam como

$$E_{GT} - E_{IAS} = 26A^{-1/3} - 18.5(N-Z)/A, \tag{172}$$

onde o primeiro e segundo termos são interpretados como resultantes, respectivamente, da divisão spin-órbita e das diferenças nas interações residuais correspondentes, quando descritas dentro do modelo de TDA (NAKAYAMA; GALEAO; KRMPOTIĆ, 1982; CASTILLO; KRMPOTIC, 1987; YOSHIDA et al., 2018). Entretanto para a interação residual o último termo de (172) implica que (em unidades de MeV)

$$v_{ph}^{t} - v_{ph}^{s} = 37, \tag{173}$$

e dizemos que a PSU4SR ocorre dentro do canal ph quando essa condição é atendida.

2. **Canal partícula-partícula (pp)**

   Para um sistema com $N \neq Z$, as simetrias de spin-isospin são violadas na aproximação de campo médio, desde que o excesso de nêutrons produza automaticamente campos médios isovetoriais, como exemplo, diferentes potenciais de Hartree-Fock (HF) para prótons e nêutrons. Isto ocorre quando do Hamiltoniano nuclear comuta com os operadores correspondentes de excitação $\mathcal{O}_J^{\pm}$.

   No entanto, quando ocorre uma violação não dinâmica nos potenciais da solução de HF, as correlaçãoes do estado fundamental (GSCs) induzidas pela RPA podem ser invocadas para restaurar a simetria (THOULESS, 1961; ENGELBRECHT; LEMMER, 1970; LEE, 1971; LANE; MARTORELL, 1980). Essas correlações não são colocadas em evidência explicitamente, mas apenas implicitamente por meio de seus efeitos nos elementos de matriz e nas taxas de decaimento correspondentes. Ver, por exemplo, as equações (176) e (177). Aqui é conveniente definir as razões

$$s = \frac{v_{pp}^{s}}{\overline{v}_{pair}^{s}}, \text{ e } t = \frac{v_{pp}^{t}}{\overline{v}_{pair}^{s}}, \tag{174}$$

   onde $\overline{v}_{pair}^{s} = (v_{pair}^{s}(\mathrm{p}) + v_{pair}^{s}(\mathrm{n}))/2$. No canal ph, as excitações de Fermi e Gamow-Teller dependem apenas dos parâmetros s e t respectivamente.

   Para as excitações de Fermi, e quando as forças não conservativas de isospin não estão presentes, uma inclusão autoconsistente das correlações do estado fundamental ($s = 1$) nos conduz para: (i) A amplitude β^- $S_{IAS}^{+} \equiv S_0^{\{+1\}}$ fica totalmente concentrata no IAS, (ii) A amplitude β^+ $S_0^{\{-1\}}$, que em pn-QRPA pode ser vista como uma extensão do espectro β^- para energias negativas, é totalmente suprimida, e (iii) os NME $M_F^{2\nu^-}(0_1^+)$ são nulos para todos os fins práticos. Tudo isto pode ser

visto, por exemplo, a partir da Figura 10. A extensão para a qual as condições acima são atendidas pode ser tomada como uma medida da restauração da simetria da isospin.

Para excitações de Gamow-Teller, as correlações do estado fundamental nos conduzem para: (i) a amplitude-β^- $S_1^{\{+1\}}$ é em grande parte concetrada na ressonância de GT, (ii) a amplitude-β^+ $S_1^{\{-1\}}$ exibe um mínimo que denominamos t_{sym}, pronunciado para $t \cong 1.2$, tendo um comportamento semelhante a $S_0^{\{+1\}}$.

Assim, no modelo de pn-QRPA a simetria $SU(4)$ é parcialmente restaurada dentro do canal pp para o mínimo das amplitudes $S_0^{\{+1\}}$ e $S_1^{\{+1\}}$. Para a interação residual, dada pela Eq. (162), isto ocorre em

$$s = s_{sym} = 1, \text{ and } t = t_{sym} \cong 1.2. \tag{175}$$

A restauração de simetria de isospin é claramente evidênciada no Modelo de Modo Único (SMM, ver Apêndice A) (FERREIRA et al., 2017; KRMPOTIĆ; HIRSCH; DIAS, 1992; KRMPOTIĆ, 1993; KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994), onde

$$M_F^{2\nu^-}(s) = M_F^{2\nu^-}(s=0)\frac{1-s}{1-s_1}, \tag{176}$$

com $s_1 > 1$ sendo o valor onde a pn-QRPA colapsa.

Baseado no SMM, os NMEs para 2ν-DBD, quando calculados dentro da estrutura da PSU4SR, podem ser ajustados através do aproximante de Padé (1,1), na forma

$$M^{2\nu^-}(t) = M^{2\nu^-}(t=0)\frac{1-t/t_0}{1-t/t_1}, \tag{177}$$

com $t_1 > t_0$, onde t_0 e t_1 denotam um zero e o polo da pn-QRPA (KRMPOTIĆ, 1993).

Resumidamente, a simetria de spin-isospin é parcialmente restaurada dentro do modelo pn-QRPA, quando as condições (173) e (175) são satisfeitas. Essa restauração é o pré-requisito para uma avaliação fisicamente adequada dos observáveis.

Como observado por (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994), no modelo pn-TDA, onde as GSCs são negligenciadas, os resultados para os observáveis são bastante diferentes, mesmo se a autoconsistência $s = 1$ for imposta. De fato, nesse caso: (i) a amplitude $S_0^{\{+1\}}$ é sempre fragmentada, (ii) as amplitudes perturbadas (QRPA) $S_0^{\{-1\}}$ e $S_1^{\{-1\}}$ permanecem iguais aos valores do campo médio de BCS e portanto não possuem mínimos e (iii) os NMEs apresentam valores muito grandes ($M_F^{2\nu^-}(0_1^+) = -0.107$, e $M_{GT}^{2\nu^-}(0_1^+) = -0.663$) quando comparados com os resultados presentes na Tabela 5, que são $M_F^{2\nu^-}(0_1^+) = -0.004$ e $M_{GT}^{2\nu^-}(0_1^+) = 0.022$.

A partir da discussão prévia é claro que no modelo desenvolvido aqui (pn,2p2n)-QTDA pode ser usado apenas a parte *ph* (173) da PSU4SR, que resulta em: (i) $v_s^{ph} = 27$ e $v_t^{ph} = 64$ para ^{48}Ca, e ii) $v_s^{ph} = 55$ e $v_t^{ph} = 92$ para ^{96}Ru.

Com relação aos parâmetros do canal *pp*, observamos que a primeira relação em (175) é geralmente válida (para ambos os modelos de QRPA e QTDA), uma vez que é uma conseqüência da autoconsistência entre a interação de emparelhamento $\overline{v}_s^{pair}$ e a interação isovetorial do canal partícula-partícula v_s^{pp}. Por outro lado, não existe nenhuma restrição física para o valor de t, dado em (175), que foi tomado apenas como guia. Além disso, para os cálculos realizados com (pn,2p2n)-QTDA, em vez de usar o valor $g_A = 1.27$ para constante axial-vetorial (BERINGER et al., 2012), foi adotado o valor efetivo $g_A = 1.0$ [20]. Valores ainda menores para g_A foram usados na literatura (SUHONEN, 2017).

6.3 **Elementos de matriz nuclear (NMEs)**

Foram calculados simultaneamente os NMEs $M_F^{2\nu}(0_f^+)$, $M_{GT}^{2\nu}(0_f^+)$, $M^{2\nu}(0_f^+)$ e $M_{GT}^{2\nu}(2_f^+)$ para todos os estados finais $\mathcal{J}_f^+$ mencionados mais acima com os seguintes três conjuntos de parâmetros do canal *pp*:

$$\begin{aligned} T1: &\quad s = 1,00, \quad t = 0,80, \\ T2: &\quad s = 1,00, \quad t = 1,00, \\ T3: &\quad s = 1,00, \quad t = 1,20. \end{aligned} \tag{178}$$

Na parte superior da Tabela 12 os resultados para os NMEs da transição ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti $(0_1^+, 0_2^+, 2_1^+)$ foram obtidos com os dois conjuntos de spe, e_j^{exp} e e_j, que são mostrados na Figura 13. O acordo entre os resultados teóricos e experimentais para o $M^{2\nu}(0_1^+)$ pode ser considerado satisfatório (em particular com o conjunto e_j) tendo em conta que todos os parâmetros dos canais *pp* e *ph* estão basicamente fixos, ambos para partículas idênticas que aparecem nos H_{nn} e H_{pp}, e para partículas não idênticas que aparecem em H_{pn}.

Os NMEs de Fermi são relativamente pequenos para ambos os níveis 0^+, quando comparados com as contribuições de Gamow-Teller, mas não são desprezíveis. Como visto na Eq. (43), esses dois NMEs sempre interferem destrutivamente. É interessante notar que os NMEs de Fermi são frequentementes omitidos em cálculos de estrutura, simplesmente

[20] Essa redução é frequentemente atribuída ao efeito de polarização Δ-buraco sobre a constante de acoplamento axial-vetorial (BROWN; RHO, 1981; BOHR; MOTTELSON, 1981; CASTILLO; KRMPOTIC, 1987). Recentemente uma explicação sobre a redução do g_A dentro do contexto de teorias de campo efetivo (GYSBERS et al., 2019) tem sido apresentado.

Tabela 12 - Os NMEs para 2νDBDs dos núcleos ^{48}Ca e ^{96}Ru.

par	$M_F^{2\nu}(0_1^+)$	$M_{GT}^{2\nu}(0_1^+)$	$\lvert M^{2\nu}(0_1^+)\rvert$	$\lvert M^{2\nu}(0_2^+)\rvert$	$\lvert M^{2\nu}(2_1^+)\rvert$
^{48}Ca					
e_j					
T1	13	-53	40	13	0.64
T2	15	-62	47	16	0.69
T3	17	-75	58	20	0.75
e_j^{exp}					
T1	18	-83	64	10	0.33
T2	21	-110	89	34	0.34
T3	24	-152	128	80	0.35
Rad07			22		120
Hor07			28	26	1.62
Exp.			38 ± 3		
^{96}Ru					
T1	0.13	-17	16	10	0.51
T2	0.15	-17	17	11	0.61
T3	0.17	-18	18	12	0.75
Suh12			415-1437	492-1554	0.1-8.4
Hir94			251		
Rum98			101		
Rai06			54		

Legenda: Os NMEs (em unidades naturais $\times 10^{-3}$), calculados e experimentais para o $2\nu 2\beta^-$ do ^{48}Ca ($M^{2\nu}(\mathcal{J}_f^+) \equiv M^{2\nu^-}(\mathcal{J}_f^+)$) para o estado fundamental 0_1^+, primeiro excitado 0_2^+ e os estados 2_1^+ no núcleo final ^{48}Ti e ^{96}Mo, respectivamente. Os termos Rad07 e Hor07 na parte superior da tabela referem-se às referências (RADUTA; RADUTA, 2007; HOROI; STOICA; BROWN, 2007) para o ^{48}Ca. E os termos Suh12, Hir94, Rum98, Rai06 representam as Refs. (SUHONEN, 2012; HIRSCH et al., 1994; RUMYANTSEV; URIN, 1998; RAINA et al., 2006) para o ^{96}Ru, bem como os valores experimentais para o ^{48}Ca (BARABASH, 2015), também são mostradas nas mesmas unidades. Os resultados do Suhonen (SUHONEN, 2012) correspondem aqueles listados na Tabela II para o canal $\alpha = 2e$.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 9.

invocando a conservação de isospin. Mas, como explicado acima, isso é uma condição necessária mas não suficiente para esses NMEs serem nulos (ver também trabalho do Satula *et al.* (SATULA et al., 2009).)

Uma exceção é o trabalho de Šimkovic, Rodin, and Faessler (ŠIMKOVIC et al., 2013), onde a restauração parcial de simetria de isospin é alcançada com a pn-QRPA, o que conduz ao desaparecimento do $M_F^{2\nu}$. Isso é acompanhado pela separação do parâ-

metros de renormalização g_{pp} em uma parte isovetorial e outra isoescalar. O parâmetro isovetorial $g_{pp}^{T=1}$ é escolhido essecialmente igual a constante de emperelhamento g_{pair}, que é equivalente a nossa condição para autoconsistência $s = 1$ (Ver a equação (174)).

Nota-se na Tabela 12 que os NMEs de Fermi $M_F^{2\nu}(0_f^+)$ não são nulos, o que é totalmente compressível, pois o modelo não considera o GSCs. Para torna-los nulos é necessário incluir as GSCs e assim realizar a PSU4SR, transformando o modelo (pn, 2p2n)-QTDA no modelo (pn, 2p2n)-QRPA. Este procedimento está sendo realizado em um trabalho em andamento. Certamente a inclusão das GSCs deve afetar os resultados para outros observáveis, contudo seus efeitos são difíceis de estimar neste momento. Em particular, é difícil prever se as equações (174) e (175) permanecerão válidas ou não.

Os NMEs $|M^{2\nu}(0_1^+)|$ para o ^{48}Ca já foram calculados há bastante tempo, mas existe apenas poucos estudos teóricos que obtém os valores dos NMEs para os estados 0_2^+ e 2^+, $M^{2\nu}(0_2^+)$ e $M_{GT}^{2\nu}(2_1^+)$. Identificou-se que o primeiro estudo para estados excitados foi realizado em (HOROI; STOICA; BROWN, 2007) e o segundo em (RADUTA; RADUTA, 2007; HOROI, 2013). Esses resultados, bem como os do NMEs $|M^{2\nu}(0_1^+)|$, são comparados com os obtidos aqui na Tabela 12. Cabe ressaltar que no estudos mencionados, as contribuições do tipo Fermi aos NMEs $M_F^{2\nu}(0_{f=1,2}^+)$ não são considerados. Portanto, estritamente falando os resultados deles para $|M^{2\nu}(0_{f=1,2}^+)|$ devem ser comparados com os nossos $|M_{GT}^{2\nu}(0_{f=1,2}^+)|$. Na parte inferior da Tabela 12 são apresentados os resultados para o decaimento ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo $(0_1^+, 0_2^+, 2_1^+)$. Os resultados dos cálculos anteriores (SUHONEN, 2012; HIRSCH et al., 1994; RUMYANTSEV; URIN, 1998; RAINA et al., 2006) são apresentados. É notável o fato que as diferenças entre nossos três cálculos são muito menores do que as diferenças com todos os outros trabalhos.

A discrepância entre os resultados para os NMEs apresentados na Tab. 12 vem do uso de diferentes modelos nucleares. Por exemplo, no trabalho de Suhonen (SUHONEN, 2012) é usado o Modelo de Comutador Múltiplo (MCM), projetado para conectar estados do núcleo ímpar-ímpar para estados excitados do núcleo par-par vizinho (SUHONEN, 2011). Nesse caso, esses estados intermediários do núcleo ímpar-ímpar são obtidos através da pn-QRPA na forma da Eq. (138), enquanto os estados excitados do núcleo par-par são gerados por uma QRPA com carga conservada (cc-QRPA). A dependência forte dos NMEs dentro do modelo pn-QRPA com relação ao parâmetro isoescalar do canal *pp* é bem conhecida e é frequêntemente discutida. Portanto, poderia ser interessante analisar essa dependência no presente modelo. Isso é feito na Figura 14 mostrando os NMEs $M_F^{2\nu}$, $M_{GT}^{2\nu}$ e $M^{2\nu}$ para o estado fundamental 0^+ nos núcleos ^{48}Ca e ^{96}Ru, como função dos parâmetros t e s. O valor experimental do $|M^{2\nu}(0_1^+)|$ também está presente na figura. Pode-se concluir que, dentro do presente modelo, essa dependência é apenas moderada. A mesma observação também é válida para todos os NMEs do 2ν-DBD NMEs.

É bem sabido que os valores relativamente pequenos dos NMEs obtidos com o modelo de pn-QRPA se devem à interferência destrutiva entre o *forward* e *backward* (FER-

REIRA et al., 2017), isto é, às correlações de estado fundamental (GSCs). Uma vez que o modelo (pn,2p2n)-QTDA não possui as GSCs, o mecanismo de redução tem origem diferente sendo produzido através da interação entre configurações de senioridade zero e senioridade quatro nos estados finais. Por exemplo, no caso do ^{48}Ca, dentro do espaço e_j e com o conjunto de parâmetros T1, os NMEs $M^{2\nu}$ para os três estados 0^+ mais baixos são $-0,040$, $-0,013$, $-0,040$. Por outro lado, quando apenas as configurações de senioridade-zero são consideradas, verifica-se: $-0,068$, $-0,016$, $-0,065$, respectivamente, o que confirma a afirmação sobre o mecanismo de redução,

6.4 **Meia-Vida**

Conhecendo os NMEs e os fatores cinemáticos $G^{\alpha}_{2\nu}(\mathcal{J}^+_f)$, as meias-vidas são calculadas através da Eq. (4). Na Tabela 13, os resultados obtidos para as meias-vidas $\tau^{2\beta^-}_{2\nu}(\mathcal{J}^+_f = 0^+_1, 0^+_2, 2^+_1)$ no ^{48}Ca, calculados com os spe e_j e os três conjuntos de parâmetros T1, T2 e T3, são comparados com os valores experimentais. Para o estado fundamental 0^+_1 os valores das meias-vidas estão em acordo com os valores experimentais e com os cálculos realizados com o modelo de camadas em (HOROI; STOICA; BROWN, 2007). Por outro lado, as meias-vidas obtidas para o primeiro estado 2^+_1 são menores por um fator de ~ 2. O mesmo acontece quando comparado com os valores obtidos com o modelo de camadas (HOROI; STOICA; BROWN, 2007). O fator é de ~ 4 quando comparado com o resultado obtido por Raduta (RADUTA; RADUTA, 2007).

No caso do ^{96}Ru, as meias-vidas $\tau^{\alpha}_{2\nu}(0^+_1)$ para diferentes modos de decaimento ($\alpha = 2\beta^+$, $e\beta^+$, $2e$) são dispostas na Tabela 14. Todos eles são maiores em uma a três ordens de magnitude quando comparados com estudos teóricos anteriores, que são mostrados na mesma tabela. As maiores discrepâncias estão no cálculo pn-QRPA feito em (HIRSCH et al., 1994), a origem das diferenças é difícil de elucidar, dada a diferença entre os dois modelos utilizados.

Os limites experimentais para as meia vida do ^{96}Ru são: $\tau^{2\beta^+}_{2\nu}(0^+_1) \geq 1,4\times10^{20}$ anos e $\tau^{e\beta^+}_{2\nu}(0^+_1) \geq 0,8\times10^{20}$ anos (BELLI et al., 2013). Assim, a partir da Tabela 14 nota-se que os resultados obtidos são nove ordens de magnitude maior para o modo $2\beta^+$ e quatro ordens de magnitude maior no modo $e\beta^+$. Isso, por sua vez, implica que a precisão das medidas necessita ser significativamente melhorada para observar esses processos. Nesse trabalho não foram calculadas as meias-vidas para os estados finais $\mathcal{J}^+_f = 0^+_2, 2^+_1$ do ^{96}Ru, uma vez que os correspndentes fatores cinemáticos G^{α} não estão disponíveis na literatura.

Tabela 13 - As Meias-Vidas calculadas $\tau_{2\nu}^{2\beta^-}(\mathcal{J}_f^+ = 0_1^+, 0_2^+, 2_1^+)$ para a transição ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti.

	0_1^+	0_2^+	2_1^+
T1	$4,01 \times 10^{19}$	$1,63 \times 10^{25}$	$5,54 \times 10^{23}$
T2	$2,90 \times 10^{19}$	$1,08 \times 10^{25}$	$4,76 \times 10^{23}$
T3	$1,91 \times 10^{19}$	$6,89 \times 10^{24}$	$4,03 \times 10^{23}$
Rad07			$1,72 \times 10^{24}$
Hor07	$3,3 \times 10^{19}$		$8,5 \times 10^{23}$
Bar15	$\left(4,4^{+0,6}_{-0,5}\right) \times 10^{19}$		

Legenda: As meias-vidas calculadas $\tau_{2\nu}^{2\beta^-}(\mathcal{J}_f^+ = 0_1^+, 0_2^+, 2_1^+)$ para a transição ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti com o spe e_j em função de todos os três parâmetros *pp*, e com $g_A = 1$, são confrontadas com os cálculos teóricos indicados por Rad07 (RADUTA; RADUTA, 2007), Hor07 (HOROI; STOICA; BROWN, 2007) e para os valores experimentais Bar15 (BARABASH, 2015). Na Eq. (4) foram usados os fatores cinemáticos $G_{2\nu}^{\alpha}(\mathcal{J}_f^+)$ para os $\mathcal{J}_f$ $0_1^+(= 1,56 \times 10^{-17}$ yr$^{-1})$ e $0_2^+(= 3,63 \times 10^{-22}$ yr$^{-1})$ da Ref. (KOTILA; IACHELLO, 2012), e $2_1^+(= 4,41 \times 10^{-18}$ yr$^{-1})$ obtido em (DOI et al., 1983).

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 10.

Tabela 14 - As meias-vidas calculadas $\tau_{2\nu}^{\alpha}(\mathcal{J}_f^+ = 0_1^+)$ em unidades de anos para o 2ν-DBD ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo.

α	Calculados	Hir94	Rum98	Rai06	Suh12
$2\beta^+$	$3,2 \times 10^{29}$	$5,8 \times 10^{26}$		$3,5 \times 10^{28}$	$1,0 \times 10^{27}$
β^+e	$7,6 \times 10^{24}$	$1,2 \times 10^{22}$	$8,6 \times 10^{22}$	$9,1 \times 10^{23}$	$2,3 \times 10^{23}$
ee	$1,3 \times 10^{24}$	$2,1 \times 10^{21}$	$1,4 \times 10^{22}$	$1,6 \times 10^{23}$	$3,9 \times 10^{21}$

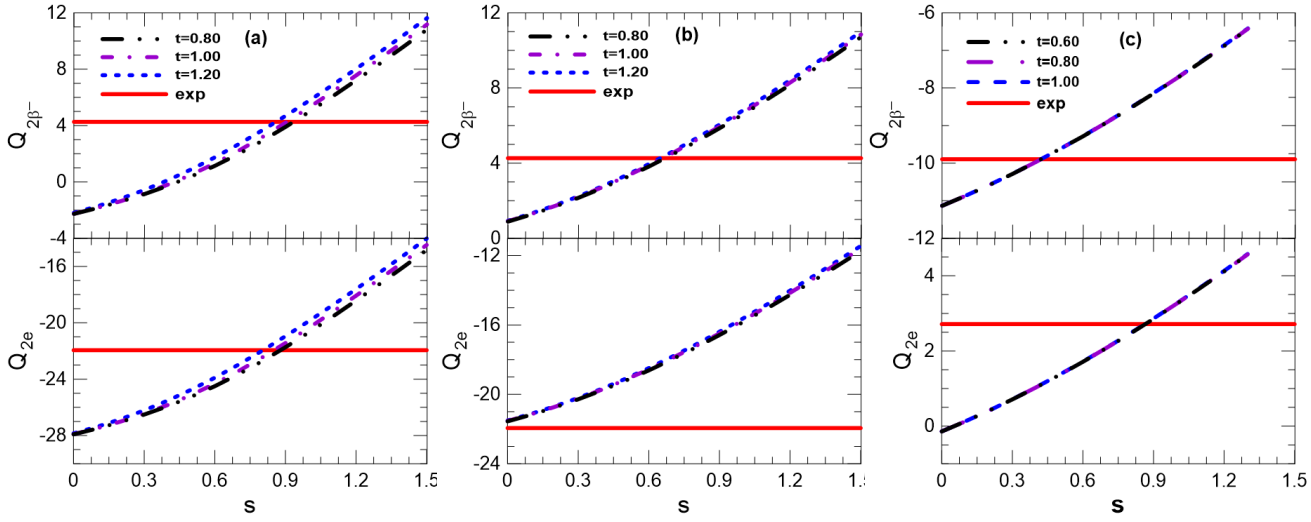
Legenda: As meias-vidas calculadas $\tau_{2\nu}^{\alpha}(\mathcal{J}_f^+ = 0_1^+)$ em unidades de anos para o 2ν-DBD ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo com o parâmetro T2 e $g_A = 1$ são mostrados e confrontados com os cálculos presentes na literatura: sendo Hir94 (HIRSCH et al., 1994), Rum08 (RUMYANTSEV; URIN, 1998), Rai06 (RAINA et al., 2006) e Suh12 (SUHONEN, 2012). Para os fatores cinemáticos presentes $G_{2\nu}^{\alpha}(\mathcal{J}_f^+)$ na Eq. (4) foram usados os valores calculados por (DOI; KOTANI, 1992), que são $2\beta^+(= 1,080 \times 10^{-26}$ anos$^{-1})$, $e\beta^+(= 0,454 \times 10^{-21}$ anos$^{-1})$, e $2e(= 2,740 \times 10^{-21}$ anos$^{-1})$.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 10.

6.5 **Valor-Q e espectro de energia**

Antes de iniciar a discussão dos valores Q, é conveniente lembrar que o fenômeno físico é permitido quando essa quantidade for positiva. Na Tabela 15 os valores experimentais para os $Q_{2\beta^-}$ e Q_{2e} são confrontados com os resultados obtidos com o modelo

Figura 15 - Comportamento dos Valores-Q em função dos parâmetros t e s.



Legenda: Valores $Q_{2\beta^-}$ e Q_{2e} em função dos parâmetros pp, para os nucleos ^{48}Ca com os dois conjuntos: spe e_j^{exp} (painel (a)) e spe e_j (painel (b)); e para o núcleo ^{96}Ru (painel (c)). Os valores experimentais também são mostrados.

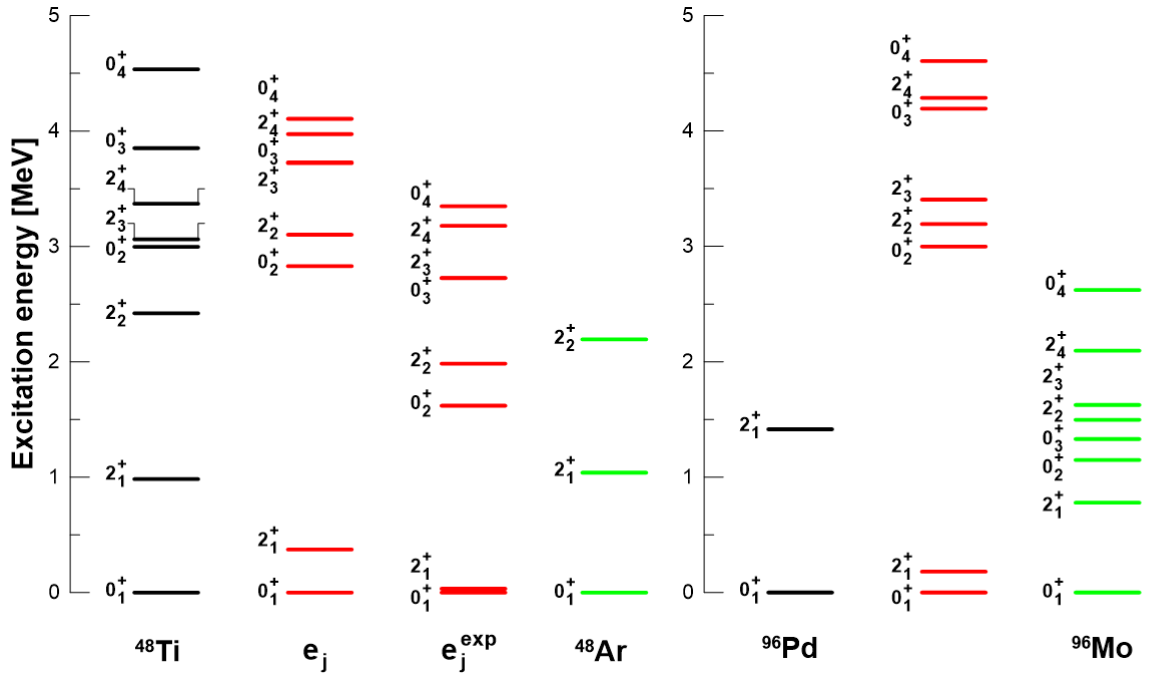
Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 11.

(pn,2p2n)-QTDA para os seguintes processos com dupla troca de carga: a) ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti e ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ar; e b) ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo e ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Pd. Nota-se que, o modelo é capaz de descrever razoavelmente bem não apenas os sinais dos valores Q mais também suas magnitudes, sem precisar modificar os parâmetros. Além disso, parece que o modelo identifica que tipo de decaimento das reações DCE podem acontecer em determindado núcleo.

A natureza dos valores Q é predominantemente determinada através da interação de emparelhamento entre prótons e nêutrons no campo médio de BCS, como pode ser visto na Equação. (153) ou mais precisamente, a partir da relação $Q_{2e} - Q_{2\beta^-} = 4(\lambda_p - \lambda_n)$. A dependência sobre a interação residual é bastante fraca e ocorre através da energia do estado fundamental $\omega_{0_1^+}$ no núcleo residual com $Q_{2e} + Q_{2\beta^-} = -2\omega_{0_1^+}$. Mais detalhes de como os valores Q dependem sobre as constantes do canal pp são mostrados na Figura 15.

Como foi dito antes, da mesma maneira que o modelo pn-QRPA (SR; SORENSEN, 1967) prevê os espectros de energias para os núcleos ímpar-ímpar $(N \mp 1, Z \pm 1)$, o modelo que apresentamos aqui (pn,2p2n)-QTDA prevê os espectros de energias dos núcleos par-par $(N \mp 2, Z \pm 2)$. Obviamente isso não é realista devido ao grande excesso de nêutrons. É pertinente mencionar que o uso da projeção de números de partículas no campo médio de BCS, conhecida como BCS projetada (PBCS) (KRMPOTIĆ et al., 1993) pode ser muito importante, uma vez que nessa aproximação diferentes espectros de energias são obtidos em núcleos com o mesmo número de massa, mas com diferentes números de prótons e nêutrons.

Figura 16 - Energias de excitação obtidas para os núcleos filhos ^{48}Ti e ^{96}Mo.



Legenda: O painel à esquerda contém as energias de excitação experimentais para os núcleos ^{48}Ti e ^{48}Ar que são comparadas com as energias teóricas obtidas com a parametrização T2 e spes e_j^{exp} e e_j^{exp}. O painel à direita contém as energias de excitação experimentais para os núcleos ^{96}Pd e ^{96}Mo, que são comparados com os cálculos teóricos obtidos com a parametrização T2.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 12.

Apesar dessa desvantagem, uma vez que não temos um campo médio em PBCS, foram calculados as energias de excitação para os estados finais 0^+ e 2^+ no núcleo filho ^{48}Ti, que se mostram consistentes com os dados experimentais, como mostra a Figura 16, onde as energias experimentais do ^{48}Ti e ^{48}Ar são comparadas com os cálculos realizados com os conjuntos spes e_j^{exp} e e_j, usando o parâmetro T2 do canal *pp*. Por causa do tamanho do valor $Q_{2\beta^-}$ $(= 4.268$ MeV), os decaimentos $2\beta^-$ são energeticamente possíveis para todos os estados exceto para o 0_4^+. No entanto, não foi encontrado na literatura nenhum cálculo detalhado do espectro de baixa energia ^{48}Ti para comparar com os resultados obtidos aqui.

O espectro de energia experimental para o ^{96}Pd e ^{96}Mo não são satisfatórios nos resultados obtidos nessa Tese, como mostra a Figura. 16. Uma vez que esses dois núcleos exibem espectros muito diferentes um do outro, nenhum modelo nuclear pode explicar suas propriedades simultaneamente.

Tabela 15 - Os Valores $Q_{2\beta}$ e Q_{2e} em função dos parâmetros T1, T2 e T3.

^{48}Ca			
	par	$Q_{\beta\beta}$	Q_{2e}
e_j^{exp}	T1	$4,980$	$-20,673$
	T2	$5,300$	$-20,353$
	T3	$5,780$	$-19,872$
e_j	T1	$6,611$	$-15,835$
	T2	$6,710$	$-15,736$
	T3	$6,820$	$-15,626$
Exp		$4,268$	$-21,943$
^{96}Ru			
e_j	T1	$-7,728$	$3,266$
	T2	$-7,722$	$3,272$
	T3	$-7,715$	$3,279$
Exp		$-9,896$	$2,714$

Legenda: Os valores $Q_{2\beta}$ e Q_{2e} (em unidades de MeV), para os três conjuntos de parâmetros *pp* T1, T2 e T3 dos seguintes processos com dupla troca de carga: a) ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti e ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ar, e b) ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo e ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Pd, que são confrontados com os valores experimentais.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 11.

Em particular, o estado fundamental do ^{96}Mo é considerado o estado fundamental (139), mas com as equações de BCS resolvidas para esse núcleo. Além disso, os estados finais $\mathcal{J}_f^+ = 2_1^+, 0_2^+, 2_3^+$ e 0_3^+ são considerados excitações básicas de cc (estados de um fônon cc-QRPA), enquanto os estados $\mathcal{J}_f^+ = 0_2^+$ e 2_2^+ são considerados compostos por dois fônons de 2_1^+ cc-QRPA. As energias de excitação do ^{96}Mo não foram calculadas em (SUHONEN, 2012) como foi feito aqui. O que é feito com o modelo cc-QRPA é ajustar as energias teóricas às experimentais, obtendo assim os parâmetros do canal *ph*. Isso é feito para cada estado de um fônon (SUHONEN, 2011).

É possível que as GSCs modifiquem significamente o espectro de energia dos estados finais ao mudar ao mudar 2p2n-QTDA para 2p2n-QRPA, como acontece com os espectros de estados intermediários quando ocorre a alteração de pn-TDA para pn-QRPA (SUHONEN, 2007).

6.6 **Dupla amplitude de transição e suas regras de soma**

Os resultados para as amplitudes de transição DCE $S_{J\mathcal{J}}^{\{\pm 2\}}$ definidas na Eq. (55), ambos para Fermi ($J = 0; \mathcal{J} = 0$) e Gamow-Teller ($J = 1; \mathcal{J} = 0, 2$) estão dispostos

na Tabela 16. As correspondentes regras de soma $S_{J\mathcal{J}}^{\{2\}}$, calculadas a partir da Eq. (56), também são mostradas e confrontadas com as regras de somas previstas $\mathsf{S}_{J\mathcal{J}}^{\{2\}}$, definidas nas equações (57), (58), e (59). Em adição, para saber a localização das ressonâncias DCE, foram calculados os centroides de energia usando a Eq. (161).

Para ter uma ídeia das magnitudes dos DBD, as amplitudes $B_{J\mathcal{J}_1}^{\{+2\}}$ ($B_{J\mathcal{J}_1}^{\{-2\}}$) para os estados 0_1^+ e 2_1^+ no núcleo filho ^{48}Ti (^{96}Mo) são dadas explicitamente. Todos os cálculos relacionados às amplitudes de transição foram realizados para os três parâmetros do canal *pp* definidos na Eq. (178), onde foi observado que todos os parâmetros produzem resultados idênticos. Também, nota-se que, pelo menos no caso de ^{48}Ca, existe uma certa dependência do resultados em relação aos espaços utilizados.

Os resultados derivados por outros autores para o ^{48}Ca, dentro do Modelo de Camadas para o espaço pf[21], são dados nas últimas três linhas da parte superior da Tabela 16. Especificamente, por: i) Sagawa e Uesaka (SAGAWA; UESAKA, 2016) com a interação GXFF1A, ii) Auerbach e Minh Loc (AUERBACH; LOC, 2018) com a interação KB3G e iii) Shimizu, Menéndez e Yako (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018), também com a interação KB3G. Os valores das amplitudes $S_{1\mathcal{J}=0,2}^{\{+2\}}$ atribuídos aos últimos autores foram extraídos da Figura (1b) que eles apresentam em (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018).

A partir dos resultados mostrados na Tabela 16, observa-se que:

1. As amplitudes $S_{J\mathcal{J}}^{\{-2\}}$ são sempre menores em comparação com as amplitudes $S_{J\mathcal{J}}^{\{+2\}}$, e como consequência $S_{J\mathcal{J}}^{\{+2\}} \cong \mathsf{S}_{J\mathcal{J}}^{\{2\}}$. Isso se deve claramente ao excesso de nêutrons relativamente grande.

2. Embora pequenas, as amplitudes $S_{J\mathcal{J}}^{\{-2\}}$ são significantes em relação ao DBD. Elas são proporcionalmente mais altas em ^{96}Ru, que decae por $2\beta^+$ do que no ^{48}Ca, que decai por $2\beta^-$.

3. A amplitude de Fermi $S_{00}^{\{2\}}$ desvia significamente a partir da regra de soma $\mathsf{S}_{00}^{\{2\}}$; 24% dentro do espaço e_j^{exp} e 40% para o espaço e_j no ^{48}Ca e 14% no ^{96}Ru. Uma possível explicação para essas diferenças são dadas no Apêndice B. [22]

4. Os termos proporcionais a C nas regras de soma de GT, equações (58), (59) e (60),

[21] É importante lembrar que o espaço adotado para o ^{48}Ca é um espaço de sete níveis ($2p-1f-2s-1d$) de partícula única, ambos para prótons e nêutrons, diferente do espaço pf que contém quatro níveis.

[22] Nesse caso, pode ser interessante analisar se o problema pode ser resolvido por projeção de número de partículas (KRMPOTIĆ et al., 1993).

Tabela 16 - Contribuições de Fermi e Gamow-Teller da dupla amplitude total de transição e suas regras de soma para os núcleos ^{48}Ca e ^{96}Ru.

Ref.	$J\mathcal{J}$	$S^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$	$S^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}}$	$S^{\{2\}}_{J\mathcal{J}}$	$\mathsf{S}^{\{2\}}_{J\mathcal{J}}$	$\bar{E}^{\{-2\}}_{00}$	$\bar{E}^{\{+2\}}_{00}$	$B^{\{2\}}_{J\mathcal{J}_1}$ $\times 10^{-3}$
				^{48}Ca				
e_j^{exp}	00	$140,1$	$0,94$	$139,1$	112	$21,7$	$17,61$	177
	10	$162,2$	$2,0$	$160,2$	$\leq 175,9$	$13,0$	$17,60$	1060
	12	$716,1$	$9,10$	$707,0$	$\geq 639,6$	$14,4$	$17,88$	$86,1$
e_j	00	$157,2$	$2,4$	$154,8$	112	$22,0$	$22,6$	$95,6$
	10	$189,9$	$5,9$	$184,0$	$\leq 198,6$	$14,3$	$17,5$	389
	12	$859,3$	$26,0$	$833,3$	$\geq 753,2$	$15,2$	$17,7$	$93,1$
Sag16	10	–	–	$135,5$	$\leq 144,0$	–	–	-
	12	–	–	$501,2$	$\geq 480,0$	–	–	-
Aue18	10	$131,8$	–	–	$\leq 144,0$	$21,9$	–	$24,0$
Shi18	10	$126,3$	–	–	–	–	–	–
	12	$511,0$	–	–	–	–	–	–
				^{96}Ru				
e_j	00	$128,0$	$0,1$	$127,9$	112	$21,3$	$19,9$	$0,005$
	10	$221,1$	$12,0$	$209,1$	$\leq 222,7$	$23,0$	$12,4$	$4,1$
	12	$981,4$	$49,0$	$932,4$	$\geq 873,5$	$23,2$	$11,8$	$11,1$
Bar15	00	–	–	–	–	–	–	$0,000$
	10	–	–	–	–	–	–	1570

Legenda: Resultados obtidos com a parametrização T2 do canal *pp* para: i) dupla amplitude total de transição $S^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}}$ (definida na Eq. (55)): para Fermi ($J=0;\mathcal{J}=0$) e para Gamow-Teller ($J=1;\mathcal{J}=0,2$); ii) As correspondentes regras de soma $S^{\{2\}}_{J\mathcal{J}}$ calculadas a partir da Eq. (56); iii) As regras de soma previstas $\mathsf{S}^{\{2\}}_{J\mathcal{J}}$ dadas pelas equações (57), (58) e (59); iv) O centroide de energia, definido na Eq. (161) e v) As amplitudes de transição $B^{\{2\}}_{J\mathcal{J}_1}(\equiv B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}_1})$ para ^{48}Ca e $B^{\{2\}}_{J\mathcal{J}_1}(\equiv B^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}_1})$ para o ^{96}Ru indo para os estados 0^+_1 e 2^+_1. Os resultados obtidos com o Modelo de Camadas também são mostrados, onde Sag16 (SAGAWA; UESAKA, 2016), Aue18 (AUERBACH; LOC, 2018), Shi18 (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018) e Bar15 (BAREA; KOTILA; IACHELLO, 2015). O significado das desigualdades é explicado no texto.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 13.

não são incluídas nos cálculos e isso é a razão das seguintes condições

$$\begin{aligned} S^{\{2\}}_{10} &\leq \mathsf{S}^{\{2\}}_{10}, \\ S^{\{2\}}_{12} &\geq \mathsf{S}^{\{2\}}_{12}. \end{aligned} \tag{179}$$

De fato, elas são cumpridas em todos os cálculos numéricos apresentados na ta-

bela 16.

5. Todas as amplitudes $S^{\{\mp 2\}}_{J\mathcal{J}}$ dependem bastante do espaço spe, mas muito fracamente da interação residual. Esse é o motivo de apresentarmos somente os cálculos com o parâmetro T2.

6. A mesma situação se aplica as regras de soma previstas $\mathsf{S}^{\{2\}}_{1\mathcal{J}}$, devido a sua dependência sobre o termo $S^{\{+1\}}_{1}$ (nas Eqs. 58, 59 e 60), que depende dos spe utilizados nos cálculos.

7. Os termos proporcionais a $S^{\{+1\}}_{1}$ nas Eqs. (58) e (59) são omitidos nas Refs.(SAGAWA; UESAKA, 2016; AUERBACH; LOC, 2018) e isso é a razão das regras de somas deles serem menores que às apresentadas aqui.

8. Como os valores para $S^{\{+2\}}_{1\mathcal{J}}$ não são explicitamente dados por Shimizu *et al.* (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018), então obtemos os valores de $S^{\{+2\}}_{1\mathcal{J}}$ a partir da figura Fig. 1b, presente em (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018). Esses são consistentes com os valores de $\mathsf{S}^{\{2\}}_{1\mathcal{J}}$ apresentadas nas Refs. (SAGAWA; UESAKA, 2016; AUERBACH; LOC, 2018).

9. Os resultados obtidos para as amplitudes de Gamow-Teller são sempre maiores que os cálculos realizados no Modelo de Camada. Também, nossas energias médias $\bar{E}^{\{+2\}}_{1\mathcal{J}}$ são significamente menores que os apresentados na Tabela II da Ref. (AUERBACH; LOC, 2018), e aquelas mostradas na Fig. (1b), por Shimizu*et al.* (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018). É difícil discernir se essa diferença se deve à deficiência de nosso modelo ou à diferença no tamanho dos espaços de partícula única.

10. A partir da comparação das amplitudes de transição $B^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}_1}$ correspondentes aos estados $\mathcal{J}^+_1 = 0^+_1$ e 2^+_1, com as duplas amplitudes totais de transição $S^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}}$, pode-se ter uma ídeia do quão pequenos são os NMEs.

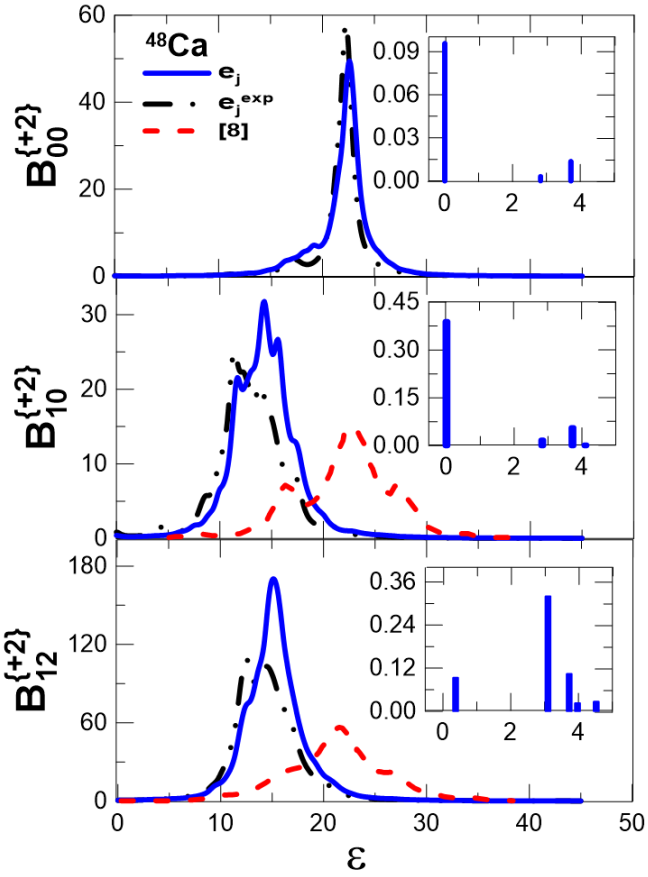
11. O tamanho da $B^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}_1}$, mostrado na última coluna da Tabela 16, quando comparadas com $S^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}}$, nos dar uma ideia do quão pequeno são dos NMEs.

12. A correspondência entre os NMEs de Fermi e Gamow-Teller, definidos em (BAREA; KOTILA; IACHELLO, 2015, Eq. (15)) com as amplitudes de transição $B^{\{+2\}}_{J=0,1}$ são

$$
\begin{aligned}
&|M^{(2\nu)}_{F}|^2 \rightarrow B^{\{+2\}}_{0,0}, \\
&|M^{(2\nu)}_{GT}|^2 \rightarrow 3B^{\{+2\}}_{1,0}.
\end{aligned}
\tag{180}
$$

Para mais detalhes ver também a Figura 21.

Figura 17 - Distribuições das duplas amplitudes de transição $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ para a transformação ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti.



Legenda: Distribuições das duplas amplitudes de transição $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ para a transformação ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti com os conjuntos de spe, e_j e e_j^{exp} em função das energias de excitação $\mathcal{E}$ do ^{48}Ti. A $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ é adimensional e suas energias são medidas em MeV. Os resultados com o Modelo de Camadas ([8] na figura), obtidos por Shimizu*et al.* (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018), com a interação KB3G, também são mostradas.

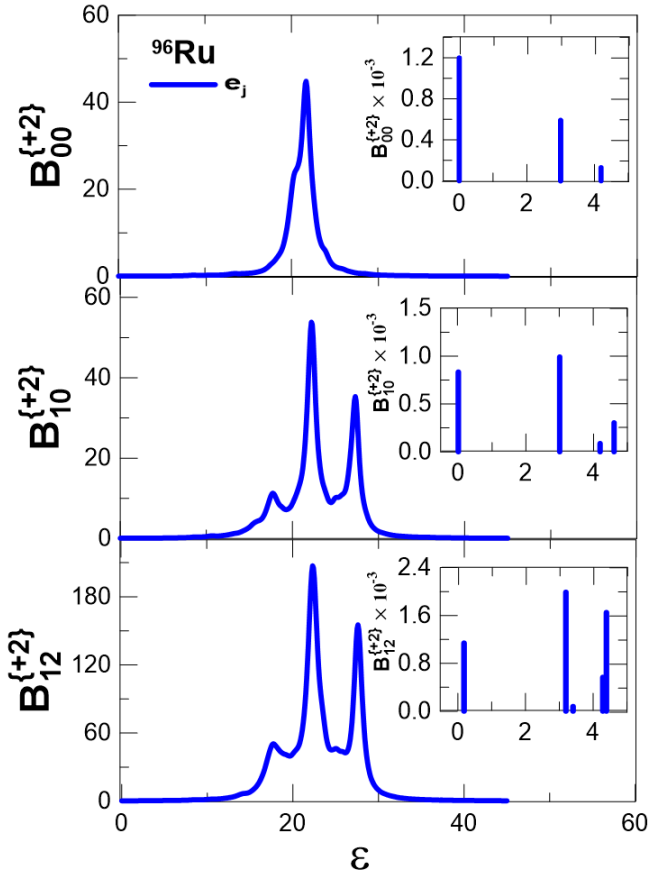
Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 14.

6.7 **Distribuições espectrais para duplas amplitudes de transição**

As distribuições espectrais para duplas amplitudes de transição $B^{\{\pm 2\}}_{J\mathcal{J}_f}$, estão expostas nas Figuras 18-20 em função da energia de excitação $\mathcal{E}$ do núcleo filho. Foi observado que elas dependem moderadamente dos espaços spe e menos ainda dos parâmetros *pp*. Para simular a resolução da energia experimental, elas foram envolvidas com lorentzianas de 1 MeV de largura. Além disso, essas figuras contêm inserções que mostram as amplitudes correspondentes nos estados mais baixos do núcleo final.

A distribuição de Fermi $B^{\{+2\}}_{00}$ em ^{48}Ti, mostrada no painel superior da Figura 19, exibe em torno de 22 MeV uma ressonância bastante estreita, geralmente chamada de Duplo Estado Análogo Isobárico (DIAS). Nos painéis central e inferior desta figura são

Figura 18 - Distribuições das duplas amplitudes de transição $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ para a transformação ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Pd.



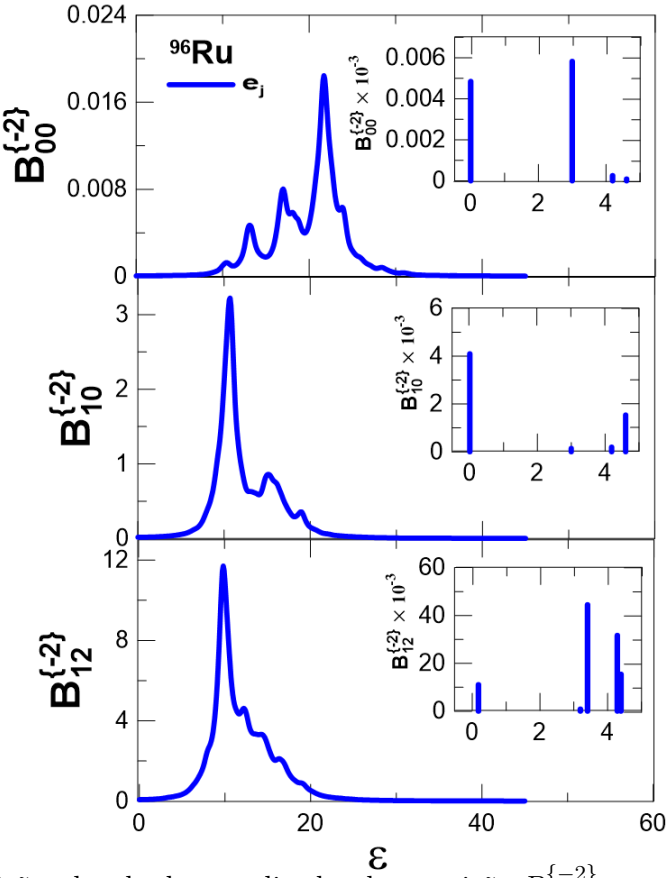
Legenda: Distribuições das duplas amplitudes de transição $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ para a transformação ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Pd, em função das energias de excitação $\mathcal{E}$ no ^{96}Pd. A $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ é adimensional e suas energias são medidas em MeV.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 14.

mostrados as distribuições de Gamow-Teller $B^{\{+2\}}_{10}$ e $B^{\{+2\}}_{12}$ para o mesmo núcleo final que também exibe uma estrutura semelhante de ressonância. Essas duplas ressonâncias Gigantes de Gamow-Teller (DGTGR) são muito mais amplas que o DIAS e estão centradas ao redor de 13 e 14 MeV, respectivamente. Nos cálculos de Shimizu (SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018), também são apresentadas essas ressonâncias ao redor de 20 MeV, que foram calculadas com o Modelo de Camadas usando a interação KB3G, também ilustradas na Figura 18.

Resultados análogos são apresentados para as densidades $B^{\{+2\}}_{J\mathcal{J}}$ e $B^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}}$ em ^{96}Pd e ^{96}Mo, respectivamente nas Figuras (19) e (20). Ambos são mostrados por causa do interesse no DBD^{+}, onde o comportamento das densidades $B^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}}$ para baixas energias são relevantes. Como visto na Figura 19, a DIAS no ^{96}Pd está localizado ao redor de 21 MeV, enquanto ambas ressonâncias de Gamow-Teller para $\mathcal{J} = 0^{+}$ e $\mathcal{J} = 2^{+}$ estão em cerca de 23 MeV. Essas ressonâncias não são associadas diretamente ao DBD do ^{96}Ru,

Figura 19 - Distribuições das duplas amplitudes de transição $B^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}}$ para o processo ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo.



Legenda: Distribuições das duplas amplitudes de transição $B^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}}$ para a transformação ^{96}Ru $\rightarrow^{96}$Mo, em função das energias de excitação $\mathcal{E}$ do ^{96}Mo. A $B^{\{-2\}}_{J\mathcal{J}}$ é adimensional e suas energias são medidas em MeV.

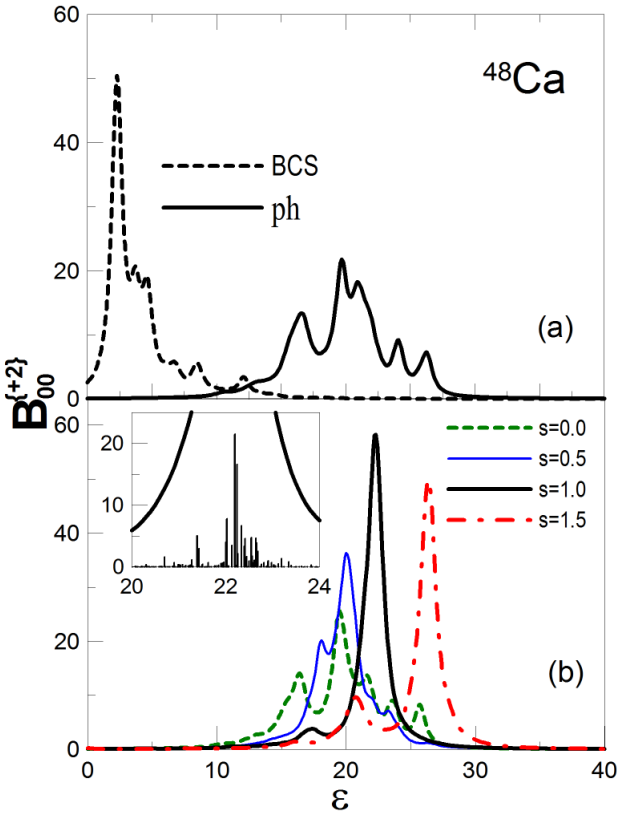
Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 15.

mas suas localizações em ^{96}Pd pode ser estudadas através de reações de íons pesados.

Os valores pequenos de $B^{\{-2\}}_{00}$ e suas distribuições de energia, mostradas na Figura 20, são completamente consistentes com os pequenos valores dos $M^{2\nu}_F(0^+_1)$ localizado na Tabela (12) e do $B^{\{-2\}}_{00_1}$ na Tabela (16). Além disso, as distribuições de $B^{\{-2\}}_{1\mathcal{J}=0,2}$ indica claramente que o DBD$^+$ do ^{96}Ru será muito lento.

O papel desempenhado pela interação residual na geração de DIAS é ilustrado na Figura 20, onde alguns resultados para a distribuição de Fermi $B^{\{+2\}}_{00}$ no ^{48}Ti são exibidas. O painel (a) da Figura 20 mostra como as duplas amplitudes obtidas com o modelo de BCS sobem em energia em cerca de 15 MeV, devido à interação residual no canal *ph*. No painel (b) da mesma figura, as distribuições de Fermi são mostradas quando a interação residual completa é considerada com $t = 1$ e vários valores de s. A concentração máxima da dupla amplitude ocorre quando $s = 1$ ao redor de 22 MeV, gerando assim o Duplo Estado Análogo Isobárico (DIAS). Isso, por sua vez, mostra claramente a importância a

Figura 20 - Distribuições das duplas amplitudes de transição de Fermi $B_{00}^{\{+2\}}$ para o processo ^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti.



Legenda: Distribuições das duplas amplitudes de transição de Fermi $B_{00}^{\{+2\}}$ para a transição^{48}Ca $\rightarrow^{48}$Ti, com o spe e_j^{exp}, para várias parametrizações da interação residual. A inserção no painel (b) mostra o fracionamento da dupla amplitude de transição de Fermi dentro do DIAS.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 15.

auto-consistência ($s = 1$) entre a força de emparelhamento e a interação isovetorial *pp*.

Mas, como visto na inserção do painel (b), nem toda a dupla amplitude de Fermi esta concetrada em um único estado. Isso aconteceria depois de passar do (pn,2p2n)-QTDA para o (pn,2p2n)-QRPA e, assim, redefinir completamente a simetria spin-isospin, o continua sendo uma questão em aberto.

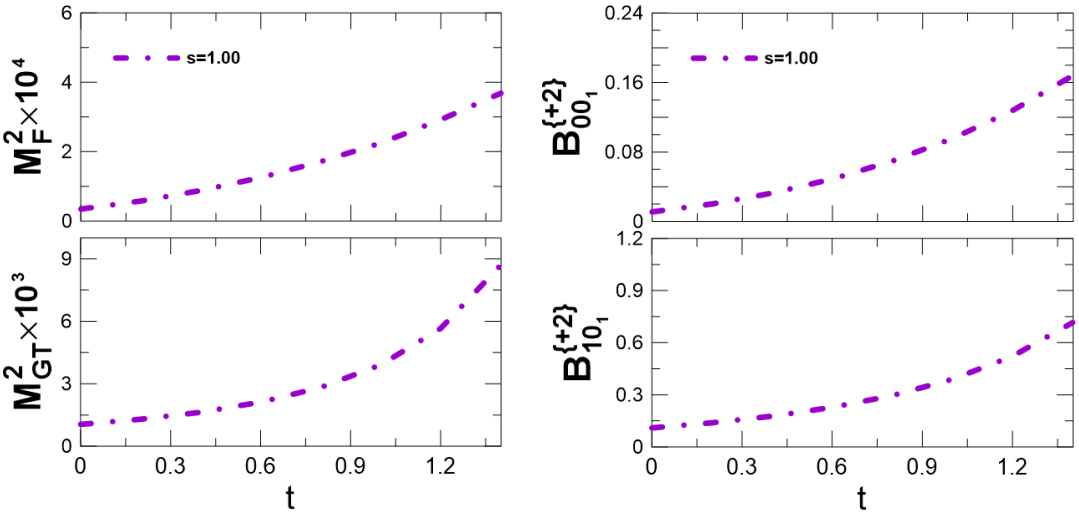
6.8 Comparação entre as duplas amplitudes de transição os NMEs do 2νDBD do estado fundamental

Na então chamada aproximação de fechamento, a soma sobre os estados intermediários J_α em (43) e (51) são tomadas por fechamento após substituir $E_{J_\alpha}^{\{\mp 1\}}$ em (45) por uma energia média $\bar{E}_J^{\{\mp 1\}}$ (DOI et al., 1983). Assim, exceto pelo denominador de

energia constante, as densidades $B^{\{\pm 2\}}_{J0_1}$ são as aproximações de fechamento dos quadrados dos NMEs. Em vista disso, para saber quão razoável a aproximação do fechamento é, pode ser interessante comparar os comportamentos dessas duas quantidades em função dos parâmetros *pp*.

Como exemplo, na Fig. 21 foram comparados $|M^{2\nu}_F(0^+_1)|^2$ e $|M^{2\nu}_{GT}(0^+_1)|^2$ com $B^{\{+2\}}_{00_1}$ e $B^{\{+2\}}_{10_1}$, respectivamente, calculadas com o conjunto e_j do ^{48}Ca. Os quadrados dos NMEs estão em unidades naturais, enquanto as duplas amplitudes são adimensionais. A proporcionalidade entre esses dois observáveis sugere que a aproximação de fechamento no caso do ^{48}Ca é razoável. Entretanto, não existe garantia que esse resultados seja sempre válido em geral.

Figura 21 - Comparação entre os quadrados dos NMEs com as duplas amplitudes de transição.



Legenda: Comparação dos quadrados dos NMEs de Fermi e Gamow-Teller, $|M^{2\nu}_F(0^+_1)|^2$ e $|M^{2\nu}_{GT}(0^+_1)|^2$ (ambos em unidades naturais) com as duplas amplitudes de transição $B^{\{+2\}}_{00_1}$ e $B^{\{+2\}}_{10_1}$ (ambos adimensionais), para o ^{48}Ca com o spe e_j. Essas quantidades são apresentadas como função do parâmetro t do canal pp da interação residual.

Fonte: FERREIRA et al, 2020, p. 15.

CONCLUSÃO

Esse estudo foi motivado pelo recente interesse de vários grupos (ŠIMKOVIC et al., 2013; FANG; FAESSLER; SIMKOVIC, 2015; ŠTEFÁNIK; ŠIMKOVIC; FAESSLER, 2015; ÜNLÜ; ÇAKMAK, 2015; HYVÄRINEN; SUHONEN, 2015) na relação entre a restauração de simetria SU(4) com os momentos nucleares do decaimento $2\nu2\beta^-$, apesar de já terem sido abordados por Francisco Krmpotić no início da década de 90 (HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990b; HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990a; HIRSCH; KRMPOTIĆ, 1990b; KRMPOTIĆ; HIRSCH; DIAS, 1992; KRMPOTIĆ, 1993; KRMPOTIĆ et al., 1993; KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994). Portanto, achou-se necessário atualizar essa relação e enfatizar mais uma vez a forte ligação entre a interação residual, as correlações do estado fundamental (GSCs), a Restauração Parcial de Simetria SU(4) (PSU4SR) e o mecanismo de redução dos momentos nucleares $2\nu2\beta^-$, tudo isso foi feito no domínio da pn-QRPA. Em adição, foi feita uma discurssão completa e atualizada dos momentos nucleares para do decaimento $0\nu2\beta^-$ levando em consideração as contribuições de magnetismo fraco e pseudoescalar, nas correntes eletrofracas.

A partir da comparação entre as Tabelas 5 e 6 os resultados de campo médio, descritos aqui dentro da aproximação de BCS, e os da interação residual, descritos com o modelo de pn-QRPA utilizando o método IV, fica evidente que a interação residual próton-nêutron tem um papel fundamental na PSU4SR e no mecanismo de *quenching*, não apenas no canal *pp* mas também no canal *ph*. Além disso, o dito sobre a interação residual é válido para qualquer outro cálculo de pn-QRPA, bem como para cálculos dos NMEs e as ressonâncias com troca de carga obtidos através do modelo de camadas. Em outras palavras, a interação residual suprime os resultados do decaimento $2\nu2\beta^-$ realizados pelo campo médio. Portanto, não é surpressa que todos os estudos teóricos, mostrados na Figura 12, produzem resultados semelhantes para os momentos $0\nu2\beta^-$, quando comparados com os resultados de campo médio.

Os resultados mostrados na Tabela 8 para os NMEs obtidos usando o Método IV para 2ν-DBDs dos núcleos ^{48}Ca e ^{96}Zr, mostram que isso também ocorre dentro do Método II. O método II é utilizado frequentemente na literatura, ajustando a amplitude isoescalar com as medidas experimentais dos momemtos nucleares da transição $2\nu2\beta^-$, procedimento ilustrado na Figura 11. As incertezas teóricas na Figura 12 são os mesmos 3% usados nas Tabelas 5 e 6, de tal maneira que elas também cubram os resultados de $M^{0\nu}_{\uparrow}$(IV) e $M^{0\nu}_{\downarrow}$(IV) presentes na Tabela 8, obtidas através de ajustes aos momentos experimentais $2\nu2\beta$.

O SMM, apresentado no apêndice B, nos mostra claramente que a PSU4SR dentro da QRPA é manifestada através de um efeito de cancelamento muito forte entre as contribuições de *forward* e de *backward* no canal partícula-partícula. Dentro do modelo

de QTDA e do Modelo de Camadas, o efeito de cancelamento é induzido a través das contribições de senioridade zero e senioridade quatro para os momentos nucleares DBD.

Em resumo, pode-se afirmar que a conquista central do presente trabalho é a constatação de que PSU4SR, impulsionado pela interação residual, é o principal ator na modelagem dos DBD, independentemente do modelo nuclear usado. Consciente desse fato, explorou-se essa propriedade relevante da interação residual o máximo possível. Talvez não fosse exagero dizer que as diferenças entre diferentes estudos teóricos se devem principalmente às diferentes maneiras de restaurar a simetria spin-isospin.

Estritamente falando, a restauração parcial de simetria SU(4) está presente em todos os cálculos de QRPA, pois todos eles envolvem uma interação residual. É melhor implementar a PSU4SR através dos mínimos da amplitude-β^+ ao invés de fazer o ajuste com os $\left|\mathcal{M}^{2\nu}_{exp}\right|$. Adicionamos aqui que a receita proposta para realizar essa restauração se baseia em argumentos fisicamente robustos, o que torna a teoria preditiva, produzindo os NMEs do 2ν-DBD da mesma ordem de magnitude que os experimentais, como mostra a Tabela 5. Isso é feito sem recorrer a nenhum parâmetro livre, que é uma conquista não menor, quando comparado com os resultados do campo médio, e com uma magnitude de ordem maior. Isto é mais um motivo para preferir nossa maneira de definir o parâmetro isovetor *pp* do formalismo padrão. O acordo com os dados experimentais $2\nu2\beta^-$ é apenas modesto, e é um tanto desconcertante que as estimativas de incertezas teóricas sejam maiores que as experimentais. Novamente, a razão para isso é que o valor de t está na região de colapso da QRPA para o 2ν-DBD. Mas isso está aberto a um estudo mais aprofundado, e é possível que, em um futuro não muito distante, sejam obtidos resultados teóricos mais precisos para os momentos nucleares do processo 2ν-DBD.

Além disso, dado o amplo uso do ajuste do parâmetro isovetorial do canal *pp* ao elemento de matriz $\left|M^{2\nu}_{exp}\right|$, é difícil dizer qual dos dois procedimentos, o do ajuste ou o da procura do mínimo, é preferível. Para discernir entre eles, pode ser útil analisar simultaneamente os decaimentos simples e duplos de GT na estrutura do PSU4SR. Um passo nessa direção foi dado há muito tempo por Krmpotić (HIRSCH; BAUER; KRMPOTIC, 1990), passo que agora deveria ser atualizado à luz dos recentes desenvolvimentos nessa direção, tais como os das Refs. (MADEY et al., 1989; HELMER et al., 1997; FREKERS et al., 2016; SARRIGUREN; MORENO; GUERRA, 2016; DELION; SUHONEN, 2017). No mesmo sentido, seria interessante estudar as primeiras transições beta proibidas (FREKERS et al., 2016) e suas respectivas ressonâncias gigantes (KRMPOTIĆ; EBERT; WILD, 1980; KRMPOTIĆ; NAKAYAMA; GALEAO, 1983), no contexto da simetria SU(4).

Mesmo diante de avanços nos cálculos de estrutura nuclear quando o Método IV é usado junto com a PSU4SR, ainda existem limitações quando o modelo de pn-QRPA é aplicado ao DBD. Limitações essas, que não nos permitem estudar a estrutura nuclear

dos estados excitados, a menos que aumente número de equações de pn-QRPA [23]. Outra limitação do modelo pn-QRPA é observada ao estudar as duplas amplitudes de transição, espectros de energias de Fermi e Gamow-Teller bem como a localização das duplas ressonâncias e as regras de soma dupla, que são observáveis relevantes para as reações com dupla troca de carga.

Então, com o objetivo de superar as limitações impostas pelo modelo de QRPA ao DBD, foi desenvolvido um modelo de estrutura que envolve excitações de duas quasipartículas (pn) e quatro quasipartículas (2p2n) sobre o campo médio de BCS, tornando-o capaz de descrever simultaneamente as amplitudes de transição do 2ν-DBD e das reações com Dupla Troca de Carga (DCE). Até agora isso só tem sido feito com o Modelo de Camadas, onde os DBD e DCE em geral são tratados separadamente, embora é bem sabido que eles estão intimamente relacionados. Como exemplo, os 2ν-DBD para o ^{48}Ca foram descritos em (RADUTA; RADUTA, 2007; HOROI; STOICA; BROWN, 2007), enquanto a distribuição da amplitude da transição $B^{\{+2\}}_{J^{\mathcal{J}}}$ e suas correspondentes amplitudes totais $S^{\{+2\}}_{J^{\mathcal{J}}}$ foram calculadas em (SAGAWA; UESAKA, 2016; AUERBACH; LOC, 2018; SHIMIZU; MENÉNDEZ; YAKO, 2018).

O modelo (pn,2p2n)-QTDA possui avanços adicionais sobre o modelo de QRPA, tais como:

1. Os NME's para o estado fundamental e para os estados excitados 0^+ e 2^+ são calculados simultaneamente. Para fazer o mesmo no modelo de pn-QRPA é necessário realizar cálculos suplementares através da QRPA sem troca de carga, o que gera a necessidade de incluir novos parâmetros.

2. Permite o cálculo dos valores-Q da reação para os 2ν-DBD. O valor de Q vai indicar qual tipo de processo DBD pode ter lugar na reação com DCE.

O modelo proposto, pode ser visto como uma extensão natural do modelo pn-QRPA para processos com DCE, uma vez que o modelo de pn-QRPA foi desenvolvido para processos de simples troca de carga (SR; SORENSEN, 1967). Embora que o modelo (pn,2p2n)-QTDA não possua correlações do estado fundamental como o pn-QRPA, mas este não é um sério inconveniente uma vez que, como foi discutido, o mecanismo de *quenching* dos NMEs é agora diferente.

Durante o desenvolvimento do presente estudo, Santopinto *et al.* (SANTOPINTO et al., 2018), baseado nos trabalhos de Bertulani (BERTULANI, 1993), tem reportado que, no limite de baixa transferência de momento, as reações induzidas por íons pesados, como

[23] Para obter os NMEs para estados excitados usando o Método II, são necessárias, como mínimo, três equações de QRPA, sendo duas com troca de carga, uma para o núcleo incial e outra para o núcleo final e outra sem troca de carga (SUHONEN, 2012). O problema desse procedimento é a necessidade de incluir mais parâmetros livres ao modelo.

por exemplo ^{40}Ca(^{18}O, ^{18}Ne)^{40}Ar, apresentam uma seção de espalhamento da seguinte forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \left| \frac{\mathcal{M}^{\mathcal{DGT}}_{\mathcal{T}\to\mathcal{T}'}\mathcal{M}^{\mathcal{DGT}}_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}'}}{E^{GT}_P + E^{GT}_T} + \frac{\mathcal{M}^{\mathcal{DF}}_{\mathcal{T}\to\mathcal{T}'}\mathcal{M}^{\mathcal{DF}}_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}'}}{E^{F}_P + E^{F}_T} \right|^2,$$

onde P e T representam núcleos projétil e alvo, respectivamente.

A correspondência com a notação presente neste trabalho é:
1) Para os elementos de matriz [24]

$$\mathcal{M}^{\mathcal{DGT}}_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}'} \to \mathcal{B}^{\{+\in\}}_{\infty\prime_\infty}, \quad \mathcal{M}^{\mathcal{DF}}_{\mathcal{P}\to\mathcal{P}'} \to \mathcal{B}^{\{+\in\}}_{\prime\prime_\infty},$$
$$\mathcal{M}^{\mathcal{DGT}}_{\mathcal{T}\to\mathcal{T}'} \to \mathcal{B}^{\{-\in\}}_{\infty\prime_\infty}, \quad \mathcal{M}^{\mathcal{DF}}_{\mathcal{T}\to\mathcal{T}'} \to \mathcal{B}^{\{+\in\}}_{\prime\prime_\infty}.$$

2) Para as energias (ver denominador da Eq. (44))

$$E^{GT}_P \to E^{\{+1\}}_{1_\alpha} - E^{\{0\}}_{0^+}, \; E^{F}_P \to E^{\{+1\}}_{0_\alpha} - E^{\{0\}}_{0^+},$$
$$E^{GT}_T \to E^{\{-1\}}_{1_\alpha} - E^{\{0\}}_{0^+}, \; E^{F}_T \to E^{\{-1\}}_{0_\alpha} - E^{\{0\}}_{0^+}.$$

Portanto, o presente modelo possui todos os ingredientes necessários para avaliar a seção de espalhamento de íons pesados no limite de baixo momento transferido. Para isso é necessário resolver dois problemas de autovalores, um para o núcleo alvo e outra para o núcleo projétil.

Como continuação do presente trabalho, pretende-se calcular os momentos nucleares 0ν-DBD com o modelo (pn,2p2n)-QTDA. Espera-se que a relação entre reações nucleares do DCE e DBD seja mais evidente no 0ν-DBD do que no 2ν-DBD, devido à baixa dependência com a energia nos denominadores de energia da equação (45).

Assim, os próximos passos serão:

1. Realizar uma avaliação completa de todos os núcleos que decaem via 2ν-DBD$^{\pm}$, junto com as amplitudes das reações nucleares associadas.

2. Aplicar o modelo (pn,2p2n)-QTDA ao 0ν-DBD.

3. Incluir as correlações do estado fundamental para o modelo (pn,2p2n)-QTDA e assim chegar no modelo (pn,2p2n)-QRPA.

4. Elaborar um SMM para o modelo (pn,2p2n)-QRPA.

[24] Exceto para as constantes de acoplamento c_{GT} e c_{GT} nas equações (11) e (12).

REFERÊNCIAS

AALSETH, C. et al. Search for Neutrinoless Double-β Decay in ^{76}Ge with the Majorana Demonstrator. **Physical Review Letters**, New York, v. 120, n. 13, p. 132502, 2018.

AGOSTINI, M. et al. Improved Limit on Neutrinoless Double-β Decay of ^{76}Ge from GERDA Phase II. **Physical Review Letters**, New York, v. 120, n. 13, p. 132503, 2018.

ALBERT, J. et al. Search for neutrinoless double-beta decay with the upgraded EXO-200 detector. **Physical Review Letters**, New York, v. 120, n. 7, p. 072701, 2018.

ALDUINO, C. et al. First Results from CUORE: A Search for Lepton Number Violation via $0\nu\beta\beta$ Decay of ^{130}Te. **Physical Review Letters**, New York, v. 120, n. 13, p. 132501, 2018.

ALMAR, R.; CIVITARESE, O.; KRMPOTIĆ, F. Properties of the odd-mass iodine isotopes in a particle-phonon coupling scheme. **Physical Review C**, New York, v. 8, n. 4, p. 1518, 1973.

AUERBACH, N.; LOC, B. M. Nuclear structure studies of double-charge-exchange gamow-teller strength. **Physical Review C**, New York, v. 98, n. 6, p. 064301, 2018.

BARABASH, A. Average and recommended half-life values for two-neutrino double beta decay. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 935, p. 52–64, 2015.

BARANGER, M. Extension of the shell model for heavy spherical nuclei. **Physical Review**, New York, v. 120, n. 3, p. 957, 1960.

BARBERO, C.; KRMPOTIĆ, F.; MARIANO, A. Two neutrino double beta decay within the ξ-approximation. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 345, n. 3, p. 192–196, 1995.

BARBERO, C. et al. Nuclear moments for the neutrinoless double beta decay II. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 650, n. 4, p. 485–497, 1999.

BARBERO, C. et al. Weak magnetism in two neutrino double beta decay. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 445, n. 3-4, p. 249–253, 1999.

BARBERO, C.; KRMPOTIĆ, F.; TADIĆ, D. Nuclear moments for the neutrinoless double beta decay. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 628, n. 1, p. 170–186, 1998.

BARBERO, C. A. **Decaimientos beta doble exóticos** *1999. 99 f.* Tese (Doutorado) — Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Ar, 1999.

BAREA, J.; KOTILA, J.; IACHELLO, F. Limits on neutrino masses from neutrinoless double-β decay. **Physical Review Letters**, New York, v. 109, n. 4, p. 042501, 2012.

BAREA, J.; KOTILA, J.; IACHELLO, F. Nuclear matrix elements for double-β decay. **Physical Review C**, New York, v. 87, n. 1, p. 014315, 2013.

BAREA, J.; KOTILA, J.; IACHELLO, F. $0\nu\beta\beta$ and $2\nu\beta\beta$ nuclear matrix elements in the interacting boson model with isospin restoration. **Physical Review C**, New York, v. 91, n. 3, p. 034304, 2015.

BAZIN, D. Nuclear physics: Symmetrical tin. **Nature**, [S.l.], v. 486, n. 7403, p. 330–331, 2012.

BELLI, P. et al. Search for 2β decays of ^{96}Ru and ^{104}Ru by ultralow-background HPGe γ spectrometry at LNGS: final results. **Physical Review C**, New York, v. 87, n. 3, p. 034607, 2013.

BERINGER, J. et al. Review of particle physics. **Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology**, New York, v. 86, n. 1, p. 010001, 2012.

BERNABEU, J. et al. Double beta decay and SU(4) symmetry. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, [S.l.], v. 46, n. 2, p. 323–328, 1990.

BERTULANI, C. Heavy-ion charge exchange in the eikonal approximation. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 554, n. 3, p. 493–508, 1993.

BOHR, A.; MOTTELSON, B. R. On the role of the δ resonance in the effective spin-dependent moments of nuclei. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 100, n. 1, p. 10–12, 1981.

BOHR, A.; MOTTELSON, B. R. **Nuclear structure. Volume I. Single-Particle motion**. [S.l.]: World Scientific, 1998. v. 1.

BROWN, G. et al. Calculation of spin-dependent parameters in the landau-migdal theory of nuclei. **Nuclear Physics A**, v. 286, n. 1, p. 191–210, 1977.

BROWN, G.; RHO, M. The giant Gamow-Teller resonance. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 372, n. 3, p. 397–417, 1981.

CAPPUZZELLO, F. et al. Heavy-ion double charge exchange reactions: A tool toward $0\nu\beta\beta$ nuclear matrix elements. **The European Physical Journal A**, [S.l.], v. 51, n. 11, p. 145, 2015.

CARBONE, D. et al. Experimental challenges in the measurement of double charge exchange reactions within the NUMEN project. In: **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.]: [s.n.], IOP Publishing, 2018. v. 1078, n. 1, p. 012008.

CASTILLO, H.; KRMPOTIC, F. On the interplay between particle hole and \ δ hole phonons. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 469, n. 4, p. 637–647, 1987.

CHA, D. $\sigma\tau_+$ strength in nuclei. **Physical Review C**, New York, v. 27, n. 5, p. 2269, 1983.

CIVITARESE, O.; FAESSLER, A.; TOMODA, T. Suppression of the two-neutrino double β decay. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 194, n. 1, p. 11–14, 1987.

COLLABORATION, C. et al. Improved Limit on Neutrinoless Double-Beta Decay in ^{130}Te with CUORE. 2020.

CONCI, C.; KLEMT, V.; SPETH, J. Application of the QRPA to the description of the low-lying levels in $^{146}_{64}\mathrm{Gd}_{82}$. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 148, n. 6, p. 405–412, 1984.

DELION, D.; SUHONEN, J. Two-neutrino $\beta\beta$ decays and low-lying Gamow-Teller β-strength functions in the mass range A= 70–176. **Physical Review C**, New York, v. 95, n. 3, p. 034330, 2017.

DESPLANQUES, B.; NOGUERA, S.; BERNABEU, J. Neutrinoless double beta decay in the SU(4) symmetry scheme. **Zeitschrift für Physik C Particles and Fields**, [S.l.], v. 51, n. 3, p. 499–502, 1991.

DOI, M.; KOTANI, T. Neutrino emitting modes of double beta decay. **Progress of theoretical physics**, Kyoto, v. 87, n. 5, p. 1207–1231, 1992.

DOI, M.; KOTANI, T. Neutrinoless modes of double beta decay. **Progress of Theoretical Physics**, Kyoto, v. 89, n. 1, p. 139–159, 1993.

DOI, M. et al. Double beta decay. **Progress of Theoretical Physics**, Kyoto, v. 69, n. 2, p. 602–635, 1983.

EDMONDS, A. R. **Angular momentum in quantum mechanics**. [S.l.]: Princeton university press, 1996.

ELLIOTT, S.; HAHN, A.; MOE, M. Direct evidence for two-neutrino double-beta decay in ^{82}Se. **Physical Review Letters**, New York, v. 59, n. 18, p. 2020, 1987.

ENGEL, J.; HAGEN, G. Corrections to the neutrinoless double-β-decay operator in the shell model. **Physical Review C**, New York, v. 79, n. 6, p. 064317, 2009.

ENGEL, J.; MENÉNDEZ, J. Status and future of nuclear matrix elements for neutrinoless double-beta decay: a review. **Reports on Progress in Physics**, [S.l.], v. 80, n. 4, p. 046301, 2017.

ENGELBRECHT, C.; LEMMER, R. Isospin polarization in the nuclear many-body problem. **Physical Review Letters**, New York, v. 24, n. 11, p. 607, 1970.

ESCUDEROS, A. et al. Contributions of different neutron pairs in different approaches for neutrinoless double-beta decay. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, [S.l.], v. 37, n. 12, p. 125108, 2010.

FANG, D.-L.; FAESSLER, A.; SIMKOVIC, F. Partial restoration of isospin symmetry for neutrinoless double β decay in the deformed nuclear system of ^{150}Nd. **Physical Review C**, New York, v. 92, n. 4, p. 044301, 2015.

FERREIRA, V. S. **Cálculos teórico-computacionais para duplo decaimento beta**. *2016. 128f.* Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Ilhéus, 2016.

FERREIRA, V. S. et al. Partial restoration of spin-isospin SU(4) symmetry and the one-quasiparticle random-phase approximation method in double-β decay. **Physical Review C**, New York, v. 96, n. 4, p. 044322, Oct 2017.

FERREIRA, V. S. et al. Nuclear structure model for double-charge-exchange processes. **Physical Review C**, New York, v. 101, n. 4, p. 044314, 2020.

FREKERS, D. et al. High energy-resolution measurement of the ^{82}Se(^{3}He, t)^{82}Br reaction for double-β decay and for solar neutrinos. **Physical Review C**, New York, v. 94, n. 1, p. 014614, 2016.

FUKUDA, Y. et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. **Physical Review Letters**, New York, v. 81, n. 8, p. 1562, 1998.

FURRY, W. H. On transition probabilities in double beta-disintegration. **Physical Review**, New York, v. 56, n. 12, p. 1184, 1939.

GIULIANI, A.; POVES, A. Neutrinoless double-beta decay. **Advances in High Energy Physics**, [S.l.], v. 2012, 2012.

GOEPPERT-MAYER, M. Double beta-disintegration. **Physical Review**, New York, v. 48, n. 6, p. 512, 1935.

GROUP, N. S. **Non-accelerator Group CANDLES experiments**. 2020. Url https://http://133.1.121.48/en/research/r01.html.

GYSBERS, P. et al. Discrepancy between experimental and theoretical β-decay rates resolved from first principles. **Nature Physics**, [S.l.], v. 15, n. 5, p. 428–431, 2019.

HELMER, R. et al. Gamow-Teller strength from the ^{76}Se(n, p)^{76}As reaction: Implications for the double β decay of ^{76}Ge. **Physical Review C**, New York, v. 55, n. 6, p. 2802, 1997.

HIRSCH, J.; BAUER, E.; KRMPOTIC, F. Gamow-Teller strength functions and two-neutrino double-beta decay. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 516, n. 2, p. 304–324, 1990.

HIRSCH, J.; KRMPOTIĆ, F. A new pn-QRPA method for the evaluation of double beta decay observable. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 246, n. 1-2, p. 5–9, 1990.

HIRSCH, J.; KRMPOTIĆ, F. Reconstruction of isospin and spin-isospin symmetries and double beta decay. **Physical Review C**, New York, v. 41, n. 2, p. 792, 1990.

HIRSCH, M. et al. Nuclear structure calculation of $\beta^+\beta^+$, β^+ec and $ecec$ decay matrix elements. **Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei**, [S.l.], v. 347, n. 3, p. 151–160, 1994.

HOMMA, H. et al. Systematic study of nuclear β decay. **Physical Review C**, New York, v. 54, n. 6, p. 2972, 1996.

HOROI, M. Shell model analysis of competing contributions to the double-β decay of ^{48}Ca. **Physical Review C**, New York, v. 87, n. 1, p. 014320, 2013.

HOROI, M.; STOICA, S.; BROWN, B. A. Shell-model calculations of two-neutrino double-β decay rates of ^{48}Ca with the GXPF1A interaction. **Physical Review C**, New York, v. 75, n. 3, p. 034303, 2007.

HYVÄRINEN, J.; SUHONEN, J. Nuclear matrix elements for $0\nu\beta\beta$ decays with light or heavy Majorana-neutrino exchange. **Physical Review C**, New York, v. 91, n. 2, p. 024613, 2015.

IWATA, Y. et al. Large-Scale Shell-Model Analysis of the Neutrinoless $\beta\beta$ decay of ^{48}Ca. **Physical Review Letters**, New York, v. 116, n. 11, p. 112502, 2016.

KORTELAINEN, M. et al. Nuclear energy density optimization: Shell structure. **Physical Review C**, New York, v. 89, n. 5, p. 054314, 2014.

KOTANI, T.; TAKASUGI, E. et al. Double beta decay and Majorana neutrino. **Progress of Theoretical Physics Supplement**, [S.l.], v. 83, p. 1–175, 1985.

KOTILA, J.; IACHELLO, F. Phase-space factors for double-β decay. **Physical Review C**, New York, v. 85, n. 3, p. 034316, 2012.

KRAMP, J. et al. Nuclear two-photon decay in $0^+ \rightarrow 0^+$ transitions. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 474, n. 2, p. 412–450, 1987.

KRMPOTIC, F. **Double beta decay, neutrino physics, nuclear structure and isospin and spin-isospin symmetries**. [S.l.], 1989.

KRMPOTIĆ, F. General behavior of double beta decay amplitudes in the quasiparticle random phase approximation. **Physical Review C**, New York, v. 48, n. 3, p. 1452, 1993.

KRMPOTIĆ, F. A novel nuclear model for double beta decay. **Fizika B**, v. 14, n. 1, p. 139, Jan 2005.

KRMPOTIĆ, F.; EBERT, K.; WILD, W. Charge-exchange collective modes and beta decay processes in the lead region. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 342, n. 3, p. 497–527, 1980.

KRMPOTIĆ, F.; HIRSCH, J.; DIAS, H. Double-beta decay within a single-mode model. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 542, n. 1, p. 85–96, 1992.

KRMPOTIĆ, F. et al. Ikeda sum rule, self-consistency and double-beta decay in the renormalized quasiparticle random phase approximation. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 612, n. 2, p. 223–238, 1997.

KRMPOTIĆ, F. et al. Projected linear response theory for charge-exchange excitations and double beta decay. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 319, n. 4, p. 393–400, 1993.

KRMPOTIĆ, F.; NAKAYAMA, K.; GALEAO, A. P. Giant first-forbidden resonances. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 399, n. 2, p. 478–502, 1983.

KRMPOTIĆ, F.; SHARMA, S. S. Double-beta decay in pn-QRPA model with isospin and SU(4) symmetry constraints. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 572, n. 2, p. 329–348, 1994.

LANE, A.; MARTORELL, J. The random phase approximation: Its role in restoring symmetries lacking in the hartree-fock approximation. **Annals of Physics**, v. 129, n. 2, p. 273–302, 1980.

LEE, H.-C. Ground-state correlation and the isobaric analog state. **Physical Review Letters**, New York, v. 27, n. 4, p. 200, 1971.

LEE, M. H. Amore: A search for neutrinoless double-beta decay of ^{100}Mo using low-temperature molybdenum-containing crystal detectors. **arXiv preprint arXiv:2005.05567**, [S.l.], 2020.

LI, H.; REN, Z. et al. Calculations of two-neutrino double-β decay for fpg shell nuclei. **Physical Review C**, New York, v. 96, n. 6, p. 065503, 2017.

LUTOSTANSKY, Y. S.; TIKHONOV, V. Charge-exchange resonances and restoration of the wigner SU(4)-symmetry in heavy and superheavy nuclei. In: **EPJ Web of Conferences**. [S.l.]: [s.n.], 2016. v. 107, p. 06004.

LUTOSTANSKY, Y. S.; TIKHONOV, V. N. Restoration of Wigner supersymmetry in heavy and superheavy nuclei. **JETP letters**, [S.l.], v. 102, n. 1, p. 7–10, 2015.

MADEY, R. et al. Low-lying structures in the Gamow-Teller strength functions for the double-beta-decaying nuclei ^{76}Ge, ^{82}Se, ^{128}Te, and ^{130}Te. **Physical Review C**, New York, v. 40, n. 2, p. 540, 1989.

MENENDEZ, J. et al. Disassembling the nuclear matrix elements of the neutrinoless double beta decay. **arXiv preprint arXiv:0801.3760**, 2008.

MUTO, K. Sum rules for double Gamow-Teller excitation. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 277, n. 1-2, p. 13–17, 1992.

NAKAYAMA, K.; GALEAO, A. P.; KRMPOTIĆ, F. On the energetics of the Gamow-Teller resonances. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 114, n. 4, p. 217–221, 1982.

NEGELE, J. W.; ORLAND, H. **Quantum many-particle systems (Advanced Book classics)**. [S.l.]: Westview Press, 1998.

PAAR, N. et al. Quasiparticle random phase approximation based on the relativistic Hartree-Bogoliubov model. **Physical Review C**, New York, v. 67, n. 3, p. 034312, 2003.

PAAR, N. et al. Inclusive charged-current neutrino-nucleus reactions calculated with the relativistic quasiparticle random-phase approximation. **Physical Review C**, New York, v. 77, n. 2, p. 024608, 2008.

PAAR, V. Coupling of a three-particle (hole) valence-shell cluster to quadrupole vibrations (alaga model): The Z= 50 region: odd Ag and I isotopes; and the Z= 28 region: odd Mn and Ga isotopes. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 211, n. 1, p. 29–76, 1973.

PACEARESCU, L.; FAESSLER, A.; ŠIMKOVIC, F. Nuclear deformation and the double-beta decay. **Physics of Atomic Nuclei**, [S.l.], v. 67, n. 6, p. 1210–1215, 2004.

PAL, M.; GAMBHIR, Y.; RAJ, R. Two-and Four-Quasiparticle States in Spherical Vibrational Nuclei. **Physical Review**, New York, v. 155, n. 4, p. 1144, 1967.

PIRINEN, P.; SUHONEN, J. Systematic approach to β and $2\nu\beta\beta$ decays of mass A= 100–136 nuclei. **Physical Review C**, New York, v. 91, n. 5, p. 054309, 2015.

RADUTA, A.; RADUTA, C. Double beta decay to the first 2^+ state within a boson expansion formalism with a projected spherical single particle basis. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 647, n. 4, p. 265–270, 2007.

RAINA, P. et al. The $0^+ \rightarrow 0^+$ positron double-β decay with emission of two neutrinos in the nuclei ^{96}Ru, ^{102}Pd, ^{106}Cd and ^{108}Cd. **The European Physical Journal A-Hadrons and Nuclei**, [S.l.], v. 28, n. 1, p. 27, 2006.

RAJ, R.; RUSTGI, M. Modified Tamm-Dancoff Approximation for nuclei with unfilled neutron and proton shells. **Physical Review**, New York, v. 178, n. 4, p. 1556, 1969.

RING, P.; SCHUCK, P. **The nuclear many-body problem**. [S.l.]: Springer Science & Business Media.

RODIN, V.; FAESSLER, A. Fully renormalized quasiparticle random-phase approximation fulfills ikeda sum rule exactly. **Physical Review C**, New York, v. 66, n. 5, p. 051303, 2002.

RODIN, V. et al. Uncertainty in the $0\nu\beta\beta$ decay nuclear matrix elements. **Physical Review C**, New York, v. 68, n. 4, p. 044302, 2003.

RODIN, V. et al. Assessment of uncertainties in QRPA $0\nu\beta\beta$-decay nuclear matrix elements. **arXiv preprint nucl-th/0503063**, [S.l.], 2005.

ROWE, D. Equations-of-motion method and the extended shell model. **Reviews of Modern Physics**, [S.l.], v. 40, n. 1, p. 153, 1968.

ROWE, D. J. **Nuclear collective motion: models and theory**. [S.l.]: World Scientific, 2010.

RUMYANTSEV, O.; URIN, M. The strength of the analog and Gamow-Teller giant resonances and hindrance of the $2\nu\beta\beta$-decay rate. **Physics Letters B**, New York, v. 443, n. 1-4, p. 51–57, 1998.

SAGAWA, H.; UESAKA, T. Sum rule study for double Gamow-Teller states. **Physical Review C**, New York, v. 94, n. 6, p. 064325, 2016.

SAMANA, A. R.; KRMPOTIĆ, F.; BERTULANI, C. QRAP: A numerical code for projected (Q)uasiparticle (RA)ndom (P)hase approximation. **Computer Physics Communications**, [S.l.], v. 181, n. 6, p. 1123–1135, 2010.

SANTOPINTO, E. et al. Heavy-ion double-charge-exchange and its relation to neutrinoless double-β decay. **Physical Review C**, New York, v. 98, n. 6, p. 061601, 2018.

SARRIGUREN, P.; MORENO, O.; GUERRA, E. M. D. Nuclear structure calculations for two-neutrino double-β decay. **Advances in High Energy Physics**, [S.l.], v. 2016, 2016.

SATULA, W. et al. Isospin mixing in nuclei within the nuclear density functional theory. **Physical Review Letters**, New York, v. 103, n. 1, p. 012502, 2009.

SCHWIERZ, N.; WIEDENHOVER, I.; VOLYA, A. Parameterization of the woods-saxon potential for shell-model calculations. **arXiv preprint arXiv:0709.3525**, [S.l.], 2007.

SHIMIZU, N.; MENÉNDEZ, J.; YAKO, K. Double Gamow-Teller Transitions and its Relation to Neutrinoless $\beta\beta$ Decay. **Physical Review Letters**, New York, v. 120, n. 14, p. 142502, 2018.

SHUKLA, A.; SAHU, R.; KOTA, V. Deformed shell model results for two-neutrino positron double-β decay of ^{74}se. **Physical Review C**, New York, v. 80, n. 5, p. 057305, 2009.

ŠIMKOVIC, F. et al. $0\nu\beta\beta$-decay nuclear matrix elements with self-consistent short-range correlations. **Physical Review C**, New York, v. 79, n. 5, p. 055501, 2009.

ŠIMKOVIC, F. et al. Anatomy of the $0\nu\beta\beta$ nuclear matrix elements. **Physical Review C**, New York, v. 77, n. 4, p. 045503, 2008.

ŠIMKOVIC, F.; PACEARESCU, L.; FAESSLER, A. Two-neutrino double beta decay of ^{76}Ge within deformed QRPA. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 733, n. 3-4, p. 321–350, 2004.

ŠIMKOVIC, F. et al. Additional nucleon current contributions to neutrinoless double β decay. **Physical Review C**, New York, v. 60, n. 5, p. 055502, 1999.

ŠIMKOVIC, F. et al. $0\nu\beta\beta$ and $2\nu\beta\beta$ nuclear matrix elements, quasiparticle random-phase approximation, and isospin symmetry restoration. **Physical Review C**, New York, v. 87, n. 4, p. 045501, 2013.

SONG, L. et al. Relativistic description of nuclear matrix elements in neutrinoless double-β decay. **Physical Review C**, New York, v. 90, n. 5, p. 054309, 2014.

SR, J. A. H.; SORENSEN, R. A. Gamow-Teller beta decay in heavy spherical nuclei and the unlike particle-hole rpa. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 98, n. 3, p. 542–568, 1967.

STAUDT, A.; MUTO, K.; KLAPDOR-KLEINGROTHAUS, H. Calculation of 2ν and 0ν double-beta decay rates. **EPL (Europhysics Letters)**, [S.l.], v. 13, n. 1, p. 31, 1990.

ŠTEFÁNIK, D.; ŠIMKOVIC, F.; FAESSLER, A. Structure of the two-neutrino double-β decay matrix elements within perturbation theory. **Physical Review C**, New York, v. 91, n. 6, p. 064311, 2015.

STOICA, S.; MIREA, M. Phase space factors for double-beta decays. **Frontiers in Physics**, Frontiers, [S.l.], v. 7, p. 12, 2019.

SUHONEN, J. **From nucleons to nucleus: concepts of microscopic nuclear theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.

SUHONEN, J. Effects of orbital occupancies and spin–orbit partners II: $0\nu\beta\beta$ decays of ^{76}Ge, ^{82}Se and ^{136}xe to first excited 0^+ states. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 853, n. 1, p. 36–60, 2011.

SUHONEN, J. Theoretical investigation of the double-β processes in ^{96}Ru. **Physical Review C**, New York, v. 86, n. 2, p. 024301, 2012.

SUHONEN, J. T. Value of the axial-vector coupling strength in β and $\beta\beta$ decays: a review. **Frontiers in Physics**, [S.l.], v. 5, p. 55, 2017.

SUZUKI, T. The giant Gamow-Teller resonance states. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 379, n. 1, p. 110–124, 1982.

THOULESS, D. Vibrational states of nuclei in the random phase approximation. **Nuclear Physics**, [S.l.], v. 22, n. 1, p. 78–95, 1961.

TOIVANEN, J.; SUHONEN, J. Renormalized proton-neutron quasiparticle random-phase approximation and its application to double beta decay. **Physical Review Letters**, New York, v. 75, n. 3, p. 410, 1995.

TOMODA, T. Double beta decay. **Reports on Progress in Physics**, [S.l.], v. 54, n. 1, p. 53, 1991.

TOWNER, I. S. Quenching of spin matrix elements in nuclei. **Physics Reports**, [S.l.], v. 155, n. 5, p. 263–377, 1987.

ÜNLÜ, S.; ÇAKMAK, N. The effect of restoration of broken SU(4) symmetry on $2\nu\beta^-\beta^-$ decay rates. **Nuclear Physics A**, [S.l.], v. 939, p. 13–20, 2015.

VARSHALOVICH, D. A.; MOSKALEV, A. N.; KHERSONSKII, V. K. **Quantum theory of angular momentum**. [S.l.]: World Scientific, 1988.

VOGEL, P.; ERICSON, M.; VERGADOS, J. Sum rules for two-particle operators and double beta decay. **Physics Letters B**, [S.l.], v. 212, n. 3, p. 259–263, 1988.

VOGEL, P.; ORMAND, W. Spin-isospin SU(4) symmetry in sd-and fp-shell nuclei. **Physical Review C**, New York, v. 47, n. 2, p. 623, 1993.

VOGEL, P.; ZIRNBAUER, M. Suppression of the two-neutrino double-beta decay by nuclear-structure effects. **Physical Review Letters**, New York, v. 57, n. 25, p. 3148, 1986.

WALECKA, J. D. **Theoretical nuclear and subnuclear physics**. [S.l.]: World Scientific, 2004.

YAO, J. et al. Systematic study of nuclear matrix elements in neutrinoless double-β decay with a beyond-mean-field covariant density functional theory. **Physical Review C**, New York, v. 91, n. 2, p. 024316, 2015.

YOSHIDA, S. et al. Systematic shell-model study of β-decay properties and gamow-teller strength distributions in A $\approx$ 40 neutron-rich nuclei. **Physical Review C**, New York, v. 97, n. 5, p. 054321, 2018.

YOUSEF, M. S. et al. Matrix elements of two–neutrino double beta decay in deformed nuclei. **Nuclear Physics B (Proceedings Supplements)**, [S.l.], n. 188, p. 56–58, 2009.

YOUSEF, M. S. et al. Two-neutrino double β decay of deformed nuclei within the quasiparticle random-phase approximation with a realistic interaction. **Physical Review C**, New York, v. 79, n. 1, p. 014314, 2009.

ZHENG, D.; ZAMICK, L.; AUERBACH, N. Generalization of the sum rule for double Gamow-Teller operators. **Physical Review C**, New York, v. 40, n. 2, p. 936, 1989.

APÊNDICE A – Símbolos $3j$, $6j$ e $9j$

Nesse apêndice contém as definições dos simbolos de Wigner $3j$, $6j$ e $9j$ para o acoplamento de dois, três e quatro momentos angulares acoplados a um momento angular j com projeção m, respectivamente, em termos dos coeficientes de Clebsch-Gordan. Todo apêndice foi baseado nos seguintes livros-texto (SUHONEN, 2007; EDMONDS, 1996; VARSHALOVICH; MOSKALEV; KHERSONSKII, 1988).

A.1 Coeficientes de Clebsch-Gordan

Os coeficientes de Clebsch-Gordan são coeficientes da adição de vetores. Eles iniciam uma regra importante na decomposição de representações redutíveis de um grupo em representações irredutíveis (VARSHALOVICH; MOSKALEV; KHERSONSKII, 1988).

Tomando j_1 e j_2, como dois momentos angulares com projeções m_1 m_2 sobre o eixo-z. Um coeficiente de Clebsch-Gordan representa a amplitude de probabilidade que j_1 e j_2 são acoplados a um momento angular j com projeção m.

De acordo com as regras de adição $j = j_1 + j_2$ desaparecem se as condições da desigualdade triangular $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ com o requerimento $m_1 + m_2 = m$. Dessa maneira, os coeficientes de Clebsch-Gordan, $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 || j_1 j_2 j m\rangle = (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)$, são elementos de uma matriz unitária que realiza uma transformação direta ou inversa entre os vetores de estado $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$ e $|j_1 j_2 j m\rangle$, com as seguintes relações de unitariedades

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)(j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m') &= \delta_{jj'}\delta_{mm'} \\
\sum_{jm} (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm)(j_1 m_1' j_2 m_2' | jm) &= \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}.
\end{aligned}$$

A.2 Símbolo $3j$ de Wigner

O simbolo $3j$ de Wigner é definido por

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv (-1)^{j_1 - j_2 - m_3} \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3) \tag{181}$$

representa a amplitude de probabilidade que três momentos angulares j_1, j_2 e j_3 com projeções m_1, m_2 e m_3, onde a fase $(-1)^{j_1 - j_2 + j_3}$ é escolhida de maneira tal que qualquer permutação ciclica das colunas conduzem ao mesmo resultado dos símbolo $3j$ e dos

coeficientes de Clebsch-Gordan

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix},$$

enquanto uma permutação ímpar é equivalente a multiplicação por $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$:

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}.$$

A.3 Símbolo $6j$ de Wigner

O símbolo $6j$ de Wigner é definido por

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 \\ m_{12} m_{23} m}} (-1)^{j_3+j+j_{23}-m_3-m-m_{23}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_1 & j & j_{23} \\ m_1 & -m & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_{23} \\ m_3 & m_2 & -m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j & j_{12} \\ -m_3 & m & m_{12} \end{pmatrix}, \quad (182)$$

são relacionados aos coeficientes de transfomação entre diferentes esquemas de acoplamentos de três momentos angulares.

A.4 Símbolo $9j$ de Wigner

O símbolo $9j$ de Wigner é definido por

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix} = \sum_{\substack{m_1 m_2 m_3 m_4 \\ m_{12} m_{34} \\ m_{13} m_{24} m}} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ m_1 & m_2 & m_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_{34} \\ m_3 & m_4 & m_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & j \\ m_{13} & m_{24} & m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_{13} \\ m_1 & m_3 & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & j_4 & j_{24} \\ m_2 & m_4 & m_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{24} & j \\ m_{13} & m_{24} & m \end{pmatrix}. \quad (183)$$

APÊNDICE B – QRPA para Modelo de Modo Único (SMM)

No SMM existe apenas um estado intermediário α, assim os elementos de matriz dentro da RPA (104) tornam-se (ver (KRMPOTIĆ, 2005, Eqs.(28-31))):

$$\begin{aligned} A_{J^\pi} &= \omega_0 + [(u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2)\mathrm{F}_{J^\pi}(pn) + (u_p^2 u_n^2 + v_p^2 v_n^2)\mathrm{G}_{J^\pi}(pn)], \\ B_{J^\pi} &= 2v_p u_n u_p v_n \left[\mathrm{F}_{J^\pi}(pn) - \mathrm{G}_{J^\pi}(pn)\right], \end{aligned} \tag{184}$$

onde

$$\omega_0 = -\frac{1}{4}[\mathrm{G}_{0^+}(pp) + \mathrm{G}_{0^+}(nn)] \tag{185}$$

é a energia (BCS), e $\mathrm{G}_{J^\pi}(pn) = \mathrm{G}(\mathrm{pn}, \mathrm{pn}; \mathrm{J}^\pi)$ e $\mathrm{F}_{J^\pi}(pn) = \mathrm{F}(\mathrm{pn}, \mathrm{pn}; \mathrm{J}^\pi)$.

Além disso, a partir da eq. (119) obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_{J^\pi} &= \sqrt{A_{J^\pi}^2 - B_{J^\pi}^2}, \\ X_{J^\pi} &= \frac{A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi}}{\sqrt{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 - B_{J^\pi}^2}}, \\ Y_{J^\pi} &= \frac{-B_{J^\pi}}{\sqrt{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 - B_{J^\pi}^2}}, \end{aligned} \tag{186}$$

e

$$\begin{aligned} (X_{J^\pi}^2 + Y_{J^\pi}^2) &= \frac{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 + B_{J^\pi}^2}{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 - B_{J^\pi}^2}, \\ X_{J^\pi} Y_{J^\pi} &= -\frac{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi}) B_{J^\pi}}{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 - B_{J^\pi}^2}. \end{aligned} \tag{187}$$

Resultando em

$$\rho_{J^\pi} = \frac{\left[(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 + B_{J^\pi}^2\right] u_p v_n v_p u_n - (A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi}) B_{J^\pi} (u_p^2 v_n^2 + v_p^2 u_n^2)}{(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 - B_{J^\pi}^2}. \tag{188}$$

Desde que

$$\begin{aligned} (A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 + B_{J^\pi}^2 &= 2A_{J^\pi}(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi}), \\ (A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi})^2 - B_{J^\pi}^2 &= 2\omega_{J^\pi}(A_{J^\pi} + \omega_{J^\pi}), \end{aligned} \tag{189}$$

e conduzindo (187), chega-se a uma expressão simples

$$\rho_{J^\pi} = \rho_0 \frac{\omega_0}{\omega_{J^\pi}} \left(1 + \frac{\mathrm{G}_{J^\pi}}{\omega_0}\right), \tag{190}$$

onde $\rho_0 = u_p v_n v_p u_n$ é a matriz densidade partícula-buraco de dois-corpos dentro da aproximação de BCS. Portanto, as correlações de RPA sobre o SMM, além de modificar a

energia ω_0 (BCS) para a energia ω_{J^π} (RPA), introduzem os fatores de renormalização (carga efetiva do decaimento 2β)

$$\mathcal{E}_{J^\pi} \;=\; \frac{\rho_{J^\pi}}{\rho_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{J^\pi}}\left(1+\frac{\mathrm{G}_{J^\pi}}{\omega_0}\right), \tag{191}$$

que reduz todos os momentos nucleares $2\nu2\beta$ e $0\nu2\beta$. O fator $(1+\mathrm{G}_{J^\pi}/\omega_0)$ é produto da interferência entre o $forward$ e $backward$ das contribuições da RPA, que são coerentes no canal pp e totalmente fora de fase no canal ph. Como consequência, os elementos de matriz $\mathrm{F}_{J^\pi}(pn)$ não aparecem nesse fator, que contém apenas os elementos de matriz $\mathrm{G}_{J^\pi}(pn)$. O resultado acima é válido em geral para qualquer tipo de interação residual e não apenas para de (162)

Além disso, usando a mesma interação residual entre partículas idênticas e não idênticas para $J^\pi = 0^+$ tem-se: $\mathrm{G}_{0^+}(pp) = \mathrm{G}_{0^+}(nn) = 2\mathrm{G}_{0^+}(pn)$, que implica em $\omega_0 = -\mathrm{G}_{0^+}(pp)/2 = -\mathrm{G}_{0^+}(pn)$, ao qual é a condição de restauração de simetria de isospin. Para a força descrita pela Eq. (162), esta condição é expressa como

$$1+\frac{\mathrm{G}_{0^+}(pn)}{\omega_0} = 1-s, \tag{192}$$

e para $s = s_{sym} = 1$ resulta em $\mathcal{F}_{0^+} = 0$. Isso leva a condição (ver Eq. (163))

$$S_F^+ \;=\; M_F^{2\nu} = M_F^{0\nu}(J^\pi = 0^+) = 0, \tag{193}$$

que é bem satisfeita em cálculos completos como é mostrado na Figura 13. Portanto, o SMM explica bem a restauração de simetria de isospin.

O SMM é também apropriado para explicar a restauração máxima de simetria SU(4). De fato,

$$1+\frac{\mathrm{G}_{1^+}(pn)}{\omega_0} = 1-t/t_0, \tag{194}$$

e $\mathcal{E}_{1^+} = 0$ para $t = t_0$, cujo o valor depende do estado de partícula única pn e $t_{sym} \equiv t_0$. Por exemplo, as configurações de partícula única dominantes nos núcleos ^{48}Ca e ^{100}Mo são respectivamente, $\left[0f_{7/2}(n)0f_{7/2}(p)\right]_{J^+}$ e $\left[0g_{7/2}(n)0g_{9/2}(p)\right]_{J^+}$, e os valores correspondentes de t_0 são 21/11 e 27/20 (ver Ref. (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994)). Lembrando que a restauração de simetria SU (4) deve conduzir para as relações (163) e (164), mas de maneira alguma essa restauração deve ser total, pois se fosse, isto impossibilitaria o decaimento 2β (ŠTEFÁNIK; ŠIMKOVIC; FAESSLER, 2015).

Finalmente, deve-se enfatizar que, em desacordo com os momentos 2β, as energias ω_{J^π} em (191), bem como E_{IAS} e E_{GTR}, definidas pelas equações (166) e (167), não se comporta como a equação (194), mas depedem fortemente dos elementos de matriz do canal ph, F_{J^π} (ver Eqs. (7) e (8) na Ref. (KRMPOTIĆ; SHARMA, 1994)).

APÊNDICE C – Dupla Regra de Soma de Fermi: Aplicação ao caso simples

Para compreender o motivo da dupla regra de soma de Fermi não ser completamente satisfeita com o modelo (pn,2p2n)-QTDA, aplicou-se o modelo ao núcleo ^{14}C constituido por um sistema de três níveis $1s_{1/2}$, $1p_{1/2}$, and $1p_{3/2}$, dos quais os três níveis estão totalmente ocupados por nêutrons, enquanto os dois primeiros estão parcialmente ocupados por prótons. A partir da Eq. (55), temos

$$\begin{aligned} S_{00}^{\{-2\}} &= \sum_f B_{00_f}^{\{-2\}} \\ &= \sum_f |\sum_\alpha \langle 0_f^+||\mathcal{O}_0^-||0_\alpha^+\rangle\langle 0_\alpha^+||\mathcal{O}_0^-|0_i^+\rangle|^2. \end{aligned} \tag{195}$$

Na aproximação de BCS, obtém-se

$$\begin{aligned} B_{00_1}^{\{-2\}} &= 4u_{1p_{1/2}}^4,\ B_{00_2}^{\{-2\}} = 4u_{1s_{1/2}}^2 u_{1p_{1/2}}^2, \\ B_{00_3}^{\{-2\}} &= 12u_{1s_{1/2}}^2 u_{1p_{1/2}}^2,\ B_{00_4}^{\{-2\}} = 4u_{1s_{1/2}}^4, \end{aligned}$$

e

$$S_{00}^{\{-2\}} \equiv S_F^{2\beta^-} = 4 + 8u_{1s_{1/2}}^2 u_{1p_{1/2}}^2, \tag{196}$$

uma vez que $u_{1s_{1/2}}^2 + u_{1p_{1/2}}^2 = 1$.

Por exemplo, com $u_{1s_{1/2}}^2 = 0.95$ e $u_{1p_{1/2}}^2 = 0.05$, obtém-se $S_{00}^{\{-2\}} = 4.382$, em vez do valor previsto $S_{00}^{\{-2\}} = 4$. O resultado de (196) é também válido quando a interação residual esta ligada. Isso significa que a dupla regra de soma de Fermi é completa e satisfeita no limite partícula-buraco, ou seja, quando um dos níveis de prótons $1s_{1/2}$, $1p_{1/2}$ estivem totalmente vazio ou totalmente preenchido