



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Alane Miguelis Falcão Magalhães

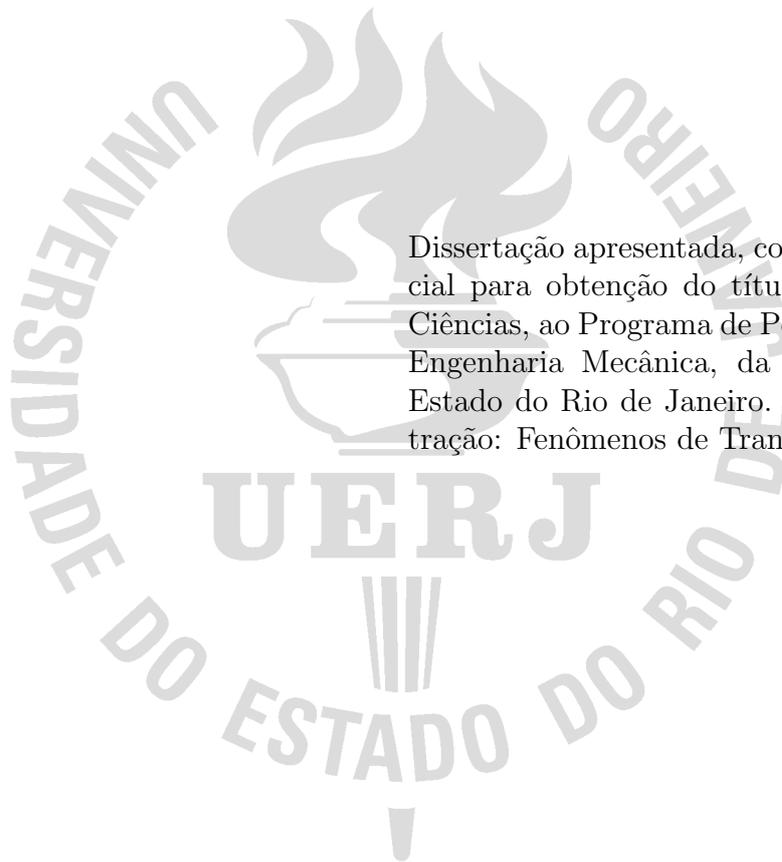
**SOLUÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS DE CONDUÇÃO  
DE CALOR EM SÓLIDOS RÍGIDOS EM REPOUSO COM  
CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA  
TEMPERATURA**

Rio de Janeiro

2020

Alane Miguelis Falcão Magalhães

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR  
EM SÓLIDOS RÍGIDOS EM REPOUSO COM CONDUTIVIDADE  
TÉRMICA DEPENDENTE DA TEMPERATURA**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Coorientador: Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

M188 Magalhães, Alane Miguelis Falcão.  
Solução analítica de problemas de condução de calor em sólidos rígidos em repouso com condutividade térmica dependente da temperatura / Alane Miguelis Falcão Magalhães. – 2020.  
31f.

Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.  
Coorientador: José Júlio Pedrosa Filho.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão - Teses. 3. Fourier, Séries de - Teses. 4. Calor - Condução - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Pedrosa Filho, José Júlio. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 536.2

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Alane Miguelis F. Magalhães  
Assinatura

05/03/2021  
Data

Alane Miguelis Falcão Magalhães

**SOLUÇÃO ANALÍTICA DE PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR  
EM SÓLIDOS RÍGIDOS EM REPOUSO COM CONDUTIVIDADE  
TÉRMICA DEPENDENTE DA TEMPERATURA**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovada em 07 de Dezembro de 2020.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. José Júlio Pedrosa Filho (Coorientador)  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. Eduardo Dias Correa  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. Felipe Bastos de Freitas Rachid  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFF

Rio de Janeiro

2020

## DEDICATÓRIA

Aos meus pais Regina e Carlos Alberto e à minha irmã Aline, por todos os ensinamentos e incentivo, e ao meu marido Rodrigo.

## AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Rogério Saldanha e ao meu coorientador José Júlio, pelo suporte, confiança e ajuda durante todo o tempo.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UERJ, com seus professores e demais funcionários sempre dedicados e dispostos a ajudar.

A todos os meus amigos, pelo apoio, companheirismo e torcida. Em especial, à minha amiga Anna Karina, que sempre me ajudou de uma forma ou de outra e com quem sempre pude contar.

Você poderia me dizer, por favor, qual caminho eu devo seguir? Isso depende muito de onde você deseja chegar. (*Lewis Carroll*)

## RESUMO

MAGALHÃES, Alane Miguelis Falcão. *Solução analítica de problemas de condução de calor em sólidos rígidos em repouso com condutividade térmica dependente da temperatura*. 2020. 31 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Este trabalho apresenta a solução do problema de transferência de calor em estado estacionário em uma placa retangular com uma fonte de calor interna em um contexto em que a condutividade térmica depende da temperatura local. Essa generalização de um dos problemas mais clássicos de transferência de calor é realizada com a ajuda da transformada de Kirchhoff e emprega apenas ferramentas conhecidas, como a superposição de soluções e a série de Fourier. Os resultados obtidos ilustram como os procedimentos usuais podem ser estendidos para resolver problemas físicos mais realistas (uma vez que a condutividade térmica de qualquer material depende da temperatura). Também é apresentada uma fórmula geral para calcular a transformada de Kirchhoff e sua inversa. Este trabalho tem uma forte contribuição didática, pois essas soluções analíticas não são encontradas em nenhum livro clássico de transferência de calor. Além disso, a ideia principal pode ser usada em muitos problemas semelhantes.

Palavras-chave: transferência de calor não-linear; solução exata; transformada de Kirchhoff;

## ABSTRACT

MAGALHÃES, Alane Miguelis Falcão. *Analytical solution of heat transfer problems in rigid solids at rest with temperature-dependent thermal conductivity*. 2020. 31 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

This work presents the solution of the steady-state heat transfer problem in a rectangular plate with an internal heat source in a context in which the thermal conductivity depends on the local temperature. This generalization of one of the most classical heat transfer problems is carried out with the AID of the Kirchhoff transformation and employs only well known tools, as the superposition of solutions and the Fourier series. The obtained results illustrate how the usual procedures may be extended for solving more realistic physical problems (since the thermal conductivity of any material is temperature-dependent). A general formula for evaluating the Kirchhoff transformation as well as its inverse is presented too. This work has a strong didactical contribution since such analytical solutions are not found in any classical heat transfer book. In addition, the main idea can be used in a lot of similar problems.

Keywords: nonlinear heat transfer; exact solution; Kirchhoff transformation;

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Valores de  $k$  para cada intervalo de temperatura absoluta, com  $N = 4$  28

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega_t$	região no espaço no instante $t$
$\partial\Omega_t$	fronteira de $\Omega_t$
$\rho$	densidade
$u$	energia interna
$v$	vetor velocidade
$\mathbf{T}$	tensor tensão
$n$	vetor unitário normal
$g$	vetor aceleração da gravidade
$q$	fluxo de calor
$\dot{q}$	geração interna de energia
$\mathbf{D}$	parte simétrica do gradiente de velocidades
$R$	volume de controle fixo
$c$	calor específico
$T$	campo de temperaturas
$k$	condutividade térmica
$\mathcal{K}[T]$	transformada de Kirchhoff
$\omega$	obtida a partir da transformada de Kirchhoff
$\mathcal{K}^{-1}[\omega]$	transformada inversa

## SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO . . . . .	11
1	A CONDUÇÃO DE CALOR NUM SÓLIDO RÍGIDO EM RE- POUSO . . . . .	12
2	A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF . . . . .	16
3	UMA SOLUÇÃO EXATA - CASO PLANO BIDIMENSIONAL	17
4	SUPERPOSIÇÃO DE SOLUÇÕES - CASO PLANO BIDIMEN- SIONAL . . . . .	20
5	PROBLEMAS COM GERAÇÃO INTERNA - CASO PLANO BIDIMENSIONAL . . . . .	23
6	TRANSMISSÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE EM SÓLIDOS COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPEN- DENTE DA TEMPERATURA . . . . .	25
7	CONDUTIVIDADE TÉRMICA CONSTANTE POR PARTES .	28
	CONCLUSÃO . . . . .	30
	REFERÊNCIAS . . . . .	31

## INTRODUÇÃO

A literatura básica de transmissão de calor, usada em cursos de graduação, trata a condutividade térmica como uma propriedade constante, facilitando assim enormemente a simulação de problemas de condução de calor em regime permanente, em particular quando são consideradas condições de contorno de Dirichlet e/ou de Neumann.

No entanto, nenhum material real apresenta condutividade térmica constante. De fato, todos os materiais apresentam uma dependência entre a condutividade térmica e a temperatura. Infelizmente, tal dependência dá origem a problemas matemáticos inerentemente não lineares que, por sua complexidade, são deixados de lado pela literatura clássica. Nesses casos é comum considerar a condutividade térmica do material como uma constante, com o objetivo de simplificar a representação matemática e fornecer simulações numéricas simples. Contudo, tal suposição pode gerar resultados imprecisos, especialmente quando há grandes fluxos de calor.

Neste trabalho será apresentado um procedimento analítico exato para a construção da solução de problemas de condução de calor em regime permanente, em geometria plana, similar àqueles discutidos na literatura básica, mas com uma diferença significativa: será levada em conta a dependência da condutividade térmica com a temperatura. Em outras palavras, serão apresentadas soluções exatas para uma grande classe de problemas não lineares de transmissão de calor.

Além disso, a ferramenta a ser apresentada aqui será acessível a estudantes de engenharia, de matemática, de física e de química, mesmo aqueles que estão na graduação. A ponte entre a abordagem usual e a abordagem dos problemas não lineares será construída a partir da introdução da Transformada de Kirchhoff e do uso de uma variável auxiliar biunivocamente associada à temperatura.

## 1 A CONDUÇÃO DE CALOR NUM SÓLIDO RÍGIDO EM REPOUSO

A Primeira Lei da Termodinâmica, ou simplesmente a equação da energia, é baseada no seguinte axioma:

A taxa de variação (no tempo) da quantidade de energia de um corpo (cinética + interna) é igual à taxa de realização de trabalho mecânico sobre este corpo (potência mecânica das forças atuando sobre o corpo) mais a taxa de energia transmitida na forma de calor (calor transmitido por unidade de tempo pela fronteira + geração interna de calor).

O princípio acima é representado matematicamente por

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left[ u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (1)$$

onde:

$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS \rightarrow$  Potência mecânica das forças de superfície (contato).

$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV \rightarrow$  Potência mecânica das forças de corpo.

$\int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \rightarrow$  Fluxo de calor entrando através da fronteira do corpo.

$\int_{\Omega_t} \dot{q} dV \rightarrow$  Taxa de geração interna de calor (energia).

A quantidade  $\mathbf{q}$  representa o vetor fluxo de calor (por unidade de tempo e área) enquanto que a quantidade  $\dot{q}$  representa a taxa de geração de calor (por unidade de tempo e volume). Por exemplo, quando uma corrente elétrica flui através de um condutor,  $\dot{q}$  é positivo e, na média, igual ao produto da diferença de potencial pela corrente dividido pelo respectivo volume de material condutor.

O sinal “-” na penúltima integral da equação acima aparece para que esta integral represente o fluxo que entra e não o que sai ...

Podemos reescrever a equação da energia, com o auxílio do Teorema do transporte, na seguinte forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[ \rho \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} dV = \\ & = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{Tn}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \end{aligned} \quad (2)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \left[ \rho \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= \frac{D\rho}{Dt} \left[ \rho \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \\ &= \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \left[ \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right] + \rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \end{aligned}$$

e que (equação da continuidade)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

ficamos com

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_t} -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV \quad (3)$$

A simetria do tensor tensão e o teorema da divergência nos permitem escrever que

$$\int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega_t} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} (\mathbf{T}\mathbf{v}) dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} dV$$

Assim, a equação da energia fica

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \right\} dV = \int_{\Omega_t} \operatorname{div} (\mathbf{T}\mathbf{v}) dV + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\Omega_t} \operatorname{div} \mathbf{q} dV + \int_{\Omega_t} \dot{q} dV$$

Como a região  $\Omega_t$  (configuração atual do corpo) é arbitrária, podemos concluir que (forma local da equação da energia para um corpo contínuo)

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \operatorname{div} (\mathbf{T}\mathbf{v}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \dot{q} \quad (4)$$

Uma vez que

$$\operatorname{div} (\mathbf{T}\mathbf{v}) = (\operatorname{div} \mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}$$

e

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v}$$

podemos escrever o seguinte

$$\rho \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{v} = (\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{q} + \dot{q} \quad (5)$$

Da equação da quantidade de movimento linear sabemos que

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$$

Assim (equação da energia, levando em conta que a equação da quantidade de movimento é satisfeita)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{q} + \dot{q} \quad (6)$$

A simetria do tensor tensão e a definição de derivada material nos permitem reescrever a equação local da energia como

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } u \cdot \mathbf{v} \right) = -\text{div } \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \dot{q}$$

onde  $\mathbf{D}$  é a parte simétrica do gradiente de velocidades.

Podemos também escrever a equação da energia para uma região fixa  $R$  no espaço com o auxílio do Teorema do transporte. Assim procedendo, ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_R \rho \left[ u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right] dV + \int_{\partial R} \rho \left[ u + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ & = \int_R \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial R} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_R \dot{q} dV - \int_{\partial R} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (7)$$

que é a forma global da equação da energia para um volume de controle fixo (região  $R$  fixa no espaço).

A equação da energia, na sua forma local, é dada por

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \text{grad } u \cdot \mathbf{v} \right) = -\text{div } \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \dot{q}$$

Para um corpo rígido (gradiente de velocidades antissimétrico) em repouso (velocidade nula) temos que

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + \dot{q}$$

Por ser um corpo rígido, o calor específico a volume constante só depende da temperatura. Denotando este calor específico por  $c$ , ficamos com

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q} + \dot{q}$$

onde  $T$  representa o campo de temperaturas. Vamos considerar agora o conceito de fluxo de calor, que estará presente em um determinado corpo sempre que houver um gradiente de temperatura. A equação abaixo, que relaciona o fluxo de calor com o gradiente de temperatura é conhecida como lei de Fourier da condução de calor

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T \quad (8)$$

onde  $k$  denota a “condutividade térmica”, uma propriedade que todo material possui e que pode ser interpretada como a facilidade de determinado corpo tem de conduzir calor. Ela é uma quantidade positiva, apesar do sinal negativo que a precede, o qual convencionamos que o fluxo de calor sempre fluirá no sentido da diminuição da temperatura. Temos então a equação geral da condução de calor num sólido rígido, isotrópico e em repouso dada por

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (k \text{ grad } T) + \dot{q} \quad (9)$$

A equação diferencial acima requer condições iniciais e condições de contorno. No caso de condução de calor em regime permanente, requer apenas condições de contorno

No sistema cartesiano retangular, a equação da condução de calor em regime permanente é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (10)$$

## 2 A TRANSFORMADA DE KIRCHHOFF

Suponhamos que  $k$  (condutividade térmica) dependa da temperatura absoluta de tal maneira que exista uma constante positiva  $\delta$  tal que (isso é verdade para qualquer material)

$$\infty > k = \hat{k}(T) \geq \delta > 0, \text{ para qualquer } T > 0$$

Nesse caso, o problema de condução de calor torna-se uma equação diferencial parcial não-linear, pois a condutividade térmica é expressa como uma função da temperatura. A transformada de Kirchhoff é um procedimento que reescreve o problema original em termos de uma nova variável, e isso evita a necessidade de trabalhar com uma equação não-linear.

Conseqüentemente, a transformada de Kirchhoff de  $T$  pode ser definida como

$$\omega = \mathcal{K}[T] = \int_0^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (11)$$

ou qualquer múltiplo positivo desta expressão.

Uma vez que  $\infty > k \geq \delta > 0$ , temos garantida a existência da inversa da transformada de Kirchhoff para qualquer  $\omega$ . Em outras palavras, podemos sempre escrever que

$$T = \mathcal{K}^{-1}[\omega], \text{ para qualquer } \omega \in (-\infty, \infty) \quad (12)$$

Levando em conta a definição da transformada de Kirchhoff, podemos escrever que

$$\text{grad } \omega = k \text{ grad } T$$

E reescrever a equação diferencial governante como

$$\text{div}(\text{grad } \omega) + \dot{q} = 0$$

o que, no sistema cartesiano retangular de coordenadas gera a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \dot{q} = 0 \quad (13)$$

### 3 UMA SOLUÇÃO EXATA - CASO PLANO BIDIMENSIONAL

Vamos considerar agora o seguinte problema de valor de contorno (equação de Laplace com condições de Dirichlet homogêneas, exceto para  $y = H$  )

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, 0 < y < H$$

$$\Phi = 0, \text{ para } x = 0, 0 < y < H$$

$$\Phi = 0, \text{ para } x = L, 0 < y < H$$

$$\Phi = 0, \text{ para } 0 < x < L, y = 0$$

$$\Phi = \beta(x), \text{ para } 0 < x < L, y = H$$

Este problema admite solução exata por separação de variáveis. Em outras palavras, a solução do problema pode ser representada por

$$\Phi = \hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{X}_n(x) \hat{Y}_n(y) \quad (14)$$

Substituindo na equação original, ficamos com

$$X_n'' Y_n + X_n Y_n'' = 0$$

ou ainda,

$$\frac{X_n''}{X_n} = -\frac{Y_n''}{Y_n} = \text{constante para cada } n$$

Vamos então definir as constantes reais  $\gamma_n$  de tal forma que

$$\frac{X_n''}{X_n} = \gamma_n$$

Assim sendo, teremos que

$$X_n'' - \gamma_n X_n = 0$$

ou seja,

$$X_n = A_n \cos \sqrt{-\gamma_n} x + B_n \sin \sqrt{-\gamma_n} x, \text{ se } \gamma_n < 0$$

$$X_n = A_n \cosh \sqrt{-\gamma_n} x + B_n \sinh \sqrt{-\gamma_n} x, \text{ se } \gamma_n > 0$$

$$X_n = A_n x + B_n, \text{ se } \gamma_n = 0$$

Como

$$\Phi = 0 \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = 0 \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H$$

precisamos que  $X_n = 0$  para  $x = 0$  e  $x = L$ . Assim, a única possibilidade não trivial é  $\gamma_n < 0$ . Neste caso ficamos com

$$X_n = A_n \cos \sqrt{-\gamma_n} x + B_n \sin \sqrt{-\gamma_n} x, \text{ se } \gamma_n < 0 \quad (15)$$

sendo  $\sqrt{-\gamma_n} = n\pi/L$  e  $A_n = 0$  de forma a atender à condição de contorno. Vamos denotar a quantidade  $-\gamma_n$  por  $\lambda_n^2$ .

Em outras palavras,

$$X_n = B_n \sin(\lambda_n x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Assim sendo, temos que

$$\frac{Y_n''}{Y_n} = -\lambda_n^2 \implies Y_n = C_n \cosh(\lambda_n y) + D_n \sinh(\lambda_n y)$$

Como

$$\Phi = 0 \text{ para } 0 < y < L, \quad y = 0$$

é preciso que

$$C_n \cosh(\lambda_n 0) + D_n \sinh(\lambda_n 0) = 0$$

o que impõe  $C_n = 0$ . Logo,

$$Y_n = D_n \sinh(\lambda_n y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

A solução fica então com a forma

$$\Phi = \hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) D_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (16)$$

ou ainda (visto que  $n = 0$  dá origem a um termo nulo)

$$\Phi = \hat{\Phi}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) D_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (17)$$

Falta agora calcular os coeficientes  $\bar{B}_n$ . Para isso vamos levar em conta a condição em  $y = H$  e uma expansão em Séries de Fourier em  $1/2$  período (função ímpar). Uma

vez que

$$\Phi = \beta(x) \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H$$

teremos

$$\beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)$$

Uma vez que

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ se } m \neq n \\ \frac{L}{2} & , \text{ se } m = n \end{cases}$$

podemos concluir que

$$\bar{B}_n \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) = \frac{2}{L} \int_0^L \beta(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

ou seja,

$$\bar{B}_n = \frac{\frac{2}{L} \int_0^L \beta(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \quad (18)$$

#### 4 SUPERPOSIÇÃO DE SOLUÇÕES - CASO PLANO BIDIMENSIONAL

Vamos considerar agora o seguinte problema de valor de contorno (equação de Laplace com condições de Dirichlet não homogêneas)

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = \beta_1(y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = \beta_2(y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = \beta_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0$$

$$\Phi = \beta_4(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H$$

A solução do problema acima pode ser representada por

$$\Phi = \hat{\Phi}(x, y) = \hat{\Phi}_1(x, y) + \hat{\Phi}_2(x, y) + \hat{\Phi}_3(x, y) + \hat{\Phi}_4(x, y) \quad (19)$$

Onde as funções  $\hat{\Phi}_1$ ,  $\hat{\Phi}_2$ ,  $\hat{\Phi}_3$  e  $\hat{\Phi}_4$  são obtidas a partir da solução dos problemas abaixo. Começando por  $\hat{\Phi}_4$ , teremos

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_4}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi_4 = 0, \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi_4 = 0, \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi_4 = 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0$$

$$\Phi_4 = \beta_4(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H$$

Este problema admite a seguinte solução (exatamente o problema anteriormente resolvido)

$$\Phi_4 = \hat{\Phi}_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (20)$$

onde

$$\bar{B}_n = \frac{\frac{2}{L} \int_0^L \beta_4(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \quad (21)$$

Agora, vamos representar  $\Phi_3$ , solução do problema abaixo

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^3 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} \right) &= 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\ \Phi_3 &= 0, \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H \\ \Phi_3 &= 0, \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H \\ \Phi_3 &= \beta_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0 \\ \Phi_3 &= 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H \end{aligned}$$

Este problema é análogo ao anterior, diferindo apenas por uma mudança de variável. Definindo a variável  $u = H - y$ , ficamos com o seguinte problema

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial u^2} \right) &= 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < u < H \\ \Phi_3 &= 0, \text{ para } x = 0, \quad 0 < u < H \\ \Phi_3 &= 0, \text{ para } x = L, \quad 0 < u < H \\ \Phi_3 &= \beta_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad u = H \\ \Phi_3 &= 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad u = 0 \end{aligned}$$

que é análogo àquele que foi resolvido acima. Temos então que este problema admite a seguinte solução

$$\Phi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi u}{L}\right) \quad (22)$$

onde

$$\bar{B}_n = \frac{\frac{2}{L} \int_0^L \beta_3(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right)} \quad (23)$$

ou ainda, voltando à variável original,

$$\Phi_3 = \hat{\Phi}_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(H-y)}{L}\right) \quad (24)$$

Agora, vamos representar  $\Phi_2$ , solução do problema abaixo

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} \right) &= 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\ \Phi_2 &= 0, \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H \\ \Phi_2 &= \beta_2(y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H \\ \Phi_2 &= 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0 \\ \Phi_2 &= 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H \end{aligned}$$

Este problema é análogo àquele cuja solução é  $\Phi_4$ . Assim sendo, admite a seguinte solução

$$\Phi_2 = \hat{\Phi}_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{H}\right) \quad (25)$$

onde

$$\bar{B}_n = \frac{\frac{2}{H} \int_0^H \beta_2(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} \quad (26)$$

Por fim, vamos obter  $\Phi_1$ . Da mesma forma que obtivemos  $\Phi_2$  em função de  $\Phi_4$ , podemos obter  $\Phi_1$  em função de  $\Phi_3$ . Assim sendo,

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}\right) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi_1 = \beta_1(y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi_1 = 0, \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi_1 = 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0$$

$$\Phi_1 = 0, \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H$$

admite a seguinte solução

$$\Phi_1 = \hat{\Phi}_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(L-x)}{H}\right) \quad (27)$$

onde

$$\bar{B}_n = \frac{\frac{2}{H} \int_0^H \beta_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy}{\sinh\left(\frac{n\pi L}{H}\right)} \quad (28)$$

## 5 PROBLEMAS COM GERAÇÃO INTERNA - CASO PLANO BIDIMENSIONAL

Vamos considerar agora o seguinte problema de valor de contorno (equação de Poisson com condições de Dirichlet não homogêneas)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + f(x, y) &= 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\ \Psi &= \gamma_1(y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H \\ \Psi &= \gamma_2(y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H \\ \Psi &= \gamma_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0 \\ \Psi &= \gamma_4(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H \end{aligned}$$

A solução do problema acima pode ser representada por

$$\Psi = \hat{\Phi}(x, y) + \hat{\Theta}(x, y) \quad (29)$$

onde  $\Theta(x, y)$  é qualquer função que satisfaça a equação abaixo

$$\left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) + f(x, y) = 0$$

Por exemplo, se  $f(x, y)$  for uma constante  $C$ , poderíamos escolher

$$\Theta = \hat{\Theta}(x, y) = -\frac{C}{4}(x^2 + y^2)$$

Desta forma, a função  $\Phi = \hat{\Phi}(x, y)$  será solução de

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) &= 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\ \Phi &= \gamma_1(y) - \hat{\Theta}(0, y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H \\ \Phi &= \gamma_2(y) - \hat{\Theta}(L, y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H \\ \Phi &= \gamma_3(x) - \hat{\Theta}(x, 0), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0 \\ \Phi &= \gamma_4(x) - \hat{\Theta}(x, H), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H \end{aligned}$$

Se definirmos  $\beta_i$  como sendo  $\gamma_i - \hat{\Theta}(0, y)$ , teremos o problema anteriormente resol-

vido. Em outras palavras, teremos

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = \beta_1(y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = \beta_2(y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H$$

$$\Phi = \beta_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0$$

$$\Phi = \beta_4(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H$$

## 6 TRANSMISSÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE EM SÓLIDOS COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA TEMPERATURA

Vamos levar em consideração agora que a condutividade térmica seja uma função da temperatura (como é fato para qualquer material). Neste caso, o problema de condução de calor em regime permanente é governado por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \quad (30)$$

onde  $k = \hat{k}(T)$

Aqui torna-se conveniente o uso da transformada de Kirchhoff, já definida como

$$\omega = \mathcal{K}[T] = \int_0^T \hat{k}(\xi) d\xi \quad (31)$$

o que permite reescrever a equação original na forma abaixo

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \dot{q} = 0 \quad (32)$$

Por exemplo, o problema bidimensional em geometria plana caracterizado por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{q} = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

$$T = \Lambda_1(y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H$$

$$T = \Lambda_2(y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H$$

$$T = \Lambda_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0$$

$$T = \Lambda_4(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H$$

será, com o auxílio da transformada de Kirchhoff, escrito como

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + f(x, y) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\
& \omega = \int_0^{\Lambda_1(y)} \hat{k}(\xi) d\xi = \gamma_1(y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H \\
& \omega = \int_0^{\Lambda_2(y)} \hat{k}(\xi) d\xi = \gamma_2(y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H \\
& \omega = \int_0^{\Lambda_3(x)} \hat{k}(\xi) d\xi = \gamma_3(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0 \\
& \omega = \int_0^{\Lambda_4(x)} \hat{k}(\xi) d\xi = \gamma_4(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H
\end{aligned} \tag{33}$$

Este problema já foi tratado anteriormente neste trabalho. Desta forma, sua solução é conhecida e pode ser representada na forma abaixo

$$\omega = \hat{\Phi}(x, y) + \hat{\Theta}(x, y) \tag{34}$$

onde  $\Theta(x, y)$  é qualquer função que satisfaça a equação abaixo

$$\left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) + f(x, y) = 0$$

e onde

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \text{ na região caracterizada por } 0 < x < L, \quad 0 < y < H \\
& \Phi = \gamma_1(y) - \hat{\Theta}(0, y), \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < H \\
& \Phi = \gamma_2(y) - \hat{\Theta}(L, y), \text{ para } x = L, \quad 0 < y < H \\
& \Phi = \gamma_3(x) - \hat{\Theta}(x, 0), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = 0 \\
& \Phi = \gamma_4(x) - \hat{\Theta}(x, H), \text{ para } 0 < x < L, \quad y = H
\end{aligned}$$

Sendo

$$\gamma_1(y) = \int_0^{\Lambda_1(y)} \hat{k}(\xi) d\xi \tag{35}$$

$$\gamma_2(y) = \int_0^{\Lambda_2(y)} \hat{k}(\xi) d\xi \quad (36)$$

$$\gamma_3(x) = \int_0^{\Lambda_3(x)} \hat{k}(\xi) d\xi \quad (37)$$

$$\gamma_4(x) = \int_0^{\Lambda_4(x)} \hat{k}(\xi) d\xi \quad (38)$$

Uma vez conhecidas as condições de contorno, a função  $\Phi$  está totalmente determinada. A questão agora é obter a temperatura como função da posição. Para isso precisamos inverter a transformada de Kirchhoff.

Uma das opções mais seguras e precisas consiste em representar a condutividade térmica como função da temperatura a partir de uma função constante por partes.

## 7 CONDUTIVIDADE TÉRMICA CONSTANTE POR PARTES

A relação entre a condutividade térmica e a temperatura é estabelecida a partir de dados experimentais discretos. Portanto, é sempre razoável considerar a condutividade térmica como uma função constante por partes da temperatura, tomando cada intervalo como sua temperatura absoluta.

Em outras palavras, podemos escrever

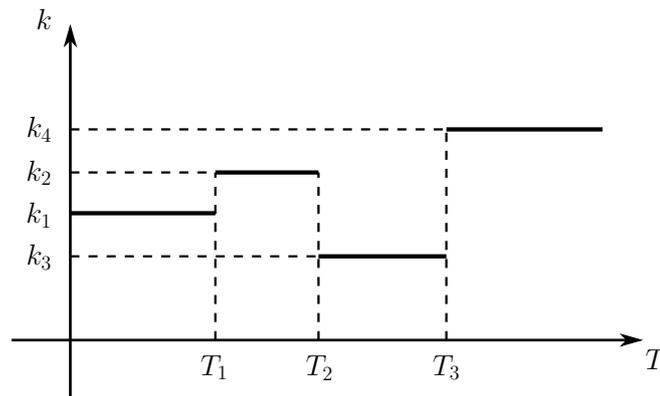
$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T \leq T_1 \\ k_i & \text{para } T_i \geq T > T_{i-1}, \quad i = 2, 3, 4, \dots, N-1 \\ k_N & \text{para } T > T_{N-1} \end{cases} \quad (39)$$

onde  $k_1, k_2, \dots, k_N$  e  $T_1, T_2, \dots, T_{N-1}$  são constantes positivas.

A figura abaixo ilustra um caso com  $N = 4$ , onde considera que

$$k = \hat{k}(T) = \begin{cases} k_1 & \text{para } T \leq T_1 \\ k_2 & \text{para } T_2 \geq T > T_1 \\ k_3 & \text{para } T_3 \geq T > T_2 \\ k_4 & \text{para } T > T_3 \end{cases}$$

Figura 1 - Valores de  $k$  para cada intervalo de temperatura absoluta, com  $N = 4$



Nesses casos, a transformada de Kirchhoff é dada por

$$\omega = \mathcal{K}[T] = \int_0^T \hat{k}(\xi) d\xi = \begin{cases} k_1 T & , \text{ se } T \leq T_1 \\ k_2(T - T_1) + k_1 T_1 & , \text{ se } T_2 \leq T < T_1 \\ k_3(T - T_2) + k_2(T_2 - T_1) + k_1 T_1 & , \text{ se } T_3 \leq T < T_2 \\ \vdots & \vdots \\ k_N(T - T_{N-1}) + k_{N-1}(T_{N-1} - T_{N-2}) + \dots & , \text{ se } T > T_{N-1} \\ \dots + k_2(T_2 - T_1) + k_1 T_1 & \end{cases}$$

Efetuando alguns cálculos, ficamos com

$$\omega = \frac{1}{2} \left( (k_1 + k_N)T + \sum_{i=2}^N (k_i + k_{i-1})(|T - T_{i-1}| - T_{i-1}) \right)$$

onde  $T_N > T_{N-1} > \dots > T_1 \geq 0$ .

Definindo as constantes não negativas  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}$  como

$$\omega_i = \sum_{j=1}^i k_j(T_j - T_{j-1}), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \text{com } T_0 = 0$$

temos que a inversa da transformada de Kirchhoff (que é única) pode ser representada explicitamente por

$$T = \mathcal{K}^{-1}[\omega] = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_N} \right) \omega + \sum_{i=2}^N \left( \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right) (|\omega - \omega_{i-1}| - \omega_{i-1}) \right) \quad (40)$$

A relação acima vale para qualquer aproximação constante por partes e, portanto, é completamente geral e pode ser empregada para qualquer material isotrópico. É de notar que a equação acima vale para qualquer  $-\infty < \omega < \infty$ . Além disso, a aproximação constante por partes não apresenta nenhuma limitação matemática, mesmo para valores negativos de  $T$ . Em outras palavras, a aproximação constante por partes assegura a existência e a unicidade da transformada de Kirchhoff, bem como a existência e a unicidade de sua inversa para qualquer  $-\infty < T < \infty$  e  $-\infty < \omega < \infty$ . Além disso, as equações acima apresentadas são fórmulas explícitas em formato fechado, que são válidas para qualquer escolha de  $N$ . Portanto, não há limitação para precisão.

## CONCLUSÃO

Problemas de transferência de calor por condução em regime permanente são descritos em qualquer livro clássico sobre o tema. No entanto, as soluções apresentadas tratam a condutividade térmica como uma constante com a finalidade de simplificar os cálculos matemáticos.

Este trabalho mostrou que é possível construir uma solução exata para problemas nos quais a condutividade térmica depende da temperatura local, tornando não-linear a equação que governa esse fenômeno. A ferramenta utilizada para tratar a questão da não-linearidade é a transformada de Kirchhoff, que reescreve o problema original em termos de uma equação linear.

O suporte matemático apresentado possibilitou representar a condutividade térmica como uma função constante por partes da temperatura, bem como fórmulas exatas para a transformada de Kirchhoff e sua inversa, de forma simples e completa, sem limite de precisão.

Este trabalho possui uma forte contribuição didática, pois soluções analíticas não são encontradas nos livros sobre transferência de calor. Além disso, a idéia principal pode ser usada em muitos problemas semelhantes.

**REFERÊNCIAS**

- ARPACI, V. S. *Conduction Heat Transfer*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- BERGMAN, T. L. et al. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- CARLSLAW, H.; JAEGER, J. *Conduction of heat in solids*, oxford. 1959.
- GAMA, R. A note on the constant thermal conductivity hypothesis and its consequence for conduction heat transfer problems. *Revista de Engenharia Térmica*, v. 13, n. 2, p. 48–51, 2014.
- GLASSBRENNER, C. J.; SLACK, G. A. Thermal conductivity of silicon and germanium from 3 k to the melting point. *Physical Review*, APS, v. 134, n. 4A, p. A1058, 1964.
- HOLMAN, J. P. *Heat transfer*. *McGrawHill College*, 1996.
- JOHN, F. *Partial Differential Equations*. 3rd. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1978.
- LEVINSHTEIN, M. E.; RUMYANTSEV, S. L.; SHUR, M. S. *Properties of Advanced Semiconductor Materials: GaN, AlN, InN, BN, SiC, SiGe*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.
- WYLIE, C. R. *Advanced Engineerin Mathematics*. 4th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1975.