



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Natália de Melo Alvarenga

Teoria da ressurgência aplicada à mecânica quântica

Rio de Janeiro

2020

Natália de Melo Alvarenga

Teoria da ressurgência aplicada à mecânica quântica



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Júnior

Coorientador: Prof. Dr. José Roberto Pinheiro Mahon

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

A473

Alvarenga, Natália de Melo.
Teoria da ressurgência aplicada à mecânica quântica /
Natália de Melo Alvarenga. - 2020.
130 f.: il.

Orientador: Cesar Augusto Linhares da Fonseca Júnior.
Coorientador: José Roberto Pinheiro Mahon.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Mecânica quântica - Teses. 2. Teoria quântica de
campos - Teses. 3. Perturbação (Dinâmica quântica) - Teses.
4. Grupos quânticos - Teses. I. Fonseca Júnior, Cesar
Augusto Linhares da. II. Mahon, José Roberto Pinheiro.
III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de
Física Armando Dias Tavares. IV. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Natália de Melo Alvarenga

Teoria da ressurgência aplicada à mecânica quântica

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de outubro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Júnior (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. José Roberto Pinheiro Mahon (Coorientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Luis Antônio Campinho Pereira da Mota
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho
Diretoria Geral de Desenvolvimento Nuclear e Tecnologia da Marinha

Prof. Dr. José André Lourenço
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Fernando Pereira Paulucio Reis
Universidade Federal do Espírito Santo

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

À grande família que esta vida me proporcionou, formada por amigos e parentes.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Isto foi essencial em tempos de crescente ataque às universidades públicas e ao financiamento de pesquisas.

Aos meus orientadores, Linhares e Mahon, por toda a atenção, confiança, dedicação e disponibilidade.

Ao José André Lourenço, que esteve presente em várias reuniões, trazendo comentários, fontes e sugestões valiosas.

Ao Fernando P. P. Reis, cujos esclarecimentos sobre a estrutura que existe por trás das transséries se tornaram base para um apêndice desta tese.

Ao Erich Cavalcanti, pela ajuda com o programa Wolfram Mathematica (versão 11.3, de 2018).

Ao apoio que recebi diante das dificuldades por parte do meu irmão Felipe, que compreende e troca experiências acadêmicas comigo.

Aos meus pais, Gorette e Leticio, que sempre dão suporte aos seus filhos — estou formada graças à importância que atribuíram à minha educação.

À minha namorada, Glaucia, pelo cuidado, carinho e compreensão que demonstrou nessa fase final de escrita.

Às minhas tias, avós e primas, especialmente à Livia, com quem tive conversas importantes sobre experiências no ambiente acadêmico.

À minha madrinha Cristina e ao padrinho Marcelo, por sempre acompanharem minhas apresentações.

Às pessoas queridas que acompanharam minha trajetória desde o final da monografia: Patricia, Ana Cristina, Ana Clara e João Victor, Rodrigo, amigos da música, do *kung fu* e do GEDS. Muito obrigada!

Às equipes da biblioteca *CTC/D* e do Programa de Pós-Graduação em Física da UERJ.

O infinito é realmente
Um dos deuses mais lindos.
Legião Urbana.

RESUMO

ALVARENGA, N. M. *Teoria da ressurgência aplicada à mecânica quântica*. 2020. 130 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Séries divergentes surgem em inúmeros casos da teoria perturbativa de amplo uso na física. Aquelas que são assintóticas podem ser submetidas a tratamentos como o truncamento ótimo, que pode constituir uma boa aproximação, e a ressonância de Borel. Entretanto, uma tarefa mais difícil é a reconstrução de funções a partir de expansões perturbativas divergentes, pois gera uma informação incompleta. Isso sinaliza a necessidade de incluir efeitos não-perturbativos, relacionados a instantons. O motivo do infortúnio da divergência é relacionado à existência de singularidades no plano complexo de Borel, normalmente associadas também a instantons. Estes são parte importante na construção de transséries, importantes manipulações de séries formais que podem cancelar ambiguidades. Um efeito importante da teoria da ressurgência é a relação entre comportamento de altas ordens da expansão perturbativa e efeitos não-perturbativos em baixas ordens. A partir do domínio de métodos para lidar com a assintotia, da compreensão de efeitos não-perturbativos de instantons e da teoria da ressurgência para integrais com selas, é construída a aplicação da ressurgência na mecânica quântica para o potencial de Mathieu e seu correspondente hiperbólico.

Palavras-chave: Ressurgência. Série Assintótica. Potencial de Mathieu. Transséries.

ABSTRACT

ALVARENGA, N. M. *Resurgence Theory Applied to Quantum Mechanics*. 2020. 130 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Divergent series arise in numerous cases from the perturbation theory of widespread use in physics. Those that are asymptotic can undergo treatments such as optimal truncation, which can be a good approximation, and Borel sum. However, a more difficult task is the reconstruction of functions from divergent perturbative expansions, as it generates incomplete information. This signals the need to include non-perturbative instantons effects. The reason for the misfortune of the divergence is related to the existence of singularities in the Borel complex plane, usually also associated with instantons. These are an important part in the construction of transeries, important manipulations of formal series that can cancel out ambiguities. An important effect of the resurgence theory is the relationship between the behavior of high orders of the perturbative expansion and the non-perturbative effects in low orders. From the mastery of methods to deal with asymptotic, from the understanding of non-perturbative effects of instantons and from the theory of resurgence for integrals with saddles, the application of resurgence in quantum mechanics is constructed for the Mathieu potential and his hyperbolic counterpart.

Keywords: Resurgence. Asymptotic series. Mathieu potential. Transseries.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Ponto de sela	22
Figura 2	- Truncamento ótimo das representações assintóticas das funções de Airy.	24
Figura 3	- Linhas e antilinhas de Stokes da representação assintótica da função de Airy $Ai(z)$	26
Figura 4	- Representação gráfica da região de analiticidade na definição de assintotia forte	28
Figura 5	- Continuação analítica	29
Figura 6	- Ressoma lateral ao longo da direção θ	32
Figura 7	- Configuração de um íntanton.	47
Figura 8	- Configuração de dois íntantons (íntanton–anti–íntanton).	51
Figura 9	- Curvas de inclinação mais acentuada (de fase constante) de $\exp(i\lambda \cosh z)$ no plano complexo $z = u + iv$	67
Figura 10	- Mapeamento da função $u(z)$ duplamente valorada.	71
Figura 11	- Loop $\Gamma_n(\theta_k)$ envolvendo o caminho $C_n(k)$	72
Figura 12	- Selas adjacentes à sela n com seus respectivos caminhos de inclinação mais acentuada.	74
Figura 13	- Comportamento do “steepest descent” quando atinge dois pontos críticos.	86
Figura 14	- Dedais de Lefschetz para o potencial de Mathieu modificado.	87
Figura 15	- Dedais de Lefschetz para o potencial de Mathieu.	87
Figura 16	- Fenômeno de Stokes para potencial de Mathieu	89
Figura 17	- Razão entre o coeficiente da expansão perturbativa em altas ordens com correções da ressurgência e aquele obtido diretamente da função de partição de Sinh-Gordon.	93
Figura 18	- Razão entre o coeficiente da expansão perturbativa em altas ordens com correções da ressurgência e aquele obtido diretamente da função de partição de Mathieu.	93
Figura 19	- Contorno de Hankel	96
Figura 20	- Íntanton complexo do potencial de Mathieu modificado e íntanton real de Mathieu	100
Figura 21	- Comportamento assintótico em $d = 1$ dos coeficientes da expansão perturbativa para o potencial de Mathieu modificado	101
Figura 22	- Triângulo de ressurgência.	103
Figura 23	- Cálculo no Maple da expansão perturbativa em série de Taylor do potencial $\sinh^2(g\phi)$	120
Figura 24	- Cálculo no Maple do gráfico $a_{n,H}^{\text{corrigido}}/a_{n,H}^{\text{pert}}$	122

Figura 25 - Cálculo no Maple do gráfico comparativo na mecânica quântica para potencial de Sinh-Gordon.	123
Figura 26 - Diagramas de bolha conexos do oscilador quártico.	126
Figura 27 - Regras de Feynman do oscilador quártico.	127
Figura 28 - Potencial invertido do oscilador anarmônico quártico	128

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDO	Equação Diferencial Ordinária
MQ	Mecânica Quântica
TQC	Teoria Quântica de Campos

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	RECONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES A PARTIR DE EXPAN- SÕES PERTURBATIVAS ASSINTÓTICAS	14
1.1	Lidando com a assintotia	16
1.1.1	<u>Truncamento ótimo e primeiros exemplos de transséries</u>	16
1.1.2	<u>Assintotia no plano complexo e fenômeno de Stokes</u>	23
1.1.3	<u>Ressoma de Borel</u>	27
1.2	Fenômeno de Stokes além da assintotia clássica	33
1.3	Efeitos não-perturbativos e comportamento de altas ordens	36
1.4	Penetração de barreira e instantons	37
1.4.1	<u>Solução do problema de modo zero</u>	41
1.5	Oscilador anarmônico quártico na mecânica quântica	44
1.6	Multi-instantons	50
1.6.1	<u>Potencial de poço duplo</u>	51
1.6.2	<u>Potencial periódico</u>	56
2	RESSURGÊNCIA EM INTEGRAIS DE TIPO LAPLACE	60
2.1	Métodos para integrais de funções reais	60
2.1.1	<u>Método de Laplace</u>	60
2.1.2	<u>Lema de Watson</u>	62
2.2	Método de inclinação mais acentuada ou “steepest descent”	64
2.3	Ressurgência para integrais com selas	68
3	ANÁLISE RESSURGENTE DE SINE-GORDON/MATHIEU	78
3.1	Protótipos zero dimensionais	79
3.1.1	<u>Expansão perturbativa</u>	79
3.1.2	<u>Dedais de Lefschetz</u>	84
3.1.3	<u>Correção do comportamento em altas ordens da expansão perturbativa</u>	91
3.1.4	<u>Cancelamento de ambiguidades</u>	94
3.2	Mecânica Quântica ($d=1$)	98
3.2.1	<u>Cancelamento de ambiguidades e triângulo de ressurgência</u>	102
	CONCLUSÃO	104
	REFERÊNCIAS	106
	APÊNDICE A – O que é uma transsérie?	112
	APÊNDICE B – Expansão perturbativa por série de Taylor no Maple.	119
	APÊNDICE C – Obtenção dos gráficos no Maple.	121
	APÊNDICE D – Expansão perturbativa da energia do oscilador quártico por diagramas de Feynman	124

INTRODUÇÃO

Quando se trata de problemas não-triviais em teorias quânticas, uma ferramenta fundamental de análise é a teoria da perturbação. De forma sucinta, o método funciona a partir de um problema com solução exata, para o qual uma perturbação é criada, gerando uma solução aproximada. Entretanto, na física, os casos de sucesso são minoria — expansões em séries perturbativas costumam ser divergentes. Sobre este assunto, podemos citar os trabalhos de diversos pesquisadores, como Dyson (1952), Hurst (1952), Thirring (1953), Peterman (1953), Jaffe (1965), Bender e Wu (1968, 1971), Calan e Rivasseau (1982), Lipatov (1977). A divergência acontece mesmo para um caso simples e conhecido como o oscilador anarmônico quártico (BENDER; WU, 1969; BENDER; WU, 1973), cujos coeficientes da expansão perturbativa da energia possuem crescimento fatorial.

Séries divergentes também aparecem como representações assintóticas de soluções de equações diferenciais após uma análise local de pontos singulares irregulares (quando estes existem), por exemplo, nas equações de Airy e de Euler. Séries divergentes assintóticas possuem a característica de convergir mais rapidamente até o truncamento ótimo do que séries classificadas como convergentes, podendo representar uma boa aproximação a certas funções. Entretanto, existe uma falha ao tentar reconstruir funções a partir de expansões perturbativas divergentes, gerando uma informação incompleta. Isso sinaliza a necessidade de incluir efeitos não-perturbativos, que podem ser relacionados a instantons. Estes são soluções de equações de movimento clássicas no espaço-tempo euclidiano que possuem ação finita. Constituem parte importante na construção de transséries, estruturas que possuem tanto informações perturbativas quanto efeitos não-perturbativos.

Diante de séries assintóticas, geralmente a primeira escolha para tentar eliminar seu crescimento fatorial é utilizar a transformação de Borel, que divide o coeficiente da série perturbativa original por uma potência de fatorial da ordem; depois fazer uma continuação analítica para definir a ressonância (que em essência é uma transformação de Laplace), também conhecida como transformação inversa de Borel. O último procedimento requer um contorno de integração, o que pode gerar outro desagradado caso este encontre uma singularidade no plano complexo de Borel. Como consequência, surge uma ambiguidade, não-perturbativa, que ocorre ao longo da chamada linha de Stokes. É preciso dobrar o cuidado ao lidar com tal situação, já que as expansões perturbativas são ditas não-Borel-somáveis sobre essas linhas. A ressonância de Borel constitui um tratamento conhecido para a assintotia no plano complexo, sendo própria para séries formais cujos coeficientes divergem fatorialmente. Caso a série em questão seja alternada e não possua singularidades na região de integração (o semi-eixo positivo real), a solução original pode ser reconstruída apenas pela ressonância de Borel da série perturbativa. Os resultados ambíguos, quando existem, são relacionados às linhas de Stokes, às quais pertencem as singularidades. Entre-

tanto, as ambiguidades podem ser canceladas quando introduzimos os resultados na forma de transséries, que envolvem o acréscimo de efeitos não-perturbativos às séries perturbativas originais. Estes novos termos são constituídos por fatores como a constante de Stokes e a função exponencial das ações de instantons (relacionados a selas não-perturbativas), seguidos pela expansão em torno da sela não-perturbativa correspondente.

A teoria da ressurgência de Écalle incorpora as informações das transséries de maneira sistemática, e possui consequências interessantes, como a relação entre comportamentos de altas ordens da teoria de perturbação e comportamentos de baixas ordens em efeitos não-perturbativos. Uma formulação da ressurgência adequada a cálculos com integrais surgiu por meio do trabalho de Berry e Howls (1991), edificando a base utilizada nesta tese para a análise da ressurgência em funções de partição de Mathieu/Sine-Gordon e de seu correspondente hiperbólico. Estas constituem casos físicos onde temos duas selas, uma perturbativa e outra não-perturbativa, possibilitando fazer expansões em torno de cada uma. O fenômeno da ressurgência para integrais com selas pode ser visto de modo objetivo através da forte correlação entre os coeficientes dessas expansões em séries. Devido a isso, podemos dizer que os efeitos perturbativos *ressurgem* a partir dos efeitos não-perturbativos da teoria. Em nossas aplicações, primeiramente direcionamos a atenção para integrais ordinárias, que são os protótipos zero dimensionais ($d = 0$) da integral de caminho, depois concluímos a análise no contexto da mecânica quântica (integrais de caminho unidimensionais, $d = 1$). Neste trabalho, no entanto, as aplicações não envolvem integrais de caminho compreendidas no âmbito da teoria quântica de campos ($d = 4$).

O mérito desta tese é o desenvolvimento de aplicações, baseadas em funções triviais, da teoria da ressurgência na mecânica quântica. Um trabalho como este se mostrou extremamente necessário, posto que, durante nossos anos de pesquisa sobre o tema, notamos a escassez de publicações que envolvessem potenciais elementares. Além de amplamente conhecidas, as funções periódicas aqui escolhidas possuem aplicabilidade física. Particularmente, produzimos resultados originais ao investigar a ressurgência no caso do potencial hiperbólico.

1 RECONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES A PARTIR DE EXPANSÕES PERTURBATIVAS ASSINTÓTICAS

A teoria da perturbação é amplamente disseminada na Física e objetiva fornecer a solução aproximada de um problema quando se conhece a solução exata de um problema relacionado, em geral, mais simples. Muitas das séries obtidas por métodos perturbativos na teoria quântica de campos (TQC) se mostram assintóticas, ao invés de convergentes. Tal característica é tipicamente uma indicação de que efeitos não-perturbativos devem ser acrescentados à série perturbativa original, já que esta somente não basta para trazer informações completas. Raras também são as equações diferenciais encontradas na matemática aplicada, na ciência ou na engenharia que apresentam soluções em termos de funções elementares (BOWMAN; VAN ROESSEL, 2012).

Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é chamada de *convergente* quando sua soma parcial,

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad (1)$$

tende a um limite finito s quando $n \rightarrow \infty$. Todavia, as séries que não convergem são ditas *divergentes*. Essas definições são vistas hoje em dia como trivialidades. Até chegar à maturação atual, as ideias perpassaram matemáticos antes de Newton e Leibniz (de fato, até Arquimedes estava familiarizado com elas). Os grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII, embora tenham lidado com séries, sabiam suficientemente bem se aquelas que usavam eram convergentes. Mas somente a partir da época de Cauchy as definições foram desenvolvidas e formuladas de forma geral e explícita. Para uma leitura enriquecedora sobre os aspectos históricos que concernem séries divergentes, é fortemente indicado o livro de Hardy (1949).

Além disso, existe o conceito de assintotia, introduzido por Poincaré (1886). Uma série de potências é assintótica se o que resta depois de N termos é muito menor do que o último termo retido quando $x \rightarrow x_0$, isto é,

$$f(x) - \sum_{n=0}^N a_n(x - x_0)^n \ll (x - x_0)^N, \quad \forall N, x \rightarrow x_0, \quad (2)$$

onde f é uma função de x . Na construção de Poincaré, os coeficientes a_n são vistos como constantes. Escreve-se

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0, \quad (3)$$

onde \sim é lido como “é assintótica a”. Tal definição permite relacionar a assintotia com a divergência.

As séries são assintóticas (quando o são) a uma classe de funções, então desta informação pode surgir uma pergunta: seria possível calcular efeitos não-perturbativos do tipo exponencial que devam ser adicionados a uma série assintótica, ao menos formalmente? Visto que não aparecem tipicamente quando se trata de assintotia, incluir esses termos demanda considerar generalizações de séries assintóticas. O primeiro trabalho que tratou deste assunto de maneira sistemática foi feito por Jean Écalle e resultou em objetos denominados *transséries*, que acrescentam efeitos não-perturbativos às séries perturbativas formais. Caso haja interesse em conhecer melhor sua estrutura matemática, consultar o apêndice A.

Para começar a tratar o assunto, é necessário conhecer minimamente o conceito de instantons, que são fatores importantes das transséries em mecânica quântica e serão abordados com detalhes na seção 1.4. Instantons são soluções não-constantas das equações de movimento que mantêm a ação finita no limite de volume infinito. Outra forma de enxergá-los é encontrada no fenômeno de penetração de barreira, sendo os instantons relacionados a pontos de sela¹ relevantes para o cálculo do efeito. Na mecânica quântica, os instantons são uma alternativa ao método WKB (Wentzel-Krammers-Brillouin) para estudar efeitos não-perturbativos. Portanto, ao construir uma transsérie no âmbito da mecânica quântica, os efeitos não-perturbativos acrescentados à serie perturbativa são relacionados aos instantons.

Na Física, uma transsérie é construída da seguinte forma, a partir de uma série perturbativa original de um problema e a contribuição de instanton sinalizada no expoente do fator exponencial,

$$\sigma_a \sum_n a_n g_s^n + \sigma_b e^{-A/g_s} \sum_n b_n g_s^n + \mathcal{O}(e^{-2A/g_s}). \quad (4)$$

A expansão $\sum_n a_n g_s^n$ é a série divergente² original (perturbativa). Já a segunda série, também divergente, é proveniente da contribuição de apenas um instanton. Os fatores que ficam na frente de cada somatório, σ_a e σ_b , são constantes. Sendo $g_s > 0$ a constante de acoplamento do problema, os efeitos não-perturbativos são suprimidos exponencialmente para g_s pequeno, ou seja, são proporcionais a $e^{-A/g}$, onde a constante A é dada pelo valor da ação da solução de instanton. Por fim, vêm as contribuições mais altas de instantons. Nesta tese, serão considerados apenas efeitos não-perturbativos desse tipo, relacionados à existência de pontos de sela extras.³

¹ Pontos de sela são essenciais no cálculo de expansões assintóticas a partir de integrais, sendo abordadas mais à frente no texto. Por ora, é útil resumir que pontos de sela são pontos críticos que não são um máximo nem um mínimo.

² Justamente por conta da divergência, a expressão em (4) é dita puramente formal.

³ Com “extras”, queremos dizer pontos de sela não-perturbativos. Não serão estudados renormalons, que são fontes de divergência em aproximações perturbativas para teoria quântica de campos.

O objeto resultante (incluindo as partes “não-perturbativas”), visto como uma série com dois parâmetros independentes pequenos, g_s e e^{-A/g_s} , é uma transsérie. A combinação da teoria das transséries com a ressonância de Borel leva à *teoria de Jean Écalle da ressurgência*, nosso tema de estudo. Entretanto, nossa preferência é aplicá-la no formalismo integral, voltado para a área de nosso interesse. Desta forma, as transséries abrem um novo horizonte ao panorama limitado das expansões perturbativas.

A partir da descrição rápida dos conceitos envolvidos na transsérie de um problema físico, ficamos aptos a organizar este estudo, almejando alcançar os conhecimentos necessários para compreender e aplicar a teoria da ressurgência na mecânica quântica. Começamos por explorar algumas características de séries assintóticas (capítulo 1), depois conhecer um tratamento para assintóticas específicas (onde os coeficientes das séries crescem com $n!$), que é a ressonância de Borel. A aplicação desta ferramenta em equações diferenciais não-lineares permite estudar o fenômeno de Stokes além da assintótica clássica (seção 1.2). Feito isso, o estudo se direciona para efeitos não-perturbativos — cálculos de instantons e multi-instantons (seção 1.4). Como escolhemos um formalismo integral — baseado na teoria quântica de campos — para compreender a ressurgência e aplicá-la, o capítulo 2 se inicia com métodos para encontrar a expansão assintótica a partir de integrais. Posteriormente, na seção 2.3, demonstra-se como obter a fórmula de ressurgência exata para integrais com selas, baseado no artigo de Berry e Howls (1991). Finalmente, no capítulo 3, as aplicações da teoria da ressurgência são realizadas para potenciais de Mathieu/Sine-Gordon — inicialmente na dimensionalidade mais simples possível, depois no âmbito da mecânica quântica.

1.1 Lidando com a assintotia

1.1.1 Truncamento ótimo e primeiros exemplos de transséries

O matemático Niels Hendrik Abel escrevera, em 1828, uma frase que futuramente seria citada em diversos trabalhos sobre divergência e assintotia, como no prefácio de Hardy (1949) e no artigo de Dunne (2012, p.6), “Séries divergentes são a invenção do diabo, e é vergonhoso basear nelas qualquer demonstração.” A afirmação também serviu de inspiração para o título do artigo de Boyd (1999), *The Devil’s Invention: Asymptotic, Superasymptotic and Hyperasymptotic Series*, em inglês. Contrastando tal condenação, existe outra frase de Heaviside, com uma visão mais otimista sobre o assunto, encontrada também em Dunne (2012, p.6), “A série é divergente; portanto podemos ser capazes de fazer algo com isso.”

Na prática, expansões divergentes *assintóticas* possuem uma característica interes-

sante. Considere uma função geral $f(x)$ com representação assintótica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (5)$$

Na soma parcial

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n x^n, \quad (6)$$

quando se varia N , primeiro é atingido um valor próximo ao verdadeiro de $f(x)$, e depois, para N suficientemente grande, a expressão vai divergindo. Diante deste fato, o desafio se torna encontrar a soma parcial que oferece a melhor aproximação possível de $f(x)$, truncando a série em (6) no valor de N mais apropriado. Este método é chamado de aproximação ótima ou truncamento ótimo.⁴ Esta característica representa uma vantagem no uso de séries assintóticas, pois estas convergem mais rapidamente até o truncamento do que as próprias séries classificadas como convergentes⁵, que vão convergindo lentamente e podem demandar a soma de muitos termos até o resultado desejado. O maior problema da análise assintótica talvez seja ir além do truncamento ótimo, procurando incorporar os efeitos exponenciais pequenos de maneira sistemática.

No contexto de equações diferenciais ordinárias, séries assintóticas e transséries podem surgir em suas soluções quando se faz uma análise local. O primeiro termo de uma série infinita é chamado de *comportamento principal* da série. Outro elemento importante é o *fator de controle*, entendido como o fator do comportamento principal que muda mais rapidamente no limite $x \rightarrow x_0$. Um exemplo simples é o da série de Frobenius,

$$\sum_n a_n x^{n+\alpha}, \quad (7)$$

cujo comportamento principal é $a_0 x^\alpha$, enquanto o fator de controle é x^α . Quando se trata de equações diferenciais, os comportamentos assintóticos são, na verdade, os primeiros termos das representações de série das soluções. Logo, também é possível identificar o comportamento principal (assim como o fator de controle) a partir de uma relação assintótica. Por exemplo, as soluções da equação diferencial

$$x^3 y'' = y \quad (8)$$

⁴ Leituras recomendadas: capítulo 3 de Bender e Orszag (1999) e seção 2 de Mariño (2014).

⁵ Esta propriedade só é válida para séries divergentes que são assintóticas.

apresentam os comportamentos assintóticos

$$y(x) \sim c_1 x^{3/4} e^{2x^{-1/2}} \quad (x \rightarrow 0_+), \quad (9)$$

e também

$$y(x) \sim c_2 x^{3/4} e^{-2x^{-1/2}} \quad (x \rightarrow 0_-), \quad (10)$$

sendo c_1 e c_2 reais. Os fatores de controle de tais comportamentos principais são identificados respectivamente como

$$e^{2x^{-1/2}}, \quad e^{-2x^{-1/2}}. \quad (11)$$

Dado o exemplo acima, é natural que se manifeste a questão de como calcular as representações assintóticas das soluções de uma equação diferencial ordinária (EDO). Tudo começa por uma análise local, classificando um ponto x_0 (que pode ser complexo) como ponto ordinário, singular regular ou singular irregular. Seja a equação diferencial linear e homogênea,

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x) = 0. \quad (12)$$

O ponto x_0 é *ordinário* se as funções coeficientes são *todas analíticas* numa vizinhança de x_0 . Diz-se que x_0 é *singular regular* quando nem todas as $p_0(x), \dots, p_{n-1}(x)$ são analíticas, mas todas $(x-x_0)^n p_0(x), (x-x_0)^{n-1} p_1(x), \dots$ o são. Já o ponto *singular irregular* é assim chamado se não for ordinário nem singular regular. Não representa uma regra, mas tipicamente, num ponto singular irregular, as soluções possuem uma singularidade essencial⁶ em combinação com um polo ou um ponto de ramificação logarítmico ou algébrico.

O passo seguinte envolve selecionar a representação de série adequada para as soluções aproximadas da equação (12), de acordo com a respectiva classificação do ponto. Portanto, no caso mais simples, em que $y(x)$ é analítica em torno de x_0 (ordinário), sua

⁶ A singularidade essencial é aquela que não é um polo nem uma singularidade removível. Geralmente, para exemplificar o que é uma singularidade essencial, são apresentadas funções exponenciais com expoente fracionário, onde a incógnita está localizada no denominador (funções como $f(z) = e^{1/(z-2)}$, $y(x) = e^{-1/(2x)}$ se encaixam nessa descrição). Formalmente, escrevendo uma série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

identificam-se singularidade removível quando $b_n = 0 \forall n$, polo quando $b_n \neq 0$ para um número finito de coeficientes e singularidade essencial quando há uma infinidade de coeficientes $b_n \neq 0$.

expansão perturbativa é uma série de Taylor em potências de $(x - x_0)$. Escreve-se

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (13)$$

que é substituído na equação diferencial. Os coeficientes a_n são determinados resolvendo uma relação de recorrência. Para um ponto regular singular, existe a garantia de que uma das soluções tem forma de série de Frobenius,

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+\alpha}, \quad (14)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A(x)$, sendo analítica em x_0 , foi expandida em série de Taylor. As outras soluções podem ser mais complicadas, dependendo do caso.

No caso de um ponto singular irregular, pode ser feita a substituição

$$y(x) = e^{S(x)}, \quad (15)$$

proposta originalmente por Carlini (1817), Liouville (1837) e Green (1837), permitindo que o fator de controle seja calculado tendo em mente que se apresenta frequentemente na forma exponencial. Uma vantagem nada evidente deste método é a de que serve para reduzir uma equação diferencial linear de n -ésima ordem em uma equação diferencial aproximada de primeira ordem para $S(x)$. A fim de mostrar de que maneira isto funciona, basta tomar a equação de segunda ordem

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (16)$$

supondo que x_0 seja um ponto singular irregular. Fazendo a substituição (15),

$$S'' + p(x)S' + q(x) = 0, \quad (17)$$

o que não diminui a dificuldade de resolução da equação, mas como x_0 é um ponto singular irregular, é verdade que

$$S'' \ll (S')^2, \quad x \rightarrow x_0. \quad (18)$$

Para ilustrar, suponha que o fator de controle de $y(x)$ tenha a forma $\exp[a(x - x_0)^{-b}]$, com $b > 0$, fazendo com que $y(x)$ tenha uma singularidade essencial em x_0 . A partir disso, facilmente são calculados

$$(S')^2 \sim a^2 b^2 (x - x_0)^{-2b-2}, \quad (19)$$

assim como

$$S'' \sim ab(b+1)(x-x_0)^{-b-2}, \quad (20)$$

que condizem com a comparação (18). Desprezando o termo S'' em (17), é construída a equação diferencial assintótica⁷

$$(S')^2 \sim -p(x)S' - q(x), \quad x \rightarrow x_0, \quad (21)$$

onde foi tomada a precaução de passar alguns termos para o lado direito, evitando a interpretação de que alguma quantidade seja assintótica a zero.

Considere agora a equação de Euler,

$$g^2 E'(g) + E(g) = g. \quad (22)$$

com ponto singular irregular em $g = 0$. Note que é apresentada de forma diferente da usual, com $x = 1/g$, encontrada na literatura. A solução é escrita como

$$E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! g^{n+1}, \quad (23)$$

Percebe-se que há abertura para construir uma família de soluções formais a partir de (23),

$$E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! g^{n+1} + C e^{-A/g}, \quad (24)$$

onde A , C são constantes e a última, arbitrária, parametriza a família de soluções. Está definido o primeiro exemplo de transsérie, com as seguintes propriedades típicas:

- O termo adicionado em (24) não é analítico em $g = 0$ e é imperceptível na expansão perturbativa em torno deste mesmo ponto, sendo portanto uma correção “não-perturbativa”.
- A expressão formal resultante tem dois parâmetros pequenos (g , $e^{-A/g}$).
- Existe uma relação entre a intensidade do efeito não-perturbativo, dada por A , e a divergência da série assintótica. Especificamente, a constante A codifica o compor-

⁷ O comportamento local de uma solução próxima a um ponto singular irregular é *relativamente* (mas não aproximadamente) igual à solução exata, que possui o caráter de mudar rapidamente em torno do ponto. Por isso, ocorre a troca da igualdade (também da igualdade aproximada) para a igualdade relativa (assintótica) (BENDER; ORSZAG, 1999), o que pode se mostrar muito útil. Quando uma solução muda rapidamente, uma relação assintótica pode ser mais informativa do que uma igualdade aproximada.

tamento próximo ao principal dos coeficientes da série em altas ordens.

O último item pode ser elucidado no contexto do truncamento ótimo. Admitindo que os coeficientes a_n em (5) cresçam fatorialmente,

$$a_n \sim A^{-n} n!, \quad (25)$$

para encontrar o menor termo na série, minimizamos N (com $|x|$ fixo) em

$$|a_N x^N| = c N! \left| \frac{x}{A} \right|^N. \quad (26)$$

Fazendo uso da aproximação de Stirling,

$$\begin{aligned} \ln N! &= N \ln N - N + \mathcal{O}(\ln N) \\ N! &\approx \exp(N \ln N - N), \end{aligned}$$

reescreve-se como

$$|a_N x^N| \approx c \exp \left[N \left(\ln N - 1 - \ln \left| \frac{A}{x} \right| \right) \right]. \quad (27)$$

A fim de encontrar o ponto de sela em N grande, calcula-se

$$\left. \frac{d|a_N x^N|}{dN} \right|_{N=N_*} \approx \left\{ c \left[N \frac{1}{N} + \ln N - 1 - \ln \left| \frac{A}{x} \right| \right] \exp \left[N \left(\ln N - 1 - \ln \left| \frac{A}{x} \right| \right) \right] \right\}_{N=N_*} = 0. \quad (28)$$

Portanto,

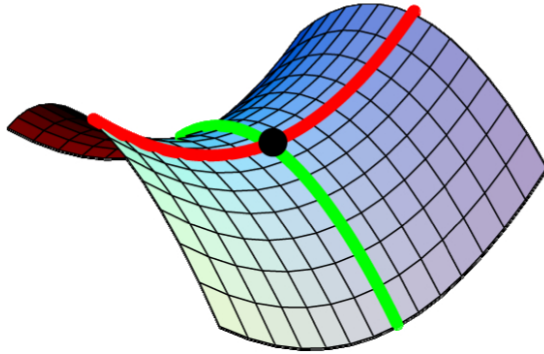
$$N_* = \left| \frac{A}{x} \right|. \quad (29)$$

Um ponto de sela é um ponto crítico sobre uma superfície em que a elevação é máxima em certa direção e mínima em outra. A denominação vem da semelhança com uma sela de montaria (ver Fig. 1). Interpreta-se, no caso em que $|x|$ é pequeno, que o truncamento ótimo pode ser realizado para valores grandes de N , mas à medida que $|x|$ aumenta, cada vez menos termos da série podem ser utilizados. O erro estimado deste procedimento é o termo seguinte ao do truncamento (MARIÑO, 2014),

$$\epsilon(x) = a_{N_*+1} |x|^{N_*+1} \sim e^{-|A/x|}. \quad (30)$$

Quando uma função $f(x)$ é reconstruída a partir da expansão assintótica, a “resolução” máxima que se pode atingir é da ordem de $\epsilon(x)$. Deve ser lembrado o fato de que séries perturbativas frequentemente são assintóticas, isto é, $S(x)$ não é suficiente para deter-

Figura 1 - Ponto de sela



Fonte: TURNHOUT et al., 2015, p. 6681.

Adaptada pela autora.

minar por si só a função $f(x)$. Como *a priori* os pesos das soluções de instantons são indeterminados, no exercício de escrever uma solução de transsérie geral é obtida uma família de soluções formais. Isto é chamado de *ambiguidade não-perturbativa*. Note que no caso acima o valor absoluto de A é que decide a “intensidade” desta ambiguidade.

Um exemplo menos trivial vem da conhecida equação de Airy

$$y''(x) - xy(x) = 0. \quad (31)$$

A solução geral “de transsérie”⁸ é apenas a combinação linear das suas duas soluções independentes em séries de potência formais, que possuem diferentes comportamentos principais exponenciais. A primeira solução é:

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2x^{1/4}\sqrt{\pi}} e^{-2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-3n/2}, \quad (32)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right)}{n!}. \quad (33)$$

É fácil ver que

$$a_n \sim A^{-n} n!, \text{ em que se identifica } A = -4/3. \quad (34)$$

⁸ As aspas foram empregadas porque não é explícita a forma de transsérie neste caso.

A outra solução independente é escrita como

$$\text{Bi}(x) \sim \frac{1}{2x^{1/4}\sqrt{\pi}} e^{2x^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^{-3n/2} \quad (35)$$

Em concordância com a terceira propriedade mostrada no contexto da equação de Euler, existe uma relação entre os comportamentos principais das soluções de Airy: a transsérie (35) adicionada à solução assintótica (32) tem peso exponencial relativo de

$$e^{4x^{3/2}/3}, \quad (36)$$

sugerido pelo crescimento dos coeficientes em (34).

Quando se lida com equações diferenciais, um aspecto importante é que EDOs *lineares* possuem transséries com número *finito* de termos, enquanto EDOs *não-lineares* têm quantidade *infinita* (MARINHO, 2014).

Apesar do truncamento ótimo ser tradicionalmente empregado para recuperar uma solução original não-perturbativa a partir da sua representação assintótica, no plano complexo a aproximação revela ser razoável em algumas regiões, mas tipicamente se mostra insatisfatória em outras. A figura 2 fornece uma boa ilustração disso. Para o truncamento ótimo, é feito

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-(2/3)x^{3/2}} \sum_{n=0}^{N_*} a_n x^{-3n/2}, \quad N_* = \frac{4}{3}|x|^{3/2}, \quad (37)$$

enquanto a curva parametrizada

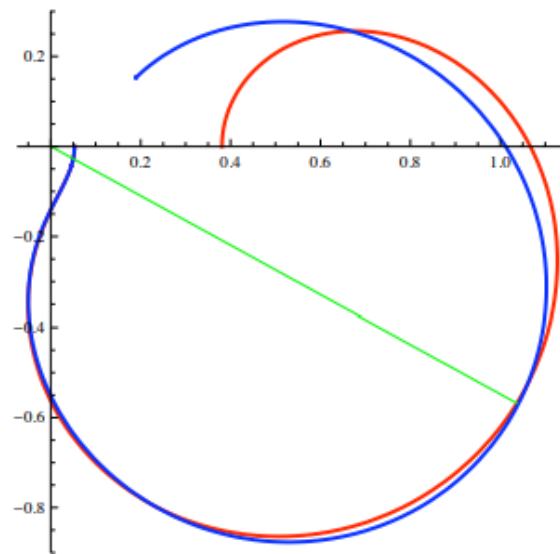
$$(\text{Re}(\text{Ai}(|x|e^{i\theta})), \text{Im}(\text{Ai}(|x|e^{i\theta}))), \quad 0 < \theta < \pi, \quad (38)$$

é plotada no plano complexo, fixando $|x| = 1,7171$. Perceba que a aproximação é muito boa na região $0 < \theta < 2\pi/3$, e se torna pior à medida que se aproxima de $\arg(x) = \pi$.

1.1.2 Assintotia no plano complexo e fenômeno de Stokes

Não é uma tarefa trivial generalizar a definição de relações assintóticas para funções complexas. As dificuldades surgem ao tentar escrever $f(z) \sim g(z)$ ($z \rightarrow z_0$) para que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$ tomando caminhos arbitrários se aproximando de z_0 no limite $z \rightarrow z_0$. Enquanto a preocupação de tomar um limite no *eixo real* se restringe ao sentido, isto é, aproximar-se de x_0 pela direita ou pela esquerda, há muito mais possibilidades de caminho em todo o *plano complexo*. É preciso que uma relação assintótica complexa seja independente do caminho e única, se o objetivo é defini-la satisfatoriamente. Torna-se

Figura 2 - Truncamento ótimo das representações assintóticas das funções de Airy.



Legenda: Curva parametrizada das partes real e imaginária da função de Airy exata (vermelho), comparada à curva do truncamento ótimo da sua aproximação assintótica (azul). A linha verde representa o ângulo $\theta = 2\pi/3$.

Fonte: MARIÑO, 2014, p. 468.

fundamental ser capaz de excluir caminhos complexos que rotacionam em torno de z_0 à medida que se aproximam desse ponto, já que podem arruinar a natureza unilateral das relações assintóticas e gerar limites não-únicos. A maneira mais simples de eliminá-los é fazer com que todos os caminhos passem por uma região do plano complexo em formato de cunha. Assim, uma afirmação correta de que duas funções são assintóticas em $z \rightarrow z_0$ no plano complexo sempre deve vir acompanhada da informação do setor de validade (também chamado de cunha), sendo o tamanho do ângulo de abertura determinado a partir da própria função assintótica. Para um estudo mais aprofundado, recomenda-se a leitura da seção 3.7 de Bender e Orszag (1999).

É dito que duas funções $f(z)$ e $g(z)$ são assintóticas à medida que $z \rightarrow z_0$ quando

$$f(z) - g(z) \ll g(z), \quad z \rightarrow z_0. \quad (39)$$

É justamente esta diferença $f(z) - g(z)$ que desprezamos quando escrevemos a relação assintótica⁹

$$f(z) \sim g(z). \quad (40)$$

Quando z está no interior da cunha, a subtração $f - g$ é dita *subdominante* ou *recessiva*, comparada a $f(z)$ ou $g(z)$, que são *dominantes*. Curiosamente, à medida que z se aproxima da borda da cunha, a diferença $(f - g)$ vai crescendo em grandeza até que, atingindo a borda, tanto f quanto $(f - g)$ passam a ser iguais em grandeza. Ao cruzar a borda, conhecida como *antilinha de Stokes*, as identidades são trocadas (quem era subdominante passa a ser dominante e vice-versa), caracterizando o *fenômeno de Stokes*. Passa a valer, então, a relação $f(z) - g(z) \gg g(z)$ ($z \rightarrow z_0$) após a ultrapassagem da antilinha.

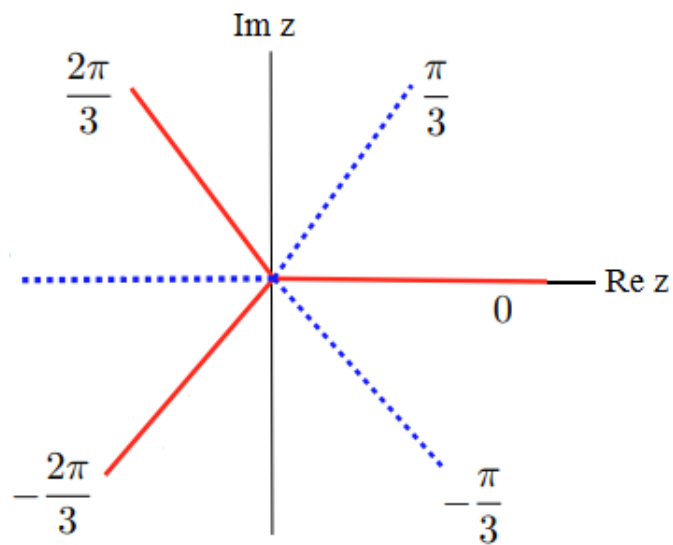
De posse dessas informações, agora é possível entender que, no exemplo das funções de Airy (figura 2), a correção exponencialmente pequena que está faltando nasce na linha de Stokes $\arg(x) = 2\pi/3$ e vai se tornando cada vez mais relevante quando se chega próximo à antilinha. Estes elementos estão representados graficamente na figura 3.

Nos problemas em que as linhas ou as antilinhas de Stokes existem,¹⁰ suas localizações são determinadas pela contribuição exponencial do comportamento principal. Sendo $\exp(S_1(z))$ e $\exp(S_2(z))$ os termos exponenciais dos comportamentos principais de soluções de uma equação diferencial de 2^a ordem, então as *antilinhas de Stokes* são assintóticas

⁹ Em outras palavras, a diferença é a única coisa “que falta” para escrever $f(z) \sim g(z)$ ($z \rightarrow z_0$) como uma igualdade.

¹⁰ É possível se deparar com casos em que as linhas de Stokes não existem. O fenômeno de Stokes é uma propriedade da função *exponencial*, que em diversos casos aparece como fator de controle. Se o termo subdominante diferir do dominante por uma potência de $z - z_0$ em $z \rightarrow z_0$ em *todas* as direções do plano complexo, então *não há* fenômeno de Stokes (BENDER; ORSZAG, 1999).

Figura 3 - Linhas e antilinhas de Stokes da representação assintótica da função de Airy $Ai(z)$.



Legenda: As linhas cheias em vermelho representam as linhas de Stokes, enquanto as pontilhadas em azul correspondem às antilinhas de Stokes. A correção é subdominante em $2\pi/3 < |\arg(z)| < \pi$, mas quando $\arg z = \pi$, esta deixa de ser subdominante e passa a contribuir de forma oscilatória.

Fonte: MARIÑO, 2010, p. 30. Adaptada pela autora.

(quando $z \rightarrow z_0$) às curvas

$$\operatorname{Re}[S_1(z) - S_2(z)] = 0. \quad (41)$$

Analogamente, quanto às *linhas de Stokes*¹¹,

$$\operatorname{Im}[S_1(z) - S_2(z)] = 0. \quad (42)$$

Note que ambas são propriedades locais de funções, então só possuem significado na vizinhança imediata de z_0 . Esta é a visão do fenômeno de Stokes para a assintotia clássica, mas é possível enxergar além. À medida que nos aprofundarmos no estudo da divergência e da ressurgência, mais características interessantes desse fenômeno surgirão.

1.1.3 Ressoma de Borel

No tratamento de séries assintóticas, a ferramenta mais poderosa para ir além do truncamento ótimo é a ressonância de Borel, cujo nome faz referência ao matemático francês Émile Borel (1871–1956). Antes de entrar no assunto, é preciso fazer uma observação sobre assintotia. Vista no sentido de Poincaré, uma série de potências é considerada assintótica a uma *classe* de funções que diferem por um fator subdominante, não a uma função específica. Esta não unicidade leva a enxergar a assintotia clássica como uma assintotia fraca (BRUNELLI, 1987). Existe, porém, uma condição mais forte que traz a garantia de unicidade entre série assintótica e função, determinada abaixo.

Definição. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é uma série assintótica forte à função $f(z)$ se e somente se

(i) $f(z)$ é analítica na região (ver Fig. 4)

$$D_{\varepsilon,R} = \left\{ z \mid |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \varepsilon; \quad 0 < |z| < R \right\}, \quad \varepsilon > 0, R > 0; \quad (43)$$

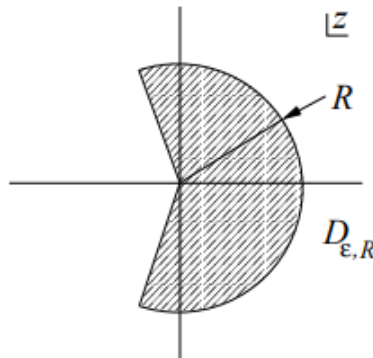
(ii) para todo $N = 0, 1, \dots$ e todo $z \in D_{\varepsilon,R}$, temos

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^N a_n z^n \right| \leq A \sigma^{N+1} (N+1)! |z|^{N+1}. \quad (44)$$

Supondo agora que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é série assintótica forte a mais uma função, $g(z)$ —

¹¹ É preciso atentar para o fato de que físicos e matemáticos adotam convenções contrárias de linhas e antilinhas de Stokes. Uma das referências para esta tese sobre o assunto, Bender e Orszag (1999), denomina como linha o que chamamos de antilinha de Stokes, e vice-versa.

Figura 4 - Representação gráfica da região de analiticidade na definição de assintotia forte



Fonte: BRUNELLI, 1987, p. 10.

não só a $f(z)$ —, existe uma garantia de que $f(z) \equiv g(z)$, devido ao chamado teorema de Carleman. (SIMON, 1973).

Estas informações enriquecedoras abrem caminho para entendermos a importância de uma função poder ser univocamente representada pela sua série assintótica. Em outras palavras, despertam o interesse de determinar f através de a_n , uma proeza que pode ser conquistada pelo método de soma devido a Borel. Expansões que se encaixam na classificação de série de Gevrey 1 possuem coeficientes que crescem fatorialmente — característica comumente encontrada na TQC, segundo Dyson (1952) e Lipatov (1977) — e podem ser tratadas por este método. Ademais, existe uma generalização para séries de Gevrey k , comentada no final desta seção.

Seja $f(g)$ uma função cuja representação assintótica possui raio zero de convergência,

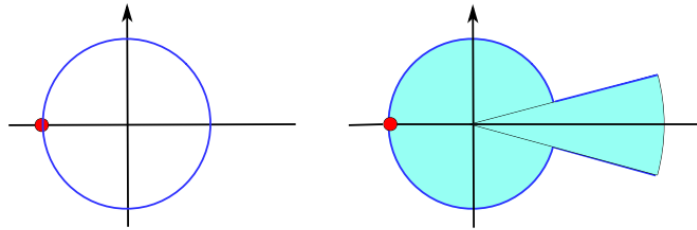
$$f(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n, \quad (45)$$

onde o coeficiente a_n cresce fatorialmente, sendo identificado como a causa da divergência. A partir desta série, podemos obter outra com raio de convergência não-nulo. A definição desta nova série é chamada *transformação de Borel*, escrita como

$$B[f](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}, \quad (46)$$

onde $B[f](t)$ é analítica na vizinhança da origem no plano t complexo. Para visualizar o efeito desta transformação, considere um exemplo (KLEINERT; SCHULTE-

Figura 5 - Continuação analítica



Legenda: A transformação de Borel define uma função analítica numa vizinhança de $t = 0$, com raio $r = A$. Existe uma singularidade em $t = -A$, representada como um ponto no semi-eixo real negativo. Caso seja possível fazer a continuação analítica desta função para o semi-eixo real positivo e caso sua transformação de Laplace exista, dizemos que a série é Borel ressomável.

Fonte: MARÍÑO, 2014, p. 470.

FROHLINDE, 2001) no qual $a_n \propto (-\alpha)^n n!$ para n grande (observe que o coeficiente é alternado). Então,

$$\frac{a_n}{n!} \propto (-\alpha)^n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (47)$$

Isso leva à convergência da transformação de Borel, ver Eq. (46), para $|t| < 1/\alpha$. Sob essa condição, a expansão tem a forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} = \frac{C}{1 + \alpha t} [1 + \mathcal{O}(t)], \quad |t| < \frac{1}{\alpha}, \quad (48)$$

onde C é uma constante e a continuação analítica pode ser definida para $t > 1/\alpha$ (ver Fig. 5). A *continuação analítica* consiste na redefinição apropriada de uma função analítica de modo a estender seu domínio de analiticidade (PONNUSAMY; SILVERMAN, 2006). A referência que nos traz esta informação é fortemente indicada para quem deseja se aprofundar sobre o assunto.

A função $f(g)$ é dita Borel ressomável se pudermos somar a expressão em (46) e realizar a sua continuação analítica, que é crucial para recuperar a função original (Eq. (45)) via *ressoma de Borel* ou *transformação de Borel inversa*,

$$S[f](g) = \int_0^{\infty} dt e^{-t/g} \widetilde{B}[f](t), \quad (49)$$

onde o til sobre $\widetilde{B[f]}(t)$ representa a sua continuação analítica. A expressão acima pode ser encarada como a transformação de Laplace da continuação analítica da transformação de Borel de $f(g)^{12}$. Quando calculamos $S[f](g)$ e encontramos a função original $f(g)$ como resposta, dizemos que a função $f(g)$ é Borel ressomável ao resultado exato (SERONE; SPADA; VILLADORO, 2017).

O esquema abaixo ilustra todas as etapas do processo

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Transf. Borel} & \\
 \text{Série de potência} & \longrightarrow & B[f](t) \\
 \text{Exp. Assintótica} \swarrow & & \swarrow \text{Transf. Laplace} \\
 & S[f](g) & \\
 & \text{Fç. Analítica } \mathbb{R}^+ &
 \end{array}$$

Salientamos que isto leva a uma expressão bem definida para $S[f](g)$ com a condição sobre g sendo $\text{Re } g > 0$. Para melhor compreensão dessa ferramenta, podemos aplicá-la à função de Euler (Eq. (23)), lembrada abaixo por conveniência,

$$E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! g^{n+1}.$$

É perceptível que a série diverge mas seus coeficientes são alternados, propiciando uma transformação de Borel bem definida e única. Fazendo $n \rightarrow n - 1$ para que fique da forma $\sum a_n g^n$, podemos identificar corretamente o coeficiente geral para construir a transformação de Borel. Após a mudança,

$$E(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n-1} (n-1)!}_{a_n} g^{(n-1)+1}. \quad (50)$$

Assim,

$$B[E](t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}. \quad (51)$$

Através da mudança $n \rightarrow n + 1$ e com a condição $|t| < 1$, é possível perceber que a série resultante da transformação de Borel assume a forma de uma série geométrica,

$$B[E](t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1 - (-t)} = \frac{1}{1 + t}, \quad |t| < 1. \quad (52)$$

Observe que há apenas uma singularidade em $t = -1$, e como a ressonância é realizada no

¹² Indica-se a leitura do anexo A de Cherman, Dorigoni e Ünsal (2015)

intervalo que corresponde ao semi-eixo real positivo, não existe contratempo à integração — basta lembrar de fazer a continuação analítica antes de integrar. Sendo o domínio inicialmente $-1 < t < 1$, este é estendido para $t > 1$. De forma mais rigorosa, dizemos que a série obtida após a transformação de Borel, $\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$, converge para a função $h(t) \equiv \frac{1}{1+t}$, desde que $|t| < 1$. Por si só, a função $h(t)$ é analítica em todo o plano complexo, *exceto* para o polo em $t = -1$. Logo identificamos a continuação analítica de $B[E](t)$ como

$$\widetilde{B[E]}(t) = \frac{1}{1+t}, \quad (53)$$

lembrando que $t \neq -1$. Assim,

$$S[E](g) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/g}}{1+t} dt. \quad (54)$$

Podemos fazer a mudança $t/g = t'$ e utilizar a definição da função $\Gamma(n+1) = n!$. A definição geral é (DLMF... , 2020e)

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt. \quad (55)$$

Desta maneira, a ressonância de Borel em (54) define uma função analítica na região $\text{Re } g > 0$ e reconstrói a solução original

$$S[E](g) = E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! g^{n+1}. \quad (56)$$

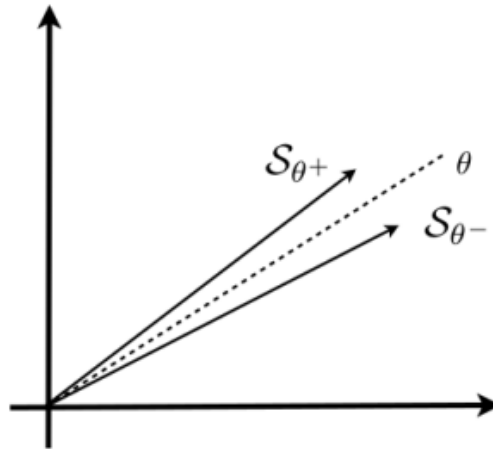
Como desejamos lidar com representações integrais, este método se mostra muito útil para reescrever integrais na forma de ressonância de Borel, possibilitando encontrar uma representação em série de potências, e vice-versa. O que oferece as condições para que uma dada função seja igual à ressonância de sua série assintótica é o chamado teorema de Watson (WATSON, 1912). Mais um teorema também contribuiu para tornar a ressonância de Borel uma ferramenta poderosa de análise assintótica, denominado teorema de Watson-Nevalinna ou Nevalinna-Sokal, que acrescentou mais elementos ao conjunto de funções que são Borel ressonáveis (NEVANLINNA, 1918).

Além do que apresentamos aqui, existem generalizações da transformação de Borel, como a versão com iteração (BENDER; ORSZAG, 1999),

$$B[f](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n!)^k} t^n, \quad (57)$$

para séries de Gevrey k , e a transformação de Borel–Le Roy (KLEINERT; SCHULTE-

Figura 6 - Ressoa lateral ao longo da direção θ .



Fonte: DORIGONI, 2019, p. 12.

FROHLINDE, 2001; SERONE; SPADA; VILLADORO, 2017),

$$B_{\beta}[f](t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(k + \beta + 1)} t^n. \quad (58)$$

Lembrando o comentário feito no parágrafo onde se encontra a equação (30), foi esclarecido o termo *ambiguidade não-perturbativa*. Percebe-se a importância crescente da ressonância de Borel quando se constata que, através dela, a família de soluções formais ultrapassa o caráter formal e se torna uma família de soluções “de verdade”. Ao longo das direções onde uma série é Borel somável, a solução original é reconstruída apenas pela ressonância da série perturbativa. Entretanto, em muitos casos existem singularidades ou pontos de ramificação que não permitem realizar a ressonância de Borel tradicional (Eq. (49)). Estas peculiaridades estão relacionadas ao fenômeno de Stokes, explorado à frente no texto. A alternativa pode ser a ressonância de Borel lateral (ou direcional),

$$S_{\theta}[f](g) = \frac{1}{g} \int_0^{e^{i\theta}\infty} e^{-t/g} B[f](t) dt, \quad (59)$$

representada na figura 6. Vale destacar que as ressonâncias laterais são continuções analíticas da *ressonância* de Borel original, que por construção já é uma continução analítica da *transformação* de Borel.

1.2 Fenômeno de Stokes além da assintotia clássica

É interessante conhecer agora a aplicação da ressonância de Borel no estudo de EDOs (COSTIN, 1998), útil para a próxima seção. Seja um sistema de n equações diferenciais não-lineares

$$\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{f}(z, \boldsymbol{\alpha}), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n \quad (60)$$

em que $\mathbf{f}(z, \boldsymbol{\alpha})$ é analítico em $(\infty, \mathbf{0})$. Depois de uma linearização,

$$\hat{\Lambda} = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j}(\infty, \mathbf{0}) \right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad (61)$$

chega-se à chamada forma preparada

$$\boldsymbol{\alpha}' = -\Lambda \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{z} B \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{g}(z, \boldsymbol{\alpha}), \quad (62)$$

onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$, os λ_i são os autovalores da linearização e as variáveis foram escolhidas de forma que $\lambda_1 > 0$. Por construção, $\mathbf{g}(z, \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{O}(|\boldsymbol{\alpha}|^2, z^{-2} \boldsymbol{\alpha})$.

À solução formal $\boldsymbol{\alpha}_0$ da equação (62) podem ser adicionadas correções exponencialmente pequenas, sem mudar a assintotia, como em

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}} \mathbf{C}^{\mathbf{k}} e^{-\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda} z} z^{-\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}, \quad (63)$$

onde são parâmetros livres $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)$ e é utilizada a notação $\mathbf{C}^{\mathbf{k}} = C_1^{k_1} \dots C_n^{k_n}$. As funções $\boldsymbol{\alpha}_0$ e $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}}$ são séries de potência formais, isto é,

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}} = \sum_{n \geq 0} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k};n} z^{-n}. \quad (64)$$

Ao realizar ressonâncias laterais de Borel na transsérie formal, explicitada na Eq. (63), obtém-se

$$\boldsymbol{\alpha}_{\pm}(z; \mathbf{C}_{\pm}) = S_{\pm}[B(\boldsymbol{\alpha}_0)](z) + \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_{\pm}^{\mathbf{k}} z^{-\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}} e^{-\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{k} z} S_{\pm}[B(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}})](z), \quad (65)$$

que são famílias com multiparâmetros e representam boas soluções (sendo assintóticas a $\boldsymbol{\alpha}_0$) para $|z|$ grande, desde que os termos não-nulos na transsérie obedeçam a

$$\text{Re}(\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{k} z) > 0. \quad (66)$$

De forma simplificada, diz-se que a transsérie obtida na ressonância de Borel figura como so-

lução da EDO. A recíproca é verdadeira: qualquer solução de EDO pode ser representada como um transsérie oriunda da ressonância de Borel, com \mathbf{C} escolhidos apropriadamente. Esta é uma das principais consequências da teoria da ressurgência de Écalle. O que mais se pode dizer a partir desta constatação é que *é possível dar sentido a exponenciais pequenas* e assim incorporar as informações das transséries de maneira sistemática.

Pensando neste contexto apresentado, como interpretar o fenômeno de Stokes? Foi visto na seção 1.1 que as linhas de Stokes indicam a presença de pequenas exponenciais, mas o salto que acontece (por exemplo, analisando a função de Airy) só é percebido quando se atinge a antilinha de Stokes. Com a ressonância de Borel, abre-se caminho para aumentar os horizontes, enxergando além das limitações da assintótica clássica.

Considere uma direção de Stokes, por simplicidade $\arg(z)$, correspondendo ao autovalor $A = \lambda_1 > 0$. Ao longo dessa direção, há duas famílias de soluções obtidas em (65). Espera-se, por propriedade de unicidade, que as duas sejam relacionadas. E essa relação existe mesmo (MARINÑO, 2014):

$$\alpha_+(z, \mathbf{C}) = \alpha_-(z; \mathbf{C} + \boldsymbol{\sigma}), \quad (67)$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, 0, \dots, 0) \quad (68)$$

é chamado de parâmetro de Stokes associado à linha $\arg(z) = 0$, e revela-se imaginário quando os coeficientes da transsérie são reais. Justamente a informação dada em (67) é a versão “Borel-ressomada” do fenômeno de Stokes, pois mostra que os coeficientes das soluções de transséries realizam saltos (descontínuos) ao longo da direção de Stokes, vistos com mais detalhes no último capítulo.

Em relação à ordem principal no parâmetro pequeno $\exp(-Az)$, pode-se escrever (MARINÑO, 2014)

$$\alpha_{0,+}(z) - \alpha_{0,-}(z) \approx \sigma_1 z^{-\beta_1} e^{-Az} \alpha_{(1,0,\dots,0);-}(z). \quad (69)$$

Considere agora uma solução perturbativa $\alpha_0(z)$ e a primeira transsérie

$$\alpha_1(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_{1,n}}{z^n}. \quad (70)$$

A diferença entre as ressonâncias laterais de $\alpha_0(z)$ pode ser escrita como

$$\alpha_{0,+}(z) - \alpha_{0,-}(z) = \int_{\gamma} dt e^{-zt} B[\alpha_0](t), \quad (71)$$

em que γ é uma deformação do contorno $\mathcal{C}_+ - \mathcal{C}_-$, e envolve as singularidades da trans-

formação de Borel. Somente em poucos casos a transformação de Borel não possui singularidades ao longo da linha de integração. Mais raras ainda são as ocasiões em que não existe uma singularidade sequer. É primordial ser capaz de integrar ao longo de um caminho da origem ao infinito, então não é desejável ter singularidades “demais”. Então, objetiva-se estabelecer com que tipo de singularidades se lida. Para isso são necessárias algumas definições.

Definição. Um germe de funções analíticas na origem $B[\phi] \in \mathbb{C}\{\zeta\}$ é dito infinitamente continuável se, para todo $R > 0$, existe um conjunto finito $\Gamma_R(B[\phi]) \subset \mathbb{C}$ de singularidades acessíveis, de forma que possa ser feita a continuação analítica de $B[\phi]$ ao longo de caminhos γ cujo comprimento é menor que R , evitando as singularidades $\Gamma_R(B[\phi]) \subset \mathbb{C}$.

Dizer que $B[\alpha_0](t)$ é infinitamente continuável significa que, embora a transformada de Borel da série de potências formal possa apresentar muitas singularidades no plano de Borel, apesar disso é possível considerar um caminho deformado γ , da origem até infinito em qualquer direção θ (DORIGONI, 2019). Outra definição envolve funções holomorfas, que são definidas sobre um subconjunto aberto do plano complexo, com valores complexos diferenciáveis em cada ponto.

Definição. Uma classe de funções ressurgentes possui singularidades simples se sua transformação de Borel (que é uma função infinitamente continuável) tem singularidades do tipo

$$\hat{\phi}(\zeta) = B[\phi](\zeta) = \frac{\alpha}{2\pi i(\zeta - w)} + \frac{1}{2\pi i} \hat{\Phi}(\zeta - w) \log(\zeta - w), \quad (72)$$

onde o ponto singular é w (STERNIN; SHATALOV, 1996).

Assim, comparando com (69), percebe-se que a estrutura de $B[\alpha_0](t)$ em torno da singularidade de $t = A$ é da forma

$$B[\alpha_0](A + \xi) = -\sigma_1 \left(\frac{\alpha_{1,0}}{2\pi i \xi} + \frac{\log(\xi)}{2\pi i} B[\alpha_1](\xi) \right). \quad (73)$$

Para verificar tal afirmação, basta perceber que o primeiro termo é o resíduo no polo A ,

$$\sigma_1 e^{-Az} \alpha_{1,0}, \quad (74)$$

enquanto o segundo termo traz a integral da descontinuidade do logaritmo, a saber

$$\sigma_1 e^{-Az} \int_0^\infty d\xi e^{-z\xi} B[\alpha_1](\xi) = \sigma_1 e^{-Az} \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_{1,n}}{z^n}. \quad (75)$$

A relação (69) significa que o comportamento singular da transformada de Borel da série perturbativa está ligado à transsérie de um íntanton. Já a equação (73) exemplifica uma

das *relações de ressurgência* descobertas por Jean Écalle, formando a base do chamado cálculo alienígena para esta teoria. Na verdade, as conexões não se limitam somente a séries perturbativas e primeiro íntanton. Esta é só a ponta do *iceberg*. Existem conexões entre todas as séries de potência formais na transsérie.

1.3 Efeitos não-perturbativos e comportamento de altas ordens

Através dos exemplos da equação de Euler e da função de Airy foi possível observar que a “ação” que aparece na transsérie controla o comportamento de altas ordens dos coeficientes perturbativos, o que é um fenômeno geral. O objetivo desta seção é encontrar heurísticamente a fórmula assintótica para os coeficientes, partindo de uma EDO de primeira ordem.

São dadas uma série perturbativa

$$\alpha_0(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}}, \quad (76)$$

e sua transformação de Borel

$$B[\alpha_0](t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n. \quad (77)$$

Logo,

$$\frac{a_{n+1}}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_0} dt \frac{B[\alpha_0](t)}{t^{n+1}}, \quad (78)$$

onde o contorno se dá em torno da origem, mas sabe-se que pode ser deformado para envolver a singularidade que $B[\alpha_0](t)$ possui em $t = A$. Em geral, há mais singularidades em $|t| > A$, mas suas correções são exponencialmente pequenas comparadas ao que se calcula aqui. Portanto,

$$\frac{a_{n+1}}{n!} \sim \frac{1}{2\pi i} \oint_{t=A} dt \frac{B[\alpha_0](t)}{t^{n+1}}. \quad (79)$$

Da mudança de variáveis $t = A + \xi$, obtém-se

$$\frac{a_{n+1}}{n!} \sim \frac{1}{2\pi i} \oint_{\xi=0} d\xi \frac{B[\alpha_0](A + \xi)}{(A + \xi)^{n+1}} \quad (80)$$

Graças à Eq. (73), é conhecida a estrutura de singularidade de $B[\alpha_0](t)$ próximo a $t = A$. Há um polo com resíduo $-\sigma_1 \alpha_{1,0}/2\pi i$, assim como uma descontinuidade logarítmica.

Consequentemente,

$$\frac{a_{n+1}}{n!} \sim \frac{\sigma_1 \alpha_{1,0}}{2\pi i} \oint_{\xi=0} \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{2\pi i (A + \xi)^{n+1}} + \frac{\sigma_1}{2\pi i} \sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_{1,k}}{(k-1)!} \int_0^\infty \frac{\xi^{k-1}}{(A + \xi)^{n+1}} d\xi. \quad (81)$$

O segundo termo pode ser reescrito como produtos de funções gama, já que

$$\int_0^\infty \frac{\xi^{k-1}}{(A + \xi)^{n+1}} d\xi = A^{k-n-1} \frac{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)}{\Gamma(n+1)}. \quad (82)$$

Finalmente, para todas as ordens, os coeficientes se comportam como

$$a_n \sim \frac{\sigma_1}{2\pi i} \Gamma(n) A^{-n} \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_{1,k} A^k}{\prod_{l=1}^k (n-l)}, \quad (83)$$

onde foi feita a troca $n \rightarrow n + 1$. A implicação deste resultado é que toda informação sobre a série formal de um ístanton está codificada na série perturbativa assintótica. Inversamente, o comportamento assintótico principal da série original (perturbativa) está codificado na solução de um ístanton. Claro que há contribuições exponencialmente suprimidas, que são associadas a singularidades mais altas, mas se deparar com um resultado deste tipo, tão claro e com uma relação poderosa, é animador. Observe que fica constatado o crescimento dos coeficientes, $a_n \sim n! A^{-n}$, como nos exemplos discutidos anteriormente, e que o parâmetro de Stokes σ_1 é encarado como crucial para a assintotia. Além disso, a relação (83) fornece uma maneira de determinar esse parâmetro numericamente, em casos em que não é possível extraí-lo analiticamente. Sabendo a importância dos ístantons na construção de transséries e nos cálculos em altas ordens dos coeficientes das séries formais e de tratamentos que as mesmas recebem, é urgente ingressar no assunto. Nas seções a seguir, os ístantons serão introduzidos e ao longo da leitura desenvolveremos aspectos importantes do formalismo integral na mecânica quântica.

1.4 Penetração de barreira e ístantons

Quando um potencial possui estados fundamentais degenerados, fenômenos como penetração de barreira e tunelamento são importantes objetos de estudo. Além disso, os conhecimentos mais básicos necessários a quem deseja desenvolver problemas com ístantons são encontrados no primeiro caso, ao qual esta seção se dedica. Aqui, o tratamento com base no livro de Zinn-Justin (2002) é feito por integrais de caminho no tempo imaginário, especificamente através do método da inclinação máxima.

No caso de um espectro discreto e não-degenerado, com energias $E_0 < E_1 < E_2 <$

..., a função de partição pode ser escrita de diversas maneiras:

$$Z(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle k | e^{-\beta H} | k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta E_k} = \int_{x(-\beta/2)=x(\beta/2)} [dx(t)] e^{-S[x(t)]}, \quad (84)$$

onde a última é dada pela integração de caminho com condição de contorno periódica¹³. Ademais, $S(x)$ é a ação euclidiana

$$S(x) = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x(t)) \right]. \quad (85)$$

Quando a constante de acoplamento que está implícita em $V(x)$ possui valores pequenos, a integral de caminho pode ser obtida pelo método da inclinação máxima, como expansões em torno dos pontos de sela. Estes são estabelecidos como soluções da equação de movimento euclidiana. Se for o caso de um único mínimo no potencial, localizado na origem $x = 0$, tal ponto constitui então a sela principal. Uma expansão em torno dessa sela fornece a expansão perturbativa de Z . Os autovalores do hamiltoniano são obtidos fazendo a expansão da função de partição para β grande. Agora, quando o potencial possui mínimos degenerados, são consideradas expansões em torno de cada mínimo, sendo a função de partição a soma de todas essas expansões.

Para saber a contribuição de instantons em primeira ordem, considere um potencial que seja uma função regular e par, $V(x) = V(-x)$, com dois mínimos localizados em pontos simétricos $\pm x_0$ não-nulos, que também são zeros do potencial¹⁴. A equação a ser satisfeita pelos pontos de sela é gerada ao realizar a primeira variação da ação euclidiana $S(x)$, caracterizando a equação de movimento clássica no potencial invertido $-V(x)$,

$$-\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad (86)$$

sujeita à condição de contorno $x(-\infty) = x(\infty)$. Percebendo que, na ação, tanto o termo de energia cinética quanto o de potencial são positivos, as soluções para a equação de movimento que sejam de ação finita (para $\beta = \infty$) devem interpolar entre os mínimos do potencial. Sendo x_c uma solução deste tipo e reescrevendo por conveniência a equação de movimento,

$$\frac{d}{dt} \dot{x}_c - \frac{dV(x_c)}{dx_c} = 0, \quad (87)$$

¹³ Escolheu-se tomar o período como o intervalo simétrico de valores $[-\beta/2, \beta/2]$.

¹⁴ Isso faz com que

$$V(x_0 + x) = \frac{1}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^4) \geq 0$$

que multiplicada por dx_c fica

$$\dot{x}_c d\dot{x}_c - dV(x_c) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{x}_c^2(t) - V(x_c(t)) = 0. \quad (88)$$

Por conta da invariância translacional do tempo, se $x_c(t)$ for uma solução então $x_c(t - t_0)$ também será. Para β grande, mas finito, temos $-\beta/2 \leq t_0 \leq \beta/2$. Após uma simples manipulação,

$$\dot{x}_c = \pm \sqrt{2V(x_c)}. \quad (89)$$

Uma alternativa também é

$$dt = \pm \frac{dx_c}{\sqrt{2V(x_c)}} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \pm \int_0^{x_c} \frac{dy}{\sqrt{2V(y)}}. \quad (90)$$

Também pode-se escrever a ação do íntanton

$$\begin{aligned} A \equiv S(x_c) &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[\frac{1}{2}\dot{x}_c^2(t) + V(x_c(t)) \right] \\ &= \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \dot{x}_c^2(t). \end{aligned} \quad (91)$$

O cálculo da contribuição da vizinhança do ponto de sela, em primeira ordem, é feito por meio de integração gaussiana. Faz-se

$$x(t) = x_c(t) + r(t), \quad (92)$$

tal que $r(-\beta/2) = r(\beta/2) = 0$. Expandindo a ação até segunda ordem em r , vem

$$\begin{aligned} S(x_c + r) &= \int dt \left[\frac{1}{2}(\dot{x}_c + \dot{r})^2 + V(x_c + r) \right] \\ &= \int dt \left\{ \left[\frac{\dot{x}_c^2}{2} + V(x_c) \right] + [-\ddot{x}_c + V'(x_c)]r + \left[\frac{\dot{r}^2}{2} + V''(x_c)r^2 \right] \right\} + \mathcal{O}(r^3), \end{aligned} \quad (93)$$

onde o segundo termo se anula porque constitui a equação de movimento no ponto de sela. Assim,

$$S(x_c + r) = S(x_c) + \int dt \left[\frac{1}{2}\dot{r}^2(t) + V''(x_c)r^2(t) \right] + \mathcal{O}(r^3). \quad (94)$$

Por outro lado, de forma geral,

$$\begin{aligned} S(x_c + r) &= A + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 r(t_1) \frac{\delta^2 S}{\delta x_c(t_1) \delta x_c(t_2)} r(t_2) + \mathcal{O}(r^3) \\ &= A + \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 r(t_1) M(t_1, t_2) r(t_2) + \mathcal{O}(r^3). \end{aligned} \quad (95)$$

Integrando por partes e usando a condição de contorno para r ,

$$\frac{1}{2} \int dt \dot{r}^2(t) = -\frac{1}{2} \int dt r(t) \frac{d^2}{dt^2} r(t), \quad (96)$$

então

$$M(t_1, t_2) = \left[-\frac{d^2}{dt_1^2} + V''(x_c(t_1)) \right] \delta(t_1 - t_2). \quad (97)$$

Portanto, as trajetórias que contribuem à integral de caminho no limite $\beta \rightarrow \infty$ são aquelas sujeitas às condições de contorno estabelecidas, isto é, as trajetórias para as quais $r(\pm\infty) = 0$.

Ao diferenciar a equação de movimento $-\ddot{x}_c + V'(x_c(t)) = 0$ em relação a t , o resultado é

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} + V''(x_c(t)) \right] \dot{x}_c(t) = 0, \quad (98)$$

cujas interpretação possível é a atuação do operador hermitiano M sobre \dot{x}_c :

$$M \dot{x}_c = \int dt' M(t, t') \dot{x}_c(t') = 0. \quad (99)$$

É perceptível que M possui autovalor zero correspondente ao autovetor $\dot{x}_c(t)$. O motivo vem da invariância de translação no tempo, levando à existência de uma família uniparamétrica de pontos de sela degenerados, que se relacionam por translações contínuas no tempo. Assim, a ação é invariante sob variações infinitesimais de $x_c(t)$, correspondendo a variações do parâmetro t_0 , proporcional a \dot{x}_c . Consequentemente, a integração gaussiana na função de partição (nos limites $g \rightarrow 0_-$, $\beta \rightarrow \infty$), é proporcional a $(\det M)^{-1/2}$:

$$\text{tr} e^{-\beta H} \sim e^{-A} \int [dr(t)] \exp \left(-\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 r(t_1) M(t_1, t_2) r(t_2) \right) \quad (100)$$

$$\propto \frac{e^{-A}}{\sqrt{\det M}}. \quad (101)$$

A preocupação que recai sobre a existência de um modo zero no espectro do operador M é justificada por tornar o resultado acima infinito.

1.4.1 Solução do problema de modo zero

A constatação de que o modo zero torna a integral de caminho sem sentido faz com que seja imprescindível a resolução de tal problema. A solução passa pela introdução das chamadas coordenadas coletivas.

Suponha que a função $x(t)$ seja expandida em um conjunto de funções ortogonais reais, sob condições de contorno periódicas,

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m(t), \quad \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt g_m(t) g_n(t) = \delta_{mn}. \quad (102)$$

A medida funcional é escrita como

$$[dx(t)] = N \prod_{m=0}^{\infty} dc_m, \quad (103)$$

onde N é a constante de normalização, calibrada mais à frente no intuito de fornecer a normalização do oscilador harmônico. No momento, é reescrita $x(t)$ em termos de funções x_c e f_n que sejam invariantes sob translações temporais:

$$x(t) = x_c(t - t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(t - t_0). \quad (104)$$

Em outras palavras, a função $x(t)$ é expressa em um novo conjunto de variáveis, $\{t_0, \{x_n\}\}$. Considere que um conjunto completo de funções (representando uma base ortonormal) seja dado por $\{f_0, f_n\}$. A sugestão da função extra f_0 vem do fato de que, ao fazer uma pequena variação em t_0 , é obtido

$$x_c(t - t_0) \rightarrow x_c(t - t_0 - \delta t_0) = x_c(t - t_0) - \dot{x}_c(t - t_0) \delta t_0, \quad (105)$$

isto é, acrescenta-se um termo proporcional a \dot{x}_c . Para que as variáveis t_0 e x_n sejam independentes, o vínculos requeridos são

$$\int dt \dot{x}_c(t - t_0) f_n(t - t_0) = 0, \quad \forall n. \quad (106)$$

Portanto, a função f_0 , normal e ortogonal às funções f_n , pode ser definida como

$$f_0 = \frac{\dot{x}_c}{\|\dot{x}_c\|}, \quad (107)$$

enquanto o conjunto

$$\left\{ \frac{\dot{x}_c}{\|\dot{x}_c\|}, f_n \right\} \quad (108)$$

forma uma base ortonormal.

A partir dessas informações, os coeficientes c_m podem ser determinados,

$$\begin{aligned} c_m &= \int dt g_m(t)x(t) \\ &= \int dt g_m(t)x_c(t-t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \int dt g_m(t)f_n(t-t_0). \end{aligned} \quad (109)$$

O jacobiano da transformação é o determinante da matriz

$$\left(\frac{\partial c_m}{\partial t_0}, \frac{\partial c_m}{\partial x_n} \right). \quad (110)$$

Baseado nas Eqs.(109) e (110), vem

$$\frac{\partial c_m}{\partial t_0} = - \int dt g_m(t)\dot{x}_c(t-t_0) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \int dt g_m(t)\dot{f}_n(t-t_0), \quad (111)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial x_n} = \sum_{p=1}^{\infty} \delta_{np} \int dt g_m(t)f_p(t-t_0) = \int dt g_m(t)f_n(t-t_0). \quad (112)$$

Ao desprezar x_n em primeira ordem no jacobiano, o segundo termo de (111) é eliminado. Além disso, tomando proveito de estar em uma base ortonormal, encontra-se

$$\det \left(\int dt g_m(t) \frac{\dot{x}_c(t-t_0)}{\|\dot{x}_c\|}, \int dt g_m(t)f_n(t-t_0) \right) = 1. \quad (113)$$

Todavia, o interesse é calcular o determinante do jacobiano (110) da transformação, ou seja

$$\det \left(\int dt g_m(t)\dot{x}_c(t-t_0), \int dt g_m(t)f_n(t-t_0) \right) = \|\dot{x}_c(t-t_0)\|. \quad (114)$$

De forma mais simples, escreve-se

$$J = \|\dot{x}_c(t-t_0)\| = \left(\int dt [\dot{x}_c(t-t_0)]^2 \right)^{1/2} = \sqrt{A}. \quad (115)$$

Antes de voltar à integral funcional, vale destacar que definem-se variáveis invariantes por translações temporais

$$x(t) = x_c(t-t_0) + r(t-t_0), \quad (116)$$

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(t). \quad (117)$$

Tomando o argumento da exponencial de (100),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 r(t_1) M(t_1, t_2) r(t_2) &= \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n(t_1) M(t_1, t_2) \sum_{p=1}^{\infty} x_p f_p(t_2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,p} x_n x_p \int dt_1 f_n(t_1) \int dt_2 M(t_1, t_2) f_p(t_2). \end{aligned} \quad (118)$$

Relembra-se que as funções f_p são ortogonais a \dot{x}_c , que é autovetor do operador M com autovalor zero. O argumento da exponencial agora se refere ao subespaço que é ortogonal ao modo zero. Sendo $\{m_n\}$ o conjunto de autovalores de M diferentes de zero, então

$$\int dt_2 M(t_1, t_2) f_p(t_2) = \int dt_2 m_p \delta(t_1 - t_2) f_p(t_2) = m_p f_p(t_1). \quad (119)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 r(t_1) M(t_1, t_2) r(t_2) &= \frac{1}{2} \sum_{n,p} x_n x_p m_p \int dt_1 f_n(t_1) f_p(t_1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,p} x_n x_p m_p \delta_{np} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n^2. \end{aligned} \quad (120)$$

Finalmente, a integral de caminho se torna

$$\begin{aligned} \text{tr} e^{-\beta H} &\sim N e^{-A} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt_0 \int \prod_{m=1}^{\infty} dx_m \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n x_n^2 \right) \\ &= \frac{N \beta e^{-A}}{\sqrt{\det' M}}, \end{aligned} \quad (121)$$

onde $\det' M$ é o produto de todos os autovalores de M não-nulos, e N acaba absorvendo valor infinito. Como o integrando não depende de nada da variável t_0 , sua integral é simplesmente β .

Como comentado anteriormente, a normalização é determinada pelo cálculo análogo da função de partição do oscilador harmônico,

$$\begin{aligned} Z_0(\beta) &= \int [dx(t)] \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt [\dot{x}^2(t) + x^2(t)] \right) \\ &= \int [dx(t)] \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt_1 dt_2 x(t_1) \left[-\frac{d^2}{dt_1^2} + 1 \right] x(t_2) \delta(t_1 - t_2) \right), \end{aligned} \quad (122)$$

de forma que o operador

$$M_0(t_1, t_2) = \left[-\frac{d^2}{dt_1^2} + 1 \right] \delta(t_1 - t_2), \quad (123)$$

o qual não possui modo zero.

No caso do íntanton, foi eliminado um grau de liberdade relativo ao modo zero, mas neste caso isso não acontece. Portanto, há uma integral gaussiana a mais,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-\lambda^2/2} = \sqrt{2\pi} \quad (124)$$

que não está incluída na normalização da integral de caminho, ou seja, aqui há $N\sqrt{2\pi}$, sendo N a mesma constante que aparece na Eq. (121). Assim, a função de partição do oscilador harmônico fica

$$Z_0(\beta) = \frac{N\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\det M_0}}. \quad (125)$$

Por outro lado,

$$Z_0(\beta) = \frac{e^{-\beta/2}}{1 - e^{-\beta}} \sim e^{-\beta/2}, \quad (126)$$

no limite $\beta \rightarrow \infty$. Substituindo este valor em (125),

$$N = \frac{e^{-\beta/2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\det M_0}. \quad (127)$$

Por este motivo, a função de partição do íntanton fica em termos de dois determinantes

$$\begin{aligned} \text{tr} e^{-\beta H} &\sim \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\beta/2} J \sqrt{\frac{\det M_0}{\det' M}} e^{-A} \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\beta/2} \sqrt{A} [\det' M (\det M_0)^{-1}]^{-1/2} e^{-A}. \end{aligned} \quad (128)$$

Feito isso, podemos agora tomar o modelo mais didático (portanto mais conhecido) para tratar de íntantons na mecânica quântica, o oscilador anarmônico quártico.

1.5 Oscilador anarmônico quártico na mecânica quântica

Nesta seção, é feita a introdução dos cálculos no contexto da mecânica quântica, aplicados à integral de caminho. Portanto, há de se trabalhar com uma função do tempo $x(t)$ que deve ser integrada no espaço funcional. Considere o operador hamiltoniano

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} g x^4. \quad (129)$$

Como será explicado posteriormente, o contorno no espaço funcional dos $x(t)$ complexos deve ser girado para passar a constante de acoplamento de g positivo para g negativo.

Como a integral de caminho é um limite de integrais em cada fatia de tempo, a estratégia funciona. Devido ao caráter complexo de $x(t)$, seja θ seu argumento. Escreve-se

$$x(t) \rightarrow x(t) e^{-i\theta}, \quad \arg x(t) = -\theta \pmod{\pi}. \quad (130)$$

Para cálculos unidimensionais, o termo de energia cinética $\int dt \dot{x}^2(t)$ tem presença certa na ação. Se fisicamente é necessário, matematicamente também tem sua importância, porque assegura o limite ao contínuo das fatias de tempo, ao se definir a integral de caminho, por conta de favorecer a seleção de caminhos suficientemente suaves (regulares). A atenção também deve ser voltada para que a condição $\text{Re} [\dot{x}^2(t)] > 0$ seja válida. Caso isso não aconteça, a integral de caminho não pode mais ser definida.

Portanto, como se quer definir a integral de caminho para g negativo, são duas as condições a serem satisfeitas simultaneamente:

$$\text{Re} [gx^4(t)] > 0, \quad \text{Re} [\dot{x}^2(t)] > 0. \quad (131)$$

Ambas implicam restrições sobre θ , pois

$$\text{Re} gx^4(t) = \text{Re} g |x(t)|^4 e^{-4i\theta} = g |x(t)|^4 \cos 4\theta > 0, \quad (132)$$

onde $g < 0$. Isto significa que $\cos 4\theta < 0$, ou $\frac{\pi}{2} < 4\theta < -\frac{\pi}{2}$, ou $\frac{\pi}{8} < \theta < -\frac{\pi}{8}$. Por outro lado, a segunda condição demanda

$$\text{Re} \dot{x}^2(t) = \text{Re} |\dot{x}(t)|^2 e^{-2i\theta} = |\dot{x}(t)|^2 \cos 2\theta > 0, \quad (133)$$

ou seja, $-\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$. Fazendo uma superposição das condições, os intervalos possíveis para a direção do contorno são:

$$\frac{\pi}{8} < \theta < \frac{\pi}{4} \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{8}. \quad (134)$$

Quando g é pequeno, duas integrais de caminho podem ser realizadas, correspondentes a $g \rightarrow 0_+$ e $g \rightarrow 0_-$, ambas dominadas pelo ponto de sela na origem, $x(t) = 0$. Todavia, a diferença entre as duas contribuições é nula. Logo, as contribuições dos outros pontos de sela devem entrar nas contas. Fazendo a primeira derivada do expoente de $e^{-S(x)}$ e igualando a zero, encontra-se a equação para os pontos de sela não-triviais (que é uma equação de movimento euclidiana),

$$-\ddot{x}(t) + x(t) + gx^3(t) = 0 \quad (g < 0), \quad (135)$$

com a condição

$$x(-\beta/2) = x(\beta/2). \quad (136)$$

Os pontos de sela que correspondem a funções constantes

$$x^2(t) = -\frac{1}{g}, \quad (137)$$

levam a contribuições da forma $e^{\beta/4g}$, que são desprezíveis no limite $\beta \rightarrow \infty$ (g negativo).

A alternativa é, então, buscar soluções não-constantes, mas que possuam o valor da ação finito no limite de β grande. Isto é justamente a caracterização de instantons.

Interpreta-se a equação (135) como o movimento clássico periódico de uma partícula real sob a ação de um potencial invertido,

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}gx^4, \quad (138)$$

cujos máximos são $x^2 = -1/g$. Os cálculos seguintes passam pelos mesmos passos explicados na seção 1.4. Ao integrar uma vez a equação de movimento, vem

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}gx^4 = \varepsilon, \quad (139)$$

onde $\varepsilon > 0$ foi introduzida como constante de integração. O movimento é periódico, cujos pontos de retorno tem posições positivas x_0 e x_1 , onde evidentemente a velocidade \dot{x} se anula. Assim,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}gx^4 + 2\varepsilon}, \quad (140)$$

ou

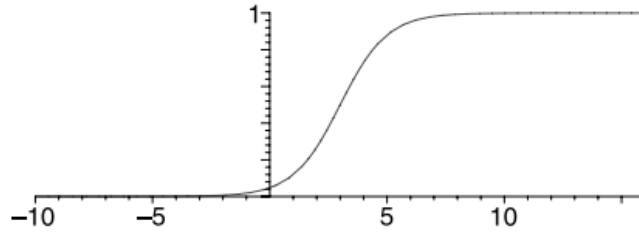
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}gx^4 + 2\varepsilon}}. \quad (141)$$

Quando integra-se entre os pontos de retorno, o lado esquerdo da equação fornece o período do movimento,

$$\beta = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}gx^4 + 2\varepsilon}}. \quad (142)$$

Para ter o limite de β grande, sendo que as posições entre x_0 e x_1 são finitas, o equivalente é tomar $\varepsilon \rightarrow 0$, o que significa também que x_0 , o menor valor do intervalo, deve tender a zero também. Isto quer dizer que, ao crescer β , a trajetória passa cada vez mais perto da origem. Tendo em mente $\beta \rightarrow \infty$, é solução da equação de movimento a

Figura 7 - Configuração de um instanton.



Fonte: ZINN-JUSTIN; JENTSCHURA, 2004, p. 239.

função (ver Fig. 7)

$$x_c(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{-g}} \frac{1}{\cosh(t - t_0)}. \quad (143)$$

De fato:

$$\dot{x}_c(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{-g}} \frac{-\sinh(t - t_0)}{\cosh^2(t - t_0)}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_c(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{-g}} \frac{\sinh^2(t - t_0) - 1}{\cosh^3(t - t_0)}. \quad (144)$$

Então confere-se que

$$-\ddot{x}_c(t) + x_c(t) + gx_c^3(t) = 0 \quad (145)$$

O valor da ação clássica correspondente a x_c é

$$\begin{aligned} S(x_c) &= A = \int_{-\infty}^{\infty} dt \dot{x}_c^2(t) \\ &= \frac{2}{-g} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\frac{\sinh^2(t - t_0)}{\cosh^4(t - t_0)} \right] \\ &= -\frac{4}{3g}, \end{aligned} \quad (146)$$

integrado no Maple. A parte imaginária da função de partição é, portanto, da ordem de $e^{-S(x_c)} = e^{4/3g}$, para g pequeno e negativo.

Atente para o fato de que a ação euclidiana é invariante sob translações no tempo, de modo que a solução clássica depende de apenas um parâmetro arbitrário t_0 , variando no intervalo de $-\beta/2$ a $\beta/2$, para β finito. Ou seja, existem duas famílias uniparamétricas de pontos de sela degenerados, diferentemente da integral simples.

Quanto ao cálculo da contribuição da vizinhança do ponto de sela, em primeira

ordem, sabe-se que

$$V''(x) = 1 + 3gx^2. \quad (147)$$

Fazendo $x(t) = x_c(t) + r(t)$, vem que

$$\text{Im tr } e^{-\beta H} \sim \frac{2}{2i} e^{4/3g} \int [dr(t)] \exp\left(-\frac{1}{2} \int dt_1 dt_2 r(t_1) M(t_1, t_2) r(t_2)\right), \quad (148)$$

onde o fator 2 representa a contribuição das duas famílias de pontos de sela. Especificamente,

$$M(t_1, t_2) = \left[-\frac{d^2}{dt_1^2} + 1 + 3gx_c^2(t_1) \right] \delta(t_1 - t_2), \quad (149)$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} M &= -\frac{d^2}{dt^2} + 1 + 3g \frac{2}{-g} \frac{1}{\cosh^2 t} \\ &= -\frac{d^2}{dt^2} + 1 - \frac{6}{\cosh^2 t}. \end{aligned} \quad (150)$$

Outra informação a ser utilizada na fórmula geral para a integral de caminho é

$$J = \sqrt{A} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{-g}}. \quad (151)$$

Desta forma,

$$\text{Im tr } e^{-\beta H} \sim \frac{1}{i} e^{4/3g} \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\beta/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\det' M (\det M_0)^{-1} \right]^{-1/2}, \quad (152)$$

onde

$$\det' M (\det M_0)^{-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \det(M + \varepsilon)(M_0 + \varepsilon)^{-1}. \quad (153)$$

O operador M pode ser escrito como um potencial de Bargmann–Wigner

$$M = -\frac{d^2}{dt^2} + 1 - \frac{\lambda(\lambda + 1)\omega}{\cosh^2 \omega t}. \quad (154)$$

Neste caso, percebe-se que $\lambda = 2$ e $\omega = 1$. De modo geral, para $z = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\omega} = \sqrt{1+\varepsilon}$,

$$\det(M + \varepsilon)(M_0 + \varepsilon)^{-1} = \frac{\Gamma(1+z)\Gamma(z)}{\Gamma(1+\lambda+z)\Gamma(z-\lambda)}. \quad (155)$$

Substituindo o valor de λ ,

$$\begin{aligned}
\det(M + \varepsilon)(M_0 + \varepsilon)^{-1} &= \frac{\Gamma(1+z)\Gamma(z)}{\Gamma(3+z)\Gamma(z-2)} \\
&= \frac{z\Gamma(z)(z-1)(z-2)\Gamma(z-2)}{(z+2)(z+1)z\Gamma(z)} \\
&= \frac{(z-1)(z-2)}{(z+2)(z+1)}.
\end{aligned} \tag{156}$$

No limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
z \sim 1 + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Rightarrow \quad z - 1 &\sim \frac{\varepsilon}{2}; \\
z - 2 &\sim \frac{\varepsilon}{2} - 1; \\
z + 1 &\sim 2 + \frac{\varepsilon}{2}; \\
z + 2 &\sim 3 + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(M + \varepsilon)(M_0 + \varepsilon)^{-1} \sim \frac{\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1 \right)}{\left(2 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(3 + \frac{\varepsilon}{2} \right)} \sim -\frac{\varepsilon}{12}. \tag{157}$$

Lembrando a definição (153),

$$\det' M (\det M_0)^{-1} = -\frac{1}{12}. \tag{158}$$

Finalmente, substituindo este valor na Eq. (152), fica

$$\begin{aligned}
\text{Im tr } e^{-\beta H} &= -\frac{1}{i} e^{4/3g} \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} e^{-\beta/2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-12} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{4/3g}}{\sqrt{-g}} \beta e^{-\beta/2} [1 + O(g)] \quad (g \rightarrow 0; \beta \rightarrow \infty),
\end{aligned} \tag{159}$$

cujo lado esquerdo oferece a parte imaginária da energia de estado fundamental, pois para β grande

$$\begin{aligned}
\text{Im tr } e^{-\beta H} &\sim \text{Im } e^{-\beta E_0(g)} \\
&= \text{Im } e^{-\beta(\text{Re } E_0(g) + i\text{Im } E_0(g))}.
\end{aligned} \tag{160}$$

A sutileza está no fato de que a parte imaginária é exponencialmente pequena para g pequeno. Tomando este limite antes do limite de β grande,

$$\text{Im tr } e^{-\beta H} \sim -\beta \text{Im } E_0(g) e^{-\beta \text{Re } E_0(g)} \sim -\beta e^{-\beta/2} \text{Im } E_0(g). \tag{161}$$

Consequentemente,

$$\text{Im } E_0(g) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{4/3g}}{\sqrt{-g}} [1 + O(g)], \quad (162)$$

1.6 Multi-ístantons

Considerando a expansão da energia de estado fundamental

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} + \dots, \quad (163)$$

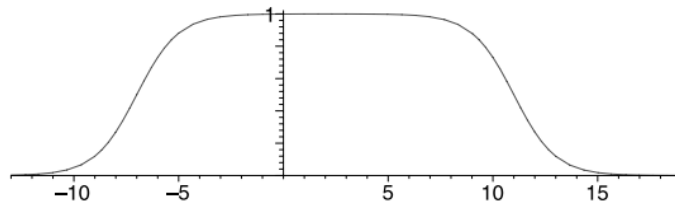
interpreta-se $E_0^{(0)}$ como a contribuição perturbativa, $E_0^{(1)}$ a de um ístanton e os pontos representam contribuições de multi-ístantons. O resultado de E_0 é obtido a partir da função de partição para β grande, da forma

$$\text{tr} e^{-\beta H} \sim e^{-\beta E_0} \sim e^{-\beta E_0^{(0)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n}{n!} (E_0^{(1)})^n. \quad (164)$$

Logo, a existência da contribuição de um ístanton para a energia implica a existência de contribuições de n -ístantons para a função de partição, proporcionais a β^n . Para entender de onde vem o fator β^n , antes deve-se perceber que uma dada trajetória clássica só pode gerar um fator β . Em contrapartida, as novas configurações dependem de n coordenadas coletivas independentes, sobre as quais deve-se integrar. É necessário ter cautela, pois essas contribuições não são correspondem geralmente a soluções da equação clássica de movimento. São, na verdade, configurações de ístantons com grande separação entre si, que se tornam soluções da equação de movimento apenas assintoticamente, no limite infinito de separação. Tais configurações possuem dependência de n vezes mais coordenadas coletivas do que a configuração de um ístanton.

Nesta seção, dois exemplos são calculados: potencial de poço duplo e potencial periódico. No primeiro, um ótimo caso para desenvolver passo a passo, o procedimento começa com uma configuração de dois ístantons (ver Fig. 8), depois é descrita a de n -ístantons, seguida do cálculo de suas contribuições, que por final são discutidas. Já o cálculo de potencial periódico não é tão pormenorizado, pois a introdução de uma ferramenta angular facilita o trabalho de generalizar os cálculos para n -ístantons.

Figura 8 - Configuração de dois instantons
(instanton-anti-instanton).



Fonte: ZINN-JUSTIN; JENTSCHURA, 2004, p. 241.

1.6.1 Potencial de poço duplo

O hamiltoniano do poço duplo é dado por

$$H = -\frac{1}{2}d_x^2 + \frac{V(x\sqrt{g})}{g}, \quad V(x) = \frac{1}{2}x^2(1-x^2). \quad (165)$$

As soluções de instantons no limite β infinito são

$$x_{\pm}(t) = \frac{1}{\sqrt{g}}f(\mp(t-t_0)), \quad (166)$$

$$f(t) = \frac{1}{1+e^t} = 1 - f(-t), \quad (167)$$

onde t_0 é constante e caracteriza a posição do instanton.

No limite em que a separação entre instantons é grande, a variação da ação é minimizada. Quando este limite vai para o infinito, os instantons se decompõem em dois instantons. Dessa forma, é interessante construir primeiramente a configuração de dois instantons, que na verdade é de instanton-anti-instanton, com dependência num parâmetro adicional de tempo que corresponde à separação entre instantons. Uma opção para resolver este caso seria introduzir uma restrição à integral de caminho, fixando a separação entre instantons, depois calcular a equação de movimento com multiplicador de Lagrange para a restrição. Em contrapartida, foi escolhido um método mais simples, pelo menos em ordem principal.

Considere que x_c é a soma de instantons separados por uma distância θ até uma constante aditiva escolhida convenientemente para satisfazer às condições de contorno. A

notação utilizada é assim definida:

$$u(t) = f\left(t - \frac{\theta}{2}\right), \quad (168)$$

$$\tilde{u}(t) = f\left(-t - \frac{\theta}{2}\right), \quad (169)$$

$$v(t) = 1 - \tilde{u}(t) = u(t + \theta), \quad (170)$$

lembrando que $f(t)$ foi dado em (167). O caminho é diferenciável e contínuo,

$$x_c(t)\sqrt{g} = u + \tilde{u} - 1 = u - v. \quad (171)$$

Quando θ é grande, a vantagem em seu uso é que difere, próximo a cada íntanton, da solução de íntanton somente por pequenos termos de ordem $e^{-\theta}$. A ação é escrita então como

$$S(x_c) = \frac{2}{6g} + \frac{1}{g} \int dt [\dot{u}\dot{u} + V(\tilde{u} + u - 1) - V(\tilde{u}) - V(u)]. \quad (172)$$

A região de integração pode ser restringida para $t > 0$ devido à paridade de $x_c(t)$, região essa em que v é pequeno. Integra-se por partes o termo $\dot{u}\dot{u} = -\dot{v}\dot{u}$, obtendo

$$S(x_c) = \frac{1}{3g} + \frac{2}{g} \left\{ v(0)\dot{u}(0) + \int_0^{+\infty} dt [v\ddot{u} + V(u - v) - V(u) - V(v)] \right\}. \quad (173)$$

Agora é possível expandir em potências de v e utilizar a equação de movimento para u . Parando na ordem v^2 ,

$$S(x_c) = \frac{1}{3g} + \frac{2}{g} v(0)\dot{u}(0) + \frac{2}{g} \left\{ \int_0^{+\infty} dt \left[\frac{1}{2} v^2 V''(u) - V(v) \right] \right\}. \quad (174)$$

As principais contribuições vêm da vizinhança de $t = 0$, onde $V''(u) \sim 1$, por conta da função v decair exponencialmente longe da origem. Além disso, $V(v)$ pode ser escrito como $v^2/2$ em ordem principal. Outra contribuição vem de

$$v(0)\dot{u}(0) \sim -e^{-\theta}, \quad (175)$$

resultando em

$$S(x_c) = g^{-1} \left[\frac{1}{3} - 2e^{-\theta} + \mathcal{O}(e^{-2\theta}) \right]. \quad (176)$$

A simetria entre θ e $\beta - \theta$ implica

$$S(x_c) = g^{-1} \left[\frac{1}{3} - 2e^{-\theta} - 2e^{-(\beta-\theta)} \right]. \quad (177)$$

Agora, é conveniente considerar uma sucessão de n -ístantons separados por intervalos θ_i de tempo,

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = \beta. \quad (178)$$

Quando se trata de cálculos em ordem principal, somente contribuições entre vizinhos são levadas em conta. A expressão para a ação clássica pode ser deduzida diretamente de (177),

$$S_c(\theta_i) = g^{-1} \left[\frac{n}{6} - 2 \sum_{i=1}^n e^{-\theta_i} + \mathcal{O}(e^{-(\theta_i+\theta_j)}) \right]. \quad (179)$$

Termos que são de ordem maior que $e^{-\theta}$ são omitidos. Calculada a ação de n -ístantons, é possível determinar, em ordem principal, a contribuição que a vizinhança do caminho clássico dá à integral (de caminho). A derivada segunda da ação nesse caminho é

$$M(t, t') = [-d_t^2 + V''(\sqrt{g}x_c(t))]\delta(t - t'). \quad (180)$$

tem a forma de um hamiltoniano com potencial correspondente a n poços bem separados e quase idênticos àquele do problema de um ístanton. O espectro é, então, entendido como o de um ístanton degenerado n -vezes. Ao introduzir n variáveis coletivas de tempo, o autovalor zero é suprimido n vezes e é gerado o jacobiano de um ístanton à potência n . A contribuição para Z é, portanto,

$$Z^{(n)} = e^{-\beta/2} \frac{\beta}{n} \left(\frac{e^{-1/6g}}{\sqrt{\pi g}} \right)^n \int_{\theta_i \geq 0} \delta(\sum \theta_i - \beta) \prod_i d\theta_i \exp\left(\frac{2}{g} \sum_{i=1}^n e^{-\theta_i}\right). \quad (181)$$

O fator β é oriundo da integração sobre uma translação temporal global, enquanto $1/n$ surge por conta da invariância sobre uma permutação cíclica de θ_i . Já $e^{-\beta/2}$ é fator usual de normalização.

Para ir além da aproximação de um ístanton, é necessário encarar um problema percebido na equação (181): a interação entre os ístantons é atrativa. Para g pequeno, as principais contribuições à integral são provenientes de configurações de ístantons muito próximos, a ponto do conceito de ístanton não ser mais válido, já que não poderiam ser distinguidas de flutuações em torno da solução constante. Tal fenômeno não é muito surpreendente, pois ambiguidades são esperadas a partir da constatação de não-somabilidade de Borel no caso de potenciais com mínimos degenerados. Por conta disso, é muito importante fazer boas escolhas no momento de somar a expansão perturbativa. Quando se toma g negativo, como no caso de dois ístantons, a interação entre ístantons é repulsiva, dando significado à expressão (181). O mesmo cuidado deve ser tomado na expansão perturbativa em torno de cada configuração de multi-ístanton.

Continuando os cálculos, a função delta é escrita na representação integral

$$\delta\left(\sum\theta_i-\beta\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-i\infty-\eta}^{i\infty-\eta}ds\exp\left[-s\left(\beta-\sum_{i=1}^n\theta_i\right)\right],\quad\eta>0. \quad (182)$$

Assim,

$$Z_\epsilon^{(n)}\sim\frac{e^{\beta/2}\lambda^n\beta}{2i\pi}\frac{1}{n}\int_{-i\infty-\eta}^{i\infty-\eta}ds e^{-\beta s}\int_{\theta_i\geq 0}\prod_i d\theta_i\exp\left(s\sum_{i=1}^n\theta_i\right)\exp\left(-\mu\sum_{i=1}^ne^{-\theta_i}\right), \quad (183)$$

onde $\lambda=\left(\frac{\epsilon e^{-1/6g}}{\sqrt{\pi g}}\right)$ corresponde à metade da contribuição de um íntanton em ordem principal e $\mu=-2/g$. Pode-se fatorar a integral sobre variáveis θ_i em termos da função

$$I(s)=\int_0^{+\infty}d\theta\exp\left(s\theta-\mu e^{-\theta}\right), \quad (184)$$

então

$$Z_\epsilon^{(n)}\sim\frac{e^{\beta/2}\lambda^n\beta}{2i\pi}\frac{1}{n}\int_{-i\infty-\eta}^{i\infty-\eta}ds e^{-\beta s}[I(s)]^n. \quad (185)$$

A convergência da integral é assegurada ao atribuir uma pequena parte real negativa a s . Para resolver a Eq. (184), é feita a mudança de variável

$$t=\mu e^{-\theta}, \quad (186)$$

resultando em

$$I(s)=\int_0^\mu\frac{dt}{t}\left(\frac{\mu}{t}\right)^s e^{-t}. \quad (187)$$

No limite de μ positivo e grande, que implica $g_-\rightarrow 0$,

$$I(s)=\int_0^\infty\frac{dt}{t}\left(\frac{\mu}{t}\right)^s e^{-t}+\mathcal{O}(e^{-\mu}/\mu)\sim\mu^s\Gamma(-s). \quad (188)$$

A função geradora das contribuições de multi-íntantons em ordem principal, $\Sigma(\beta, g)$, é escrita na forma

$$\Sigma(\beta, g)=e^{-\beta/2}+\sum_{n=1}^\infty Z_\epsilon^{(n)}(\beta, g) \quad (189)$$

$$= -\beta\frac{e^{-\beta/2}}{2i\pi}\int_{-i\infty-\eta}^{i\infty-\eta}ds e^{-\beta s}\sum_n\frac{\lambda^n}{n}\mu^{ns}[\Gamma(-s)]^n. \quad (190)$$

$$= -\beta\frac{e^{-\beta/2}}{2i\pi}\int_{-i\infty-\eta}^{i\infty-\eta}ds e^{-\beta s}\ln[1-\lambda\mu^s\Gamma(-s)]. \quad (191)$$

Integrando $\beta e^{-\beta s}$ por partes e utilizando convenientemente as mudanças

$$E = s + 1/2, \quad \phi(E) = 1 - \lambda \mu^{E-1/2} \Gamma(1/2 - E), \quad (192)$$

o resultado é

$$\Sigma(\beta, g) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dE e^{-\beta E} \frac{\phi'(E)}{\phi(E)}. \quad (193)$$

Tal integração representa uma soma de resíduos

$$\Sigma(\beta, g) = \sum_{N \geq 0} e^{-\beta E_N}, \quad (194)$$

onde os E_N são soluções da equação $\phi(E) = 0$. Como λ é pequeno, um dos zeros é próximo a um polo de $\Gamma(1/2 - E)$,

$$E_N = N + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\lambda), \quad N \geq 0, \quad (195)$$

e a expansão das soluções em séries de potência de λ é escrita como

$$E_N(g) = \sum E_N^{(n)}(g) \lambda^n. \quad (196)$$

Com isso, são obtidas as contribuições de vários instantons para todos os níveis $E_N(g)$ de energia do potencial de poço duplo, em ordem principal. Para ilustrar, a contribuição de um instanton é

$$E_N^{(1)}(g) = -\frac{\epsilon}{N!} \left(\frac{2}{g}\right)^{N+1/2} \frac{e^{-1/6g}}{\sqrt{2\pi}} (1 + \mathcal{O}(g)). \quad (197)$$

A de dois instantons é

$$E_N^{(2)}(g) = \frac{1}{(N!)^2} \left(\frac{2}{g}\right)^{2N+1} \frac{e^{-1/3g}}{\sqrt{2\pi}} [\ln(-2/g) - \psi(N+1) + \mathcal{O}(g \ln g)], \quad (198)$$

onde ψ é a derivada logarítmica da função gama (DLMF..., 2020e), de forma geral,

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (199)$$

Finalmente, pode ser provado que a contribuição de n -instanton em ordem principal é

$$E_N^{(n)}(g) = -\left(\frac{2}{g}\right)^{n(N+1/2)} \left(\frac{e^{1/6g}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left[P_n^N(\ln(-g/2)) + \mathcal{O}(g(\ln g)^{n-1}) \right], \quad (200)$$

em que $P_n^N(\zeta)$ é um polinômio de ordem $n - 1$. Para $N = 0$, por exemplo,

$$P_2(\zeta) = \zeta + \gamma, \quad P_3(\zeta) = \frac{3}{2}(\zeta + \gamma)^2 + \frac{\pi^2}{12}, \quad (201)$$

onde γ é a constante de Euler e $\gamma = -\psi(1)$, sendo ψ a derivada logarítmica da função Γ (Eq. (199))

Um detalhe interessantíssimo é que, quando é feita a continuação analítica de $g < 0$ para $g > 0$, tanto a transformação de Borel quanto a função $\ln(-2/g)$ se tornam complexos e adquirem partes imaginárias. Entretanto, como a soma de todas as contribuições é real, as partes imaginárias devem se cancelar. Sabendo que $\text{Im}(\ln(-2/g)) = \pm i\pi$, através de P_2 é obtido, por exemplo,

$$\text{Im}E^{(0)}(g) \sim \frac{1}{\pi g} e^{-1/3g} \text{Im}[P_2(\ln(-g/2))] = -\frac{1}{g} e^{-1/3g}. \quad (202)$$

Expandindo em série perturbativa, $E^{(0)}(g) = \sum_k E_k^{(0)} g^k$, e usando relação de dispersão para os coeficientes, é obtido

$$E_k^{(0)} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} [E^{(0)}(g)] \frac{dg}{g^{k+1}} = -\frac{1}{\pi} 3^{k+1} k!. \quad (203)$$

Em relação à contribuição de um íntanton, em termos de P_3 é possível ver que $E^{(1)}(g)$ e $E^{(3)}(g)$ se cancelam em ordem principal:

$$\text{Im}E^{(1)}(g) \sim -\left(\frac{e^{-1/6g}}{\sqrt{\pi g}}\right)^3 \text{Im}[P_3(\ln(-g/2))]. \quad (204)$$

1.6.2 Potencial periódico

O hamiltoniano utilizado é

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{16g} (1 - \cos(4x\sqrt{g})). \quad (205)$$

Para cada estado do oscilador harmônico é associada uma banda do potencial periódico para g pequeno. Introdz-se o operador T , responsável pela translação de funções de onda por um período $\pi/2\sqrt{g}$,

$$T\psi(x) \equiv \psi(x + \pi/2\sqrt{g}), \quad (206)$$

o qual comuta com o hamiltoniano e é diagonalizável simultaneamente. Sendo $e^{i\varphi}$ o autovalor de T e $\psi_{N,\varphi}$ a autofunção de H , ambos necessários para caracterizar um estado

numa banda, escreve-se

$$T\psi_{N,\varphi} = e^{i\varphi}\psi_{N,\varphi}, \quad H\psi_{N,\varphi} = E_N(g, \varphi)\psi_{N,\varphi}, \quad (207)$$

onde $E_N(g, \varphi)$ é uma função periódica do ângulo φ .

Num determinado setor de ângulo φ , define-se a função de partição como¹⁵

$$Z(\beta, g, \varphi) = \sum_N e^{-\beta E_N(g, \varphi)}, \quad (208)$$

Outra quantidade importante é (MARIÑO, 2015; ZINN-JUSTIN; JENTSCHURA, 2004b)

$$Z_l(\beta, g) \equiv \text{tr}(T^l e^{-\beta H}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_N e^{-\beta E_N(g, \varphi)} \int dx \psi_{N,\varphi}^*(x) \psi_{N,\varphi}(x + l\pi/2\sqrt{g}) \quad (209)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\sum_N e^{-\beta E_N(g, \varphi)}}_{Z(\beta, g, \varphi)} e^{il\varphi}, \quad (210)$$

proveniente de uma decomposição de Fourier da forma (MARIÑO, 2015; ZINN-JUSTIN; JENTSCHURA, 2004b)

$$Z(\beta, g, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-il\varphi} Z_l(\beta, g), \quad (211)$$

que pode ser escrita na representação de integral de caminho como

$$Z_l(\beta, g) = \int_{x(\beta/2)=x(-\beta/2)+l\pi/2\sqrt{g}} [dx(t)] \exp \left\{ - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[\frac{1}{2} \dot{x}^2(t) + \frac{1}{16g} (1 - \cos(4x\sqrt{g})) \right] \right\}. \quad (212)$$

É possível adicionar um fator $e^{-il\varphi}$ à integral de caminho, atitude que pode ser interpretada como adicionar à ação uma densidade local, ou seja,

$$S(x) + \frac{2i\sqrt{g}}{\pi} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \dot{x}(t). \quad (213)$$

Diferentemente do caso anterior (potencial de poço duplo), em que cada configuração era uma sucessão de instantons e anti-instantons, aqui o instanton pode ir para o próximo

¹⁵ Em particular, para β grande,

$$Z(\beta, g, \varphi) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\beta E_0(g, \varphi)}.$$

mínimo, ou então para o mínimo anterior. A fim de organizar os cálculos, são atribuídos os sinais $\epsilon = +1$ para um íntanton e $\epsilon = -1$ para anti-íntanton. A interação entre dois íntantons consecutivos, separados pela distância θ_{12} é

$$\frac{2\epsilon_1\epsilon_2}{g}e^{-\theta_{12}}. \quad (214)$$

A contribuição de um íntanton de ordem principal é

$$\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi g}}e^{-1/2g}. \quad (215)$$

Seguindo o mesmo procedimento que o do poço duplo,

$$Z^{(n)}(\beta, g, \varphi) = \frac{\beta}{2i\pi}e^{-\beta/2}\frac{\lambda^n}{n} \oint ds e^{-\beta s}\Gamma^n(-s) \sum_{\epsilon_i=\pm 1} \exp\left[\sum_{i=1}^n -i\epsilon_i\varphi - s \ln(\epsilon_i\epsilon_{i+1}g/2)\right]. \quad (216)$$

Fazendo uma continuação analítica depois da mudança $\sigma = \ln(g/2)$, de forma que

$$\ln\left(\frac{1}{2}g\epsilon_i\epsilon_{i+1}\right) = \sigma - \frac{1}{2}i\pi(1 - \epsilon_i\epsilon_{i+1}), \quad (217)$$

o somatório na equação (216) é reescrito, tornando-se correspondente ao cálculo da função de partição do modelo de Ising unidimensional, cuja matriz \mathbf{M} é igual a

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & e^{i\pi s} \\ e^{i\pi s} & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (218)$$

cujos autovalores são

$$m_{\pm} = \cos \varphi \pm (e^{2i\pi s} - \sin^2 \varphi)^{1/2}. \quad (219)$$

Logo, o somatório é $\text{tr}\mathbf{M}^n$. A expressão (216) é reescrita (ZINN-JUSTIN, 1984),

$$Z^{(n)}(\beta, g, \varphi) = \frac{\beta}{2i\pi}e^{-\beta/2}\frac{\lambda^n}{n} \oint ds e^{-\beta s}[\Gamma^n(-s) e^{-\sigma s}]^n(m_+^n + m_-^n). \quad (220)$$

Agora, a soma de todas as contribuições em ordem principal de multi-íntantons pode ser desenvolvida,

$$\Sigma(\beta, g) = e^{\beta/2} - \frac{\beta e^{-\beta/2}}{2i\pi} \oint ds e^{-\beta s} \ln[1 - \lambda\Gamma(-s)e^{-\sigma s}m_+(s)][1 - \lambda\Gamma(-s)e^{-\sigma s}m_-(s)]. \quad (221)$$

Concluimos aqui o estudo de aspectos não-perturbativos relacionados aos íntan-

tons, cujas ações são essenciais na construção de transséries. Seguimos o estudo, agora voltado para a teoria da ressurgência em integrais.

2 RESSURGÊNCIA EM INTEGRAIS DE TIPO LAPLACE

Foi dito anteriormente, no capítulo 1, que a característica assintótica da maioria das séries perturbativas na teoria quântica de campos (TQC) é sinal de que efeitos não-perturbativos devem ser incluídos no cálculos. Seguindo o formalismo dessa área, nossos cálculos são realizados a partir de funções de partição, que nada mais são do que integrais. De modo geral, uma função de partição é da forma (84), descrita novamente abaixo por conveniência,

$$Z = \int [dx(t)] e^{-S[x(t)]}, \quad (222)$$

onde a ação $S[x(t)]$ é um funcional e a integral é de caminho. Tais denominações são verdade para dimensionalidade $d \geq 1$, mas em $d = 0$ a função de partição é apenas uma integral ordinária. Para lidar com esse último tipo, existem algumas técnicas conhecidas na literatura, apresentadas nas próximas seções.

2.1 Métodos para integrais de funções reais

2.1.1 Método de Laplace

O objetivo do método de Laplace é a obtenção do comportamento assintótico de integrais do tipo

$$I(\lambda) = \int_a^b g(t) e^{\lambda\phi(t)} dt, \quad (223)$$

onde λ é um parâmetro grande e as funções $g(t)$ e $\phi(t)$ são contínuas e reais. Sendo os extremos de integração (a, b) finitos ou infinitos e reais, a ideia do método de Laplace é que as principais contribuições de $I(\lambda)$ quando $\lambda \rightarrow \infty$ são provenientes de uma vizinhança do(s) ponto(s) onde $\phi(t)$ tem seu valor máximo no intervalo (a, b) . Comparativamente, as outras contribuições, longe do máximo, são exponencialmente pequenas (BENDER; ORSZAG, 1999). Isto significa que é válida a aproximação de $I(\lambda)$ em $I(\lambda; \varepsilon)$, onde

$$I(\lambda; \varepsilon) = \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} g(t) e^{\lambda\phi(t)} dt. \quad (224)$$

No caso, c é o máximo no intervalo $a \leq t \leq b$, mas pode haver problemas em que o máximo está em $t = a$ ou em $t = b$, então substituímos os limites de integração de (224) respectivamente por $\int_a^{a+\varepsilon}$ ou $\int_{b-\varepsilon}^b$. De qualquer forma, a constante ε é escolhida como

um número positivo arbitrário que constrói um subintervalo¹⁶ de integração dentro de $a \leq t \leq b$. É extremamente importante que a expansão assintótica completa de $I(\lambda; \varepsilon)$ em $x \rightarrow \infty$ seja independente de ε e que seja idêntica à de $I(\lambda)$.

A vantagem da aproximação $I(\lambda; \varepsilon)$ é que se pode escolher um ε pequeno a ponto de ser válido substituir $g(t)$ e $\phi(t)$ por suas séries assintóticas ou de Taylor em torno de $t = c$.

Como exemplo, considere a integral

$$\int_0^{10} (1+t)^{-1} e^{-\lambda t^2} dt. \quad (225)$$

onde reconhecemos $\phi(t) = -t^2$, $g(t) = (1+t)^{-1}$. Para encontrar o ponto crítico, basta que

$$\phi'(t_0) = -2t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0. \quad (226)$$

Como $\phi''(0) = -2 < 0$, concluímos que $t_0 = 0$ é um máximo dentro do limite de integração $0 \leq t \leq 10$. Assim, definimos

$$I(x, \varepsilon) = \int_0^\varepsilon (1+t)^{-1} e^{-\lambda t^2} dt. \quad (227)$$

Podemos substituir $g(t)$ por seu valor em $t = 0$, ou seja, $g(0) = (1+0)^{-1} = 1$, que é o primeiro termo da expansão em série de Taylor de $g(t)$ em torno de $t_0 = 0$. Logo,

$$I(\lambda, \varepsilon) \sim \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t^2} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (228)$$

Fazendo $\varepsilon = \infty$, temos uma integral gaussiana, então

$$I(\lambda) \sim \int_0^\infty e^{-\lambda t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (229)$$

Parece surpreendente que seja válido substituir o parâmetro pequeno ε por ∞ . Entretanto, esse processo introduz somente erros exponencialmente pequenos em $x \rightarrow +\infty$, porque a integral de ε a ∞ é subdominante com respeito a \int_0^∞ em $x \rightarrow \infty$.

Outra opção é substituir $g(t)$ por sua expansão completa de Taylor em torno de $t_0 = 0$,

$$(1+t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n. \quad (230)$$

¹⁶ Por exemplo, na Eq. (224), temos que $c - \varepsilon \leq t \leq c + \varepsilon$ é um subintervalo de $a \leq t \leq b$.

Portanto,

$$I(\lambda, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\varepsilon} t^n e^{-\lambda t^2} dt. \quad (231)$$

Fazendo a substituição $\lambda t^2 = u$, então $dt = du/(2\lambda^{1/2}\sqrt{u})$. Ao fazer também $\varepsilon \rightarrow \infty$, a expansão assintótica da integral se torna

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\lambda^{(n+1)/2}} \int_0^{\infty} u^{(n-1)/2} e^{-u} du, \quad \lambda \rightarrow +\infty \quad (232)$$

Reconhece-se que a integral tem a forma de uma função gama. Logo,

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\lambda^{(n+1)/2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (233)$$

onde percebe-se claramente que a integral $I(\lambda)$ é representada assintoticamente por uma série divergente. Uma maneira *mais rápida* de encontrar as expansões assintóticas de integrais de Laplace com limites de integração específicos é o lema de Watson.

2.1.2 Lema de Watson

Existe uma fórmula geral para uma classe de integrais da forma

$$I(\lambda) = \int_0^b g(t) e^{-\lambda t} dt, \quad b > 0, \quad (234)$$

que fornece sua expansão assintótica completa, desde que $g(t)$ seja contínua no intervalo $0 \leq t \leq b$. Primeiramente, é preciso desenvolver a expansão assintótica de $g(t)$,

$$g(t) \sim t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n}, \quad t \rightarrow 0_+. \quad (235)$$

A partir dessa informação, dadas certas condições, o lema de Watson estabelece que

$$I(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\alpha + \beta n + 1)}{\lambda^{\alpha + \beta n + 1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (236)$$

As requisições são que $\alpha > -1$ e $\beta > 0$ para a convergência da integral em $t = 0$. Além disso, se $b = +\infty$, é necessário que $g(t) \ll e^{ct}$ ($t \rightarrow +\infty$) para alguma constante positiva c (assim a integral em (234) converge). A prova do lema de Watson pode ser encontrada em Bender e Orszag (1999). Um fato interessante para salientar é que a ressonância de Borel nada mais é do que o inverso deste lema.

Um aplicação pode ser o cálculo da expansão assintótica de $K_0(\lambda)$, uma função de

Bessel modificada. Sua representação integral é (DLMF..., 2020a)

$$K_0(\lambda) = \int_1^\infty (s^2 - 1)^{-1/2} e^{-\lambda s} ds. \quad (237)$$

A fim de modificar os limites de integração (assim a integral se encaixa na mesma classe que (234)), fazemos a mudança $s = t + 1$. Conseqüentemente,

$$K_0(\lambda) = e^{-\lambda} \int_0^\infty (t^2 + 2t)^{-1/2} e^{-\lambda t} dt, \quad (238)$$

onde identifica-se $g(t) = (t^2 + 2t)^{-1/2}$. É possível expandir o último usando o teorema binomial, escrito de forma geral como

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k, \quad (239)$$

onde o coeficiente binomial é

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}. \quad (240)$$

Portanto, quando $|t| < 2$,

$$g(t) = (t^2 + 2t)^{-1/2} = (2t)^{-1/2} (1 + t/2)^{-1/2} = (2t)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (t/2)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{n! \Gamma(1/2)}. \quad (241)$$

Comparada à equação (235), identificamos

$$\alpha = -1/2, \quad a_n = \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2)}{n! 2^{n+1/2} \Gamma(1/2)}, \quad \beta = 1. \quad (242)$$

Aplicando o lema de Watson (236), temos

$$K_0(\lambda) \sim e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(-1/2 + n + 1)}{\lambda^{n+1/2}} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [\Gamma(n+1/2)]^2}{2^{n+1/2} n! \Gamma(1/2) \lambda^{n+1/2}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (243)$$

Por enquanto, só abordamos as expansões assintóticas de integrais cujos integrandos são constituídos de funções reais. Para tratar dos problemas no plano complexo, existe o método da inclinação mais acentuada, esclarecido a seguir.

2.2 Método de inclinação mais acentuada ou “steepest descent”

O objetivo desta seção é introduzir um método muito utilizado para encontrar a expansão assintótica de representações integrais do tipo

$$I(\lambda) = \int_C g(z) e^{\lambda \rho(z)} dz, \quad (244)$$

em $\lambda \rightarrow +\infty$, onde C é um contorno no plano z complexo e as funções $g(z)$ e $\rho(z)$ são analíticas¹⁷. Podemos considerar a princípio que λ é real e positiva, sem perda de generalização, já que quando quisermos λ complexa e $\lambda \rightarrow \infty$ ao longo de $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$, uma maneira de lidar é simplesmente incorporar a fase em $\phi(z)$ (MURRAY, 1984). Muitas transformadas, como a de Laplace e a de Fourier, possuem tal forma. O método de “steepest descent” foi originado por Riemann (1892) e a forma com que é apresentado atualmente foi desenvolvida por Debye (1909).

A ideia principal é deformar o contorno C por um novo, C' (algo justificado pela analiticidade do integrando), de forma que ρ tenha uma parte imaginária constante. Uma vez feito isso, $I(\lambda)$ pode ser calculada assintoticamente em $\lambda \rightarrow +\infty$ por meio do método de Laplace. Para ilustrar isso, observe que separando $\rho(z)$ em partes real e imaginária, temos

$$\rho(z) = \phi(z) + i\psi \quad \Rightarrow \quad I(\lambda) = e^{i\lambda\psi} \int_{C'} g(z) e^{\lambda\phi(z)}, \quad \psi \in \mathbb{R}, \quad (245)$$

onde $\phi(z)$ é uma função real (mesmo que z seja complexa), o que permite utilizar o método de Laplace. O objetivo que existe por trás da deformação de contorno ao tornar $\text{Im}\rho(z)$ constante é eliminar oscilações rápidas do integrando quando λ é grande.

Para um entendimento do contorno de inclinação mais acentuada, é interessante recordar o papel do gradiente no cálculo elementar. Se $f(u, v)$ é uma função diferenciável de duas variáveis, então seu gradiente é o vetor

$$\nabla f = (\partial f / \partial u, \partial f / \partial v), \quad (246)$$

que aponta para onde acontece a mudança mais rápida de f no ponto (u, v) . Temos também o conceito de derivada direcional, em que df/ds vai na direção da vetor unitário \mathbf{n} , segundo

$$df/ds = \mathbf{n} \cdot \nabla f. \quad (247)$$

¹⁷ Segundo Murray (1984), $g(z)$ e $\rho(z)$ não precisam ser analíticas em todo o plano complexo. Podem ter, e na prática frequentemente têm, singularidades isoladas, incluindo pontos de ramificação.

Em palavras, esta é a taxa de mudança de f na direção \mathbf{n} . Como \mathbf{n} é unitário, o maior valor da derivada direcional depende de $|\nabla f|$. Se quiséssemos traçar um contorno de $f(u, v)$, veríamos que o vetor ∇f é perpendicular aos contornos de f constante (curvas de nível).

Em relação às funções com as quais lidamos, partimos de $\rho(z) = \phi(z) + i\psi(t)$, função analítica da variável $z = u + iv$ complexa. Um contorno de fase constante de $e^{\lambda\rho(z)}$ com $\lambda > 0$ é aquele em que $\psi(t)$ é constante. Por outro lado, a definição de um contorno “steepest descent” é aquele cuja tangente é paralela a

$$\nabla|e^{\lambda\rho(z)}| = \nabla e^{\lambda\phi(z)}. \quad (248)$$

que por sua vez é paralelo a $\nabla\phi$. Resumidamente, um contorno de inclinação mais acentuada é aquele no qual o tamanho de $e^{\lambda\rho(z)}$ muda mais rapidamente com z .

Podemos mostrar também a prova formal de que os contornos de fase constantes também são os contornos de “steepest descent”, desde que $\rho(z)$ seja analítica. Esta condição tem a implicância que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas por $\rho(z)$, isto é,

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = -\frac{\partial\psi}{\partial u}. \quad (249)$$

Multiplicando a primeira equação por $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial u} &= \frac{\partial\psi}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial v} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial v} \right), \end{aligned} \quad (250)$$

onde na última linha foi utilizada a segunda equação de (249). Finalmente,

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial v} \frac{\partial\psi}{\partial v} = 0, \quad (251)$$

que na forma vetorial se escreve

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0. \quad (252)$$

Conclui-se que $\nabla\phi$ é perpendicular a $\nabla\psi$. Com isso, a derivada direcional na direção de $\nabla\phi$ é

$$\frac{d\psi}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = \text{constante}. \quad (253)$$

Como queríamos demonstrar, ψ é constante em contornos cujas tangentes são paralelas a $\nabla\phi$. Logo, contornos de fase constante são “steepest descent”.

Feita a deformação do contorno original de (244) em um contorno de inclinação mais acentuada, o comportamento assintótico da integral é determinado pelo comportamento do integrando próximo ao máximo local de $\phi(z)$ ao longo do contorno. Se $\phi(z)$ tem um máximo num ponto interior do contorno de fase constante, então a sua derivada direcional ao longo desse contorno é $d\phi/ds = |\nabla\phi| = 0$. Portanto, as equações de Cauchy-Riemann implicam $\nabla\phi = \nabla\psi = 0$, ou $\rho'(z) = 0$, que é a equação de ponto de sela.

Como exemplo, tomamos a função $\lambda\rho(z) = i\lambda \cosh z$. O ponto de sela corresponde a $(i \cosh z_0)' = i \sinh(z_0) = 0$, portanto um dos resultados é $z_0 = 0$. Ao substituir $z = u + iv$ em $\rho(z)$, obtemos

$$i \cosh(u + iv) = i[\cosh(u) \cos(v) + i \sinh(u) \sin(v)], \quad (254)$$

onde são identificadas as partes real e imaginária de $\rho(z)$:

$$\phi(z) = -\sinh(u) \sin(v), \quad \psi(z) = \cosh(u) \cos(v). \quad (255)$$

Como $\rho(0) = i$, os contornos de fase constante que passam por $z_0 = 0$ devem satisfazer $\psi(z) = \text{Im}\rho(z) = 1$, ou

$$\text{Im}\rho(z) = \text{Im}\rho(z_0) \quad (256)$$

$$\cosh(u) \cos(v) = 1. \quad (257)$$

Já para a sela $z_1 = \pm i\pi$, temos $\rho(\pm i\pi) = -i$, então

$$\cosh(u) \cos(v) = -1. \quad (258)$$

Outros contornos de “steepest descent/ascent” correspondem a $\cosh(u) \cos(v) = c$, onde c é uma constante. A figura 9 mostra os contornos para vários valores de c .

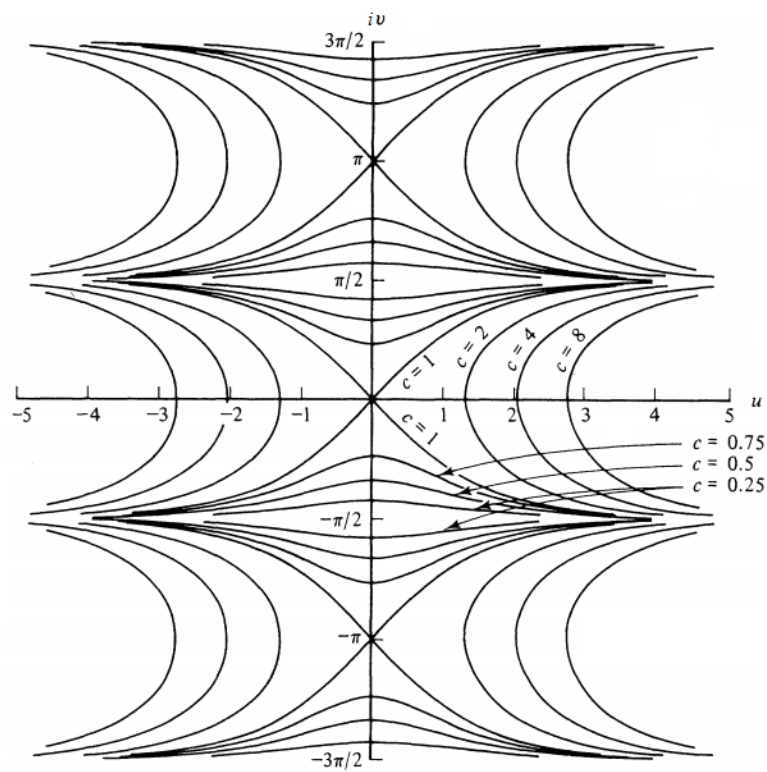
O procedimento que fizemos até agora para calcular as curvas a partir da fase constante não esclarece quais são as curvas de “steepest descent” e quais são as de “steepest ascent”. Para isso, é necessário analisar a parte real $\phi(z)$.

Dois casos que serão estudados no nosso último capítulo são $\rho_H(z) = \sinh^2(z)$ e $\rho_M(z) = \sin^2(z)$. Os pontos de sela são obtidos a partir de

$$\frac{d}{dz} \sinh^2(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{0H} = 0, \quad z_{1H} = \pm i\pi/2; \quad (259)$$

$$\frac{d}{dz} \sin^2(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{0M} = 0, \quad z_{1M} = \pm\pi/2. \quad (260)$$

Figura 9 - Curvas de inclinação mais acentuada (de fase constante) de $\exp(i\lambda \cosh z)$ no plano complexo $z = u + iv$.



Legenda: Os pontos de sela são $z_0 = 0$ e $z_1 = \pm i\pi$ e as curvas obedecem a $\cosh(u) \cos(v) = c$, sendo c uma constante.
 Fonte: BENDER; ORSZAG, 1978, p. 291. Adaptada pela autora.

Além disso, as partes reais e imaginárias são

$$\begin{aligned}\rho_H(u + iv) &= \sinh^2(u + iv) & (261) \\ &= \sinh^2(u) \cos^2(v) - \cosh^2(u) \sin^2(v) + 2i \sinh(u) \cos(v) \cosh(u) \sin(v);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_M(u + iv) &= \sin^2(u + iv) & (262) \\ &= \sin^2(u) \cosh^2(v) - \cos^2(u) \sinh^2(v) + 2i \sin(u) \cosh(v) \cos(u) \sinh(v),\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as propriedades $\cosh(ix) = \cos(x)$, $\sinh(ix) = i \sin(x)$ das funções hiperbólicas. Os contornos de fase constante passando por $z_0 = 0$ satisfazem respectivamente

$$2 \sinh(u) \cos(v) \cosh(u) \sin(v) = 0, \quad 2 \sin(u) \cosh(v) \cos(u) \sinh(v) = 0, \quad (263)$$

que nada mais oferecem além da informação de que os eixos real ($v = 0$) e imaginário ($u = 0$) são “steepest descent”. Os outros pontos de sela produzem equações idênticas, então não há novidades para estes problemas até que sejam estudados a fundo no último capítulo.

A seção seguinte trata da ressurgência para integrais com selas. O fenômeno pode ser visto de modo objetivo através da forte correlação entre coeficientes das expansões em séries em torno de selas perturbativas e não-perturbativas. Devido a isso, podemos dizer que os efeitos perturbativos *ressurgem* a partir dos efeitos não-perturbativos da teoria.

2.3 Ressurgência para integrais com selas

Uma classe de integrais que comumente aparece na Física é

$$I^{(n)} = \int_{C_n(\theta_k)} dz g(z) \exp(-kf(z)). \quad (264)$$

No caso, k é um parâmetro¹⁸ grande e complexo, isto é, $k = |k| \exp(i\theta_k)$. O índice n representa um ponto de sela. As funções f e g são analíticas numa região especificada mais à frente no texto. Há várias selas de f , assumidas simplesmente como zeros da sua derivada, escrita como $f'(z)$. Escolhemos n como a sela principal, então o contorno infinito orientado $C_n(\theta_k)$, onde $\theta_k = \arg k$, é visto como o caminho de “steepest descent” que passa pela n -ésima sela, em $z = z_n$. Frequentemente são encontradas integrais onde o contorno (por exemplo, o eixo real) não é um caminho de “steepest descent”, mas nesses casos é possível deformá-lo, produzindo uma soma de integrais do tipo (264).

¹⁸ Sendo um parâmetro, não se deve confundir k com índice.

Como se sabe, o método de inclinação mais acentuada consiste em expandir o integrando sobre z_n , gerando, para cada integral, uma série assintótica em potências de k^{-1} multiplicada por uma exponencial $\exp(-kf_n)$, onde a notação aqui utilizada é

$$f_n \equiv f(z_n). \quad (265)$$

Embora essa aproximação seja extremamente útil, a série diverge, significando que — como discutido na seção 1 — só pode representar a integral exata $I^{(n)}$ com precisão comparável ao tamanho do último termo.

Uma boa notícia é que a precisão ainda pode melhorar, além de ser compreendida com mais profundidade, se sustentada pelo *princípio da ressurgência* (DINGLE, 1973; ÉCALLE, 1981a; ÉCALLE, 1981b). O motivo por trás da divergência é o fato de existirem outras selas $z_{m \neq n}$, pelas quais o contorno $C_n(\theta_k)$ não passa, contribuindo com exponenciais pequenas, que vão além de todas as ordens de k^{-1} . Seguindo o raciocínio, a parte *divergente* da série deve conter informações sobre essas outras selas.

Com a finalidade de conseguir consistência mútua, surge o requerimento que relaciona todas as séries assintóticas — nos últimos termos de cada série, devem estar contidos todos os termos das séries assintóticas provenientes de todas as outras selas. É claro que essas informações não são encontradas à primeira vista, pois as séries todas envolvidas no processo divergem, logo estão codificadas. O interessantíssimo trabalho de decodificá-las sistematicamente é denominado *hiperassintotia* e está presente em Berry e Howls (1990) e Berry e Howls (1991).

No primeiro artigo, as funções estudadas foram (duas) soluções de equações diferenciais de segunda ordem, do tipo Schrödinger, representadas na forma exponencial pela teoria WKB em baixas ordens. A hiperassintotia se baseou em fazer a ressonância de Borel repetidamente, segundo uma relação de ressurgência formal descoberta por Dingle (1973). Tal exemplo relacionou os *termos de altas ordens* da série multiplicados por uma exponencial com os *primeiros termos* da série multiplicados por outra (exponencial). Os autores caracterizaram-no como especial, pois exploraram apenas duas exponenciais e os termos nas duas séries assintóticas eram os mesmos, a menos de sinal.

Na segunda obra, a hiperassintotia atinge um nível de generalização muito maior ao se basear no formalismo integral, porque envolve mais exponenciais e os termos associados às séries assintóticas são diferentes. O tratamento, diferentemente do anterior, não envolve ressonância de Borel. Ao invés disso, emprega-se a iteração de uma fórmula de ressurgência finita e exata (ou seja, não é formal).

Para começar os cálculos, é substancial saber que o “steepest descent” $C_n(\theta_k)$ em torno de z_n é definido por $k(f(z) - f_n)$, que é real e cresce para longe de z_n . À medida que a fase de k é alterada, o caminho de “steepest descent” rotaciona com *metade* da velocidade, de forma que, quando k retorna ao valor original (depois de uma mudança de fase de 2π),

a orientação de $C_n(\theta_k)$ se inverte e $I^{(n)}$ muda de sinal.¹⁹ Isso caracteriza as $I^{(n)}(k)$ como duplamente valoradas. A partir da inclusão do fator $1 = k^{1/2} \exp(-kf_n) k^{-1/2} \exp(+kf_n)$ na Eq. (264), podem ser definidas

$$I^{(n)}(k) \equiv k^{-1/2} \exp(-kf_n) T^{(n)}(k), \quad (266)$$

onde

$$T^{(n)}(k) = k^{1/2} \int_{C_n(\theta_k)} dz g(z) \exp\{-k[f(z) - f_n]\} \quad (267)$$

são de valor único. Tais funções não são contínuas, porque o “steepest descent” salta quando passa por alguma das outras selas $m \neq n$. Para ilustrar isso, imagine que $f(z)$ seja um polinômio de ordem M . Portanto, já que se toma a derivada do expoente para encontrar as selas, existem $M - 1$ selas. No infinito, $f(z)$ cresce como z^M tal que, quando θ_k muda, $C_n(\theta_k)$ rotaciona no infinito $M/2$ vezes mais rápido que próximo a z_n . Assim, quando $M > 2$ (o que significa que há mais de uma sela), os caminhos de inclinação mais acentuada devem saltar se forem inverter a orientação durante um circuito de k nesse plano.²⁰ Cada salto é um exemplo do fenômeno de Stokes.

A expansão assintótica formal de $T^{(n)}(k)$ é

$$T^{(n)}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{T_r^{(n)}}{k^r}. \quad (268)$$

Para desenvolver a fórmula de ressurgência, é utilizada a representação de $T^{(n)}(k)$ como integral dupla. A fim de escrevê-la, toma-se

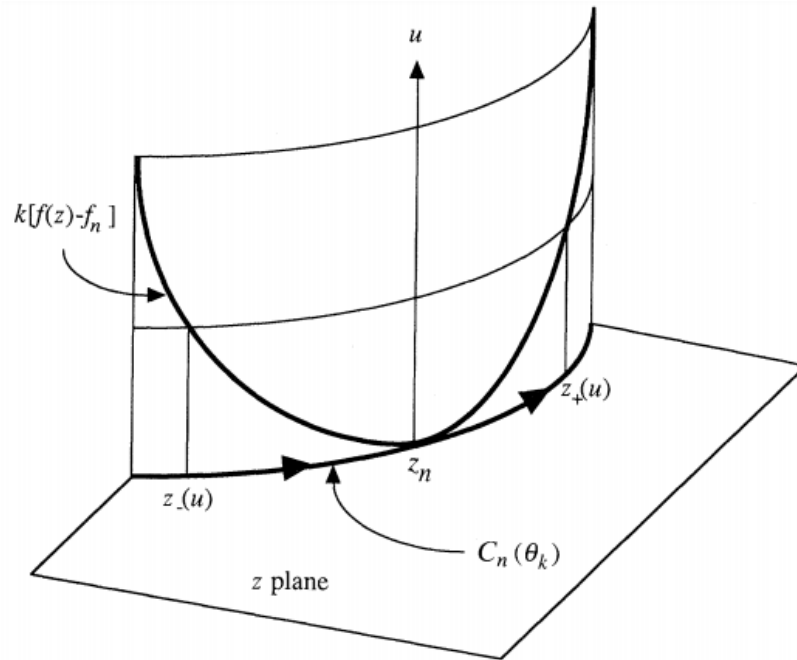
$$u \equiv k(f(z) - f_n). \quad (269)$$

Para cada valor de z no contorno $C_n(\theta_k)$, u é real e positivo. Isso será importante mais à frente, para determinar os limites do contorno de integração na nova variável. Outra característica pode ser extraída ao dizer que $f''(z_n) \neq 0$, implicando a seguinte expansão de u para pequenos valores: $f(z) - f_n \propto z^2$. Reunindo ambas as informações, é possível ilustrar o comportamento de u próximo ao ponto de sela z_n na figura 10. Observe que para cada valor de u (com exceção de $u = 0$) existem dois valores de z . Um deles, $z_+(u)$, sai de z_n e o outro, $z_-(u)$, vai no sentido de z_n .

¹⁹ Em outras palavras, se θ_k “percorre” 2π , então $C_n(\theta_k)$ “percorre” π . Por conta disso, ocorre a mudança de sinal.

²⁰ Para estudantes habituados a cálculos com espinores, esse fenômeno se assemelha à necessidade de realizar duas voltas para que os espinores retornem ao valor original.

Figura 10 - Mapeamento da função $u(z)$ duplamente valorada.



Fonte: BERRY; HOWLS, 1991, p. 660.

O procedimento abaixo é trivial na mudança de variável (269):

$$du = k f'(z) dz \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{k} \frac{du}{f'(z)}. \quad (270)$$

Assim, a equação (267) fica

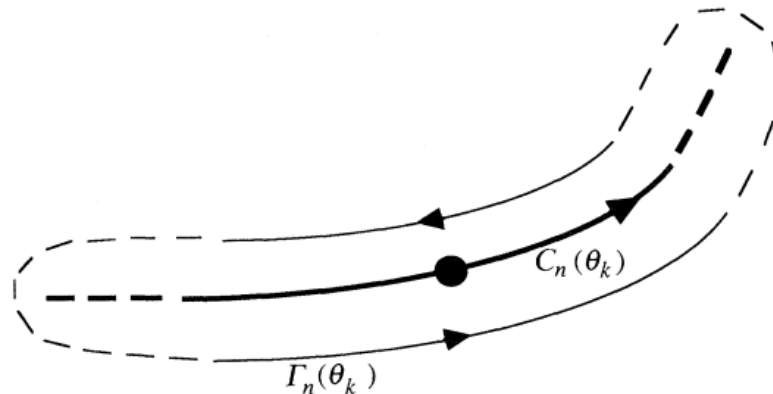
$$T^{(n)}(k) = \frac{k^{1/2}}{k} \int_0^\infty du \exp(-u) \frac{g(z(u))}{f'(z(u))}. \quad (271)$$

Atente para os limites de integração, que agora estão evidentes e concordando com $u \in \mathbb{R}^+$. A última fração pode ser escrita como (SERONE; SPADA; VILLADORO, 2017)

$$\sum_{k=+,-} \frac{g(z_k(u))}{|f'(z_k(u))|} = \frac{g(z_+(u))}{|f'(z_+(u))|} - \frac{g(z_-(u))}{|f'(z_-(u))|}, \quad (272)$$

O motivo do sinal negativo é encontrado ao explorar a figura 10. Sabe-se, pela equação (270), que $|u'| = |k||f'(z)|$. Assim, traçando uma tangente à curva $u(z)$ no ponto z_- , percebe-se que $u'(z_-) < 0$, implicando $f'(z_-) < 0$, ou seja, $|f'(z_-)| = -f'(z_-)$. A

Figura 11 - Loop $\Gamma_n(\theta_k)$ envolvendo o caminho $C_n(k)$.



Legenda: O ponto simboliza a sela n pela qual passa o caminho de inclinação mais acentuada $C_n(k)$.

Fonte: BERRY; HOWLS, 1991, p. 660.

quantidade na Eq. (272) pode ser escrita como integral de contorno,²¹

$$\frac{g(z_+(u))}{|f'(z_+(u))|} - \frac{g(z_-(u))}{|f'(z_-(u))|} = \frac{1}{2\pi i u^{1/2}} \oint_{\Gamma_n(\theta_k)} dz \frac{g(z) \{k[f(z) - f_n]\}^{1/2}}{f(z) - f_n - u/k}, \quad (273)$$

onde $\Gamma_n(\theta_k)$ é o contorno positivo (anti-horário) envolvendo $C_n(k)$ — ver figura 11. Assim, é obtida a expressão $T^{(n)}(k)$ como integral dupla,

$$T^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty du \frac{\exp(-u^2)}{u^{1/2}} \oint_{\Gamma_n(\theta_k)} dz \frac{g(z) \{k[f(z) - f_n]\}^{1/2}}{f(z) - f_n - u/k}. \quad (274)$$

O denominador pode ser reescrito,

$$\left\{ [f(z) - f_n] - \frac{u}{k} \right\}^{-1} = [f(z) - f_n]^{-1} \left\{ 1 - \frac{u}{k[f(z) - f_n]} \right\}^{-1}, \quad (275)$$

e depois expandido em potências de k^{-1} , como

$$\left\{ 1 - \frac{u}{k[f(z) - f_n]} \right\}^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^r}{k^r [f(z) - f_n]^r}. \quad (276)$$

²¹ O fator $\{k[f(z) - f_n]\}^{1/2}$ na Eq. (273) é de valor único, porque o que está dentro da raiz quadrada (que corresponde à definição de u) é duplamente valorado. A raiz torna de valor único a expressão entre chaves.

Desta forma,

$$T^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{du \exp(-u^2)u^r}{k^r u^{1/2}} \oint_n dz \frac{g(z)[f(z) - f_n]^{1/2}[f(z) - f_n]^{-1}}{[f(z) - f_n]^r}. \quad (277)$$

A integral em u pode ser identificada como $\Gamma(r + 1/2) = (r - 1/2)!$, resultando em

$$T^{(n)}(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r - 1/2)!}{2\pi i k^r} \oint_n dz \frac{g(z)}{[f(z) - f_n]^{r+1/2}}. \quad (278)$$

Voltando à equação (277), é possível truncar em N a expansão feita em k^{-1} , escrevendo a soma da seguinte forma:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{N-1} x^r + \frac{x^N}{1-x}, \quad (279)$$

onde o último termo é o resto da soma — o primeiro termo após o truncamento. Comparando com a equação (276), identifica-se que neste caso $x = u/\{k[f(z) - f_n]\}$. Contudo, este é apenas um fator existente em $T^{(n)}(k)$. Baseada na equação 268, a forma que a função $T^{(n)}(k)$ toma após este procedimento é

$$T^{(n)}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{T_r^{(n)}}{k^r} + R^{(n)}(k), \quad (280)$$

onde

$$R^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi i k^N} \int_0^{\infty} du \frac{\exp(-u)u^N}{u^{1/2}} \oint_{\Gamma_n(\theta_k)} \frac{g(z)[f(z) - f_n]^{1/2} dz}{[f(z) - f_n]^N [f(z) - f_n] \{1 - u/\{k[f(z) - f_n]\}\}}.$$

Reunindo os fatores em comum, fica

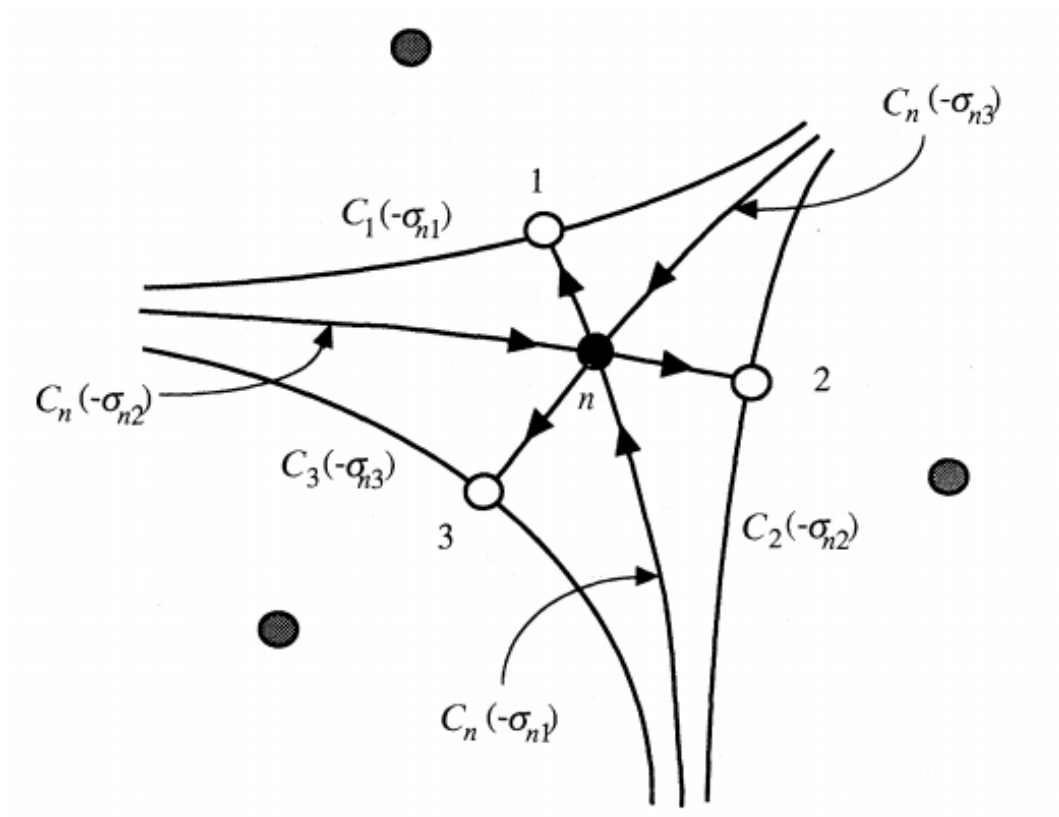
$$R^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi i k^N} \int_0^{\infty} du \exp(-u)u^{N-1/2} \oint_{\Gamma_n(\theta_k)} \frac{g(z) dz}{[f(z) - f_n]^{N+1/2} \{1 - u/\{k[f(z) - f_n]\}\}}. \quad (281)$$

Considere agora todos os caminhos de inclinação mais acentuada que passam pela sela n , para diferentes θ_k . Alguns deles são especiais por encontrarem outras selas m , denominadas selas adjacentes a n (ver Fig. 12). A fim de trabalhar com tais informações, definem-se os singulantes (termo introduzido por Dingle (1973)),

$$F_{nm} = |F_{nm}| \exp(i\sigma_{nm}) \equiv f_m - f_n. \quad (282)$$

Os caminhos especiais de “steepest descent” são aqueles que correspondem a $kF_{nm} \in \mathbb{R}^+$,

Figura 12 - Selas adjacentes à sela n com seus respectivos caminhos de inclinação mais acentuada.



Legenda: Caminhos de “steepest descent” pela sela n (●) encontrando selas adjacentes $m = 1, 2, 3$ (○) e seus respectivos caminhos de inclinação mais acentuada. Também são mostradas as selas não-adjacentes (círculos sombreados).

Fonte: BERRY; HOWLS, 1991, p. 661.

isto é,

$$k = |k| \exp(-i\sigma_{nm}) \quad \Rightarrow \quad \theta_k = -\sigma_{nm}. \quad (283)$$

Podemos deformar $\Gamma_n(\theta_k)$, de forma que seja uma união entre arcos no infinito e os “steepest descent” $C_m(-\sigma_{nm})$ que encontram as selas adjacentes m . Simbolicamente,

$$\oint_{\Gamma_n(\theta_k)} dz \dots = \sum_m (-1)^{\gamma_{nm}} \int_{C_m(-\sigma_{nm})} dz \dots, \quad (284)$$

onde γ_{nm} é uma anomalia de orientação (BERRY; HOWLS, 1991). Para que esta relação aconteça, existem algumas condições a serem satisfeitas:

- Deve haver um decaimento de $|g|/|f|^{N+1/2}$ no infinito que seja mais rápido que $1/|z|$. O objetivo disto é que os arcos infinitos ofereçam contribuição nula;
- Não devem existir zeros para qualquer u em $\{1 - u/\{k[f(z) - f_n]\}\}$, expressão que aparece no denominador da Eq. (281), dentro da região do plano z varrida pela expansão do seu contorno.
- As funções f e g não podem conter singularidades nessa mesma região — o que descreve a condição de analiticidade.

Ao longo do caminho (284), definimos uma variável de integração u , tal que

$$u \equiv v[f(z) - f_n]/F_{nm} = v + v[f(z) - f_m]/F_{nm}, \quad u, v \in \mathbb{R}^+. \quad (285)$$

Substituindo-a em conjunto com a Eq. (284) na equação (281), obtemos

$$R^n(k, N) = \frac{1}{2\pi i k^N} \sum_m \frac{(-1)^{\gamma_{nm}}}{F_{nm}^{N+1/2}} \int_0^\infty dv \frac{\exp(-v)}{1 - v/(kF_{nm})} v^{N-1/2} \\ \times \int_{C_m(-\sigma_{nm})} dz g(z) \exp\{-v[f(z) - f_m]/F_{nm}\}, \quad (286)$$

onde a última integral está na forma de Laplace (223) e pode ser identificada como (consultar Eq. (267))

$$k^{-1/2} T^{(m)} \left(k = \frac{v}{F_{nm}} \right) = \frac{v^{-1/2}}{F_{nm}^{-1/2}} T^{(m)}(v/F_{nm}). \quad (287)$$

Portanto,

$$R^{(n)}(k, N) = \frac{1}{2\pi i} \sum_m \frac{(-1)^{\gamma_{nm}}}{(kF_{nm})^N} \int_0^\infty dv \frac{v^{N-1} \exp(-v)}{1 - v/(kF_{nm})} T^{(m)}(v/F_{nm}). \quad (288)$$

Substituindo esta expressão de $R^{(n)}(k, N)$ em

$$T^{(n)}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{T_r^{(n)}}{k^r} + R^{(n)}(k, N), \quad (289)$$

encontramos a fórmula exata de ressurgência, que é a base da hiperassintotia de Berry e Howls (1991),

$$T^{(n)}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{T_r^{(n)}}{k^r} + \frac{1}{2\pi i} \sum_m \frac{(-1)^{\gamma_{nm}}}{(kF_{nm})^N} \int_0^\infty dv \frac{v^{N-1} \exp(-v)}{1 - v/(kF_{nm})} T^{(m)}(v/F_{nm}). \quad (290)$$

Uma aplicação específica desta fórmula é bem interessante, permitindo calcular relações formais de ressurgência para os coeficientes $T_r^{(n)}$ na expansão sobre a n -ésima sela — algo a ser diretamente utilizado no próximo capítulo. Fixando $N = 0$, então a soma sobre r é vazia. Escreve-se a série $T^{(n)}(k) = \sum_{r=0}^\infty T_r^{(n)}/(v^r/F_{nm}^r)$ em ambos os lados da equação, atentando para os índices diferentes, n e m . Assim,

$$\sum_{r=0}^\infty \frac{T_r^{(n)}}{(v^r/F_{nm}^r)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_m \frac{(-1)^{\gamma_{nm}}}{(kF_{nm})^0} \sum_{t=0}^\infty \int_0^\infty dv \frac{v^{0-1} \exp(-v)}{1 - v/(kF_{nm})} \frac{T_t^{(m)}}{(v^t/F_{nm}^t)}. \quad (291)$$

Expandindo o denominador

$$\frac{1}{1 - \frac{v}{kF_{nm}}} = \sum_{r=0}^\infty \frac{v^r}{k^r F_{nm}^r}, \quad (292)$$

resulta em

$$\sum_{r=0}^\infty \frac{T_r^{(n)}}{(v^r/F_{nm}^r)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_m (-1)^{\gamma_{nm}} \sum_{r,t=0}^\infty \int_0^\infty dv v^{r-t-1} e^{-v} \frac{F_{nm}^{t-r}}{k^r} T_t^{(m)}, \quad (293)$$

onde a integral é reconhecida como $\Gamma(r-t) = (r-t-1)!$. Então, para os coeficientes em r obtemos

$$T_r^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_m (-1)^{\gamma_{nm}} \sum_{t=0}^\infty \frac{(r-t-1)!}{F_{nm}^{r-t}} T_t^{(m)}. \quad (294)$$

A contribuição principal é dada pelo primeiro termo da série em t , levando em consideração a sela m^* com o menor singulante $|F_{nm^*}|$,

$$T_r^{(n)} \sim (r-1)! (-1)^{\gamma_{nm^*}} \frac{T_0^{(m^*)}}{F_{nm^*}^r}. \quad (295)$$

Tal informação também será explorada no capítulo seguinte.

O trabalho de Berry e Howls (1991) demonstra a importância de incluir a contribuição de selas adjacentes no cálculo de integrais do tipo Laplace e vai além ao mostrar

que existe uma relação entre a expansão perturbativa na sela principal e as expansões nas selas adjacentes. Após estudarmos este resultado impressionante, ficamos aptos a procurar aplicações e enxergar a ressurgência na prática. Escolhemos aplicá-la a potenciais periódicos, pois possuem características interessantes e promissoras na questão do cancelamento de ambiguidades (DUNNE; ÜNSAL, 2012).

3 ANÁLISE RESSURGENTE DE SINE-GORDON/MATHIEU

O objetivo deste capítulo é explorar conceitos e métodos descritos até então nesta tese, através da aplicação no formalismo da TQC de funções de partição em dois casos: *Sine-Gordon/Mathieu* e seu correspondente hiperbólico, também conhecido como *Sinh-Gordon* ou *Mathieu modificado*. A motivação para abordar esses potenciais vem do fato de que, na literatura, é difícil encontrar exemplos introdutórios para o cálculo da ressurgência, baseados em funções triviais. As aplicações para o potencial de Sine-Gordon/Mathieu que encontramos na literatura estão historicamente relacionadas ao estudo da equação diferencial que leva o nome do matemático francês Émile Léonard Mathieu, inicialmente voltado para oscilações livres em uma membrana elíptica (MATHIEU, 1868). Outras aplicações, envolvendo geometria elíptica, são oscilações em um lago elíptico e propagação de ondas eletromagnéticas em tubos elípticos (GUTIÉRREZ-VEGA et al., 2003). A equação de Mathieu também descreve oscilações paramétricas, exemplificadas pelo pêndulo de comprimento variável e pelo pêndulo invertido (WARD, 2011). Há mais de 70 anos, uma grande quantidade de resultados sobre esse assunto foi coletada por McLachlan (1947). Em mecânica quântica, podemos encontrar aplicações como o pêndulo quântico e o elétron de Bloch no potencial periódico (SANTORO, 2019).

A equação de Mathieu é um caso particular da equação de Hill (HILL, 1866), cuja característica principal é possuir coeficiente periódico (MAHON, 2020). Esta última constitui equação diferencial do tipo $y''(t) + \Phi(t)y(t) = 0$, onde $\Phi(t) = \Phi(t + T)$, sendo T o período. O teorema de Floquet-Lyapunov (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975) garante a existência de uma solução não-trivial $y(t)$, tal que $y(t + T) = \rho y(t)$, onde ρ é uma constante denominada multiplicador de Floquet. Quando se faz $\rho = \exp(\lambda T)$, então λ é chamado de expoente característico, também conhecido como expoente de Floquet ou de Lyapunov. Um tratamento similar é conhecido como o teorema de Bloch, muitas vezes apresentado como o equivalente ao teorema de Floquet-Lyapunov para a física do estado sólido (seu surgimento se deve ao estudo de elétrons numa rede cristalina). Deve-se atentar para o termo exponencial – no teorema de Bloch, este é uma fase (SANTORO, 2019). Para mais informações sobre o assunto, consultar Singleton (2001) e Mahon (2011).

Além disso, existe uma particularidade das funções periódicas no cancelamento de ambiguidades, comentada com mais detalhes no final do capítulo. A princípio, são considerados modelos dimensionais $d = 0$, onde a função de partição assume a forma de uma integral ordinária. Em seguida, no capítulo final, os cálculos são desenvolvidos no âmbito da mecânica quântica ($d = 1$).

O primeiro caso é conhecido na literatura, sendo investigado em Cherman, Dorigoni e Ünsal (2015), Cherman, Koroteev e Ünsal (2015). Por outro lado, o interesse em abordar *Mathieu modificado* vem da particularidade de surgirem instantons complexos.

3.1 Protótipos zero dimensionais

A metodologia empregada é a seguinte: calculam-se os pontos de sela e suas ações associadas. Depois, é feita a expansão perturbativa direta da função de partição em torno da sela perturbativa, permitindo analisar o comportamento em altas ordens dos coeficientes da expansão. Em seguida, os detalhes de Lefschetz são determinados para assumirem o papel de ciclo de integração da função de partição. Uma vez definido o contorno, é possível utilizar a fórmula de ressurgência exata de Berry e Howls (1991), revelando que a expansão perturbativa é explicitamente controlada por flutuações em torno de sela(s) não-perturbativa(s), o que evidencia a ressurgência em dimensionalidade zero.

3.1.1 Expansão perturbativa

As funções de partição têm a forma geral

$$Z(g) = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int dz e^{-V(z)/g^2} \quad (296)$$

e os potenciais de interesse são

$$V_H(z) = \sinh^2(z), \quad V_M(z) = \sin^2(z); \quad (297)$$

onde H faz referência ao caso *hiperbólico*, enquanto M concerne ao potencial de *Mathieu*. Os pontos de sela são facilmente obtidos ao diferenciar os potenciais e levar o resultado a zero. Portanto,

$$\text{Hiperbólico: } -2 \sinh z \cosh z = 0 \Rightarrow z_{H_0} = 0, \quad z_{H_1} = i\pi/2; \quad (298)$$

$$\text{Mathieu: } -2 \sin z \cos z = 0 \Rightarrow z_{M_0} = 0, \quad z_{M_1} = \pi/2; \quad (299)$$

Atente para o fato de que no primeiro caso uma das selas é complexa. Os valores das selas, quando substituídos nos potenciais, produzem quantidades que são chamadas de “ações” nas selas, seguindo o emprego de Başar, Dunne e Ünsal (2013), o que caracteriza um abuso de linguagem pois em dimensionalidade zero não há termo cinético. Aqui, como o objetivo principal é fazer cálculos em mecânica quântica, passando antes pela familiarização dos mesmos casos em dimensionalidade zero, tal abuso não é malvisto porque facilita a atividade de relacioná-los. Assim,

$$S_{H_0} = \sinh^2(0) = 0, \quad S_{H_1} = \sinh^2(i\pi/2) = -1; \quad (300)$$

$$S_{M_0} = \sin^2(0) = 0, \quad S_{M_1} = \sin^2(\pi/2) = 1. \quad (301)$$

As selas z_{H_0} e z_{M_0} , cujas ações associadas têm valor nulo, são denominadas selas perturbativas, enquanto as outras são não-perturbativas.

A expansão perturbativa em cada sela perturbativa pode ser obtida das funções de partição por diferentes meios. Realizamos cálculos por teorema binomial seguido do lema de Watson ou da definição integral de funções gama, por expansão direta do potencial em séries de Taylor e também por mudanças de variáveis que permitem escrever as funções de partição em termos de funções de Bessel, cujas expansões já foram amplamente exploradas na literatura.

A primeira maneira é feita em poucas linhas. Para o correspondente hiperbólico, é possível fazer

$$Z_H(g) \equiv \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dz e^{-\frac{1}{g^2} \sinh^2(z)} = \frac{2}{g\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} dz e^{-\frac{1}{g^2} \sinh^2(z)}, \quad (302)$$

já que a função no expoente é par. A mudança de variável

$$\begin{aligned} \sinh^2(z) = s \quad \Rightarrow \quad 2 \sinh(z) \cosh(z) dz &= ds \\ 2[s(1+s)]^{1/2} dz &= ds \\ dz &= \frac{ds}{2[s(1+s)]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (303)$$

onde foi utilizado $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$, permite aplicar o teorema binomial, escrito de forma geral como (BENDER; ORSZAG, 1999)

$$\frac{1}{(1-s)^c} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{c+k-1}{k} s^k. \quad (304)$$

O coeficiente binomial tem a forma

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}. \quad (305)$$

Logo,

$$\frac{1}{(1+s)^{1/2}} = \frac{1}{(1-(-s))^{1/2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}+k-1}{k} (-s)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)} s^k. \quad (306)$$

Substituindo (306) na função de partição,

$$Z_H(g) = \frac{2}{2g\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)} \int_0^{\sinh^2(\pi/2)} \frac{dz}{s^{1/2}} s^k e^{-s/g^2}. \quad (307)$$

Finalmente, é possível aplicar o lema de Watson (ver seção 2.1), resultando em²²

$$Z_H(g) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [\Gamma(k+1/2)]^2}{\Gamma(k+1) [\Gamma(1/2)]^2} g^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,H}^{\text{pert}} g^{2k} \quad (309)$$

De forma análoga, para Mathieu, temos

$$Z_M(g) = \frac{2}{g\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} dz e^{-\frac{1}{g^2} \sin^2(z)} = \frac{2}{2g\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)} \int_0^1 dz s^{k-1/2} e^{-s/g^2} \quad (310)$$

$$Z_M(g) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(k+1/2)]^2}{\Gamma(k+1) [\Gamma(1/2)]^2} g^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,M}^{\text{pert}} g^{2k}. \quad (311)$$

Observe que os coeficientes obtidos são quase idênticos, a menos da alternância $(-1)^k$.

Escolhemos mostrar neste capítulo os tratamentos que julgamos mais elegantes para calcular as expansões perturbativas. A expansão do potencial em série de Taylor é discutida somente no apêndice B. Antes de apresentar outras técnicas possíveis, é necessário reconhecer uma particularidade sem a qual nenhuma delas poderia ser aplicada. Seleccionando o exemplo de Mathieu, cujo *contorno de integração original* é definido no eixo real, de $(-\pi/2, \pi/2)$, realiza-se a mudança de variáveis $z = y\sqrt{g}$, então

$$Z_M(g) \equiv \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dz e^{-\frac{1}{g^2} \sin^2(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2g}^{\pi/2g} dy e^{-\frac{1}{g^2} \sin^2(y\sqrt{g})}. \quad (312)$$

Quando $g \rightarrow 0$, que é a abordagem do acoplamento fraco, o intervalo de integração passa a ser de $(-\infty, \infty)$. O mesmo acontece analogamente para a função de partição hiperbólica.

Outra forma mais rigorosa de enxergar essa particularidade se dá pelo “steepest descent”, técnica descrita na seção 2.2, onde a analiticidade do integrando justifica a escolha de deformar o contorno C no plano complexo em um novo contorno C' , no qual o potencial $V(z)$ tem uma parte imaginária constante. Desta forma,

$$Z(g) = e^{i \text{Im}V(z)/g^2} \int_{C'} g(z) e^{\text{Re}V(z)/g^2} dz. \quad (313)$$

Uma vez feito isso, $Z(g)$ pode ser calculado assintoticamente em $g \rightarrow 0$ usando o método de Laplace (ver seção 2.1). A ideia do último método é que, se uma função real e contínua

²² As condições para que o lema de Watson possa ser aplicado envolvem uma integral da forma

$$I(x) = \int_0^b f(t) e^{-xt} dt, \quad (308)$$

onde o limite superior de integração deve ser positivo e a função que multiplica a exponencial deve ser contínua no intervalo de integração. Ambos os requisitos são contemplados no exemplo de Mathieu. Outra observação é que, neste caso, é permitido alterar o limite superior de integração de $\sinh^2(\pi/2)$ para $\sinh^2(\pi/2) + \varepsilon$, onde $\varepsilon = \infty$, procedimento adotado anteriormente, para outros casos, na seção 2.1.

$V(x)$ possui seu máximo no intervalo em $x = c$ tal que $a \leq x \leq b$ e se $g(x) \neq 0$, então somente a vizinhança imediata de $x = c$ contribui para a expansão assintótica de Z para x grande. Tornar a *região de integração infinita* somente introduz erros exponencialmente pequenos e tem a vantagem de facilitar os cálculos integrais, permitindo o uso de ferramentas simples, dependendo do caso, como expansão em série de Taylor em torno do máximo. Em outras palavras, o método de Laplace funciona porque a contribuição para a integral proveniente da região externa a $0 \leq t \leq \varepsilon$ é subdominante para qualquer $\varepsilon > 0$ (BENDER; ORSZAG, 1999).

Após esta explicação, ficamos aptos a utilizar uma ferramenta mais conhecida do que o lema de Watson, a função gama em sua forma integral,

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} dx x^{t-1} e^{-x}. \quad (314)$$

Sabemos que os limites superiores de integração em (307) e (310) podem ser alterados, de forma a produzir integrais idênticas a

$$\int_0^{\infty} dz s^{k-1/2} e^{-s/g^2} = (g^2)^{k+1/2} \Gamma(k + 1/2). \quad (315)$$

Este resultado, quando substituído nas equações (307) e (310), leva às expansões assintóticas anteriormente obtidas pelo lema de Watson.

A fim de expressar Z_H em termos de funções de Bessel, multiplica-se a equação (302) por $\exp(-1/(2g^2))$, permitindo escrever

$$e^{-1/(2g^2)} Z_H(g) = \frac{2}{g\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} dz e^{-\frac{1}{2g^2}[1+2\sinh^2(2z)]} = \frac{2}{g\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} dz e^{-\cosh(2z)/(2g^2)} \quad (316)$$

Depois é feita a mudança de variável $2z = z'$, tal que

$$e^{-1/(2g^2)} Z_H(g) = \frac{2}{2g\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} dz' e^{-\cosh(z')/(2g^2)}. \quad (317)$$

A função de Bessel modificada de segunda espécie $K_\nu(t)$, ou função de Macdonald, é definida como (DLMF..., 2020a)

$$K_\nu(t) = \frac{\sqrt{\pi}(t/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^{\infty} dz e^{-t \cosh z} (\sinh z)^{2\nu} \quad \Rightarrow \quad K_0(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)} \int_0^{\infty} dt e^{-t \cosh z}. \quad (318)$$

Logo, depois de tornar o intervalo de integração infinito na Eq. (317), identificamos

$$Z_H(g) = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} e^{1/(2g^2)} K_0\left(\frac{1}{2g^2}\right). \quad (319)$$

A expansão assintótica de K_ν é conhecida²³ (BOYD, 1990),

$$K_\nu(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_n \left(\frac{1}{2} + \nu\right)_n}{n!(2z)^n}, \quad (320)$$

onde o numerador é escrito através do símbolo de Pochhammer,

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}. \quad (321)$$

Portanto,

$$Z_H(g) \sim \frac{1}{g\sqrt{\pi}} e^{1/(2g^2)} g\sqrt{\pi} e^{-1/(2g^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[\Gamma(n+1/2)]^2}{n![\Gamma(1/2)]^2} g^{2n}, \quad (322)$$

que concorda com a relação (309), já que $n! = \Gamma(n+1)$.

Analogamente, Z_M pode ser escrita como

$$e^{1/(2g^2)} Z_M(g) = \frac{2}{g\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} dz e^{\cos(2z)/(2g^2)} = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_0^\pi d\theta e^{\cos\theta/2g^2}, \quad (323)$$

onde a integral tem a mesma forma que uma função de Bessel modificada de primeira espécie I_0 (DLMF..., 2020a),

$$I_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} dt. \quad (324)$$

Conseqüentemente,

$$Z_M(g) = \frac{\pi}{g\sqrt{\pi}} e^{-1/(2g^2)} I_0\left(\frac{1}{2g^2}\right). \quad (325)$$

Como a expansão assintótica de $I_\nu(t)$ é (DLMF..., 2020b)

$$I_\nu(t) \sim \frac{e^t}{(2\pi t)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \nu\right)_n \left(\frac{1}{2} + \nu\right)_n}{n!(2z)^n}, \quad (326)$$

então

$$Z_M(g) \sim \frac{\pi}{g\sqrt{\pi}} e^{-1/(2g^2)} \frac{e^{1/(2g^2)} \sqrt{2g^2}}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(n+1/2)]^2}{n![\Gamma(1/2)]^2} g^{2n}, \quad (327)$$

que corresponde à relação (311).

²³ O caso específico K_0 com $\nu = 0$ foi calculado na nossa subseção sobre o lema de Watson (ver Eq. (243))

Para cada função de partição, os primeiros termos das séries são:

$$Z_H(g)|_{\text{pert}} = 1 - \frac{g^2}{4} + \frac{9g^4}{32} - \frac{75g^6}{128} + \frac{3675g^8}{2048} - \frac{59535g^{10}}{8192} + \dots, \quad (328)$$

$$Z_M(g)|_{\text{pert}} = 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{9g^4}{32} + \frac{75g^6}{128} + \frac{3675g^8}{2048} + \frac{59535g^{10}}{8192} + \dots; \quad (329)$$

o que evidencia uma relação entre os coeficientes destas séries perturbativas, consequência do fato de que a função seno com argumentos imaginários está relacionada à função hiperbólica. Matematicamente, temos que $\sin(ix) = i * \sinh(x)$.

3.1.2 Dedais de Lefschetz

Associado a cada ponto crítico existe um ciclo de integração único, chamado *dedal de Lefschetz* ou simplesmente *dedal*, ao longo do qual a fase permanece estacionária. Os dedais são uma generalização do método de “steepest descent” (relembre o método na seção 2.2).

De modo geral, seja Σ o conjunto de pontos críticos (selas) z_σ , onde $\sigma \in \Sigma$. A cada z_σ é associado um ciclo de integração \mathcal{J}_σ , que é obtido pelo escoamento descendente a partir de σ , tomando a parte real da ação como uma função de Morse, que é simplesmente uma função de valor real cujos pontos críticos são não-degenerados²⁴ (WITTEN, 2011).

Considere uma integral do tipo Laplace,

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) e^{-f(x)/\lambda}. \quad (330)$$

Para que se possa deformar o contorno de integração numa soma de caminhos de “steepest descent”, o primeiro passo é fazer a continuação analítica das funções f e g no plano complexo $z = x + iy$, pois é justamente nesse plano que o método é desenvolvido (seção 2.2). A equação (330) passa a ser vista como uma integral de contorno aberto em z ,

$$Z(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{\mathcal{C}_x} dz g(z) e^{-f(z)/\lambda}, \quad (331)$$

onde \mathcal{C}_x é o eixo real. Os pontos de sela de $f(z)$ — onde $f'(z_\sigma) = 0$ — são escritos z_σ . Desde que z_σ sejam não-degenerados, ou seja, $f''(z_\sigma) \neq 0$, o contorno de inclinação mais acentuada passando por z_σ é determinado por uma curva $z(u)$ satisfazendo as equações

²⁴ A não-degenerescência de um ponto crítico significa que a matriz de derivadas segundas é inversível naquele ponto. O número de autovalores negativos dessa matriz é chamado de índice de Morse do ponto crítico.

de primeira ordem

$$\frac{dz}{du} = \eta \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{d\bar{z}}{du} = \eta \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \eta = \pm 1, \quad (332)$$

onde u é um parâmetro real e $F(z) \equiv -f(z)/\lambda$. Uma propriedade importante vem de que, se z for igual a um ponto crítico em algum u , então a equação (332) implica que z é constante para qualquer u . Logo, a não ser que $z(u) = z_\sigma$ para todo u , um escoamento não-constante pode atingir z_σ somente para $u = \pm\infty$ (SERONE; SPADA; VILLADORO, 2017; WITTEN, 2011). Pela regra da cadeia,

$$\frac{dF}{du} = \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{du} = \eta \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|^2, \quad (333)$$

onde o último resultado foi obtido a partir da equação (332). Tal equação é motivo para denominar os escoamentos. Exceto por uma solução trivial que apresenta o ponto crítico para qualquer u , percebemos que F está sempre estritamente decaindo ou crescendo, dependendo do valor de η . Logo, os valores $\eta = +1$ e $\eta = -1$ determinam respectivamente os escoamentos ascendentes e descendentes.

O ciclo descendente que vai para $\text{Re } F = -\infty$ é chamado de dedal de Lefschetz, ou somente dedal. Quando o “steepest descent” atinge mais de uma sela, o caminho se divide em dois ramos e surge uma ambiguidade (Fig. 13). É dito, então, que a integral está sobre uma linha de Stokes. Para um estudo mais aprofundado da teoria de Picard-Lefschetz, ver Witten (2011), Tanizaki (2015), Tanizaki e Takayuki (2014). As referências Serone, Spada e Villadoro (2017) e Falck (2016) apresentam exemplos diversos onde os dedais são calculados e/ou representados graficamente. É interessante comentar também que, durante a definição do caminho de integração de Berry e Howls (1991) para obtenção da fórmula de ressurgência exata, Eq. (290), o fenômeno de Stokes é levado em conta. Isto fica bem evidente na figura 12 e os autores ainda se preocuparam em demonstrar o salto de Stokes segundo o formalismo que utilizaram.²⁵

Voltando para os casos estudados nesta tese, podemos utilizar também a equação

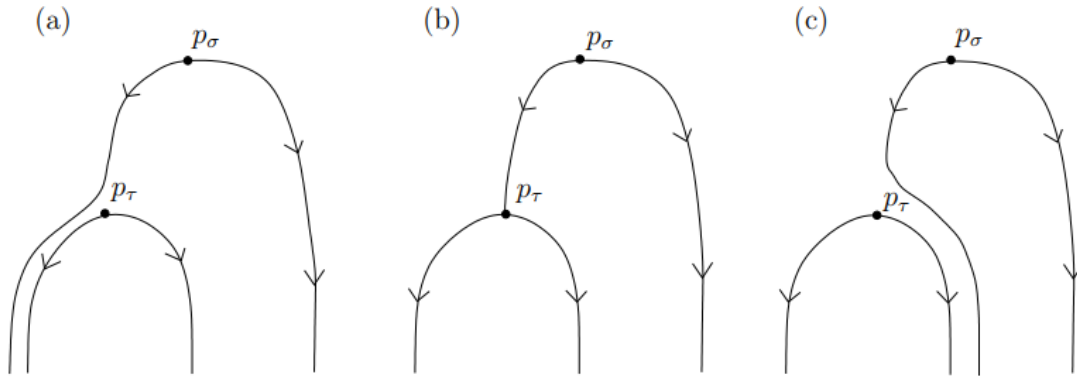
$$\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_k), \quad k = 0, 1 \quad (334)$$

para os pontos críticos de cada função de partição. Na verdade, a Eq. (334) é consequência da equação diferencial dos dedais,

$$\frac{dz}{dt} = -\overline{\partial_z S(z)}, \quad \text{condição inicial: } z(t \rightarrow \infty) = z_k, \quad k = 0, 1, \quad (335)$$

²⁵ BERRY; HOWLS; 1991, p.663-664.

Figura 13 - Comportamento do “steepest descent” quando atinge dois pontos críticos.



Legenda: As linhas esboçam escoamentos descendentes. O comportamento na linha de Stokes é representado por (b), onde há um escoamento de p_σ para p_τ . Os esquemas “antes” e “depois” de cruzar a linha de Stokes são descritos em (a) e (c). O ciclo J_τ do ponto crítico inferior não é afetado pelo fenômeno de Stokes. Já o ciclo J_σ não é bem definido em (b), havendo o salto $J_\sigma \rightarrow J_\sigma + J_\tau$ entre (a) e (c).

Fonte: WITTEN, 2011, p. 367.

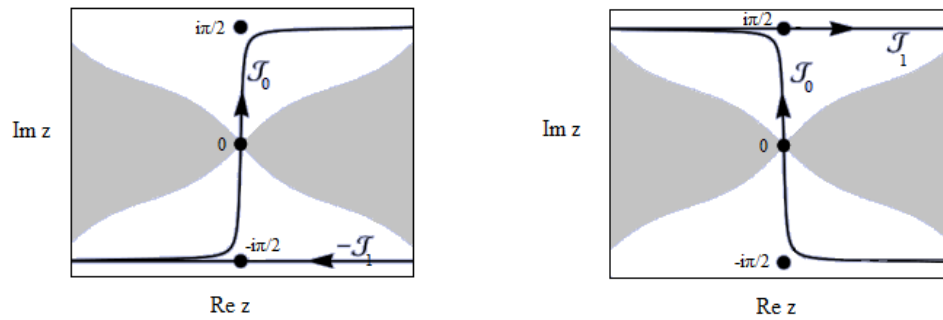
que também se faz necessária nos casos aqui abordados, escrita de acordo com a notação dos mesmos. Em geral, cada \mathcal{J}_k passa somente pela sela associada z_k e os contornos vão se deformando suavemente à medida que $\theta = \arg(g^2)$ varia. Um contorno que passa por mais de uma sela caracteriza uma linha de Stokes, gerando ambiguidades indesejáveis. É por esta razão que um contorno de integração *geral* pode ser escrito como uma combinação linear de dedais. Em outras palavras, a teoria de Picard-Lefschetz nos fornece a decomposição do contorno de integração inicial em uma soma de trajetórias “steepest descent”. Perceba na figura 15 que, para $\arg(z^2) = 0^\pm$, a função de partição de Mathieu é definida como a integral ao longo do contorno C_m , que é uma combinação linear de dedais.

Definimos a integral num ponto de sela como

$$\mathcal{I}^{(k)}(v) \equiv \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{\mathcal{J}_k} dz e^{-vV(z)}, \quad k \in \{0, 1\}, \quad v \equiv \frac{1}{g^2}. \quad (336)$$

Diferentemente de outros valores para $\arg(g^2)$, onde foi dito que os dedais se deformam suavemente, a figura 15 deixa evidente a mudança brusca de configuração dos dedais para $\arg(g^2) = 0^\pm$. Esta exceção só acontece nas linhas de Stokes. No exemplo de Mathieu, existem duas: as semirretas com ângulos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Na literatura, é dito

Figura 14 - Dedais de Lefschetz para o potencial de Mathieu modificado.



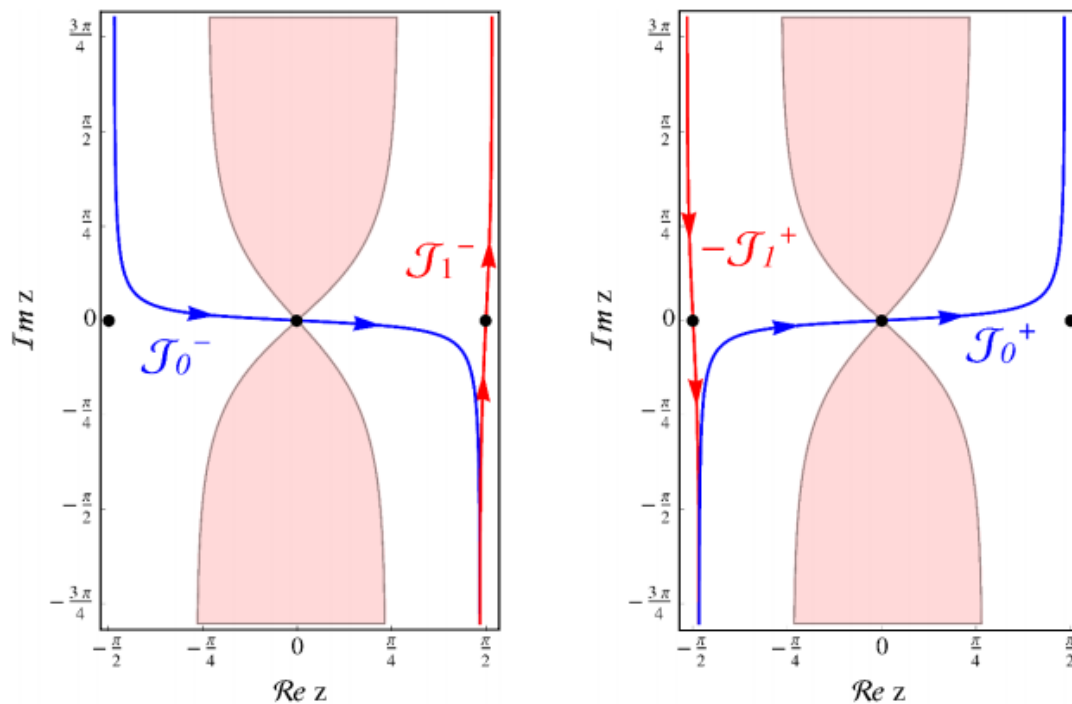
Legenda: As áreas hachuradas são as regiões ruins de integração, onde

$\text{Re}(\sinh^2(z)) < 0$, de forma que $e^{-\sinh^2(z)} \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$.

Esquerda: Dedais em $g^2 = e^{i\theta}$ com $\theta = 0^-$ são $\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1$. *Direita:* quando $\theta = 0^+$, os dedais são $\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1$.

Fonte: BASAR; DUNNE; ÜNSAL, 2013, p. 17. Adaptada pela autora.

Figura 15 - Dedais de Lefschetz para o potencial de Mathieu.



Legenda: As áreas hachuradas são as regiões más de integração, onde $\text{Re}(\sin^2(z)) < 0$, de forma que $e^{-\sin^2(z)} \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$. *Esquerda:* Dedais em $g^2 = e^{i\theta}$ com $\theta = 0^-$ são $\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1$. *Direita:* quando $\theta = 0^+$, os dedais são $\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1$.

Fonte: CHERMAN; DORIGONI; ÜNSAL, 2015, p. 9.

que os ciclos de integração realizam *saltos*. Para identificá-los, basta fazer o seguinte exercício: tomar como referência a configuração $\theta = 0^-$, depois incluir em $\theta = 0^+$ o número necessário de dedais $\pm\mathcal{J}_1$ que, alocados nos pontos de sela convenientes e combinados a \mathcal{J}_0 , proporcionam cancelamentos quando as orientações têm sentidos opostos, de forma que $\theta = 0^+$ se transforme na configuração de referência (ver Fig. 16). Em outras palavras, basta responder: quantos ciclos $\pm\mathcal{J}_1$ devem ser incluídos em $\theta = 0^+$ para que fique igual a $\theta = 0^-$, e onde incluí-los?

As integrais $\mathcal{I}^{(0)}(v)$ nas selas perturbativas são relacionadas àquelas $\mathcal{I}^{(1)}(v)$ nas selas não-perturbativas (ver Eq. (336) geral) através da fórmula de ressurgência exata²⁶

$$\mathcal{I}^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{2}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{dv}{v} \frac{1}{1-g^2v} \mathcal{I}^{(1)}(v), \quad (337)$$

onde o fator 2 no numerador foi incluído devido às selas não-perturbativas ($z_{H_1} = \pm i\pi/2$, $z_{M_1} = \pm\pi/2$). A equação (337) não é a fórmula geral de Berry e Howls (1991) — um trabalho admirável que pode ser aplicado a sistemas com muito mais selas do que estes que lhe apresentamos —, mas uma aplicação dela (ver Eq. (290)).

Para g^2 pequeno, a integral $\mathcal{I}^{(0)}$ definida sobre o ciclo correspondente em cada caso (hiperbólico e Mathieu) é mapeada em uma integral no plano de Borel através de uma simples mudança de variável $u = V(z)$. Para Mathieu modificado,

$$\mathcal{I}_H^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_{J_0} dz e^{-\sinh^2(z)/g^2} = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u(1+u)}} e^{-u/g^2}, \quad (338)$$

onde o denominador vem da mudança de variáveis e da relação $1 = \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \cosh^2(z) - u$. No caso trigonométrico,

$$\mathcal{I}_M^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_{J_0} dz e^{-\sin^2(z)/g^2} = \frac{1}{g\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} e^{-u/g^2}. \quad (339)$$

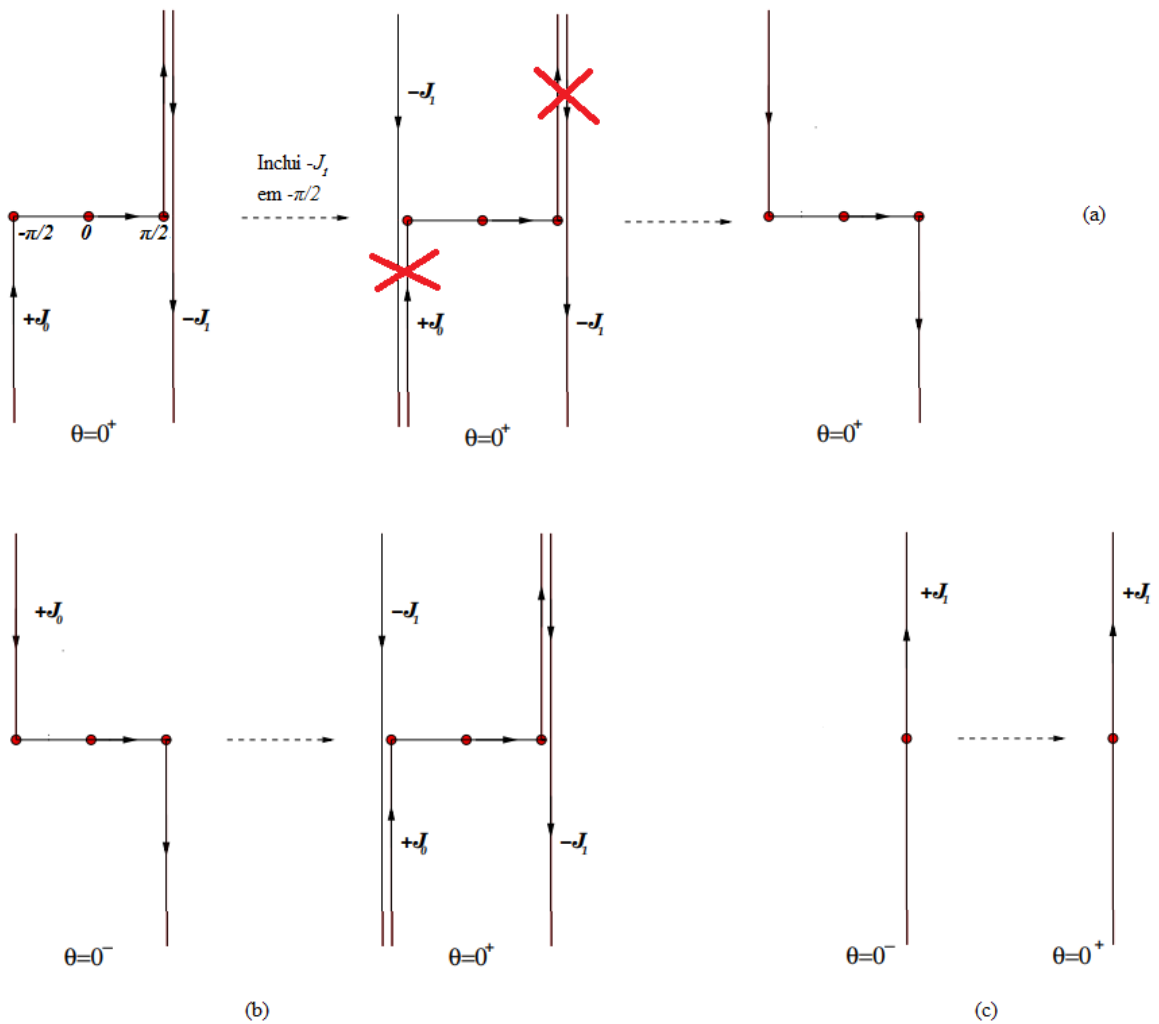
Observe que os respectivos pontos de ramificação no plano de Borel, -1 e 1 , em cada equação, são mapeados às respectivas ações nas selas não-perturbativas ($S_{H_1} = -1$, $S_{M_1} = 1$).

Já as integrais $\mathcal{I}^{(1)}(v)$ podem ser colocadas na forma de Borel definindo $u = V(z) - S_{H_1}$, para o exemplo hiperbólico, e $u = V(z) - S_{M_1}$ para Mathieu. Assim, obtemos

$$\mathcal{I}_H^{(1)}(v) = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{J_1} dz e^{-v \sinh^2(z)} = i\sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^\infty du \frac{e^{-v(u-1)}}{\sqrt{u(1-u)}}, \quad (340)$$

²⁶ Se os casos aqui estudados possuísem mais selas, no lugar do fator $\mathcal{I}^{(1)}(v)$ haveria um somatório de integrais do tipo $\mathcal{I}^{(k)}$ em $k = 1..j$, onde j é o número total de selas não-perturbativas.

Figura 16 - Fenômeno de Stokes para potencial de Mathieu



Legenda: (a) É preciso incluir $-\mathcal{J}_1$ em $z = -\pi/2$ para que a configuração $\theta = 0^+$ fique idêntica a $\theta = 0^+$. (b) Comparação entre $\theta = 0^-$ e $\theta = 0^+$ para ilustrar o salto $\mathcal{J}_0 \rightarrow \mathcal{J}_0 - 2\mathcal{J}_1$. (c) Não há saltos para \mathcal{J}_1 em $\theta = 0$.

Fonte: CHERMAN; DORIGONI; ÜNSAL, 2015, p. 11.

também

$$\mathcal{I}_M^{(1)}(v) = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_{J_1} dz e^{-v \sin^2(z)} = i \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^\infty du \frac{e^{-v(u+1)}}{\sqrt{u(1+u)}}. \quad (341)$$

Desta vez, os pontos de ramificação ficam mapeados às ações relativas, respectivamente $\Delta S_H = S_{H_0} - S_{H_1} = 0 - (-1) = +1$, $\Delta S_M = S_{M_0} - S_{M_1} = 0 - 1 = -1$.

É possível, nos dois casos, calcular exatamente as $\mathcal{I}^{(0)}$ através da Eq. (337), o que é feito mais à frente no texto. Existe também uma consequência muito interessante da fórmula de ressurgência: os *primeiros termos* das expansões perturbativas em torno das *selas não-perturbativas* fornecem correções aos termos de *altas ordens* da expansão perturbativa em torno da *sela perturbativa*. Para explorar esta característica, expandimos o denominador em (340) através do teorema binomial, tal que

$$[u(1-u)]^{-1/2} = u^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n! \Gamma(1/2)} u^n. \quad (342)$$

Substituindo-a de volta em (340), obtemos

$$\mathcal{I}_H^{(1)}(1/g^2) = \frac{i}{g\sqrt{\pi}} e^{+1/g^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n! \Gamma(1/2)} \int_0^\infty u^{n-1/2} e^{-u/g^2} du, \quad (343)$$

cuja integral corresponde à função gama, de forma que

$$\mathcal{I}_H^{(1)}(1/g^2) = i e^{+1/g^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(n+1/2)]^2}{\Gamma(n+1)[\Gamma(1/2)]^2} g^{2n} = i e^{+1/g^2} \left(1 + \frac{g^2}{4} + \frac{9g^4}{32} + \frac{75g^6}{128} + \dots \right) \quad (344)$$

é a expansão perturbativa em torno da sela não-perturbativa hiperbólica.

Similarmente, para Mathieu,

$$\mathcal{I}_M^{(1)}(1/g^2) = i e^{-1/g^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[\Gamma(n+1/2)]^2}{\Gamma(n+1)[\Gamma(1/2)]^2} g^{2n} = i e^{-1/g^2} \left(1 - \frac{g^2}{4} + \frac{9g^4}{32} - \frac{75g^6}{128} + \dots \right). \quad (345)$$

Agora partimos para o comportamento em altas ordens dos coeficientes da expansão perturbativa em torno de zero. Antes de substituir as expressões que encontramos na fórmula de ressurgência, é possível adiantar um passo em comum a ser tomado para ambos os casos: expandir $(1 - g^2 v)^{-1}$ em g^2 , da seguinte forma

$$\frac{1}{1 - g^2 v} = \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} v^n. \quad (346)$$

Após fazer isso, substituímos (338) e (340) em (337), obtendo

$$\mathcal{I}_H^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{2}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dv g^{2n} v^{n-1} i \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^{\infty} du \frac{e^{-v(u-1)}}{\sqrt{u(1-u)}}. \quad (347)$$

Reorganizando os fatores, resulta em

$$\mathcal{I}_H^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \int_0^{\infty} dv v^{n+\frac{1}{2}-1} e^{-v(u-1)}, \quad (348)$$

onde a última integração é identificada como uma função gama, logo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_H^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(n+1/2) \frac{g^{2n}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)^{n+1}}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2\Gamma(n+1)}{\pi(n+1/2)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; 1\right) g^{2n}. \end{aligned} \quad (349)$$

onde na segunda linha da equação utilizamos a função hipergeométrica (DLMF... , 2020d),

$$\frac{{}_2F_1(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = e^{-bz} \frac{\Gamma(1-b)}{2\pi i \Gamma(c-b)} \int_{\infty}^{0+} \frac{t^{b-1}(t+1)^{a-c}}{(t-zt+1)^a} dt. \quad (350)$$

Em altas ordens, a equação (349) gera

$$a_{n,H}^{(0)} \sim (-1)^n \frac{(n-1)!}{\pi}. \quad (351)$$

O mesmo procedimento adotado para Mathieu leva ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_M^{(0)}\left(\frac{1}{g^2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1/2) \frac{g^{2n}}{\pi^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u(1+u)^{n+1}}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\Gamma(n+1)}{\pi(n+1/2)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; 1\right) g^{2n}. \end{aligned} \quad (352)$$

Em altas ordens, corresponde a

$$a_{n,M}^{(0)} \sim \frac{(n-1)!}{\pi}. \quad (353)$$

3.1.3 Correção do comportamento em altas ordens da expansão perturbativa

É possível obter resultados em altas ordens ainda melhores que (351) e (353), por conta de uma consequência intrínseca da equação (337) de ressurgência entre selas: os *primeiros termos* da expansão em torno da(s) sela(s) não-perturbativa(s) fornecem

correções aos *termos tardios*²⁷ da expansão em torno da sela perturbativa.

Relembrando as expansões nas selas não-perturbativas,

$$\mathcal{I}_H^{(1)}(1/g^2) = ie^{+1/g^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\Gamma(k+1/2)]^2}{\Gamma(k+1)[\Gamma(1/2)]^2} g^{2k} = ie^{+1/g^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,H}^{(1)} g^{2k}, \quad (354)$$

$$\mathcal{I}_M^{(1)}(1/g^2) = ie^{-1/g^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[\Gamma(k+1/2)]^2}{\Gamma(k+1)[\Gamma(1/2)]^2} g^{2k} = ie^{-1/g^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,M}^{(1)} g^{2k}. \quad (355)$$

Os autores Başar, Dunne e Ünsal (2013) conjecturam que o comportamento dos coeficientes da expansão em torno da sela perturbativa com correções até segunda ordem tem a forma geral

$$a_n^{(0)} \sim \frac{(n-1)!}{\pi S_1^n} \left(a_0^{(1)} + \frac{a_1^{(1)} S_1}{(n-1)} + \frac{a_2^{(1)} S_1^2}{(n-1)(n-2)} + \dots \right). \quad (356)$$

Os referidos pesquisadores não citam as referências para sua conjectura, mas em nossa pesquisa observamos que essa expressão concorda com a equação (83), que obtivemos na seção 1.3. A partir desta informação, nós construímos os termos gerais da série no lado direito da equação (356), aplicados para cada caso, a fim de incluir mais termos nos cálculos do que os apresentados em (356). Assim,

$$a_{n,H}^{\text{corrigido}} \sim \frac{(-1)^n (n-1)!}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{a_{k,H}^{(1)}}{\prod_{l=1}^k (n-l)} \right\}, \quad (357)$$

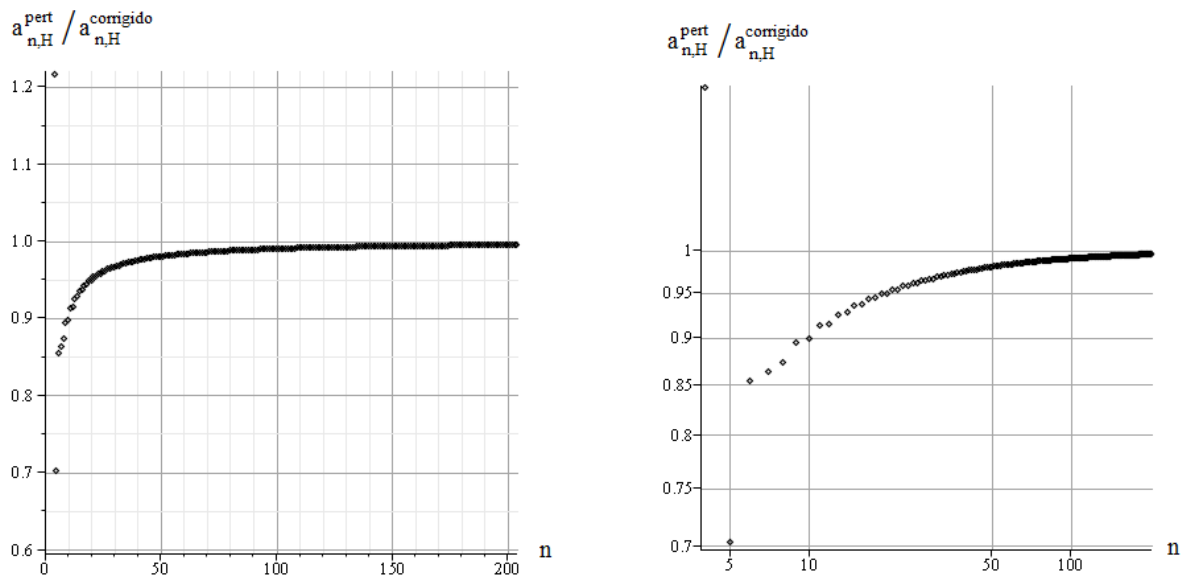
$$a_{n,M}^{\text{corrigido}} \sim \frac{(n-1)!}{\pi} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{a_{k,M}^{(1)}}{\prod_{l=1}^k (n-l)} \right\}, \quad (358)$$

onde $a_{k,H}^{(1)}$ e $a_{k,M}^{(1)}$ são explicitados respectivamente nas equações (354) e (355). Repare que esta é uma relação entre os coeficientes de altas e baixas ordens da expansão perturbativa em torno de selas diferentes. Comparamos as expressões corrigidas dos coeficientes em altas ordens com aquelas obtidas a partir da expansão perturbativa diretamente da integral da função de partição, sendo Eq. (309) para o potencial hiperbólico e (311) para Mathieu. Fizemos os cálculos para $n = 4, \dots, 204$ no programa Maple 15, que resultou nas figuras 17 e 18. O valor inicial de n foi escolhido de forma que a expressão corrigida tenha correções além da segunda ordem. Como esperado, já que a expressão corrigida é construída para altas ordens, à medida que n cresce os valores dos coeficientes perturbativo e corrigido se assemelham em ambos os gráficos, de tal forma que a razão entre eles se aproxima de 1.

Nos casos em que há mais de uma sela não-perturbativa, o comportamento em altas ordens do coeficiente da expansão perturbativa possui mais termos, levando em

²⁷ Termos de altas ordens.

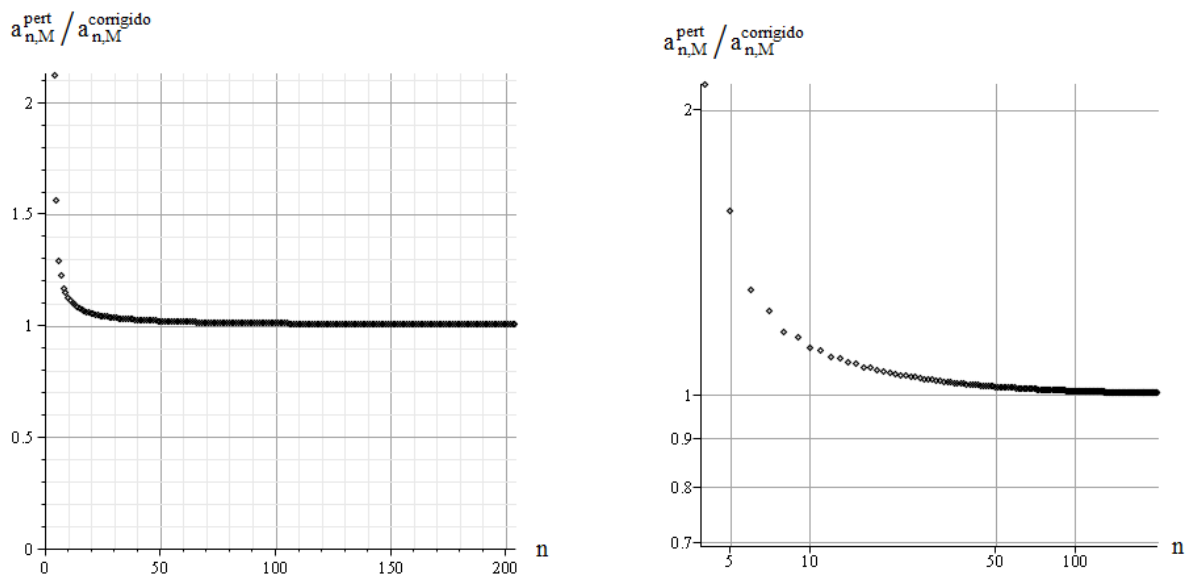
Figura 17 - Razão entre o coeficiente da expansão perturbativa em altas ordens com correções da ressurgência e aquele obtido diretamente da função de partição de Sinh-Gordon.



Legenda: Esquerda: gráfico da razão $a_{n,H}^{corrigido} / a_{n,H}^{pert}$ para n de 4 a 204, na escala usual. Direita: em escala logarítmica, com melhor visualização dos pontos.

Fonte: A autora, 2020.

Figura 18 - Razão entre o coeficiente da expansão perturbativa em altas ordens com correções da ressurgência e aquele obtido diretamente da função de partição de Mathieu.



Legenda: Esquerda: gráfico da razão $a_{n,M}^{corrigido} / a_{n,M}^{pert}$ para n de 4 a 204, na escala usual. Direita: em escala logarítmica, com melhor visualização dos pontos.

Fonte: A autora, 2020.

conta a colaboração de cada sela não-perturbativa. Para ilustrar isso, abaixo está escrita a expressão de Bařar, Dunne e Ünsal (2013) para o potencial $V(z|m) = \text{sd}^2(z|m)$, onde sd é uma função elíptica de Jacobi.

$$a_n^{(A)}(m) \sim \frac{(n-1)!}{\pi S_B^n} \left(a_0^{(B)} + \frac{a_1^{(B)} S_B}{(n-1)} + \frac{a_2^{(B)} S_B^2}{(n-1)(n-2)} + \dots \right) + \frac{(n-1)!}{\pi S_C^n} \left(a_0^{(C)} + \frac{a_1^{(C)} S_C}{(n-1)} + \frac{a_2^{(C)} S_C^2}{(n-1)(n-2)} + \dots \right), \quad (359)$$

onde B e C são as duas selas não-perturbativas do problema.

3.1.4 Cancelamento de ambiguidades

Ambas as funções de partição podem ser escritas como transséries. De forma geral, para nossos problemas com duas selas, escrevemos

$$Z(g^2) = \sigma_0 e^{-S_{\text{pert}}/g^2} \Phi_0(g^2) + \sigma_1 e^{-S_{\text{n-pert}}/g^2} \Phi_1(g^2), \quad (360)$$

onde σ_0 e σ_1 são constantes de Stokes (ver seção 1.2), e os expoentes das exponenciais representam as ações nas diferentes selas, perturbativas e não-perturbativas. Especificamente, para o exemplo hiperbólico

$$\Phi_0^H(g^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,0}^H g^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [\Gamma(k+1/2)]^2}{\Gamma(k+1) [\Gamma(1/2)]^2} g^{2k} \quad (361)$$

$$\Phi_1^H(g^2) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,1}^H g^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{k,0} g^{2k} = \frac{[\Gamma(k+1/2)]^2}{\Gamma(k+1) [\Gamma(1/2)]^2} g^{2k}. \quad (362)$$

Como se encaixam na classificação de séries de Gevrey 1 (onde os coeficientes $a_k \sim k!$), é justificável realizar a transformação de Borel tradicional (ver capítulo 1). As transformações são

$$B\Phi_{0,1}^H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k,0,1}^H}{k!} t^k. \quad (363)$$

É importante relembrar que a ressonância de Borel é dada pela integral da continuação analítica de $B\Phi(t)$, denotada por $\widetilde{B\Phi}(t)$. Em termos de funções hipergeométricas, escrevemos

$$\widetilde{B\Phi}_0^H(t) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -t\right), \quad (364)$$

$$\widetilde{B\Phi}_1^H(t) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; t\right), \quad (365)$$

onde (DLMF..., 2020c)

$${}_2F_1(a, b, c; z) \equiv \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(n+1)} z^n, \quad \text{com } |z| < 1, \quad (366)$$

possui corte de ramificação a partir de $z=1$. Logo, em $\widetilde{B\Phi_0^H}$ encontramos um corte de ramificação em $t = -1$ e para $\widetilde{B\Phi_1^H}$ este fica em $t = 1$.

Já a ressonância se escreve

$$S\Phi_{0,1}^H(g^2) = \frac{1}{g^2} \int_0^{+\infty} dt e^{-t/g^2} \widetilde{B\Phi_{0,1}^H}(t). \quad (367)$$

É importante lembrar que, antes de realizar a ressonância de Borel, devemos submeter a representação assintótica de uma função Borel ressonável a diversos processos. Geralmente, iniciamos com a função de domínio real, cuja representação assintótica serve como referência para, no domínio complexo, definir a transformação de Borel. É feita, então, a continuação analítica da transformação de Borel. Somente após este processo é possível fazer a ressonância de Borel. Quando esta existe, é caracterizada como uma função com a mesma expansão assintótica que a expansão perturbativa, por construção, mas é bem definida apenas em uma vizinhança finita de $g = 0$. Esta afirmação é sustentada pelo teorema de Watson-Nevanlinna ou Nevanlinna-Sokal (ver subseção 1.1.3). Na nossa situação, entretanto, isso não se aplica totalmente.

Há de se perceber que $\widetilde{B\Phi_0^H}$ não possui singularidades em \mathbb{R}^+ , então a ressonância de Φ_0^H nesse semi-eixo existe. A complicação surge ao tentar fazê-la no semi-eixo real negativo. Por outro lado, $\widetilde{B\Phi_1^H}$ possui um corte de ramificação ao longo de \mathbb{R}^- , a partir de $t = -1$. Isto quer dizer que os ângulos $\arg(g^2) = \theta = 0$ e $\theta = \pi$ são linhas de Stokes. A ressonância de Borel *tradicional* de $\Phi_1^H(g^2)$ envolve uma integral ao longo da linha de Stokes, portanto, é inviável. Este é um exemplo clássico de uma série não Borel-somável. Mas existe uma alternativa, pois é possível definir a ressonância lateral de Borel

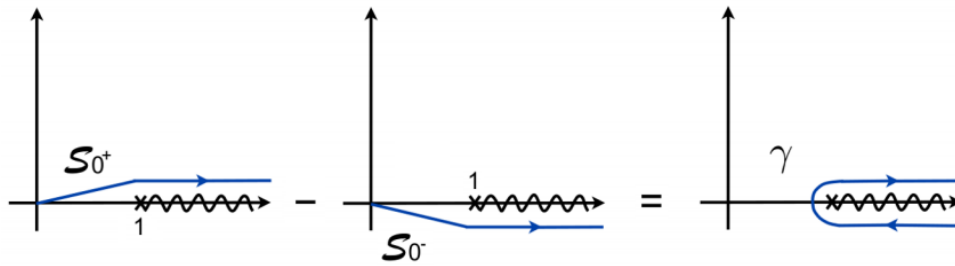
$$S_\theta\Phi_{0,1}^H(g^2) = \frac{1}{g^2} \int_0^{+\infty e^{i\theta}} dt e^{-t/g^2} \widetilde{B\Phi_{0,1}^H}(t), \quad (368)$$

onde $\theta \neq 0$ para Φ_1^H e $\theta \neq \pi$ para Φ_0^H . Infelizmente, outro problema ocorre porque a ressonância lateral assume valor complexo para Φ_1^H em $\theta = 0^\pm$, além de ser ambígua em $\theta = 0$ (i.e., quando g é real), já que os limites de integração por baixo e por cima não concordam. A diferença entre ambas as integrações é

$$(S_{0^+} - S_{0^-})\Phi_1^H = \frac{1}{g^2} \int_\gamma dt e^{-t/g^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; t\right), \quad (369)$$

onde γ é o contorno de Hankel representado na figura 19. Desta forma,

Figura 19 - Contorno de Hankel



Legenda: A diferença entre as ressonas laterais $(S_{0+} - S_{0-})\Phi_1^H$ pode ser escrita como o contorno de Hankel γ , que vem do infinito, depois muda de sentido contornando o ponto inicial do corte de ramificação, $t = 1$, voltando para infinito.

Fonte: CHERMAN; DORIGONI; ÜNSAL, 2015, p. 14. Adaptada pela autora.

$$(S_{0+} - S_{0-})\Phi_1^H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{g^2} \int_1^\infty dt e^{-t/g^2} \left[{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; t + i\epsilon\right) - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; t - i\epsilon\right) \right] \quad (370)$$

$$= \frac{2i}{g^2} \int_1^\infty dt e^{-t/g^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1 - t\right), \quad t > 1. \quad (371)$$

Devemos frisar que a última linha é válida somente para $t > 1$, obtida a partir de uma propriedade de descontinuidade de hipergeométricas (DLMF..., 2020c),

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; t + i\epsilon) - {}_2F_1(a, b, c; t - i\epsilon) &= \frac{2\pi i \Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (t-1)^{c-a-b} \\ &\times \frac{{}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-t)}{\Gamma(c-a-b+1)}, \quad t > 1. \end{aligned} \quad (372)$$

Fazendo uma mudança de variável $t' = t - 1$ em (371), obtemos

$$\begin{aligned} (S_{0+} - S_{0-})\Phi_1^H &= \frac{2i}{g^2} e^{-1/g^2} \int_0^\infty dt' e^{-t'/g^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -t'\right), \\ (S_{0+} - S_{0-})\Phi_1^H &= 2i e^{-1/g^2} S_0 \Phi_0^H(g^2). \end{aligned} \quad (373)$$

Uma informação que podemos extrair da equação (373) é que a ambiguidade imaginária na ressona de Φ_1^H em $\theta = 0^\pm$ é dada, incluindo outros fatores, pela ressona em Φ_0^H .

Com a finalidade de definir uma transsérie livre de ambiguidades para qualquer g complexo, o resultado acima é essencial para determinarmos os valores adequados das

constantes de Stokes. Considere uma integração por cima do corte de ramificação,

$$\begin{aligned} Z_H(g^2)|_{\theta=0^+} &= \sigma_0 e^{-S_{H_0}/g^2} S_0 \Phi_0^H + \sigma_1 e^{-S_{H_1}/g^2} S_{0^+} \Phi_1^H \\ &\quad \sigma_0 \frac{e^{1/g^2}}{2i} (S_{0^+} - S_{0^-}) \Phi_1^H + \sigma_1 e^{1/g^2} S_{0^+} \Phi_1, \end{aligned} \quad (374)$$

onde a segunda linha foi obtida através da equação (373) e devemos lembrar que $S_{H_0} = 0$ e $S_{H_1} = -1$. Fazendo $\sigma_1 = 1$, determinamos que $\sigma_0 = -i$ para $\pi > \arg \theta > 0$. Similarmente, por baixo do corte de ramificação, temos

$$Z_H(g^2)|_{\theta=0^-} = \sigma_0 \frac{e^{1/g^2}}{2i} (S_{0^+} - S_{0^-}) \Phi_1^H + \sigma_1 e^{1/g^2} S_{0^-} \Phi_1. \quad (375)$$

Escolhendo $\sigma_1 = 1$, encontramos o valor $\sigma_0 = i$ para $-\pi < \arg \theta < 0$. Logo, uma consequência importante da equação (373) é que a representação em transsérie da função de partição é livre de ambiguidades em $\theta = 0^\pm$ graças a saltos nas constantes de Stokes quando θ atravessa a linha $\theta = 0$. Particularmente,

$$Z_H(g^2)|_{\theta=0} = \mp i S_0 \Phi_0^H(g^2) + e^{1/g^2} S_{0^\pm} \Phi_1^H(g^2) = e^{1/g^2} \text{Re} S_0 \Phi_1^H(g^2). \quad (376)$$

Este procedimento é feito de forma análoga para o potencial de $\sin^2(z)$ e os resultados não surpreendem, já que $\Phi_0^M = \Phi_1^H$ e $\Phi_1^M = \Phi_0^H$. A função de partição de Mathieu é escrita na forma de transsérie como

$$Z_M(g^2) = \begin{cases} S_\theta \Phi_0(g^2) - ie^{-1/g^2} S_\theta \Phi_1(g^2), \theta \in (0, \pi) \\ S_\theta \Phi_0(g^2) + ie^{-1/g^2} S_\theta \Phi_1(g^2), \theta \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (377)$$

Além disso, a diferença entre as ressonâncias laterais resulta em

$$(S_{0^+} - S_{0^-}) \Phi_0^M = 2i e^{-1/g^2} S_0 \Phi_1^M(g^2). \quad (378)$$

Nesta seção, fundamentamos o entendimento da transsérie como um objeto matemático que codifica, de forma global, os efeitos de correlação entre coeficientes de expansões em torno de selas perturbativas e não-perturbativas, e que representa fielmente a função de partição em diferentes setores do plano complexo.

Entendidos os protótipos zero-dimensionais, podemos partir para o caso unidimensional, que corresponde aos cálculos em mecânica quântica.

3.2 Mecânica Quântica (d=1)

A partir de agora a função de partição é uma integral de caminho,

$$\mathcal{Z}(g^2) = \int \mathcal{D}x e^{-S[x]} = \int \mathcal{D}x \exp \left\{ - \int d\tau \left(\frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{1}{g^2} V(x) \right) \right\}. \quad (379)$$

onde os potenciais de interesse são novamente $V_H(x) = \sinh^2(x)$ e $V_M(x) = \sin^2(x)$. A teoria de perturbação de Rayleigh-Schrödinger para esses potenciais é conhecida (BAŞAR; DUNNE; ÜNSAL, 2013). Temos²⁸

$$E_H^{(0)}(g^2) = 1 + \frac{g^2}{4} - \frac{g^4}{16} + \frac{3g^6}{64} - \frac{53g^8}{1024} + \frac{297g^{10}}{4096} - \dots, \quad (380)$$

$$E_M^{(0)}(g^2) = 1 + \frac{g^2}{4} + \frac{g^4}{16} + \frac{3g^6}{64} + \frac{53g^8}{1024} + \frac{297g^{10}}{4096} + \dots \quad (381)$$

Para compará-los com as expansões perturbativas das integrais ordinárias, ver Eqs. (328) e (329).

Os potenciais possuem instantons (ver seção 1.4), soluções de

$$\dot{x} = \sqrt{2V(x(t))}. \quad (382)$$

Para fins de comparação dos nossos resultados com as expressões de Başar, Dunne e Ünsal (2013), são feitas as mudanças

$$V(x(t)) \rightarrow 2V(x(t)), \quad x(t) \rightarrow g x(t). \quad (383)$$

Logo, resolvendo a equação diferencial por separação de variáveis,

$$\begin{aligned} g \dot{x}_H &= 2\sqrt{\sinh^2(g x_H(t))} \\ g \int_0^{x_{H,G}} \frac{dx_H}{\sinh(g x_H)} &= 2 \int_0^t dt \\ \ln \left| \tanh \left(\frac{g x_{H,G}}{2} \right) \right| &= 2t. \end{aligned} \quad (384)$$

Sabendo que $\tanh(x) = -i \tan(ix)$,

$$\begin{aligned} \left| -i \tan \left(\frac{ig x_{H,G}}{2} \right) \right| &= \exp(2t) \\ \underbrace{|-i|}_1 \left| \tan \left(\frac{ig x_{H,G}}{2} \right) \right| &= \exp(2t). \end{aligned} \quad (385)$$

²⁸ É possível calcular a expansão perturbativa através da abordagem de Zinn-Justin e Jentschura (2004a), na qual se expande a condição de quantização WKB exata numa série perturbativa na constante de acoplamento, que depois é invertida para expressar a energia em termos do índice de nível de energia.

A função tangente é ímpar, logo $\tan(-x) = -\tan(x)$. Aplicando o módulo de ambos os lados, $|\tan(-x)| = |\tan(x)|$. Portanto, a equação (385) pode ser reescrita como

$$\left| \tan\left(\frac{-ig x_{H,\mathcal{G}}}{2}\right) \right| = \exp(2t).$$

Tomando o módulo em toda a equação,

$$\tan\left(\frac{-ig x_{H,\mathcal{G}}}{2}\right) = |\exp(2t)| = \exp(2t).$$

Logo,

$$x_{H,\mathcal{G}} = \frac{2i}{g} \arctan(\exp(2t)), \quad (386)$$

onde \mathcal{G} é utilizado para denotar íntanton complexo. Para o potencial trigonométrico temos,

$$\begin{aligned} g \dot{x}_M &= 2\sqrt{\sin^2(g x_M(t))} \\ g \int_0^{x_{M,\mathcal{I}}} \frac{dx_M}{\sin(g x_M)} &= 2 \int_0^t dt \\ \ln \left| \tan\left(\frac{g x_{M,\mathcal{I}}}{2}\right) \right| &= 2t. \end{aligned} \quad (387)$$

onde \mathcal{I} significa íntanton. Tomando a exponencial de ambos os lados,

$$|\tan(x_{M,\mathcal{I}}/2)| = \exp(2t). \quad (388)$$

Logo,

$$x_{M,\mathcal{I}} = \frac{2}{g} \arctan(\exp(2t)). \quad (389)$$

A figura 20 apresenta graficamente os resultados $x_{H,\mathcal{G}}$ e $x_{M,\mathcal{I}}$. Analisando-a, percebemos que $x_{H,\mathcal{G}}$ interpola entre $i\pi, 0$, enquanto $x_{M,\mathcal{I}}$ o faz entre $0, \pi$. Assim, as ações correspondentes são

$$S_{H,\mathcal{G}} = \int_0^{i\pi} \sinh(x) dx = -2, \quad S_{M,\mathcal{I}} = \int_0^\pi \sin(x) dx = 2, \quad (390)$$

onde foi utilizado $\cosh(i\theta) = \cos(\theta)$.

O artigo de Başar, Dunne e Ünsal (2013) trabalha com o potencial $V = \text{sd}(x|m)^2$, onde sd é uma função elíptica de Jacobi. No limite $m \rightarrow 0$, este corresponde ao potencial de Mathieu, enquanto que no limite $m \rightarrow 1$ a correspondência é com o potencial hiperbólico. Tomando os devidos limites para seus resultados de íntanton real e íntanton complexo

Figura 20 - Ínstanton complexo do potencial de Mathieu modificado e ínstanton real de Mathieu



Legenda: Gráficos de $x_{H,G}$ e $x_{M,I}$ (Eqs. (389) e (386), respectivamente) para $g = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

em tal publicação,

$$x_G = \frac{i}{g} \text{cn}^{-1}(\tanh(-2t)|0), \quad x_I = \frac{1}{g} \text{cn}^{-1}(\tanh(-2t)|1), \quad (391)$$

onde cn é uma função elíptica de Jacobi, pudemos comprovar graficamente que nossos resultados são idênticos.²⁹

Em altas ordens, há uma previsão para o comportamento dos coeficientes perturbativos da energia de estado fundamental, de forma que este é controlado por eventos de ínstanton–anti–ínstanton (BAŞAR; DUNNE; ÜNSAL, 2013)

$$a_{n,H} \sim \frac{16n!}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{|S_{H,G\bar{G}}|^{n+1}}, \quad a_{n,M} \sim -\frac{16n!}{\pi} \frac{1}{(S_{M,I\bar{I}})^{n+1}}, \quad (392)$$

onde a barra representa anti–ínstanton(s) e os valores das ações de ínstanton–anti–ínstanton são o *dobro* das ações de ínstanton ($S_{H,G\bar{G}} = 2S_{H,G}$ e $S_{M,I\bar{I}} = 2S_{M,I}$). Utilizamos o pacote BenderWu (SULEJMANPASIC; ÜNSAL, 2018) no Mathematica para calcular os primeiros 30 termos da expansão perturbativa da energia do estado fundamental. Em seguida, no Maple, calculamos os comportamentos em altas ordens e tiramos a razão entre ambos

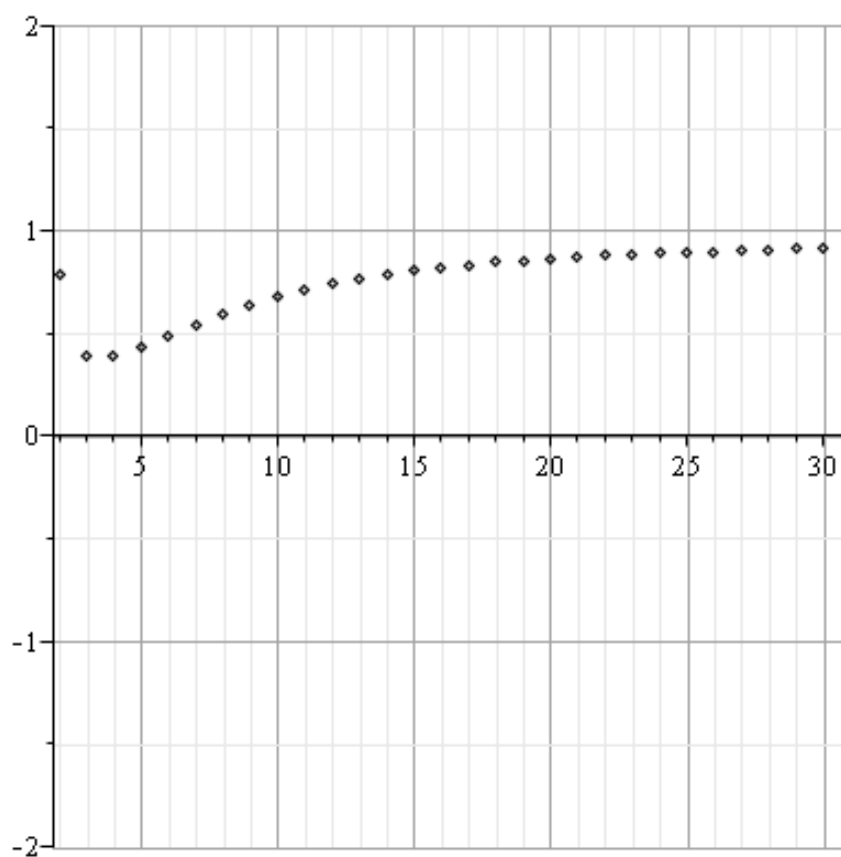
²⁹ Traçamos simultaneamente no Wolfram Alpha os gráficos de

$$x_{H,G}(g=1) = 2i \arctan(\exp(2t)), \quad x_G(g=1) = i \text{cn}^{-1}(\tanh(-2t)|0),$$

e fizemos o mesmo também para

$$x_{M,I}(g=1) = 2 \arctan(\exp(2t)), \quad x_I = \text{cn}^{-1}(\tanh(-2t)|1).$$

Figura 21 - Comportamento assintótico em $d = 1$ dos coeficientes da expansão perturbativa para o potencial de Mathieu modificado



Legenda: Razão entre o coeficiente da série perturbativa do potencial de Mathieu modificado (ver Eq. (380)) e seu comportamento em altas ordens para $n = 2, \dots, 31$ (Eq. (392)). O gráfico correspondente ao problema trigonométrico é idêntico a esse (ver apêndice C).

Fonte: A autora, 2020.

para cada valor de n correspondente, gerando o gráfico da figura 21. Existem diferentes formas de calcular esta expansão, sendo que escolhemos o pacote BenderWu por ser convenientemente célere nos cálculos. Um método alternativo, baseado em diagramas de Feynman, é aplicado para o potencial quártico no apêndice D. Uma sugestão de leitura sobre a expansão perturbativa da energia a partir da condição de quantização exata WKB é o artigo de Zinn-Justin e Jentschura (2004a)³⁰.

As relações (392) revelam que não é preciso calcular explicitamente as expansões perturbativas das energias para conhecer o comportamento em altas ordens dos coeficientes da série perturbativa. Para isso, basta conhecer os efeitos não-perturbativos de íntanton em cada caso, o que é extremamente conveniente.

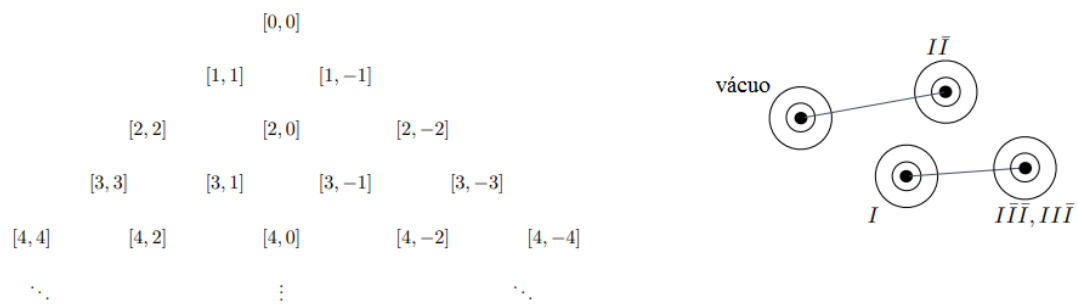
3.2.1 Cancelamento de ambiguidades e triângulo de ressurgência

Em problemas da mecânica quântica com estado fundamental degenerado, normalmente é introduzido um ângulo θ topológico, como foi feito na seção 1.6.2 para o potencial periódico, que se encaixa na descrição acima. Fatores exponenciais semiclássicos podem adquirir fases também. Entretanto, na teoria da perturbação, setores com diferentes fases não podem se misturar. A razão para isso é simples. A teoria da perturbação é independente de θ . Portanto, a dependência de θ serve como um guia para distinguir setores ressurgentes, relacionando aqueles que removem ambiguidades. Assim, Dunne e Ünsal (2012) construíram um esquema para identificar como ocorre o fenômeno de cancelamento de ambiguidades para cada par de setores, denominando-o triângulo de ressurgência.

Observe que, nos casos aqui estudados, a relação (392) conecta o setor de vácuo (perturbativo) ao setor de íntanton–anti-íntanton (não perturbativo). Se associarmos um número a cada setor, de acordo com o efeito não-perturbativo que representa, podemos denominar o vácuo de setor zero e o de íntantons–anti-íntantons de setor 2. Para problemas de maior complexidade, o triângulo de ressurgência está representado na figura 22.

³⁰ Consultar a seção 3 e o apêndice B do artigo.

Figura 22 - Triângulo de ressurgência.



Legenda: Cada célula é representada por $[n, m]$, onde $n = n_{\text{instanton}} + n_{\text{anti-instanton}}$, $m = m_{\text{instanton}} + m_{\text{anti-instanton}}$. Os cancelamentos de ambiguidades só podem ocorrer entre pares de células que estejam na mesma coluna, ou seja, o par de células relacionadas ocorre de dois em dois setores. Direita: exemplo de relação entre altas ordens do setor zero com baixas ordens do setor de 2 íntantons. Outro par relacionado é o de 1 íntanton (altas ordens) com o de 3 íntantons (baixas ordens).

Fonte: DUNNE, 2014, p. 65-66. Adaptada pela autora.

CONCLUSÃO

Séries divergentes surgem em inúmeros casos da teoria perturbativa de amplo uso na física. Geralmente, representam uma preocupação por serem resultados indesejáveis, já que são infinitas e podem gerar ambiguidades se forem submetidas a certos tratamentos. As séries divergentes podem ser assintóticas, Eq. (2), e tratamentos para lidar com a assintotia, que são o truncamento ótimo, a transsérie e a ressonância de Borel, foram estudados na seção 1.1. O primeiro exemplo de transsérie foi construído a partir de uma família de soluções formais da equação de Euler, Eq. (24). Também obtivemos o erro relacionado ao truncamento ótimo, Eq. (30). No plano complexo, a abordagem envolveu a ressonância de Borel, que pode gerar resultados ambíguos quando o contorno de integração está numa linha de Stokes.

Para além da assintotia clássica, na seção 1.2 obtivemos a relação (75) entre o comportamento singular da transformada de Borel de uma série perturbativa e o efeito de um íntanton. Conseguimos também ter uma noção de como os coeficientes de uma expansão perturbativa se comportam em altas ordens pela relação (83), verificada nos exemplos do último capítulo.

O motivo do infortúnio da divergência é relacionado à existência de singularidades no plano complexo de Borel, normalmente associadas a íntantons. Estes foram estudados nas seções 1.4 a 1.6, e são parte importante na construção de transséries, estruturas formadas por exponenciais das ações de íntantons, séries assintóticas formais e constantes de Stokes. A fim de compreender as contribuições dos aspectos não-perturbativos para a mecânica quântica, calculamos soluções de íntantons do oscilador anarmônico quártico e de multi-íntantons em dois exemplos: potencial de poço duplo e potencial periódico (cosseno).

A partir do domínio de métodos para lidar com a assintotia e da compreensão de efeitos não-perturbativos de íntantons, restava abordar mais um assunto até estarmos aptos a explorar aplicações. Como o formalismo de interesse concerne a integrais, especificamente funções de partição, estudamos métodos para integrais de tipo Laplace (capítulo 2) com integrandos reais e complexos, destacando-se o método da inclinação mais acentuada ou “steepest descent”. Assim, foi possível demonstrar a fórmula de ressurgência para integrais com selas de Berry e Howls (1991), Eq. (290).

Os potenciais escolhidos para aplicação foram os de Sine-Gordon/Mathieu e seu correspondente hiperbólico. Através de protótipos zero-dimensionais (seção 3.1), conseguimos calcular a expansão perturbativa utilizando diversos métodos, depois desenvolvemos integrais em contornos no plano complexo que são uma generalização das curvas de inclinação mais acentuada — os detalhes de Lefschetz. Desta forma, pudemos escrever as integrais sob a forma de ressonância de Borel, o que permitiu, por sua vez, descrever as mesmas

em termos de funções hipergeométricas. Assim, conhecemos as ambiguidades que surgem ao utilizar a ressonância lateral de Borel na proximidade das respectivas linhas de Stokes. Entretanto, escritas na forma de transsérie, as funções de partição se mostraram não ambíguas (ver Eq. (376)). Através da identificação das constantes de Stokes, demonstramos que as ambiguidades foram canceladas. Também aplicamos a fórmula de ressurgência exata, implicando uma correção do comportamento em altas ordens relacionada a efeitos não-perturbativos, constatada para diversas ordens (ver figuras 17 e 18).

Finalmente, no contexto da mecânica quântica, comparamos os coeficientes da expansão perturbativa da energia do estado fundamental (para os mesmos potenciais) com os comportamento assintóticos desses coeficientes, calculados a partir de efeitos não-perturbativos, especificamente dos setores de íntanton–anti-íntanton (ver figura 21). Assim, basta entendermos os efeitos não-perturbativos de íntanton nos casos estudados para termos uma noção do comportamento em altas ordens dos coeficientes da expansão perturbativa, sem a necessidade de calculá-la explicitamente.

Quanto ao potencial de Mathieu, um assunto que nos desperta interesse está relacionado às regiões de estabilidade e instabilidade das soluções. No contexto clássico (MAHON, 2020), estas são determinadas de acordo com os valores dos multiplicadores (comentamos no início do capítulo 3 que estes são provenientes de soluções não-triviais da equação de Mathieu). Usualmente, esse procedimento é feito por meio de técnicas numéricas, mas existem também abordagens analíticas, como métodos perturbativos (GUTIÉRREZ-VEGA et al., 2003). Diferentes tipos de expansões podem ser feitas em diferentes regiões do espectro de Mathieu (BAŞAR; DUNNE, 2015). Desta maneira, na mecânica quântica, também podem ser obtidos os autovalores de energia. Para o potencial de Mathieu, no regime de acoplamento fraco, as expansões perturbativas para os níveis de energia são divergentes, como percebemos nesta tese. Os autores Başar e Dunne (2015) revelaram ainda que existe uma relação entre o efeito não-perturbativo de um íntanton e o comprimento da separação de zonas permitidas de energia. Em outras palavras, a separação entre zonas permitidas de energia (correspondentes às regiões de estabilidade) do problema de Mathieu é ressurgente. Esse fato interessante levanta questionamentos sobre os autovalores de energia para outros potenciais periódicos.

Embora os resultados sejam animadores, do ponto de vista matemático há uma escassez de ferramentas para lidar com o formalismo geral de integral de caminho. Existem conjecturas de como seria uma generalização dos dedais de Lefschetz, mas nenhum método efetivo foi desenvolvido. Dúvidas quanto à validade de generalizações desse tipo são esperadas e não são poucas.

REFERÊNCIAS

- ANICETO, I.; BAŞAR, G.; SCHIAPPA, R. A primer on resurgent transseries and their asymptotics. *Physics Reports*, [S.l.], v. 809, p. 1–135, 2019.
- ANICETO, I.; SCHIAPPA, R. Nonperturbative ambiguities and the reality of resurgent transseries. *Communications in Mathematical Physics*, [S.l.], v. 335, p. 183–245, 2015.
- BAŞAR, G.; DUNNE, G. Resurgence and the Nekrasov-Shatashvili limit: connecting weak and strong coupling in the Mathieu and Lamé systems. *Journal of high energy physics*, [S.l.], v. 160, 2015.
- BAŞAR, G.; DUNNE, G.; ÜNSAL, M. Resurgence theory, ghost-instantons, and analytic continuation of path integrals. *Journal of High Energy Physics*, [S.l.], v. 10, n. 41, 2013.
- BENDER, C. Perturbation theory in large order for some elementary systems. *International Journal of Quantum Chemistry*, [S.l.], v. 21, n. 1, p. 93–104, 1982.
- BENDER, C.; ORSZAG, S. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. Nova York: Springer, 1999. 593 p.
- BENDER, C.; WU, T. Analytic structure of energy levels in a field-theory model. *Physical Review Letters*, [S.l.], v. 21, p. 406, 1968.
- BENDER, C.; WU, T. Anharmonic oscillator. *Physical Review*, [S.l.], v. 184, p. 1231, 1969.
- BENDER, C.; WU, T. Large-order behavior of perturbation theory. *Physical Review Letters*, [S.l.], v. 27, p. 461, 1971.
- BENDER, C. M.; CASWELL, W. E. Asymptotic graph counting techniques in ψ^{2N} field theory. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.], v. 19, p. 2579, 1978.
- BENDER, C. M.; WU, T. T. Anharmonic oscillator. *Physical Review*, [S.l.], v. 184, p. 1231, 1969.
- BENDER, C. M.; WU, T. T. Anharmonic oscillator. II. A study of perturbation theory in large order. *Physical Review D*, [S.l.], v. 7, n. 6, p. 1620, 1973.
- BERRY, M. V.; HOWLS, C. J. Hyperasymptotics. *Proceedings of the Royal Society A*, London, v. 430, p. 653–668, 1990.
- BERRY, M. V.; HOWLS, C. J. Hyperasymptotics for integrals with saddles. *Proceedings of the Royal Society A*, London, v. 434, p. 657–675, 1991.
- BOWMAN, J. C.; VAN ROESSEL, H. J. *Math 538: Asymptotic Methods*. 2012. Disponível em: <https://www.math.ualberta.ca/~bowman/m538/m538.pdf>. Acesso em: 23 jan. 2020.
- BOYD, J. P. The devil’s invention: Asymptotic, superasymptotic and hyperasymptotic series. *Acta Applicandae Mathematica*, [S.l.], v. 56, n. 1, p. 1–98, 1999.

- BOYD, W. G. C. Stieltjes transforms and the Stokes phenomenon. *Proceedings of the Royal Society A*, [S.l.], v. 429, p. 227–246, 1990.
- BRUNELLI, J. C. *Somabilidade de Borel e séries perturbativas*. 1987. 109 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1987.
- CALAN, C.; RIVASSEAU, V. The perturbation series for ϕ_3^4 field theory is divergent. *Communications in Mathematical Physics*, [S.l.], v. 83, p. 77–82, 1982.
- CHERMAN, A.; DORIGONI, D.; ÜNSAL, M. Decoding perturbation theory using resurgence: Stokes phenomena, new saddle points and lefschetz thimbles. *Journal of High Energy Physics*, Berlin, v. 10, n. 56, 2015.
- CHERMAN, A.; KOROTEEV, P.; ÜNSAL, M. Resurgence and holomorphy: From weak to strong coupling. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.], v. 56, n. 053505, 2015.
- COSTIN, O. On Borel summation and Stokes phenomena for rank one nonlinear systems of ODEs. *Duke Mathematical Journal*, [S.l.], v. 93, n. 2, p. 289–344, 1998.
- DAHAN, B. I. The limiting behavior of exponential terms. *Fund. Math.*, [S.l.], v. 124, p. 169–186, 1984.
- DAHAN, B. I.; GÖRING, P. Notes on exponential-logarithmic terms. *Fund. Math.*, [S.l.], v. 127, p. 45–50, 1987.
- DEBYE, P. Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index. *Mathematische Annalen*, Alemanha, v. 67, p. 535–558, 1909.
- DELABAERE, E.; DILLINGER, H.; PHAM, F. Exact semiclassical expansions for one-dimensional quantum oscillators. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.], v. 38, p. 6126, 1997.
- DINGLE, R. B. *Asymptotic expansions: their derivation and interpretation*. New York and London: Academic Press, 1973. 521 p.
- DLMF: 10.32 Integral Representations. Desenvolvido por National Institute of Standards and Technology (NIST). 2020. Apresenta representações integrais de funções de Bessel modificadas. Disponível em: <http://https://dlmf.nist.gov/10.32>. Acesso em: 31 agosto 2020.
- DLMF: 10.40 Asymptotic Expansions for Large Argument. Desenvolvido por National Institute of Standards and Technology (NIST). 2020. Apresenta expansões assintóticas de funções de Bessel modificadas. Disponível em: <http://https://dlmf.nist.gov/10.40>. Acesso em: 31 agosto 2020.
- DLMF: 15.2 Definitions and Analytical Properties: Gauss series. Desenvolvido por National Institute of Standards and Technology (NIST). 2020. Apresenta definição da função hipergeométrica. Disponível em: <http://https://dlmf.nist.gov/15.2>. Acesso em: 27 set. 2020.

DLMF: 15.6 Integral Representations. Desenvolvido por National Institute of Standards and Technology (NIST). 2020. Apresenta representações integrais de funções hipergeométricas. Disponível em: <http://https://dlmf.nist.gov/15.6>. Acesso em: 18 set. 2020.

DLMF: 5.2 Definitions: Gamma and Psi Functions. Desenvolvido por National Institute of Standards and Technology (NIST). 2020. Apresenta representação integral da função gama. Disponível em: <http://https://dlmf.nist.gov/5.2>. Acesso em: 27 set. 2020.

DORIGONI, D. An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 409, n. 167914, 2019.

DUNNE, G. *Resurgence and non-perturbative physics*. CERN Winter School on supergravity, strings, and Gauge theory. 2014. Apresentação de slides. Disponível em: <https://munsal.files.wordpress.com/2014/02/dunne-cern-winter-2014-lectures.pdf>. Acesso em: 27 set. 2020.

DUNNE, G.; ÜNSAL, M. Resurgence and trans-series in quantum field theory: The ϵ^{N-1} model. *Journal of high energy physics*, [S.l.], v. 11, p. 170, 2012.

DUNNE, G. V. Perturbative–nonperturbative connection in quantum mechanics and field theory. In: OLIVE, K. A.; SHIFMAN, M. A.; B., Voloshin M. (Ed.). *Continuous Advances in QCD 2002*. Singapura: World Scientific, 2002. p. 646.

DYSON, F. Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. *Physical Review*, [S.l.], v. 85, n. 631, 1952.

ÉCALLE, J. *Les fonctions résurgentes: Les algèbres de fonctions résurgentes*. Paris: Département de mathématique de Université de Paris, 1981. v. 1. 247 p.

ÉCALLE, J. *Les fonctions résurgentes: Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération*. Paris: Département de mathématique de Université de Paris, 1981. v. 2. 284 p.

ÉCALLE, J. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Paris: Hermann, 1992.

EDGAR, G. A. Transseries for beginners. *Real Analysis Exchange*, [S.l.], v. 35, n. 2, p. 253–310, 2010.

FALCK, E. *Asymptotic Expansions of Integrals and the Method of Steepest Descent*. Suécia: Uppsala University, 2016. 33 p. Disponível em: <https://uu.diva-portal.org/smash/get/uu:1058214/FULLTEXT01.pdf>. Acesso em: 18 set. 2020.

GEDDES, K. O.; GONNET, G. H. A new algorithm for computing symbolic limits using hierarchical series: a few applications. In: *Symbolic and Algebraic Computation, International symposium ISSAC 88 in Rome, Italy*. Berlin: Springer, 1989. p. 490–495.

GUTIÉRREZ-VEGA, J. C. et al. Mathieu functions, a visual approach. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, [S.l.], v. 71, p. 233, 2003.

HARDY, G. H. *Divergent series*. Londres: Oxford University Press, 1949. 396 p.

HILL, G. W. On the part of the motion of lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon. *Acta. Math.*, [S.l.], v. 8, p. 1–36, 1866.

- HURST, C. A. An example of a divergent perturbation expansion in field theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, [S.l.], v. 48, n. 4, p. 625–639, 1952.
- IL'YASHENKO, Y. S. Finiteness theorems for limit cycles. *Translations of Mathematical Monographs*, Providence, v. 94, p. 45–50, 1991.
- JAFFE, A. Divergence of perturbation theory for bosons. *Communications in Mathematical Physics*, [S.l.], v. 1, p. 127–149, 1965.
- KLEINERT, H.; SCHULTE-FROHLINDE, V. *Critical properties of ϕ^4 -theories*. Singapura: World Scientific, 2001. 512 p.
- LIPATOV, L. N. Divergence of the perturbation-theory series and the quasiclassical theory. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, [S.l.], v. 72, p. 411–427, 1977. Disponível em: http://jetp.ac.ru/cgi-bin/dn/e_045_02_0216.pdf. Acesso em: 12 out. 2020.
- MAHON, J. R. P. *Mecânica quântica: Desenvolvimento contemporâneo com aplicações*. Rio de Janeiro: GEN/LTC Editora, 2011. 608 p.
- MAHON, J. R. P. *Mecânica clássica: Fundamentos teóricos e aplicações*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020. 613 p.
- MARIÑO, M. Lectures on non-perturbative effects in large n gauge theories, matrix models and strings. *Fortschritte der Physik*, Weinheim, v. 62, p. 455–540, 2014.
- MARIÑO, M. *Instantons and large N : an introduction to non-perturbative methods in quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. 367 p.
- MARIÑO, M.; PASQUETTI, S.; PUTROV, P. Large n duality beyond the genus expansion. *Journal of high energy physics*, [S.l.], v. 74, 2010.
- MATHIEU, E. Le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. *J. Math. Pures Appl.*, [S.l.], v. 13, p. 137–203, 1868.
- MCLACHLAN, N. W. *Theory and application of Mathieu functions*. London: Clarendon Press, 1947. 401 p.
- MURRAY, J. D. *Applied mathematical sciences: Asymptotic analysis*. Nova Iork: Springer, 1984. v. 48.
- NEVANLINNA, F. Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ (A)*, [S.l.], v. 12, n. 3, p. 81, 1918.
- PETERMAN, A. Renormalisation dans les séries divergentes. *Helvetica Physica Acta*, [S.l.], v. 26, p. 291, 1953. Disponível em: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=hpa-001%3A1953%3A26%3A%3A5#303>. Acesso em: 12 out. 2020.
- POICARÉ, H. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Mathematica*, [S.l.], v. 8, p. 295–344, 1886.
- PONNUSAMY, S.; SILVERMAN, H. *Complex variables with applications*. Boston: Birkhäuser, 2006. 513 p.

- RIEMANN, B. *Gesammelte mathematische werke*. 2. ed. Nova Iork: Dover Publications Inc., 1892.
- SANTORO, G. E. *Introduction to Floquet: Lectures Notes*. Instituto Galileo Galilei de física teórica. 2019. Notas de curso sobre o teorema de Floquet da escola de inverno de 2019 em teorias de campo estatísticas. Disponível em: https://www.ggi.infn.it/sft/SFT_2019/LectureNotes/Santoro.pdf. Acesso em: 12 out. 2020.
- SERONE, M.; SPADA, G.; VILLADORO, G. The power of perturbation theory. *Journal of High Energy Physics*, [S.l.], v. 56, 2017.
- SIMON, B. Perturbation theory and coupling constant analyticity in two-dimensional field theories. In: IVERSON, G.; PERLMUTTER, A.; MINTZ, S. (Ed.). *Fundamental Interactions in Physics and Astrophysics*. Boston: Springer, 1973. p. 120–136.
- SINGLETON, J. *Band theory and electronic properties of solids*. Nova Iork: Oxford University Press, 2001. 222 p.
- STERNIN, B. Y.; SHATALOV, V. E. *Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory: Introduction to resurgent analysis*. Boca Raton: CRC Press, 1996. 288 p.
- SULEJMANPASIC, T.; ÜNSAL, M. Aspects of perturbation theory in quantum mechanics: The BenderWu Mathematica package. *Computer Physics Communications*, [S.l.], v. 228, p. 273–289, 2018.
- TANIZAKI, Y. *Study on sign problem via Lefschetz-thimble path integral*. 2016. 109 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade de Tóquio, Tóquio, 2015. Disponível em: https://repository.dl.itc.u-tokyo.ac.jp/?action=repository_uri&item_id=48170&file_id=14&file_no=1. Acesso em: 27 set. 2020.
- TANIZAKI, Y.; TAKAYUKI, K. Real-time feynman path integral with picard-lefschetz theory and its applications to quantum tunneling. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 351, p. 170, 2014.
- THIRRING, W. On the divergence of perturbation theory for quantized fields. *Helvetica Physica Acta*, [S.l.], v. 26, p. 33, 1953. Disponível em: <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=hpa-001%3A1953%3A26%3A%3A5#35>. Acesso em: 12 out. 2020.
- TURNHOUT, M. van et al. Obtaining new local minima in lens design by constructing saddle points. *Optics Express*, [S.l.], v. 23, p. 6679–6691, 2015.
- WARD, M. J. *Chapter 3: Basic floquet theory*. University of British Columbia. 2011. Notas de aula sobre o teorema de Floquet. Disponível em: http://www.math.ubc.ca/~ward/teaching/m605/every2_floquet1.pdf. Acesso em: 12 out. 2020.
- WATSON, G. N. VII. A theory of asymptotic series. *Philosophical transactions of the royal society (A)*, [S.l.], v. 211, n. 471–483, p. 279–313, 1912.
- WITTEN, E. Analytic continuation of Chern-Simons theory. In: ANDERSEN, E. J. et al. (Ed.). *Chern-Simons gauge theory: 20 years after*. Alemanha: AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 2011. v. 50, p. 347–446.

WU, T. Large-order perturbation theory. *International Journal of Quantum Chemistry*, [S.l.], v. 21, n. 1, p. 105–118, 1982.

YAKUBOVICH, V. A.; STARZHINSKII, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*. Nova Iork: Halsted Press, 1975. v. 1. 386 p.

ZINN-JUSTIN, J. The principles of instanton calculus: a few applications. In: ZUBER, J.; STORA, R. (Ed.). *39th Les Houches Summer School on Theoretical Physics: Recent Advances In Field Theory and Statistical Mechanics, 1982, session XXXIX*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984. p. 39–172.

ZINN-JUSTIN, J. *Quantum field theory and critical phenomena*. Oxford: Clarendon Press, 2002. 1054 p.

ZINN-JUSTIN, J.; JENTSCHURA, U. D. Multi-instantons and exact results I: conjectures, WKB expansions, and instanton interactions. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 313, p. 197–267, 2004.

ZINN-JUSTIN, J.; JENTSCHURA, U. D. Multi-instantons and exact results II: specific cases, higher-order effects, and numerical calculations. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 313, p. 269–325, 2004.

APÊNDICE A – O que é uma transsérie?

Talvez a maneira mais simples de descrever uma transsérie seja como uma manipulação de séries formais. Entretanto, seria uma descrição incompleta — transséries possuem uma rica estrutura (algébrica, combinatorial, analítica). Intuitivamente, uma *transsérie* é uma combinação formal³¹ de polinômios, exponenciais e logaritmos. Existe uma formalização algébrica que o(a) leitor(a) pode encontrar, por exemplo, em Écalle (1992), Il'yashenko (1991), Geddes e Gonnet (1989), Dahn e Göring (1987), Dahn (1984). Um trabalho mais recente, escrito de forma didática, pode ser encontrado em Edgar (2010). A seguir, apresentamos uma breve introdução dessa formalização, baseada nas referências mencionadas acima. Iniciamos com duas estruturas básicas, chamadas *séries de Hahn* e *séries grade-baseadas*, que são necessárias para a definição de transsérie. Em seguida exploramos o mínimo necessário para finalmente apresentar a noção precisa de transsérie. No decorrer da exposição, exploramos alguns exemplos básicos. Concluimos com a noção de transséries com logaritmos.

O objetivo aqui é responder a certas perguntas instigadas pela forma (quase padrão) com que os artigos sobre ressurgência costumam apresentar as transséries. Primeiramente, percebe-se que a quantidade de termos gerais é igual ao número de selas do problema. Cada termo geral tem a mesma estrutura: uma exponencial multiplicada por uma série de potências. Existiriam outros tipos de transséries ou todas seriam dessa forma? Um polinômio poderia ser considerado uma transsérie? Expoentes mais complicados, como exponenciais de exponenciais seriam permitidos? Por que existem transséries com logaritmos como fatores?

Seja (G, \succ) um grupo abeliano com relação de ordem estrita \succ , lida como “muito maior que”. Dizemos que um elemento $g \in G$ é *grande* se $g \succ 1$ e *pequeno* se $g \prec 1$. Por *estrita*, entende-se que $g \succ g$ é falso, por exemplo. Denotaremos a identidade de G por 1.

Podemos associar um elemento $a_g \in \mathbb{R}$ para cada elemento $g \in G$. Ou seja, podemos definir uma aplicação $T : G \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada $g \in G$, temos $T(g) = a_g \in \mathbb{R}$. A partir de agora, consideraremos um grupo G e uma aplicação T conforme as descrições acima, de tal forma que $U = \{g \in G : a_g \neq 0\}$ não é vazio. Então, podemos considerar a série

$$\sum_{g \in U} a_g g, \quad a_g \in \mathbb{R}. \quad (393)$$

A série (393) é chamada *série de Hahn*. Por abuso de notação, iremos identificar a série

³¹ A palavra "formal" tem o sentido de que a convergência da série não é necessariamente considerada.

de Hahn (393) com a aplicação T que a determina.

Seja $T = \sum_{g \in U} a_g g$ uma série de Hahn. Definimos a *magnitude* de T como $\text{mag } T = \mathbf{m}$, *coeficiente principal* de T como $a_{\mathbf{m}}$ e *dominância* de T como $\text{dom } T = a_{\mathbf{m}} \mathbf{m}$, com $\mathbf{m} \in U$, $\mathbf{m} \succ \mathbf{g} \forall \mathbf{g} \in U$ e $a_{\mathbf{m}} \neq 0$.

Diz-se que T é positivo (negativo) quando seu coeficiente principal é positivo (negativo). Também é possível identificar T como

- pequeno, se $\mathbf{g} \prec 1 \forall \mathbf{g} \in G$ com $T[\mathbf{g}] \neq 0$, ou, de forma equivalente, se $\text{mag } T \prec 1$;
- grande, se $\text{mag } T \succ 1$;
- puramente grande, se $\mathbf{g} \succ 1 \forall \mathbf{g} \in G$ com $T[\mathbf{g}] \neq 0$.

Exemplo A.1

$$T = -3e^x + 4x^2. \quad (394)$$

Logo, identifica-se

$$G = \{e^x, x^2\}, \quad T[e^x] = -3, \quad T[x^2] = 4. \quad (395)$$

Como $e^x \succ x^2$,

$$\text{mag } T = e^x, \quad \text{dom } T = -3e^x. \quad (396)$$

Conclui-se que $T < 0$, pois $a_{\mathbf{m}} = -3 < 0$. Percebendo que $\text{mag } T = e^x \succ 1$ (considerando $x \rightarrow \infty$), seria possível dizer que T é grande. Entretanto, tal informação analisada simultaneamente com a do outro monômio,

$$e^x \succ 1, \quad x^2 \succ 1, \quad (397)$$

permite comprovar que, na verdade, T é puramente grande neste caso.

Ao comparar dois conjuntos, diz-se que $S > T$ quando $S - T > 0$. Por outro lado,

- S é muito maior que T ($S \succ T$) se $\text{mag } S \succ \text{mag } T$;
- S é comparável a T ($S \asymp T$) se $\text{mag } S = \text{mag } T$;
- S é assintótico a T ($S \sim T$) se $\text{dom } S = \text{dom } T$.

Exemplo A.2 Aproveitando em parte o exemplo anterior,

$$T = -3e^x + 4x^2, \quad S = x^9. \quad (398)$$

A diferença entre ambos é

$$S - T = x^9 + 3e^x - 4x^2 \Rightarrow \text{dom}(S - T) = +3e^x. \quad (399)$$

O coeficiente principal é $+3 > 0$, portanto, $S - T > 0 \Rightarrow S > T$. Analisando agora as magnitudes,

$$\text{mag } S = e^x, \quad \text{mag } T = x^9 \Rightarrow S \succ T. \quad (400)$$

Exemplos A.3 Também podemos analisar rapidamente as seguintes relações,

$$-3 \underbrace{e^x}_{\text{mag}} + 4x^2 \succ 7 \underbrace{e^x}_{\text{mag}} + x^9, \quad (401)$$

pois ambas as magnitudes são idênticas;

$$\underbrace{-3e^x}_{\text{dom}} + 4x^2 \sim \underbrace{-3e^x}_{\text{dom}} + x^9, \quad (402)$$

pois possuem as mesmas dominâncias.

A fim de prosseguir com este estudo e introduzir séries grade-baseadas, algumas definições são necessárias e dependem de um conjunto finito de geradores. Escrevendo $G^{\text{pequeno}} = \{\mathbf{g} \prec 1\}$, um conjunto gerador é um subconjunto finito $\boldsymbol{\mu} \subset G^{\text{pequeno}}$. Símbolos gregos em negrito são utilizados para representar esse tipo específico de conjunto. Quando conveniente, seus elementos podem ser escritos em ordem, $\mu_1 \succ \mu_2 \succ \dots \succ \mu_n$.

Seja $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Define-se $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, de forma que

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}} \equiv (\mu_1)^{k_1} \cdot (\mu_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\mu_n)^{k_n}, \quad (403)$$

onde é utilizada uma notação de multi-índices.

Exemplo A.4 Sejam

$$G = \{x, x^{-1}, e^x, e^{-x}\}, \quad \mathbf{k} = (-1, 0, 2, 3) \in \mathbb{Z}^4. \quad (404)$$

Então calcula-se

$$\mathbf{g}^{\mathbf{k}} = (x)^{-1} \cdot (x^{-1})^0 \cdot (e^x)^2 \cdot (e^{-x})^3 = x^{-1} \cdot e^{2x} \cdot e^{-3x} = x^{-1} e^{-x}. \quad (405)$$

Supondo $x \rightarrow \infty$, percebe-se que

$$x^{-1}, e^{-x} \prec 1. \quad (406)$$

De posse dessas informações, é possível explicar agora o que são grades. Seja $J^\mu =$

$\{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n\}$ o subgrupo gerado por $\boldsymbol{\mu}$. Se $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$, então são definidos subconjuntos de $J^{\boldsymbol{\mu}}$,

$$J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}} = \{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \geq \mathbf{m}\}, \quad (407)$$

denominados *grades*. Uma série de Hahn T que tem uma grade como suporte é dita *grade-baseada*. Antes de definir as grades, o suporte de $T \in \mathbb{R}^G$ se escrevia

$$\text{sup } T = \{\mathbf{g} \in G : T[\mathbf{g}] \neq 0\}. \quad (408)$$

Por T ser grade-baseada por $J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}}$ entende-se que $T = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}}$, isto é,³²

$$T = \sum_{k_1=m_1}^{\infty} \sum_{k_2=m_2}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=m_n}^{\infty} c_{k_1 k_2 \dots k_n} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \cdots \mu_n^{k_n}. \quad (409)$$

Exemplo A.5 Podemos construir $J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}}$ a partir de

$$\boldsymbol{\mu} = \{x^{-1}, x e^{-x}\}, \quad \mathbf{m} = (-2, 0). \quad (410)$$

Assim,

$$J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}} = \{(x^{-1})^{-2} \cdot (x e^{-x})^0, (x^{-1})^{-1} \cdot (x e^{-x})^1, (x^{-1})^0 \cdot (x e^{-x})^2, (x^{-1})^1 \cdot (x e^{-x})^3, \dots\}. \quad (411)$$

Tomar conhecimento de tais estruturas matemáticas, mesmo que resumidamente, permite compreender detalhes sobre a formação de transséries e enriquecer a descrição apresentada no primeiro parágrafo deste apêndice. Transséries podem ser construídas por séries de Hahn grade-baseadas.

A fim de abordar o tipo mais simples de transsérie, é necessário apresentar rapidamente mais um grupo. Seja \mathbb{G}_0 um grupo isomorfo a \mathbb{R} (duas estruturas matemáticas são chamadas isomorfas se há um mapeamento bijetivo entre elas). Escreve-se x^b para o elemento de grupo correspondente a $b \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

- $x^a x^b = x^{a+b}$;
- $x^0 = 1$;
- x^{-b} é o inverso de x^b ;

³² Um contraexemplo pode ser a série

$$\sum_{j=2}^{\infty} x^{1/j} = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4} + \dots,$$

pois os expoentes não são inteiros ($k_i \notin \mathbb{Z}$), logo, não é grade-baseada.

- $x^a \prec x^b$ se $a < b$.

Finalmente, é a partir desse grupo que transséries de *nível zero* livres de log são obtidas. As séries reais grade-baseadas em \mathbb{G}_0 podem ser escritas como $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}[\mathbb{G}_0]$.

Exemplo A.6 Dados

$$\boldsymbol{\mu} = \{x\}, \quad \mathbf{m} = (1), \quad \mathbf{k} = (k), \quad J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}} = \{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}} : 3 \geq k \geq m\}, \quad (412)$$

pode-se formar

$$T = -x + 2x^2 - x^3, \quad (413)$$

que é uma série grade-baseada (suportada por $J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}}$) puramente grande (todos os seus monômios são $\succ 1$) classificada como transsérie de nível zero.

Exemplo A.7 Outro exemplo de mesmo nível é

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^{-j-k\sqrt{2}}, \quad (414)$$

onde S é uma série pequena, pois todos os seus monômios são $\prec 1$. A sua estrutura é evidenciada em

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \{x^{-1}, x^{-\sqrt{2}}\}, \quad \mathbf{m} = (1, 1), \\ J^{\boldsymbol{\mu}, \mathbf{m}} &= \{\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \geq \mathbf{m}\} = \{x^{-1}x^{-\sqrt{2}}, x^{-2}x^{-2\sqrt{2}}, x^{-3}x^{-3\sqrt{2}}, \dots\}. \end{aligned} \quad (415)$$

Considere agora um grupo de pares ordenados \mathbb{G}_1 ,

$$(b, L) \xrightarrow{\text{isomorfismo}} x^b e^L, \quad (416)$$

onde $b \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{T}_0$ é puramente grande. Particularmente, x^b é visto como $x^b e^0$, logo identifica-se \mathbb{G}_0 como um subgrupo de \mathbb{G}_1 . A seguinte operação de grupo é definida:

$$(x^{b_1} e^{L_1})(x^{b_2} e^{L_2}) = x^{b_1+b_2} e^{L_1+L_2}, \quad (417)$$

enquanto a ordem é

$$(x^{b_1} e^{L_1}) \succ (x^{b_2} e^{L_2}) \iff L_1 > L_2 \text{ ou } \{L_1 = L_2 \text{ e } b_1 > b_2\}. \quad (418)$$

As transséries de nível 1 são definidas a partir desse grupo e podem ser representadas como $\mathbb{T}_1 = \mathbb{R}[\mathbb{G}_1]$.

Exemplo A.8

$$e^{-x^9+2x^2-x} = x^0 e^{-x^9+2x^2-x}, \quad (419)$$

cujo expoente é uma transsérie de nível 0 puramente grande. Por outro lado, a transsérie (419) de nível 1 é pequena;

Exemplo A.9

$$x^3 + e^{-x^{3/4}}; \quad (420)$$

que é grande (mas não puramente grande);

Exemplo A.10

$$\sum_{j=1}^{\infty} x^{-j} e^x, \quad (421)$$

que é puramente larga e cuja estrutura é visualizada em

$$\mu = \{x^{-1}, e^x\}, \quad \mathbf{m} = (1, 1), \quad \mathbf{k} = (k_1, 1), \quad k_1 \in \mathbf{N}^*; \quad J^{\mu, \mathbf{m}} = \{\mu^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \geq \mathbf{m}\}. \quad (422)$$

Transséries de nível 2 concernem ao grupo \mathbb{G}_2 de pares ordenados, com a mesma forma de (416), mas neste caso $L \in \mathbb{T}_1$ puramente grande. Matematicamente, este tipo de transsérie é escrito como $\mathbb{T}_2 = \mathbb{R}[\mathbb{G}_2]$.

Exemplos A.11 Exemplos são:

$$e^{-e^x}, \quad e^{\sum_{j=1}^{\infty} x^{-j} e^x}. \quad (423)$$

Portanto, exponenciais de exponenciais também podem ser vistas como transséries, não só exponenciais de monômios ou polinômios.

Salientamos que existem muito mais níveis de transséries, embora nossas explicações tenham explorado apenas os primeiros níveis. Suponha que transmonômios \mathbb{G}_N e transséries \mathbb{T}_N , ambos de nível N arbitrário e livres de log, tenham sido definidos. O grupo \mathbb{G}_{N+1} é constituído de pares ordenados $(b, L) \rightarrow x^b e^L$, onde $b \in \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{T}_N$. Operações de grupo também devem ser definidas, a (417), assim como ordem, Eq. (418). Identificando \mathbb{G}_N como subgrupo de \mathbb{G}_{N+1} , de onde são obtidas as transséries de nível $N + 1$, identificamos \mathbb{T}_N como subconjunto de \mathbb{T}_{N+1} , e assim seguem as definições, por recorrência.

Para fins de curiosidade, as transséries com logaritmos são obtidas formalmente ao compor as transséries livres de log com logaritmos pela direita. Definimos

$$Q_j = T_j \circ \log_M, \quad (424)$$

onde $M \in \mathbb{N}$, também

$$T_j \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_N. \quad (425)$$

Para mais definições e esclarecimentos sobre a álgebra envolvida nesta abordagem, consultar a referência Edgar (2010).

É evidente que, como apêndice, este texto não poderia abordar transséries com toda a riqueza de detalhes que o assunto possui, tendo sido explorado em diversas áreas há pelo menos 30 anos. Aqui, focou-se em transséries reais grade-baseadas, que são as mais convenientes para calcular explicitamente e que podem representar funções de valores reais, as quais aparecem naturalmente em equações diferenciais. Uma vez familiarizada com essa variante, segundo Edgar (2010), a pessoa interessada em estudar outras mais pode se aprofundar com relativa facilidade.

Agora é possível admitir pelo menos três tipos de transséries reais grade-baseadas, de níveis 0, 1 e 2. As transséries vistas nos artigos de Bařar, Dunne e Ünsal (2013) e Cherman, Koroteev e Ünsal (2015) têm uma estrutura similar às de nível 1. Quanto às outras perguntas feitas no início do apêndice, um polinômio pode sim ser considerado uma transsérie, assim como exponenciais com monômios ou polinômios nos expoentes, sendo permitidas também exponenciais de exponenciais.

APÊNDICE B – Expansão perturbativa por série de Taylor no Maple.

Considerando a função de partição no caso zero dimensional para o potencial de Sinh-Gordon,

$$Z_H(g) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi e^{-\frac{1}{g^2} \sinh^2(g\phi)}, \quad (426)$$

no limite de acoplamento fraco $g \rightarrow 0$, podemos expandir o potencial $\sinh^2(g\phi)$ em série de Taylor em torno da sela perturbativa. A figura 23 mostra os cálculos feitos no Maple. Quanto mais termos dessa expansão são levados em consideração, mais termos do resultado final concordarão com a expansão em (328).

A exponencial é separada em dois fatores, sendo que o primeiro tem como expoente o primeiro termo da expansão em Taylor. O outro fator exponencial sofre uma expansão. Por fim, integra-se termo a termo em ϕ . O cálculo é análogo para o potencial de Sine-Gordon.

Figura 23 - Cálculo no Maple da expansão perturbativa em série de Taylor do potencial $\sinh^2(g\phi)$

```

> restart :
> with(Physics) :
> Parameters(g) :
> taylor((sinh(g·phi))^2, phi=0, 14) :
> series(((-1/g^2)·(g^2·phi^2 + 1/3·g^4·phi^4 + 2/45·g^6·phi^6 + 1/315·g^8·phi^8 + 2/14175·g^10·phi^10
+ 2/467775·g^12·phi^12), g, 14) :
=
> taylor(exp(-1/3·phi^4·g^2 - 2/45·phi^6·g^4 - 1/315·phi^8·g^6 - 2/14175·phi^10·g^8 - 2/467775·phi^12·g^10),
phi=0, 18) :
=
> int(exp(-phi^2)·(1 - 1/3·g^2·phi^4 - 2/45·g^4·phi^6 + (-1/315·g^6 + 1/18·g^4)·phi^8 + (-2/14175·g^8
+ 2/135·g^6)·phi^10 + (-2/467775·g^10 + 29/14175·g^8 - 1/162·g^6)·phi^12 + (8/42525·g^10
- 1/405·g^8)·phi^14 + (139/10914750·g^12 - 43/85050·g^10 + 1/1944·g^8)·phi^16), phi=-infinity
..infinity) :
=
> series((1/sqrt(pi))·(sqrt(pi) - 1/4·g^2·sqrt(pi) - 1/12·g^4·sqrt(pi) - 1/96·g^4·(2·g^2 - 35)·sqrt(pi)
- 1/240·g^6·(g^2 - 105)·sqrt(pi) - 1/5760·g^6·(4·g^4 - 1914·g^2 + 5775)·sqrt(pi)
+ 143/5760·g^8·(8·g^2 - 105)·sqrt(pi) + 13/215040·g^8·(1668·g^4 - 66220·g^2 + 67375)·sqrt(pi)),
g, 18);
1 - 1/4·g^2 + 9/32·g^4 - 75/128·g^6 + 3675/2048·g^8 - 5845/1536·g^10 + 1807/17920·g^12

```

Legenda: Os últimos termos do resultado não concordam com a equação (328 porque é necessário truncar a série de Taylor em ordens mais altas

Fonte: A autora, 2020.

APÊNDICE C – Obtenção dos gráficos no Maple.

Na figura 24, a seguir, incluímos as entradas no Maple utilizadas para construir a figura 17. O procedimento é análogo para o caso trigonométrico. Para o caso hiperbólico na mecânica quântica, temos a figura 25,

Figura 24 - Cálculo no Maple do gráfico $a_{n,H}^{\text{corrigido}}/a_{n,H}^{\text{pert}}$

```

> restart :
=
> a_antigo(x) := sum  $\left( \frac{(-1)^n \cdot \left( \text{GAMMA}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2}{\text{GAMMA}(n+1) \cdot \left( \text{GAMMA}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}, n=0..x \right) :$ 
=
> antigo(x) := evalf[50](a_antigo(x)) :
=
> a_novo2(n) :=  $\frac{(n-1)!}{(-1)^n \cdot \text{pi}} \left( 1 + \text{sum} \left( \frac{(-1)^k \cdot \left( \text{GAMMA}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)^2}{k! \cdot \left( \text{GAMMA}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}, k=1..(n-2) \right) \right) :$ 
=
> novo2(n) := evalf[50](a_novo2(n)) :
=
> with(plots) :
> pontos200 := {seq([p,  $\frac{\text{antigo}(p)}{\text{novo2}(p)}$ ], p=4..204)} :
=
> pointplot(pontos200, view = [0..204, 0.6..1.22], gridlines = true);

```

Legenda: A soma de $k = 1 \dots (n - 2)$ evita divisões por zero. O valor inicial de n foi escolhido de forma a incluir mais do que um termo no somatório da expressão do comportamento assintótico. Quanto às definições, $a_{\text{antigo}}(x)$ representa a expansão perturbativa, enquanto a_{novo} representa sua expressão corrigida por efeito da ressurgência. O gráfico em escala logarítmica é obtido através do comando *loglogplot*.

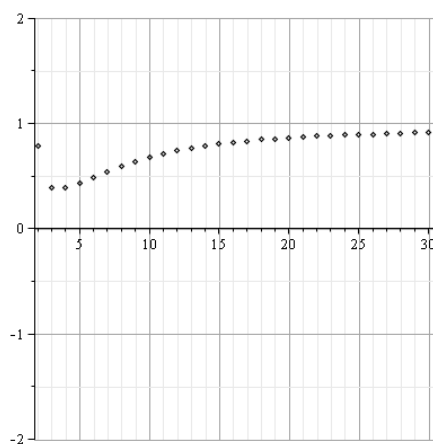
Fonte: A autora, 2020.

Figura 25 - Cálculo no Maple do gráfico comparativo na mecânica quântica para potencial de Sinh-Gordon.

```

> Pert(k) := evalf[30](E0[k]) :
=
> a_nH(n) :=  $\frac{16 \cdot n!}{\text{pi}} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}$  :
=
> with(plots) :
> pontos2 := {seq([s, evalf[30]( $\frac{\text{Pert}(s)}{a_{nH}(s-1)}$ )], s = 2 .. 31)} :
=
> pointplot(pontos2, view = [default, -2 .. 2], gridlines = true);

```



Legenda: A expressão $E0$ foi obtida através do pacote BenderWu, depois foi utilizada no Maple, em um procedimento análogo ao do protótipo zero dimensional.

Fonte: A autora, 2020.

APÊNDICE D – Expansão perturbativa da energia do oscilador quártico por diagramas de Feynman

O objetivo deste apêndice é oferecer uma alternativa para o cálculo da expansão perturbativa da energia, a partir de diagramas de Feynman. Por fins de simplicidade, tomamos um potencial já abordado na seção 1.5. Considerando partículas unidimensionais com hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}x^2 + gV_{\text{int}}(x), \quad (427)$$

onde $gV_{\text{int}}(x)$ é o termo de interação, um exemplo típico é o oscilador quártico,

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{g}{4}x^4. \quad (428)$$

A fim de encontrar a energia de estado fundamental, na MQ o método mais utilizado é o da teoria de perturbação de Rayleigh-Schrödinger, onde a série resultante é do tipo

$$E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n. \quad (429)$$

Uma forma de trazer o cálculo de (429) para a área de interesse, da TQC, é realizá-lo através de diagramas. De um modo geral, a função de partição pode ser usada para determinar o valor das energias dos estados através dos autovalores do hamiltoniano quântico. É, portanto, elementar a utilização da função de partição³³

$$Z(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H(\beta)} = \int \mathcal{D}[x(t)] \exp \left\{ - \int_{-\beta/2}^{\beta/2} dt \left[\frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2 + V(x(t)) \right] \right\}, \quad (431)$$

já que

$$E = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \log Z(\beta). \quad (432)$$

Entende-se por β o inverso da temperatura ou o tempo “euclidiano”, oriundo da realização de uma rotação de Wick ao tempo imaginário. Escolhe-se trabalhar no limite $\beta \rightarrow \infty$, e para seguir em frente é necessário levar em conta alguns fatos. Sendo $F(\beta) = \log Z(\beta)$,

³³ A ação é euclidiana e a integral de caminho se dá sobre trajetórias periódicas,

$$x(-\beta/2) = x(\beta/2). \quad (430)$$

apenas contribuem os diagramas de bolha conexos (exemplos na Fig. 26). Ademais, são n integrações a fazer, onde n é a quantidade de vértices no diagrama. Uma delas tem como resultado o volume do espaço-tempo (o fator β), então este número cai para $n - 1$ integrações sobre \mathbb{R} . No limite escolhido, o propagador é simplesmente

$$\int \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{ipr}}{p^2 + 1} = \frac{e^{-|r|}}{2}, \quad (433)$$

e as regras de Feynman deste caso estão na Fig. 27. Os coeficientes da série são encontrados através de

$$a_n = (\text{bolhas de vácuo conexas}). \quad (434)$$

Até a ordem g^3 (os diagramas que nela contribuem estão na Fig. 26), as integrais sobre os propagadores levam à construção do resultado

$$E = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{g}{4}\right) - \frac{21}{8} \left(\frac{g}{4}\right)^2 + \frac{333}{16} \left(\frac{g}{4}\right)^3 + \mathcal{O}(g^4), \quad (435)$$

que está de acordo com a teoria de perturbação de Rayleigh-Schrödinger. Quando n é grande, observa-se que os coeficientes a_n crescem fatorialmente. O motivo por trás disso vem do crescimento fatorial no número de diagramas. É possível enxergá-lo desenvolvendo a_n como uma soma sobre gráficos conexos com n vértices quárticos. Matematicamente,

$$\frac{1}{n!} \langle (x^4)^n \rangle^{(c)}, \quad (436)$$

onde o índice sobrescrito significa que só é aproveitada a parte conexa da média. Sabendo que

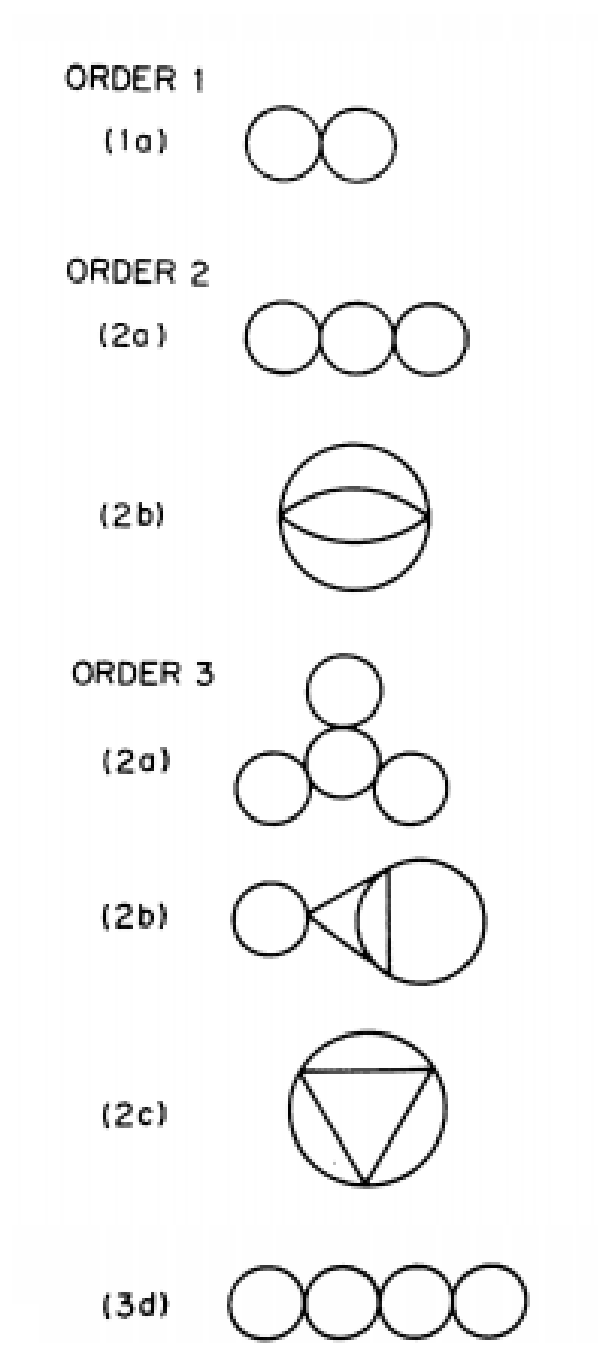
$$\langle x^{2k} \rangle = (2k - 1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad (437)$$

então é fácil ver que

$$\frac{1}{n!} \langle (x^4)^n \rangle = \frac{(4n - 1)!!}{n!} = \frac{(4n)!}{4^n n! (2n)!}, \quad (438)$$

que se comporta como $4^{2n} n!$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, existe um crescimento fatorial no número de diagramas desconexos. Um pensamento rápido e despretenhoso que pode passar por alguém que leia tal informação é o de que o número de diagramas *conexas* é bem menor do que o encontrado acima. Todavia, segundo Bender e Caswell (1978), para n grande, quando se divide o número de diagramas conexos pelo de desconexos, o resultado difere apenas por 1 em correções $\mathcal{O}(1/n)$. A conclusão é de que por volta de $n!$ diagramas contribuem para a_n , e que se obtém uma série de potências divergente, formal.

Figura 26 - Diagramas de bolha conexos do oscilador quártico.



Legenda: Diagramas de Feynman que contribuem para a energia de estado fundamental do oscilador quártico até a ordem g^3 . Os números precedendo as letras latinas indicam a ordem $n = 1, 2$ ou 3 .

Fonte: BENDER; WU, 1969, p. 1247.

Adaptada pela autora.

Figura 27 - Regras de Feynman do oscilador quártico.

$$\begin{array}{ccc}
 \tau \longrightarrow \tau' & & \frac{e^{-|\tau-\tau'|}}{2} \\
 \\
 \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} & & -\frac{g}{4}
 \end{array}$$

Legenda: Regras de Feynman do oscilador quártico.

Fonte: MARINHO, 2014, p. 481.

O máximo que esta pode oferecer é uma expansão assintótica da verdadeira energia de estado fundamental³⁴.

Visando trabalhar com um análogo de transsérie para um problema desse tipo, pode ser explorada a conhecida informação de que existem contribuições de íntanton para a função de partição. Continuando com o oscilador quártico e supondo que a constante de acoplamento seja negativa ($g = -\lambda$), com $\lambda > 0$, a equação de movimento é

$$-\ddot{x}(t) + x(t) - \lambda x^3(t) = 0. \quad (439)$$

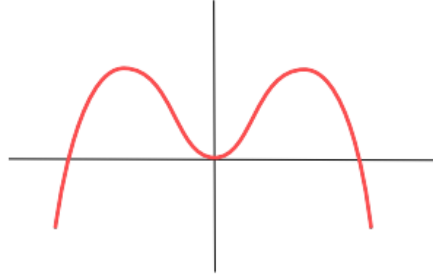
A trajetória correspondente é

$$x_c(t) = \pm \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{1/2} \frac{1}{\cosh(t - t_0)}, \quad (440)$$

resultado obtido tomando $E = 0$ e o limite $\beta \rightarrow \infty$. Na literatura, é frequente a utilização deste exemplo para introduzir o assunto, seguida da figura do potencial invertido, $-V(x)$, que é uma maneira de interpretar a solução na ação euclidiana. O íntanton age como uma partícula se movimentando no potencial invertido entre a origem e o ponto de sela não-trivial $(2/\lambda)^{1/2}$, que é instável, porque possui um modo negativo — único, mas problemático. Isto quer dizer que a contribuição do íntanton é imaginária. Especificamente, o cálculo de um íntanton expõe a descontinuidade da função de partição para valores negativos do acoplamento.

³⁴ Não-perturbativa, e definida em termos do espectro exato do operador de Schrödinger.

Figura 28 - Potencial invertido do
oscilador anarmônico
quártico



Fonte: MARIÑO, 2014, p. 484.

$$\text{disc}Z(-\lambda) = Z(-\lambda + i\epsilon) - Z(-\lambda - i\epsilon) = 2i\text{Im}Z(-\lambda). \quad (441)$$

É de se esperar que a energia de estado fundamental, como uma função do acoplamento, também tenha uma descontinuidade. No caso do oscilador quártico, a 1 loop,

$$\text{disc}E(-\lambda) = 2i\text{Im}E(-\lambda) \approx \frac{8i}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-A/\lambda}, \quad (442)$$

onde $A = 4/3$ é a ação de (440) para $\lambda = 1$. Qual seria a interpretação dessa correção imaginária para a energia? Como o potencial é instável, a partícula no seu estado fundamental é capaz de tunelar.

O cálculo feito é apenas uma aproximação a 1 loop do setor de um íntanton. Entretanto, se o objetivo passa a ser mais ambicioso, de considerar expansões de multi-íntantons para todos os loops, então a expectativa da estrutura de transsérie para a energia de estado fundamental é da forma

$$E(g) = \sum_{l=0}^{\infty} C^l E^{(l)}(g), \quad (443)$$

onde a $E^{(0)}$ é a série perturbativa e os $E^{(l)} \propto e^{-lA/g}$ restantes são as correções de l -íntantons. No exemplo que tem sido explorado, do oscilador quártico, a estrutura é

$$E^{(l)}(-z) = z^{l\beta} e^{-lA/z} \sum_{n=0}^{\infty} a_{l,n} z^n. \quad (444)$$

Muito da estrutura que aparece em ODEs pode ser estendida para a análise de potenciais na MQ em uma dimensão. Uma referência para o cálculo de energias de estados ligados na MQ é Delabaere, Dillinger e Pham (1997), a partir da página 6173.

Com a finalidade de compreender o comportamento em altas ordens da série (429), deve-se considerar ressonâncias laterais de $E(g)$ ao longo do eixo real negativo. A diferença entre as mesmas corresponde à descontinuidade $\text{disc}E(-\lambda)$ e a equação (442) é interpretada como análoga à do caso (69) na teoria de ODEs, indicando que a expansão assintótica dessa diferença é dada pela correção, para a energia, de primeiro íntanton em alta ordem. Matematicamente,

$$S_+[B(E)](-z) - S_-[B(E)](-z) \approx S_1 E^{(1)}(z). \quad (445)$$

A 1 loop o resultado assintótico é

$$S_+[B(E)](-z) - S_-[B(E)](-z) \approx \frac{8i}{\sqrt{2\pi z}} e^{-4/3z}. \quad (446)$$

Em particular, fica evidente que o coeficiente deste cálculo oferece o parâmetro de Stokes do problema. Mais ainda pode ser extraído, assim como no caso de ODE: o comportamento em alta ordem dos coeficientes a_n em (429). Ao escrever

$$S_1 E^{(1)}(-z) = iz^\beta e^{-A/z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (447)$$

o crescimento assintótico é encontrado,

$$a_n \sim \frac{(-1)^{n+1} A^{-n+\beta}}{2\pi} \Gamma(n-\beta) \left\{ c_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{l+1} A^l}{\prod_{m=1}^l (n-\beta-m)} \right\}. \quad (448)$$

Percebe-se a presença do fator $(-1)^{n+1}$ devido ao fato de que a expansão perturbativa foi feita na variável $g = -z$. Substituindo os valores concretos para o oscilador anarmônico quártico,

$$\beta = -\frac{1}{2}, \quad c_0 = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad A = \frac{4}{3}, \quad (449)$$

é encontrado para comportamento de alta ordem

$$a_n \sim (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{3}{4}\right)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (450)$$

Este resultado foi obtido pela primeira vez por Bender e Wu (1969) através do estudo numérico dos primeiros 75 coeficientes. Ainda foram capazes de caracterizar a forma exata do pré-fator na Eq. (450). Posteriormente, em Bender e Wu (1973), mostraram que o resultado (450) pode ser obtido analiticamente através do setor de um íntanton.

Embora o exemplo aqui tratado apresente íntanton real, geralmente os problemas unidimensionais de MQ envolvem soluções de íntanton complexas, com ações também

complexas. A consequência disso é uma série perturbativa Borel somável com caráter ondulatório. A influência sobre o comportamento de altas ordens é exercida pelos instantons com ação de menor valor absoluto, sendo que a fase da ação determina o período de oscilação da série.

No caso do oscilador anarmônico quártico com constante de acoplamento g positiva, o estado fundamental é estável, então a solução de instanton só aparece quando se inverte o sinal de acoplamento. Isso leva a uma série perturbativa para g positivo que é alternada e Borel somável. Pode-se dizer que há dois tipos de situação em que não há somabilidade de Borel: o primeiro caso é uma série perturbativa em torno de um mínimo instável, como o oscilador quártico com $g < 0$. Uma situação diferente é ilustrada pelo potencial de poço duplo, em que existe um estado fundamental estável, mas a série perturbativa não é Borel somável, então a saída é recorrer a uma ressonância lateral de Borel.

Existem sérias dificuldades para estender as propriedades estudadas até agora no sentido da TQC. Primeiramente, talvez a mais importante seja o fato de que há outras fontes de divergência fatorial na série perturbativa em TQCs renormalizáveis, chamadas de renormalons. São tipos específicos de diagrama que divergem fatorialmente ao integrar sobre momenta (na integral de Feynman), constituindo uma nova fonte de singularidades. Felizmente, os efeitos dos renormalons são ausentes em certas TQCs, como Chern-Simons.