



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Nathan de Oliveira Silvano

Buracos Negros na Teoria de Horndeski

Rio de Janeiro

2020

Nathan de Oliveira Silvano

Buracos Negros na Teoria de Horndeski



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Maier

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586

Silvano, Nathan de Oliveira,
Buracos negros na teoria de Horndeski / Nathan de
Oliveira Silvano. - 2020.
79 f.: il.

Orientador: Rodrigo Maier.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Buracos negros (Astronomia) - Teses. 2. Relatividade
geral (Física) - Teses. 3. Einstein, Equações de - Teses.
Cosmologia - Teses. I. Maier, Rodrigo. II. Universidade do
Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias
III.Título.

CDU 524.88

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Nathan de Oliveira Silvano

Buracos Negros na Teoria de Horndeski

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 16 de julho de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rodrigo Maier (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dra. Marcela Campista Borges de Carvalho
Observatorio Nacional

Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2020

RESUMO

SILVANO, N.O. *Buracos Negros na Teoria de Horndeski*. 2020. 79 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Nesta dissertação temos como objetivo estudar buracos negros na teoria de Horndeski. Impondo simetria esférica, obtemos uma solução estática e assintoticamente plana para as equações de Einstein onde o termo de matéria é devido a um campo de Horndeski. A extensão maximal é construída em dois domínios particulares do espaço paramétrico. Com o intuito de delimitar o domínio físico para os parâmetros da teoria, inferimos as correções para os teste da RG em escala do sistema solar - em específico para o avanço do perihélio planetário e para deflexão da luz. Por último determinamos a correção para a entropia e para temperatura Hawking nos mesmos domínios de parâmetros da extensão maximal.

Palavras-chave: Teoria de Horndeski. Teorema *no hair*. Buracos Negros.

ABSTRACT

SILVANO, N.O. *Black Holes in Horndeski Theory*. 2020. 79 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

In this dissertation we aim to study black holes in Horndeski's theory. By imposing spherical symmetry, we obtain a static and asymptotically flat solution for Einstein's equations where the term of matter is due to a Horndeski field. The maximal extension is constructed in two particular domains of parametric space. In order to delimit the physical domain for the parameters of the theory, we infer corrections for the RG tests in scale of the solar system - specifically for the planetary perihelion advance and for light deflection. Finally, we determine the correction for entropy and for Hawking temperature in the same parameter domains of the maximal extension.

Keywords: Horndeski Theory. No-hair theorem. Black Hole.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Espaço-Tempo Eddington-Finkelstein.	18
Figura 2	- Espaço-tempo de Kruskal-Szekeres	20
Figura 3	- Diagrama de Penrose.	22
Figura 4	- Reissner-Nordstrom Regiões.	26
Figura 5	- Diagrama de Penrose para Reissner-Nordstrom.	27
Figura 6	- Soluções para ϕ' para o caso $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$	35
Figura 7	- Plot de $f(r) = 0$ para $q > 0$	51
Figura 8	- Plot de $f(r) = 0$ para $q < 0$	52
Figura 9	- Projeção de pares (m, q) no plano $r = 0$	53
Figura 10	- Espaço-Tempo de Kruskal para $q > 0$	53
Figura 11	- Diagrama de Penrose para $q > 0$	54
Figura 12	- Diagrama de Penrose para $q < 0$	55

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FRLW	Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker
PE	Principio de Equivalência
STEP	Satellite Test of the Equivalence Principle
TQC	Teoria Quântica de Campos
TRG	Teoria da Relatividade Geral

CONVENÇÕES E NOTAÇÃO

G	Constante Gravitacional de Newton
Λ	Constante Cosmológica
c	Velocidade da luz no vácuo
$a(t)$	Fator de escala
$(-1, 1, 1, 1)$	convenção da métrica
\mathbb{S}^D	D-Manifold Esférico
dS_D	de Sitter manifold D-dimensional
∇_μ	Derivada covariante em μ
m_g	Massa Gravitacional
m_i	Massa Inercial

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	12
1.1	Fundamentos	12
1.2	Equações de Campo de Einstein	13
1.3	A Solução de Schwarzschild	16
1.4	A Solução de Reissner-Nordstrom.	23
2	A TEORIA DE HORNDESKI	28
2.1	Lagrangiana de Galileon.	29
2.2	Estabilidade em Galileon.	32
2.2.1	<u>Acreção de Buraco Negro</u>	32
2.2.2	<u>Estabilidade</u>	34
2.3	Violações da Conjectura No Hair.	38
3	HORNDESKI HAIR	43
3.1	Solução Exata	44
3.2	Extensão Analítica	48
3.3	Testes da Teoria	54
3.3.1	<u>Avanço de Perihélio</u>	57
3.3.2	<u>Deflexão da Luz</u>	59
3.4	Temperatura Hawking	60
	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67
	ANEXO A – Variação da ação de uma Lagrangiana geral de galileon . .	71

INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Geral até hoje provou-se a melhor teoria disponível para descrever a gravitação como a conhecemos. Desde seu teste em Sobral (DYSON; EDDINGTON; DAVIDSON, 1920), quando comprovou através das chapas fotográficas que a luz era defletida por um campo gravitacional forte, a TRG é fundamental para o estudo da cosmologia e ainda hoje fomenta novas descobertas. Algumas das descobertas mais recentes sendo a comprovação da existência de ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2016), assim como da sombra de um buraco negro supermassivo na galáxia M87 (AKIYAMA et al., 2019).

Ainda assim, teorias alternativas de gravitação são investigadas e isto é importante por dois motivos. Primeiro, identificar todas as modificações que levem a patologias teóricas ou observacionais incompatíveis é uma abordagem relevante para compreender melhor porque a TRG é bem sucedida. Segundo, a TRG sofre com limitações e questões não resolvidas: em escalas cosmológicas, não fornece uma explicação satisfatória para o problema da expansão acelerada do Universo, enquanto que em regimes de altas energias não possui uma descrição quântica unificada à outras interações fundamentais (ZEE, 2010).

Entretanto, o maior problema atual da TRG reside no fato de não ser capaz de explicar a expansão acelerada do Universo sem a presença de uma componente exótica de energia. Esta componente denominada energia escura, de natureza completamente desconhecida (CARROLL, 2001) é introduzida nas equações de movimento por meio da constante cosmológica (Λ). O uso da constante cosmológica traz consigo um problema na análise de seu valor. Ao compararmos seu valor inferido pela energia de vácuo pela TQC e pelo valor observado utilizando a TRG verificamos que existe uma discrepância de 120 ordens de grandeza (UNRUH, 2017). Tendo em vista o problema da falta de uma explicação para a expansão acelerada, podemos pensar em modificar a gravidade para além da TRG. Logo, de maneira inicial uma dificuldade para qualquer modificação em escalas cosmológicas é que a teoria precisa não só explicar a expansão acelerada tardia do Universo como também precisa recair na TRG em escalas locais.

A questão que permanece é como formular uma teoria modificada. De forma simplificada, temos ao menos quatro maneiras de realizar uma formulação lagrangiana que se proponha estender a RG onde simetrias fundamentais, como a simetria de Lorentz, não sejam quebradas. Primeiro: podemos preservar o tensor métrico (g) da RG e descrever a gravidade em dimensões superiores a 4. Para esta descrição podemos utilizar a Teoria de Lovelock. A teoria de Lovelock (LOVELOCK, 1971) é a mais relevante e geral para dimensões superiores e que em 4-D coincide com a TRG. Podemos ver a aplicação da Teoria de Lovelock nas teorias gravitacionais de Gauss-Bonnet (MODAK; BOSE, 2012).

O termo de Gauss-Bonnet é um termo puramente geométrico cuja contribuição para as equações de movimento em 4-D só pode ser notada quando acoplado à uma função escalar.

Segundo: podemos preservar a métrica e o espaço-tempo em 4-D. Inevitavelmente precisaremos supor a existência de novos campos para aumentar os graus de liberdade da teoria. Assim de forma simples temos as chamadas "*scalar-tensor theories*" (AMENDOLA; TSUJIKAWA, 2010) e sua forma mais geral é a teoria de Horndeski que iremos comentar com mais detalhes no capítulo 2.

Terceiro: podemos supor uma partícula mediadora de spin inteiro para a gravidade (*gráviton*) (WEINBERG; WITTEN, 1980). O problema deste formalismo é a escala reduzida com que podemos trabalhar, não servindo para descrever o espaço-tempo em escalas cosmológicas. Seria uma abordagem para corrigir a TRG no regime ultravioleta.

Quarto: podemos considerar a possibilidade de uma nova construção geométrica, como por exemplo Einstein-Cartan (TRAUTMAN, 2006), que possui uma conexão diferente da de Levi-Civita. Este tipo de construção permite a aparição de torsão que é um transporte paralelo para escalares diferente de zero. O fato do transporte paralelo ser diferente de zero está relacionado diretamente com o fato das componentes da conexão não serem mais simétricas $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \neq \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$. Podemos utilizar também o método de Palatini (TSAMPARLIS, 1978). Palatini é bastante utilizado pois matematicamente a métrica e a conexão são quantidades independentes, isto permite a análise do funcional de ação de forma diferente gerando dois conjuntos de equações, um para métrica e outro para a conexão.

Teorias gravitacionais modificadas visam prover respostas ou soluções alternativas para questões ou limitações, nos setores ultravioleta e infravermelho, da TRG. Porém a atual aplicabilidade de qualquer teoria de gravidade modificada é sustentada a partir de sua compatibilidade com vínculos observacionais existentes e viabilidade teórica, isto é, deve ser bem definida e estável. Por exemplo, tratando de vínculos observacionais em infravermelho, a TRG é sustentada por três pilares observacionais:

- 1) Expansão de Hubble (STSCI, 2020);
- 2) Nucleossíntese primordial (COC; VANGIONI, 2017);
- 3) Radiação Cósmica de fundo (AGHANIM et al., 2014).

Qualquer teoria da gravidade modificada, deve estar em completo acordo com esses três pilares. Recentemente a detecção das ondas gravitacionais *GW170817* e sua contra parte eletromagnética *GRB170817A* podem ser utilizadas para restringir ainda mais os vínculos na velocidade das ondas gravitacionais obtidas por uma teoria modificada.

Os chamados teoremas *no hair* fornecem outro tipo de argumento para avaliar a relevância de uma dada teoria modificada. Estes teoremas destacam condições sob as quais buracos negros de uma teoria modificada apresentam (ou não) cabelo divergindo assim da família de soluções de Kerr-Newman da TRG. Um exemplo típico é o de Brans-Dicke que fornece soluções idênticas a TRG, apesar de conter um campo escalar em

sua descrição lagrangiana. Esta dissertação baseia-se, principalmente, nos trabalhos de (BABICHEV; CHARMOUSIS; LEHÉBEL, 2017) e (HUI; NICOLIS, 2013). Os autores, em seus respectivos trabalhos, estabelecem que:

- (i) Deve existir um buraco negro esfericamente simétrico e assintoticamente plano;
- (ii) ϕ' (onde $'$ denota derivada com relação a coordenada r) deve tender a zero no infinito;
- (iii) A norma da 4-corrente $j^\mu j_\mu$ é finita no horizonte;
- (iv) Deve existir um termo cinético canônico $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ na ação;
- (v) As derivadas com respeito a X das funções G_i são da forma que contém somente potências positivas ou de ordem zero de X quando $X \rightarrow 0$ (e $r \rightarrow +\infty$).

Estas condições devem ser respeitadas para que haja um teorema *no hair* para a Teoria de Horndeski. O objetivo deste trabalho é dar continuidade aos trabalhos de (BABICHEV; CHARMOUSIS; LEHÉBEL, 2017) e (HUI; NICOLIS, 2013), encontrando uma solução estática esfericamente simétrica e assintoticamente plana com cabelo violando uma das condições estabelecidas.

No capítulo 1, faremos uma introdução rápida da TRG visando descrever de forma sucinta sua formulação e aplicação física e matemática. No capítulo 2, explicaremos de forma detalhada a importância da teoria de Horndeski e como ela se relaciona com as funções de galileons G_i . Descreveremos a formação e estabilidade de buracos negros na Teoria de Horndeski mostrando ser possível encontrar soluções estáveis. Discutiremos resultados já existentes na literatura para a conjectura *no hair* em Horndeski. No capítulo 3, obteremos uma solução analítica esfericamente simétrica e assintoticamente plana através de uma escolha apropriada dos parâmetros das funções de Horndeski. Estudaremos sua extensão analítica e a temperatura Hawking para o modelo. Finalizaremos mostrando ser possível encontrar correções para avanços de perihélios planetários e de deflexão de luz.

1 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

1.1 Fundamentos

A Relatividade Geral (RG) é uma teoria da gravidade baseada em uma fundação tanto física quanto matemática posta à testes diversas vezes (DYSON; EDDINGTON; DAVIDSON, 1920) (COLLETT et al., 2018) (ABBOTT et al., 2016). A RG foi desenvolvida por Einstein em 1915 de modo a incorporar a gravidade à relatividade restrita. Do ponto de vista físico a RG é fundamentada nos seguintes princípios:

- No Princípio de Equivalência (PE): que determina que localmente a métrica que descreve o espaço-tempo é Minkowski onde efeitos inerciais são indistinguíveis de efeitos gravitacionais.
- No Princípio de Covariância Geral (PC): que determina que leis físicas devem ser invariantes sob transformações gerais de coordenadas.
- No Princípio de Mach (PM): que diz que a geometria em um ponto do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria em todo o Universo.

Atualmente sabemos que a RG não está totalmente de acordo com PM (OZSVÁTH, 1997), tendo o próprio Einstein abandonado sua utilização em trabalhos posteriores como fundamento para RG. Porém o PM foi importante para guiar Einstein a pensar que efeitos inerciais são manifestações do espaço-tempo e que a geometria não é mais euclidiana como em Newton, adquirindo um comportamento dinâmico. O princípio de covariância geral não é algo exclusivo da RG, visto que qualquer teoria pode ser formulada com um PC. Sendo assim, o PE é o principal Princípio que sustenta a RG. Violar o PE significa encontrar correções para a razão m_g/m_i . Existem diversos trabalhos que discutem os limites de PE e propõem experimentos para testá-los. Por exemplo o STEP que procura encontrar violações estudando a queda livre de objetos (OVERDUIN et al., 2012).

Do ponto de vista matemático a RG é definida em um 4 -*manifold* pseudo-Riemanniano (M) equipado com um tensor métrico (g) de assinatura $(3,1)$ e com uma conexão de Levi-Civita (∇) que preserva as componentes do tensor métrico. As propriedades matemáticas que sustentam os princípios de equivalência e covariância que definem a RG são respectivamente:

- As transformações de Lorentz locais $SO(3, 1; \mathbb{R})$ das tetradas;
- Simetria por *Pullbacks* pelo grupo $Diff(M)$ de difeomorfismos definidos globalmente.

A conexão de Levi-Civita é importante pois existe uma diferença conceitual entre

geodésica métrica e geodésica afim. A geodésica métrica é a distância entre dois pontos e ela é obtida diretamente a partir do princípio de mínima ação. Enquanto que a geodésica afim é uma distância com um vetor tangente covariantemente constante que descreve uma trajetória não acelerada. A geodésica afim e a geodésica métrica são iguais somente com a conexão de Levi-Civita. As componentes da conexão de Levi-Civita são unicamente determinadas pelo símbolo de Christoffel do segundo tipo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}), \quad (1)$$

desde que satisfaça as propriedades:

- de ser simétrica $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}$;
- de possuir métrica compatível $\nabla_{\mu}g_{\nu\rho} = 0$.

O trabalho de Einstein culminou na conclusão que o tempo e espaço são influenciados pela distribuição de matéria e radiação presente. A RG foi de suma importância para o desenvolvimento da gravitação no século 20 por descrever o comportamento de sistemas submetidos a fortes interações gravitacionais com precisão (ex. sistemas binários), por prever a existência de Buracos Negros e de Ondas Gravitacionais (ambos fenômenos recentemente observados (ABBOTT et al., 2016)(AKIYAMA, 2019)). A RG também está de acordo com a teoria Newtoniana, pois nos limites em que o campo gravitacional é fraco, é possível retomar a gravitação de Newton.

1.2 Equações de Campo de Einstein

A RG explica a gravidade como a curvatura do espaço-tempo. Como mencionamos anteriormente, a ideia básica é que a distribuição de energia curva o espaço-tempo. Se pensarmos que a RG é uma teoria que visa descrever a interação gravitacional levando em conta efeitos relativísticos é razoável supor que a nova equação deva retomar à equação de Poisson para o potencial newtoniano em limites de campo fraco:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2)$$

Logo a equação que descreve a RG deve atender duas condições:

- (i) No lado esquerdo da igualdade, deve ser de segunda ordem no análogo relativístico ao potencial e ao lado direito deve conter a distribuição de matéria.
- (ii) Deve incluir o tempo numa descrição 4-dimensional.

Por precisarmos incluir o tempo como uma coordenada, o uso da geometria diferencial é extritamente necessário. O análogo direto do potencial Φ na geometria diferencial é a métrica $g_{\mu\nu}$. O objeto tensorial responsável por descrever a distribuição de energia é

o tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$)(REZZOLLA; ZANOTTI, 2013). Um caso particular é o tensor energia-momento para um fluido perfeito, definido como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3)$$

onde ρ é a densidade, p é a pressão de um fluido com 4-velocidade u_μ . Por outro lado, o tensor responsável por carregar a conexão e as derivadas segundas da métrica é o tensor de curvatura de Riemann:

$$R_{\mu\sigma\nu}^\rho = \partial_\sigma \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda. \quad (4)$$

Deste, obtemos o tensor de curvatura de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho = \partial_\rho \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\mu}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda, \quad (5)$$

este último sendo dimensionalmente compatível com $T_{\mu\nu}$. Entretanto, apesar de sua dimensionalidade, não podemos simplesmente relacionar o tensor de Ricci com o tensor de energia momento:

$$R_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Devido ao fato de que o tensor energia momento deve respeitar a equação covariante de continuidade:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (7)$$

isso implicaria que:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0. \quad (8)$$

Certamente (8) não é verdade pois utilizando a identidade de Bianchi temos:

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\nu R. \quad (9)$$

Conseqüentemente, escolhemos outro tensor dimensionalmente compatível com $T_{\mu\nu}$ que seja covariantemente diferenciável. Este tensor é o denominado tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$. Desta forma, assumindo unidades de $c = 1$, a equação de Einstein da RG é descrita como:

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (10)$$

onde κ^2 é a constante de acoplamento que retoma a gravitação newtoniana no limites em que o campo gravitacional é fraco. Com a equação (10) vemos que:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (11)$$

Atualmente a equação de Einstein (10) é derivada diretamente da ação de Einstein-Hilbert:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2} \right\}. \quad (12)$$

Variando a ação em relação a métrica $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[(\delta\sqrt{-g}) \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{-g}}{2} \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \right] \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{2} + \delta R_{\mu\nu} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \right] \sqrt{-g}. \\ \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{G_{\mu\nu}}{2} \right\} \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \frac{g^{\mu\nu}}{2}. \\ \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{G_{\mu\nu}}{2} \right\} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

O termo destacado pode ser resolvido utilizando a propriedade (245) localizada no Apêndice:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} \frac{g^{\mu\nu}}{2} &= 0. \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ g^{\mu\nu} \nabla_\sigma \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \}. \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - (\nabla_\sigma g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) + (\nabla_\nu g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma \}. \end{aligned}$$

O termo $\nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma)$ é nulo pois trata-se de um termo de superfície. O termo $(\nabla_\sigma g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é nulo pela definição de compatibilidade da métrica.

A equação (10) é a equação de campo de Einstein, responsável por conectar a matéria com a gravidade no Universo. Na cosmologia, quando o objeto de estudo é o Universo, devemos ressaltar que a representação da Equação (10) conta com a adição da constante cosmológica (Λ):

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (13)$$

No entanto, em sistemas locais como sistemas solares, estrelas ou buracos negros, costuma-se usar diretamente a equação (10). Pois, assume-se *a priori* que tais objetos não são

influenciados por campos presentes no estudo do Universo em larga escala (como é o caso do campo de expansão acelerada provocado por Λ). Entretanto, historicamente a adição do termo da constante cosmológica (Λ) foi feita por Einstein para manter o universo estático. Uma vez que sem Λ o Universo estaria em um equilíbrio instável onde qualquer perturbação causaria o seu colapso, o que Einstein acreditava não ser possível. Somente após a observação de Hubble de que o universo estava em movimento esse termo foi retirado do teoria. A explicação da expansão observada por Hubble foi feita pelo matemático Friedmann através das equações de Einstein que não possuíam constante cosmológica incluída na ação. O termo da constante cosmológica só voltou a ser considerado no final do século 20 devido as observações ((RIESS; FILIPPENKO, 1998)) da aceleração cósmica e a necessidade de considerar uma componente de energia escura para compatibilizar a TRG com as observações. Apesar da mudança de significado, de um termo que servia para manter o universo estático para um que gera sua expansão acelerada, a constante cosmológica faz parte do modelo padrão desde então e seu real significado e origem ainda é estudado.

1.3 A Solução de Schwarzschild

Dois meses após Einstein descrever suas equações de campo, em 1915, Karl Schwarzschild encontrou a primeira solução para buracos negros estáticos esfericamente simétricos no vácuo. A solução de Schwarzschild é extremamente importante pois Birkhoff em 1923 mostrou por um teorema, conhecido como teorema de Birkhoff, que a solução de Schwarzschild é a única solução possível de (10) para um espaço-tempo esfericamente simétrico no vácuo (WEINBERG, 1972).

O elemento de linha para a solução de Schwarzschild em coordenadas esféricas(t, r, θ, ϕ) é:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2); \quad (14)$$

onde $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e M é a massa gravitacional total do sistema.

Entretando, a métrica (14) apresenta problemas *per se*. Analisando a função métrica g_{tt} vemos que em $r = 0$ existe uma singularidade pois o espaço-tempo não é definido neste raio. De forma similar, em g_{rr} existe uma singularidade em $r = 2M$. Porém, somente uma delas representa uma singularidade física. Isto é demonstrado ao calcularmos o escalar de curvatura do espaço-tempo (R) para a métrica de Schwarzschild. Ao calcularmos R para o espaço-tempo de Schwarzschild obtemos $R = 48M^2/r^6$. Para $r = 2M$

temos um valor finito para R . Valores finitos para o escalar de curvatura para um dado raio não representam singularidades físicas. A singularidade física existe quando $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$. Em $r = 2M$ temos uma singularidade falsa que depende da escolha do sistema de coordenadas. De fato, o sistema de coordenadas que remove esta singularidade em $r = 2M$, conhecido como Eddington-Finkelstein (MISNER et al., 1973).

O sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein é importante para remover a singularidade, através dele podemos obter informações a respeito do buraco negro de Schwarzschild observando o comportamento dos raios de luz. Desta forma, para trocarmos o sistema de coordenadas realizamos uma parametrização:

$$v = t + r', \quad (15)$$

onde v é denominada *advanced null coordinate* e $r' = r + 2M \log \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$. Sabemos que os raios de luz movem-se em geodésicas nulas ($ds^2 = 0$). Tomando $d\theta = d\phi = 0$, escrevemos o elemento de linha como:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr = 0. \quad (16)$$

Imediatamente, vemos que uma solução desta equação é uma propagação em $v = cte$. Outra solução possível seria para

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv + 2dr = 0. \quad (17)$$

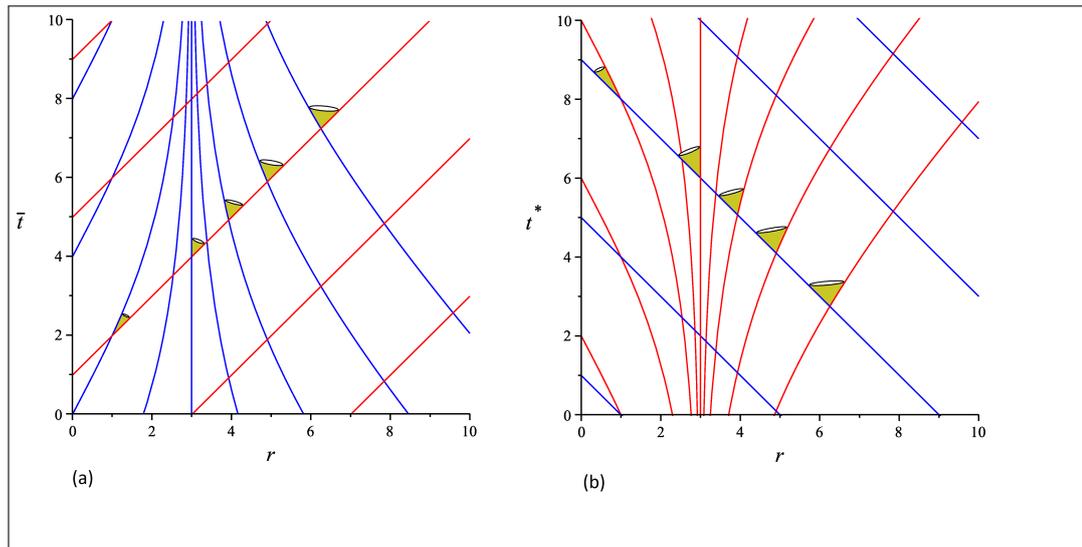
Equação (17) é resolvida separando as variáveis e obtemos o resultado:

$$v - 2 \left(r + 2M \log \left\| \frac{r}{2M} - 1 \right\| \right) = cte. \quad (18)$$

Como podemos observar na Fig:1, em $r = 2M$ temos uma superfície caracterizada pela função métrica $g_{tt} = 0$ que separa o espaço-tempo em duas regiões causalmente desconexas mostrando o comportamento dos raios de luz dentro e fora do horizonte de eventos. Fig:1b nos mostra que devido à distorção do espaço-tempo, quanto mais perto do horizonte um raio de luz for emitido maior será o tempo que ele levará para "escapar". Ainda mais importante, Fig:1a mostra que nenhuma partícula pode cruzar o horizonte de eventos de dentro para fora ou de fora para dentro. Retiramos de ambas figuras a informação de que raios de luz emitidos no horizonte de eventos *jamais deixam o horizonte de eventos*.

Entretanto, uma coisa que se deve sempre ter em mente é o fato da descrição de um espaço-tempo não ser exclusiva de um sistema de coordenadas. Devemos ter cuidado com qual a motivação e a utilidade em escolher um sistema de coordenadas, pois podemos deixar de interpretar aspectos físicos importantes escondidos no sistema escolhido. A

Figura 1 - Espaço-Tempo Eddington-Finkelstein.



Legenda: (a) coordenadas retardadas, linhas vermelhas geodésicas nulas, linhas azuis geodésicas tipo tempo; (b) coordenadas avançadas, linhas azuis geodésicas nulas, linhas vermelhas geodésicas tipo tempo.

Fonte: QUINZACARA;SALGADO,2012,p.12-13.

solução de Schwarzschild é a primeira solução encontrada para descrever como o espaço-tempo se comporta próximo ao buraco negro. Esta solução fornece informação sobre a assintoticidade plana em regiões distantes do horizonte e a órbita de partículas e raios de luz. Porém, por causa da singularidade em $r = 2M$ as coordenadas de Schwarzschild não são as mais adequadas para descrever o horizonte de eventos. Entretanto, as coordenadas de Eddington-Finkelstein fornecem uma visão clara da região interna e externa ao horizonte "conectando-as" em um único espaço-tempo. Desta forma, veremos que existe um sistema de coordenadas alternativo ao de Eddington-Finkelstein que nos fornece informações importantes que as coordenadas de Schwarzschild e EF não podem. O sistema em questão é denominado Kruskal-Szekeres(KS). Analogamente à Eddington-Finkelstein e a Schwarzschild, KS possui a mesma componente angular θ, ϕ . No entanto, as coordenadas t, r são substituídas simultaneamente pelas transformações de coordenadas avançadas (15) e retardadas $u = t - r'$. Escrevemos assim o elemento de linha de KS como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dvdu + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2); \quad (19)$$

onde $u, v \in (-\infty, +\infty)$.

Entretanto, a equação (19) escrita em duas coordenadas nulas ainda apresenta problemas em $r = 2M$. Esse problema é contornado realizando uma nova parametrização:

$$U = -4Me^{-u/4M}; \quad V = 4Me^{v/4M}. \quad (20)$$

Em coordenadas U, V temos o elemento de linha como:

$$ds^2 = -\frac{2M}{r}e^{-r/2M}dVdU + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (21)$$

onde $U \in (-\infty, 0]; V \in [0, +\infty)$.

Este sistema é contínuo uma vez que o raio é determinado por:

$$16M^2 \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} = -UV. \quad (22)$$

Para obtermos uma melhor interpretação do gráfico do espaço-tempo, reintroduzimos coordenadas tipo tempo e tipo espaço. Em coordenadas de Kruskal-Szekeres existem dois pares de transformações, uma para cada região desconexa do espaço-tempo:

• $r > 2M$:

$$R = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} \exp \left[\frac{r}{4M} \right] \cosh \left(\frac{t}{4M} \right) = \frac{1}{2}(V + U);$$

$$T = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} \exp \left[\frac{r}{4M} \right] \sinh \left(\frac{t}{4M} \right) = \frac{1}{2}(V - U).$$

• $r < 2M$:

$$R = \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{r}{4M} \right] \sinh \left(\frac{t}{4M} \right) = \frac{1}{2}(V - U);$$

$$T = \left(1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{r}{4M} \right] \cosh \left(\frac{t}{4M} \right) = \frac{1}{2}(V + U).$$

Deste par de equações retiramos duas relações importantes para fazermos um mapeamento das coordenadas de Kruskal nas coordenadas de Schwarzschild. A primeira equação sendo:

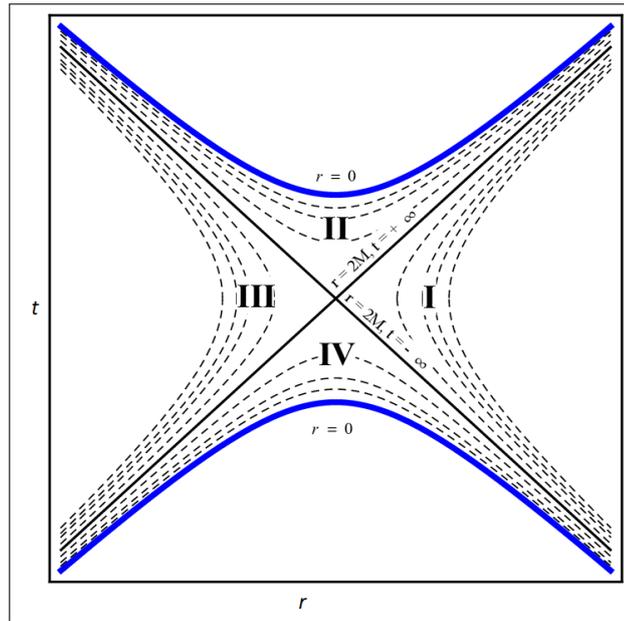
$$\tanh(t/4M) = \frac{R}{T} \rightarrow r < 2M; \quad (23)$$

$$\tanh(t/4M) = \frac{T}{R} \rightarrow r > 2M. \quad (24)$$

A segunda que relaciona o raio:

$$R^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \exp(r/2M). \quad (25)$$

Figura 2 - Espaço-tempo de Kruskal-Szekeres



Legenda: Regiões III e IV extensão maximal
das regiões I e II.

Fonte: MENEZES, 2016, p.105008

Além destas, obtemos também o elemento de linha invariante escrito como:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \exp(-r/2M)(-dT^2 + dR^2) + d\Omega^2. \quad (26)$$

Após estas transformações a métrica (26) descreve o espaço-tempo separado por 4 regiões cuja representação é vista na Fig:2.

Região II: Como vemos na Fig:2 qualquer sinal de luz emitido na região II permanecerá ali e cairá na singularidade. Dessa forma, a região II descreve o que comumente se denomina buraco negro. As retas que partem da origem são obtidas pela equação (23) para valores de $t = cte$ no intervalo $0 < t < \infty$:

As hipérbolas são obtidas pela equação (25) para valores constantes do raio no intervalo de $0 < r < 2M$. Limitadas superiormente pela hipérbole:

$$T = \sqrt{R^2 + 1}; \quad (27)$$

esta hipérbole para $r = 0$ limita o espaço-tempo e a região superior é inacessível.

Região I: corresponde ao espaço-tempo fora do horizonte. Análogo a região II as hipérbolas são regiões de $r = cte$ e as retas de $t = cte$. A diferença é que a equação (24) descreve as retas no intervalo $-\infty < t < \infty$ e as hipérbolas pelo intervalo $2M < r < \infty$;

Região IV: Região análoga a região II, porém com simetria de reversão temporal.

A região IV tem o mesmo comportamento da região II. De fato, o ponto (r, t) em uma região física do espaço-tempo é mapeado em dois pontos do plano (R, T) [região II] e $(-T, -R)$ [região IV]. Assim, haveria uma interpretação em que a região II conectaria dois universos, o universo II e o IV. No entanto, buracos negros estáticos (de Schwarzschild) não tem trajetórias do tipo tempo que conectem os dois universos e esta conexão entre as regiões seria puramente tipo espaço. Na solução para extensão maximal de Kruskal, esta é a segunda singularidade em $r = 0$. Esta singularidade para T negativo é chamada de "time reversal black hole", ou apenas de Buraco Branco. Significa que partículas podem escapar de um mas nunca voltar.

Região III: Extensão maximal do espaço-tempo com reversão temporal fora da singularidade em $r = 2M$.

Como vimos, no sistema de coordenadas de Kruskal-Szekeres temos duas singularidades definidas em:

$$T = +(1 + R^2)^{1/2} \quad ; T = -(1 + R^2)^{1/2}, \quad (28)$$

ambas correspondentes a $r = 0$.

Da mesma forma temos duas regiões fora do raio gravitacional:

$$R > +|T| \quad ; R < -|T| \quad (29)$$

ambas para $r > 2M$.

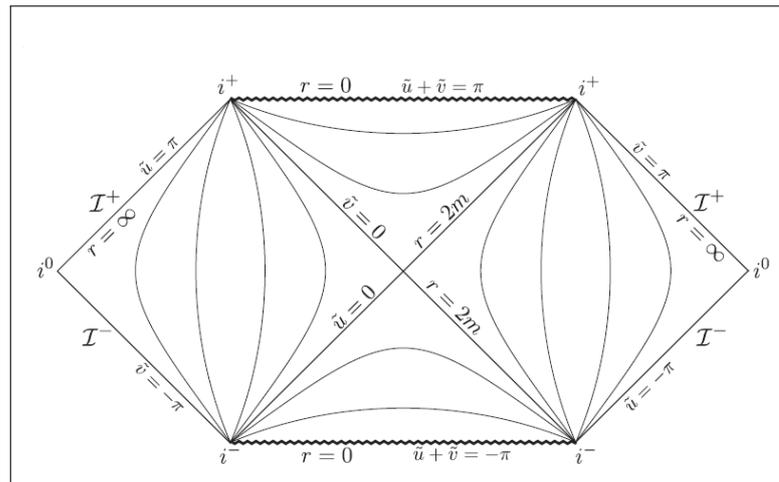
Isso acontece pois Schwarzschild e Eddington cobrem apenas parte do manifold do espaço-tempo. Schwarzschild e Eddington cobrem apenas as regiões I e II e não o manifold total. Enquanto que as coordenadas de Kruskal são uma extensão maximal do espaço-tempo de Schwarzschild.

Apesar das coordenadas de Kruskal conterem mais informações sobre o espaço-tempo próximo ao buraco negro podemos realizar um nova transformação conforme visando compactificar todo o espaço-tempo em um único diagrama. Para representarmos o diagrama é conveniente partirmos do elemento de linha (21) que lida com as duas coordenadas nulas, reescalando as coordenadas avançadas e retardadas da seguinte maneira:

$$\bar{u} = 2 \tan^{-1}(U/4M); \quad \bar{v} = 2 \tan^{-1}(V/4M), \quad (30)$$

onde, $-\pi < \bar{u} < \pi$, $-\pi < \bar{v} < \pi$, $-\pi < \bar{u} + \bar{v} < \pi$. Fig: 3 ilustra a estrutura global do espaço-tempo de Schwarzschild dentro do intervalo de parâmetros. Este processo simplesmente relaciona os intervalos infinitos das coordenadas r e t com os intervalos finitos das coordenadas \bar{u} e \bar{v} . O fato de Schwarzschild ser uma solução assintoticamente plana

Figura 3 - Diagrama de Penrose.



Legenda: Diagrama de Penrose para um espaço-tempo de Schwarzschild escrito em coordenadas \bar{u}, \bar{v} .

Fonte: GRIFFITHS;PODOLSKY, 2009, p.120

nos infinitos nos permite relacionar as curvas de r e t constantes com as curvas em um espaço-tempo de Minkowski. Sendo assim, um cone de luz desenhado em um diagrama de Penrose que representa o espaço-tempo de Schwarzschild compactificado é o mesmo cone de luz desenhado em um diagrama de Minkowski.

1.4 A Solução de Reissner-Nordstrom.

Descoberta no mesmo ano independentemente por Hans Reissner (REISSNER, 1916) e Gunnar Nordstrom (Nordström, 1918). A solução de Reissner-Nordstrom é uma das famosas soluções para as equações de campo de Einstein. A solução descreve um espaço-tempo esfericamente simétrico, estático e carregado. Atualmente, o Universo aparenta ser eletricamente neutro graças a conservação de carga (GOLDHABER; NIETO, 2010), tornando improvável encontrarmos objetos astronômicos com uma quantidade relevante de carga. Entretanto, a solução de Reissner-Nordstrom é relevante para termos uma maior compreensão da natureza do espaço-tempo.

A principal diferença que devemos levar em conta ao resolver a equação de Einstein (10) é a de que estamos encontrando uma solução para o vácuo com um campo eletromagnético.

O eletromagnetismo é definido pelas equações de Maxwell que em sua forma diferencial são escritas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad (31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (34)$$

Entretanto as equações de Maxwell também pode ser formuladas em um espaço-tempo de Minkowski. Graças a simetria de Lorentz contida em Minkowski os campos elétrico e magnético são tratados como componentes do tensor de Faraday ($F_{\mu\nu}$) (JACKSON, 2007). Desta forma reduzimos a descrição do eletromagnetismo de 4 equações para somente duas. A primeira equação homogênea:

$$\partial_{[\mu} F_{\nu]} = 0, \quad (35)$$

e a segunda inhomogênea:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu}. \quad (36)$$

Sendo assim, podemos separar o tensor energia momento em dois termos:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{matter} + T_{\mu\nu}^{EM}; \quad (37)$$

$$T_{\mu\nu}^{matter} = 0 \quad (\text{vácuo}); \quad (38)$$

$$T_{\mu\nu}^{EM} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - g_{\nu\beta} F_{\mu\alpha} F^{\nu\mu} \right). \quad (39)$$

Ao resolver a equação para esta configuração de espaço-tempo, obtemos a única solução possível descrita como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (40)$$

onde $r_s = 2m$ é o raio de Schwarzschild e $r_Q^2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}$. Não devemos confundir r_Q sendo o raio de Reissner-Nordstrom. O raio de Reissner-Nordstrom é determinado por:

$$g_{tt} = 0 \rightarrow r^2 - rr_s + r_Q^2 = 0. \quad (41)$$

Desta equação temos duas configurações de horizontes de eventos para Reissner-Nordstrom:

$$r_+ = \frac{1}{2} \left(r_s + \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right); \quad (42)$$

$$r_- = \frac{1}{2} \left(r_s - \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2} \right). \quad (43)$$

Por conta de termos dois horizontes de eventos, podemos separar o espaço-tempo em três regiões:

- *A* : $0 < r < r_-$;
- *B* : $r_- < r < r_+$;
- *C* : $r_+ < r$.

Como pode ser visto em (CHANDRASEKHAR, 1998) podemos realizar uma análise maximal do espaço-tempo de Reissner-Nordstrom baseado nestas três regiões. Para isso, basta realizar uma transformação de coordenadas. Assim como no caso de Schwarzschild, utilizaremos uma transformação em duas coordenadas nulas:

$$u = t + r^*; \quad v = t - r^*; \quad (44)$$

onde:

$$r^* = \int \frac{1}{f(r)} dr, \quad f(r) = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}. \quad (45)$$

Escrevendo explicitamente r^* em função de r_+, r_- temos:

$$r^* = r + \frac{r_+^2 \log |r_- r_+|}{r_+ - r_-} - \frac{r_-^2 \log |r_- r_+|}{r_+ - r_-}. \quad (46)$$

Conseqüentemente, reescrevemos a métrica como:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dudv + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (47)$$

onde $\Delta = r^2 - rr_s + r_Q$.

Com a métrica escrita em coordenadas nulas e sendo o espaço-tempo assintoticamente plano, podemos representar o espaço-tempo com um diagrama de Penrose. Porém, diferente de Schwarzschild, a representação do diagrama nas coordenadas u, v em Reissner-Nordstrom é constituída por 3 regiões:

Região C: para $r_+ < r < +\infty \Rightarrow -\infty < r_* < +\infty$. Isto implica respectivamente em um intervalo:

$$\infty > u > -\infty; \quad -\infty < v < \infty \quad (48)$$

Região B: para $r_- < r < r_+ \Rightarrow -\infty < r_* < +\infty$. Esta região é análoga a região C. Porém como veremos se trata de um horizonte de eventos aparente. Isto implica respectivamente em um intervalo:

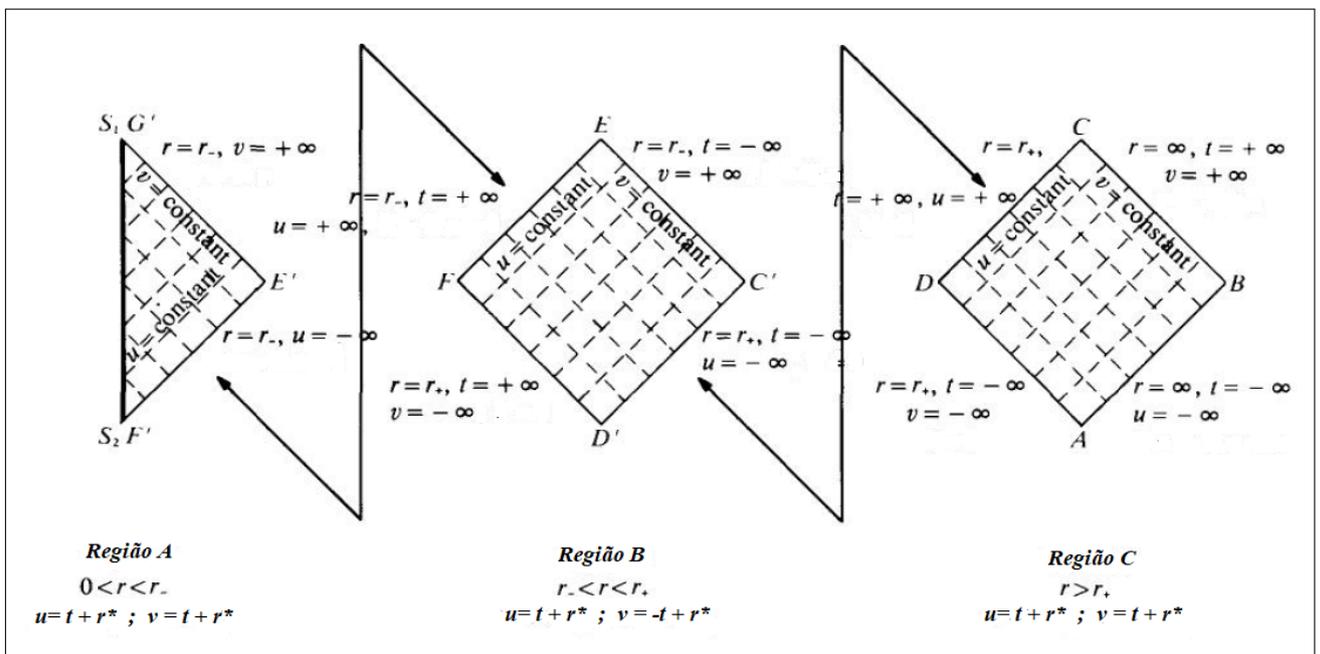
$$\infty > u > -\infty; \quad -\infty < v < \infty \quad (49)$$

Região A: para $0 < r < r_+ \Rightarrow -\infty < r_* < +\infty$. Esta região é análoga à região interna do buraco negro de Schwarzschild. Um observador nesta região convergirá para a singularidade em $r = 0$. Isto implica respectivamente em um intervalo:

$$-v \geq u > -\infty; \quad -u \leq v < \infty \quad (50)$$

Estas três regiões estão representadas na Fig:4 Podemos observar que é possível aplicar a transformação $u \rightarrow -u$ e $v \rightarrow -v$. Esta transformação fornece outro conjunto de regiões (A', B', C') revertendo a estrutura do cone de luz. A total representação do espaço-tempo de Reissner-Nordstrom pode ser vista na Fig:5. Nela vemos que o horizonte em r_+ funciona como um horizonte de eventos do mesmo jeito que $r_s = 2m$ em Schwarzschild. Porém o horizonte em r_- permite que um observador cruze tanto a região A quanto a região A'. Por permitir acesso a outro "Universo", r_- é denominado horizonte de Cauchy.

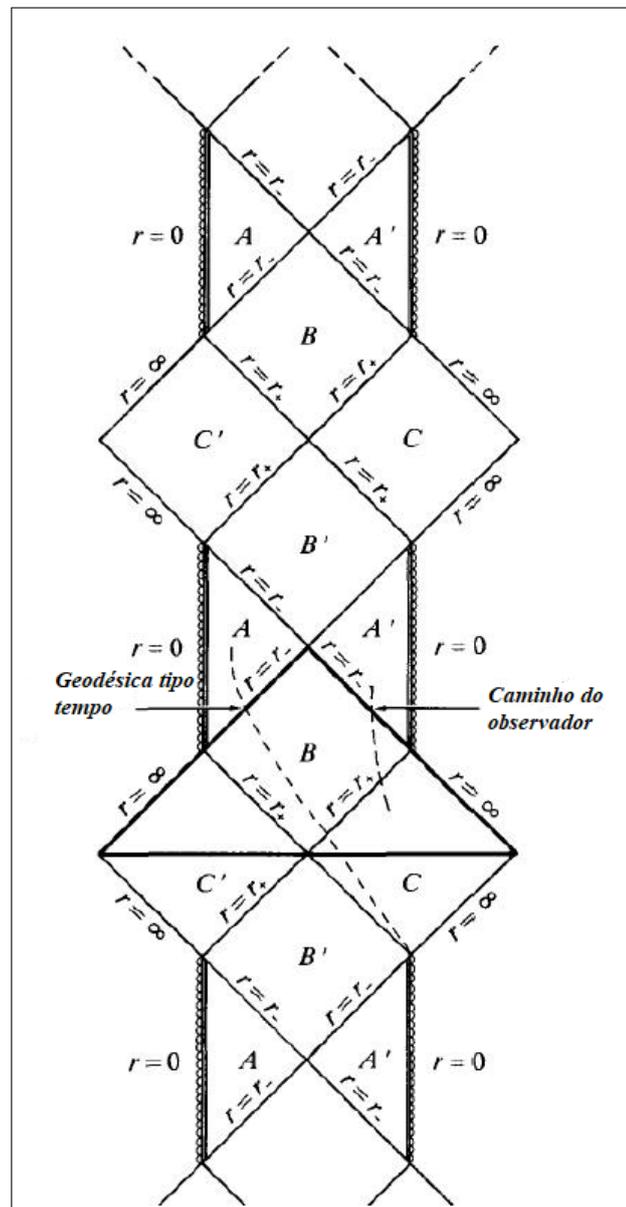
Figura 4 - Reissner-Nordstrom Regiões.



Legenda: Representação das três regiões do espaço-tempo descritas pela solução (1.4) em coordenadas u, v .

Fonte: CHANDRASEKHAR, 1985, p.211.

Figura 5 - Diagrama de Penrose para
Reissner-Nordstrom.



Legenda: As tres regiões A, B, C da Fig:4 estão conectadas. As regiões A', B', C' são obtidas pela transformação de coordenadas $u \rightarrow -u$ e $v \rightarrow -v$.

Fonte: CHANDRASEKHAR, 1985, p.212.

2 A TEORIA DE HORNDESKI

Tendo sido proposta primeiramente por Gregory Horndeski em 1974 (HORNDESKI, 1974), a teoria de Horndeski descreve todas as *scalar tensor theories* com equações de movimento de segunda ordem em um espaço-tempo curvo 4-dimensional (KOBAYASHI, 2019). A teoria é importante fisicamente pois a partir dela obtemos a teoria de Galileon, que é um subconjunto da teoria de Horndeski. Todas as funções de Galileon (para espaço-tempo plano) apareceram pela primeira vez sob o contexto de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) *braneworld model* (NICOLIS; RATTAZZI; TRINCHERINI, 2009). O Galileon é uma função escalar ϕ que age sob o corpo dos reais com simetria sob transformações de translação do tipo $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + b_\mu x^\mu + c$ (BROUZAKIS et al., 2014). O nome Galileon é referente à transformação entre referenciais de Galileu que em mecânica clássica diferem por uma constante relativa ao movimento. Porém, para o Galileon a simetria translacional acontece no próprio campo. Uma condição imposta em Horndeski para recairmos em Galileon é a de que as equações de movimento em ϕ sejam de segunda ordem (BABICHEV; CHARMOUSIS; LEHÉBEL, 2017). A importância das equações de movimento serem de segunda ordem pode ser explicada pela Instabilidade Ostrogradsky.

Instabilidade Ostrogradsky: A instabilidade de Ostrogradsky é um propagador "fantasma" (*ghost*) que surge em lagrangianas com derivadas temporais com ordens superiores a 2. Suponha um sistema cuja lagrangiana $L(x, \dot{x}, \ddot{x})$. A equação de Euler-Lagrange é:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0, \quad (51)$$

não degenerada significa $\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \neq 0$. Isto implica que a equação de Euler Lagrange tem uma forma completamente diferente da forma Newtoniana:

$$\ddot{x} = \mathcal{F}(x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathcal{X}(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0). \quad (52)$$

onde precisamos de 4 condições iniciais para resolvê-lo. Por exemplo, seja a lagrangiana:

$$L = -\frac{\epsilon m}{2\omega^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2. \quad (53)$$

A equação de Euler Lagrange e sua solução são:

$$0 = -m \left[\frac{\epsilon}{\omega^2} \ddot{x} + \ddot{x} + \omega^2 x \right], \quad (54)$$

$$x(t) = C_+ \cos k_+ t + S_+ \sin k_+ t + C_- \cos k_- t + S_- \sin k_- t; \quad (55)$$

onde as frequências são:

$$k_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}}, \quad (56)$$

e as constantes são funções de valores iniciais:

$$C_+ = \frac{k_-^2 x_0 + \dot{x}_0}{k_-^2 - k_+^2}, \quad S_+ = \frac{k_-^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_+(k_-^2 - k_+^2)} \quad (57)$$

$$C_- = \frac{k_+^2 x_0 + \dot{x}_0}{k_+^2 - k_-^2}, \quad S_- = \frac{k_+^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_-(k_+^2 - k_-^2)}. \quad (58)$$

Neste modelo, os momentos conjugados de Ostrogradsky são:

$$P_1 = m\dot{x} + \frac{\epsilon m}{\omega^2} \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{\omega^2 P_1 - m\omega^2 X_2}{\epsilon m}, \quad (59)$$

$$P_2 = -\frac{\epsilon m}{\omega^2} \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{\omega^2 P_2}{\epsilon m}. \quad (60)$$

Logo, podemos escrever a hamiltoniana em termos das variáveis canônicas no espaço de configurações como:

$$H = P_1 X_2 - \frac{\omega^2}{2\epsilon m} P_2^2 - \frac{m}{2} X_2^2 + \frac{m\omega^2}{2} X_1^2, \quad (61)$$

$$= \frac{\epsilon m}{\omega^2} \dot{x} \ddot{x} - \frac{\epsilon m}{2\omega^2} \ddot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2, \quad (62)$$

$$= \frac{m}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon} k_+^2 (C_+^2 + S_+^2) - \frac{m}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon} k_-^2 (C_-^2 + S_-^2). \quad (63)$$

Podemos ver pela última relação que os modos (+) carregam uma energia positiva enquanto que os modos (-) carregam uma energia negativa. Estes modos negativos de energia (*ghost*) são encontrados em qualquer lagrangiana desde que ela seja não degenerada e possua ao menos uma dependência em \ddot{x} .

2.1 Lagrangiana de Galileon.

A densidade lagrangiana mais geral que fornece equações de movimento de segunda ordem em um espaço-tempo plano 4D para ϕ é (KOBAYASHI, 2019):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= c_1 \phi + c_2 X - c_3 X \square \phi \\ &+ \frac{c_4}{2} \{ X [(\square \phi)^2 - \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\mu \partial^\nu \phi] + \square \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \partial_\mu X \partial^\mu X \} \\ &+ \frac{c_5}{15} \{ -2X [(\square \phi)^3 - 3\square \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\mu \partial^\nu \phi + 2\partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\nu \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \partial^\mu \phi] \\ &+ 3\partial^\mu \phi \partial_\mu X [(\square \phi)^2 - \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\mu \partial^\nu \phi] + 6\square \phi \partial_\mu X \partial^\mu X - 6\partial^\mu \partial^\nu X \partial_\mu X \partial_\nu X \}, \quad (64) \end{aligned}$$

onde, $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ e c_1, c_2, \dots, c_5 são constantes arbitrárias. Este resultado entretanto considera um fundo de Minkowski. Para considerarmos um caso generalizado para um espaço-tempo curvo, substituímos a derivada parcial pela derivada covariante. Desta forma, podemos definir os contratermos que eliminam as derivadas de terceira e quarta ordem e ao utilizar a regra de comutação:

$$\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla^\nu\phi - \nabla_\nu\nabla_\mu\nabla^\nu\phi = -R_{\mu\nu}\nabla^\nu\phi, \quad (65)$$

obtemos por fim:

$$\mathcal{L}_\phi = \sum_{i=1}^N c_i \mathcal{L}_i; \quad (66)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \phi \\ \mathcal{L}_2 &= G_2(X, \phi); \\ \mathcal{L}_3 &= -G_3(X, \phi)\square\phi; \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(X, \phi)R + G_{4,X}(X, \phi)((\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2); \\ \mathcal{L}_5 &= G_5(X, \phi)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - G_{5,X}((\square\phi)^3 - 3\square\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3). \end{aligned} \quad (67)$$

G_i são funções arbitrárias de ϕ e X . Podemos sempre supor que $c_1 = 0$ eliminando assim o termo de potencial. A densidade de Lagrangiana generalizada (66) é conhecida atualmente como a teoria Horndeski. Escrita em sua forma covariante, a propriedade de simetria por translação é quebrada e a única propriedade mantida é a de gerar equações de movimento de segunda ordem na métrica ($g_{\mu\nu}$) e em ϕ . Entretanto, Horndeski ao descrever sua teoria (HORNDESKI, 1974) partiu de suposições diferentes para a construção da lagrangiana e sua forma final é diferente de (66), sendo escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\gamma}[\kappa_1\phi_\alpha^\mu R_{\beta\gamma}^{\cdot\mu\nu} + \frac{2}{3}\kappa_{1,X}\phi_\alpha^\mu\phi_\beta^\nu\phi_\gamma^\sigma + \kappa_3\phi_\alpha\phi^\mu R_{\beta\gamma}^{\cdot\nu\sigma} + 2\kappa_{3,X}\phi_\alpha\phi^\mu\phi_\beta^\nu\phi_\gamma^\sigma] \\ &+ \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}[(F + 2W)R + 2F_X\phi_\alpha^\mu\phi_\beta^\nu + 2\kappa_8\phi_\alpha\phi^\mu\phi_\beta^\nu] \\ &- 6(F_\phi + 2W_\phi - X\kappa_8)\square\phi + \kappa_9; \end{aligned} \quad (68)$$

Podemos observar que escrita desta forma a densidade lagrangiana possui o mesmo número de funções arbitrárias em ϕ e X que (66). As 4 primeiras funções são $\kappa_1, \kappa_3, \kappa_8, \kappa_9$. $F = F(\phi, X)$ e $W = W(\phi)$ podem ser unidas em uma única função $F' = F + 2W$ desde que respeitem o vínculo $F'_X = 2(\kappa_3 + 2X\kappa_{3X} - \kappa_{1\phi})$. Apesar da sua forma diferente, em (KOBAYASHI, 2019) foi demonstrado que pelo fato de termos a mesma quantidade de funções de ϕ, X a teoria de Galileon pode ser mapeada em Horndeski através das

transformações:

$$\begin{aligned}
G_2 &= \kappa_9 + 4X \int^X dX' (\kappa_{8\phi} - 2\kappa_{3\phi\phi}); \\
G_3 &= 6F_\phi - 2X\kappa_8 - 8X\kappa_{3\phi} + 2 \int^X dX' (\kappa_8 - 2\kappa_{3\phi}); \\
G_4 &= 2F - 4X\kappa_3; \\
G_5 &= -4\kappa_1;
\end{aligned}$$

A teoria de Galileon é muito útil pois ela é o caso mais geral para uma teoria escalar onde a partir de uma escolha adequada das interações de galileon podemos recair em qualquer "*scalar-tensor theory*" conhecida (KASE; TSUJIKAWA, 2019). Alguns exemplos são:

•General Relativity:

$$G_2 = 0, \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \kappa^{-2}, \quad G_5 = 0. \quad (69)$$

•K-essence:

$$G_2 = G_2(\phi, X), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \kappa^{-2}, \quad G_5 = 0. \quad (70)$$

• $f(R)$ gravity:

$$G_2 = -\kappa^{-2}(RF - f), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \kappa^{-2}F, \quad G_5 = 0. \quad (71)$$

•Quintessence:

$$G_2 = X - V(\phi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = 0, \quad G_5 = 0. \quad (72)$$

onde $V(\phi)$ é um potencial do campo ϕ .

•Brans-Dicke:

$$G_2 = \kappa^{-2}\omega_{BD} - V(\phi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = \kappa^{-2}\phi, \quad G_5 = 0. \quad (73)$$

Vale mencionar que há ainda as teorias denominadas de *beyond Horndeski* (bH). Estas teorias contam com dois termos extras na lagrangiana (66):

$$\mathcal{L}_4^{bH} = F_4(X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\sigma^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\beta \phi \nabla_\rho \nabla_\gamma \phi; \quad (74)$$

$$\mathcal{L}_5^{bH} = F_5(X) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\mu \phi \nabla_\alpha \phi \nabla_\nu \nabla_\beta \phi \nabla_\rho \nabla_\gamma \phi \nabla_\sigma \nabla_\delta \phi. \quad (75)$$

Estes termos, apesar de descreverem equações de movimento com derivadas superiores

degeneradas, ainda possuem o mesmo número de graus de liberdade que Horndeski e não geram a aparição de *ghosts* (CRISOSTOMI et al., 2016). Isto acontece principalmente pois bH não viola a invariância por difeomorfismo da teoria (GLEYZES et al., 2015).

2.2 Estabilidade em Galileon.

Quando estudamos soluções para buracos negros, um ponto importante de estudo é a estabilidade das soluções. Sabemos que Wheeler originalmente foi o primeiro a estudar estabilidade para o caso de Schwarzschild (REGGE; WHEELER, 1957). As soluções de Kerr mostraram-se estáveis em (DIAS; GODAZGAR; SANTOS, 2015), assim como a de Reissner-Nordstrom em (MONCRIEF, 1974). Entretanto, além destes casos sabemos que buracos negros podem estar rodeados por matéria. Esta absorção gera perturbações nas soluções clássicas que podem ser causadoras de instabilidades. Isto levou à uma série de estudos sobre estabilidade de soluções em que existe matéria sendo absorvida pelo buraco negro. O primeiro trabalho deste tipo foi de Moncrief (MONCRIEF, 1980) ao estudar estabilidade para um buraco negro de Schwarzschild absorvendo matéria.

Conseqüentemente, o estudo de estabilidade pode ser realizado para quando temos uma função escalar como as funções de galileon. Nesta seção, iremos entrar em detalhes sobre como estudar a estabilidade para galileons e comentaremos sobre como funciona o processo de absorção de matéria por um horizonte de eventos, mostrando alguns resultados existentes na literatura.

2.2.1 Acreção de Buraco Negro

De forma simplificada, um objeto completamente colapsado ao absorver um fluxo de energia (Φ) sofre variação em sua massa, o que gera um aumento de seu horizonte de eventos. Ao ser absorvido pelo buraco negro, o fluxo Φ gera uma mudança da massa proporcional à:

$$\frac{dM}{dt} \propto \Phi. \quad (76)$$

Como Φ é um fluxo de energia através de uma área limitada pelo raio gravitacional do corpo (r_g), podemos utilizar o tensor energia momento ($T^{\mu\nu}$) para descrevê-lo. As componentes do tensor energia momento podem ser descritas como:

- T^{00} = densidade de massa-energia;
- T^{j0} = densidade da componente j do momento;

- T^{0k} = componente k do fluxo de energia;
- T^{jk} = componente j,k do stress.

Logo, podemos descrever o aumento de massa para um buraco negro como:

$$\frac{dM}{dt} \propto r_g^2 T^{0k}. \quad (77)$$

No trabalho de Babichev (BABICHEV, 2011), o autor demonstra o processo de absorção de matéria de um buraco negro de Schwarzschild por um campo teste. Este trabalho culmina por encontrar uma família de soluções estacionárias para a acreção do campo. O autor mostra que para uma certa escolha dos parâmetros encontramos soluções estáveis e instáveis para o fluxo Φ' , enquanto que para outra escolha de parâmetros não obtemos solução alguma. Dependendo do modelo estudado, a propagação das perturbações geradas pelo fluxo produzem um horizonte sônico. Este horizonte, de acordo com o modelo, encontra-se dentro ou fora do horizonte de Schwarzschild. Devemos comentar que apesar das soluções com horizonte sônico dentro do horizonte de Schwarzschild serem importantes, do ponto de vista físico, seria impossível obter informações sobre as perturbações dentro do horizonte de eventos. Sendo assim, apesar de mais completo no artigo original, podemos destacar dentre os modelos estudados em (BABICHEV, 2011) os resultados obtidos para o caso em que consideramos somente as contribuições advindas dos termos \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 . Esta contribuição é uma das geradoras de soluções estáveis.

Neste caso temos uma ação do tipo:

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} [\epsilon (\partial\phi)^2 + \kappa (\partial\phi)^2 \square\phi]; \quad (78)$$

esta ação representa uma escolha das funções escalares de galileon do tipo:

$$G_2 = G_3 = (\partial\phi)^2; G_4 = G_5 = 0 \quad (79)$$

onde $c_1 = \epsilon$ e $c_2 = \kappa$. Escolhemos um ansatz para o campo ϕ de modo a mantê-lo estacionário e descrito em coordenadas de Eddington-Finkelstein para garantir que podemos descrever o espaço-tempo dentro do horizonte de Schwarzschild:

$$\phi(v, r) = t - \int dr \left\{ \frac{1}{f} + \psi(r) \right\}. \quad (80)$$

A partir deste ansatz variando a ação em relação ao campo, obtemos a 4-corrente definida como:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = j^r = 2\epsilon f\psi' + \kappa \left(-\frac{f'}{f} + f f' \psi'^2 + \frac{4f^2 \phi'^2}{r} \right). \quad (81)$$

Por outro lado temos que equação (77) pode ser reescrita utilizando as coordenadas de Eddigton-Finkelstein como:

$$r^2 T_v^r = A. \quad (82)$$

onde A representa uma constante arbitrária. Podemos igualar $T_v^r = j^r$ onde obtemos para a parte do campo dependente somente da coordenada r a solução:

$$\psi'_{(2,3)} = -\frac{\epsilon r^2 f \pm \sqrt{\epsilon^2 r^4 f^2 + \kappa r (A f + \kappa r^2 f')(r f' + 4f)}}{\kappa r f (r f' + 4f)}. \quad (83)$$

A solução (83) responsável por descrever a propagação das perturbações, onde o índice (2,3) representa que a solução depende somente das funções G_2 e G_3 de Galileon. Com esta solução realizamos uma análise para diferentes valores de ϵ e κ de modo a determinar se existem soluções e se estas são estáveis. Representada na Fig:6 temos descritas todas as soluções existentes para as possíveis configurações de parâmetros. Os pontos no gráficos são os pontos críticos das soluções. Nestes pontos, os vetores de propagação que carregam as perturbações do campo divergem. Estas divergências representam a posição do horizonte sônico, horizonte do qual as perturbações estão confinadas e não conseguem escapar.

Para o caso em que $\epsilon = 0$. A solução existe com um ponto crítico em $r = 3/4$ somente para valores de $A = 3\kappa$.

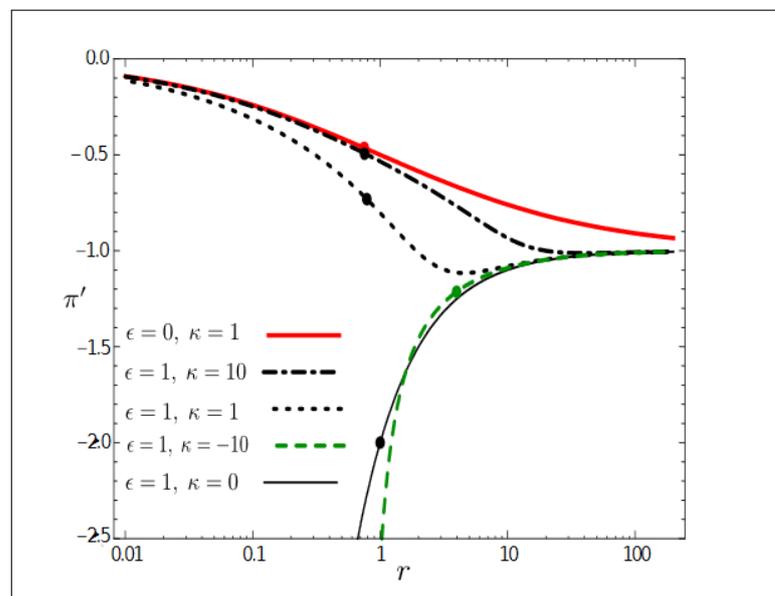
Para o caso em que $\kappa/\epsilon > 0$. A solução existe com uma forma assintótica no infinito, porém o horizonte sônico encontra-se dentro do horizonte de Schwarzschild.

Para o caso $\kappa/\epsilon < 0$. A solução existe sendo também assintótica no infinito, porém o horizonte sônico encontra-se fora do horizonte de Schwarzschild. Isto indica que neste modelo temos propagações mais rápidas que a velocidade da luz, o que não necessariamente implica em inconsistências físicas. Por exemplo o modelo *accreting k-essence* não possui paradoxos mesmo tendo propagações mais rápidas que a luz.

2.2.2 Estabilidade

Para estudarmos a estabilidade precisamos entender qual o sistema em que estamos trabalhando e quais podem ser os causadores de instabilidades. Em específico, estaremos lidando com um buraco negro de Schwarzschild imerso em um campo teste ϕ , que para este caso consideraremos ser o campo de galileon. Sabemos que o buraco negro de Schwarzschild é estável para pequenas perturbações esféricas. Sendo assim precisamos realizar perturbações no campo ϕ pois a estabilidade das soluções estará ligada a

Figura 6 - Soluções para ϕ' para o caso $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$



Legenda: A posição dos horizontes sônicos é demonstrada pelos pontos. Para o caso de $\kappa < 0$ o horizonte sônico está fora do horizonte de Schwarzschild, enquanto que para $\kappa > 0$ encontra-se dentro do horizonte de Schwarzschild.

Fonte: BABICHEV, 2011, p.7.

estabilidade das perturbações.

Para determinar se uma solução é estável ou não utilizaremos a condição apresentada por Moncrief (MONCRIEF", 1980). Esta condição baseia-se na análise do sinal da derivada temporal da energia das perturbações dentro de um volume finito. O desenvolvimento do cálculo para a condição de estabilidade pode ser encontrado em detalhes no trabalho de (PAZ; SALIM; BERGLIAFFA, 2014). Este procedimento é utilizado para checar a estabilidade para qualquer tipo de campo teste. Iremos reproduzir parte do cálculo em (PAZ; SALIM; BERGLIAFFA, 2014) por ser importante para compreender os resultados de estabilidade para o caso das perturbações no campo de galileon.

Partimos de uma ação:

$$S = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(X, g^{\mu\nu}) d^4x \quad (84)$$

onde $X = -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$ e $g^{\mu\nu}$ é a métrica de fundo - Schwarzschild para nosso caso. Ao variar a lagrangiana com respeito ao campo, obtemos uma equação de movimento do tipo:

$$[\sqrt{-g}(\mathcal{L}_X g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{XX} \Phi^{\mu\nu})] \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = 0 \quad (85)$$

onde $\mathcal{L}_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$ e $\Phi^{\mu\nu} = g^{\alpha\mu} \phi_\alpha g^{\beta\nu} \phi_\beta$. Como estamos perturbando somente o campo em linearmente em primeira ordem:

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 \quad (86)$$

substituindo (86) em (85) obtemos para as perturbações a equação de movimento:

$$[\sqrt{-g}(\mathcal{L}_X g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{XX} \Phi^{\mu\nu})|_0 \phi_{1,\mu},_\nu = 0 \quad (87)$$

Como todos os termos dentro do parenteses dependem de ϕ_0 definimos uma métrica efetiva:

$$\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}(\mathcal{L}_X g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{XX} \Phi^{\mu\nu})|_0. \quad (88)$$

Assim podemos reescrever (87) como:

$$(\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \phi_{1,\mu}),_\nu = 0, \quad (89)$$

e definimos :

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \frac{M^{\mu\nu}}{\sqrt{-g} \sqrt{M}}, \quad (90)$$

onde $M^{\mu\nu} = \mathcal{L}_X g^{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_{XX} \Phi^{\mu\nu}|_0$.

Pertubando a ação em (2.2.2) temos uma ação para as perturbações (correspondente aos termos $O(\varepsilon^2)$):

$$S[\phi_1] = \int \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \phi_{1,\mu} \phi_{1,\nu} d^4x. \quad (91)$$

A variação desta ação com respeito a métrica efetiva fornece um tensor de energia momento para as perturbações:

$$\bar{T}_\nu^\mu = \bar{g}^{\mu\lambda} \phi_{1,\lambda} \phi_{1,\nu} - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \bar{g}^{\alpha\beta} \phi_{1,\alpha} \phi_{1,\beta}. \quad (92)$$

Como a métrica efetiva mantém as mesmas simetrias da métrica de fundo, o tensor energia momento também se conserva. A condição de estabilidade discutida por Moncrief parte da seguinte suposição: se Z é um vetor de Killing da métrica efetiva, temos que:

$$\bar{\nabla}_\mu (Z^\nu \bar{T}_\nu^\mu) = 0, \quad (93)$$

que pode ser reescrita como:

$$\partial_\nu (\sqrt{-\bar{g}} Z^\mu \bar{T}_\mu^\nu) = 0. \quad (94)$$

Escolhendo $X^\nu = \delta_t^\nu$ e integrando (94) em um volume (3-D):

$$\int_V \partial_t (\sqrt{-\bar{g}} \bar{T}_t^t) d^3x + \int_V \partial_i (\sqrt{-\bar{g}} \bar{T}_t^i) d^3x = 0. \quad (95)$$

Definimos a energia para as perturbações como $\bar{E} = \int_V (\sqrt{-\bar{g}} \bar{T}_t^t) d^3x$ e usando o teorema de Gauss temos:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = - \int_\Sigma d\Sigma_i \sqrt{-\bar{g}} \bar{T}_t^i. \quad (96)$$

onde Σ é a superfície.

Este resultado obtido por Moncrief permite determinar se o sistema é linearmente estável ou não. A conclusão reside na análise da positividade e finitude da energia juntamente com a escolha apropriada da superfície Σ . Podemos agora utilizar este método para estudar a estabilidade para o caso de galileon. Como podemos ver em (BERGLIAFFA; MAIER, 2017), os autores mostram a estabilidade da solução para o caso do modelo que leva em conta os termos \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 . Como é mostrado o sistema é decomposto em duas superfícies. Sendo assim a integral (96) pode ser decomposta como:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = I_{r_s} + I_\infty, \quad (97)$$

o termo que representa a superfície no infinito é escrito como:

$$I_\infty = \int_{\Sigma_\infty} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{rr} (\partial_t \phi_1 \partial_r \phi_1)|_{r \rightarrow \infty} d\Sigma_r. \quad (98)$$

Utilizando a informação da Fig:6 e supondo que as perturbações decaiam ao infinito, por exemplo com uma potência de $1/r^p$, temos que a integral $I_\infty \rightarrow 0$. Desta forma a contribuição da energia será proveniente somente do primeiro termo:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = - \int_{\Sigma_{r_s}} \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{rt} (\partial_t \phi_1)^2|_{r_s} d\Sigma_{r_s}. \quad (99)$$

em (BERGLIAFFA; MAIER, 2017) vemos que $\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{rt} = -\frac{\kappa}{\epsilon} \sqrt{-g} \nabla^t \nabla^r \phi_0$. Onde:

$$\nabla^t \nabla^r \phi_0 = \frac{1}{2r(r-1)}. \quad (100)$$

Sendo $\kappa/\epsilon < 0$ e $r_s > 1$ temos que a energia das perturbações diminui com o tempo.

Entretanto além de ser finita para termos estabilidade é necessário que a energia seja positiva definida. Sendo assim basta olharmos para a definição de energia:

$$\bar{E} = \int_V \sqrt{-\bar{g}} [\bar{g}^{tt} (\partial_t \phi_1)^2 - \bar{g}^{ii} (\partial_i \phi_1)^2]. \quad (101)$$

Sendo $\bar{g}^{tt} > 0$ e $\bar{g}^{ii} < 0$ temos a positividade da energia. Este trabalho é relevante por estender a análise iniciada por Babichev e mostrar que além de podermos encontrar soluções para o fluxo do campo, estas soluções são linearmente estáveis.

2.3 Violações da Conjectura No Hair.

Bekenstein foi um dos primeiros a provar a conjectura *no hair* para buracos negros permeados por um campo escalar. Além disso, seu trabalho estabeleceu algumas condições básicas a serem cumpridas. Babichev é referência para o estudo de buracos negros utilizando Horndeski como campo escalar (BABICHEV; CHARMOUSIS; LEHÉBEL, 2017). Neste artigo, os autores estudam de forma detalhada soluções exatas para buracos negros utilizando a teoria de Horndeski em diversas classes diferentes visando quebrar a conjectura *no hair* com galileons.

O objetivo deles era descobrir se existem teorias com simetria de translação que permitem buracos negros estáticos e assintoticamente planos com uma corrente de Noether regular. Desta maneira, eles utilizam Horndeski por ser a teoria escalar mais geral com esta simetria. Babichev estabelece duas hipóteses que devem ser respeitadas para que não haja quebra da conjectura no hair em galileon:

1. Deve existir um termo cinético canônico $X = -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi$ na ação.
2. As funções de $G_i(X)$ e $F_i(X)$ devem possuir somente potências positivas de suas derivadas em X quando $X \rightarrow 0$.

Babichev se propõe a encontrar soluções físicas para buracos negros com cabelo quebrando estas condições. Partindo da hipótese do espaço-tempo ser esfericamente simétrico e estático assim como o campo, descreve o elemento de linha e o campo escalar dado pelo ansatz:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (102)$$

$$\phi = \phi(r). \quad (103)$$

A primeira solução descrita é a solução estática com o termo quártico e quadrático de Horndeski. Segue para este caso que as funções de galileon utilizadas por Babichev são dadas por:

$$\begin{aligned} G_2 &= \eta X; \\ G_4 &= \varepsilon + \beta\sqrt{-X}; \\ G_3 &= G_5 = F_4 = F_5 = 0. \end{aligned}$$

Para esta escolha de G_i encontrou-se que a corrente de Noether é dada somente pelo termo radial, tal que:

$$j^r = \frac{\beta\sqrt{2f}}{r^2} \text{sgn}(\phi') - \eta\phi'f, \quad (104)$$

onde impondo a condição de $j^r = 0$, obtêm-se o campo:

$$\phi' = \pm \frac{\sqrt{2}\beta}{\eta r^2 \sqrt{f}}; \quad (105)$$

A equação (105) é válida fora do horizonte de eventos pois para ser uma solução real $f > 0$. Resolvendo as equações (tt) e (rr) da equação de Einstein os autores encontram que as funções métricas são descritas como:

$$f(r) = h(r) = 1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\beta^2}{2\varepsilon\eta r^2}. \quad (106)$$

Esta solução é assintoticamente plana e descreve um buraco negro com massa $\mu/2$. Ela respeita todas as condições definidas para a conjectura *no hair* em Horndeski exceto a hipótese 2. Como o termo quártico ($G_4 = \varepsilon + \beta\sqrt{-X}$) conta com derivadas em X $G_{4,X} = -\beta\frac{1}{2}(-X)^{-1/2}$, quebrando a hipótese 2, temos a aparição de uma dependência da

carga de galileon na solução (representada pelas constantes no termo $-\frac{\beta^2}{2\varepsilon\eta r^2}$) mostrando que de fato há a quebra da conjectura *no hair*.

Além da solução estática é possível encontrar uma solução para o caso dependente do tempo e realizar uma conexão com o caso estático. Basta estender o cálculo para o ansatz:

$$\phi = qt + \psi(r). \quad (107)$$

Neste ansatz o campo escalar adquire uma dependência temporal linear com a velocidade q . As equações de movimento podem ser resolvidas completamente fornecendo a solução:

$$h = \frac{2\varepsilon^2 q^2}{C} \left[1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\eta}{2\varepsilon r} \int dr r^2 X \right]; \quad (108)$$

$$f = \frac{C}{2\varepsilon^2 q^2} h; \quad (109)$$

$$C = 4\varepsilon^2 X \left[1 - \frac{\eta}{\beta} r^2 \sqrt{-X} \right]; \quad (110)$$

onde C é uma constante de integração. Esta arbitrariedade na constante de integração nos permite escolher um valor de forma a conectar com a solução estática onde $f = h$. Para isso escolhemos $C = 2\varepsilon^2 q^2$. Esta escolha da constante gera uma equação algébrica ao igualarmos a (110), que ao ser resolvida fixa o valor para X :

$$2\varepsilon^2 q^2 = 4\varepsilon^2 X \left[1 - \frac{\eta}{\beta} r^2 \sqrt{-X} \right]. \quad (111)$$

Ao fixarmos o valor de X podemos obter uma solução para a função métrica (108). A solução para (111) muda completamente o resultado da assintoticidade da solução. Esta mudança pode ser vista ao realizarmos uma expansão para r grande, onde encontramos:

$$h \propto \frac{3\eta}{10\varepsilon} \left(\frac{q^2 \beta}{2\eta} \right)^{2/3} r^{2/3}. \quad (112)$$

Entretanto realizando a expansão para $q \ll 1$ temos:

$$h = 1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\beta^2}{2\varepsilon\eta r^2} + \frac{\eta q^2 r^2}{24\varepsilon} + O(q^4). \quad (113)$$

As soluções (112) e (113) encontradas originalmente por Babichev mostram que quando abandonamos estaticidade abandonamos ao mesmo tempo a assintoticidade plana da solução visto que temos um dependência da velocidade(q) do campo quando $r \rightarrow \infty$.

A equação (113) mostra como se dá a conexão entre o caso estático e o caso dependente do tempo. Pois no limite em que $q \rightarrow 0$, retomamos a solução estática (106).

A última solução de Babichev que iremos comentar é a solução considerando modelos puramente quárticos de Galileon. Para este caso temos a seguinte condição inicial:

$$G_2 = G_3 = G_5 = F_5 = 0. \quad (114)$$

Ao considerarmos somente G_4 e F_4 ocorre a quebra da hipótese 1 pois não considera-se nenhum termo canônico na lagrangiana. Assume-se também o modelo estático para o campo e para a métrica. Ao igualarmos a componente rr da equação de campo com a componente j^r da quadricorrente obtemos:

$$\frac{G_{4X}}{G_{4X} + 2XG_{4XX} + 42X^2F_{4X} + 8XF_4} = \frac{G_4}{G_4 - 2XG_{4X} - 4X^2F_4}. \quad (115)$$

Esta equação não depende da coordenada r , depende somente da escolha de X . Se assumirmos que existe uma solução $X = X_0$, simplificamos a equação tt e chegamos ao resultado para as funções métricas:

$$h(r) = 1 - \frac{\mu}{r}, \quad (116)$$

$$f(r) = \left(1 - \frac{\mu}{r}\right) \frac{G_4(X_0)}{G_4(X_0) - 2X_0G_{4X}(X_0) - 4X_0^2F_4(X_0)}. \quad (117)$$

Este resultado obtido por Babichev é muito importante pois mostra que para o caso puramente quártico existe o que ele chama de "*stealth Schwarzschild solutions*". Desde que estas soluções respeitem os vínculos:

$$G_{4X}(X_0) + 2X_0F_4(X_0) = 0, \quad (118)$$

$$G_{4XX}(X_0) + 4F_4(X_0) + 2X_0F_{4X}(X_0) = 0. \quad (119)$$

O primeiro vínculo vem do fato de que para recuperarmos Schwarzschild o fator que acompanha f em (117) precisa ser 1. Isto implica obrigatoriamente no segundo vínculo em (115). Dentro deste caso estático podemos encontrar a solução de Kerr pois ela respeita os vínculos para o caso particular em que $G_{4X} = 0$ e $G_{4XX} = 0$. Tal que em coordenadas de Boyer Lindquist:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) dt^2 - \frac{4mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} dr^2 \\ (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (120)$$

onde o campo escalar é dado por:

$$\phi(r, \theta) = \sqrt{-2X_0} \left[a \sin \theta - \sqrt{a^2 - 2mr + r^2} - m \ln \sqrt{a^2 - 2mr + r^2} - m + r \right], \quad (121)$$

sendo este campo escalar regular fora do horizonte de eventos do buraco negro de Kerr. Diferente do caso estático que vimos antes esta classe de soluções é assintoticamente plana porém ϕ' tende a um valor finito, o que acaba violando outra condição para um teorema *no hair* geral estabelecido por Bekenstein (BEKENSTEIN, 1995).

3 HORNDESKI HAIR

Baseamos nosso trabalho para o estudo de buracos negros nos artigos do Babichev(BABICHEV; CHARMOUSIS; LEHÉBEL, 2017) e no de Lam Hui(HUI; NICOLIS, 2013). O trabalho de Babichev, como vimos na seção 2.4, foi importante por estabelecer as condições para um teorema *no hair* que envolva as funções de galileon. Enquanto que Lam Hui et al continuam a discussão provando que de fato buracos negros esfericamente simétricos não apresentam carga de galileon e são descritos somente pela sua massa.

Porém, para apresentarem dependência das funções de Galileon, Lam Hui estende as duas hipóteses impostas por Babichev e acrescenta outras 3. Podemos enumerá-las da seguinte maneira:

- (i) A solução deve ser esfericamente simétrica e assintoticamente plana;
- (ii) ϕ' (onde $'$ denota derivada com relação a coordenada r) deve tender a zero no infinito;
- (iii) A norma da 4-corrente $j^\mu j_\mu$ é finita no horizonte;
- (iv) Deve existir um termo cinético canônico X na ação;
- (v) As derivadas com respeito a X da função G_i são da forma que contém somente potências positivas ou de ordem zero de X quando $X \rightarrow 0$ (e $r \rightarrow +\infty$).

Para buracos negros estáticos a única componente diferente de zero da 4-corrente é a radial (desde que o campo ϕ não dependa do tempo). Logo temos que $j^\mu j_\mu = g_{\mu\nu}(j^\mu j^\nu) = g_{rr}(j^r)^2$. Como vimos no solução de Schwarzschild g_{rr} está ligado diretamente com o horizonte de eventos, no horizonte $g_{rr} = \infty$. Desta forma para que não haja uma singularidade física, $j^\mu j_\mu$ deve ser finito o que justifica a existência da condição (iii). Os autores completam mostrando que pela norma ser finita no horizonte implica que a componente $j^r = 0$.

O item (i), parte da suposição da 4-corrente ser nula no infinito e com isso podemos supor que,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi' \propto \frac{1}{r^p}. \quad (122)$$

As três primeiras condições estabelecidas em (HUI; NICOLIS, 2013) e as duas últimas em (BABICHEV; CHARMOUSIS; LEHÉBEL, 2017) perfazem as mínimas condições necessárias para que haja um uma conjectura *no hair* para um modelo de descrição de buracos negros com funções de galileon. Consequentemente para encontramos buracos negros com cabelo devemos quebrar ao menos uma destas condições. Neste trabalho nosso objetivo será quebrar somente a condição (v).

3.1 Solução Exata

Partindo de uma Lagrangiana geral para os galileons, equação (67) considerando até quarta ordem e usando $c_1 = 0$ temos a ação definido como:

$$S = \int \sqrt{-g} \{G_2(X) - G_3(X)\square\phi + G_4(X)R + G_{4,X}[(\square\phi)^2 - (\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)]\} d^4x, \quad (123)$$

Como pode ser visto no Anexo A, variando a ação com respeito ao campo (ϕ) obtemos a 4-corrente de Noether $j^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta(\phi, \mu)}$:

$$j^\nu = G_{2,X}\phi^{,\mu} - G_{3,X}(\phi^{,\nu}\square\phi + X^{,\nu}) + G_{4,X}(\phi^{,\nu}R - 2R^{\nu\sigma}\phi_{,\sigma}) + G_{4,X,X}\{\phi^{,\nu}[(\square\phi)^2 - (\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi)] + 2(X^{,\nu}\square\phi - X_{,\mu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)\}. \quad (124)$$

Variando a ação com respeito a métrica ($g_{\mu\nu}$) obtemos a equação de campo:

$$G_4 G_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}; \quad (125)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & +\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}G_2 + G_{2,X}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) \\ & +\frac{1}{2}\square\phi[G_{3,X}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + G_3g_{\mu\nu}] - G_3\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + \frac{1}{2}(2\nabla_\nu(G_3\phi_\mu) - g_{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\nabla_\lambda(G_3\phi_\rho)) \\ & -G_{4,XX}[g_{\mu\nu}(X_{,\beta}\square\phi\phi^\beta + X_{,\alpha}X^{,\alpha}) - X_{,\nu}\square\phi\phi_\mu - X_{,\mu}\square\phi\phi_\nu \\ & +X_{,\rho}(\nabla_\nu\nabla^\rho\phi\phi_\mu + \nabla_\mu\nabla^\rho\phi\phi_\nu - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\phi^{,\rho}) - X_{,\nu}X_{,\mu} \\ & +\frac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu[(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi) - (\square\phi)^2] \\ & -G_{4,X}\{-\frac{1}{2}R\phi_\mu\phi_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\square\phi)^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)^2 \\ & R_{\sigma\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\mu} + R_{\sigma\mu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\nu} + R_{\nu\gamma\mu}^\sigma\phi_{,\sigma}\phi^{,\gamma} + \nabla_\gamma\nabla_\nu\phi\nabla^\gamma\nabla_\mu\phi \\ & -g_{\mu\nu}R_{\sigma\gamma}\phi_{,\sigma}\phi_{,\gamma} - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\square\phi\}. \end{aligned}$$

Utilizaremos o mesmo ansatz de Babichev. Um espaço-tempo preenchido por um campo escalar independente do tempo $\phi = \phi(r)$ na vizinhança de um buraco negro estático e esfericamente simétrico com elemento de linha descrito por:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (126)$$

A única componente não nula da quadri-corrente é a componente radial dada por:

$$j^r = G_{2,X}f\phi' - G_{3,X}\frac{4h + rh'}{2rh}f^2\phi'^2 - G_{4,X}\frac{2f}{r^2h}[(f-1)h + rfh']\phi' + G_{4,XX}\frac{2f^3(h + rh')}{r^2h}\phi'^3. \quad (127)$$

Demonstramos que a condição (iii) não é quebrada pois a norma tem a forma:

$$j_\mu j^\mu = \frac{1}{4r^4 h^2} f \phi'^2 \{ r f h' (4G_{4,X} + G_{3,X} r \phi' - 4G_{4,X,X} f \phi'^2) + h(-2(2G_{4,X} + G_{2,X} r^2) + 4f(G_{4,X} + G_{3,X} r \phi' - G_{4,X,X} f \phi'^2)) \}^2, \quad (128)$$

onde no horizonte ($f(r) = 0$), $j_\mu j^\mu = 0$ não apresentando singularidades independentemente das funções G_i .

Respeitaremos a condição (iv) supondo que as funções de Galileon sejam dadas por:

$$\begin{aligned} G_2 &= \alpha_{21} X + \alpha_{22} (-X)^{\omega_2}, \\ G_3 &= \alpha_{31} + \alpha_{32} (-X)^{\omega_3}, \\ G_4 &= \kappa^{-2} + \alpha_{42} (-X)^{\omega_4}. \end{aligned} \quad (129)$$

o termo κ^{-2} em G_4 é responsável por recuperar a TRG. O termo cinético $\alpha_{21} X$ é responsável por reproduzir as teorias $k - essence$. As potências generalizam para qualquer ordem as funções.

Através desta escolha obtemos para a 4-corrente:

$$j^r = A(r) \phi' + B(r) \phi'^{2\omega_2-1} + C(r) \phi'^{2\omega_3} + D(r) \phi'^{2\omega_4-1}, \quad (130)$$

onde:

$$A(r) = \alpha_{21} f; \quad (131)$$

$$B(r) = -\frac{\alpha_{22} \omega_2 f^{\omega_2}}{2^{\omega_2-1}}; \quad (132)$$

$$C(r) = \frac{\alpha_{32} \omega_3 f^{\omega_3+1} (4h + r h')}{2^{\omega_3} r h}; \quad (133)$$

$$D(r) = \frac{\alpha_{42} \omega_4 f^{\omega_4}}{2^{\omega_4-2} r^2 h} \{ f(1 - 2\omega_4)(r h' + h) - h \}. \quad (134)$$

Até o momento não quebramos nenhuma das condições impostas. Entretanto é fácil ver através da forma para G_4 que para quebrar a condição (v) devemos impor ao menos um dos seguintes vínculos:

$$\omega_2 < 1, \quad \omega_3 < 1, \quad \omega_4 < 2. \quad (135)$$

Apesar de termos estes vínculos para os parâmetros, estes funcionam como limites superiores. Desta forma seria interessante adicionar outros vínculos para sabermos quais são os limites inferiores e até onde podemos variá-los. Para isso a melhor maneira seria analisar esta solução para um espaço-tempo plano com um fundo de Minkowski. Desta

forma supomos uma métrica em coordenadas comóveis esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (136)$$

A partir desta métrica reescrevemos a 4-corrente e a componente temporal do tensor energia momento respectivamente como:

$$j^r = G_{2,X}\phi' - \frac{2G_{3,X}}{r}\phi'^2 + \frac{2G_{4,X,X}}{r^2}\phi'^3; \quad (137)$$

$$T_{00} = -\frac{G_2}{2} + \frac{G_{3,X}\phi'^2\phi''}{2} + \frac{G_{4,X}\phi'}{r} \left(\frac{\phi'}{r} + 2\phi'' \right) - \frac{2G_{4,X,X}\phi'^3\phi''}{r}. \quad (138)$$

Utilizando o ansatz (129) temos:

$$j^r = \alpha_{21}\phi' - \frac{\alpha_{22}\omega_2\phi'^{2\omega_2-1}}{2\omega_2-1} + \frac{\alpha_{32}\omega_3\phi'^{2\omega_3}}{2\omega_3-2r} + (\omega_4-1)\frac{\alpha_{42}\omega_4\phi'^{2\omega_4-1}}{2\omega_4-3r^2}; \quad (139)$$

e

$$T_{00} = \left(\frac{\alpha_{21}}{4} \right) \phi'^2 - \frac{\alpha_{22}\phi'^{2\omega_3}}{2\omega_2+1} - \frac{\alpha_{42}\omega_4\phi'^{2\omega_4}}{2\omega_4-1r^2} - \left[\frac{\alpha_{32}\omega_3\phi'^{2\omega_3}}{2\omega_3} + (2\omega_4-1)\frac{\alpha_{42}\omega_4\phi'^{2\omega_4-1}}{2\omega_4-2r} \right] \phi''. \quad (140)$$

Como estabelecemos que a 4-corrente tende a zero com o ϕ' do tipo (122), temos as seguintes restrições para os parâmetros num fundo de Minkowski:

$$p > 0, \quad \omega_2 > \frac{1}{2}, \quad \omega_3 > -\frac{1}{2p}, \quad \omega_4 > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}. \quad (141)$$

Entretanto, podemos ainda olhar para a energia definida como:

$$E = \int_V \sqrt{-g} T_0^0 d^3x = 4\pi \int_r^\infty r^2 T_0^0 dr. \quad (142)$$

Já sabemos que para galileon, a energia é positiva definida porém, para garantir sua finitude, podemos supor que o integrando caia com $1/r^p$, onde $p > 1$ quando $r \rightarrow \infty$. Com isso, obtemos a restrição:

$$p > 3 \rightarrow \quad \omega_3 > -\frac{1}{6}, \quad \omega_4 > \frac{1}{6}. \quad (143)$$

Sendo assim as frequências ω possuem intervalo total igual a:

$$\frac{1}{2} < \omega_2 < 1, \quad -\frac{1}{6} < \omega_3 < 1, \quad \frac{1}{6} < \omega_4 < 2. \quad (144)$$

Agora que possuímos uma limitação inferior e superior para os parâmetros ω_i podemos

começar fixando-os da seguinte maneira:

$$\alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0 \quad \omega_2 = \frac{3}{2} \quad \omega_4 = \frac{1}{2}. \quad (145)$$

Substituindo os parâmetros na equação (130) e resolvendo a equação para $j^r = 0$ temos:

$$\phi' = \pm \frac{2}{r} \sqrt{\frac{-\alpha_{42}}{3f\alpha_{22}}}. \quad (146)$$

Resolvendo a componente temporal (t, t) da equação (125) para os mesmos parâmetros obtemos:

$$f(r) = 1 - \frac{2mG}{r} + \frac{q\kappa^2 \log(r/d)}{r}, \quad (147)$$

onde $q = \frac{2\alpha_{42}\sqrt{-2\alpha_{42}/3\alpha_{22}}}{3}$ e $d = [r]$ é a dimensão de comprimento para manter o logarítimo adimensional. Iremos omitir a dimensão futuramente nas contas, mas quando necessário à retomaremos. Equação (147) nos mostra que a quebra da condição (v) recai automaticamente em uma aparição de cabelo. O buraco negro não mais é descrito somente pela massa m . A interação de galileons gera uma dependência dos parâmetros α_{ij} na descrição do espaço-tempo ao redor de um buraco negro. O resultado (147) mostra também que quando $q = 0$ recaímos no resultado de Schwarzschild. $f(r)$ também não viola a condição (i) do espaço-tempo ser assintoticamente plano quando $r \rightarrow \infty$ pois:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1, \quad (148)$$

e reproduz o resultado esperado para um espaço-tempo plano com uma métrica de Minkowski. Da mesma forma não violamos a condição (ii) como vemos pela equação (146), pois:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi'(r) = 0. \quad (149)$$

Desta forma mostramos que somente quebrando a condição (v) há aparição de cabelo.

De forma a obtermos uma descrição completa do espaço-tempo para teoria de galileons precisamos estudar a função métrica $g_{00} = -h(r)$. A equação para $h(r)$ é obtida pela componente radial (r, r) de (125):

$$\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{f}\right) - \frac{\kappa^2 q}{3r^3 f} + \frac{h'}{rh} = 0 \quad (150)$$

Esta equação assim como a equação temporal, possui solução analítica. Porém, como é dependente de $f(r)$ podemos resolvê-la numericamente uma vez que temos $f(r)$ bem

definida. Basta resolver o sistema dinâmico:

$$f'(r) = -\frac{\kappa^2 q \log(r)}{r^2} + \frac{\kappa^2 q}{r^2} + \frac{2mG}{r^2} \quad (151)$$

$$h'(r) = \left(\frac{\kappa^2 q h(r)}{r^2 f(r)} \right) + 9\kappa^{-2}(1 - f(r)) \quad (152)$$

Após resolvido este sistema obtemos que o valor para a função $h(r)$ é exatamente:

$$f(r) = h(r) = 1 - \frac{2mG}{r} + \frac{q\kappa^2 \log(r)}{r}. \quad (153)$$

3.2 Extensão Analítica

Assim como demonstrado na Seção 1.3, podemos realizar uma análise completa do espaço-tempo ao redor do buraco negro de posse da métrica. Para isso basta que a métrica seja assintoticamente plana e seja possível descrever uma transformação conforme que compactifique o espaço-tempo. Mostramos que a solução obtida para Horndeski é assintoticamente plano. Sendo assintoticamente plana é razoável supor que recaia na mesma classe de espaço-tempo de Schwarzschild. Sendo assim, procuraremos uma transformação de forma à compactificar o espaço-tempo. Começaremos pela análise de sua singularidade e seu horizonte de eventos.

Atuando o limite na função métrica $f(r)$, vemos que existe uma singularidade em $r = 0$ dependente do sinal de q :

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = -\text{sgn}(q)\infty. \quad (154)$$

Para analisarmos o ponto crítico desta solução realizamos uma derivada em (147):

$$\frac{df(r)}{dr} = 0, \quad (155)$$

desta, encontramos um extremo local definido como:

$$r_e = \exp\left(1 + \frac{2Gm}{\kappa^2 q}\right). \quad (156)$$

Através das equações (154) e (156) obtemos 4 configurações básicas de horizontes

de eventos ao resolver:

$$f(r_e) = 0. \quad (157)$$

- 1. Para $q < 0$ e $m < \frac{\kappa^2 q}{2G} [\log(-\kappa^2 q) - 1]$ obtemos uma singularidade nua.
- 2. Para $q > 0$ temos somente um horizonte de eventos (r_h) análogo ao horizonte de Schwarzschild.
- 3. Para $q < 0$ e $m > \frac{\kappa^2 q}{2G} [\log(-\kappa^2 q) - 1]$ temos um horizonte exterior (r_+) e um horizonte interno de Cauchy (r_-) ao redor da singularidade. Esta configuração com dois horizontes é análoga a de Reissner-Nordstrom.
- 4. Para $q < 0$ e $m = \frac{\kappa^2 q}{2G} [\log(-\kappa^2 q) - 1]$ temos um buraco negro extremo com um horizonte (r_E).

Na Fig:7 temos um gráfico para o caso em que $q > 0$. Nesta uma superfície (Σ) é representada pelo espaço paramétrico (m, q, r) onde cada ponto da superfície representa um horizonte r_h para valores de $(m, q) \in \Sigma$.

Na Fig:8 vemos a superfície parametrizada para o caso $q < 0$. Nesta configuração, cada par de coordenadas (m, q) podem estar conectadas a duas singularidade r_+ e r_- . Na Fig:9 temos uma projeção da Fig:8. Esta projeção representa todos os valores de (m, q) associados ao horizonte (r_E) para a configuração 3.

Com o objetivo de encontrar uma compatificação para o espaço-tempo de galileon, consideremos agora a seguinte transformação de coordenadas:

$$\frac{2\beta}{v} dv = \frac{1}{f(r)} dr + dt, \quad (158)$$

$$\frac{2\beta}{u} du = \frac{1}{f(r)} dr - dt, \quad (159)$$

onde β é uma constante arbitrária. Nestas coordenadas avançadas (v) e retardadas (u) temos a métrica descrita como:

$$ds^2 = \frac{4\beta^2 f(r)}{uv} dudv + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (160)$$

Definindo:

$$r^* = \int \frac{1}{f(r)} dr, \quad (161)$$

realizando a integral de (158) e (159) temos:

$$r^* = \beta \log |uv|, \quad t = \beta \log |v/u|. \quad (162)$$

Consideremos agora a configuração 2 para horizontes. Neste caso temos um horizonte r_h análogo ao horizonte de Schwarzschild. Considerando o mapa (u_1, v_1) para $\beta > 0$ definimos uma subregião do espaço-tempo para $r > 0$:

$$u_1 v_1 = (r - r_h)^{(A(r)/\beta)} \sigma(r), \quad (163)$$

onde $A(r)$ e $\sigma(r)$ são funções positivo definidas. Estas funções fornecem uma convergência para qualquer subregião com $r > 0$. Na Fig:10 temos representado o diagrama tipo Kruskal para qualquer subregião coberta pelo mapa (u_1, v_1) . A região II representando o buraco negro. A diferença desta vez é que o horizonte de eventos não está localizada em $r = 2Gm$, mas sim em $r = r_h$.

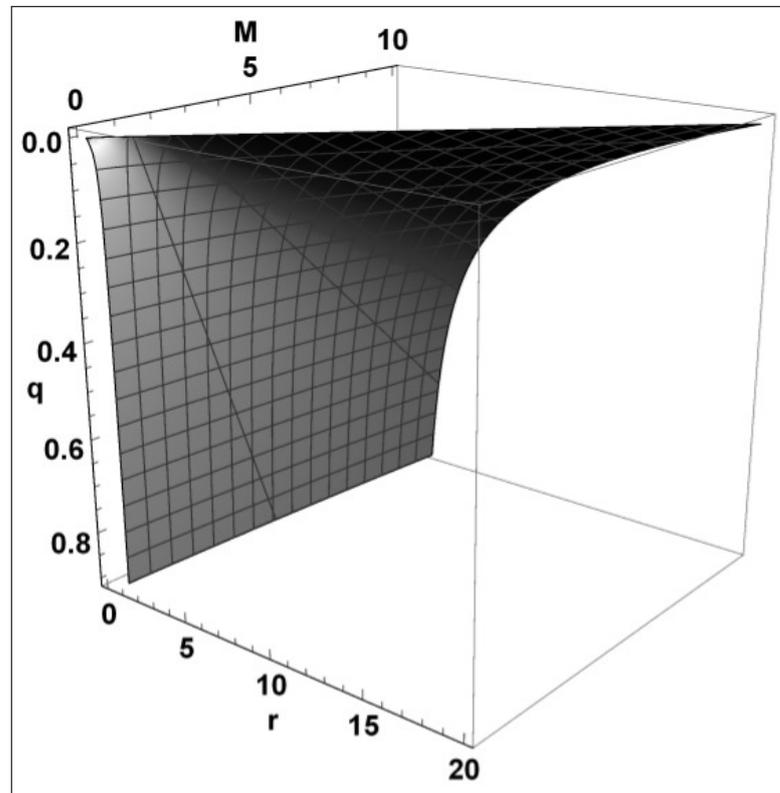
Temos por fim, que para a configuração 2 existe uma extensão maximal analítica para o espaço-tempo análoga ao de Schwarzschild. Este espaço-tempo está representado pelo diagrama de Penrose da Fig:11.

Seguindo o mesmo procedimento é possível obter uma extensão maximal para o espaço-tempo da configuração 3. Supondo um mapa (\bar{u}_1, \bar{v}_1) como uma subregião do espaço-tempo total para $r > r_-$. Podemos ver que para $\beta > 0$ o mapa é definido como:

$$|\bar{u}_1 \bar{v}_1| = \left| \frac{r - r_+}{r - r_-} \right|^{[\bar{h}(r)/\beta(r_+ - r_-)]} \bar{\sigma}(r), \quad (164)$$

onde novamente $\bar{h}(r)$ e $\bar{\sigma}(r)$ são funções positivo definidas. Nesta configuração o diagrama de Penrose é descrito com uma singularidade de Cauchy e uma singularidade externa assim como Reisner-Nordstrom. Esta diagrama está representada pela Fig:12.

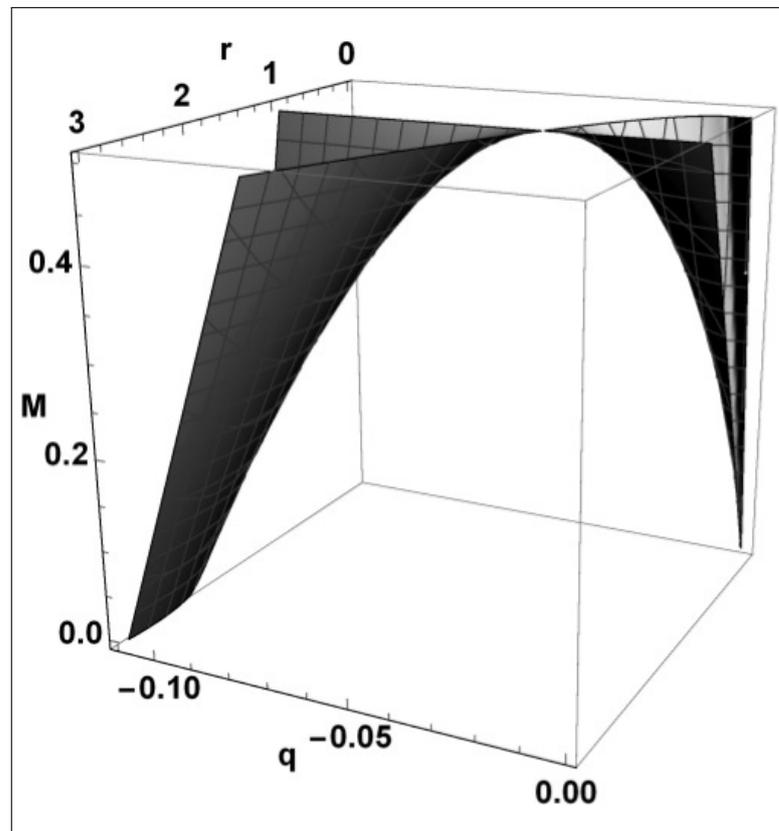
Figura 7 - Plot de $f(r) = 0$ para $q > 0$.



Legenda: Superfície que representa a região de horizonte de eventos para cada par (m, q) na configuração em que $q > 0$, fixando $G = 1$.

Fonte: O autor, 2020.

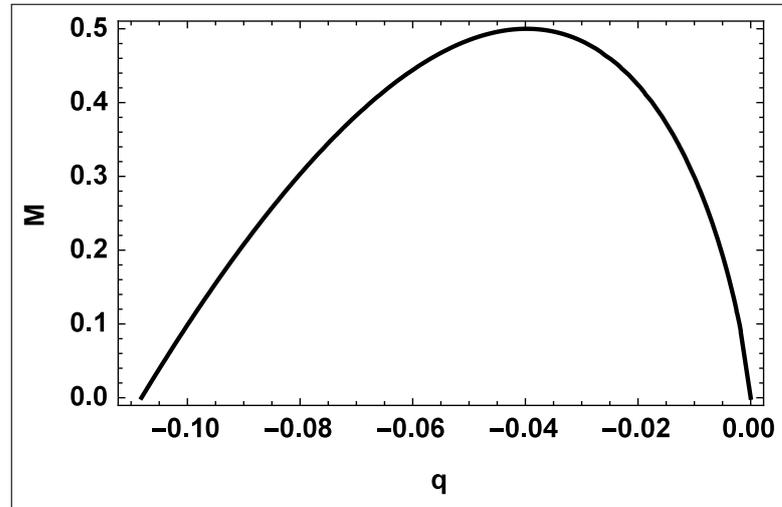
Figura 8 - Plot de $f(r) = 0$ para $q < 0$.



Legenda: Superfície onde cada par (m, q) esta conectada a r_E , ou conectada a r_+ e r_- na configuração em que $q < 0$, fixando $G = 1$.

Fonte: O autor, 2020.

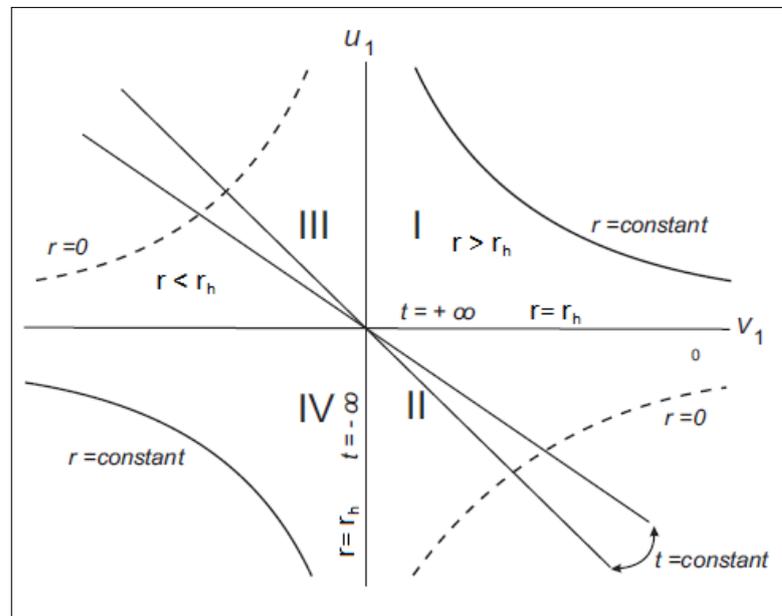
Figura 9 - Projeção de pares (m, q) no plano $r = 0$



Legenda: Projeção de todos os pares $(m, q) \in \Sigma$ conectados somente a r_E .

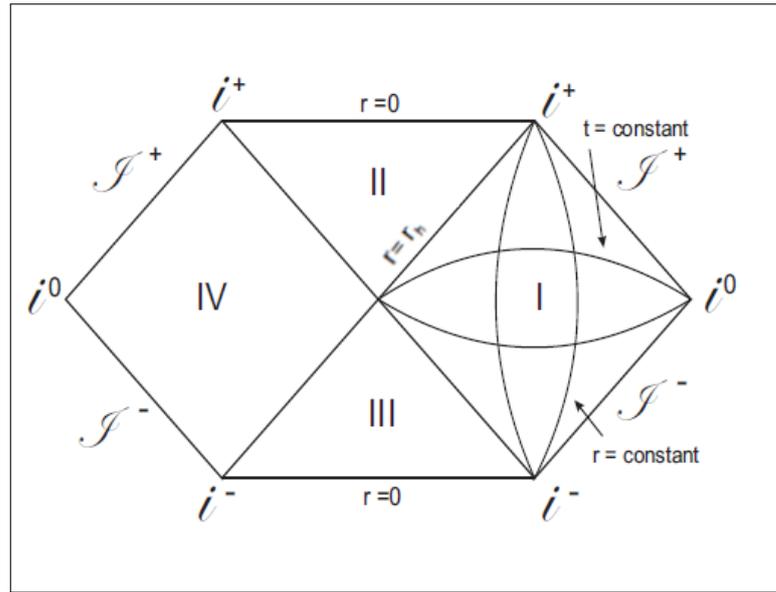
Fonte: O autor, 2020.

Figura 10 - Espaço-Tempo de Kruskal para $q > 0$.



Legenda: Representação do espaço-tempo para a subregião u_1, v_1 da configuração $q > 0$. Regiões *III*, *IV* são as extensões analíticas das regiões *I*, *II*. Com horizonte em r_h .

Fonte: O autor, 2020.

Figura 11 - Diagrama de Penrose para $q > 0$ 

Legenda: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo mapeado pelas coordenadas (u_1, v_1) na configuração $q > 0$.

Fonte: O autor, 2020.

3.3 Testes da Teoria

Usando como base os livros do (HARTLE, 2003) e do (ANDERSON; ANDERSON, 1967) iremos calcular alguns testes clássicos para a solução (147) obtida. Partimos de duas suposições:

- Se K é um vetor de Killing, temos que:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = cte, \quad (165)$$

é uma quantidade conservada.

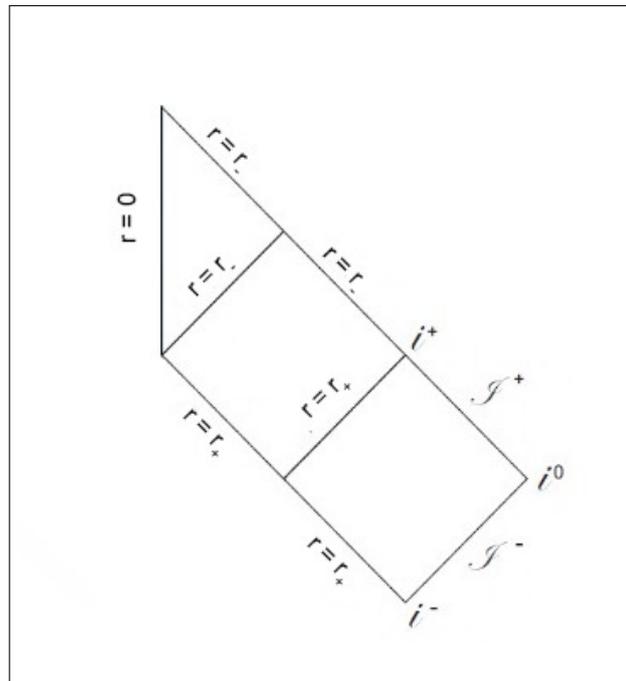
- Além dos vetores de Killing existe outra quantidade conservada definida por:

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}; \quad (166)$$

sendo esta a equação para a trajetória das geodésicas.

Sabemos que a métrica (126) é independente do tempo. Isto significa que existe um vetor de Killing associado a K com simetria sobre deslocamentos nas coordenada t ,

Figura 12 - Diagrama de Penrose para $q < 0$



Legenda: Diagrama de Penrose somente para a configuração 3. Com horizonte externo em r_+ e horizonte de Cauchy em r_- .

Fonte: O autor, 2020.

com componentes:

$$K^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (167)$$

Este vetor está associado a conservação da energia através de:

$$\begin{aligned} K_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} &= K^\nu g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ h(r) \frac{dt}{d\tau} &= E. \end{aligned} \quad (168)$$

Analogamente, por ser esféricamente simétrica, a métrica (126) é invariante por rotações. Esta invariância está associada a um vetor de Killing com componentes:

$$L^\alpha = (0, 0, 0, 1). \quad (169)$$

Este vetor por sua vez está associado à conservação do momento angular:

$$L^\alpha g_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (170)$$

Como esperamos que as órbitas estejam fixas no mesmo plano ($\theta = \pi/2$), temos:

$$r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = l, \quad (171)$$

onde l é o momento angular associado.

Abrindo em componentes (166) temos:

$$-\epsilon = -h(r) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + f(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2. \quad (172)$$

Substituindo nesta última as relações (168) e (171) e usando a relação de que $f(r) = h(r)$:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + h(r) \frac{l^2}{r^2} - E^2 = -\epsilon h(r). \quad (173)$$

3.3.1 Avanço de Perihélio

Estabeleremos agora $\epsilon = 1$ em (173), para partículas. Utilizando (153) e omitindo as constantes κ^2 e G momentaneamente para executar o cálculo, temos:

$$\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q \log(r)}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) + \left(\frac{dr}{d\phi} \frac{l^2}{r^2}\right)^2 = E^2. \quad (174)$$

Substituindo $r = 1/u$:

$$(1 - 2mu - uq \log(u)) (1 + l^2 u^2) + \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 l^2 = E^2. \quad (175)$$

Derivando esta equação com respeito a ϕ :

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \underbrace{\frac{1}{l^2}(m + q/2)}_{\text{Newton}} + \overbrace{u^2(3m + q/2)}^{\text{RG}} + \underbrace{\frac{q}{2l^2} \log(u) + \frac{3}{2} q u^2 \log(u)}_{\text{Galileon}}. \quad (176)$$

Podemos ver que antes mesmo de corrigir a RG a presença do campo de galileon corrige a solução Newtoniana. Realizando o procedimento clássico para resolver esta equação diferencial iremos tratar os termos referentes a RG e ao campo de Galileon como uma perturbação. Sendo assim temos a equação diferencial somente com o termo newtoniano:

$$\frac{d^2 u_0}{d\phi^2} + u_0 = \frac{1}{l^2}(m + q/2), \quad (177)$$

cuja solução:

$$u_0(\phi) = \frac{(m + q/2)}{l^2} (1 + e \cos \phi), \quad (178)$$

esta solução apesar da correção de $q/2$ ainda representada uma elipse com excentricidade e . Substituindo esta solução nos outros dois termos em equação (176):

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{(3m + q/2)(m + q/2)^2}{l^4} \{1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi\} \quad (179)$$

$$+ \frac{q}{2l^2} \log(2m(m + q/2)^2) + \frac{q}{2l^2} \log(1 + e \cos \phi). \quad (180)$$

Observe que o último termo referente a $u^2 \log u$ por ter um crescimento muito rápido pode ser desconsiderado na perturbação. Como a excentricidade $e \ll 1$, podemos expandir o

último termo ao redor de 1 tal que:

$$\log(1 + e \cos \phi) = e \cos \phi - \frac{1}{2}e^2 \cos^2 \phi; \quad |e \cos \phi| < 1. \quad (181)$$

Temos assim que resolver a equação diferencial:

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = A + Be \cos \phi + \mathcal{O}(e^2), \quad (182)$$

onde:

$$A = \frac{(3m + q/2)}{l^4} (m + q/2)^2 + \frac{q}{2l^2} \log(2m^2 + q);$$

$$B = (6m + q) \frac{(m + q/2)^2}{l^4} + \frac{q}{2l^2}.$$

Para excentricidade de órbitas planetárias observadas, termos de ordem $\mathcal{O}(e^2)$ podem ser ignorados pois produzem variações muito pequenas nas variações periódicas em u comparado com os outros. Sendo assim a solução para esta equação e separada em duas. O termo constante tem solução análoga a solução não perturbada tem forma:

$$u_1 = A(1 + e' \cos \phi). \quad (183)$$

O segundo termo podemos supor uma solução do tipo:

$$u_1 = C\phi \sin \phi. \quad (184)$$

Ao checarmos com a equação diferencial obtemos para a constante $C = Be/2$. Precisamos somar essa solução à solução não perturbada e temos por fim:

$$u(\phi) = \frac{(m + q/2)}{l^2} (1 + e \cos \phi) + A(1 + e' \cos \phi) + \frac{Be}{2} \phi \sin \phi. \quad (185)$$

Assim como para o cálculo para Schwarzschild, o segundo termo pode ser ignorado por ser apenas uma correção no valor das constantes para a solução não perturbada. Como essas constantes são valores observacionais eles podem ser unidos em uma única contribuição. Sendo assim podemos aproximar o resultado da equação (185) para:

$$u = \frac{(m + q/2)}{l^2} \{1 + e \cos(\phi - \delta w)\}; \quad (186)$$

onde:

$$\delta w = \frac{l^2 B \phi}{m + q/2}. \quad (187)$$

Conseqüentemente vemos que quando levamos em consideração o campo de galileon é gerada um avanço do perihélio por revolução de:

$$\delta w = \frac{\pi}{m + q/2} \left\{ \frac{q}{2} + \frac{(6m + q)}{l^2} (m + q/2)^2 \right\}. \quad (188)$$

Se considerarmos somente as ordens mais baixas em q de correção, simplicamos o resultado para:

$$\delta w = \frac{6\pi}{a(1 - \epsilon^2)} \{Gm + 2q/3\}. \quad (189)$$

3.3.2 Deflexão da Luz

A trajetória de um raio de luz também é determinada pela equação (173). Porém desta vez substituímos $\epsilon = 0$. Desta forma ficamos com:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \frac{E^2}{l^2} + 2mu^3 + qu^3 \log(u). \quad (190)$$

Após derivar obtemos:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \underbrace{u^2(3m + Q/2) + \frac{3}{2}Qu^2 \log(u)}_{\text{perturbação}}. \quad (191)$$

Assim como para o caso do avanço do perihélio iremos tratar os últimos dois termos como uma perturbação e podemos desconsiderar o último por crescer rápido demais. Sendo assim, a equação não perturbada:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0, \quad (192)$$

possui solução igual a:

$$u(\phi) = \frac{\cos \phi}{R}, \quad (193)$$

onde R é o valor mínimo para r . Substituindo no lado direito temos:

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{\cos^2 \phi}{R^2} (3m + q/2). \quad (194)$$

Vamos denominar $(3m + q/2)/R^2 = 3D$. Podemos então supor uma solução do tipo:

$$u_1(\phi) = D(\cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi). \quad (195)$$

Temos então que a solução completa é:

$$u(\phi) = \frac{\cos \phi}{R} + D(\cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi). \quad (196)$$

Multiplicando ambos os lados por rR e mapeando de volta ao sistema de coordenadas cartesiano por $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, encontramos:

$$x = R - RD \frac{(x^2 + 2y^2)}{r\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (197)$$

Assim como para Schwarzschild, para altos valores de $|y|$. A solução resume-se a:

$$x \approx R - 2RD|y|. \quad (198)$$

Deste resultado concluímos que assintoticamente, a órbita é uma linha reta no espaço. Temos que o ângulo de deflexão $\delta\phi$ determina o quanto um raio de luz passando por um campo de Schwarzschild-Galileon será desviado. Este ângulo é determinado por:

$$\delta\phi = 2RD = \frac{2(3m + q/2)}{3R}. \quad (199)$$

A magnitude do ângulo total de deflexão é definido por:

$$\Delta\phi = 2\delta\phi = \frac{4(m + q/6)}{R}. \quad (200)$$

3.4 Temperatura Hawking

O cálculo para a temperatura Hawking, utilizando uma aproximação semi-clássica pode ser encontrado originalmente em (HAWKING, 1975), ou de forma mais detalhada em (NAVARRO-SALAS; FABBRI, 2005). Utilizaremos a mesma abordagem para encontrarmos a temperatura Hawking da solução (147) em Horndeski. O ponto de partida é propor um campo escalar não massivo de Klein-Gordon ψ de fundo, definido em um

espaço-tempo (147). A propagação do campo escalar é descrita pela equação de onda covariante de Klein-Gordon:

$$\square\psi = 0 \quad (201)$$

Cuja solução é do tipo:

$$\psi_{\omega ml} = \frac{1}{r} R_{\omega l}(r^*) Y_{ml}(\theta, \phi) e^{-i\omega t}, \quad (202)$$

Solução da parte radial:

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^{*2}} + \omega^2 R_{\omega l} = 0 \Rightarrow R_{\omega l}(r^*) = e^{\pm i\omega r^*}. \quad (203)$$

Sendo assim o campo de Klein-Gordon pode ser descrito em duas ramificações:

$$\psi_U = \frac{1}{r} e^{-i\omega U} Y_{ml}(\theta, \phi) \quad (204)$$

$$\psi_V = \frac{1}{r} e^{-i\omega V} Y_{ml}(\theta, \phi) \quad (205)$$

onde U e V são coordenadas nulas definidas como:

$$V = t + r^*, \quad U = t - r^*. \quad (206)$$

O próximo passo importante para estudo da temperatura Hawking é a obtenção das transformações de Bogolubov. Para isso precisamos ter uma melhor definição da configuração de estados do nosso sistema. Podemos relacionar as soluções ψ_U, ψ_V aos estados de vácuo " $|out\rangle$ " (NAVARRO-SALAS; FABBRI, 2005). Sendo assim devemos descrever os estados " $|in\rangle$ ". Com a descrição dos dois estados de vácuo sabemos que qualquer solução ψ_U pode ser descrita em termos de $\psi_U(V, \bar{V})$ (HAWKING, 1975). Para isso vamos supor um espaço-tempo de "*Vaidya-Horndeski*". Temos que a fonte que gera a solução exterior é dada por uma casca esféricamente simétrica de distribuição de matéria. O espaço-tempo plano interno à distribuição é dado por:

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\bar{\theta}^2 + \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2). \quad (207)$$

Definimos $\bar{r} = r = a(t)$ como fator de escala que descreve a evolução da distribuição de matéria. Impomos que a métrica interior seja conectada a exterior pela equação:

$$-1 + \left(\frac{da}{d\bar{t}}\right)^2 = -f(a) \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 + \frac{1}{f(a)} \left(\frac{da}{d\bar{t}}\right)^2. \quad (208)$$

Nosso objetivo é determinar a temperatura Hawking para as configurações 2 e 3. Sendo

assim, iremos chamar os horizontes de eventos das duas configurações de r_H , por mais que eles sejam diferentes.

Assumindo que as geodésicas incidentes atingem a distribuição de matéria em um tempo \bar{t}_i , de modo que $a(\bar{t}_i) \equiv a_i \gg r_H$. Assim obtemos que $f(r) \sim 1$ e da equação (208) concluímos que:

$$\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 \simeq 1 \rightarrow t \simeq \bar{t}. \quad (209)$$

Definindo as coordenadas internas relacionadas ao estado $|in\rangle$:

$$\bar{V} = \bar{t} + \bar{r}, \quad \bar{U} = \bar{t} - \bar{r}; \quad (210)$$

terminamos com as relações:

$$V_i \simeq \bar{t} + r^* \rightarrow \bar{V}_i = V_i + a_i - r^*(a_i). \quad (211)$$

Quando $\bar{r} = 0$, temos relação entre \bar{U} e \bar{V} no centro de distribuição de matéria:

$$\bar{V}_0 = \bar{U}_0. \quad (212)$$

Vamos agora supor que as ondas emergem da distribuição de matéria quando $a(\bar{t}) \sim r_H$. Supondo \bar{t}_e o instante em que $a(\bar{t}_e) = r_H$, podemos expandir o fator de escala $a(\bar{t})$ em uma série de Taylor:

$$a(\bar{t}) = r_H + \dot{a}_e(\bar{t}_e - \bar{t}), \quad (213)$$

onde $da/dt|_{t_e}$.

Substituindo esta expansão em (208) obtemos que:

$$t = -\zeta \log |\bar{t}_e - \bar{t}|; \quad (214)$$

onde:

$$\zeta = \left(\frac{df}{dr}\right)^{-1} \Big|_{r_H} \equiv \frac{r_H^2}{r_H + \kappa^2 q}. \quad (215)$$

Da equação (161) obtemos:

$$r^* \simeq \zeta \log\left(\frac{r}{r_H} - 1\right); \quad (216)$$

e utilizando (213) obtemos para as duas configurações:

$$U_e \simeq -2\zeta \log(\bar{t}_e - t). \quad (217)$$

Consequentemente obtemos:

$$\bar{U}_e \propto \exp -\frac{U_e}{2\zeta}. \quad (218)$$

Na origem do sistema de coordenadas temos $\bar{U}_0 = \bar{V}_0$. Isso implica na relação entre as coordenadas nulas exteriores é dada por:

$$V \propto \exp -\frac{U}{2\zeta} \rightarrow U = -2\zeta \log V. \quad (219)$$

De posse da relação (219) e de (211) podemos finalmente expandir ψ_U em termos de ψ_V como:

$$\psi_U = \int_0^\infty \{\gamma_{\omega' \omega ml}^* e^{-i\omega' V} + \beta_{\omega' \omega ml} e^{i\omega' V}\} d\omega', \quad (220)$$

onde $\gamma_{\omega' \omega ml}^*$ e $\beta_{\omega' \omega ml}$ são os coeficientes de Bogoliubov. Sendo assim é possível mostrar (NAVARRO-SALAS; FABBRI, 2005) que:

$$|\gamma_{\omega' \omega ml}| = \exp(2\pi\omega\zeta) |\beta_{\omega' \omega ml}|. \quad (221)$$

Podemos agora determinar o número de partículas detectadas a um dado instante $t > t_e$, representada pela quantidade adimensional $N_{\omega ml}$. Para isso, necessitamos apenas da condição de ortogonalidade dos coeficientes de Bogoliubov:

$$\sum_{\omega'} \{|\gamma_{\omega' \omega ml}|^2 - |\beta_{\omega' \omega ml}|^2\} = 1. \quad (222)$$

Levando em consideração (221) podemos reescrever (222) como:

$$(e^{4\pi\zeta\omega} - 1) \sum_{\omega'} |\beta_{\omega' \omega ml}|^2 = 1. \quad (223)$$

Assim, quando $t \rightarrow +\infty$ temos:

$$N_{\omega ml} = \sum_{\omega'} |\beta_{\omega' \omega ml}|^2 = \frac{1}{e^{4\pi\omega\zeta} - 1}. \quad (224)$$

O valor esperado para $N_{\omega ml}$ coincide com o valor da distribuição de Planck para a radiação

térmica de bósons:

$$\frac{1}{e^{h\omega_j/k_B T} - 1}; \quad (225)$$

Onde encontramos uma temperatura:

$$T_H = \frac{1}{4\pi\zeta}. \quad (226)$$

Para a configuração 2 temos que a temperatura Hawking obtida é de:

$$T_H = \frac{r_H + \kappa^2 q}{4\pi r_H^2}. \quad (227)$$

Podemos observar que quando $q \rightarrow 0$, obtemos $T_H = 1/8\pi m$, que é o resultado esperado para o caso de Schwarzschild.

Para encontrarmos a temperatura para a configuração 3 manteremos $r_+ = r_H$ e denominaremos $r_- = r_C$. Assim utilizando igualdade:

$$f(r_H) = 0 = f(r_C), \quad (228)$$

obtemos que:

$$\kappa^2 q = \frac{r_H - r_C}{\log |r_C/r_H|}. \quad (229)$$

Com este resultado reescrevemos ζ como:

$$\zeta = \frac{r_H^2 \log |r_C/r_H|}{r_H(1 + \log |r_C/r_H|) - r_C}. \quad (230)$$

A partir do novo valor para ζ temos que a temperatura Hawking para a configuração 3 é descrita como:

$$T_H = \frac{r_H(1 + \log |r_C/r_H|) - r_C}{4\pi r_H^2 \log |r_C/r_H|}. \quad (231)$$

Para finalizar a análise, vamos observar qual seria a modificação gerada pela solução (147) na entropia de buracos negros.

Buracos negros não são compatíveis com a segunda lei da termodinâmica. Sendo assim, temos estabelecidas duas leis para buracos negros. A primeira lei vem de uma analogia com a primeira lei da termodinâmica (HAWKING, 1975). Podemos descrever o estado de equilíbrio de dois buracos negros vizinhos como:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ, \quad (232)$$

onde M é a massa do Buraco Negro, J seu momento angular, Ω a velocidade angular e A a área do horizonte de eventos. Se compararmos esta lei com a primeira lei da termodinâmica:

$$dU = TdS + PdV, \quad (233)$$

podemos relacionar a entropia com a área da seguinte maneira.

$$S_{BH} = \frac{A}{4}. \quad (234)$$

Bekenstein estabeleceu (BEKENSTEIN, 1973) uma *segunda lei generalizada* da termodinâmica de buracos negros. Esta lei descreve que: a soma da entropia do buraco negro com a entropia da matéria externa ao buraco negro nunca decresce. Em termos matemáticos, significa:

$$\delta \left(S + \frac{1}{4}A \right) \geq 0, \quad (235)$$

Estabelecidas as duas primeiras leis, para encontrarmos a extensão do resultado original (235), consideremos a equação:

$$f(r_H) = 1 - \frac{2m}{r_H} + \frac{\kappa^2 q \log(r_H)}{r_H} \equiv 0. \quad (236)$$

Temos que o diferencial exato desta equação é:

$$r_H dr_H = \zeta \left[2dm - \left(\frac{2m - r_H}{q} \right) dq \right]. \quad (237)$$

Ao definirmos a área externa ao horizonte como $A_{out} = 4\pi r_H^2$ obtemos:

$$dA_{out} = \frac{4}{T_H} \left[dm - \left(\frac{2m - r_H}{2q} \right) dq \right]. \quad (238)$$

Por fim vemos que a primeira lei estabelecida por Bekenstein continua valendo:

$$S = \frac{A_{out}}{4}; \quad (239)$$

onde ao considerarmos $q = cte$ retomamos a primeira lei para Schwarzschild. Consequentemente, temos que a segunda lei para um buraco negro de Horndeski é:

$$\delta \left(S + \frac{1}{4}A_{out} \right) \geq 0 \quad (240)$$

CONCLUSÃO

Nosso principal objetivo neste trabalho era realizar um estudo de soluções de buraco negro que violem a conjectura *no hair* e ainda sejam fisicamente consistentes. Utilizando como modelo base a teoria de Horndeski encontramos uma solução esfericamente simétrica e assintoticamente plana. Sabíamos como violar a conjectura graças aos trabalhos de Babichev e Lam Hui. Assim, violamos a condição que determina que *somente potências positivas das derivadas das funções G_i podem estar contidas na equação de campo*. Sendo assim, encontramos uma solução quando consideramos somente as contribuições advindas dos termos \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_4 . Nossa solução poderia ser feita considerando um campo dinâmico $\phi = \phi(r, t)$. Entretanto seria preciso conferir antes a estabilidade deste tipo de solução.

Observamos que nossa solução apresentava 4 configurações distintas onde uma delas representava uma singularidade nua. Obtivemos uma extensão maximal para o espaço-tempo em duas configurações. Na configuração 2 para $q > 0$ temos um diagrama de penrose análogo ao de Schwarzschild pois esta configuração recia o mesmo comportamento deslocando o horizonte de eventos de $r = 2m$ para r_h . Para a configuração 3 $q < 0$ obtemos um diagrama para o espaço-tempo com um horizonte de eventos usual em r_+ e um horizonte de Cauchy em r_- . Esta configuração é análoga à representação para Reissner-Nordstrom.

Um resultado importante obtido é da temperatura de Hawking e para a entropia de buracos negros. Utilizando a abordagem semi-clássica estabelecida por Hawking re-produzimos o cálculo para a solução de Horndeski. Estes resultados mostraram que existe correção na temperatura e na entropia por influência da função de Horndeski.

Obtemos uma solução em primeira ordem para os testes clássicos de deflexão da luz e avanço de perihélio planetário em sistemas locais. Entretanto, é preciso finalizar a análise deste resultado substituindo valores observacionais e checar se o valor obtido para a correção encontra-se dentro da margem de erro observacional.

Ainda há outras análises a serem feitas dentro deste modelo ou até mesmo dentro do modelo de Horndeski. Pode-se estudar o potencial efetivo em busca de fotoesfera pois é esperado encontrarmos uma fotoesfera com um raio deslocado. Podemos estudar o lenteamento forte desta solução. Podemos estudar a função de correlação na vizinhança do buraco negro e ver como seria ao redor de um buraco negro com cabelo. Esta correlação pode ser relevante para o paradoxo de informação de buracos negros. Seria ainda possível buscar uma nova solução utilizando outras contribuições das lagrangianas de Horndeski, por exemplo as contribuições $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ que já mostraram ser estáveis.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. *et al.* Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physics Review Letters*, American Physical Society, v. 116, 061102, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102>. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- AGHANIM, N. *et al.* Planck 2013 results. XXVII. Doppler boosting of the CMB: Eppure si muove. *Astronomy Astrophysics*, EDP Sciences, v. 571, p. A27, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321556>. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321556>.
- AKIYAMA, K. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring. *Astrophysics Journal Letters*, v. 875, n. 1, p. L5, 2019.
- AKIYAMA, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophysics Journal*, v. 875, n. 1, p. L1, 2019.
- AMENDOLA, L.; TSUJIKAWA, S. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- ANDERSON, J.L. *Principles of Relativity Physics*. Cambridge: Academic Press, 1967. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=mAVRAAAAMAAJ>.
- BABICHEV, E. Galileon accretion. *Physical Review D*, v. 83, n. 2, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.02400>. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.024008>.
- BABICHEV, E.; CHARMOUSIS, C.; LEHÉBEL, A. Asymptotically flat black holes in horndeski theory and beyond. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2017, n. 04, p. 027–027, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/04/027> Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2017/04/027>.
- BEKENSTEIN, J.D. Novel “no-scalar-hair” theorem for black holes. *Physics Review D*, v. 51, n. 12, R6608, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.R6608>. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.51.R6608>.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. *Physics Review D*, v. 7, p. 2333–2346, 1973. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333>. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>
- BERGLIAFFA, S. E. P.; MAIER, R. On the stability of cubic galileon accretion. *Annals of Physics*, v. 384, p. 1–10, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.06.014>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S000349161730180X?via%3Dihub>.
- BROUZAKIS, N. *et al.* Quantum corrections in galileon theories. *Physical Review D*, v. 89, n. 125017, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.125017> Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.89.125017>
- CARROLL, S. M. The cosmological constant. *Living Reviews in Relativity*, v. 4, n. 1, 2001. DOI: <https://doi.org/10.12942/lrr-2001-1> Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2001-168>
- CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford: Clarendon Press, 1998. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=LBOVcrzFhsC>.

COC, A.; VANGIONI, E. Primordial nucleosynthesis. *International Journal of Modern Physics E*, v. 26, n. 08, p. 1741002, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218301317410026>. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218301317410026>.

COLLETT, T. E. *et al.* A precise extragalactic test of general relativity. *Science*, v. 360, n. 6395, p. 1342–1346, 2018. DOI: 10.1126/science.aao2469. Disponível em: <https://science.sciencemag.org/content/360/6395/1342>

CRISOSTOMI, M. *et al.* Horndeski: beyond, or not beyond?, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2016, n. 03, p. 038–038, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/03/038>. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/03/038>

DIAS, Ó. J. C.; GODAZGAR, M.; SANTOS, J. E. Linear mode stability of the kerr-newman black hole and its quasinormal modes. *Physics Review Letters*, v. 114, 151101, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.151101>. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.114.151101>.

DYSON, F. W.; EDDINGTON, A. S.; DAVIDSON, C. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1920. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1920.0009> Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.1920.0009>

FREEMAN, W.H. The Mathematics of curved spacetime. *In*: MISNER, C.W.; THORNE, K.S.; WHEELER, J.A. (org.). *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1973. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=w4Gigq3tY1kC>>.

GLEYZES, J. *et al.* Exploring gravitational theories beyond horndeski. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2015, n. 02, p. 018–018, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/02/018>. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2015/02/018>.

GOLDHABER, A. S.; NIETO, M. M. Photon and graviton mass limits. *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 1, p. 939–979, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.939>. Disponível em: <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.82.939>.

HARTLE, J.B. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Boston: Addison- Wesley, 2003. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZHgpAQAAAMAJ>>.

HAWKING, S. Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, v. 43, n. 9, p. 199–220, 1975. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02345020>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02345020>.

HORNDENSKI, G. W. Second-order scalar-tensor field equations in a four- dimensional space. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 10, n. 6, p. 363–384, 1974. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01807638>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF01807638>.

HUI, L.; NICOLIS, A. No-Hair Theorem for the Galileon. *Physics Review Letters*, v. 110, p. 241104, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.241104>. Disponível em: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.110.241104>.

JACKSON, J.D. *CLASSICAL ELECTRODYNAMICS*. 3. ed. New Delhi: Wiley India Pvt. Limited, 2007. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=8qHCZjJHRUGC>>.

- KASE, R.; TSUJIKAWA, S. Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review. *International Journal of Modern Physics D*, v. 28, n. 05, 1942005, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218271819420057>. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271819420057>.
- KOBAYASHI, T. Horndeski theory and beyond: a review. *Reports on Progress in Physics*, v. 82, n. 8, p. 086901, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab2429>. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6633/ab2429>.
- LOVELOCK, D. The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 12, n. 12, 498, 1971. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1665613>. Disponível em: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1665613>.
- MODAK, B.; BOSE, R. N. Late time acceleration with gauss bonnet interaction. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 51, 09 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-012-1156-0>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10773-012-1156-0>.
- MONCRIEF, V. Stability of Reissner-Nordstrom black holes. *Physics Review D*, v. 10, p. 1057–1059, 1974. DOI: 10.1103/PhysRevD.10.1057. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/97168>.
- MONCRIEF, V. Stability of stationary, spherical accretion onto a schwarzschild black hole. *Astrophysical Journal*, v. 235, p. 1038-1046, 1980. DOI: 10.1086/157707. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/full/1980ApJ...235.1038M>.
- NAVARRO-SALAS, J.; FABRI, A. *Modeling Black Hole Evaporation*. World Scientific Publishing Company, 2005.
- NICOLIS, A.; RATAZZI, R.; TRINCHERINI, E. The Galileon as a local modification of gravity. *Physics Review D*, v. 79, p. 064036, 2009. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.064036. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0811.2197>.
- NORDSTROM, G. On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, v. 20, p. 1238–1245, 1918.
- OVERDUIN, J. et al. STEP and fundamental physics. *Classical and Quantum Gravity*, v. 29, p. 184012, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/18/184012>. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/29/18/184012/pdf>.
- OZSVÁTH, I. The finite rotating universe revisited. *Classical and Quantum Gravity*, v. 14, n. 1A, p. A291–A297, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/1A/022>. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/14/1A/022>.
- PAZ, C.; A. R.; SALIM, J. M.; BERGLIAFFA, S. E. P. Stability of the accretion of a ghost condensate onto a Schwarzschild black hole. *Physics Review D*, v. 90, n. 12, p. 124075, 2014. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.124075. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/1286611>.
- REGGE, T.; WHEELER, J. A. Stability of a Schwarzschild singularity. *Physics Review*, v. 108, p. 1063–1069, 1957. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1063>. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.108.1063>.
- REISSNER, H. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916. DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19163550905>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.19163550905>.

REZZOLLA, L.; ZANOTTI, O. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford: Oxford University Press, 2013. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=KU2oAAAAQBAJ>.

RIESS, A. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 116, n. 3, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1086/300499>. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/300499/meta>.

SPACE TELESCOPE SCIENCE INSTITUTE. *HUBBLESITE*, 2020. Disponível em: <https://hubblesite.org/hubble-30th-anniversary/hubbles-exciting-universe/measuring-the-universes-expansion-rate>. Acesso em: 27 de nov. de 2020.

TRAUTMAN, A. Einstein-Cartan theory. In: FRANCOISE, G.P.; NABER, G.L.; TSOU, S.T. (org.). *Encyclopedia of Mathematical Physics*. Oxford: Elsevier, 2006. p. 189-195

TSAMPARLIS, M. On the palatini method of variation. *Journal of Mathematical*, v. 19, n. 3, p. 555–557, 1978. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.523699>. Disponível em: <https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.523699>.

WANG, Q.; ZHU, Z.; UNRUH, W. How the huge energy of quantum vacuum gravitates to drive the slow accelerating expansion of the universe. *Physics Review D*, v. 95,103504, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.103504>. Disponível em: <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.95.103504>.

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley and Sons, 1972.. Disponível em: <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC6.W431>

WEINBERG, S.; WITTEN, E. Limits on Massless Particles. *Physics Letters B*, v. 96, p. 59–62, 1980. DOI: 10.1016/0370-2693(80)90212-9. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/154422>.

ZEE, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition*. Princeton: Princeton University Press, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=n8Mmbjtco78C>.

ANEXO A – Variação da ação de uma Lagrangiana geral de galileon

Seja a ação de Galileon até quarta ordem definida como:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \{G_2(X, \phi) - G_3(X, \phi) \square \phi + G_4(X, \phi) R + G_{4,X}(X, \phi) ((\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2)\} \quad (241)$$

Calcularemos a variação com relação ao campo (ϕ) e ao tensor métrico ($g^{\mu\nu}$) ordem à ordem a ordem respectivamente. Obs:

$$\delta_\phi X = -g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} (\delta\phi)_{,\nu}; \quad (242)$$

$$\delta_g(X) = -\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \delta g^{\mu\nu}; \quad (243)$$

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{2} [\nabla_\mu (g^{\rho\lambda}) g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} + \nabla_\nu (g^{\rho\lambda}) g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} - \nabla_\lambda (g^{\rho\lambda}) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}]. \quad (244)$$

Utilizaremos todas as seguintes propriedades:

$$\bullet \delta R_{\beta\rho\sigma}^\alpha = \nabla_\rho \delta \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha - \nabla_\sigma \delta \Gamma_{\rho\beta}^\alpha \quad (245)$$

$$\bullet \delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\sigma \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \nabla_\beta \delta \Gamma_{\alpha\sigma}^\sigma \quad (246)$$

$$\bullet \delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (247)$$

$$\bullet \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma = \frac{g^{\sigma\lambda}}{2} (\nabla_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \quad (248)$$

$$\bullet \delta g_{\mu\gamma} = -g_{\mu\nu} g_{\sigma\gamma} \delta g^{\nu\sigma} \quad (249)$$

$$\bullet \delta \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi = \delta(g^{\mu\nu}) (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \quad (250)$$

$$\bullet \delta \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = -\delta(\Gamma_{\mu\nu}^\rho) \partial_\rho \phi \quad (251)$$

$$\bullet \delta \square \phi = \delta(g^{\mu\nu}) (\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho \phi) + \delta(-\Gamma_{\mu\nu}^\rho) \partial_\rho \phi g^{\mu\nu}. \quad (252)$$

A.1 Termo Quadrático \mathcal{L}_2

Seja:

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} G_2(X). \quad (253)$$

Realizando a variação com respeito à ϕ , obtemos:

$$\delta_\phi G_2 = G_{,X} \delta_\phi X = -G_{,X} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} (\delta\phi)_{,\nu}.$$

Portanto:

$$\delta_\phi S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \nabla_\nu (G_{,X} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu}) \} \delta\phi.$$

Definimos a 4-corrente como:

$$j_2^\nu = G_{,X} \phi^\nu. \quad (254)$$

Realizando a variação em relação a métrica, temos:

$$\delta_g S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_2 - \frac{1}{2} G_{2,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right\}. \quad (255)$$

Definimos o tensor energia momento como:

$$T_{\mu\nu}^2 = +\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} G_2 + G_{2,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}). \quad (256)$$

Para \mathcal{L}_2 temos então:

$$j_2^\nu = G_{,X} \phi^\nu; \quad T_{\mu\nu}^2 = +\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} G_2 + G_{2,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}).$$

A.2 Termo Cúbico

Seja:

$$S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ -G_3(X) \square\phi \}. \quad (257)$$

Fazendo a variação com relação a ϕ :

$$\begin{aligned} \delta_\phi G_3 &= G_{3,X} \delta_\phi X = -G_{3,X} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} (\delta\phi)_{,\nu}; \\ \delta_\phi \square\phi &= \delta_\phi [g^{\mu\nu} (\phi_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \phi_{,\rho})] = \square\delta\phi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta_\phi S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ -\nabla_\nu [G_{3,X} \phi^\nu \square\phi + \nabla^\nu G_3] \} \delta\phi.$$

Porém $\nabla^\nu G_3 = G_{3,X} X^{,\nu}$. Escrevemos:

$$\delta_\phi S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ -\nabla_\nu [G_{3,X} \phi^\nu \square\phi + G_{3,X} X^{,\nu}] \} \delta\phi. \quad (258)$$

Definimos então a 4-corrente como:

$$j_3^\nu = -G_{3,X}(\phi^\nu \square \phi + X^\nu). \quad (259)$$

A variação com relação a métrica:

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} L_3 &= \delta \int d^4x \sqrt{-g} \{G_3 \square \phi\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} G_3 \square \phi - \delta(G_3) \square \phi - G_3 \delta(\square \phi) \right\}. \end{aligned}$$

$$\delta_g G_3 = -\frac{1}{2} G_{3,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \delta g^{\mu\nu}; \quad (260)$$

$$\delta \square \phi = \delta(g^{\mu\nu}) (\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho \phi) + \delta(-\Gamma_{\mu\nu}^\rho) \partial_\rho \phi g^{\mu\nu}. \quad (261)$$

Substituindo (244) em (261) temos a forma final de S_3 :

$$\delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \square \phi [G_{3,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + G_3 g_{\mu\nu}] - G_3 \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} (2 \nabla_\nu (G_3 \phi_\mu) - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_\lambda (G_3 \phi_\rho)) \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (262)$$

Definimos como o tensor energia momento:

$$T_{\mu\nu}^3 = +\frac{1}{2} \square \phi [G_{3,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + G_3 g_{\mu\nu}] - G_3 \nabla_\mu \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} (2 \nabla_\nu (G_3 \phi_\mu) - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_\lambda (G_3 \phi_\rho)),$$

ou,

$$T_{\mu\nu}^3 = -\frac{1}{2} G_{3,X} \{ \square \phi \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} X_{,\alpha} \phi^\alpha + X_{,\mu} \phi_{,\nu} + X_{,\nu} \phi_{,\mu} \} \quad (263)$$

Para \mathcal{L}_3 temos então:

$$j_3^\nu = -G_{3,X}(\phi^\nu \square \phi + X^\nu); \quad T_{\mu\nu}^3 = -\frac{1}{2} G_{3,X} \{ \square \phi \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} X_{,\alpha} \phi^\alpha + X_{,\mu} \phi_{,\nu} + X_{,\nu} \phi_{,\mu} \}.$$

A.3 Termo Quártico

Seja:

$$S_4 = \delta_\phi S_4 = \delta \int d^4x \sqrt{-g} \{ G_4 R + G_{4,X} ((\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2) \} \quad (264)$$

Variando com relação a ϕ :

$$\delta_\phi S_4 = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \delta(G_4)R + \delta(G_{4,X})((\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2) + G_{4,X} \delta((\square\phi)^2) - G_{4,X} \delta((\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2) \}$$

onde,

$$\begin{aligned} \delta_\phi G_4 &= G_{4,X} \delta_\phi X = -G_{4,X} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} (\delta\phi)_{,\nu}; \\ \delta_\phi G_{4,X} &= G_{4,XX} \delta_\phi X = -G_{4,XX} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} (\delta\phi)_{,\nu}; \\ \delta_\phi (\square\phi)^2 &= 2\square\phi (\delta\square\phi) = 2\square\phi \square\delta\phi; \\ \delta_\phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) &= \nabla_\mu \nabla_\nu \delta\phi; \\ \delta_\phi (\nabla^\mu \nabla^\nu \phi) &= \nabla^\mu \nabla^\nu \delta\phi. \end{aligned}$$

Definimos a 4-corrente como:

$$\begin{aligned} j_4^\nu &= G_{4,X} (\nabla^\nu \phi) R + G_{4,XX} (\nabla^\nu \phi) (\square\phi)^2 - G_{4,XX} \nabla^\nu \phi (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi) (\nabla^\alpha \nabla^\beta \phi) \\ &\quad + 2G_{4,XX} (X^{,\nu} \square\phi - X_{,\mu} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi) - 2G_{4,X} R^{\nu\sigma} \nabla_\sigma \phi. \end{aligned}$$

Realizando agora a variação em relação à métrica temos:

$$\begin{aligned} \delta S_4 &= \int d^4x \sqrt{-g} \{ \delta(G_4)R + \delta(R)G_4 + \delta(G_{4,X})((\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2) \\ &\quad + G_{4,X} \delta((\square\phi)^2) - G_{4,X} \delta((\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2) \} + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \mathcal{L}_4; \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \delta_g G_4 &= -\frac{1}{2} G_{4,X} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \delta g^{\mu\nu}; \\ \delta_g G_{4,X} &= -\frac{1}{2} G_{4,XX} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Calculando cada um dos termos como uma integral separada temos então:

Int I

$$\int d^4x \sqrt{-g} \{ \delta(G_4)R \} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{G_{4,X} R}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\}.$$

Int II

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} \{\delta(R)G_4\} &= \int d^4x \sqrt{-g} \{\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} G_4 + g^{\mu\nu} G_4 \delta R_{\mu\nu}\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \{\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} G_4\} + \int d^4x \sqrt{-g} \{-\nabla_\rho (G_4 g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho + \nabla_\nu (G_4 g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ -[\nabla_\mu (\nabla_\rho g^{\rho\lambda} G_4 g^{\mu\nu}) g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} + \nabla_\nu (\nabla_\rho g^{\rho\lambda} G_4 g^{\mu\nu}) g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} - \nabla_\lambda (\nabla_\rho g^{\rho\lambda} G_4 g^{\mu\nu}) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}] \right. \\ &\quad \left. \nabla_\mu (\nabla_\nu g^{\rho\lambda} G_4 g^{\mu\nu}) g_{\lambda\alpha} g_{\rho\beta} + \nabla_\rho (\nabla_\nu g^{\rho\lambda} G_4 g^{\mu\nu}) g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} - \nabla_\lambda (\nabla_\nu g^{\rho\lambda} G_4 g^{\mu\nu}) g_{\mu\alpha} g_{\rho\beta} \right\} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{2} \\ &= \left\{ -[\nabla_\beta \nabla_\alpha (G_4) + \nabla_\beta \nabla_\alpha (G_4) - g_{\alpha\beta} \square G_4] + g_{\alpha\beta} \square G_4 + \nabla_\alpha \nabla_\beta G_4 - \nabla_\beta \nabla_\alpha G_4 \right\} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{2} \\ &= \left\{ -\nabla_\beta \nabla_\alpha (G_4) + g_{\alpha\beta} \square G_4 + \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \nabla_\beta G_4 - \nabla_\beta \nabla_\alpha G_4) \right\} \delta g^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Logo:

$$II = R_{\mu\nu} G_4 - \nabla_\nu \nabla_\mu (G_4) + g_{\mu\nu} \square G_4.$$

Int III

$$\begin{aligned} &\int d^4x \sqrt{-g} \{\delta(G_{4,X}) ((\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2)\} = \\ &\int d^4x \sqrt{-g} \left\{ +\frac{1}{2} G_{,XX} \phi_\mu \phi_\nu [(\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi)(\nabla^\alpha \nabla^\beta \phi) - (\square\phi)^2] \right\} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Int IV

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} \{ \delta(\square\phi)^2 G_{4,X} \} = \int d^4x \sqrt{-g} \{ G_{4,X} 2\square\phi \delta(\square\phi) \} \\
& = \int d^4x \sqrt{-g} \{ G_{4,X} 2\square\phi [\nabla_\mu \nabla_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} - \phi_{/\rho} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho] \} \\
& = \int d^4x \sqrt{-g} \{ G_{4,X} 2\square\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \delta g^{\mu\nu} \} + \int d^4x \sqrt{-g} \{ -G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho \}.
\end{aligned}$$

a integral azul será:

$$\begin{aligned}
& = \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{2} [\nabla_\mu (-G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho} g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda}) g_{\lambda\alpha} g_{\nu\beta} + \nabla_\nu (-G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho} g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda}) g_{\lambda\alpha} g_{\mu\beta} \\
& \quad - \nabla_\lambda (-G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho} g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda}) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}] \\
& = \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{2} [-2\nabla_\beta (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\alpha}) - 2\nabla_\beta (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\alpha}) + 2g_{\alpha\beta} \nabla^\rho (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho})] \\
& = [-2\nabla_\beta (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\alpha}) + g_{\alpha\beta} \nabla^\rho (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho})] \delta g^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Logo :

$$IV = G_{4,X} 2\square\phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - 2\nabla_\beta (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\alpha}) + g_{\alpha\beta} \nabla^\rho (G_{4,X} 2\square\phi \phi_{/\rho}).$$

 Int V

$$\begin{aligned}
 & \int d^4x \sqrt{-g} \{-G_{4,X} \delta(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2\} = \int d^4x \sqrt{-g} \{-G_{4,X} \delta(g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \nabla_\gamma \nabla_\delta \phi)\} \\
 & = -G_{4,X} \delta(g^{\mu\gamma}) g^{\nu\delta} \nabla_\gamma \nabla_\delta \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - G_{4,X} g^{\mu\gamma} \delta(g^{\nu\delta}) \nabla_\gamma \nabla_\delta \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \\
 & \quad - G_{4,X} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \delta(\nabla_\gamma \nabla_\delta \phi) \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - G_{4,X} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \nabla_\gamma \nabla_\delta \phi \delta(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \\
 & = -G_{4,X} \delta(g^{\mu\nu}) g^{\gamma\delta} \nabla_\nu \nabla_\delta \phi \nabla_\mu \nabla_\gamma \phi - G_{4,X} g^{\delta\gamma} \delta(g^{\nu\mu}) \nabla_\gamma \nabla_\mu \phi \nabla_\delta \nabla_\nu \phi \\
 & \quad - G_{4,X} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \delta(\nabla_\gamma \nabla_\delta \phi) \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - G_{4,X} g^{\mu\gamma} g^{\nu\delta} \nabla_\gamma \nabla_\delta \phi \delta(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \\
 & = -2G_{4,X} g^{\gamma\delta} \nabla_\nu \nabla_\delta \phi \nabla_\mu \nabla_\gamma \phi \delta(g^{\mu\nu}) - G_{4,X} \nabla^\mu \nabla^\nu \phi (-\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho) \phi_{/\rho} - G_{4,X} \nabla^\gamma \nabla^\delta \phi (-\delta\Gamma_{\gamma\delta}^\rho) \phi_{/\rho}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & \{-2G_{4,X} g^{\gamma\delta} \nabla_\nu \nabla_\delta \phi \nabla_\mu \nabla_\gamma \phi + \nabla_\rho (G_{4,X} \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \phi_{/\mu}) \\
 & + \nabla_\rho (G_{4,X} \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \phi_{/\mu}) - \nabla^\rho (G_{4,X} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi_{/\rho})\} \delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

 end

Desto forma definimos o tensor energia momento como:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu}^4 = & -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (G_4 R + G_{4,X} ((\square\phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2)) - \frac{1}{2} G_{4,X} R \phi_\mu \phi_\nu \\
 & R_{\mu\nu} G_4 - \nabla_\nu \nabla_\mu (G_4) + g_{\mu\nu} \square G_4 \\
 & G_{4,X} 2 \square \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - 2 \nabla_\nu (G_{4,X} \square \phi \phi_{/\mu}) + g_{\mu\nu} \nabla^\rho (G_{4,X} \square \phi \phi_{/\rho}) \\
 & - 2 G_{4,X} g^{\gamma\delta} \nabla_\nu \nabla_\delta \phi \nabla_\mu \nabla_\gamma \phi + \nabla_\rho (G_{4,X} \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \phi_{/\mu}) \\
 & + \nabla_\rho (G_{4,X} \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \phi_{/\mu}) - \nabla^\rho (G_{4,X} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi_{/\rho}) \\
 & + \frac{1}{2} G_{,XX} \phi_\mu \phi_\nu [(\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi)(\nabla^\alpha \nabla^\beta \phi) - (\square\phi)^2]
 \end{aligned} \tag{265}$$

Utilizando as propriedades:

- $\nabla_\nu \nabla_\mu (G_4) = G_{4,XX} X_{,\nu} X_{,\mu} + G_{4,X} \nabla_\nu \nabla_\mu X$
- $\square G_4 = G_{4,XX} X_{,\alpha} X^{,\alpha} + G_{4,X} \square X$
- $\nabla^\rho (G_{4,X} \square \phi \phi_\rho g_{\mu\nu}) = \nabla_\beta (G_{4,X} \square \phi \phi^\beta g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu} [G_{4,XX} X_{,\beta} \square \phi \phi^\beta + G_{4,X} \nabla_\beta \square \phi \phi^\beta + G_{4,X} (\square \phi)^2]$
- $2\nabla_\nu (G_{4,X} \square \phi \phi_\mu) = 2[G_{4,XX} X_{,\nu} \square \phi \phi_\mu + G_{4,X} \nabla_\nu \square \phi \phi_\mu + G_{4,X} \square \phi \nabla_\nu \nabla_\mu \phi]$
- $\nabla_\rho (G_{4,X} \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \phi_\mu) = G_{4,XX} X_{,\rho} \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \phi_\mu + G_{4,X} \square \nabla_\nu \phi \phi_\mu + G_{4,X} \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \nabla_\rho \nabla_\mu \phi$
- $\nabla_\rho (G_{4,X} \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \phi_\mu) = G_{4,XX} X_{,\rho} \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \phi_\mu + G_{4,X} \nabla_\rho \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \phi_\mu + G_{4,X} \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \nabla_\mu \phi$
- $\nabla_\beta (G_{4,X} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi^\beta) = G_{4,XX} X_{,\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi^\beta + G_{4,X} \nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi^\beta + G_{4,X} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi$

simplificamos (265) e reescrevemos como:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^4 = & -G_{4,XX} [g_{\mu\nu} X_{,\beta} \square \phi \phi^\beta - 2X_{,\nu} \square \phi \phi_\mu + X_{,\rho} \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \phi_\mu \\
& + X_{,\rho} \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \phi_\mu - X_{,\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi^{,\beta} + g_{\mu\nu} X_{,\alpha} X^{,\alpha} - X_{,\nu} X_{,\mu} \\
& + \frac{1}{2} \phi_\mu \phi_\nu [(\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi)(\nabla^\alpha \nabla^\beta \phi) - (\square \phi)^2] \\
& - G_{4,X} [g_{\mu\nu} \nabla_\beta \square \phi \phi^\beta + g_{\mu\nu} (\square \phi)^2 - 2\nabla_\nu \square \phi \phi_\mu \\
& - 2\square \phi \nabla_\nu \nabla_\mu \phi + \square \nabla_\nu \phi \phi_\mu + \nabla^\rho \nabla_\nu \phi \nabla_\rho \nabla_\mu \phi \\
& + \square \nabla_\nu \phi \phi_\mu + \nabla_\nu \nabla^\rho \phi \nabla_\rho \nabla_\mu \phi - \nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi^{,\beta} \\
& - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \square \phi - 2\nabla_\nu \nabla^\gamma \phi \nabla_\mu \nabla_\gamma \phi + 2\square \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \\
& + g_{\mu\nu} \square X - \nabla_\nu \nabla_\mu X - \frac{1}{2} R \phi_\mu \phi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} ((\square \phi)^2 - (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi)^2)].
\end{aligned}$$

Os termos destacados em vermelho acima se anulam e os termos destacados em azul que seriam derivadas superiores a segunda ordem podem ser reescritos como termos de curvatura da seguinte maneira:

- $\square \nabla_\nu \phi \phi_\mu - \nabla_\nu \square \phi \phi_\mu = R_{\sigma\nu} \phi^{,\sigma} \phi_{,\mu};$
- $-\nabla_\nu \nabla_\mu X - \nabla_\beta \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \phi^{,\beta} = R_{,\nu\gamma\mu}^\sigma \phi_{,\sigma} \phi^{,\gamma} + \nabla_\gamma \nabla_\nu \phi \nabla_\gamma \nabla_\mu \phi;$
- $\square X + \nabla_\beta \square \phi \phi^\beta = -R_{\sigma\gamma} \phi_{,\sigma} \phi_{,\gamma} - \nabla_\gamma \nabla_\sigma \phi \nabla^\gamma \nabla^\sigma \phi.$

Assim sendo, temos a forma final para o tensor energia momento:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^4 &= -G_{4,XX}[g_{\mu\nu}(X_{,\beta}\square\phi\phi^\beta + X_{,\alpha}X^{,\alpha}) - 2X_{,\nu}\square\phi\phi_\mu \\
&\quad + X_{,\rho}(2\nabla_\nu\nabla^\rho\phi\phi_\mu - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\phi^{,\rho}) - X_{,\nu}X_{,\mu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu[(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi) - (\square\phi)^2]] \\
&\quad - G_{4,X}\left\{-\frac{1}{2}R\phi_\mu\phi_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\square\phi)^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)^2\right. \\
&\quad \left.2R_{\sigma\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\mu} + R_{,\nu\gamma\mu}^\sigma\phi_{,\sigma}\phi^{,\gamma} + \nabla_\gamma\nabla_\nu\phi\nabla^\gamma\nabla_\mu\phi\right. \\
&\quad \left.- g_{\mu\nu}R_{\sigma\gamma}\phi_{,\sigma}\phi_{,\gamma} - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\square\phi\right\}.
\end{aligned}$$

Entretanto os termos $\nabla_\nu\nabla^\rho\phi\phi_\mu$ e $R_{\sigma\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\mu}$ não são simétricos como o tensor energia momento. Para manter a simetria, separamos em sua parte simétrica e antissimétrica. A parte antissimétrica é cancelada e resta somente a parte simétrica. Desta forma obtemos:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^4 &= -G_{4,XX}[g_{\mu\nu}(X_{,\beta}\square\phi\phi^\beta + X_{,\alpha}X^{,\alpha}) - X_{,\nu}\square\phi\phi_\mu - X_{,\mu}\square\phi\phi_\nu \\
&\quad + X_{,\rho}(\nabla_\nu\nabla^\rho\phi\phi_\mu + \nabla_\mu\nabla^\rho\phi\phi_\nu - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\phi^{,\rho}) - X_{,\nu}X_{,\mu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu[(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi) - (\square\phi)^2]] \\
&\quad - G_{4,X}\left\{-\frac{1}{2}R\phi_\mu\phi_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\square\phi)^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)^2\right. \\
&\quad \left.R_{\sigma\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\mu} + R_{\sigma\mu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\nu} + R_{,\nu\gamma\mu}^\sigma\phi_{,\sigma}\phi^{,\gamma} + \nabla_\gamma\nabla_\nu\phi\nabla^\gamma\nabla_\mu\phi\right. \\
&\quad \left.- g_{\mu\nu}R_{\sigma\gamma}\phi_{,\sigma}\phi_{,\gamma} - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\square\phi\right\}.
\end{aligned}$$

Para \mathcal{L}_4 temos então:

$$\begin{aligned}
j_4^\nu &= G_{4,X}(\nabla^\nu\phi)R + G_{4,XX}(\nabla^\nu\phi)(\square\phi)^2 - G_{4,XX}\nabla^\nu\phi(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi) \\
&\quad + 2G_{4,XX}(X^{,\nu}\square\phi - X_{,\mu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) - 2G_{4,X}R^{\nu\sigma}\nabla_\sigma\phi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^4 &= -G_{4,XX}[g_{\mu\nu}(X_{,\beta}\square\phi\phi^\beta + X_{,\alpha}X^{,\alpha}) - X_{,\nu}\square\phi\phi_\mu - X_{,\mu}\square\phi\phi_\nu \\
&\quad + X_{,\rho}(\nabla_\nu\nabla^\rho\phi\phi_\mu + \nabla_\mu\nabla^\rho\phi\phi_\nu - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\phi^{,\rho}) - X_{,\nu}X_{,\mu} \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu[(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\alpha\nabla^\beta\phi) - (\square\phi)^2]] \\
&\quad - G_{4,X}\left\{-\frac{1}{2}R\phi_\mu\phi_\nu + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\square\phi)^2 - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla_\alpha\nabla_\beta\phi)^2\right. \\
&\quad \left.R_{\sigma\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\mu} + R_{\sigma\mu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\nu} + R_{,\nu\gamma\mu}^\sigma\phi_{,\sigma}\phi^{,\gamma} + \nabla_\gamma\nabla_\nu\phi\nabla^\gamma\nabla_\mu\phi\right. \\
&\quad \left.- g_{\mu\nu}R_{\sigma\gamma}\phi_{,\sigma}\phi_{,\gamma} - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\square\phi\right\}.
\end{aligned}$$