



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciência

Instituto Politécnico

Mauricio de Oliveira Horta Barbosa

**Identificação de danos em estruturas usando o método de  
Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico**

Rio de Janeiro

2020

Mauricio de Oliveira Horta Barbosa

**Identificação de danos em estruturas usando o método de Monte Carlo  
Hamiltoniano com Gradiente Estocástico**

Tese apresentada, como requisito parcial  
para obtenção do título de Doutor, ao Pro-  
grama de Pós-Graduação em Modelagem  
Computacional, da Universidade do Estado  
do Rio de Janeiro.



Orientador: Prof. Dr. Leonardo Tavares Stutz  
Prof. Dr. Diego Campos Knup

Rio de Janeiro

2020



CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/E

B238    Barbosa, Mauricio de Oliveira Horta.  
          Identificação de danos em estruturas usando o método de  
          Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico / Mauricio de  
          Oliveira Horta Barbosa. – 2020.  
          92 f. : il.

          Orientadores: Leonardo Tavares Stutz e Diego Campos Knup.  
          Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
          Instituto Politécnico.

          1. Ruína das estruturas – Modelos matemáticos – Teses. 2. Monte  
          Carlo, Método de - Teses. 3. Estabilidade estrutural – Modelos  
          matemáticos – Teses. 4. Otimização matemática – Teses. 5. Método  
          dos volumes finitos – Teses. I. Stutz, Leonardo Tavares. II. Knup,  
          Diego Campos. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro.  
          Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 620.19:519.21

Bibliotecária Cleide Sancho CRB7/5843

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese,  
desde que citada a fonte.



Assinatura

11/03/2021

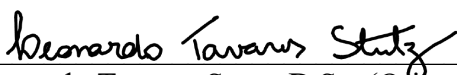
Data

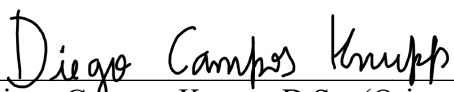
**Identificação de danos em estruturas usando o Método de Monte Carlo Hamiltoniano  
com Gradiente Estocástico**

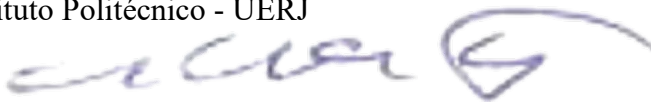
Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor ao Programa de  
Pós-Graduação em Modelagem Computacional  
do Instituto Politécnico, da Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro.


Aprovada em 14 de dezembro de 2020.

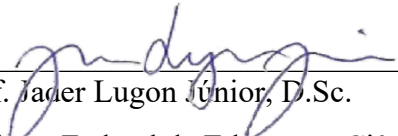
Banca examinadora:

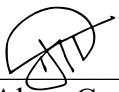
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Leonardo Tavares Stutz, D.Sc. (Orientador)  
Instituto Politécnico - UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Diego Campos Knupp, D.Sc. (Orientador)  
Instituto Politécnico - UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues, Ph.D.  
Instituto Politécnico - UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Luiz Alberto da Silva Abreu, D.Sc.  
Instituto Politécnico - UERJ

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jader Lugon Junior, D.Sc.  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Daniel Alves Castello, D.Sc.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

## DEDICATÓRIA

Aos meus familiares e amigos pelo apoio e compreensão constantes.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido saúde e perseverança para chegar ao fim dessa jornada.

Aos meus familiares pelo apoio e compreensão que me dedicaram durante todo esse tempo.

Agradeço aos colegas pelo companheirismo e ajuda constantes com minhas dificuldades.

Agradeço aos meus orientadores Professor Leonardo e Professor Diego pela paciência e incentivo que me dedicaram por todo esse caminho.

A todos os Professores do Instituto pelo conhecimento que pude adquirir com eles.

Aos servidores do Instituto, em especial à Marselle por sua valiosa ajuda especialmente nesse período de afastamento.

A sabedoria comunica a vida a seus filhos  
e acolhe os que a procuram.  
*Bíblia Sagrada. Eclo 4,12*

## RESUMO

BARBOSA, Mauricio de Oliveira Horta. *Identificação de danos em estruturas usando o método de Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico*. 2020. 92 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

O presente trabalho apresenta o desenvolvimento de um problema de identificação de danos estruturais formulado como um problema inverso, a partir da abordagem Bayesiana. Para a identificação de danos são utilizados dados experimentais obtidos a partir da resposta da estrutura no domínio do tempo. A integridade da estrutura é continuamente descrita por um parâmetro que indica o estado de coesão local do material, denominado parâmetro de coesão. Para a resolução do problema direto, utiliza-se um modelo baseado no Método de Elementos Finitos (MEF) parametrizado pelo parâmetro de coesão da estrutura. A identificação de danos é formulada como um problema inverso, cuja resposta é a função densidade de probabilidade *a posteriori* dos parâmetros de coesão estimados. São implementados, para a resolução do problema inverso, os métodos de Monte Carlo Hamiltoniano (Hamiltonian Monte Carlo - HMC) e Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico (Stochastic Gradient Hamiltonian Monte Carlo - SGHMC). O primeiro como referência para verificação e comparação do segundo. Análises numéricas foram feitas a partir de dois problemas. O primeiro, um problema de identificação de danos estruturais em uma viga simplesmente apoiada e o segundo, um problema de identificação de danos estruturais em uma placa simplesmente apoiada. Com este trabalho foi possível mostrar a vantagem de se utilizar o método SGHMC com relação ao custo computacional e a maior simplicidade no ajuste dos parâmetros no problema de identificação de danos em placas. O método SGHMC mostrou bom desempenho em todos os casos analisados, em particular no segundo problema.

Palavras-chave: Identificação de danos. Inferência Bayesiana. Cadeias de Markov. Monte Carlo Hamiltoniano.

## ABSTRACT

BARBOSA, Mauricio de Oliveira Horta. *Identification of structural damage via Stochastic Hamiltonian Monte Carlo method*. 2020. 92 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The present work presents the development of a problem of identification of structural damage formulated as an inverse problem using Bayesian approach. In order to perform the damage identification, experimental data obtained from the impulse response of the structure in time domain, are used. The integrity of the structure is continuously described by a parameter that indicates the material local state of cohesion which is named cohesion parameter. In order to solve the direct problem, the finite element method (FEM) parametrized by the cohesion parameter of the structure, is used. The damage identification is formulated as an inverse problem, and the result is the posterior probability density of the cohesion parameters estimated. The Hamiltonian Monte Carlo method (HMC) and the Stochastic Gradient Hamiltonian Monte Carlo method (SGHMC) are implemented to solve the inverse problem. The first one as a reference and a way of verification and comparison with the second. Numerical analysis was performed concerning two problems. The first one being a problem of structural damage identification on a simply supported beam, and the second one a problem of structural damage identification on a simply supported plate. This work made it possible to show the advantage of using the SGHMC method concerning the computational cost and the simpler way of adjusting the method's parameters of the problem of damage identification in plates. The SGHMC showed good performance in all situations analysed, particularly in the second problem.

Keywords: Damage identification. Bayesian inference. Markov chains. Hamiltonian Monte Carlo.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Viga simplesmente apoiada . . . . .	21
Figura 2	- Discretização de uma estrutura pelo método dos elementos finitos . . .	22
Figura 3	- Um elemento típico $\Omega_e$ . . . . .	23
Figura 4	- Relação entre coordenadas globais e locais . . . . .	25
Figura 5	- Representação da viga com dano . . . . .	28
Figura 6	- Placa simplesmente apoiada . . . . .	30
Figura 7	- Representação de um elemento finito retangular . . . . .	32
Figura 8	- Representação da viga com atuador (A), sensor(S) e dano ( $D_1$ e $D_2$ ) . .	46
Figura 9	- Resposta impulsiva da viga Caso 1 . . . . .	47
Figura 10	- Resposta impulsiva da viga Caso 2 . . . . .	47
Figura 11	- Resposta impulsiva da viga Caso 3 . . . . .	48
Figura 12	- Distribuição de probabilidade <i>a priori</i> para um parâmetro nodal de coesão . . . . .	49
Figura 13	- Resultados da identificação de danos para o Caso 1: HMC . . . . .	50
Figura 14	- Cadeias de Markov Caso 1 (SGHMC) . . . . .	52
Figura 15	- Perfis de danos Caso 1 (SGHMC) . . . . .	53
Figura 16	- Cadeias Caso 1 - variação do número de dados experimentais . . . . .	54
Figura 17	- Identificação de danos Caso 1 - variação do número de dados experi- mentais . . . . .	55
Figura 18	- Resultados da identificação de danos Caso 1 (SGHMC) . . . . .	56
Figura 19	- Resultados da identificação de danos Caso 1 considerando uma cadeia de 10000 estados . . . . .	58
Figura 20	- Resultados da identificação de danos Caso 2 (SGHMC) . . . . .	59
Figura 21	- Comparação das cadeias obtidas para o Caso 3 (SGHMC) . . . . .	61
Figura 22	- Comparação dos perfis de dano obtidos para o Caso 3 (SGHMC) . . .	62
Figura 23	- Resultados da identificação de danos Caso 3 (SGHMC) . . . . .	63
Figura 24	- Representação esquemática dos casos considerados . . . . .	66
Figura 25	- Representação esquemática dos nós, atuador (A) e sensor (S) . . . . .	67
Figura 26	- Resposta impulsiva da placa Caso 1 . . . . .	67
Figura 27	- Resposta impulsiva da placa Caso 2 . . . . .	68
Figura 28	- Resposta impulsiva da placa Caso 3 . . . . .	68
Figura 29	- Resultados para o Caso 1 ( $\mathcal{C} = 200$ ) . . . . .	70
Figura 30	- Resultados para o Caso 1 ( $\mathcal{C} = 400$ ) . . . . .	71
Figura 31	- Resultados para o Caso 1 $\mathcal{C} = 600$ . . . . .	72
Figura 32	- Identificação de danos Caso 1 . . . . .	74



Figura 33 - Distribuição normal ajustada e <i>posteriori</i> considerando a primeira e a segunda metades da cadeia . . . . .	75
Figura 34 - Identificação de danos Caso 2 - parâmetro $\mathcal{C} = 400$ . . . . .	76
Figura 35 - Distribuição normal ajustada e <i>posteriori</i> considerando a primeira e a segunda metades da cadeia . . . . .	77
Figura 36 - Resultados da Identificação de danos Caso 3 . . . . .	78
Figura 37 - Perfis da placa para identificação de danos Caso 3 . . . . .	79
Figura 38 - Histogramas e funções de autocorrelação para identificação de danos Caso 3 . . . . .	80
Figura 39 - Distribuição normal ajustada e <i>posteriori</i> considerando a primeira e a segunda metades da cadeia . . . . .	81
Figura 40 - Identificação de danos Caso 1 com 10000 estados na cadeia . . . . .	83

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Propriedades Nominais da viga . . . . .	46
Tabela 2	- Descrição dos casos analisados segundo o dano na viga . . . . .	46
Tabela 3	- Resultados estatísticos da identificação de danos do Caso 1: HMC . . .	51
Tabela 4	- Resultados numéricos da identificação de danos no Caso 1 (SGHMC) .	57
Tabela 5	- Resultados numéricos da identificação de danos no Caso 2 (SGHMC) .	60
Tabela 6	- Resultados numéricos da identificação de danos no Caso 3 (SGHMC) .	64
Tabela 7	- Propriedades Nominais da placa de Kirchhoff . . . . .	65
Tabela 8	- Casos analisados na placa de Kirchhoff . . . . .	65
Tabela 9	- Tempos computacionais para diferentes $ \tilde{\mathcal{D}} $ . . . . .	73
Tabela 10	- Resultados numéricos do Caso 1 . . . . .	75
Tabela 11	- Resultados numéricos do Caso 2 . . . . .	77
Tabela 12	- Resultados numéricos do Caso 3 . . . . .	81

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	12
1	<b>MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI</b>	20
1.1	Hipóteses do Modelo	20
1.2	Equação de Movimento	21
1.3	Método de Elementos Finitos	22
1.4	Campo de Danos	27
2	<b>MODELO DE PLACA DE KIRCHHOFF</b>	30
2.1	Hipóteses do Modelo	30
2.2	Equação de Movimento	31
2.3	Método de Elementos Finitos	32
2.4	Campo de Danos	33
3	<b>O PROBLEMA INVERSO</b>	35
3.1	O Método de Monte Carlo Hamiltoniano	37
3.2	O HMC Com Gradiente Estocástico (SGHMC)	40
4	<b>RESULTADOS</b>	44
4.1	<b>Identificação de danos em uma viga simplesmente apoiada</b>	45
4.1.1	<u>Descrição do problema</u>	45
4.1.2	<u>Método HMC</u>	48
4.1.3	<u>Método SGHMC</u>	51
4.2	<b>Identificação de danos em uma placa simplesmente apoiada</b>	64
4.2.1	<u>Descrição do problema</u>	64
4.2.2	<u>Método SGHMC</u>	68
	<b>CONCLUSÕES</b>	84
	<b>REFERÊNCIAS</b>	86
	<b>APÊNDICE A – Funções de Interpolação para a Viga</b>	90
	<b>APÊNDICE B – Funções de Interpolação para a Placa</b>	91

## INTRODUÇÃO

A importância da pesquisa na área de identificação de danos em estruturas mecânicas é de grande relevância prática em engenharia devido à grande necessidade de se monitorar e garantir a integridade de tais elementos, cujas falhas podem resultar em consequências de severa gravidade. Nesse sentido, torna-se cada vez mais necessário o desenvolvimento de técnicas que possam aumentar a eficácia do monitoramento, permitindo que danos em estágio inicial sejam detectados e possam ser reparados com menor custo e maior segurança.

Segundo Doebling, Farrar e Prime M. B. Shevitz (1996), o dano em uma estrutura pode ser entendido como sendo mudanças em seu estado, que efetivamente afetam, ou podem vir a afetar, seu funcionamento. Para que esse conceito tenha significado, ele deve envolver a comparação com um estado inicial, considerado como estado não danificado. O autor ressalta que é preocupação constante em engenharia o monitoramento e detecção desses danos em seus estágios mais iniciais, tanto quanto seja possível.

Uma boa metodologia de identificação de danos em estruturas deve, primeiramente, identificar a existência do dano, localizar a área afetada, fornecer uma estimativa da severidade do dano e, finalmente, prever o restante da vida útil da estrutura.

Muitos dos métodos mais usados para a identificação de danos são baseados em observações visuais, ou puramente experimentais. Zou, Tong e Steven (2000) classificam os métodos de detecção de danos em estruturas, conforme sua dependência de um modelo estrutural. Há aqueles que são baseados em sinais, que são os experimentais e não dependem de um modelo estrutural, e aqueles que são baseados em modelo. Os autores ressaltam que os baseados em sinais apresentam como vantagem o menor custo computacional. No entanto, apresentam também desvantagens, como por exemplo, a necessidade de conhecimento *a priori* da área aproximada da localização do dano, ou a necessidade dessa área ser acessível. Além disso, são mais eficientes para danos mais próximos da superfície da estrutura e em estruturas de pequeno porte. Já os métodos baseados em modelo funcionam melhor para grandes estruturas, além de permitir a localização do dano e a determinação de sua intensidade, que são características importantes de uma boa metodologia de identificação de danos, conforme mencionado anteriormente.

Dessa forma, a necessidade de métodos capazes de detectar danos de forma mais global levou ao desenvolvimento de pesquisas para a identificação de danos baseada na investigação de mudanças nas características de vibração das estruturas. Além disso, o desenvolvimento de tecnologias de sensores, de melhorias quanto ao custo computacional e avanços no método dos elementos finitos foram fatores que contribuíram grandemente para as pesquisas nessa área. A ideia básica dos métodos de detecção de danos baseados na resposta dinâmica das estruturas é a de que parâmetros modais (frequência

(ZHANG; YANG, 2012) , formas modais (YANG; SUN, 2011) e amortecimento modal (CURADELLI et al., 2008) são funções das propriedades físicas das estruturas (massa, amortecimento, rigidez), e mudanças nestas últimas acarretarão, portanto, mudanças nas primeiras (PANDEY; BISWAS, 1994).

Muitas das metodologias de identificação de danos estruturais são implementadas por meio do ajuste de um modelo de elementos finitos (MEF) da estrutura, que deve ser refinado de forma a fornecer previsões de seu comportamento. Assim, a identificação de danos pode ser formulada como um problema de otimização, onde os parâmetros físicos do MEF podem ser usados na minimização de uma função objetivo, comumente expressa na forma de um somatório dos quadrados das diferenças entre a resposta da estrutura medida experimentalmente e aquela prevista pelo modelo (SANDESH; SHANKAR, 2009; TEUGHEL; MAECK; ROECK, 2002; REN; CHEN, 2010).

As medidas experimentais podem ser de diferentes tipos. Classicamente, utilizavam-se dados modais da estrutura, que como ressaltam Doebling et al. (1998), representam uma forma de compressão de dados. Isso representa uma vantagem em termos de visualização, de sua interpretação física e em termos de modelagem matemática. Porém, nessa compressão, perde-se informação sobre o estado da estrutura. Além disso, em sistemas lineares, dados modais são independentes das características do sinal de excitação assim como de sua localização, o que se constitui na principal causa para a perda de informação sobre a estrutura. Pode também ocorrer que as frequências excitadas sejam mais altas do que aquelas que os parâmetros amostrados conseguem influenciar, o que faz com que os modos identificados não forneçam informação que efetivamente contribua para a resposta temporal da estrutura. Além disso, em frequências mais altas, que tipicamente apresentam maior densidade, a identificação dos modos que contribuem para a resposta da estrutura torna-se mais difícil, pelo fato das frequências dos modos serem mais próximas.

Diversos trabalhos apresentam métodos que utilizam a resposta no domínio da frequência. Shayanfar et al. (2016) ressaltam que a detecção de danos usando dados vibracionais no domínio da frequência é um vasto campo de estudo no monitoramento de estruturas. Em Salawu (1997) pode-se ver uma revisão de trabalhos relacionados à identificação de danos em estruturas utilizando dados no domínio da frequência. Alguns exemplos incluem trabalhos como Friswell, Penny e Wilson (1994), Kaveh e Zolghadr (2012), Bandara, Chan e Thambiratnam (2014).

Friswell, Penny e Wilson (1994), apresentam um método de detecção de danos em que são calculadas as frequências relacionadas aos primeiros modos de vibração, a partir de um modelo para a estrutura sem danos e para cenários candidatos de possíveis danos na estrutura considerada. Leva-se em consideração que danos em uma estrutura mecânica causam redução local em sua rigidez, o que leva a mudanças nas características de sua resposta vibracional. Os autores sugerem um método baseado na teoria generalizada de mínimos quadrados utilizando a razão entre os dados de frequências naturais medidas e

analíticas. A mudança prevista para a resposta da estrutura para todos os cenários candidatos é comparada com a mudança medida, e o cenário que mais aproxima as respostas é, então, escolhido.

Kaveh e Zolghadr (2012) utilizam dados de frequências naturais em uma variação do algoritmo meta-heurístico baseado em população (CSS - Charged System Search) para resolver o problema inverso de identificação de danos em estruturas mecânicas. Segundo os autores, a modificação no algoritmo permite que se altere dinamicamente o número de variáveis estimadas durante o processo de otimização. Isso melhora sua performance, já que o número de incógnitas não é conhecido previamente.

Ainda tratando de dados no domínio da frequência, Bandara, Chan e Thambiratnam (2014) apresentam um método de detecção de danos baseado em redes neurais artificiais usando funções de resposta em frequência. O método proposto consegue efetivamente detectar danos para um nível de excitação dado. A proposta é reduzir a dimensão dos dados da função de resposta em frequência inicial, transformando-os em novos índices de dano para detectar diferentes níveis de não linearidade a partir de padrões de danos reconhecidos do algoritmo proposto, usando redes neurais artificiais. O trabalho identifica que redes neurais treinadas com uma soma de funções de resposta em frequência permitem resultados de detecção de danos com maior precisão do que aquelas treinadas com função de resposta em frequência individual, constituindo-se em uma ferramenta promissora para o monitoramento da integridade em estruturas reais.

Diversos trabalhos na área de identificação de danos apresentam, também, metodologias baseadas na utilização da matriz de flexibilidade da estrutura. Em Pandey e Biswas (1994), por exemplo, os autores obtêm boas estimativas da matriz de flexibilidade utilizando poucos modos de vibração de mais baixa frequência da estrutura e propõem um método baseado no fato de que danos na estrutura provocam modificação na matriz de flexibilidade. Mostram que avaliando essas mudanças, o método é capaz de, não apenas identificar a presença do dano, como localizá-lo. Stutz, Castello e Rochinha (2005) descrevem um método baseado nas alterações da matriz de flexibilidade em que o dano é descrito como um campo contínuo. A identificação do dano é feita por meio da minimização da norma de Frobenius da diferença entre a matriz de flexibilidade analítica e experimental, relacionada apenas aos graus de liberdade medidos, o que ajuda a evitar dificuldades no processo de estimativa do modelo. A investigação da proposta é feita por meio de uma estrutura do tipo viga, sujeita a condições que ocorrem em aplicações reais, como pequeno número de sensores e níveis de ruído. Foi também considerado o uso de um termo de regularização na função erro a ser minimizada como forma de melhorar o desempenho do método. Yang e Sun (2011) apresentam um método em que o dano é localizado a partir da distância euclidiana entre a mudança de flexibilidade obtida pelos modos medidos e a melhor mudança de flexibilidade, sendo esta última determinada pela projeção de uma mudança de flexibilidades medida sobre o subespaço definido pelo mo-

delo analítico sem dano. Com o dano localizado, um algoritmo simples usando a melhor mudança de flexibilidade é usado para determinar sua extensão. Bernal (2002) também propõe um método em que mudanças na flexibilidade computada consistem na fonte básica de informação. O método opera com uma única decomposição da mudança na flexibilidade para computar um conjunto de vetores que são tratados como distribuição de carga nos pontos onde se localizam os sensores. A partir disso, ocorre, a indução de campos de tensão que contornam os elementos danificados. A técnica identifica os elementos danificados da estrutura como pertencendo ao conjunto de elementos que tem forças internas desprezíveis sob a ação dos vetores de carga obtidos.

As dificuldades mencionadas anteriormente, tornam interessante também a pesquisa sobre a utilização da resposta no domínio do tempo nos processos de identificação de danos em estruturas mecânicas (TEIXEIRA et al., 2020; TEIXEIRA et al., 2016; SANDESH; SHANKAR, 2009; CASTELLO; STUTZ; ROCHINHA, 2002; PEREIRA; CASTELLO; ROCHINHA, 2003). Apesar da dificuldade de interpretação, o trabalho no domínio do tempo pode permitir a formulação de problemas de identificação de danos em estruturas não lineares, altamente amortecidas e com elevada densidade modal, que são de difícil formulação com métodos baseados em análise modal. Cattarius e Inman (1997) apresentaram uma abordagem não destrutiva em que séries temporais da resposta vibratória da estrutura foram utilizadas para identificar a presença de danos. Foram utilizadas simulações de vibrações axiais e transversais por meio de modelos de elementos finitos que levaram a uma série de experimentos utilizando a comparação de respostas no tempo resultantes de diferentes danos materiais, o que permitiu a identificação de danos em casos em que a mudança na frequência era mínima. Castello, Stutz e Rochinha (2002) apresentam uma técnica não destrutiva na qual se localiza e se determina a severidade de danos em estruturas. É utilizado um modelo de dano contínuo para descrever o estado de integridade corrente da estrutura. Para se determinar o estado de dano em que se encontra a estrutura, é feita a minimização de uma função erro, que, basicamente, é dada pela diferença entre a resposta no tempo a uma mesma excitação de entrada obtida pelo modelo estrutural e a obtida na estrutura real. Para verificar a eficácia da técnica utilizada foi considerada uma viga em que os deslocamentos, acelerações e tensões foram medidos em um subconjunto dos graus de liberdade. Teixeira et al. (2016) também utilizam dados no domínio do tempo para a identificação do dano na estrutura, que é descrito continuamente por um parâmetro de coesão, discretizado espacialmente pelo método de elementos finitos. Sandesh e Shankar (2009) utilizam dados no domínio do tempo para identificação de danos estruturais em uma placa, sendo o dano modelado por um esquema de elementos finitos baseado no princípio da equivalência da energia de deformação. A identificação do dano é feita pela minimização da diferença entre as acelerações medida e prevista pelo modelo. Na resolução do problema inverso foram utilizados o algoritmo genético e PSO (*Particle Swarm Optimization*).

Na metodologia de identificação de danos em estruturas mecânicas como abordada nos trabalhos mencionados, o dano é identificado pela resolução de um problema inverso. Este tipo de abordagem, segundo Fan e Qiao (2010), vem sendo desenvolvido desde 1978, quando Adams et al. (1978) apresentaram um método de detecção de danos, em um componente de uma dimensão, utilizando frequências naturais de vibrações longitudinais. Na metodologia apresentada, procura-se minimizar uma função objetivo. Outros exemplos de trabalhos em identificação de danos estruturais com essa abordagem incluem Rangel (2014a), que utiliza o modelo de superfície de resposta em lugar do modelo de elementos finitos, objetivando, com isso, contornar dificuldades como o caráter mal posto do problema e o elevado custo computacional, que podem demandar modelos de ordem elevada. Na solução do problema inverso, considera o método de Evolução Diferencial. Também nesse tipo de abordagem, Rangel (2014b) utiliza a resposta impulsiva e o método dos elementos finitos para discretizar o campo de deslocamentos e o campo de danos, este descrito por parâmetros de coesão da estrutura. Na solução do problema inverso utiliza os métodos de Evolução Diferencial e Levenberg-Marquardt.

Na metodologia de resolução de problemas inversos com abordagens determinísticas, a solução é obtida na forma de um resultado único, que muitas vezes não traz tanta informação para o problema (COLAÇO; ORLANDE; DULIKRAVICH, 2006). Alternativamente, um outro tipo de abordagem em problemas inversos é aquela baseada em estatística Bayesiana, onde os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias. Neste caso, as incertezas inerentes aos dados medidos e ao modelo podem, então, ser introduzidas na resolução do problema. A solução do problema inverso pode ser obtida na forma de distribuições de probabilidade, enriquecendo assim, as informações que se tem sobre as estimativas obtidas.

Nessa linha de trabalhos, pode-se citar Huang, Gardoni e Hurlebaus (2012), que utilizam a inferência Bayesiana para fazer a atualização de um modelo usando frequências modais de uma estrutura com danos, que é então utilizado como base, para a construção de um modelo de elementos finitos. Foram discutidos fontes e tipos de erros que podem ocorrer no processo de identificação. Concluiu-se que as incertezas no processo de detecção dos danos têm efeitos consideráveis nos resultados obtidos. Gaitanaros et al. (2010) apresentam um sistema baseado em inferência Bayesiana para identificar a localização, o tamanho e a orientação do dano estrutural em uma placa. Utilizam um método de otimização híbrido, que usa estratégias de evolução e técnicas baseadas em gradiente, para prever as características do dano e também incertezas associadas, levando em conta erros de medida e de modelo. Yin, Lam e Chow (2010) também utilizam a abordagem Bayesiana na localização de danos em placas, destacando a importância da abordagem probabilística que é capaz de fornecer intervalos de confiança que são extremamente importantes para engenheiros ao julgar ações a serem tomadas para o reparo da estrutura.

Segundo Orlande (2010), a determinação da distribuição *a posteriori*, que repre-



senta a resposta do problema na abordagem Bayesiana, tipicamente requer integração numérica e, nesses casos, frequentemente se recorre a métodos de amostragem. O mais comum é o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC). Nichols, Moore e Murphy (2011) descrevem o uso de uma metodologia baseada no MCMC populacional para uma amostragem mais eficiente da distribuição de probabilidade a *posteriori* em um problema de detecção de danos em placas. Reportam bons resultados na estimativa do estado de danos na estrutura com essa abordagem, utilizando dados simulados de resposta de decaimento livre. Teixeira et al. (2016) utilizam a inferência Bayesiana em um trabalho que descreve o dano da estrutura de forma contínua por um parâmetro de coesão. A resposta impulsiva do problema direto foi obtida pela aplicação do método dos elementos finitos em função do parâmetro de coesão. A solução do problema inverso foi obtida pela implementação do método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC), implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings. A solução foi obtida em duas etapas. Na primeira, foi utilizada *priori* não informativa, com o objetivo de obter regiões prováveis de localização do dano. Na segunda etapa, foi utilizada *priori* informativa, considerando a informação obtida na primeira etapa, para as regiões potencialmente não danificadas, e, *priori* não informativa, para as regiões potencialmente danificadas. Resultados satisfatórios foram obtidos mesmo na presença de elevado nível de ruído. Também em Teixeira (2018), são feitas novas investigações nos métodos de solução, utilizando a abordagem Bayesiana, em que os métodos de Monte Carlo com cadeias de Markov convencional e populacional são utilizados na resolução do problema. Além disso, são implementadas adaptações no algoritmo de Metrópolis Hastings. Com o objetivo de diminuir o custo computacional, foram feitas implementações do MCMC e do MCMC populacional combinados com técnicas de aceitação atrasada, e técnicas adaptativas.

O método MCMC pode apresentar dificuldades em problemas de maior dimensão. O aumento da quantidade de parâmetros, muitas vezes dificulta o percurso nos espaços de dimensão elevada ao se usar algoritmos para o MCMC que utilizam um caminho aleatório, como o Metropolis-Hastings (CHEUNG; BECK, 2009). Nos trabalhos citados anteriormente, observa-se a necessidade da utilização de variações deste método para contornar essas dificuldades. Para problemas desse tipo, com maior dimensão, o método de Monte Carlo Hamiltoniano (Hamiltonian Monte Carlo - HMC) tem sido bastante estudado. Este método evita o caminho aleatório, propondo uma trajetória no espaço de parâmetros baseada na dinâmica Hamiltoniana (NEAL et al., 2011). Betancourt (2017) apresenta um relato conceitual do método de Monte Carlo Hamiltoniano, procurando desenvolver uma intuição, mais do que um rigor matemático, para a sua implementação de forma otimizada. Em seu texto, ele objetiva fornecer subsídios para a compreensão de como o método funciona, em que casos ele pode ser bem sucedido, e em que casos ele pode falhar. Explora a geometria do que chama de conjunto típico, uma região do espaço de parâmetros na vizinhança da moda, que tem alta densidade de probabilidade mas pequeno volume. Se-

gundo o autor, esta é a região que fornece contribuições significativas, sendo a exploração de sua geometria, uma forma de obter maior eficiência computacional em relação a outros algoritmos de Cadeia de Markov. Baisthakur e Chakraborty (2020) utiliza uma abordagem baseada em geração de *priori* adaptativa que gera uma *posteriori* intermediária. O trabalho utiliza o método HMC para fazer o ajuste do modelo de elementos finitos de uma ponte de aço e faz uma comparação com o MCMC padrão.

Apesar de mais eficiente, o método HMC apresenta um maior custo computacional, devido à necessidade de se calcular o gradiente da *posteriori* diversas vezes. Nesse sentido, alternativas têm sido estudadas para contornar esta dificuldade. Cheung e Beck (2009), por exemplo, descrevem sugestões de algumas formas de aumentar a eficiência do método HMC, como o uso da diferenciação algorítmica para diminuir o custo computacional do cálculo do gradiente da *posteriori*. Boulkaibet et al. (2016) propõem uma versão do método, localmente adaptativa como forma de melhorar seu desempenho. Esta variação baseia-se no ajuste do passo do algoritmo *leapfrog* para a resolução numérica das equações de Hamilton. Conforme a taxa de aceitação aumenta ou diminui em relação a valores prescritos, este passo é ajustado. Além disso, uma outra modificação é proposta, introduzindo um outro hiperparâmetro com o objetivo de permitir o movimento entre regiões de alta probabilidade.

Destaca-se que, a partir da revisão bibliográfica, não se observa grande número de trabalhos dedicados à aplicação do HMC no problema de identificação de danos em estruturas mecânicas. Pode-se citar, por exemplo, Cordeiro (2019), que considera o problema de identificação de danos estruturais em uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada. Para a resolução do problema direto é considerado um modelo contínuo no espaço, dado por uma equação diferencial parcial, solucionada com a técnica de transformação integral generalizada. O dano da estrutura é modelado por um parâmetro de coesão. Na resolução do problema inverso foi utilizado o método de Monte Carlo Hamiltoniano para a obtenção das distribuições de probabilidade a *posteriori*.

Uma outra abordagem para melhorar o custo computacional no método de Monte Carlo Hamiltoniano explora as propriedades do uso de um gradiente com ruído, que é calculado usando um subconjunto do conjunto de dados disponível. Em Chen, Fox e Guestrin (2014), os autores descrevem o método de Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico (Stochastic Gradient Hamiltonian Monte Carlo - SGHMC), que é explorado, neste trabalho, para a resolução do problema inverso de identificação de danos.

Esta tese tem por objetivo analisar a aplicação da inferência Bayesiana, com o método HMC com gradiente estocástico (SGHMC) ao problema de identificação de danos em estruturas mecânicas utilizando dados no domínio do tempo, procurando, com isto, apresentar possibilidades de melhoria em dificuldades citadas anteriormente, quanto a problemas de alta dimensão e alto custo computacional. Serão investigados dois problemas de identificação de danos estruturais, um em uma viga simplesmente apoiada e outro

em uma placa, também simplesmente apoiada, a partir da resposta impulsiva coletada por um sensor. Deve ser ressaltado que, na literatura, não foram encontrados trabalhos de pesquisa que empregassem este método em problemas de identificação de danos estruturais. Em particular, muitos dos trabalhos encontrados apresentam investigações na detecção de danos em estruturas do tipo viga, justificando a pesquisa aqui apresentada, já que a estrutura do tipo placa implica em um problema mais elaborado com maior quantidade de parâmetros a serem estimados. E, como mencionado anteriormente, isso representa uma dificuldade para alguns métodos de amostragem. Sendo assim, a obtenção de um bom desempenho com o método SGHMC representa um resultado bastante relevante. Destaca-se também, o fato de que não foram encontrados trabalhos que estimassem o campo de danos completo em placas utilizando dados no domínio do tempo como feito neste trabalho.

Esta tese está dividida em quatro capítulos. No Capítulo 1 é feita uma descrição do modelo matemático utilizado para a resolução do problema de identificação de danos em uma estrutura do tipo viga simplesmente apoiada. Descreve-se a modelagem do campo de danos como um campo contínuo a partir do parâmetro de coesão da estrutura. No Capítulo 2, a descrição do modelo matemático é feita para o problema de identificação de danos em uma placa simplesmente apoiada. No Capítulo 3, descreve-se o problema inverso de identificação de danos, assim como os métodos HMC e SGHMC utilizados para a resolução do mesmo. No Capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos obtidos com a implementação dos métodos, assim como faz-se a análise desses resultados e a comparação entre os métodos HMC e SGHMC. Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais e as conclusões.

## 1 MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

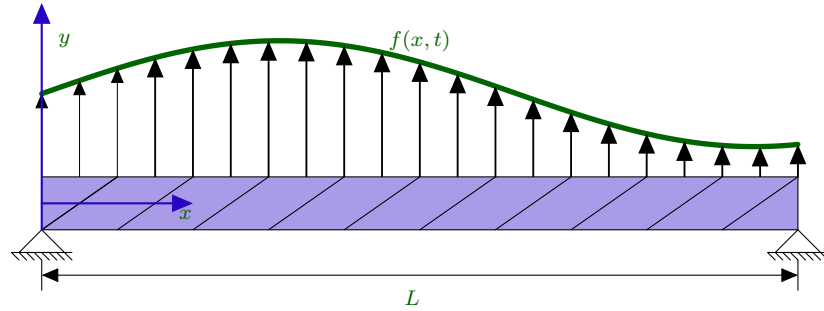
Neste capítulo é apresentada a formulação matemática de um modelo de elementos finitos de uma viga de Euler-Bernoulli, parametrizado pelo parâmetro de coesão, que, por sua vez, descreve a sua integridade estrutural .

### 1.1 Hipóteses do Modelo

A Figura 1 mostra uma representação esquemática de uma viga simplesmente apoiada de que trata o primeiro problema considerado. O modelo de Euler-Bernoulli considera as seguintes hipóteses:

- A viga tem formato de prisma em que o comprimento é muito maior que suas outras dimensões;
- o material, do qual a viga é constituída, é linear e elástico;
- o coeficiente de Poisson é negligenciável;
- a seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele;
- planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares à linha neutra após a deformação;
- o ângulo de rotação é muito pequeno;
- os efeitos do momento de inércia de rotação são desprezados;
- a energia envolvida no cisalhamento é desprezível;
- a viga é constituída de material homogêneo.

Figura 1 - Viga simplesmente apoiada



Fonte: O autor, 2019

## 1.2 Equação de Movimento

Segundo Meirovitch (1986) o deslocamento transversal  $w(x,t)$  de uma viga de comprimento  $L$ , área da seção transversal  $A$ , com massa específica  $\rho$  é governado pela equação diferencial parcial

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E(x) I(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = f(x,t) \quad (1)$$

em que  $E(x)$  representa o módulo de Young e  $I(x)$  representa o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação a um eixo perpendicular a  $x$  e a  $y$  passando pelo centro da área da seção transversal e  $f(x,t)$  representa o carregamento externo por unidade de comprimento.

Considerando que a Eq. (1) envolve uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e outra de quarta ordem em relação à posição, são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno para se determinar uma solução única para  $w(x,t)$ . Especificando-se o deslocamento transversal como  $w_0(x)$  e a velocidade como  $\dot{w}_0(x)$  no instante  $t = 0$ , as condições iniciais podem ser dadas por

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= w_0(x) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) &= \dot{w}_0(x) \end{aligned} \quad (2)$$

E considerando-se que a viga é simplesmente apoiada, as condições de contorno são dadas por

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad (3)$$

o que indica que não há deflexão nas extremidades da viga e

$$E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = E(x)I(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad (4)$$

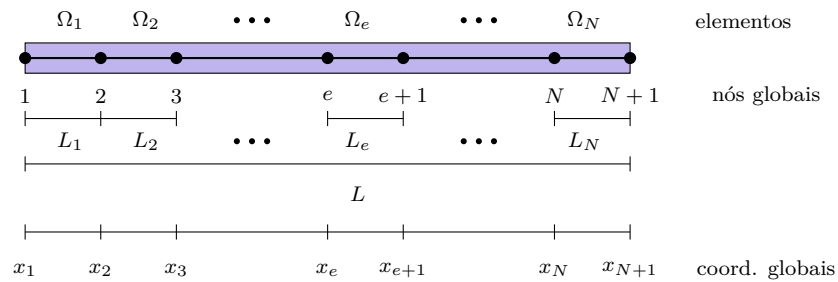
que decorrem do fato do momento fletor ser nulo nas extremidades da viga.

### 1.3 Método de Elementos Finitos

Sob a ótica do problema direto, para a simulação do comportamento dinâmico da estrutura, será utilizado o modelo de elementos finitos (MEF), uma técnica amplamente utilizada na descrição do comportamento dinâmico de estruturas.

Como se vê em Meirovitch (1986), a aplicação desta técnica consiste em discretizar a estrutura contínua, subdividindo-a em  $N$  elementos de dimensão finita. Estes elementos são ligados uns aos outros por nós. Utilizando-se esta técnica em uma viga, se esta é dividida em  $N$  elementos, cada elemento apresentando dois nós, a discretização apresentará  $N + 1$  nós. Cada nó terá associado a ele uma coordenada nodal global  $x_e$ . Pode-se ver uma representação esquemática na Figura 2, que mostra uma viga dividida em  $N$  elementos em que o elemento  $\Omega_e$  de comprimentos  $L_e$  contém os nós  $e$  e  $e + 1$

Figura 2 - Discretização de uma estrutura pelo método dos elementos finitos

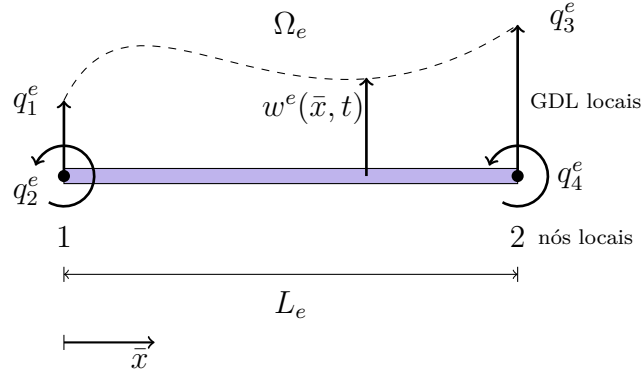


Fonte: O autor, 2020

Observando cada elemento típico  $\Omega_e$ , pode-se definir localmente um sistema de coordenadas, em que cada posição  $\bar{x}$  será dada relativamente ao nó do elemento por

$$\bar{x} = x - x_e \quad (5)$$

Define-se assim o deslocamento vertical  $w^e(\bar{x}, t)$ , no interior de um elemento finito, em cada ponto  $\bar{x}$ . A Figura 3 ilustra um elemento  $\Omega_e$  de comprimento  $L_e$  típico e os graus de liberdade  $q_1^e, q_2^e, q_3^e$  e  $q_4^e$  associados a ele.

Figura 3 - Um elemento típico  $\Omega_e$ 

Fonte: O autor, 2020

O deslocamento transversal,  $w^e(\bar{x}, t)$  em cada elemento pode ser dado por

$$w^e(\bar{x}, t) = \mathbf{N}^e(\bar{x}) \mathbf{q}^e \quad (6)$$

em que  $\mathbf{N}^e(\bar{x})$  é a matriz que contém as funções de interpolação apropriadas ao modelo de Euler-Bernoulli (MEIROVITCH, 1986)(Apêndice A)

$$\mathbf{N}^e(\bar{x}) = [N_1^e(\bar{x}) \quad N_2^e(\bar{x}) \quad N_3^e(\bar{x}) \quad N_4^e(\bar{x})] \quad (7)$$

O vetor  $\mathbf{q}^e(t)$  apresentado na Eq. (8) contém as coordenadas nodais de cada elemento

$$\mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} q_1^e \\ q_2^e \\ q_3^e \\ q_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \end{bmatrix} \quad (8)$$

sendo  $w_1^e$  e  $w_2^e$  os deslocamentos transversais e  $\theta_1^e$  e  $\theta_2^e$  os deslocamentos rotacionais nos nós 1 e 2 respectivamente conforme mostra a Figura 3.

Pode-se considerar, agora, as definições das expressões para as energias cinética e potencial do elemento, que são dadas respectivamente por (MEIROVITCH, 1986)

$$T^e = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho(\bar{x}) A(\bar{x}) \left( \frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \quad (9)$$

$$V^e = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} E(\bar{x}) I(\bar{x}) \left( \frac{\partial^2 w(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 d\bar{x} \quad (10)$$

Considerando a aproximação dada pela Eq. (6), as Eqs. 9 e 10 podem ser escritas como

$$T^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{eT} \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e \quad (11)$$

$$V^e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (12)$$

ficando, dessa forma definidas a seguir, as matrizes de massa  $\mathbf{M}^e$  e rigidez  $\mathbf{K}^e$  pelas Eqs. (13) e (14)

$$\mathbf{M}^e = \int_0^{L^e} \rho \mathbf{N}^e(\bar{x}) \mathbf{N}^{eT}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (13)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{L^e} E(\bar{x}) I(\bar{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e(\bar{x})^T}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} \quad (14)$$

Para tratar agora do carregamento aplicado à viga, considera-se o trabalho virtual do carregamento distribuído em um elemento finito, que é dado por

$$\delta \mathcal{W}^e = \int_0^{L^e} f^e(\bar{x}, t) \delta w^e(\bar{x}, t) d\bar{x} \quad (15)$$

Substituindo-se a Eq. (6), o trabalho virtual pode ser reescrito como

$$\delta \mathcal{W}^e = \int_0^{L^e} f^e(\bar{x}, t) \mathbf{N}^e(\bar{x}) \delta \mathbf{q}^e(t) d\bar{x} = \left[ \int_0^{L^e} f^e(\bar{x}, t) \mathbf{N}^e(\bar{x}) d\bar{x} \right] \delta \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{f}^{eT}(t) \delta \mathbf{q}^e(t) \quad (16)$$

em que fica, então definido, o vetor de carregamento  $\mathbf{f}^e(t)$  dado por

$$\mathbf{f}^e(t) = \int_0^{L^e} f^e(\bar{x}, t) \mathbf{N}^e(\bar{x}) d\bar{x} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^e \\ \mathcal{T}_1^e \\ \mathcal{F}_2^e \\ \mathcal{T}_2^e \end{bmatrix} \quad (17)$$

sendo  $\mathcal{F}_1^e$  e  $\mathcal{F}_2^e$  os carregamentos transversais e  $\mathcal{T}_1^e$  e  $\mathcal{T}_2^e$  os momentos dos nós locais 1 e 2, respectivamente, do elemento finito em questão.

As matrizes de massa e rigidez dos elementos devem ser combinadas, de forma a dar origem às matrizes globais, que se referem à estrutura como um todo, no caso, a viga. Para isso, as coordenadas locais definidas para cada elemento, devem ser relacionadas com

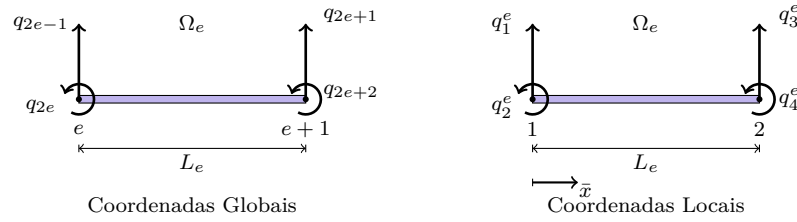


as coordenadas obtidas a partir de um sistema de coordenadas globais, como o ilustrado na Figura 4.

Devemos assim, considerar um vetor  $\mathbf{q}$ , cujas componentes representam as coordenadas globais da estrutura.

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{2N} \quad q_{2N+1} \quad q_{2N+2}]^T \quad (18)$$

Figura 4 - Relação entre coordenadas globais e locais



Fonte: O autor, 2020

Relacionando então, os vetores de coordenadas  $\mathbf{q}_e$  com  $\mathbf{q}$ , e  $\dot{\mathbf{q}}^e$  com  $\dot{\mathbf{q}}$  podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e &= \mathbf{C}^e \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}}^e &= \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (19)$$

sendo a matriz  $\mathbf{C}^e$  uma matriz ortogonal de ordem  $2N + 2$  que faz a ligação entre as coordenadas locais e as coordenadas globais.

Para obter a matriz global de massa, deve-se então, considerar o cálculo da energia cinética da viga que é dada pela soma das energias cinéticas dos elementos finitos dadas pela Eq. (11)

$$T = \sum_{e=1}^N T^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \dot{\mathbf{q}}^{eT} \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e \quad (20)$$

Agora, substituindo-se a expressão dada pela Eq. (19) na Eq. (20), obtém-se

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \sum_{e=1}^N \mathbf{C}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{C}^e \right] \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (21)$$

onde fica, assim, definida a matriz global de massa de ordem  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  como

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^N \mathbf{C}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{C}^e \quad (22)$$

Analogamente, a matriz global de rigidez deve ser obtida considerando-se a soma das energias potenciais dos elementos finitos, que são dadas pela Eq.(12). Tomando, então, a soma das energias potenciais dos elementos finitos, calcula-se a energia potencial da viga

$$V = \sum_{e=1}^N V^e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e \quad (23)$$

Substituindo-se a Eq. (19)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^N \mathbf{q}^T \mathbf{C}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{C}^e \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left[ \sum_{e=1}^N \mathbf{C}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{C}^e \right] \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (24)$$

onde fica, assim, definida a matriz global de rigidez de ordem  $(2N + 2) \times (2N + 2)$  como

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{C}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{C}^e \quad (25)$$

Análogo ao que foi feito com o cálculo das energias cinética e potencial, o trabalho virtual da viga pode, então, ser calculado por

$$\delta \mathcal{W} = \sum_{e=1}^N \delta \mathcal{W}^e = \sum_{e=1}^N \mathbf{f}^{eT}(t) \delta \mathbf{q}^e(t) \quad (26)$$

Substituindo a Eq. (19) na Eq. (26)

$$\delta \mathcal{W} = \sum_{i=1}^N \mathbf{C}^i \mathbf{f}^{iT}(t) \delta \mathbf{q}^i(t) \quad (27)$$

onde fica então definido o vetor de carregamento

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{C}^i \mathbf{f}^{iT}(t) \quad (28)$$

A abordagem lagrangeana descreve o movimento de um sistema segundo a equação

(MEIROVITCH, 1986)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f} \quad (29)$$

Considerando a Eq. (21) que fornece a energia cinética da viga e a Eq. (24) que dá a energia potencial da viga na Eq. (29), obtém-se a equação de movimento para o sistema não amortecido

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (30)$$

#### 1.4 Campo de Danos

A estrutura danificada, apresentará alterações em suas propriedades de rigidez. Sendo assim, a rigidez à flexão  $E(x)I(x)$  da viga, é definida como

$$E(x)I(x) = \beta(x)E_0I_0 \quad (31)$$

em que  $E_0$  e  $I_0$  são, respectivamente, os valores nominais do módulo de elasticidade e do momento de inércia de área da seção transversal, e  $\beta$  representa um parâmetro de coesão entre os pontos materiais da estrutura. O parâmetro de coesão pode ser interpretado como uma medida do estado de coesão local do material, sendo tal que, idealmente,  $0 \leq \beta \leq 1$ .  $\beta = 0$  indica um rompimento total das ligações dos pontos materiais da estrutura, indicando uma ruptura, enquanto que  $\beta = 1$  indica que as ligações estão preservadas e portanto não há dano.

Considera-se a hipótese de que o dano não altera de forma significativa a matriz de massa da estrutura, alterando, portanto, mais significativamente, a rigidez e, portanto, o módulo de elasticidade ou o momento de inércia de área da seção transversal. Pela Eq. (31), essas alterações são contabilizadas pelo parâmetro de coesão  $\beta$ .

Por simplicidade e sem perda de generalidade, considera-se uniforme o módulo de elasticidade ao longo da viga e que a viga possui seção transversal retangular. O dano, portanto, alterará as propriedades geométricas da mesma e, dessa forma, o momento de inércia de área da seção transversal, que será dado por

$$I(x) = \beta(x)I_0 \quad (32)$$

Em uma viga de seção transversal retangular de largura  $c$  e espessura nominal  $h_0$ ,

os momentos de inércia de área nominal em uma posição  $x$ , podem ser dados por

$$I_0 = \frac{ch_0^3}{12}$$

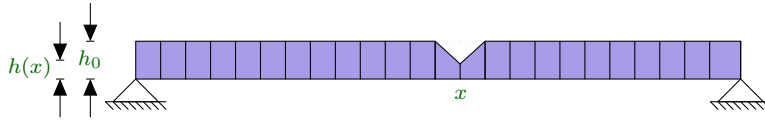
$$I(x) = \frac{ch(x)^3}{12}$$
(33)

Substituindo-se a Eq. (33) na Eq. (32), pode-se definir o parâmetro de coesão, em uma dada posição, em função da espessura relativa da viga,

$$\beta(x) = \left( \frac{h(x)}{h_0} \right)^3$$
(34)

A Figura 5 mostra a representação de uma viga com um dano na posição  $x$ , que se caracteriza por uma redução na altura relativa da seção transversal, o que, conforme a Eq. (34), se traduz em uma diminuição do parâmetro de coesão nesta posição. Vale observar, que um dano prescrito por um único valor nodal, que não sejam os valores dos nós extremos, afeta dois elementos adjacentes conforme se vê na referida figura.

Figura 5 - Representação da viga com dano



Fonte: O autor, 2020

Como o campo de coesão é considerado em um modelo contínuo, deve-se fazer, como feito para os deslocamentos  $w(\bar{x}, t)$ , uma interpolação para os parâmetros de coesão no interior de um elemento. Assim, descreve-se  $\beta^e(\bar{x})$  da seguinte forma

$$\beta^e(\bar{x}) = R_1^e(\bar{x})\beta_1^e + R_2^e(\bar{x})\beta_2^e$$
(35)

em que  $\beta_1^e$  e  $\beta_2^e$  representam, respectivamente, os parâmetros de coesão dos nós 1 e 2 de um elemento finito e  $R_1^e(\bar{x})$  e  $R_2^e(\bar{x})$  são funções de interpolação dadas por

$$R_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{L_e}$$
(36)

$$R_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{L_e}$$
(37)

Cada elemento finito possui dois nós e, portanto, dois deslocamentos nodais, assim como um parâmetro de coesão por nó.

Substituindo a Eq. (31) na Eq. (14) obtém-se a matriz de rigidez do elemento em função dos parâmetros de coesão nodais

$$\mathbf{K}^e = \int_0^{L^e} \beta^e(\bar{x}) E_0 I_0 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e(\bar{x})}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e(\bar{x})^T}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x} \quad (38)$$

Considerando-se a Eq. (38), as funções de interpolação em  $\mathbf{N}^e$  e a aproximação do campo de coesão no interior de um elemento finito, dada pela Eq. (35), a matriz de rigidez elementar pode ser escrita como

$$\mathbf{K}^e = \frac{E_0 I_0}{2L_e} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^2}(\beta_1^e + \beta_2^e) & \frac{4}{L_e}(2\beta_1^e + \beta_2^e) & -\frac{12}{L_e^2}(\beta_1^e + \beta_2^e) & \frac{4}{L_e}(\beta_1^e + 2\beta_2^e) \\ \frac{4}{L_e}(2\beta_1^e + \beta_2^e) & 2(3\beta_1^e + \beta_2^e) & -\frac{4}{L_e}(2\beta_1^e + \beta_2^e) & 2(\beta_1^e + \beta_2^e) \\ -\frac{12}{L_e^2}(\beta_1^e + \beta_2^e) & -\frac{4}{L_e}(2\beta_1^e + \beta_2^e) & \frac{12}{L_e^2}(\beta_1^e + \beta_2^e) & -\frac{4}{L_e}(\beta_1^e + 2\beta_2^e) \\ \frac{4}{L_e}(\beta_1^e + 2\beta_2^e) & 2(\beta_1^e + \beta_2^e) & -\frac{4}{L_e}(\beta_1^e + 2\beta_2^e) & 2(\beta_1^e + 3\beta_2^e) \end{bmatrix} \quad (39)$$

## 2 MODELO DE PLACA DE KIRCHHOFF

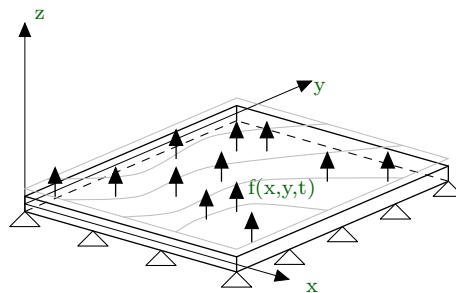
### 2.1 Hipóteses do Modelo

Para o desenvolvimento do modelo de elementos finitos para uma placa simplesmente apoiada, será considerado o modelo de Kirchhoff para uma placa fina que, conforme (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001), considera as seguintes hipóteses:

- O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico.
- A placa está inicialmente plana.
- A deflexão (componente normal do vetor de deslocamento) do plano mediano é pequena comparada com a espessura da placa.
- As linhas retas, normais ao plano médio antes de ocorrer uma flexão, continuam retas e normais à superfície média durante a deformação e seus comprimentos não são alterados.
- A tensão normal ao plano do meio é pequena se comparada a outras componentes de tensão e pode ser desprezada nas relações de esforço-tensão.
- Como os deslocamentos da placa são pequenos, assume-se que a superfície média permanece sem esforços após uma flexão.

A Figura 6 mostra uma representação esquemática em que o plano  $xy$  coincide com o plano médio da placa e a coordenada  $z$  é perpendicular a este.

Figura 6 - Placa simplesmente apoiada



Fonte: O autor, 2020

## 2.2 Equação de Movimento

O movimento da placa de Kirchhoff é governado pela equação

$$D_E \left( \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y, t)}{\partial y^4} \right) + \rho \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (40)$$

sendo  $\rho$  a massa específica, a constante  $D_E$ , a rigidez à flexão, que é definida em termos do módulo de elasticidade  $E$ , da espessura da placa  $h$  e da razão de Poisson  $\nu$  por

$$D_E = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (41)$$

e  $f(x, y, t)$  o carregamento externo por unidade de área.

Especificando-se o deslocamento transversal como  $w_0(x)$  e a velocidade como  $\dot{w}_0(x)$  no instante  $t = 0$ , as condições iniciais podem ser dadas por

$$\begin{aligned} w(x, y, t = 0) &= w_0(x, y) \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, t = 0) &= \dot{w}_0(x, y) \end{aligned} \quad (42)$$

Como a equação que governa o movimento da placa é uma equação diferencial de quarta ordem, duas condições de contorno devem ser especificadas para cada lado da placa. Considerando-se uma placa retangular de dimensões  $a \times b \times h$ , se o lado dado por  $x = a$  está simplesmente apoiado, a deflexão ao longo deste lado  $w_{(x=a)}$  deve ser nula. Além disso, o lado pode rotacionar livremente em relação ao apoio. Pode-se considerar, então, para este lado as condições

$$w_{(x=a)} = 0 \quad (43)$$

$$M_x = -D_E \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (44)$$

Como  $w_{(x=a)} = 0$ , tem-se também,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$  e a Eq. (44) pode ser escrita como

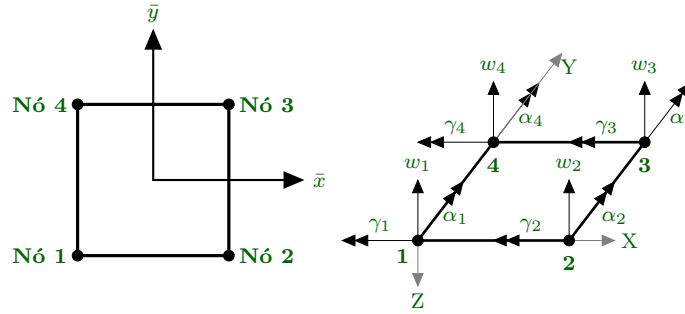
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (45)$$

Condições análogas são definidas em relação aos outros lados da placa.

### 2.3 Método de Elementos Finitos

O modelo de elementos finitos para este problema segue um desenvolvimento análogo ao descrito para o problema da viga. A placa será discretizada por meio de elementos retangulares, sendo adotado, para cada elemento, um referencial formado pelos eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , sendo a origem  $O$  localizada no centro do elemento conforme representado na Figura 7, em que é mostrado também um elemento em perspectiva, onde se observa três graus de liberdade em cada nó.

Figura 7 - Representação de um elemento finito retangular



Fonte: O autor, 2020

Pode-se assim ser definido o campo de deslocamentos,  $w^e(\bar{x}, \bar{y}, t)$ , no interior do elemento em função das coordenadas espaciais locais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

Considerando-se  $\mathbf{q}^e(t)$ , o vetor de coordenadas nodais generalizadas do elemento  $\Omega_e$  dado por

$$\mathbf{q}^e(t) = [q_1^e(t) \ q_2^e(t) \ q_3^e(t) \ \dots \ q_{12}^e(t)]^T = [w_1^e(t) \ \alpha_1^e(t) \ \gamma_1^e(t) \ \dots \ w_4^e(t) \ \alpha_4^e(t) \ \gamma_4^e(t)]^T \quad (46)$$

onde  $w_i^e(t)$ ,  $\alpha_i^e(t)$  e  $\gamma_i^e(t)$  representam, respectivamente, o deslocamento transversal, a rotação em relação a  $\bar{x}$  e a rotação em relação a  $\bar{y}$  nos nós locais do elemento  $\Omega_e$  e tomando a matriz  $\mathbf{N}^e(\bar{x}, \bar{y})$ , que contém as funções de interpolação apropriadas ao modelo (Apendice B), pode-se definir as matrizes de massa e rigidez de um elemento genérico  $\Omega_e$ . O desenvolvimento segue o mesmo caminho da viga com as matrizes e vetores apropriados.

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \rho(\bar{x}, \bar{y}) h(\bar{x}, \bar{y}) \mathbf{N}^{eT}(\bar{x}, \bar{y}) \mathbf{N}^e(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \quad (47)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \beta(\bar{x}, \bar{y}) \mathbf{B}^T(\bar{x}, \bar{y}) \mathbf{C} \mathbf{B}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} \quad (48)$$



sendo  $\rho$  a massa específica do material,  $h(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\mathbf{\Omega}_e$  e  $\beta^e(\bar{x}, \bar{y})$ , respectivamente a espessura, o domínio e o campo de danos relativos ao elemento retangular considerado. As matrizes  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}$  são dadas respectivamente por

$$\mathbf{B}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} & \frac{2\partial^2}{\partial \bar{x}\partial \bar{y}} \end{bmatrix}^T \mathbf{N}^e(\bar{x}, \bar{y}) \quad (49)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E_0 h_0^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (50)$$

## 2.4 Campo de Danos

O campo de coesão é continuamente descrito pelo parâmetro  $\beta^e(\bar{x}, \bar{y})$  que pode ser interpolado a partir dos valores nodais como

$$\beta^e(\bar{x}, \bar{y}) = R_1^e(\bar{x}, \bar{y})\beta_1^e + R_2^e(\bar{x}, \bar{y})\beta_2^e + R_3^e(\bar{x}, \bar{y})\beta_3^e + R_4^e(\bar{x}, \bar{y})\beta_4^e \quad (51)$$

onde  $\beta_i^e$  representa os parâmetros de coesão dos nós do elemento considerado e  $R_i^e$  as funções de interpolação dadas por

$$R_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} - \frac{\bar{x}}{4a} - \frac{\bar{y}}{4b} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{4ab} \quad (52)$$

$$R_2^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} + \frac{\bar{x}}{4a} - \frac{\bar{y}}{4b} - \frac{\bar{x}\bar{y}}{4ab} \quad (53)$$

$$R_3^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} + \frac{\bar{x}}{4a} + \frac{\bar{y}}{4b} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{4ab} \quad (54)$$

$$R_4^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} - \frac{\bar{x}}{4a} + \frac{\bar{y}}{4b} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{4ab} \quad (55)$$

Como mencionado no problema anterior, a estrutura danificada tem alterada suas propriedades de rigidez à flexão, no caso da placa  $D_E$ , que pode, então, ser definida como

$$D_E = \beta(x, y) D_{E_0} \quad (56)$$

Como anteriormente mencionado para o caso do problema da viga, será considerada a hipótese de que o dano não altera significativamente a massa da estrutura e, por simplicidade, mas sem perda de generalidade, será também considerado que o módulo de elasticidade se mantém uniforme ao longo da placa, mesmo na presença de dano. Sendo assim, nessas condições, o dano alterará apenas as propriedades geométricas da placa e pode-se definir

$$D_E = \frac{Eh(x, y)^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (57)$$

$$D_{E_0} = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (58)$$

Substituindo as Eqs. (57) e (58) na Eq. (56), pode-se definir o parâmetro de coesão em função da espessura relativa da placa, como feito na viga.

$$\beta(x, y) = \left( \frac{h(x, y)}{h_0} \right)^3 \quad (59)$$

sendo  $h(x, y)$  a espessura da placa na posição  $(x, y)$  e  $h_0$  sua espessura nominal.

### 3 O PROBLEMA INVERSO

Nos problemas apresentados nos capítulos anteriores, foram descritos modelos matemáticos que preveem o comportamento dinâmico da estrutura em questão, viga ou placa, em função dos parâmetros. Foi utilizado o método dos elementos finitos para, a partir dos valores do vetor de parâmetros de coesão determinar a resposta do sistema a uma dada excitação da estrutura. Nesses casos os problemas foram considerados como problemas diretos, pois, a partir de um modelo matemático e dos valores dos parâmetros desse modelo, procurou-se determinar o efeito produzido, ou seja a resposta do sistema considerado.

Neste capítulo, os problemas serão considerados como problemas inversos, nos quais é dado como conhecido o modelo matemático e parte, mas não todos, os parâmetros do problema. Adicionalmente, alguma resposta experimental do problema em questão é conhecida. Procura-se então, determinar os parâmetros desconhecidos do modelo matemático que, pela aplicação deste modelo, forneçam uma resposta, que será, por alguma metodologia, comparada à resposta experimental medida, procurando uma aproximação entre elas.

Mais especificamente no caso da identificação de danos, como posta aqui, esses parâmetros desconhecidos vêm a ser os parâmetros nodais de coesão  $\beta$ , que, como descrito no capítulo anterior, podem ser interpretados como uma medida do estado de coesão local do material, assumindo valores que vão de  $\beta = 0$ , indicando uma ruptura na estrutura a  $\beta = 1$  indicando que não há dano local. Valores de  $\beta$  superiores a 1 podem aparecer devido a incertezas estatísticas ou a alguma incerteza nos parâmetros.

Seja considerado então, o vetor  $\beta$  como o vetor que contém todos os parâmetros de coesão conforme a discretização feita pelo método dos elementos finitos:

$$\beta = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n]^T$$

e o vetor  $\theta$  cujas componentes são dadas pelos parâmetros de coesão estimados, podendo ser, portanto, igual ao vetor  $\theta$  ou formado por um subconjunto das componentes do vetor  $\beta$

Sejam considerados também, o vetor  $\mathbf{w}_{\text{exp}}$ , que contém a resposta experimental medida do sistema e o vetor  $\mathbf{w}(\theta)$  que contém  $k$  dados disponíveis sobre o problema obtidos na resolução do modelo do problema direto, sendo  $k$  menor do que ou igual ao quociente entre o tempo total da tomada de dados e o intervalo de tempo entre um dado e outro, conforme o tempo considerado para a resolução do problema inverso:

$$\mathbf{w}_{\text{exp}} = [w_{\text{exp}1} \quad w_{\text{exp}2} \quad \dots \quad w_{\text{exp}k}]^T$$

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) = [w(\boldsymbol{\theta})_1 \quad w(\boldsymbol{\theta})_2 \quad \dots \quad w(\boldsymbol{\theta})_k]^T$$

Assumindo-se que os dados experimentais possuem uma incerteza na forma de um ruído aditivo, independente do vetor de parâmetros, que obedece a uma distribuição normal de media zero e matriz de covariância  $\mathbf{V}$ , pode-se assumir um modelo de observação dado por

$$\mathbf{w}_{exp} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{E}$$

sendo  $\mathcal{E}$  um vetor aleatório contendo os erros de medida, de forma que  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V})$  e, portanto  $\mathbf{w}_{exp} \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{V})$

Sendo assim, a função de verossimilhança fica definida como

$$\Pi(\mathbf{w}_{exp}|\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\mathbf{V}|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_{exp} - \mathbf{w}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{w}_{exp} - \mathbf{w}(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (60)$$

em que  $|\mathbf{V}|$  se refere ao determinante da matriz  $\mathbf{V}$ .

Em Orlande (2010), observa-se que, em contraste com métodos baseados em otimização, a inferência Bayesiana trata os parâmetros a serem estimados como variáveis aleatórias, o que permite refletir o grau de informação que se tem sobre elas. O resultado buscado vem na forma da distribuição de probabilidade a *posteriori*, que vem a ser o modelo para a distribuição de probabilidade condicional dos parâmetros desconhecidos, dadas as medidas experimentais. Isso permite obter informações estatísticas sobre os parâmetros, enriquecendo, assim, os resultados. Para relacionar a informação que se tem *a priori* sobre os parâmetros que se deseja estimar e a distribuição de probabilidades a *posteriori*, utiliza-se o teorema de Bayes:

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{w}_{exp}) = \frac{\Pi(\mathbf{w}_{exp}|\boldsymbol{\theta})\Pi(\boldsymbol{\theta})}{\Pi(\mathbf{w}_{exp})} \quad (61)$$

onde  $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{w}_{exp})$  é a distribuição a *posteriori*, dada pela probabilidade condicional de  $\boldsymbol{\theta}$  dado  $\mathbf{w}_{exp}$ , sendo que  $\boldsymbol{\theta}$  representa o vetor de parâmetros de interesse, e  $\mathbf{w}_{exp}$  representa o vetor de dados experimentais.  $\Pi(\mathbf{w}_{exp}|\boldsymbol{\theta})$  é a verossimilhança, ou seja, o modelo de medidas que incorpora as incertezas relacionadas e é dada pela probabilidade condicional das medidas experimentais, dados os parâmetros.  $\Pi(\boldsymbol{\theta})$  é a distribuição de probabilidade *a priori*, que representa a informação que se tem de antemão sobre os parâmetros de interesse e  $\Pi(\mathbf{w}_{exp})$  é uma constante de normalização.

A função densidade de probabilidade *a priori*, que representa a informação que se tem a respeito dos parâmetros, pode facilitar a convergência do método, na medida em que se tenha mais informação sobre os parâmetros a serem estimados. Além disso, atua também, como um fator de regularização.

### 3.1 O Método de Monte Carlo Hamiltoniano

De acordo com Neal et al. (2011), o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC) se originou com o clássico artigo Metropolis et al. (1953) que tratava da simulação da distribuição de estados de um sistema molecular idealizado. Pouco depois, Alder e Wainwright (1959) apresentam uma outra abordagem, agora determinística, para o movimento molecular, seguindo as leis da Mecânica Newtoniana, que têm uma formalização elegante na dinâmica Hamiltoniana. Nas décadas que se seguiram, as abordagens do MCMC e da dinâmica molecular continuaram a co-existir, até que um artigo que se tornou um marco, (DUANE et al., 1987), veio a unir essas duas abordagens em um método que foi chamado por eles de Monte Carlo Híbrido (HMC), também conhecido como Monte Carlo Hamiltoniano.

O método de Monte Carlo Hamiltoniano (HMC) é um tipo especial de método MCMC em que os estados candidatos são obtidos a partir da simulação dinâmica de um sistema Hamiltoniano fictício. Ele é capaz de fornecer, com alta probabilidade de aceitação, candidatos com uma distância relativamente grande do estado atual, resultando assim, em uma exploração mais eficiente do domínio dos parâmetros do que os métodos padrão de caminhos aleatórios (CHEUNG; BECK, 2009).

No método HMC, o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta}$  é tratado como o vetor de deslocamentos generalizado de um sistema dinâmico fictício e o momento (quantidade de movimento) correspondente é definido por uma variável auxiliar  $\mathbf{p}$ , que é introduzida apenas para permitir a simulação da dinâmica Hamiltoniana. Dessa forma, o Hamiltoniano deste sistema dinâmico fictício é definido como

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{K}(\mathbf{p}) \quad (62)$$

onde  $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$  é sua energia potencial e  $\mathcal{K}(\mathbf{p})$  sua energia cinética.

A função densidade de probabilidade no espaço de estados aumentado  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$  é definida a partir da mecânica estatística como

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \zeta \exp(-\mathcal{H}) \quad (63)$$

onde  $\zeta$  é uma constante positiva de normalização (NEAL et al., 2011)

Considerando as Eqs. (62) e (63), tem-se então

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \zeta \exp(-\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})) \exp(-\mathcal{K}(\mathbf{p})) \quad (64)$$

Portanto, de acordo com a Eq. (64), pode-se observar que  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{p}$  são variáveis aleatórias independentes, com funções densidade de probabilidade marginal proporcionais a  $\exp(-\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}))$  e  $\exp(-\mathcal{K}(\mathbf{p}))$ , respectivamente. Dessa forma, com o objetivo de amostrar

da densidade alvo  $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{w}_{exp})$ , o método HMC amostra da densidade de probabilidade conjunta  $\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$  e, então, marginaliza sobre o momento, apenas descartando as amostras de  $\mathbf{p}$ . Sendo assim, como na estimação de parâmetros por inferência Bayesiana o objetivo é amostrar a função densidade de probabilidade a *posteriori*  $\Pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{w}_{exp})$  dos parâmetros de interesse, a energia potencial é definida como

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = -\ln \Pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{w}_{exp}) \quad (65)$$

Além disso, como o momento  $\mathbf{p}$  é uma variável auxiliar, a energia cinética é escolhida de forma a fornecer uma densidade de probabilidade marginal apropriada para este parâmetro. Usualmente, a energia cinética é definida como

$$\mathcal{K}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} \quad (66)$$

onde  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}}$  é uma matriz definida positiva arbitrária. Portanto, de acordo com as Eqs. (64) e (66), o momento é uma variável de distribuição Gaussiana, com média nula e matriz de covariância  $\mathbf{M}_{\mathcal{K}}$  (NEAL et al., 2011)

No método HMC, considerando-se o estado atual  $\boldsymbol{\theta}$  e selecionando aleatoriamente um momento  $\mathbf{p}$ , obtém-se o estado aumentado atual  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$ . Então, iniciando-se no estado  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$ , uma amostra candidata  $(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{p}^*)$  é obtida pela simulação, durante um intervalo de tempo fictício, da dinâmica Hamiltoniana regida pelas equações (NEAL et al., 2011)

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}(t) \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}(t)) \end{aligned} \quad (67)$$

onde  $\nabla \mathcal{U}$  representa o gradiente da função energia potencial.

Como o Hamiltoniano  $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$  e, conseqüentemente a função densidade de probabilidade  $\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$ , são invariantes sob a dinâmica governada pela Eq. (67), o candidato gerado será sempre aceito. Entretanto, na prática, é necessário recorrer a um algoritmo numérico, como o comumente usado algoritmo *leapfrog*, para resolver a Eq. (67), acarretando, assim, erros numéricos na dinâmica Hamiltoniana (CHEUNG; BECK, 2009).

No algoritmo *leapfrog*, para um passo de tempo  $\delta t$ , a dinâmica Hamiltoniana é

aproximada pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) &= \mathbf{p}(t) - \frac{\delta t}{2} \nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}(t)) \\
\boldsymbol{\theta}(t + \delta t) &= \boldsymbol{\theta}(t) + \delta t \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) \\
\mathbf{p}(t + \delta t) &= \mathbf{p}\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) - \frac{\delta t}{2} \nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}(t + \delta t))
\end{aligned} \tag{68}$$

Assim, devido às imprecisões introduzidas pelo método numérico, ao iniciar no estado atual  $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$ , o candidato  $(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{p}^*)$ , obtido após a execução do algoritmo *leapfrog* por  $L_{lf}$  passos de tempo  $\delta t$  e negação do momento ao final da trajetória, pode ser aceito ou rejeitado, de acordo com a probabilidade de aceitação

$$\phi = \min \left\{ 1, \frac{\exp(-\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{p}^*))}{\exp(-\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}))} \right\} \tag{69}$$

Deve-se enfatizar que a negação do momento, ao final da trajetória Hamiltoniana aproximada, é feita para se assegurar que a proposição do candidato é simétrica e, portanto, a função densidade de probabilidade  $\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$  é mantida invariante com o passo de aceitação dado pela Eq. (69) (NEAL et al., 2011). Entretanto, como  $\mathcal{K}(\mathbf{p}) = \mathcal{K}(-\mathbf{p})$  e o momento é selecionado aleatoriamente no início de cada trajetória Hamiltoniana, esta negação pode ser desconsiderada na prática.

A eficácia do método HMC depende do ajuste dos parâmetros do *leapfrog*,  $L_{lf}$  e  $\delta t$ , o que pode ser uma tarefa difícil.

No presente trabalho, em cada processo de geração de uma proposta de candidato  $(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{p}^*)$ , o número de passos no tempo  $L_{lf}$  é escolhido aleatoriamente de uma distribuição uniforme discreta de 1 até algum valor arbitrário máximo  $L_{lfmax}$  (BOULKAIBET et al., 2016), evitando que a trajetória Hamiltoniana se torne uma trajetória fechada. O passo de tempo fictício é ajustado como se segue. Inicialmente, o passo de tempo  $\delta t$  é arbitrariamente escolhido dentro de um intervalo  $[\delta t_{min}, \delta t_{max}]$ . Depois, o algoritmo *leapfrog* é executado por  $N_{\delta t}$  iterações, resultando em  $N_{\delta t}$  amostras. A cada iteração, o número de passos  $L_{lf}$  é escolhido aleatoriamente, como mencionado anteriormente. As  $N_{\delta t}$  amostras geradas são usadas para computar a taxa de aceitação  $\bar{AC}$  e o passo de tempo  $\delta t$  é ajustado de acordo com

$$\delta t' = \begin{cases} \delta t \cdot (1 - \varphi), & \text{se } \bar{AC} < AC_{ref} \\ \delta t \cdot (1 + \varphi), & \text{se } \bar{AC} \geq AC_{ref} \end{cases} \tag{70}$$

onde  $\delta t'$  é o passo de tempo adotado nas próximas  $N_{\delta t}$  iterações,  $\varphi$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída dentro do intervalo  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$  e  $AC_{ref}$  é a taxa de aceitação desejada. Dessa forma, após cada  $N_{\delta t}$  iterações, o passo de tempo é ajustado de acordo com a Eq. (70).

O Algoritmo 1 mostra o desenvolvimento do método HMC.

---

**Algoritmo 1: HMC**


---

**Entrada:** Inicialize  $\theta_0$  e amostre  $\mathbf{p} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{M}_{\mathcal{K}})$

```

1 ; para  $i = 1, 2, \dots, N$  faça
2   se  $i$  é múltiplo de  $N_{\delta t}$  então
3     obtenha  $\bar{AC}$  e ajuste  $\delta t$  de acordo com a Eq. (70)
4   fim
5   /* na iteração  $i$ , seja a amostra mais recente  $(\theta_{i-1}, \mathbf{p}_{i-1})$ , faça
6     o seguinte para simular uma nova amostra  $(\theta_i, \mathbf{p}_i)$ : */
7   Escolha aleatoriamente um novo vetor de momento  $\mathbf{p}'$  da distribuição
8      $\mathcal{N}(0, \mathbf{M}_{\mathcal{K}})$ ;
9   Escolha aleatoriamente  $L_{lf}$  de uma distribuição uniforme no intervalo
10     1..10;
11   Inicie o algoritmo leapfrog com  $[\theta(0), \mathbf{p}(0)] = (\theta_{i-1}, \mathbf{p}')$ ;
12   para  $t = 1, 2, \dots, L_{lf}$  faça
13     execute o algoritmo leapfrog obtendo  $[\theta(t_{\delta t}), \mathbf{p}(t_{\delta t})]$ ;
14   fim
15   Obtenha  $(\theta'', \mathbf{p}'') = [\theta(N_{\delta t}), \mathbf{p}(N_{\delta t})]$ ;
16   Aceite  $(\theta_i, \mathbf{p}_i) = (\theta'', \mathbf{p}'')$  com probabilidade dada pela Eq. (69);
17   se rejeitado então
18      $(\theta_i, \mathbf{p}_i) = (\theta_{i-1}, \mathbf{p}')$ 
19   fim
20 fim
```

---

### 3.2 O HMC Com Gradiente Estocástico (SGHMC)

Como se pode observar na Eq. (68), o método HMC exige que se calcule o gradiente da energia potencial,  $\nabla \mathcal{U}(\theta)$ . No caso particular em que o número de parâmetros é elevado, isto pode tornar o método bastante custoso computacionalmente. A implementação do gradiente estocástico tem como objetivo diminuir o custo computacional do cálculo desse gradiente. Ao invés de calcular diretamente o gradiente  $\nabla \mathcal{U}(\theta)$ , utilizando-se todo o conjunto de dados  $\mathcal{D}$ , considera-se uma estimativa que conterá erro,  $\nabla \tilde{\mathcal{U}}(\theta)$ , devido ao fato de ser baseada em um subconjunto  $\tilde{\mathcal{D}}$  amostrado uniformemente do conjunto  $\mathcal{D}$ , que contém todos os dados

$$\nabla \tilde{\mathcal{U}}(\theta) = -\frac{|\mathcal{D}|}{|\tilde{\mathcal{D}}|} \sum_{\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{D}}} \nabla \ln \Pi(\mathbf{w}|\theta) - \nabla \ln \Pi(\theta), \tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}. \quad (71)$$



em que  $|\mathcal{D}|$  e  $|\tilde{\mathcal{D}}|$  representam a quantidade de dados dos conjuntos  $\mathcal{D}$  e  $\tilde{\mathcal{D}}$  respectivamente.

Assume-se que os dados observados sejam independentes, e recorrendo-se ao teorema do limite central, aproxima-se o gradiente com a introdução de um ruído Gaussiano, que torna-se mais acurado à medida que o tamanho de  $\tilde{\mathcal{D}}$  aumenta:

$$\nabla \tilde{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta}) \approx \nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{N}(0, \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta})), \quad (72)$$

sendo  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta})$  a covariância do ruído do gradiente estocástico, que depende não somente dos parâmetros atuais do modelo, como também do tamanho da amostra.

Substituindo-se  $\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$  por  $\nabla \tilde{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta})$  na Eq. (67), introduz-se ruído na atualização do momento, que torna-se então:  $\Delta \mathbf{p} = -\epsilon \nabla \tilde{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta}) = -\epsilon \nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{N}(0, \epsilon^2 \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}))$ . Obtem-se assim, uma primeira versão do HMC com gradiente estocástico, cujas equações na forma contínua são dadas por:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt \\ d\mathbf{p} &= -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) dt + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}) dt), \end{aligned} \quad (73)$$

em que  $\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta})$  foi definido como

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}) \quad (74)$$

Fazendo uma analogia, um sistema dinâmico representado por um disco se movendo sobre uma superfície sem atrito, seria o sistema fictício associado ao método HMC. No método HMC com gradiente estocástico, o sistema dinâmico associado estaria sujeito a um vento de intensidade aleatória, que pode levar o disco mais longe do que o esperado.

Acontece que a introdução do gradiente estocástico com ruído faz com que a distribuição  $\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$  não seja mais invariante, perdendo-se assim a trajetória baseada na dinâmica Hamiltoniana do HMC. A distribuição estacionária deixa de ser a distribuição objetivo. Chen, Fox e Guestrin (2014) apresentam uma forma de se resolver isso, fazendo uma modificação na Eq. (73) introduzindo-se nesta um termo de “atrito”

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt \\ d\mathbf{p} &= -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) dt - \mathcal{B} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}) dt) \end{aligned} \quad (75)$$

O termo de “atrito”,  $\mathcal{B} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt$  ajuda a diminuir a energia  $\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$ , reduzindo assim a influência do ruído, fazendo com que a dinâmica representada por essas equações tenham propriedades de invariância similares àquelas da dinâmica Hamiltoniana original.

O seguinte teorema, demonstrado em Chen, Fox e Guestrin (2014), garante que a distribuição estacionária, gerada pela aplicação da dinâmica descrita pela Eq. (75) é a distribuição objetivo procurada:

**Teorema 1**  $\Pi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) \propto \exp(-\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}))$  é a única distribuição estacionária da dinâmica

descrita pela Eq. (75)

Porém, na prática, não se conhece o modelo  $\mathcal{B}$  do ruído. O que se tem é uma estimativa  $\hat{\mathcal{B}}$  deste modelo. Introdz-se então um parâmetro,  $\mathcal{C}$ , especificado pelo usuário e a equação da dinâmica toma a forma:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt \\ d\mathbf{p} &= -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) dt - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}}) dt) + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{B} dt) \end{aligned} \quad (76)$$

A dinâmica definida na Eq. (76) pode ser justificada primeiramente pensando-se no caso menos provável de que o modelo estimado  $\hat{\mathcal{B}}$  seja igual ao modelo real  $\mathcal{B}$ . Neste caso, substituindo-se  $\hat{\mathcal{B}}$  por  $\mathcal{B}$  na equação de atualização do momento na Eq. (76) temos as simplificações:

$$d\mathbf{p} = -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) dt - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \mathcal{B}) dt) + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{B} dt), \quad (77)$$

utilizando a propriedade da variância da soma de variáveis aleatórias tem-se:

$$d\mathbf{p} = -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) dt - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{C} dt - 2\mathcal{B} dt + 2\mathcal{B} dt), \quad (78)$$

e portanto:

$$d\mathbf{p} = -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) dt - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p} dt + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{C} dt) \quad (79)$$

Observamos que esta última equação equivale à Eq. (75) diferindo pela substituição de  $\mathcal{B}$  pelo termo  $\mathcal{C}$  definido pelo usuário. A demonstração do Teorema 1 leva em conta apenas a necessidade de que o ruído e o “atrito” se correspondam. Sendo assim, o Teorema 1 pode ser aplicado também nesta última equação, garantindo assim que a distribuição de equilíbrio será a distribuição objetivo, como na Eq. (75).

Porém, mais provavelmente o modelo estimado  $\hat{\mathcal{B}}$  não será igual ao modelo real  $\mathcal{B}$ . Pode-se, por exemplo tomar  $\hat{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ . Nesse caso, apesar do modelo real  $\mathcal{B}$  não ser nulo, a medida que o passo  $\epsilon$  tende a zero,  $\mathcal{B}$ , que é definido segundo a Eq. (74) também tende a zero. Nesse caso, o termo  $\mathcal{N}(0, 2\mathcal{B} dt)$  da Eq. (76) se anula e substituindo-se  $\hat{\mathcal{B}}$  por zero, a equação de atualização do momento novamente toma a forma em que o Teorema 1 pode ser aplicado.

A seguir é apresentado o algoritmo desta versão modificada do HMC com gradiente estocástico. Welling e Teh (2011) mostram que a medida que  $\epsilon_t$  tende a zero, o erro de discretização também tende a zero e, portanto, a taxa de rejeição em um passo de Metrópolis Hastings do algoritmo, se aproxima de zero. Sendo assim, este passo de aceitação de Metrópolis-Hastings pode ser simplesmente ignorado, como se vê no algoritmo.

O algoritmo parte da discretização da Eq. (76). Na equação de atualização do

momento temos:

$$\Delta \mathbf{p} = -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})_{\epsilon_t} - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{\epsilon_t} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t}) + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{B}_{\epsilon_t}), \quad (80)$$

substituindo  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}$  tem-se:

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1} = -\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})_{\epsilon_t} - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{\epsilon_t} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t}) + \mathcal{N}(0, 2\mathcal{B}_{\epsilon_t}), \quad (81)$$

substituindo  $\mathcal{B}$  conforme definido na Eq. (74) tem-se:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - \nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})_{\epsilon_t} - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{\epsilon_t} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t}) + \mathcal{N}(0, 2\frac{1}{2}\epsilon_t \mathbf{W}_{\epsilon_t}), \quad (82)$$

usando a propriedade da variância do produto de uma variável aleatória por uma constante, pode-se escrever:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - \nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})_{\epsilon_t} - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{\epsilon_t} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t}) + \mathcal{N}(0, \mathbf{W})_{\epsilon_t}, \quad (83)$$

agrupando agora o segundo e o último termos do lado direito da equação acima e colocando  $\epsilon_t$  em evidência:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - [\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{N}(0, \mathbf{W})]_{\epsilon_t} - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{\epsilon_t} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t}), \quad (84)$$

finalmente, pela Eq. (72),  $-\nabla \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{N}(0, \mathbf{W}) = \nabla \tilde{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta})$  e assim obtém-se a equação de atualização do momento discretizada:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} - \nabla \tilde{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta})_{\epsilon_t} - \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{\epsilon_t} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t}) \quad (85)$$

O algoritmo fica então, descrito na forma do Algoritmo 2, apresentado a seguir.

---

**Algoritmo 2:** SGHMC

---

```

1 para  $t = 1, 2, \dots, N$  faça
2   opcionalmente faça a reamostragem do momento  $\mathbf{p}$  como  $\mathbf{p}^{(t)} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{M})$ ;
3    $(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{p}_0) = (\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{p}^{(t)})$ ;
4    $(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{p}_0) = (\boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{p}^{(t)})$ ;
   /* simule a dinâmica das equações do método */
5   para  $i = 1, 2, \dots, L_n$  faça
6      $\boldsymbol{\theta}_i \leftarrow \boldsymbol{\theta}_{i-1} + \epsilon_t \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{i-1}$ ;
7      $\mathbf{p}_i \leftarrow \mathbf{p}_{i-1} - \epsilon_t \nabla \tilde{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta}_i) - \epsilon_t \mathcal{C} \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}_{i-1} + \mathcal{N}(0, 2(\mathcal{C} - \hat{\mathcal{B}})_{\epsilon_t})$ ;
8   fim
9 fim
```

---

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados resultados obtidos pela aplicação dos métodos de Monte Carlo Hamiltoniano e de Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico. Primeiramente serão apresentados resultados referentes a um problema inverso de identificação de danos estruturais em uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada e em seguida os resultados considerando uma placa de Kirchhoff simplesmente apoiada, ambos descritos anteriormente.

Na análise dos resultados serão apresentados os parâmetros de coesão estimados, a média dos valores das cadeias de Markov dos parâmetros de coesão referentes aos nós com dano, assim como o desvio padrão correspondente. Será calculado também um intervalo de credibilidade de 95%.

Para a determinação do intervalo de credibilidade, serão desprezados os estados de aquecimento da cadeia, em seguida a cadeia será ordenada em ordem crescente dos valores do parâmetro e serão desconsiderados os 2,5% dos dados iniciais e os 2,5% dos dados finais da cadeia, sendo então tomados o menor e o maior valor dos dados como limites do intervalo de credibilidade.

Para verificar a convergência das cadeias de Markov, será utilizado o critério de Geweke que é baseado na diferença entre duas médias amostrais dividida pelo erro padrão estimado a partir da densidade espectral em zero

$$Z = \frac{m_{a1} - m_{a2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_{a1}} + \frac{s_2^2}{n_{a2}}}} \quad (86)$$

sendo  $m_{a1}$  a média dos valores da cadeia nos primeiros  $n_{a1}$  estados e  $m_{a2}$  a média dos  $n_{a2}$  estados, tendo sido desprezados os estados de aquecimento.  $s_1$  e  $s_2$  representam os estimadores das variâncias correspondentes aos  $n_{a1}$  e  $n_{a2}$  estados respectivamente. Valores de  $|z| < 2$  indicam que a cadeia atingiu a convergência.

Ainda na análise dos resultados, após a estimação dos parâmetros, serão calculados o erro relativo entre o valor exato e o valor estimado de cada parâmetro individualmente,  $E_{r_i}$ , e o erro quadrático médio considerando todos os parâmetros estimados,  $E_{RMS}$ , como descrito na Eq. (87)

$$E_{r_i} = \frac{|\beta_i^E - \bar{\beta}_i|}{\beta_i^E} \quad E_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} (\beta_i^E - \bar{\beta}_i)^2} \quad (87)$$

sendo  $\bar{\beta}_i$  e  $\beta_i^E$ , respectivamente, as médias estimadas e os valores exatos dos parâmetros estimados.

## 4.1 Identificação de danos em uma viga simplesmente apoiada

### 4.1.1 Descrição do problema

Nesta seção serão apresentados os resultados da identificação de danos estruturais em uma viga simplesmente apoiada, segundo o modelo de Euler-Bernoulli como descrito no Capítulo 1. Busca-se estimar o dano nos nós conforme a discretização adotada no modelo de elementos finitos para a descrição do campo de coesão. Os métodos utilizados para resolução do problema inverso de estimação dos parâmetros de coesão foram o método de Monte Carlo Hamiltoniano (HMC) e o método de Monte Carlo Hamiltoniano com gradiente estocástico (SGHMC). O primeiro é usado com o intuito de permitir a verificação da implementação do SGHMC, servindo como referência para discussão e comparação dos resultados. As propriedades da viga considerada são apresentadas na Tabela 1.

A estrutura foi discretizada pelo método dos elementos finitos (MEF) em 24 elementos, cada elemento possuindo dois nós, cada nó tendo dois graus de liberdade, um de translação e um de rotação, totalizando portanto 25 nós e 48 graus de liberdade devido às condições de contorno adotadas. Foram atualizados os parâmetros de coesão correspondentes a todos os nós, com exceção dos extremos, totalizando assim 23 parâmetros atualizados. Considerou-se a resposta da estrutura observada na posição  $x = 0,243\text{m}$  devido a uma excitação do tipo impulso unitário na mesma posição do ponto de observação. A resposta do sistema foi observada a uma taxa de amostragem de 1000 Hz. A Figura 8 mostra uma representação da viga com o sensor e o atuador em dois cenários, um contendo um dano e outro contendo dois danos.

Para a estimação dos parâmetros nodais de coesão, foram considerados os primeiros 500 pontos da resposta impulsiva, acrescida de um ruído, de média nula e variância determinada indiretamente pela razão sinal-ruído (SNR - Signal to Noise Ratio), definida como

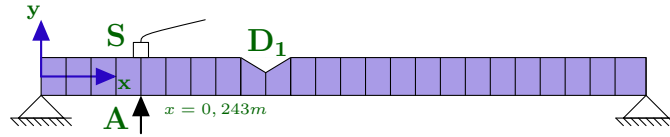
$$\text{SNR} = 10 \log \frac{P_s}{P_n} \quad (88)$$

em que  $P_s$  representa a potência do sinal e  $P_n$  a potência do ruído. Nos presentes resultados foram considerados dois cenários de ruídos, um com valor de  $\text{SNR} = 15\text{dB}$  e outro com valor de  $\text{SNR} = 10\text{dB}$ .

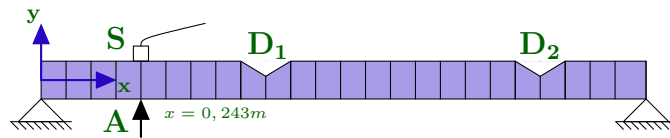
O dano é caracterizado por uma diminuição na altura relativa da seção transversal dada por  $h(x)/h_0 = 0,8$ , no nó 10,  $x = 0,5475\text{m}$ , o que se traduz em uma diminuição no parâmetro de coesão, que segundo a Eq. 34 corresponde a um valor de  $\beta = 0,512$ .

Na Tabela 2 são mostrados os casos analisados nas simulações realizadas que se caracterizam pela localização do dano, a altura relativa e o valor do parâmetro de coesão para a região danificada.

Figura 8 - Representação da viga com atuador (A), sensor(S) e dano ( $D_1$  e  $D_2$ )



(a)



(b)

Legenda: (a) - viga com um dano; (b) - viga com dois danos.

Fonte: O autor, 2019

Tabela 1 - Propriedades Nominiais da viga

Comprimento ( $L$ )	1,46m
Espessura	$7,94 \cdot 10^{-3}$ m
Largura	$76,2 \cdot 10^{-2}$ m
Módulo de Elasticidade ( $E$ )	207 GPa
Massa Específica ( $\rho$ )	$7,85 \cdot 10^3$ kg/m <sup>3</sup>

Fonte: O autor, 2020

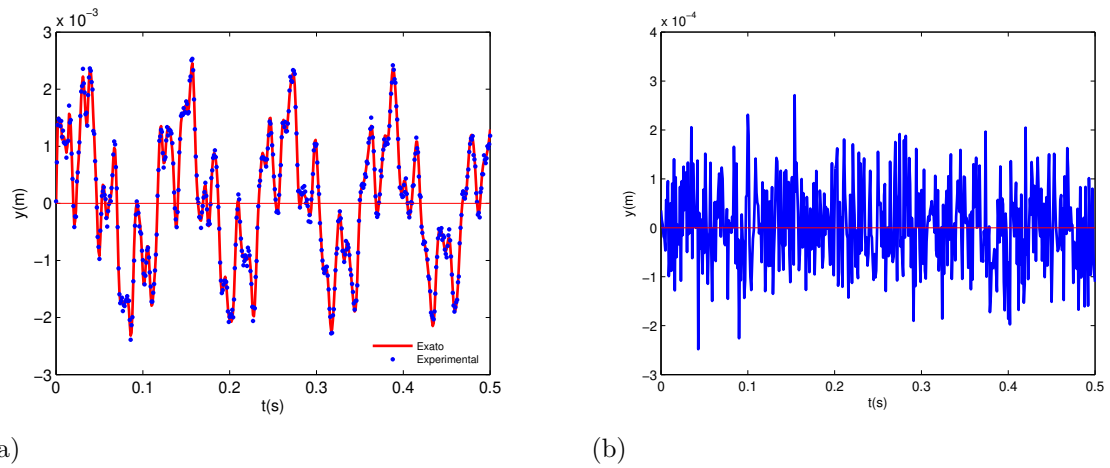
Tabela 2 - Descrição dos casos analisados segundo o dano na viga

Caso	pos. dano (m)	$h(x)/h_0$	$\beta(x)$	SNR
1	0,5475	0,8	0,512	15
2	0,5475	0,8	0,512	10
3	0,5475;1,2167	0,8;0,8	0,512;0,512	15

Fonte: o autor, 2020

A Figura 9 mostra os gráficos da resposta impulsiva da viga com um dano e o ruído acrescentado para o Caso 1, a Figura 10 apresenta gráficos similares para o Caso 2, e a Figura 11 para o Caso 3. Observa-se que ocorre pouca distinção entre os gráficos o que representa uma dificuldade para a resolução do problema inverso.

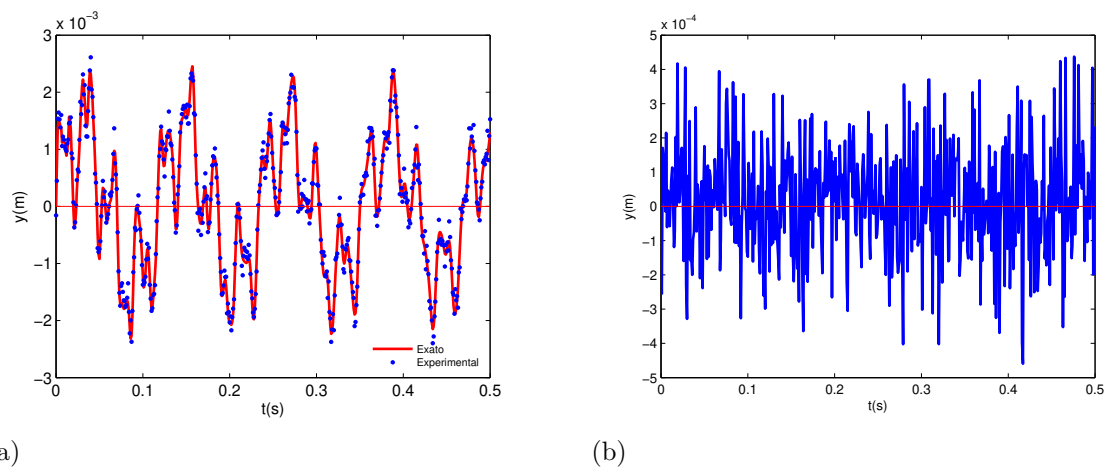
Figura 9 - Resposta impulsiva da viga Caso 1



Legenda: (a) Resposta Impulsiva; (b) Ruído.

Fonte: O autor, 2020

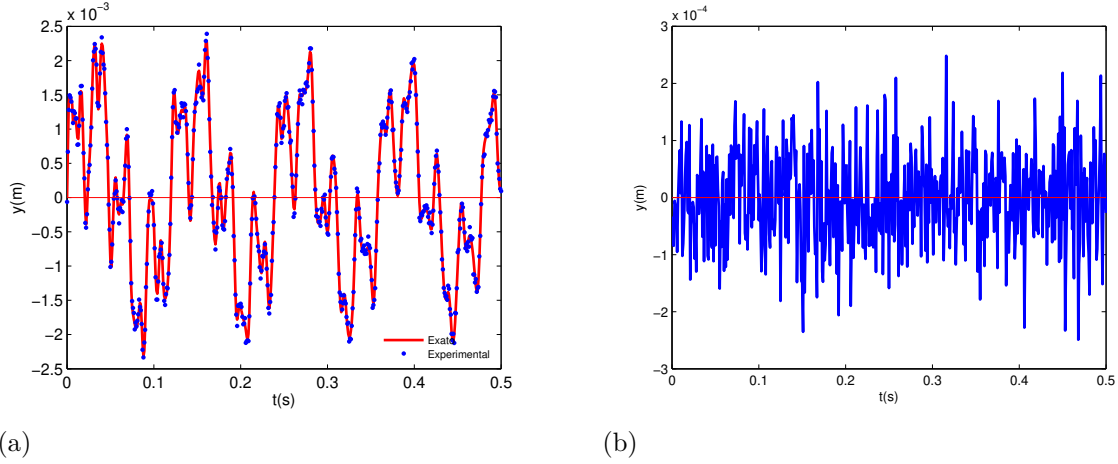
Figura 10 - Resposta impulsiva da viga Caso 2



Legenda: (a) Resposta Impulsiva; (b) Ruído.

Fonte: O autor, 2020

Figura 11 - Resposta impulsiva da viga Caso 3



Legenda: (a) Resposta Impulsiva; (b) Ruído.

Fonte: O autor, 2020

#### 4.1.2 Método HMC

Aqui serão apresentados os resultados obtidos com a implementação do método HMC ao problema de identificação de danos em uma viga simplesmente apoiada, conforme descrito na Subseção 4.1.1.

Como foi visto na Seção 1.4, os parâmetros nodais de coesão a serem estimados possuem, idealmente, valores entre 0 e 1. Sendo assim, a densidade de probabilidade *a priori*, ilustrada na Figura 12, será adotada para os valores nodais do parâmetro de coesão da estrutura. De acordo com essa distribuição, o valor mais provável do parâmetro de coesão é 1, que representa a ausência de dano estrutural. Ademais, valores menores que 1 são mais prováveis do que valores acima de 1. Cordeiro (2019) descreve esta densidade de probabilidade *a priori*, como uma função contínua por partes em que, para valores de  $\beta > 1$ , ela segue uma distribuição normal, mas com desvio padrão menor (aqui adotado o valor  $\sigma = 0.05$ ) do que aquele para valores de  $\beta \leq 1$  (aqui adotado  $\sigma = 0,35$ ). Fazendo-se a devida normalização com as máximas probabilidades, a função resultante não apresenta descontinuidades e representa, assim, uma função densidade de probabilidade, conforme a Eq. (89). A Figura 12 mostra o gráfico correspondente à função densidade de probabilidade assim definida.

$$\Pi(\beta_i) = \frac{\pi(\beta_i)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \pi(\beta_i) d\beta} \quad (89)$$

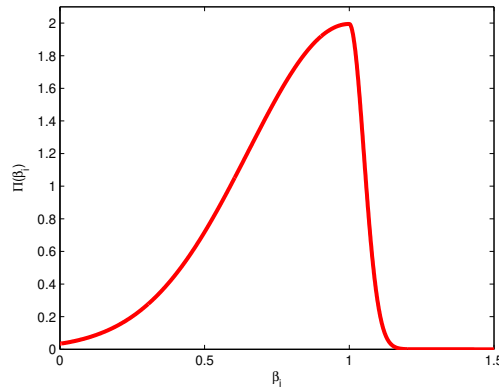


sendo

$$\pi(\beta_i) = \begin{cases} \frac{\mathcal{N}[1; 0, 35]}{MX_e} & \text{se } \beta_i \leq 1 \\ \frac{\mathcal{N}[1; 0, 05]}{MX_d} & \text{se } \beta_i > 1 \end{cases} \quad (90)$$

sendo  $MX_e$  o valor máximo da distribuição  $\mathcal{N}[1; 0, 35]$  e  $MX_d$  o valor máximo da distribuição  $\mathcal{N}[1; 0, 05]$

Figura 12 - Distribuição de probabilidade *a priori* para um parâmetro nodal de coesão



Fonte: o autor, 2020

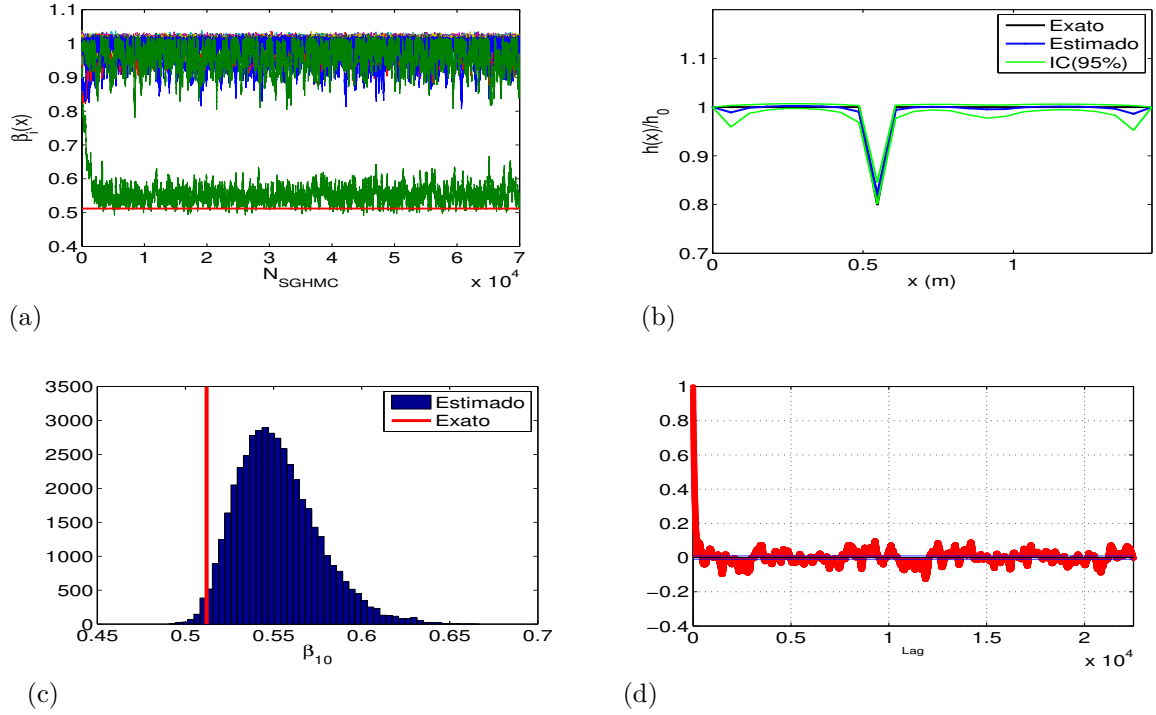
A Figura 13 mostra resultados obtidos a partir da aplicação do método HMC ao Caso 1 descrito na Tabela 2. Observa-se a convergência da cadeia referente ao parâmetro  $\beta_{10}$  para o valor correspondente ao dano. Foram tomadas cadeias com 70000 estados, considerando-se 25000 estados de aquecimento. Na Figura 13b observa-se o perfil obtido pelas alturas relativas estimadas em cada nó da discretização, assim como o intervalo de credibilidade de 95%. As Figuras 13c e 13d mostram, respectivamente, o histograma e a função de auto-correlação relativos ao parâmetro  $\beta_{10}$  do nó onde se encontra o dano.

A Tabela 3 apresenta as propriedades estatísticas, assim como o parâmetro de Geweke e os erros relativo e  $E_{RMS}$  referentes ao parâmetro de coesão do nó 10, onde se localiza o dano.

Na Figura 13a observa-se nitidamente a convergência das cadeias dos parâmetros estimados. A convergência também é apontada pelo valor de  $|Z|$  indicado na Tabela 3. A cadeia correspondente ao nó com dano atinge o estado estacionário com algo em torno de 2000 estados, uma convergência bastante rápida considerando-se o tamanho total da cadeia. Ocorreu a localização do dano com bastante eficiência, porém o valor exato não ficou contido no intervalo de credibilidade apesar da estimativa do parâmetro de coesão do nó com dano ter sido próxima do valor exato, como indicam também os valores de

$E_{RMS}$  e  $E_{r_{10}}$ . Observa-se um tempo computacional bastante elevado, como já esperado, devido à necessidade dos cálculos repetidos do gradiente  $\nabla \mathcal{U}$ .

Figura 13 - Resultados da identificação de danos para o Caso 1: HMC



Legenda: (a) cadeias; (b) perfil de dano; (c) histograma; (d) função de autocorrelação.

Fonte: O autor, 2020

Tabela 3 - Resultados estatísticos da identificação de danos do Caso 1: HMC

Média das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,5524
Desvio Padrão das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,0231
$ Z $	0,1724
Taxa de Aceitação (%)	79,3
$E_{RMS}$	0,0208
$E_{r_{10}}$	0,0789
Int. de Cred. (95%)	[0,5151 ; 0,6048]
Tempo (horas)	24,6

Fonte: o autor, 2020

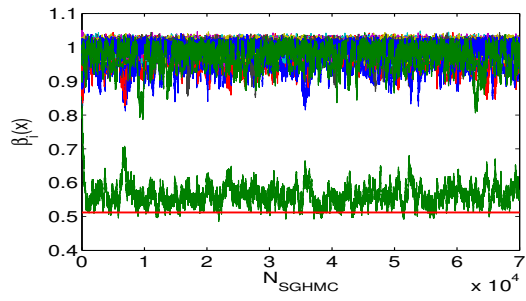
#### 4.1.3 Método SGHMC

Na análise que se segue, será observado e comparado o desempenho do método SGHMC no mesmo problema resolvido anteriormente com o método HMC. O método será, também agora, aplicado aos dois outros casos descritos na Tabela 2, analisando assim, sua capacidade de localização e quantificação do dano frente a outra condição de ruído ou cenário de dano. Primeiramente são feitas algumas investigações quanto à influência dos hiperparâmetros do método SGHMC nos resultados obtidos. E em seguida apresentados resultados obtidos para diferentes casos de ruído e cenário de danos.

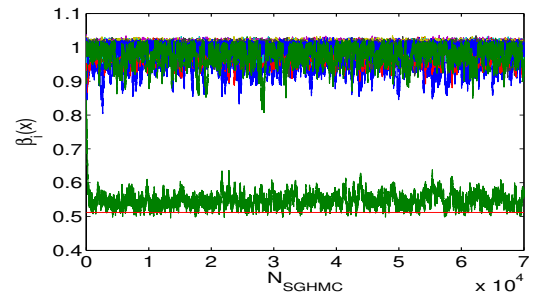
Nos resultados a seguir é realizada a análise do parâmetro  $\mathcal{C}$  do método SGHMC na resolução do problema. São comparadas as cadeias de Markov obtidas a partir da aplicação do método considerando-se o Caso 1 descrito na Tabela 2 com diferentes valores para o referido parâmetro. Considerou-se cadeias de 70000 estados tendo-se 25000 estados de aquecimento. Foi utilizado um tamanho para o passo de tempo de  $\epsilon_t = 0,001$  e o número de passos  $L_n$  escolhido aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo de de 1 a 10 para a resolução numérica das equações da dinâmica do método. A mesma função densidade de probabilidade *a priori* descrita para a aplicação do método HMC foi utilizada para o SGHMC.

Na figura 14 são mostradas as cadeias de Markov obtidas pela aplicação do método SGHMC com quatro valores do parâmetro  $\mathcal{C}$ . E na figura 15 são mostrados os perfis de dano correspondentes. Para este problema de identificação de danos não se observa grande influência deste parâmetro nos resultados, embora possa ser observado que, apesar da convergência da cadeia, aquelas com valores mais altos do referido parâmetro, figura 14d, apresentam uma maior dispersão em torno do valor médio, o que se reflete também na ampliação do intervalo de credibilidade.

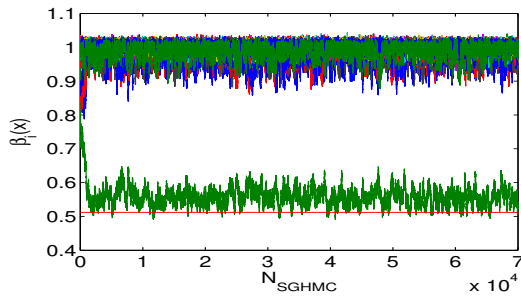
Figura 14 - Cadeias de Markov Caso 1 (SGHMC)



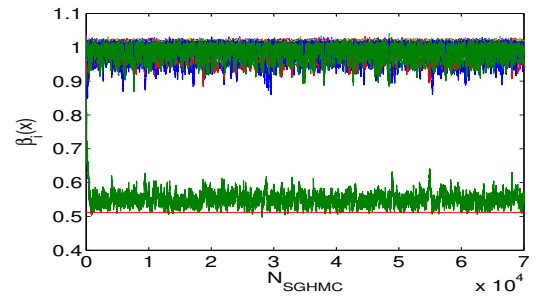
(a)



(b)



(c)

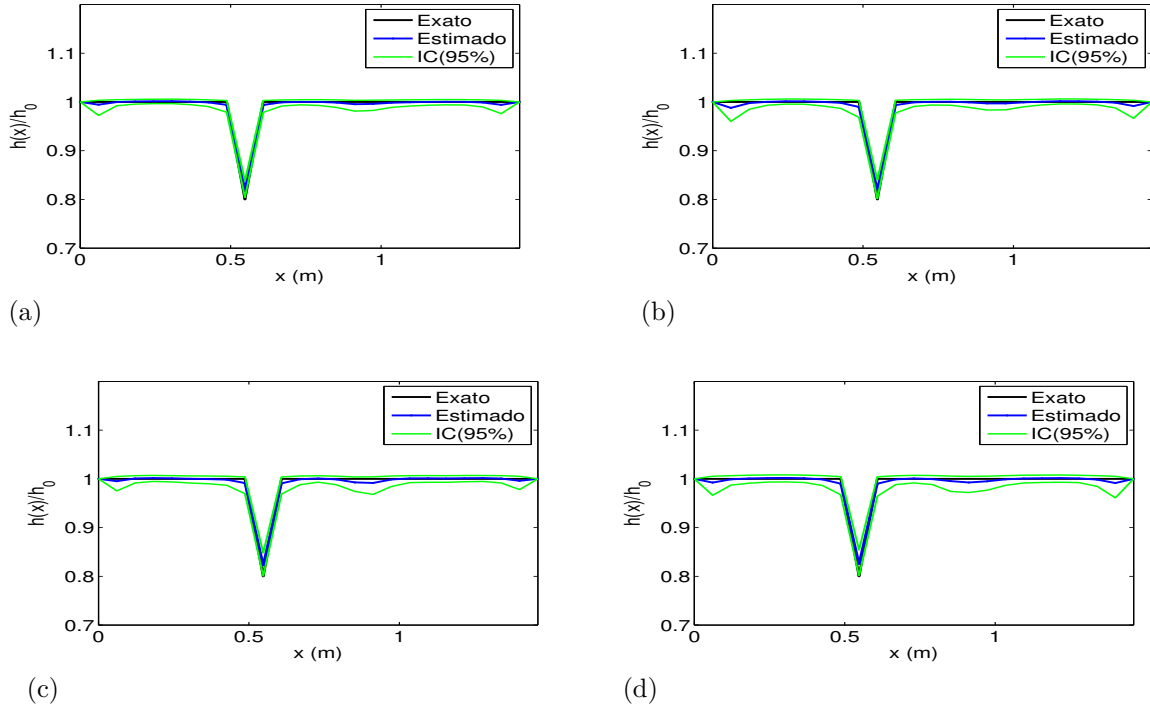


(d)

Legenda: (a)  $\mathcal{C} = 200$ ; (b)  $\mathcal{C} = 400$ ; (c)  $\mathcal{C} = 600$ ; (d)  $\mathcal{C} = 800$ .

Fonte: O autor, 2020

Figura 15 - Perfis de danos Caso 1 (SGHMC)



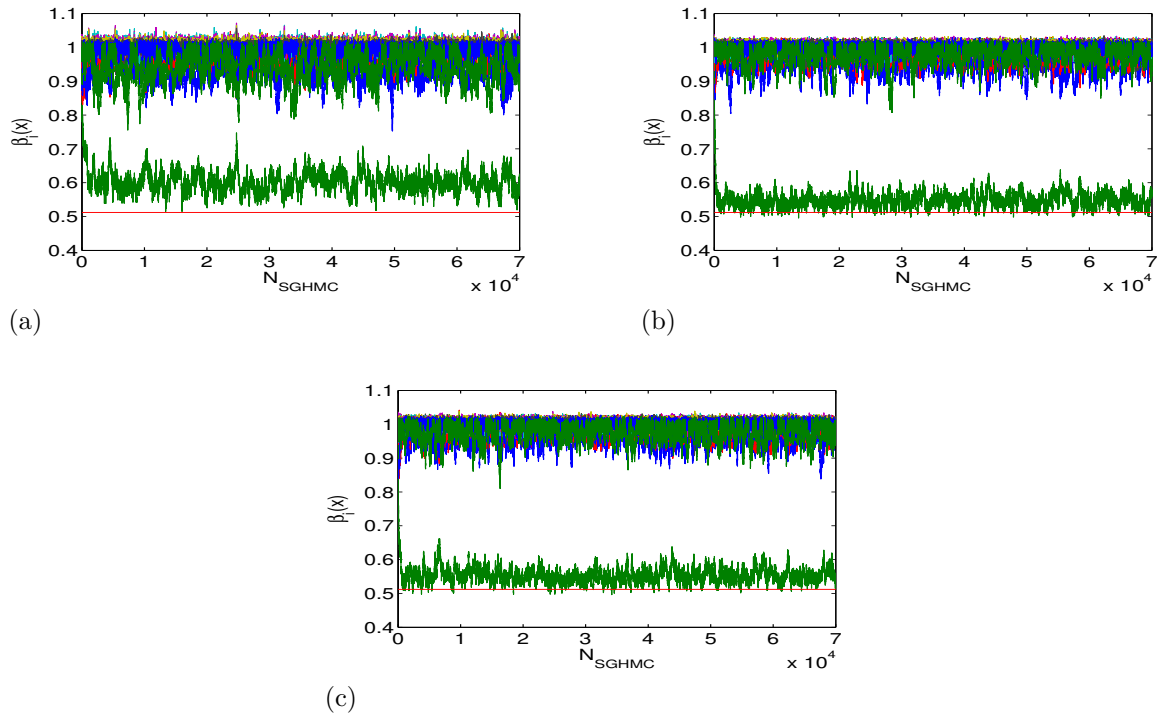
Legenda: (a)  $\mathcal{C} = 200$ ; (b)  $\mathcal{C} = 400$ ; (c)  $\mathcal{C} = 600$ ; (d)  $\mathcal{C} = 800$ .

Fonte: O autor, 2020

Também foi analisada a influência de  $|\tilde{\mathcal{D}}|$ , o tamanho do subconjunto do conjunto total de dados utilizados para a estimação dos parâmetros com o método SGHMC. Na figura 16 pode-se comparar as cadeias de Markov obtidas da aplicação do método SGHMC ao Caso 1, descrito na Tabela 2, para  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ,  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$  e  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ , este último correspondendo ao total de dados obtidos da simulação do problema direto para o cálculo do gradiente estocástico. Na figura 17, são mostrados os perfis de dano correspondentes. O parâmetro  $\mathcal{C}$  aqui, foi mantido com o valor  $\mathcal{C} = 400$  e os valores dos parâmetros  $\epsilon$  e  $L_n$  foram mantidos como na comparação anterior. Foram consideradas cadeias de 70000 estados com 25000 estados de aquecimento.

Novamente, como na comparação em relação ao parâmetro  $\mathcal{C}$ , a influência da mudança de  $|\tilde{\mathcal{D}}|$  no SGHMC não é tão perceptível. Observa-se, no entanto, como anteriormente, um pequeno afastamento do valor médio da cadeia em relação ao valor exato, que se acentua ao se diminuir a quantidade de dados considerada no cálculo do gradiente. Além disso, pode-se observar uma menor dispersão da cadeia com o aumento da quantidade de dados, verificando-se assim que para  $|\tilde{\mathcal{D}}|$  maiores a dispersão é menor, como era de se esperar.

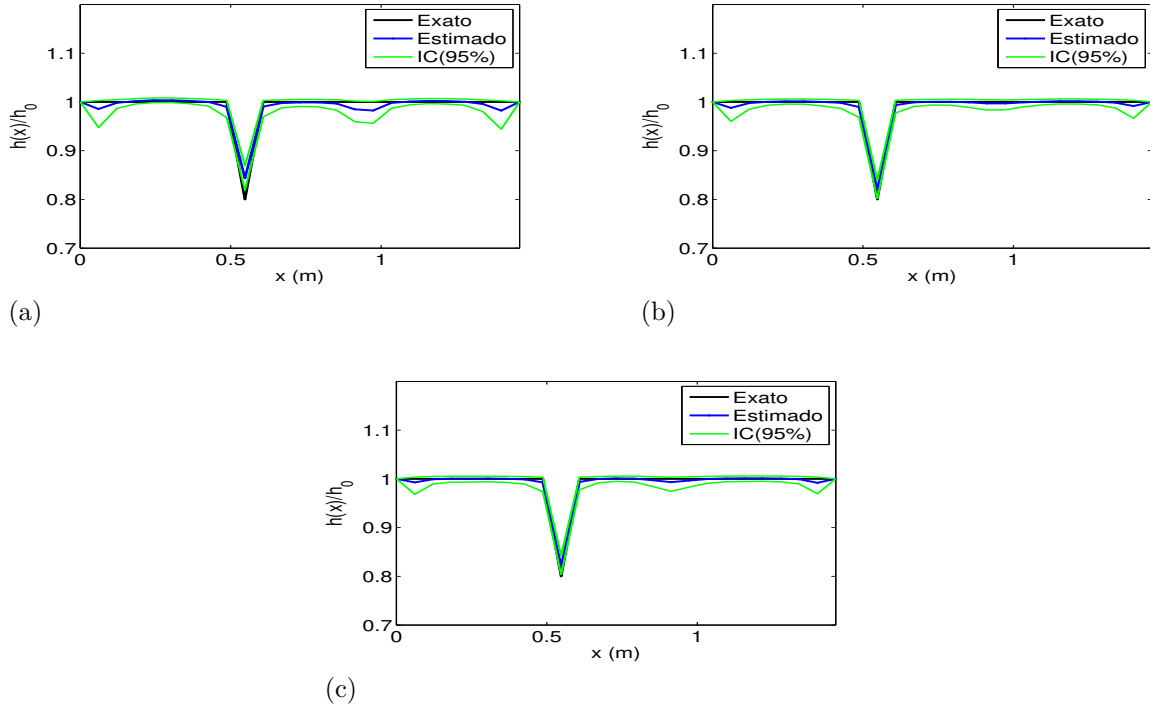
Figura 16 - Cadeias Caso 1 - variação do número de dados experimentais



Legenda: (a)  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ; (b)  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ ; (c)  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ .

Fonte: O autor, 2020

Figura 17 - Identificação de danos Caso 1 - variação do número de dados experimentais



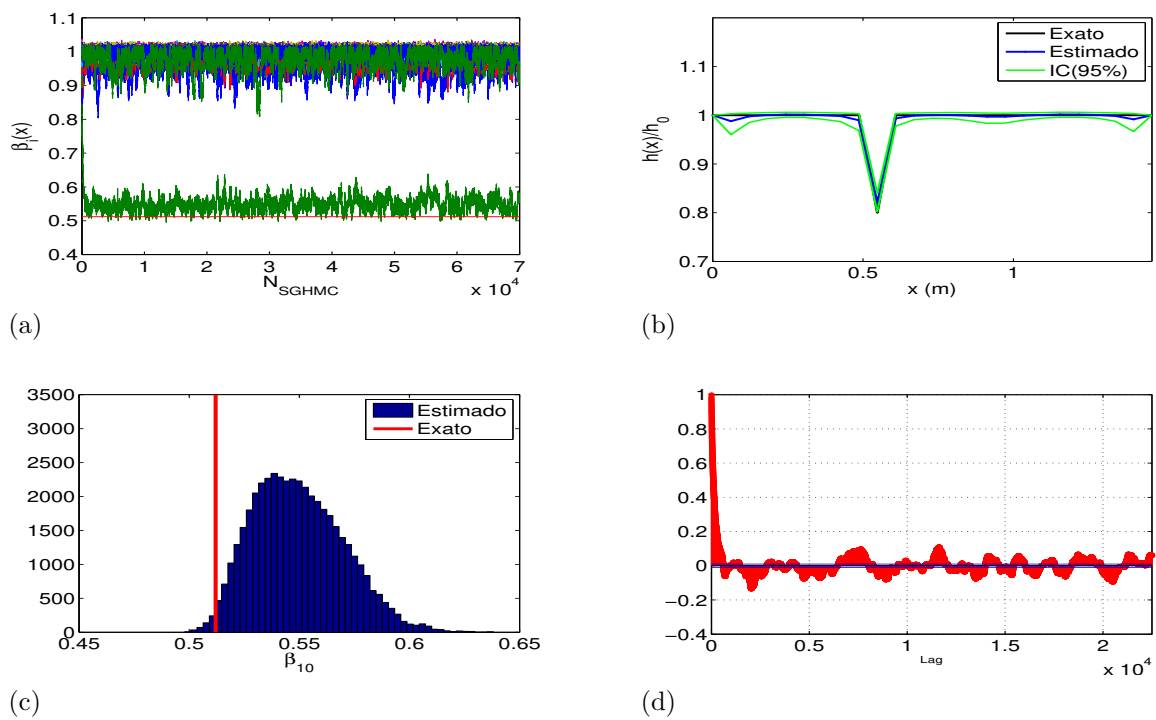
Legenda: (a)  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ; (b)  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ ; (c)  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ ;

Fonte: O autor, 2020

Na Figura 18 são apresentadas, além das cadeias e do perfil de dano, o histograma e a função de autocorrelação referentes ao parâmetro de coesão  $\beta_{10}$  resultantes da aplicação do SGHMC considerando-se o Caso 1 descrito na Tabela 2 tomando o parâmetro  $\mathcal{C} = 400$ ,  $\epsilon = 0,001$ ,  $L_n$  aleatoriamente escolhido no intervalo de 1 a 10 com uma distribuição uniforme e  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ . Pode-se observar um bom resultado em comparação com o resultado utilizando o método HMC apresentado na figura 13. A Tabela 4 apresenta os resultados numéricos. Comparando com os resultados apresentados na Tabela 3, pode-se observar que os valores obtidos foram bastante próximos. Quanto ao custo computacional, observa-se uma redução da ordem de 26% em relação ao método HMC. Além disso, observando-se o comportamento das cadeias, pode-se verificar uma convergência mais rápida no presente método. O valor do parâmetro  $|Z|$  indica a convergência da cadeia.

Na Figura 19 são mostrados resultados considerando-se 10000 estados da cadeia de Markov e 5000 estados de aquecimento mantendo os mesmos parâmetros mencionados anteriormente. Com isso verifica-se a possibilidade de se obter bons resultados com uma quantidade bem menor de estados da cadeia, o que implica uma redução considerável no custo computacional, que aqui reduziu-se para 2,7 horas.

Figura 18 - Resultados da identificação de danos Caso 1 (SGHMC)



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Perfil de dano; (c) Histograma  $\beta_{10}$ ; (d) função de autocorrelação  $\beta_{10}$ ;

Fonte: O autor, 2020

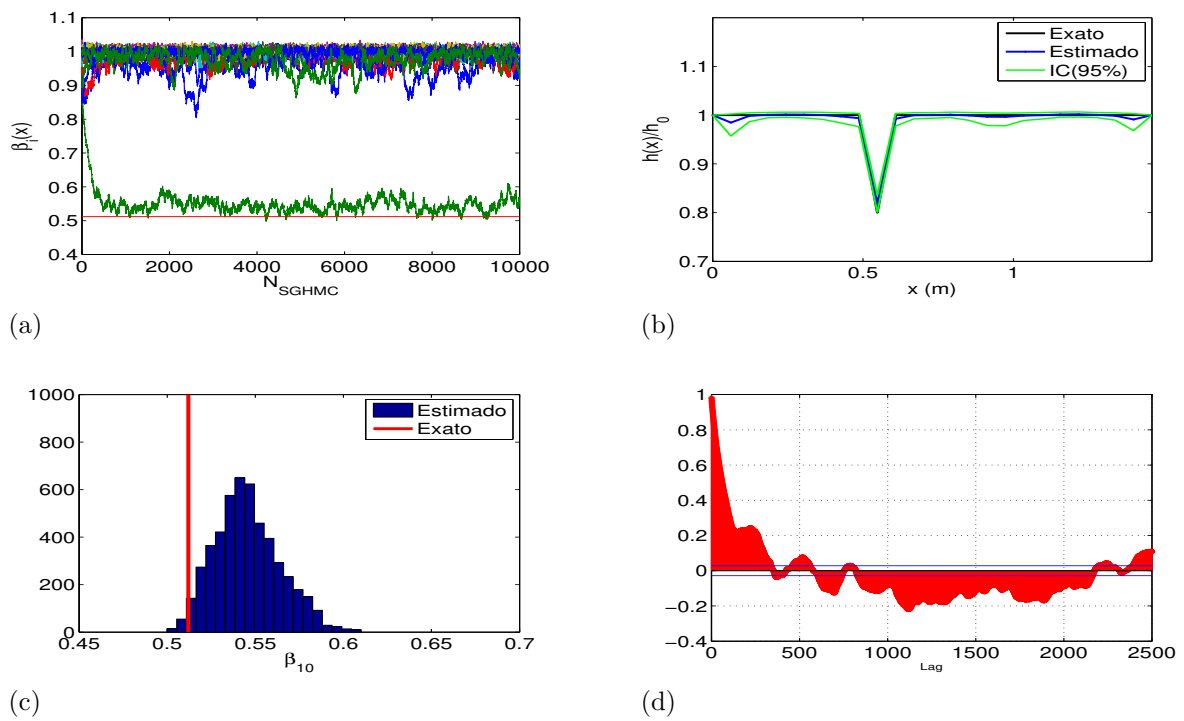


Tabela 4 - Resultados numéricos da identificação de danos no Caso 1 (SGHMC)

Média das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,5496
Desvio Padrão das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,0205
$ Z $	0,1260
$E_{RMS}$	0,0187
$E_{r_{10}}$	0,0733
Int. de Cred. (95%)	[0,5155 ; 0,5925]
Tempo (horas)	18,2

Fonte: o autor, 2020

Figura 19 - Resultados da identificação de danos Caso 1 considerando uma cadeia de 10000 estados

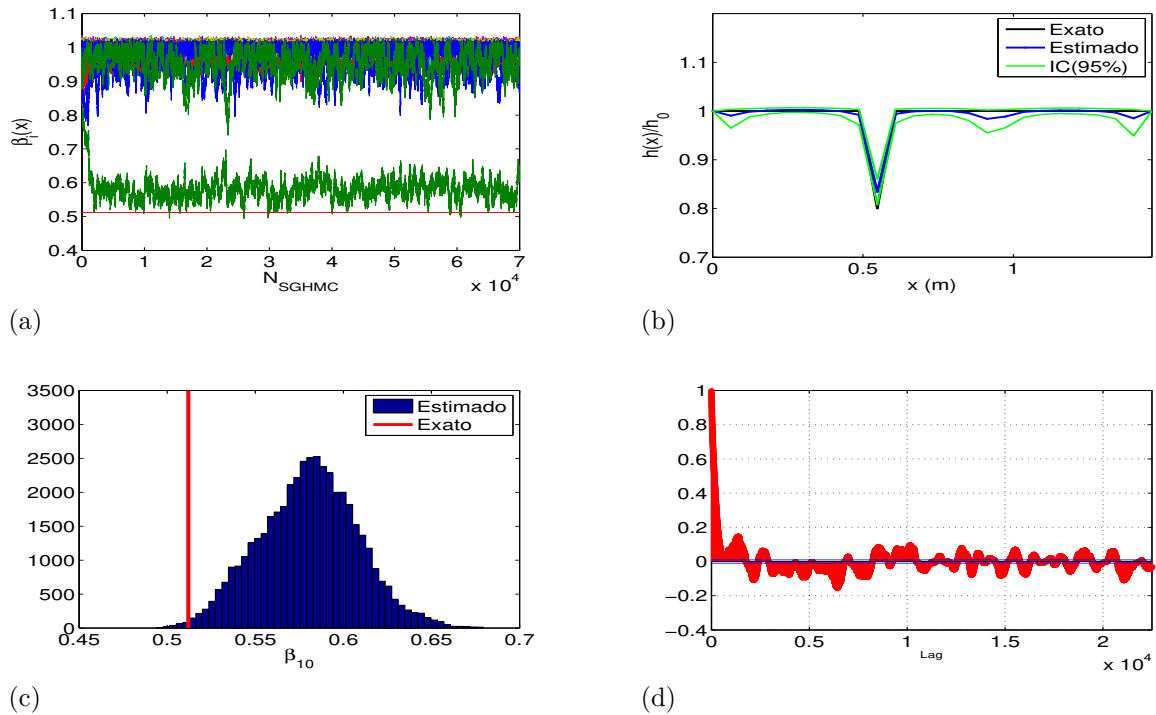


Legenda: (a) Cadeias ; (b) Perfil de dano; (c) Histograma  $\beta_{10}$ ; (d) função de autocorrelação  $\beta_{10}$ .

Fonte: O autor, 2020

A seguir são apresentados os resultados da aplicação do SGHMC ao Caso 2 mostrados na figura 20. A Tabela 2 mostra os resultados numéricos. Para permitir a comparação com o resultado do Caso 1, foi utilizado os valores dos parâmetros  $\mathcal{C} = 400$  e  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ , os mesmos utilizados no Caso 1. Também foram adotados  $\epsilon = 0,001$  e  $L_n$  novamente tomado de uma distribuição uniforme no intervalo de 1 a 10. Verifica-se que o aumento do ruído não impediu a identificação do dano assim como sua quantificação, tendo havido pouca variação em relação ao Caso 1 com ruído menor. A figura 20a mostra que a cadeia apresentou uma pequena diferença no tempo de convergência e apresentou uma maior dispersão em torno da média. Porém essas diferenças não foram acentuadas. Observa-se também, que o erro relativo foi um pouco maior, assim como o intervalo de confiança um pouco mais largo em relação ao Caso 1.

Figura 20 - Resultados da identificação de danos Caso 2 (SGHMC)



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Perfil de dano; (c) Histograma  $\beta_{10}$ ; (d) função de autocorrelação  $\beta_{10}$ .

Fonte: O autor, 2020

Finalmente são apresentados os resultados considerando-se o Caso 3 descrito na Tabela 2 aplicando-se o SGHMC. Para esse caso, verificou-se que o resultado obtido não foi satisfatório com o valor de  $\epsilon$  utilizado para os casos anteriores. Foi observado que o resultado pode ser melhorado com a diminuição do tamanho do passo de tempo utilizado na resolução numérica das equações da dinâmica do método. Na Figura 21 pode-se observar as cadeias obtidas com os valores  $\epsilon = 0,001$  (o mesmo utilizado nas simulações

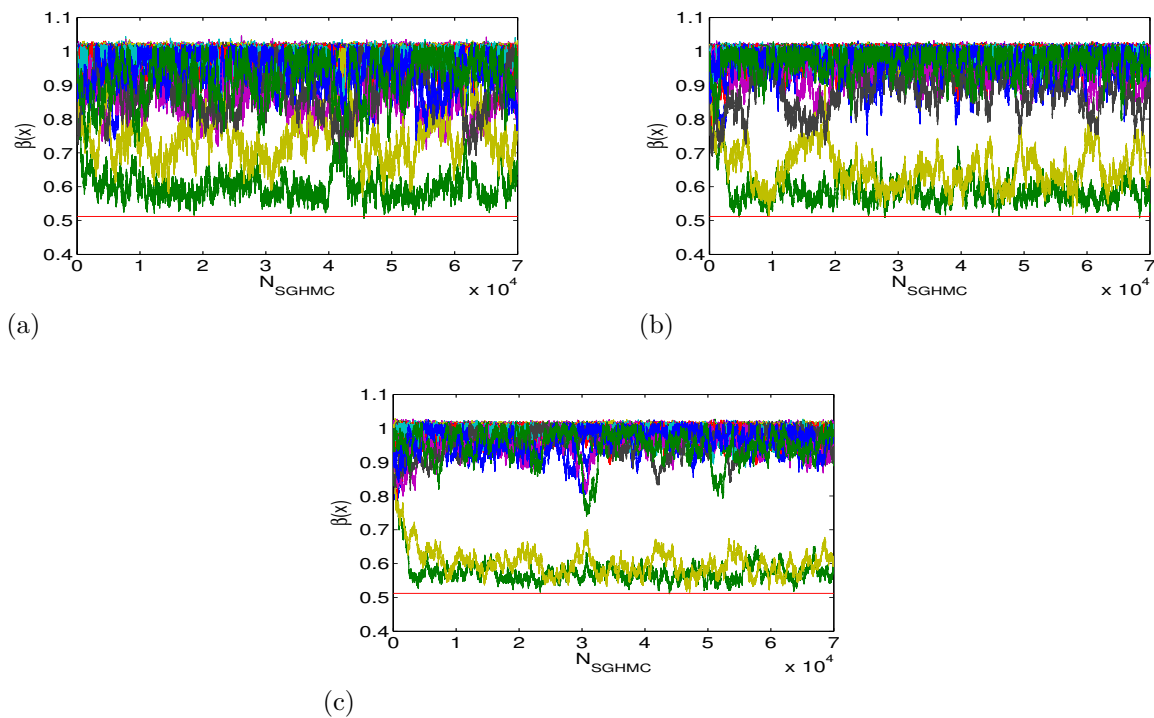
Tabela 5 - Resultados numéricos da identificação de danos no  
Caso 2 (SGHMC)

Média das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,5805
Desvio Padrão das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,0280
$ Z $	0,1639
$E_{RMS}$	0,0265
$E_{r_{10}}$	0,1337
Int. de Cred. (95%)	[0,5265 ; 0,6364]
Tempo (horas)	18,2

Fonte: o autor, 2020

anteriores),  $\epsilon = 0,0009$  e  $\epsilon = 0,0005$ . A Figura 22 mostra os respectivos perfis de dano. Observa-se que o valor  $\epsilon = 0,0005$  apresenta maior estabilidade das cadeias, assim como valores médios dos parâmetros mais próximos do valor correto.

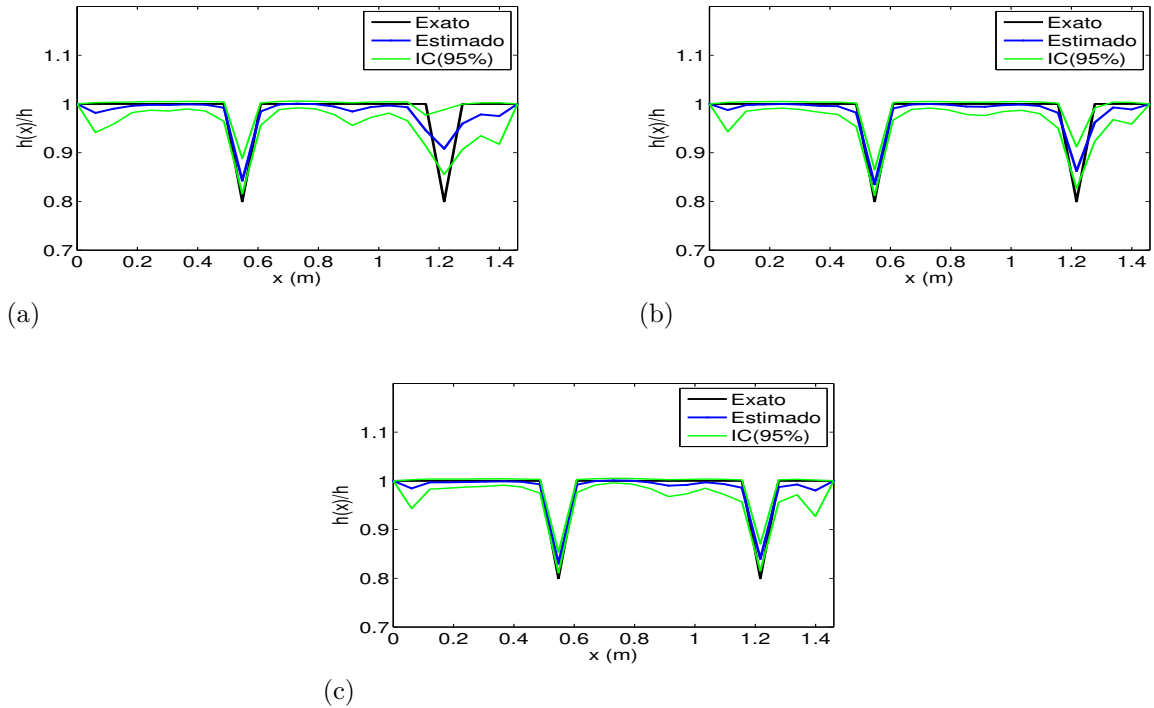
Figura 21 - Comparação das cadeias obtidas para o Caso 3 (SGHMC)



Legenda: (a)  $\epsilon = 0,001$ ; (b)  $\epsilon = 0,0009$ ; (c)  $\epsilon = 0,0005$ .

Fonte: O autor, 2020

Figura 22 - Comparação dos perfis de dano obtidos para o Caso 3 (SGHMC)

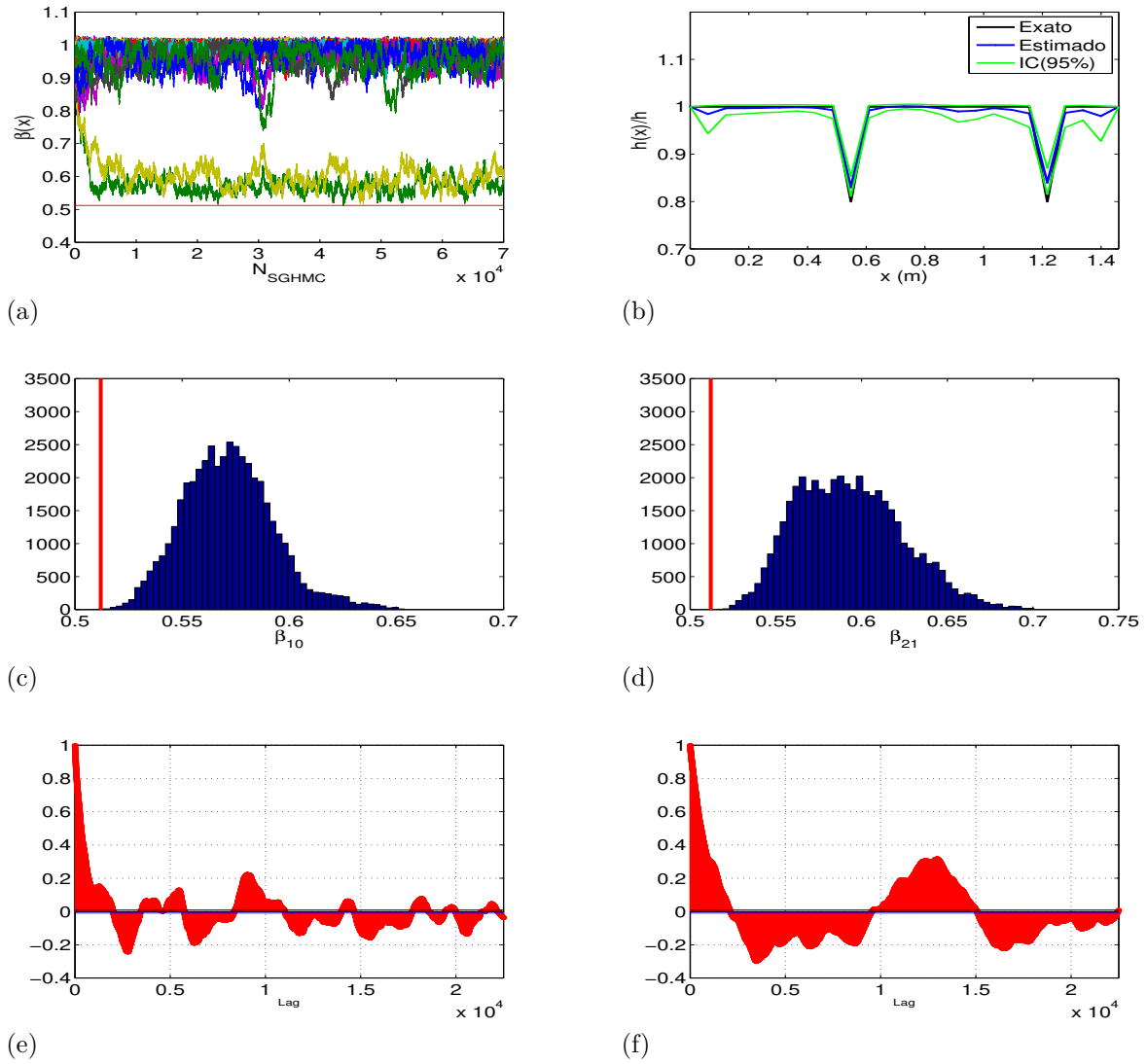


Legenda: (a)  $\epsilon = 0,001$ ; (b)  $\epsilon = 0,0009$ ; (c)  $\epsilon = 0,0005$ .

Fonte: O autor, 2020

A Figura 23 mostra os resultados obtidos considerando-se  $\epsilon = 0,0005$ , que produziu os melhores resultados e a Tabela 6 mostra as respectivas propriedades estatísticas. Observa-se que após o ajuste de  $\epsilon$ , o resultado se mostrou satisfatório, ocorrendo a localização dos dois danos, bem como uma boa estimativa de sua intensidade. Observa-se uma melhor estimativa do dano localizado no nó 10. O valor mais frequente mostrado no histograma da Figura 23c que aparece deslocado para um valor maior em relação ao valor exato pode ser devido ao efeito provocado pela distribuição *a priori* utilizada.

Figura 23 - Resultados da identificação de danos Caso 3 (SGHMC)



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Perfil de dano; (c) Histograma  $\beta_{10}$ ; (d) Histograma  $\beta_{21}$ ; (e) função de autocorrelação  $\beta_{10}$ ; (f) função de autocorrelação  $\beta_{21}$ .

Fonte: O autor, 2020

Tabela 6 - Resultados numéricos da identificação de danos no  
Caso 3 (SGHMC)

Média das amostras ( $\beta_{10}$ )	0,5718
Média das amostras $\beta_{21}$	0,5929
Desvio Padrão das amostras $\beta_{10}$	0,0212
Desvio Padrão das amostras $\beta_{21}$	0,0309
$ Z $	0,0422
$E_{RMS}$	0,0492
$E_{r_{10}}$	0,1167
$E_{r_{21}}$	0,1581
Int. de Cred. (95%) $\beta_{10}$	[0,5337 ; 0,6205]
Int. de Cred. (95%) $\beta_{21}$	[0,5419 ; 0,6589]
Tempo (horas)	18,9

Fonte: o autor, 2020

## 4.2 Identificação de danos em uma placa simplesmente apoiada

Serão agora apresentados, resultados da aplicação do método SGHMC aplicado ao problema de identificação de danos em uma placa de Kirchhoff simplesmente apoiada, conforme o modelo descrito no Capítulo 2. Primeiramente serão apresentadas investigações sobre a influência dos parâmetros do método nos resultados obtidos, como feito no problema anterior. Depois serão analisados os resultados em três diferentes casos, mostrando o desempenho do método ao se modificar o ruído da resposta, ou em um cenário diferente de danos, verificando sua eficiência nesses casos. Busca-se estimar o campo de dano estrutural a partir da determinação dos parâmetros nodais de coesão, de acordo com a malha do modelo de elementos finitos utilizada para a sua discretização.

### 4.2.1 Descrição do problema

A Tabela 7 mostra as propriedades da placa utilizada para as simulações. Na Tabela 8 são descritos os casos considerados levando-se em consideração a quantidade de danos, sua localização e a intensidade de ruído considerada de acordo com a razão sinal ruído (SNR).

A Figura 24 mostra uma representação esquemática dos cenários de danos considerados, assim como sua localização. Foi considerada a colocação do atuador na posição (0,2;0,2) e do sensor na posição (0,5;0,1).

A Figura 26 mostra a resposta impulsiva da placa para o Caso 1 descrito na Tabela



8 , a Figura 27 a resposta impulsiva para o Caso 2 e a Figura 28 para o Caso 3 .

Tabela 7 - Propriedades Nominais da placa de Kirchhoff

Comprimento	0,6 m
Largura	0,6 m
Espessura	$2 \cdot 10^{-3}$ m
Módulo de Elasticidade ( $E$ )	210 GPa
Massa Específica ( $\rho$ )	$7,851 \cdot 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
Coeficiente de Poisson	0,3

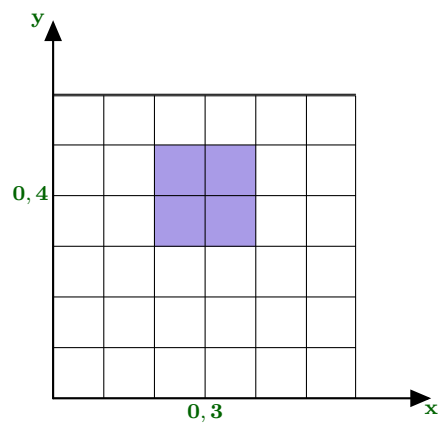
Fonte: o autor, 2020

Tabela 8 - Casos analisados na placa de Kirchhoff

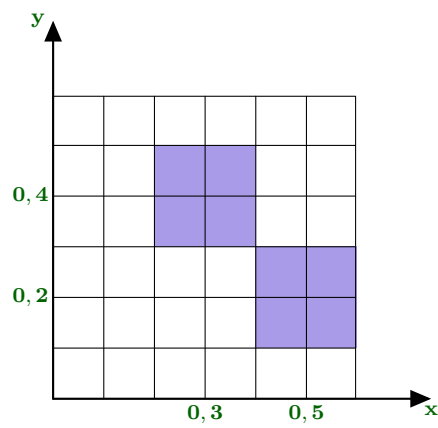
Caso	pos. dano (m)	$h(x, y)/h_0$	$\beta(x, y)$	SNR
1	(0,3;0,4)	0,8	0,512	15
2	(0,3;0,4)	0,8	0,512	10
3	(0,3;0,4);(0,5;0,2)	0,8;0,8	0,512;0,512	15

Fonte: o autor, 2020

Figura 24 - Representação esquemática dos casos considerados



(a)

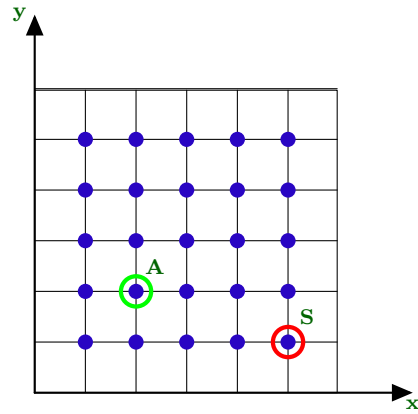


(b)

Legenda: (a) Casos 1 e 2; (b) Caso 3.

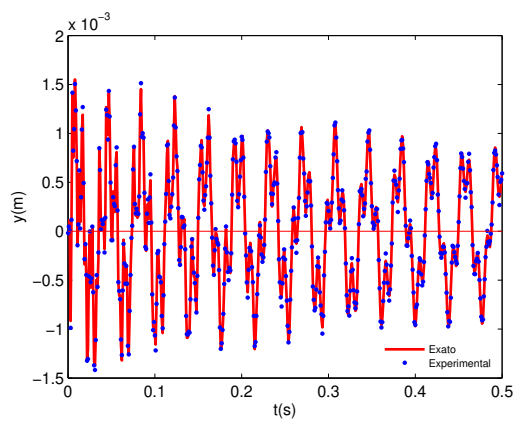
Fonte: O autor, 2020

Figura 25 - Representação esquemática dos nós, atuador (A) e sensor (S)

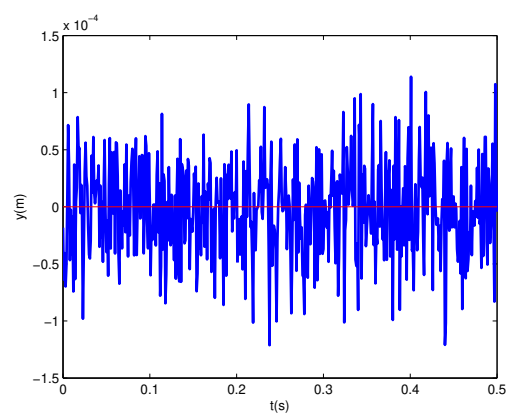


Fonte: O autor, 2020

Figura 26 - Resposta impulsiva da placa Caso 1



(a)

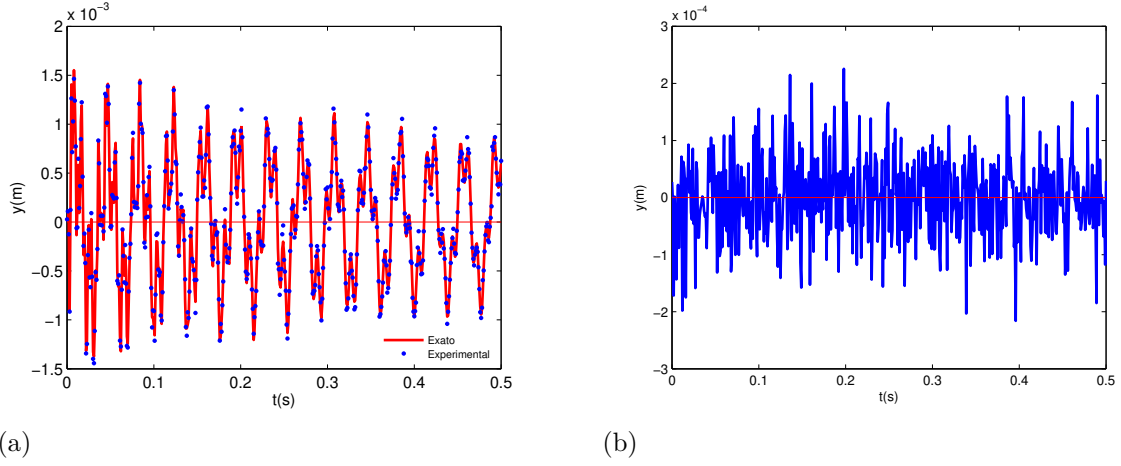


(b)

Legenda: (a) Resposta Impulsiva; (b) Ruído.

Fonte: O autor, 2020

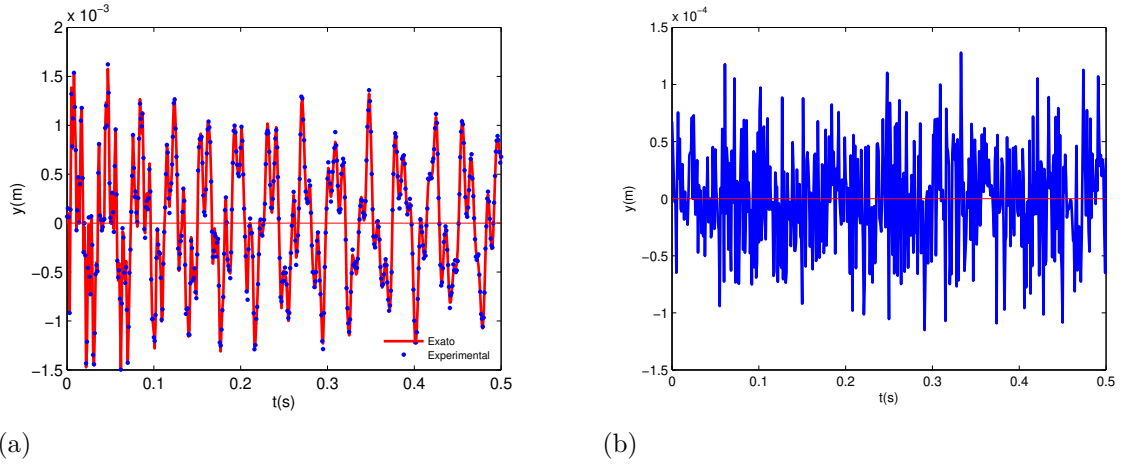
Figura 27 - Resposta impulsiva da placa Caso 2



Legenda: (a) Resposta Impulsiva; (b) Ruído.

Fonte: O autor, 2020

Figura 28 - Resposta impulsiva da placa Caso 3



Legenda: (a) Resposta Impulsiva; (b) Ruído.

Fonte: O autor, 2020

#### 4.2.2 Método SGHMC

A seguir são apresentados os resultados das simulações feitas nos diferentes casos descritos na Tabela 8.

Nas simulações com o problema da placa, foram considerados 30000 estados da cadeia de Markov com 10000 estados de aquecimento. A quantidade menor de estados,

em comparação com o problema anterior da viga, se justifica pelo fato das simulações no caso da placa demandarem um maior custo computacional. Tendo sido verificada uma rápida convergência das cadeias, a quantidade de estados usados no problema da viga mostrou-se excessiva. Na verdade a quantidade de estados poderia ter sido ainda menor, dada a rápida convergência observada, o que implicaria em maior diminuição do custo computacional.

Os valores dos parâmetros do método foram mantidos em  $\epsilon = 0,001$  e  $L_n$  tomado aleatoriamente de uma distribuição uniforme no intervalo de 1 a 10 como no problema anterior.

A Figura 29 apresenta as cadeias resultantes da aplicação do método no Caso 1 descrito na Tabela 8 considerando-se um valor para o parâmetro  $\mathcal{C} = 200$  e variando-se a quantidade de dados utilizados no cálculo do gradiente estocástico ( $|\tilde{\mathcal{D}}|$ ). Na Figura 29 não se observa tanta diferença com a variação da quantidade de dados utilizados para o cálculo do gradiente, mas, como é de se esperar, se percebe uma melhora na qualidade do resultado com o aumento da quantidade de dados. Já nas Figuras 30 e 31 se observa uma piora do resultado com o aumento da quantidade de dados experimentais. Esse comportamento, em princípio, não coincide com o que se esperaria, já que o cálculo do gradiente estaria com menor ruído. A forma de amostragem do método HMC se baseia em um sistema dinâmico fictício em que se considera a ausência de atrito. Com a introdução do ruído representado pelo cálculo do gradiente estocástico utilizado no SGHMC, torna-se necessária, como visto na Seção 3.2 a introdução do parâmetro  $\mathcal{C}$ . Ao se aumentar a quantidade de dados, se aproximando da quantidade original, a correção representada pela introdução desse parâmetro, torna-se desnecessária, prejudicando o método ao invés de melhorá-lo. Justifica-se assim, o comportamento apresentado.

Figura 29 - Resultados para o Caso 1 ( $\mathcal{C} = 200$ )

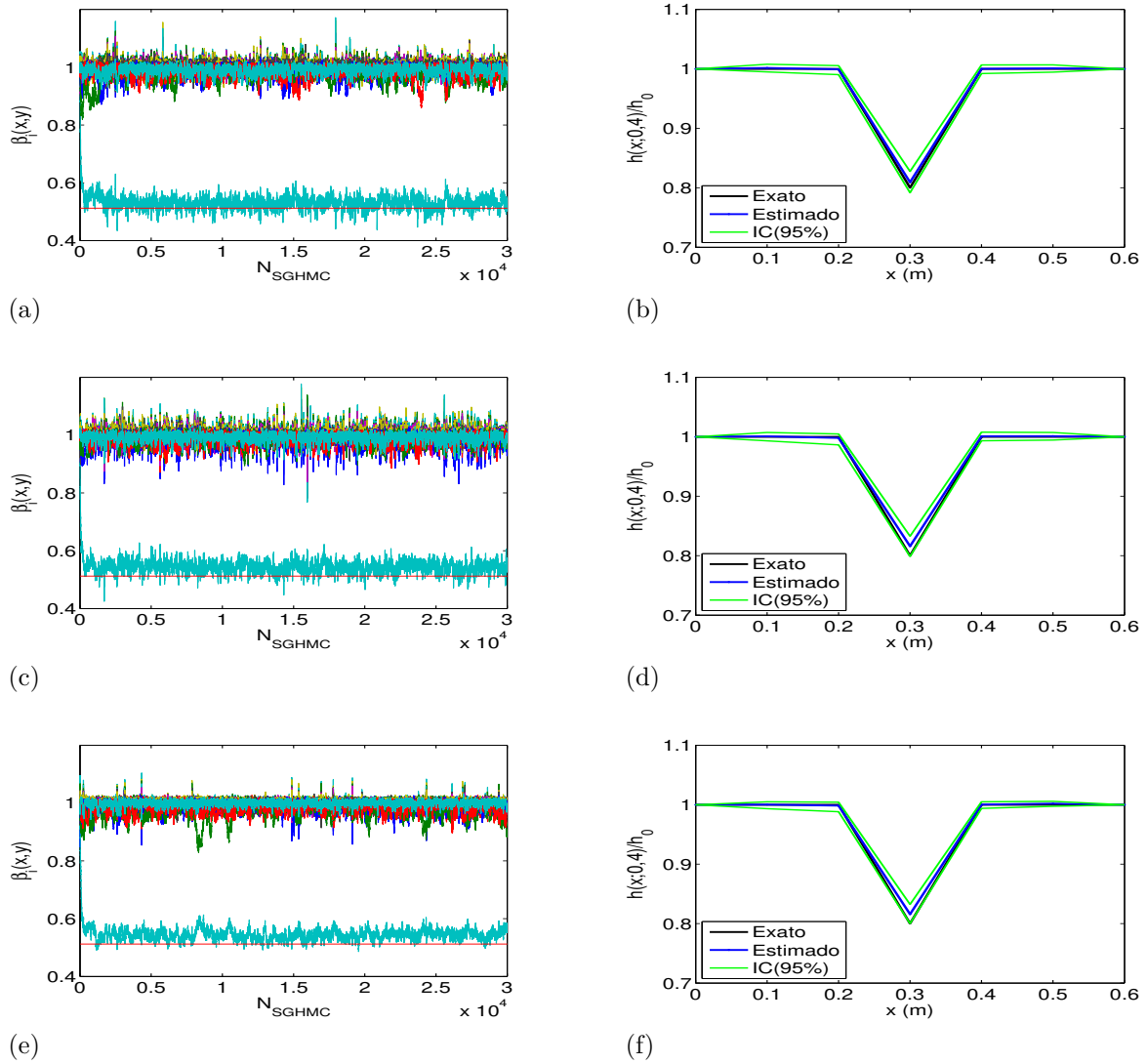
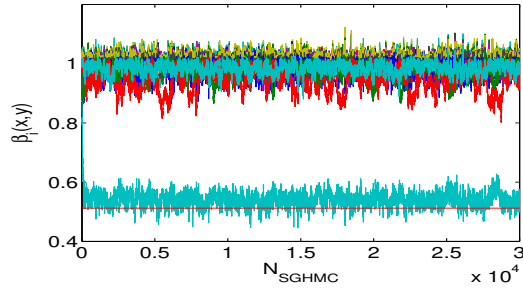
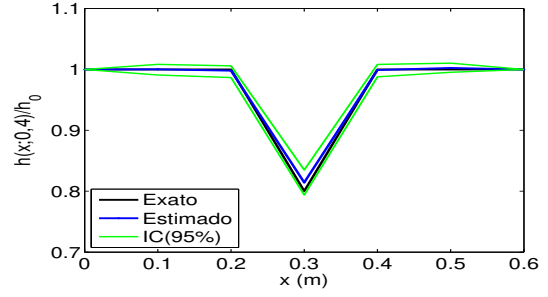


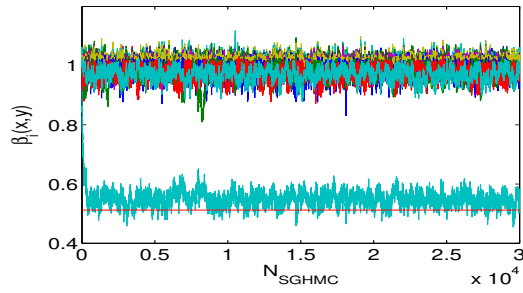
Figura 30 - Resultados para o Caso 1 ( $\mathcal{C} = 400$ )



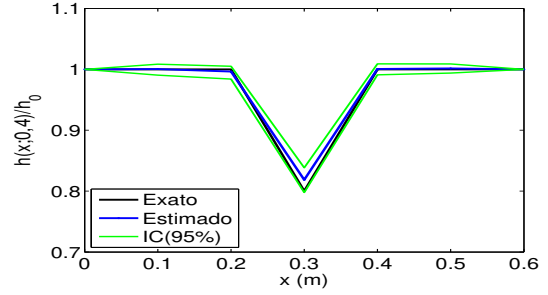
(a)



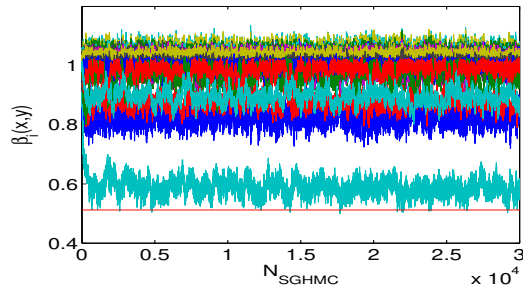
(b)



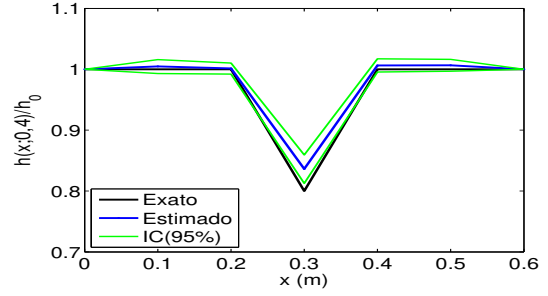
(c)



(d)



(e)

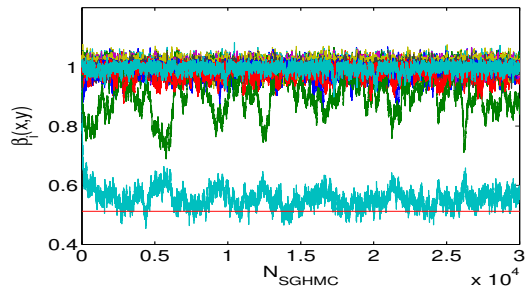


(f)

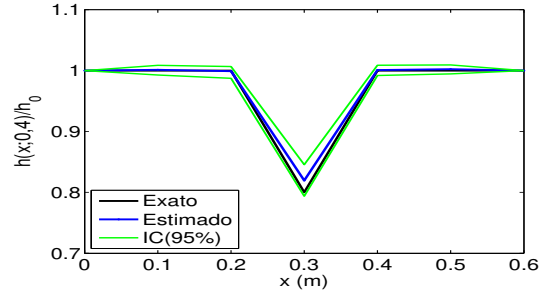
Legenda: (a) Cadeias -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ; (b) Perfil de dano -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ; (c) Cadeias -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ ; (d) Perfil de dano -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ ; (e) Cadeias -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ ; (f) Perfil -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ .

Fonte: O autor, 2020

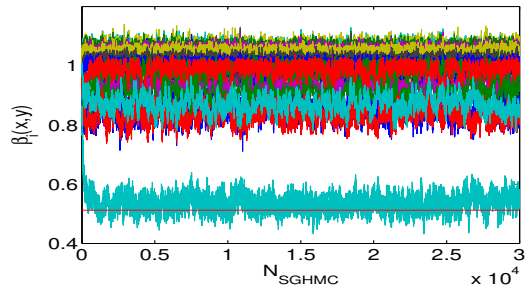
Figura 31 - Resultados para o Caso 1  $\mathcal{C} = 600$



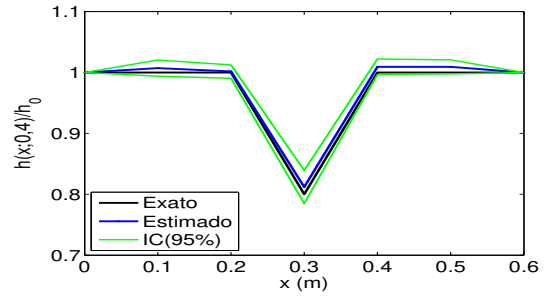
(a)



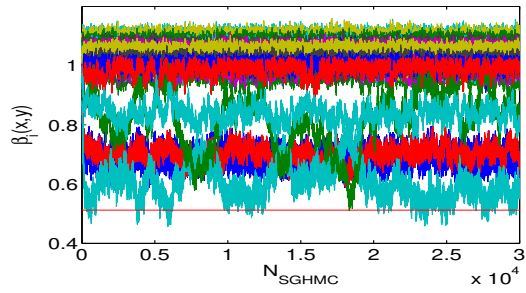
(b)



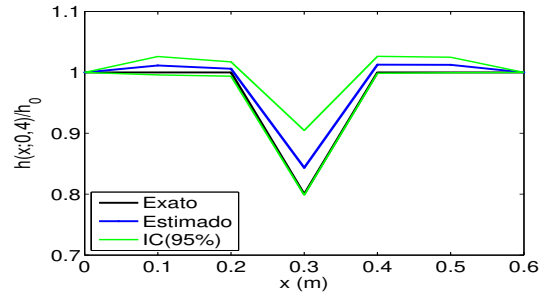
(c)



(d)



(e)



(f)

Legenda: (a) Cadeias -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ; (b) Perfil de dano -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 125$ ; (c) Cadeias -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ ; (d) Perfil de dano -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ ; (e) Cadeias -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ ; (f) Perfil -  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 500$ .

Fonte: O autor, 2020



É importante observar também a diferença no tempo computacional ao se modificar o valor de  $|\tilde{\mathcal{D}}|$ . A Tabela 9 mostra os tempos computacionais para o Caso 1, adotando-se o parâmetro  $\mathcal{C} = 400$ , variando-se  $|\tilde{\mathcal{D}}|$  e mantendo-se os outros parâmetros e o número de estados da cadeia, com os valores já mencionados. Pode-se verificar a redução do tempo computacional para valores de  $|\tilde{\mathcal{D}}|$  mais baixos.

Tabela 9 - Tempos computacionais para diferentes  $|\tilde{\mathcal{D}}|$

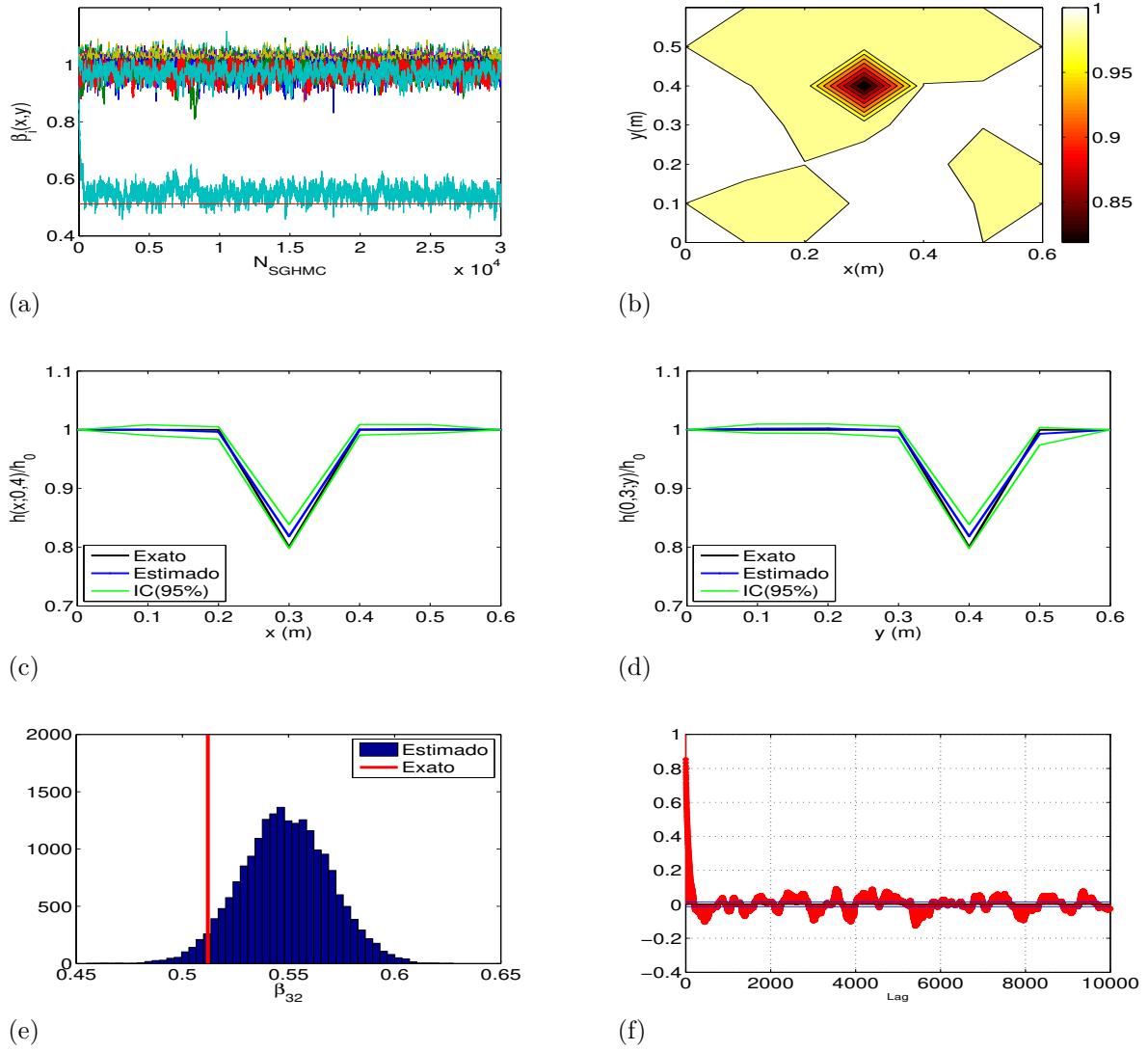
$ \tilde{\mathcal{D}} $	125	250	500
t(h)	44,7	46,1	48,3

Fonte: o autor, 2020

Na Figura 32, estão mostrados os resultados referentes à aplicação do método SGHMC ao Caso 1 descrito na Tabela 8 com  $\epsilon = 0,001$ ,  $L_n$  tomado de uma distribuição uniforme no intervalo de 1 a 10, o parâmetro  $\mathcal{C} = 400$  e  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ . Na Fig. 32a são vistas as cadeias de Markov referentes aos parâmetros ajustados. Na Figura 32b, um gráfico de cores mostrando a localização e a variação da razão entre as espessuras,  $h(x, y)/h_0$ , ao longo da placa. Nas Figuras 32c e 32d os cortes para  $y = 0,4\text{m}$  e  $x = 0,3\text{m}$  respectivamente. Nas Figuras 32e e 32f, o histograma referente ao parâmetro  $\beta_{32}$ , onde se localiza o dano e a função de autocorrelação correspondente a esse parâmetro. Na Tabela 10 são mostradas as estatísticas correspondentes. Pode-se observar que ocorreu um bom resultado tanto quanto à localização do dano quanto à estimativa de sua intensidade. Vale ressaltar que o tempo computacional tem relação direta com a quantidade de estados da cadeia. Considerando a rápida convergência observada, este tempo poderia ser diminuído fazendo-se uma redução no número total de estados.

O valor do parâmetro  $|Z|$  indica a convergência da cadeia. Além disso, na Figura 33 vê-se as distribuições *a posteriori* resultantes da estimação do parâmetro com dano,  $\beta_{32}$ , considerando duas partes distintas da cadeia onde se observa que as curvas apresentam pouca divergência entre si, indicando também a convergência da cadeia.

Figura 32 - Identificação de danos Caso 1



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Representação em cores da espessura da placa ; (c) Perfil de dano com  $y = 0,4$ m; (d) Perfil de dano com  $x = 0,3$ m (e) Histograma  $\beta_{32}$ ; (f) função de autocorrelação  $\beta_{32}$ .

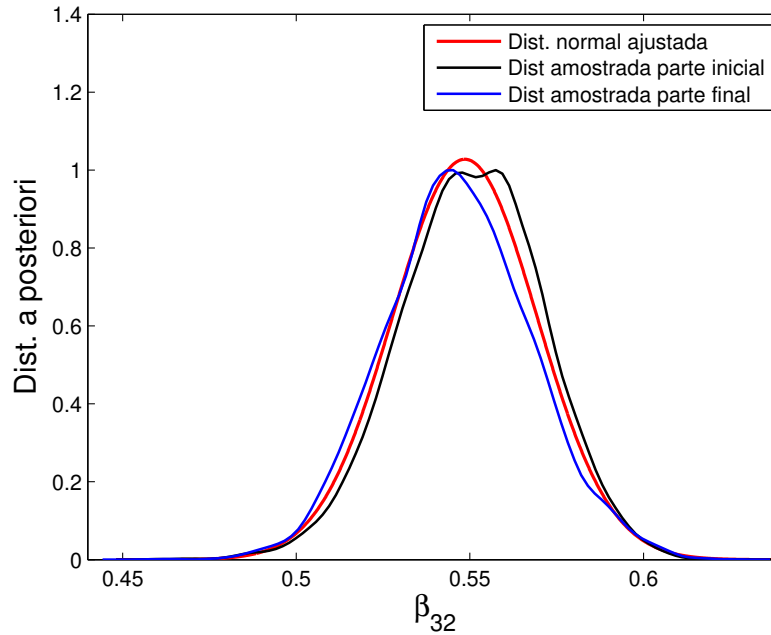
Fonte: O autor, 2020.

Tabela 10 - Resultados numéricos do Caso 1

Média das amostras ( $\beta_{32}$ )	0,5485
Desvio Padrão das amostras ( $\beta_{32}$ )	0,0208
$ Z $	0,1330
$E_{RMS}$	0,0153
$E_{r_{32}}$	0,0714
Int. de Cred. (95%)	[0,5078 ; 0,5893]
Tempo (horas)	46,07

Fonte: O autor, 2020.

Figura 33 - Distribuição normal ajustada e *posteriori* considerando a primeira e a segunda metades da cadeia

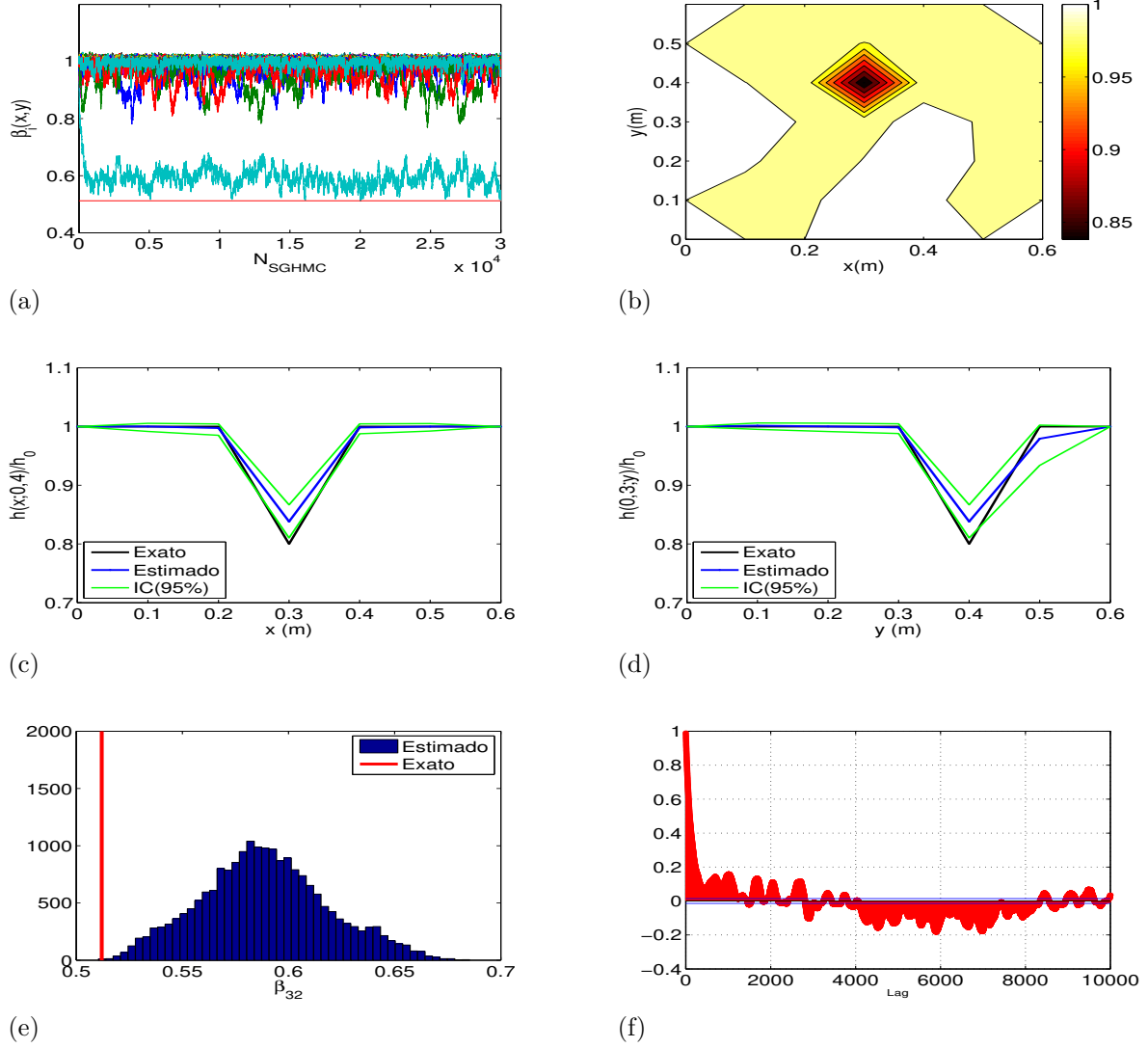


Fonte: O autor, 2020.

A seguir, são mostrados os resultados referentes à aplicação do método SGHMC ao Caso 2 descrito na Tabela 8 com  $\epsilon = 0,001$ ,  $L_n$  tomado de uma distribuição uniforme no intervalo de 1 a 10, o parâmetro  $\mathcal{C} = 400$  e  $|\mathcal{D}| = 250$ . Nas Figuras 34a, 34b, 34c, 34d 34e e 34f são mostradas, respectivamente, as cadeias de Markov, o gráfico de cores representando a razão  $h(x, y)/h_0$ , o corte para  $y = 0,4m$ , o corte para  $x = 0,3m$ , o histograma referente ao parâmetro  $\beta_{32}$ , onde se localiza o dano, e a função de autocorrelação correspondente a esse parâmetro. Na Tabela 11 são mostradas as estatísticas correspondentes. Pode-se observar um bom resultado mesmo em face da adição de maior ruído aos dados experimentais. A Figura 35 mostra as curvas ajustadas tomando-se diferentes intervalos da cadeia, assim como a curva normal ajustada, indicando a convergência da cadeia, fato

reforçado pelo valor do  $|Z| = 0,3008$ .

Figura 34 - Identificação de danos Caso 2 - parâmetro  $\mathcal{C} = 400$



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Perfil do dano no plano  $xy$  ; (c) Perfil de dano  $y = 0,4\text{m}$  ; (d) Perfil de dano  $x = 0,3\text{m}$  ; (e) Histograma  $\beta_{32}$ ; (f) função de autocorrelação  $\beta_{32}$ .

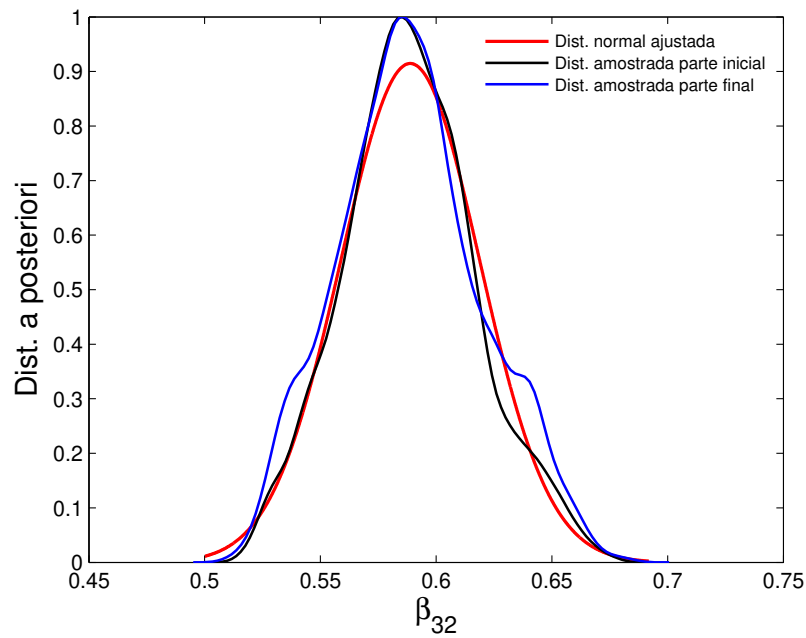
Fonte: O autor, 2020.

Tabela 11 - Resultados numéricos do Caso 2

Média das amostras ( $\beta_{32}$ )	0,5551
Desvio Padrão das amostras ( $\beta_{32}$ )	0,0300
$ Z $	0,3008
$E_{RMS}$	0,0160
Erro Relat.	0,0842
Int. de Cred. (95%)	[0,5042 ; 0,6205]

Fonte: o autor, 2020

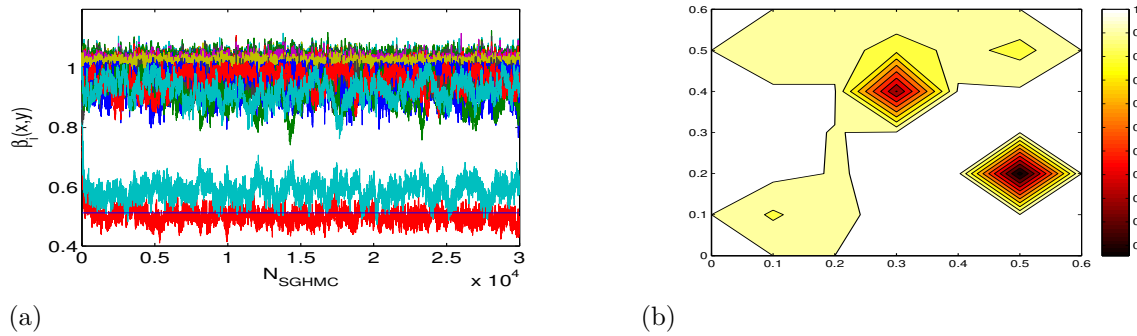
Figura 35 - Distribuição normal ajustada e *posteriori* considerando a primeira e a segunda metades da cadeia



Fonte: O autor, 2020

Por fim, o método SGHMC foi aplicado ao Caso 3 descrito na Tabela 8. Foram mantidos  $\epsilon$  e  $L_n$  com os mesmos valores, assim como o parâmetro  $\mathcal{C}$  e o número de dados  $|\tilde{\mathcal{D}}| = 250$ , permitindo assim uma melhor comparação entre os casos. Nas Figuras 36a, 36b, observam-se as cadeias de Markov e o gráfico de cores representativo da razão de espessuras da placa. Nas Figuras 37a, 37b, 37c e 37d são mostrados, respectivamente, os cortes para  $y = 0,4\text{m}$ ,  $x = 0,3\text{m}$ ,  $y = 0,2\text{m}$  e  $x = 0,5\text{m}$  que evidenciam a eficiente localização dos dois danos impostos. Os histogramas referentes aos parâmetros  $\beta_{32}$  e  $\beta_{20}$  são mostrados nas Figuras 38a e 38b e as funções de autocorrelação correspondentes a esses parâmetros podem ser vistas nas Figuras 38c e 38d. Na Tabela 12 são mostradas as estatísticas correspondentes. Pode-se observar que o método teve bom desempenho para este caso com dois danos, tendo localizado ambos os danos e apresentado uma boa estimativa da intensidade, sendo que o dano mais próximo do sensor, no nó 20, apresentou uma melhor estimativa do que o dano no nó 32. A Tabela 12 mostra os resultados numéricos obtidos para este caso. A Figura 39 mostra as distribuições *a posteriori* ajustadas considerando-se dois diferentes intervalos das amostras das cadeias referentes aos parâmetros  $\beta_{32}$  e  $\beta_{20}$  respectivamente, indicando a convergência de ambas as cadeias.

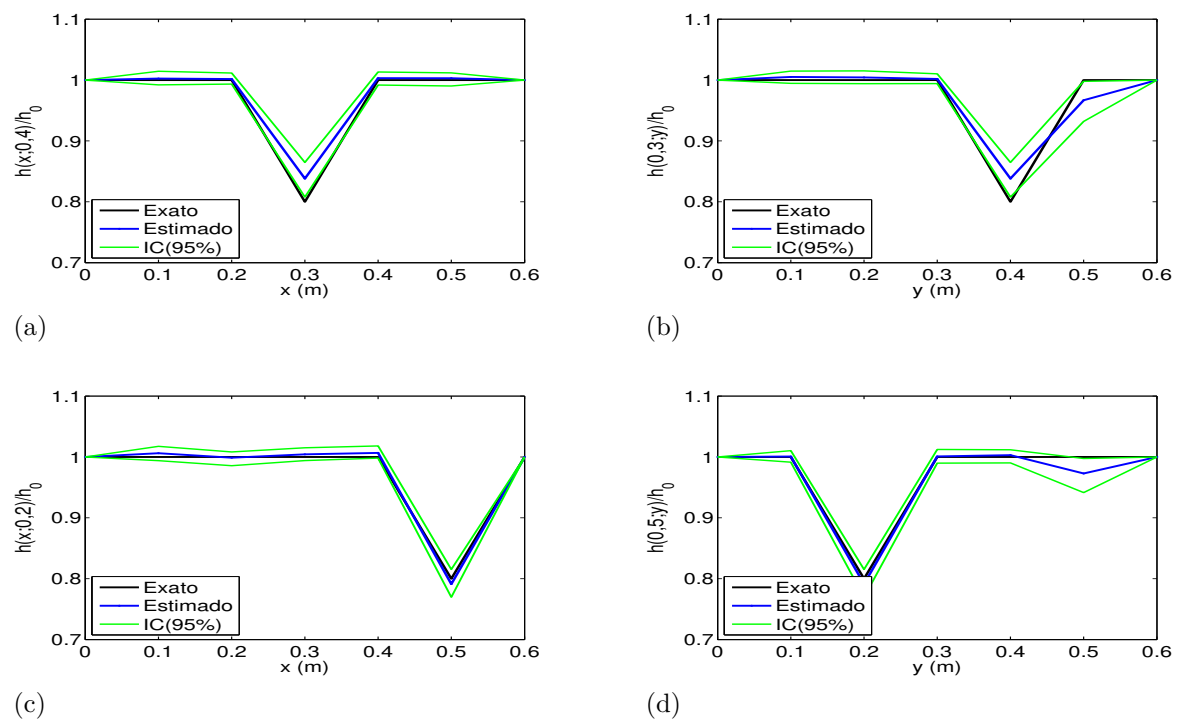
Figura 36 - Resultados da Identificação de danos Caso 3



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Perfil do dano no plano  $xy$ .

Fonte: O autor, 2020

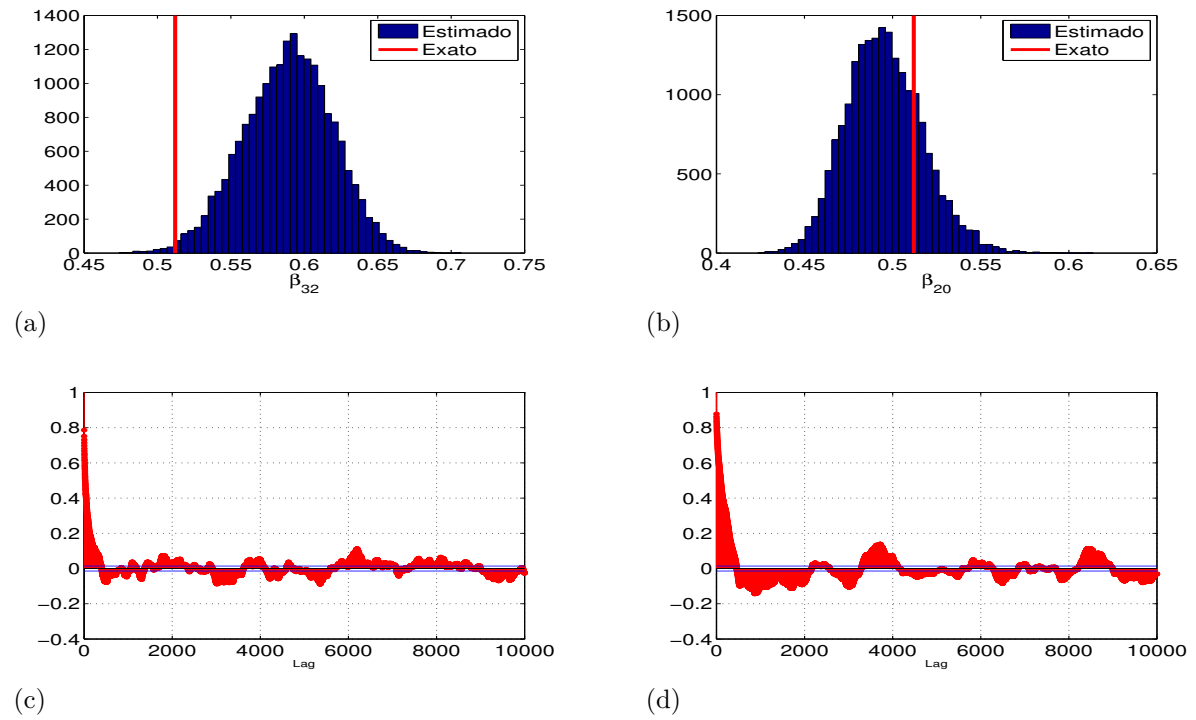
Figura 37 - Perfis da placa para identificação de danos Caso 3



Legenda: (a) Perfil de dano  $y = 0,4\text{m}$ ; (b) Perfil de dano  $x = 0,3\text{m}$ ; (c) Perfil de dano  $y = 0,2\text{m}$ ; (d) Perfil de dano  $x = 0,5\text{m}$ .

Fonte: O autor, 2020

Figura 38 - Histogramas e funções de autocorrelação para identificação de danos Caso 3



Legenda: (a) Histograma  $\beta_{32}$ ; (b) Histograma  $\beta_{20}$ ; (c) função de autocorrelação  $\beta_{32}$ ; (d) função de autocorrelação  $\beta_{20}$ .

Fonte: O autor, 2020

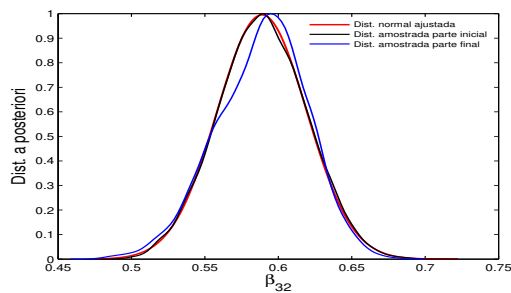


Tabela 12 - Resultados numéricos do Caso 3

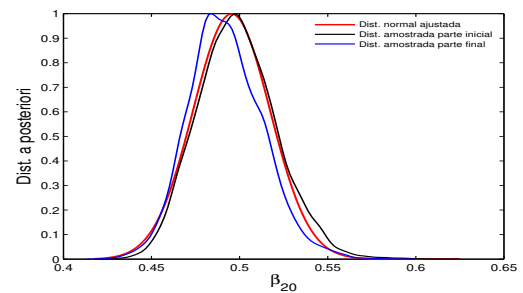
Média das amostras $\beta_{20}$	0,4954
Média das amostras $\beta_{32}$	0,5888
Desvio Padrão das amostras $\beta_{20}$	0,0219
Desvio Padrão das amostras $\beta_{32}$	0,0305
$ Z $	0,1488
$E_{RMS}$	0,0306
Erro Relat. $\beta_{20}$	0,0324
Erro Relat. $\beta_{32}$	0,1501
Int. de Cred. (95%) $\beta_{20}$	[0,4560 ; 0,5420]
Int. de Cred. (95%) $\beta_{32}$	[0,5272 ; 0,6464]
Tempo (horas)	44,8

Fonte: o autor, 2020

Figura 39 - Distribuição normal ajustada e *posteriori* considerando a primeira e a segunda metades da cadeia



(a)



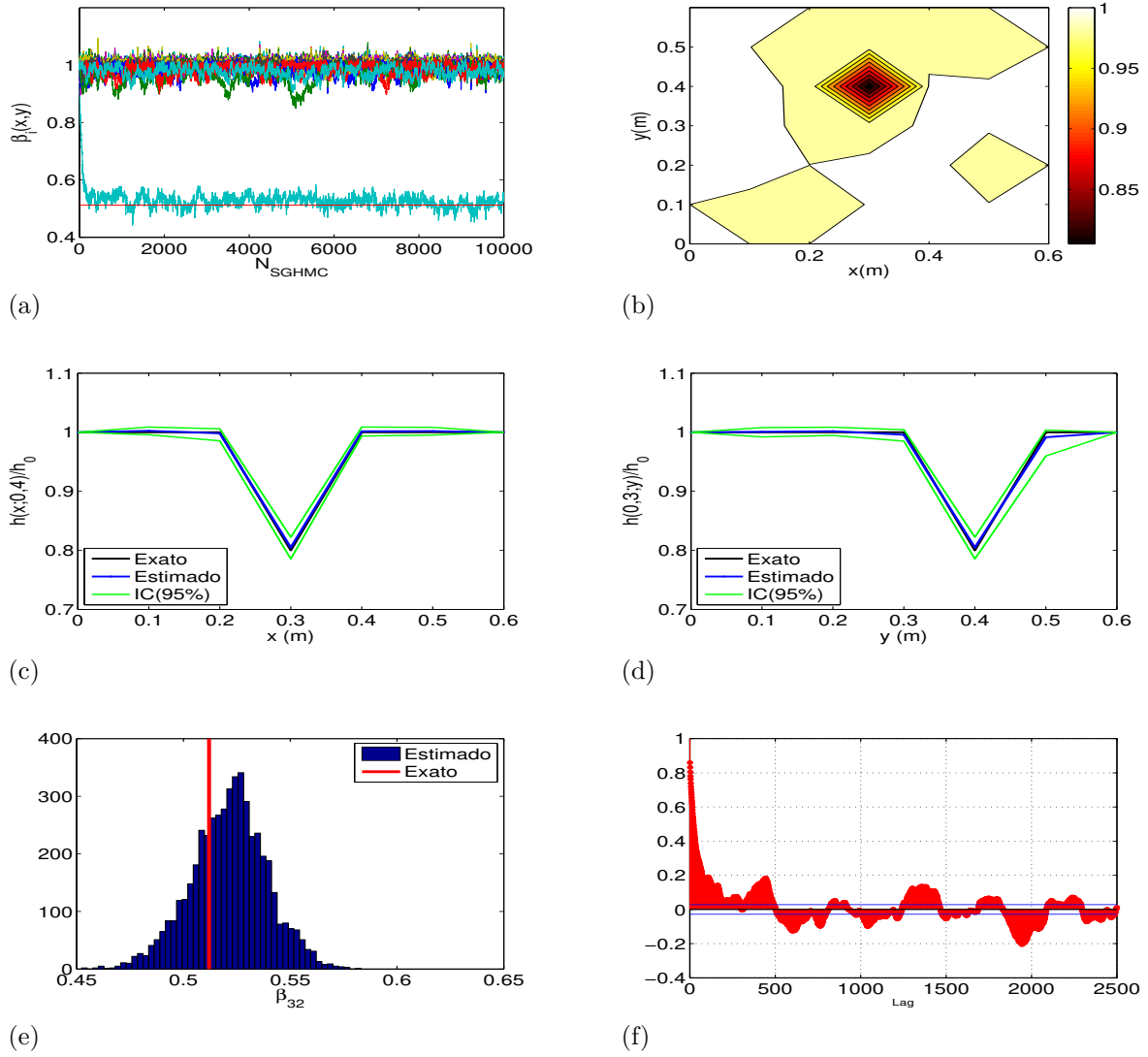
(b)

Legenda: (a)  $\beta_{32}$ ; (b)  $\beta_{20}$ .

Fonte: O autor, 2020

Como se observou nas Tabelas 10, 11 e 12, o tempo computacional para este problema é bastante alto. Porém, como observado em ambos os problemas, da viga e da placa, as cadeias apresentam uma convergência para o estado estacionário bastante rápida. Sendo assim, a quantidade de estados pode ser bastante reduzida sem prejudicar o desempenho do método, o que representa uma sensível diminuição do tempo computacional. Na Figura 40, são mostrados os resultados da aplicação do método no Caso 1 com um número de estados da cadeia reduzido para 10000 estados e 5000 estados de aquecimento. Observa-se que os resultados foram condizentes com os observados com a cadeia de 30000 estados, mostrando que a diminuição da cadeia não prejudicou o desempenho do método. O tempo computacional, neste caso, ficou reduzido a 14,9 horas, representando uma sensível redução em relação ao tempo apresentado na Tabela 10.

Figura 40 - Identificação de danos Caso 1 com 10000 estados na cadeia



Legenda: (a) Cadeias ; (b) Representação em cores da espessura da placa ; (c) Perfil de dano com  $y = 0,4$  m; (d) Perfil de dano com  $x = 0,3$  m (e) Histograma  $\beta_{32}$ ; (f) função de autocorrelação  $\beta_{32}$ .

Fonte: O autor, 2020.

## CONCLUSÕES

O objetivo desta tese foi estudar dois problemas de identificação de danos em estruturas mecânicas a partir de sua resposta no domínio do tempo. O primeiro em uma viga simplesmente apoiada e o outro em uma placa também simplesmente apoiada. Para a resolução do problema inverso, foi utilizada uma abordagem Bayesiana visto ser esta uma abordagem que apresenta a vantagem de considerar os parâmetros como variáveis aleatórias, permitindo a consideração das incertezas envolvidas nos dados experimentais. As estruturas foram modeladas utilizando o método dos elementos finitos (MEF) e o dano foi introduzido por meio de um parâmetro de coesão estrutural ( $\beta$ ) que se relaciona com a razão entre a espessura real da estrutura e sua espessura nominal, com valores de  $\beta < 1$  indicando a presença de dano. Foi feita uma revisão de literatura pesquisando-se trabalhos na área de identificação de danos que utilizam diferentes abordagens, permitindo que se verificasse a pertinência de um trabalho que considerasse a resposta da estrutura no domínio do tempo como dados experimentais para a resolução do problema inverso. A resolução do problema inverso envolveu a determinação da distribuição de probabilidades do parâmetro de coesão, permitindo uma análise estatística do resultado enriquecendo assim a análise do resultado. Para a resolução do problema inverso foram utilizadas duas técnicas derivadas do método de Monte Carlo com Cadeias de Markov. O Método HMC (Monte Carlo Hamiltoniano) e o método SGHMC (Monte Carlo Hamiltoniano com Gradiente Estocástico). O primeiro sendo descrito na literatura como um método que apresenta vantagens em relação ao algoritmo de Metrópolis-Hastings já que este considera uma trajetória aleatória enquanto que o HMC utiliza um sistema dinâmico fictício que guia a trajetória no sentido das regiões de maior probabilidade, tornando a convergência mais rápida. Como desvantagem deste método se coloca a necessidade do cálculo repetido do Gradiente o que aumenta muito o custo computacional, o que motivou o estudo do método SGHMC com gradiente estocástico que reduz a quantidade de dados considerados para o cálculo do Gradiente implicando em uma redução do custo computacional.

No problema da viga ambos os métodos apresentaram bom desempenho, com uma convergência bem anterior em relação ao número total de estados proposto inicialmente. O método SGHMC, de fato apresentou uma redução no tempo computacional, podendo essa redução ser ainda maior se for levada em consideração a possibilidade de diminuição do tamanho da cadeia dada a convergência apresentada. Foi analisado também um caso com maior ruído, tendo ainda assim o resultado sido satisfatório tanto quanto a localização quanto na quantificação da intensidade do dano. Um terceiro caso em que se considerou um cenário com dois danos o método SGHMC foi capaz de localizar ambos os danos e apresentou boa quantificação da intensidade, tendo sido melhor a quantificação do dano que se apresentava mais próximo ao sensor.

Foi então analisado um problema de identificação de danos em uma estrutura do tipo placa. Destaca-se que este é um problema que demanda maior esforço computacional e apresenta maior quantidade de parâmetros a serem estimados. Apesar da maior dificuldade do problema o método SGHMC mostrou bom desempenho. Foram também considerados três casos, com dois cenários de danos como no problema anterior. Tendo em vista o bom desempenho no problema anterior, decidiu-se diminuir o número de estados das cadeias de forma a diminuir o tempo de processamento e verificou-se novamente a possibilidade de se obter melhor resultado em termos do tempo já que isto não impactou em nada o resultado obtido. Observou-se, assim como no problema da viga, um desempenho muito bom, tanto em termos da localização quanto da quantificação dos danos impostos à estrutura.

Deve-se destacar também, que o método SGHMC mostrou, de forma geral, uma convergência mais rápida ainda que o HMC original. Além disso, o ajuste de parâmetros se mostrou bem mais difícil no HMC do que no SGHMC. O primeiro, inclusive, para o segundo problema, não apresentou um ajuste de parâmetros que desse resultados equivalentes ao segundo, que com poucos ajustes no parâmetro de atrito ( $\mathcal{C}$ ) apresentou resultados já satisfatórios.

Concluindo, pode-se dizer que a abordagem utilizada trouxe boas indicações da eficiência do método SGHMC para problemas de identificação de danos com maior exigência como o da placa, assim como mostrou ser uma estratégia considerável para se lidar com a questão do custo computacional envolvido no uso do HMC com relação ao cálculo do gradiente. Novas estratégias podem ser consideradas em futuros trabalhos de combinação com outras técnicas que permitam diminuir consideravelmente o custo computacional.

## REFERÊNCIAS

- ADAMS, R. et al. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *Journal of Mechanical Engineering Science*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 20, n. 2, p. 93–100, 1978.
- ALDER, B. J.; WAINWRIGHT, T. E. Studies in molecular dynamics. i. general method. *The Journal of Chemical Physics*, AIP, v. 31, n. 2, p. 459–466, 1959.
- BAISTHAKUR, S.; CHAKRABORTY, A. Modified hamiltonian monte carlo-based bayesian finite element model updating of steel truss bridge. *Structural Control and Health Monitoring*, Wiley Online Library, p. e2556, 2020.
- BANDARA, R. P.; CHAN, T. H.; THAMBIRATNAM, D. P. Structural damage detection method using frequency response functions. *Structural Health Monitoring*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 13, n. 4, p. 418–429, 2014.
- BERNAL, D. Load vectores for damage localization. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 128, p. 7–14, 2002.
- BETANCOURT, M. A conceptual introduction to hamiltonian monte carlo. *arXiv preprint arXiv:1701.02434*, 2017.
- BOULKAIBET, I. et al. An adaptive markov chain monte carlo method for bayesian finite element model updating. In: *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*. [S.l.]: Springer, 2016. p. 55–65.
- CASTELLO, D. A.; STUTZ, L.; ROCHINHA, F. A. A time domain technique for defect identification based on a continuum damage model. In: *PROCEEDINGS OF THE 2002 ASME INTERNATIONAL MECHANICAL ENGINEERING CONGRESS & EXPOSITION*, 2002, New Orleans. Louisiana, USA, 2002.
- CATTARIUS, J.; INMAN, D. J. Time-domain analysis for damage detection in smart structures. *Mech Syst Signal Process*, v. 11, p. 409–423, 1997.
- CHEN, T.; FOX, E.; GUESTIN, C. Stochastic gradient hamiltonian monte carlo. In: *International Conference on Machine Learning*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1683–1691.
- CHEUNG, S. H.; BECK, J. L. Bayesian model updating using hybrid monte carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 135, n. 4, p. 243–255, 2009.
- COLAÇO, M. J.; ORLANDE, H. R.; DULIKRAVICH, G. S. Inverse and optimization problems in heat transfer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, SciELO Brasil, v. 28, n. 1, p. 1–24, 2006.
- CORDEIRO, C. E. Z. *Identificação de danos estruturais empregando respostas no domínio do tempo via transformações integrais e inferência Bayesiana com Monte Carlo Hamiltoniano*. 2019. 88 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2019.

- CURADELLI, R. et al. Damage detection by means of structural damping identification. *Engineering Structures*, Elsevier, v. 30, n. 12, p. 3497–3504, 2008.
- DOEBLING, S. W. et al. A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and vibration digest*, Washington, DC: The Center, v. 30, n. 2, p. 91–105, 1998.
- DOEBLING, S. W.; FARRAR, C. R.; PRIME M. B. SHEVITZ, D. W. *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review*. Technical Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1996. 34 p.
- DUANE, S. et al. Hybrid monte carlo. *Physics letters B*, Elsevier, v. 195, n. 2, p. 216–222, 1987.
- FAN, W.; QIAO, P. “Vibration-based Damage Identification Methods: A Review and Comparative Study”, *Structural Health Monitoring*. <http://shm.sagepub.com/content/10/1/83>, 2010.
- FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E. T.; WILSON, D. A. L. Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures. *Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, v. 9, n. 4, p. 239–254, 1994.
- GAITANAROS, S. et al. A bayesian methodology for crack identification in structures using strain measurements. *International Journal of Reliability and Safety*, Citeseer, v. 4, n. 2-3, p. 206–237, 2010.
- HUANG, Q.; GARDONI, P.; HURLEBAUS, S. A probabilistic damage detection approach using vibration-based nondestructive testing. *Structural Safety*, v. 38, p. 11–21, 2012.
- KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. An improved charged system search for structural damage identification in beams and frames using changes in natural frequencies. *INTERNATIONAL JOURNAL OF OPTIMIZATION IN CIVIL ENGINEERING*, 2012.
- MEIROVITCH, L. *Elements of vibration analysis*. New York: McGraw-Hill, 1986. 560 p.
- METROPOLIS, N. et al. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, AIP, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, 1953.
- NEAL, R. M. et al. Mcmc using hamiltonian dynamics. *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*, v. 2, n. 11, p. 2, 2011.
- NICHOLS, J.; MOORE, E.; MURPHY, K. Bayesian identification of a cracked plate using a population-based markov chain monte carlo method. *Computers and Structures*, v. 89, p. 1323–1332, 2011.
- ORLANDE, H. R. Inverse problems in heat transfer: new trends on solution methodologies and applications. In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS. *2010 14th International Heat Transfer Conference*. [S.l.], 2010. p. 379–398.
- PANDEY, A. K.; BISWAS, M. Damage detection in structures using changes in flexibility. *Journal of Sound and Vibration*, v. 169, n. 1, p. 3–17, 1994.

PEREIRA, R. R. F. O.; CASTELLO, D. A.; ROCHINHA, F. A. A time domain based mechanical system identification. In: COBEM - INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 2003, São Paulo. Brasil, 2003.

RANGEL, I. C. S. e. S. *Identificação de danos estruturais a partir do modelo de superfícies de resposta*. 2014. 109 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2014.

RANGEL, L. d. S. *Identificação de danos estruturais utilizando dados no domínio do tempo provenientes de ensaios de vibração*. 2014. 106 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2014.

REN, W. X.; CHEN, H. B. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method. *Journal of Engineering Structures*, n. 32, p. 2455–2465, 2010.

SALAWU, O. Detection of structural damage through changes in frequency: a review. *Engineering structures*, Elsevier, v. 19, n. 9, p. 718–723, 1997.

SANDESH, S.; SHANKAR, K. Damage identification of a thin plate in the timedomain with substructuring-an application of inverse problem. *International Journal of Applied Science and Engineering*, College of Science and Engeneering, v. 7, n. 1, p. 79–93, 2009.

SHAYANFAR, M. et al. Damage detection of bridge structures in time domain via enhanced colliding bodies optimization. *Iran University of Science & Technology*, Iran University of Science & Technology, v. 6, n. 2, p. 211–226, 2016.

STUTZ, L. T.; CASTELLO, D. A.; ROCHINHA, F. A. A flexibility-based continuum damage identification approach. *Journal of Sound and Vibration*, v. 279, p. 641–667, 2005.

TEIXEIRA, J. et al. A new adaptive approach of the metropolis-hastings algorithm applied to structural damage identification using time domain data. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 82, p. 587–606, 2020.

TEIXEIRA, J. d. S. *Estratégias populacionais, adaptativas e de aceitação atrasada em métodos de Monte Carlo com cadeias de Markov para identificação de danos estruturais em vigas*. 2018. 128 f. Tese (Doutorado em Modelagem Computacional) — Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2018.

TEIXEIRA, J. S. et al. Structural damage identification via time domain response and markov chain monte carlo method. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 24, n. 8, p. 1–27, 2016.

TEUGHEL, A.; MAECK, J.; ROECK, G. D. Damage assessment by fe model updating using damage functions. *Computers and structures*, n. 80, p. 1869–1879, 2002.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*. [S.l.]: Marcel Dekker, 2001.



WELLING, M.; TEH, Y. W. Bayesian learning via stochastic gradient langevin dynamics. In: *Proceedings of the 28th international conference on machine learning (ICML-11)*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 681–688.

YANG, Q. W.; SUN, B. X. Structural damage identification based on best achievable flexibility change. *Applied Mathematical Modelling*, v. 35, p. 5217–5224, 2011.

YIN, T.; LAM, H.-F.; CHOW, H.-M. A bayesian probabilistic approach for crack characterization in plate structures. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, Wiley Online Library, v. 25, n. 5, p. 375–386, 2010.

ZHANG, Y.; YANG, W. A new damage identification strategy for shm based on fbgs and bayesian model updating method. In: *ICF13*. [S.l.: s.n.], 2012.

ZOU, Y.; TONG, L.; STEVEN, G. P. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures—a review. *Journal of Sound and vibration*, Elsevier, v. 230, n. 2, p. 357–378, 2000.

# **APÊNDICE A** – Funções de Interpolação para a Viga

$$N_1^e(\bar{x}) = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{L_e}\right)^3 \quad (91)$$

$$N_2^e(\bar{x}) = \bar{x} - 2\left(\frac{\bar{x}^2}{L_e}\right) + 2\left(\frac{\bar{x}^3}{L_e^2}\right) \quad (92)$$

$$N_1^e(\bar{x}) = 3\left(\frac{\bar{x}}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{L_e}\right)^3 \quad (93)$$

$$N_2^e(\bar{x}) = -\left(\frac{\bar{x}^2}{L_e}\right) + 2\left(\frac{\bar{x}^3}{L_e^2}\right) \quad (94)$$

**APÊNDICE B** – Funções de Interpolação para a Placa

$$N_1^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8a}\bar{x} - \frac{3}{8b}\bar{y} + \frac{1}{2ab}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8a^3}\bar{x}^3 + \frac{1}{8b^3}\bar{y}^3 - \frac{1}{8a^3b}\bar{x}^3\bar{y} - \frac{1}{8ab^3}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (95)$$

$$N_2^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{b}{8} - \frac{b}{8a}\bar{x} - \frac{1}{8}\bar{y} + \frac{1}{8a}\bar{x}\bar{y} - \frac{1}{8b}\bar{y}^2 + \frac{1}{8ab^3}\bar{x}\bar{y}^2 + \frac{1}{8b^2}\bar{y}^3 - \frac{1}{8ab^2}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (96)$$

$$N_3^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{a}{8} - \frac{1}{8}\bar{x} - \frac{a}{8b}\bar{y} - \frac{1}{8a}\bar{x}^2 + \frac{1}{8b}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8a^2}\bar{x}^3 - \frac{1}{8ab}\bar{x}^2\bar{y} - \frac{1}{8a^2b}\bar{x}^3\bar{y} \quad (97)$$

$$N_4^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8a}\bar{x} - \frac{3}{8b}\bar{y} - \frac{1}{2ab}\bar{x}\bar{y} - \frac{1}{8a^3}\bar{x}^3 + \frac{1}{8b^3}\bar{y}^3 + \frac{1}{8a^3b}\bar{x}^3\bar{y} - \frac{1}{8ab^3}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (98)$$

$$N_5^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{b}{8} + \frac{b}{8a}\bar{x} - \frac{1}{8}\bar{y} - \frac{1}{8a}\bar{x}\bar{y} - \frac{1}{8b}\bar{y}^2 - \frac{1}{8ab}\bar{x}\bar{y}^2 + \frac{1}{8b^2}\bar{y}^3 + \frac{1}{8ab^2}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (99)$$

$$N_6^e(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{a}{8} - \frac{1}{8}\bar{x} + \frac{a}{8b}\bar{y} + \frac{1}{8a}\bar{x}^2 + \frac{1}{8b}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8a^2}\bar{x}^3 - \frac{1}{8ab}\bar{x}^2\bar{y} - \frac{1}{8a^2b}\bar{x}^3\bar{y} \quad (100)$$

$$N_7^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8a}\bar{x} + \frac{3}{8b}\bar{y} + \frac{1}{2ab}\bar{x}\bar{y} - \frac{1}{8a^3}\bar{x}^3 - \frac{1}{8b^3}\bar{y}^3 - \frac{1}{8a^3b}\bar{x}^3\bar{y} - \frac{1}{8ab^3}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (101)$$

$$N_8^e(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{b}{8} - \frac{b}{8a}\bar{x} - \frac{1}{8}\bar{y} - \frac{1}{8a}\bar{x}\bar{y} - \frac{1}{8b}\bar{y}^2 - \frac{1}{8ab}\bar{x}\bar{y}^2 + \frac{1}{8b^2}\bar{y}^3 + \frac{1}{8ab^2}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (102)$$

$$N_9^e(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{a}{8} - \frac{1}{8}\bar{x} - \frac{a}{8b}\bar{y} + \frac{1}{8a}\bar{x}^2 - \frac{1}{8b}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8a^2}\bar{x}^3 - \frac{1}{8ab}\bar{x}^2\bar{y} + \frac{1}{8a^2b}\bar{x}^3\bar{y} \quad (103)$$

$$N_{10}^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8a}\bar{x} + \frac{3}{8b}\bar{y} - \frac{1}{2ab}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8a^3}\bar{x}^3 - \frac{1}{8b^3}\bar{y}^3 + \frac{1}{8a^3b}\bar{x}^3\bar{y} + \frac{1}{8ab^3}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (104)$$

$$N_{11}^e(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{b}{8} + \frac{b}{8a}\bar{x} - \frac{1}{8}\bar{y} + \frac{1}{8a}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8b}\bar{y}^2 - \frac{1}{8ab}\bar{x}\bar{y}^2 + \frac{1}{8b^2}\bar{y}^3 + \frac{1}{8ab^2}\bar{x}\bar{y}^3 \quad (105)$$

$$N_{12}^e(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{a}{8} - \frac{1}{8}\bar{x} + \frac{a}{8b}\bar{y} - \frac{1}{8a}\bar{x}^2 - \frac{1}{8b}\bar{x}\bar{y} + \frac{1}{8a^2}\bar{x}^3 - \frac{1}{8ab}\bar{x}^2\bar{y} + \frac{1}{8a^2b}\bar{x}^3\bar{y} \quad (106)$$