



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Fernanda Alvarim Silveira

**Objetos compactos, ultracompactos e exóticos em teorias $f(\mathcal{R})$
da gravitação no formalismo de Palatini**

Rio de Janeiro

2020

Fernanda Alvarim Silveira

**Objetos compactos, ultracompactos e exóticos em teorias $f(\mathcal{R})$ da gravitação
no formalismo de Palatini**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Coorientador: Prof. Dr. Rodrigo Maier

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S587

Silveira, Fernanda Alvarim.

Objetos compactos, ultracompactos e exóticos em teorias $f(R)$ da gravitação no formalismo de Palatini / Fernanda Alvarim Silveira. - 2020.

140 f.: il.

Orientador: Santiago Esteban Perez Bergliaffa.

Coorientador: Rodrigo Maier.

Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Gravitação - Teses. 2. Relatividade geral (Física) - Teses.3. Anisotropia - Fluidos - Teses. 4. Buracos negros (Astronomia) - Teses. I. Perez Bergliaffa, Santiago Esteban. II. Maier, Rodrigo. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. IV.Título.

CDU 531.5

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Fernanda Alvarim Silveira

**Objetos compactos, ultracompactos e exóticos em teorias $f(\mathcal{R})$ da gravitação
no formalismo de Palatini**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 17 de Setembro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rodrigo Maier (Coorientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof^a. Dr^a. Maria de Fátima Alves da Silva
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às memórias de minha avó Adguimar.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de deixar meu agradecimento à toda a minha família, em especial meus pais, meu irmão e minha avó “Daguimar”, a quem muito devo e a quem muito amei.

Também sou grata a todos os meus amigos e amigas, em especial a Nathália, Mariana, Lais, Fábio, Matheus, Márcio, Ricardo, Anderson, Vahid e Carlos.

À todos os funcionários e funcionárias da pós-graduação em Física da UERJ em especial Ranna e Samir.

À todos os professores e à professora Mariana. Ao professor Helayël pelo espaço de pesquisa no CBPF muito bem aproveitado por mim e ao professor Julio Hoff pelo espaço de pesquisa na Unesp.

Sou imensamente grata aos meus orientadores, Santiago e Rodrigo, pela confiança, paciência e dedicação oferecidos a mim durante todo o meu doutorado.

Também deixo meu agradecimento carinhoso ao amor da minha vida, meu companheiro Gustavo, que contribuiu bastante para que essa tese fosse finalizada me dando suporte no Mathematica, nas discussões e na vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Viver é ter a opção de crescer profissionalmente e intelectualmente, de não ser metralhado pela polícia, de não ser torturado num sistema prisional puramente vingativo, enquanto não pudermos impedir o genocídio, o racismo, a alienação, o aprisionamento em massa, a pobreza extrema e a anulação social, não passaremos de cadáveres que respiram.

Eduardo Taddeo - Estamos mortos

RESUMO

SILVEIRA, F. A. **Objetos compactos, ultracompactos e exóticos em teorias $f(\mathcal{R})$ da gravitação no formalismo de Palatini.** 2020. 140 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Analizamos, na perspectiva de teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini, configurações de objetos estelares esfericamente simétricos e estáticos constituídos de fluido com pressão isotrópica e anisotrópica. Para tais estudos, foi utilizado o cenário das teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ e dois perfis de densidade idealizados como um primeiro passo nessa direção. De forma inicial, investigamos no caso isotrópico, os comportamentos da pressão e da geometria no interior de estrelas provenientes de um perfil de densidade que é quase constante dentro do objeto, mas decai suavemente na superfície do mesmo. Também discutimos o aprisionamento de partículas sem massa no âmbito de objetos compactos e ultracompactos. Exploramos, separadamente, configurações de estrelas compostas de fluidos com pressão anisotrópica, onde também analisamos os comportamentos da geometria e das pressões radial e tangencial no seu interior. Para esta finalidade usamos um parâmetro de anisotropia em particular e um perfil de densidade diferente do estudado no caso isotrópico. O fato de podermos alcançar valores de pressão negativa, ao se utilizar pressão anisotrópica, nos permitiu estudar também configurações de objetos exóticos como “gravastars”. Os resultados obtidos em ambos os casos foram comparados com os da relatividade geral que nos possibilitou analisar a existência, no espaço de parâmetros, de configurações de objetos mais, menos ou tão compactos quanto os da relatividade geral para uma mesma densidade. No caso isotrópico, também analisamos a possibilidade de obter configurações além do limite de Buchdahl da relatividade geral.

Palavras-chave: Objetos compactos. Objetos ultracompactos. Teorias $f(R)$ da gravitação. Formalismo de Palatini.

ABSTRACT

SILVEIRA, F. A. **Compact, ultracompact and exotics objects in $f(\mathcal{R})$ theories of gravitation in Palatini formalism.** 2020. 140 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

We analyze, in the perspective of $f(\mathcal{R})$ Palatini gravity, numeric configurations of spherically symmetric and static stellar objects filled with fluids of isotropic and anisotropic pressure. For such a study, we use the scenario of quadratic $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ and two idealization profiles of density as a first step in this direction. Initially, we investigate in the isotropic case, the behavior of isotropic pressure and geometry inside of such objects from a density profile that which is almost constant inside the object, but decays on the surface of it. We also discussed the trapped null geodesics in scope of compact and ultracompact objects. We explore separately, configurations of star filled with fluid of anisotropic pressure, where we analyze behaviors of geometry, radial and tangential pressure inside of the object. For this purpose, we use a parameter of anisotropy in particular and a profile of density different from isotropic case. The fact we can reach values of negative pressure when we are working with anisotropic pressure also allows us to study configurations of exotic objects as “gravastars”. The obtained results in both cases were compared with general relativity, enabling us to analyze the existence, in the space of parameters, of configurations of objects more, less or as compact as results of general relativity for the same density. In isotropic case, we also analyze the possibility of obtaining configurations beyond Buchdahl’s limit of general relativity.

Keywords: Compact objects. Ultracompact objects. $f(R)$ theories of gravity. Palatini formalism.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Possíveis trajetórias de um raio de luz ao passar próximo de uma fonte gravitacional.	44
Figura 2	- Esquematização dos anéis de luz.	45
Figura 3	- Diagrama massa-raio RG com densidade constante	46
Figura 4	- Caracterização do potencial efetivo de estrelas sem horizontes de eventos segundo o parâmetro de impacto.	48
Figura 5	- Esquematização dos anéis de luz.	49
Figura 6	- Caracterização do potencial efetivo de estrelas sem horizontes de eventos segundo a compacticidade.	49
Figura 7	- Modelos de densidades aproximadamente constantes dentro da estrela e decrescem suavemente na superfície da mesma.	51
Figura 8	- Possíveis modelos de estrelas para densidade que decrescem na superfície.	52
Figura 9	- Modelo simplificado de uma <i>gravastar</i>	59
Figura 10	- Classificação de OCs, OUCs e <i>ClePhos</i>	119
Figura 11	- Objetos compactos: uma ilustração.	119

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Pressão e massa para o caso de densidade constante em função da coordenada radial na RG.	39
Gráfico 2 - Componentes g_{rr} e g_{tt} para o caso de densidade constante na RG.	39
Gráfico 3 - Compacidade para o caso de densidade constante em função da densidade e da pressão central na RG.	40
Gráfico 4 - Raio da estrela em função da densidade e da pressão central na RG	41
Gráfico 5 - Massa em função da densidade e da pressão central na RG.	42
Gráfico 6 - Pressão central em função da massa adimensionalizada na RG.	43
Gráfico 7 - Pressão e massa adimensionalizados em função da coordenada radial adimensionalizada na RG.	54
Gráfico 8 - Componentes g_{rr} e g_{tt} na RG.	54
Gráfico 9 - Potencial e pressão central em função da massa na RG.	55
Gráfico 10 - Perfil de densidade, pressão radial e tangencial na RG.	61
Gráfico 11 - Pressão radial e tangencial para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.	62
Gráfico 12 - Pressão radial para $\bar{\sigma}$ fixo na RG.	62
Gráfico 13 - Massa e potencial para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.	63
Gráfico 14 - Pressão tangencial para $\bar{\sigma}$ fixo na RG.	63
Gráfico 15 - Comportamento da massa em função da coordenada radial na RG.	64
Gráfico 16 - Comportamento do potencial efetivo na RG.	64
Gráfico 17 - Pressão central em função da massa para $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\sigma}$ fixo na RG.	65
Gráfico 18 - Pressão central e massa em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.	65
Gráfico 19 - Pressão central e massa em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.	66
Gráfico 20 - <i>Gravastar</i> na RG.	67
Gráfico 21 - Massa em função da densidade para $\bar{\lambda}$ fixo.	73
Gráfico 22 - Massa e pressão central em função $\bar{\lambda}$ para densidade fixa.	73
Gráfico 23 - Pressão central em função de $\bar{\rho}_0$ para $\bar{\lambda}$ fixo.	74
Gráfico 24 - Pressão central em função da massa para $\bar{\lambda}$ fixo.	75
Gráfico 25 - Pressão em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$	76
Gráfico 26 - Componente g_{rr} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$	77
Gráfico 27 - Componente g_{tt} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$	77
Gráfico 28 - Massa função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$	78
Gráfico 29 - Pressão em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$	79
Gráfico 30 - Componente g_{rr} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$	79
Gráfico 31 - Componente g_{tt} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$	79
Gráfico 32 - Massa função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$	80
Gráfico 33 - Potencial efetivo em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$	82

Gráfico 34 - Potencial efetivo em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$	82
Gráfico 35 - Potencial efetivo em função da coordenada.	83
Gráfico 36 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = -1$ e $\bar{\lambda} < 0$	84
Gráfico 37 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = +1$ e $\bar{\lambda} > 0$	84
Gráfico 38 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = +1$ e $\bar{\lambda} < 0$	85
Gráfico 39 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = -1$ e $\bar{\lambda} > 0$	86
Gráfico 40 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.12$ e $\bar{\lambda} < 0$	86
Gráfico 41 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.13$ e $\bar{\lambda} < 0$	87
Gráfico 42 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.11$ e $\bar{\lambda} > 0$	88
Gráfico 43 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.13$ e $\bar{\lambda} > 0$	88
Gráfico 44 - Pressão radial e tangencial em função de \bar{r} para $\bar{\sigma} < 0$	89
Gráfico 45 - Comportamento da componente g_{rr} e $\bar{V}_{ef}(\bar{r})$ em função de \bar{r}	89
Gráfico 46 - Pressão radial e tangencial em função de \bar{r} para $\bar{\sigma} > 0$	90
Gráfico 47 - Pressão radial e tangencial juntos para $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\lambda} < 0$	91
Gráfico 48 - Perfil de densidade e suas derivadas 1.	121
Gráfico 49 - Perfil de densidade e suas derivadas 2.	121
Gráfico 50 - Comportamento da pressão, g_{tt} e $m(\bar{r})$	122
Gráfico 51 - Comportamentos do escalar de Ricci.	124
Gráfico 52 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\lambda} < 0$ variando com $\bar{\sigma} = +1$ e $\bar{\lambda} < 0$	127
Gráfico 53 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\lambda} < 0$ variando com $\bar{\sigma} = -1$ e $\bar{\lambda} < 0$	127
Gráfico 54 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.12$ e $\bar{\lambda} > 0$	127
Gráfico 55 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.10$ e $\bar{\lambda} > 0$	128
Gráfico 56 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.12$ e $\bar{\lambda} < 0$	128
Gráfico 57 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.10$ e $\bar{\lambda} < 0$	129

Gráfico 58 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.11$ e $\bar{\lambda} < 0$ 129

NOTAÇÕES

Trabalhamos com a assinatura $(-, +, +, +)$. As componentes do tensor de Riemann são dadas por $\mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\sigma\rho} = \partial_\sigma \tilde{\Gamma}^\alpha_{\rho\beta} - \partial_\nu \tilde{\Gamma}^\alpha_{\sigma\beta} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\sigma\lambda} \tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\beta} - \tilde{\Gamma}^\alpha_{\rho\lambda} \tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\beta}$, onde $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ é a conexão que a princípio não é simétrica nos índices $\beta\gamma$. O tensor de Ricci é $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\alpha\gamma}$ e o escalar de Ricci é $\mathcal{R} = g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta}$. Faremos uso de $\hbar = c = G = 1$, a menos que seja dito o contrário. Índices repetidos obedecem a regra de soma de Einstein. Letras gregas, α, β, γ , etc., correm de 0 até 3. Letras latinas, i, j, k , etc., correm de 1 a 3.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BN	Buraco Negro.
BNs	Buracos Negros.
ClePhos	<i>Clean-Photon sphere objects</i> (objetos de fóton-esfera limpa).
OC	Objeto Compacto.
OCs	Objetos Compactos.
OE	Objeto Exótico.
OE _s	Objetos Exóticos.
OUC	Objeto Ultracompacto.
OUC _s	Objetos Ultracompactos.
OG	Onda Gravitacional.
OG _s	Ondas Gravitacionais.
PVI	Problema do Valor Inicial.
RG	Relatividade Geral.
TOV	Tolman-Oppenheimer-Volkof.

LISTA DE SÍMBOLOS

\bar{X}	Significa que uma quantidade qualquer, X , está sem dimensão.
f_X	Derivada da função $f(X)$ com relação a X , isto é, $f_X \equiv df(X)/dX$.
$g_{\mu\nu}$	Componente da métrica física, g .
$h_{\mu\nu}$	Componente da métrica conforme, h , tal que $h_{\mu\nu} \equiv f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}$ e $h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}/f_{\mathcal{R}}$.
$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Componente da conexão, $\tilde{\Gamma}$, tal que $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \neq \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}$ no princípio variacional. Posteriormente a variação da ação, ela também pode aparecer com significado de conexão Levi-Civita da métrica $h_{\mu\nu}$.
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Componente da conexão de Levi-Civita, Γ , da métrica (ou símbolos de Christoffel), tal que $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$.
\mathcal{R}	Escalar de Ricci construído com $\tilde{\Gamma}$. Também pode aparecer com significado de $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$, onde T é o traço do tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$.
\mathbf{R}	É o escalar de Ricci construído com os símbolos de Christoffel, Γ .
R	É o raio da estrela definido onde pressão se anula.
\bar{R}	É o raio da estrela sem dimensão.
\bar{M}	Parâmetro de massa adimensionalizado ou, nesse caso, a compacticidade $\bar{M} = M/R$.
$\mathbf{R}_{\mu\nu}$	É o tensor de Ricci construído com Γ .
$G_{\mu\nu}$	É o tensor de Einstein construído com $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ e \mathbf{R} , ou seja, $G_{\mu\nu} = \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{R}g_{\mu\nu}$.
\square	Versão quadri-dimensional do D'Lambertiano, $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$.
$\rho(r)$	Densidade de energia.
$p(r)$	Pressão isotrópica.
$p_r(r)$	Pressão anisotrópica radial.
$p_t(r)$	Pressão anisotropia tangencial.
Δ	Parâmetro de anisotropia.
δ	Parâmetro presente no perfil de densidade $\rho(r) = \rho_0\{1 + \exp[(r - r_0)/\delta]\}^{-1}$.
r_0	Parâmetro presente no perfil de densidade $\rho(r) = \rho_0\{1 + \exp[(r - r_0)/\delta]\}^{-1}$.
ρ_0	Parâmetro presente nos perfis de densidades $\rho(r) = \rho_0\{1 - (r/r_*)^2\}$ e $\rho(r) = \rho_0\{1 + \exp[(r - r_0)/\delta]\}^{-1}$.
r_*	Parâmetro presente no perfil de densidade $\rho(r) = \rho_0\{1 - (r/r_*)^2\}$.
σ	Parâmetro presente em $\Delta = \sigma r^2/(r^2 + r_k^2)^{-1/2}$.
r_k	Parâmetro presente em $\Delta = \sigma r^2/(r^2 + r_k^2)^{-1/2}$.
C_B	Compacticidade de Buchdahl, isto é, $C_B = M/R = 4/9$.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	TEORIAS $F(\mathcal{R})$ NO FORMALISMO DE PALATINI: UMA RE-VISÃO	22
1.1	Preliminares	22
1.2	Equações de campo	26
1.3	Um breve panorama sobre outras teorias $f(\mathcal{R})$ alternativas da gravitação	31
1.3.1	<u>Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo métrico</u>	31
1.3.2	<u>Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo métrico afim</u>	32
2	OBJETOS COMPACTOS, ULTRACOMPACTOS E EXÓTICOS NA RELATIVIDADE GERAL	34
2.1	Preliminares	34
2.2	Estrutura estelar de fluidos isotrópicos	36
2.3	Objetos isotrópicos na RG: exemplos	37
2.3.1	<u>Objetos com densidade constante</u>	38
2.3.1.1	Limite de Buchdahl	41
2.3.1.2	Fóton-esfera e aprisionamento de partículas sem massa	43
2.3.2	<u>Densidade com decaimento na superfície</u>	50
2.4	Estrutura estelar de fluidos anisotrópicos na RG	55
2.4.0.1	Restrições para fluidos anisotrópicos	57
2.4.0.2	Restrições para fluidos anisotrópicos exóticos	58
2.5	Objetos anisotrópicos na RG: um exemplo	60
2.6	Objetos anisotrópicos exóticos na RG: um exemplo	66
3	OBJETOS COMPACTOS, ULTRACOMPACTOS E EXÓTICOS EM TEORIAS $F(\mathcal{R})$ PALATINI	68
3.1	Preliminares	68
3.2	Estrutura estelar em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini	70
3.3	Objetos isotrópicos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini: um exemplo	72
3.3.1	<u>Aprisionamento de partículas sem massa</u>	81
3.4	Objetos anisotrópicos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini: um exemplo	83
3.5	Objetos anisotrópicos exóticos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini: um exemplo	90
	CONCLUSÃO	92
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – Variação da ação no formalismo de Palatini	103
	APÊNDICE B – Discussão sobre a equação de campo para a conexão	104

APÊNDICE C – Teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini como uma teoria escalar-tensorial	107
APÊNDICE D – No-hair: um estudo	110
APÊNDICE E – Classificação de objetos sem horizonte de eventos. . .	118
APÊNDICE F – Complementação gráfica do caso isotrópico.	120
APÊNDICE G – Tensor de Riemann e escalar de Ricci	123
APÊNDICE H – Complementação gráfica para o caso anisotrópico. . .	126
APÊNDICE I – Artigo publicado.	130

INTRODUÇÃO

Desde o eclipse solar¹ de 1919 e da concordância, entre teoria e experimento, com os resultados sobre a precessão do periélio de Mercúrio², até a relativamente recente descoberta das ondas gravitacionais³ (OGs), a teoria da relatividade geral (RG) foi testada diversas vezes e se mostrou ser muito bem sucedida. São mais de cem anos confirmando suas excelentes previsões sobre a natureza da gravitação (WILL, 2014).

No entanto, ao mesmo tempo em que a RG se mostra excelente para explicar vários fenômenos gravitacionais, foi sendo percebida a possibilidade dela ter um domínio de validade. Isto é, certas previsões oferecidas pela teoria não parecem estar totalmente completas, como por exemplo, a questão das singularidades previstas no *Big Bang* e num buraco negro (BN) da RG, a partir das quais temos ausência de uma geometria bem-definida e conseqüentemente uma ausência de leis da física, o que acarreta na perda da nossa capacidade de fazer previsões, (OLMO, 2011b). A sua utilização também nos exige a necessidade de aceitar a ainda não detectada fonte de energia escura, com propriedades gravitacionais repulsivas, para explicar “a relação da distância de luminosidade e do *redshift* das supernovas tipo Ia e algumas propriedades da distribuição de matéria e radiação em larga escala” (OLMO, 2011b), e ainda de matéria escura, “para explicar as curvas de rotação de galáxias espirais”, (OLMO, 2011b). Para resolver as questões pertinentes às singularidades, tipicamente se argumenta que tais fenômenos estariam dentro do domínio teórico da gravidade quântica. Porém, a RG é geralmente incompatível com técnicas de quantização usuais e, até o presente momento, não temos uma teoria de gravidade quântica definitiva e totalmente consistente.

Tudo isso nos motiva a investigar teorias alternativas da gravitação que têm sido propostas com a finalidade de fornecerem explicações para fenômenos fora do domínio de validade da RG. Uma das alternativas à gravitação einsteniana é substituir o escalar de Ricci, \mathcal{R} , na lagrangiana da RG, por uma função arbitrária dele, isto é, $f(\mathcal{R})$. Tais teorias são conhecidas como teorias $f(\mathcal{R})$ da gravitação (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; OLMO, 2011b; SOTIRIOU; LIBERATI, 2007; FELICE; TSUJIKAWA, 2010).

É possível estudar tais teorias em diferentes formalismos, que ditará a forma em que o princípio variacional será realizado na ação. Exemplos de tais formalismos são: o

¹ Foi por meio das observações do eclipse solar de 29 de maio de 1919, que ficou comprovado que o valor do desvio da luz ao passar perto do Sol correspondia aos resultados previstos da RG.

² Os resultados numéricos da precessão do periélio de Mercúrio já eram conhecidos quando Einstein desenvolveu a RG e, novamente a teoria de Einstein teve sucesso ao concordar com tais resultados.

³ Somente em 2015 (publicado em 2016 (ABBOTT et al., 2016)), aniversário de cem anos da RG, foi possível vencer todas as dificuldades envolvidas no processo de detecção de ondas gravitacionais por conta de produzirem um efeito minúsculo no detetores.

formalismo métrico e o métrico-afim. No formalismo métrico, é considerada apenas uma variável dinâmica independente que é a métrica, g . Enquanto no formalismo métrico-afim as variáveis dinâmicas serão a métrica, g , e a conexão afim, $\tilde{\Gamma}$, que são consideradas campos independentes no princípio variacional. No contexto métrico-afim, também é possível considerar os casos em que a informação da conexão afim esteja ou não contida⁴ na lagrangiana de matéria. Apelidamos os casos de teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo métrico-afim, que não contenham informações da conexão na ação de matéria, de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini⁵ (KREMER; ALVES, 2004; SOTIRIOU, 2006; OLMO, 2011b).

Nesta tese, nos concentraremos na abordagem de Palatini em teorias $f(\mathcal{R})$ da gravitação. Uma das motivações de se estudar tais teorias consiste no fato de termos a RG⁶ com ou sem constante cosmológica na ausência de matéria reproduzindo automaticamente os testes clássicos e os resultados do teorema de Birkhoff. Elas são consistentes com o fato de que movimentos orbitais de sistemas binários devem estar em boa concordância com a situação de vácuo da RG (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019a). Elas também são compatíveis com as atuais observações de ondas gravitacionais (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2020). Temos ainda o fato de algumas lagrangianas de $f(\mathcal{R})$ Palatini reproduzem os resultados para a dinâmica do Universo primitivo provenientes das equações efetivas da cosmologia quântica em laços (AGULLO; SINGH, 2017; OLMO, 2011a; OLMO; SINGH, 2009). Esta última evita a singularidade do *Big Bang* fornecendo, ao invés disso, soluções de ricochete⁷. Esse fato também sinaliza, uma possível conexão entre tais teorias no regime clássico e quântico. Por fim, as teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini possuem uma fenomenologia rica no âmbito estelar (WOJNAR, 2019; OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019a; SERGYEYEV; WOJNAR, 2020; PANNIA et al., 2017; SHARIF; YOUSAF, 2014), de buracos negros (BAMBI et al., 2016; BEJARANO; OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2017; MARTÍNEZ-ASENCIO; OLMO; RUBIERA-GARCÍA, 2014; OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2015; OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2011) e cosmológicos (OLMO, 2011a; OWSKI; STACHOWSKI, 2018; PINTO et al., 2018; GILALAMAS; KARAM; RACIOPPI, 2020; JINNO et al., 2020; PANNIA; BERGLIAFFA; MANSKE, 2019).

Por outro lado, tem despertado bastante interesse nos últimos anos a possibilidade

⁴ Formalmente isso significa que a conexão pode ou não se acoplar com a matéria.

⁵ O fato de se chamar formalismo de “Palatini” se atribui a um mal entendido histórico. Tal formalismo foi introduzido e analisado por Einstein na obtenção das equações de campo da RG, porém no caso da lagrangiana gravitacional da RG os dois formalismos são equivalentes no sentido de produzirem as mesmas equações de campo. Entretanto, essa coincidência não é necessariamente verdade para outras lagrangianas gravitacionais, (ALLEMANDI et al., 2006).

⁶ Mais especificamente, teremos que teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini se reduzem à RG quando estamos lidando com tensor energia-momento de traço nulo ou constante.

⁷ Cosmologia quântica em laços é baseada numa abordagem de quantização da gravidade conhecida como gravidade quântica em laços (CASARES, 2018; OLMO, 2011a; OLMO; SINGH, 2009).

da existência de objetos similares a BNs, mas sem horizonte de eventos, que poderiam evitar algumas das questões mal compreendidas na sua atual descrição. Além disso, o fato de estarmos na era das OGs, que nos possibilitam testar a gravidade em regimes extremos, faz com que esses estudos possam ser colocados à prova. De fato, a existência de BNs está praticamente muito bem estabelecida no âmbito da RG. Por exemplo, conhecemos seu processo de formação, temos fortes indícios que BNs são estáveis frente a pequenas perturbações, o exterior de um BN é consistente e livre de patologias e temos fortes indicações de que ele satisfaz propriedades de unicidade descritas pela família de soluções de Kerr-Newman (CARDOSO; PANI, 2017; CARDOSO; PANI, 2019). Ainda temos as recentes detecções dentro do espectro eletromagnético⁸ (AKIYAMA et al., 2019) provenientes de objetos adequadamente descritos como BNs (embora estudos envolvendo técnicas computacionais de produção de imagens de sombras via *ray-tracing*, (VINCENT et al., 2016), não serem capazes de distinguir se tais imagens são de fato de BNs ou estrelas de bósons, entre outros) e de OGs (ABBOTT et al., 2016) provenientes da fusão de BNs. Apesar de existirem inúmeras compatibilidades entre teoria e observação e, portanto, fortes indícios de sua existência, a presença de uma singularidade em seu interior que pode provocar paradoxos como o da perda de informação devido ao processo de evaporação (PRESKILL, 1992) ainda é considerado bastante inconveniente.

Assim, segundo a classificação de (CARDOSO; PANI, 2017; CARDOSO; PANI, 2019) temos que objetos sem horizonte de eventos podem pertencer a três principais categorias⁹ : I) objetos compactos (OCs), como exemplo podemos citar as estrelas de nêutrons; II) objetos ultracompactos (OUCs), como exemplo podemos citar as estrelas de bósons; III) *ClePhos*¹⁰ (objetos de fóton-esfera limpa), como exemplo podemos citar as *gravastars*¹¹ (MAZUR; MOTTOLA, 2004). Um objeto exótico (OE) pode pertencer a qualquer uma das três categorias anteriores, dentre eles temos as *gravastars*, buracos de minhoca (MORRIS; THORNE, 1988), bolas de poeira (MATHUR, 2005; CARDOSO; PANI, 2017), entre outros.

Desta forma, investigamos nessa tese, algumas configurações de objetos sem horizontes de eventos na perspectiva de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini. Nesse aspecto, estaremos particularmente interessados na análise de soluções para o interior de corpos astrofísicos envolvendo os casos de fluidos com pressão isotrópica e anisotrópica. Tais cenários já foram vastamente explorados em diferentes contextos e teorias gravitacionais. No âmbito de fluidos com pressão isotrópica podemos citar o clássico e idealizado estudo envolvendo den-

⁸ Tal observação culminou na primeira imagem da sombra de um objeto da galáxia M87 assumida ser a de um BN de Kerr (AKIYAMA et al., 2019).

⁹ No Apêndice (E.1) há mais informações sobre tal classificação.

¹⁰ Do inglês sigla para “*Clean-photon sphere objects*”.

¹¹ Sigla para *gravitational-vacuum stars*.

sidade constante (SCHWARZSCHILD, 1916), (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973), o trabalho (STUHLIK et al., 2009) onde é estudado o aprisionamento de partículas sem massa em objetos extremamente compactos na RG, temos também o estudo da estabilidade de OCs preenchidos por um fluido isotrópico em teorias $f(R, T, R_{\mu\nu}, T^{\mu\nu})$ foi analisado em (SHARIF; WASEEM, 2016), enquanto a descrição de estrelas estranhas (*strange stars*) em teorias $f(\mathcal{R}, \mathcal{T})$ foi discutido em (DEB et al., 2018), entre outros. No campo da anisotropia, podemos citar o trabalho (MAK; HARKO, 2003) onde discute estrelas constituídas por fluidos anisotrópicos na RG, o artigo (CATTOEN; FABER; VISSER, 2005) que mostra que *gravastars* devem ser descritas por fluidos anisotrópicos na RG, o trabalho (SETIAWAN; SULAKSONO, 2019) que analisa estrelas de nêutrons também no contexto de RG, o artigo (ZUBAIR; ABBAS, 2014) que discute estrelas compactas em teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo métrico, entre outros. Por fim, temos ainda trabalhos que descrevem objetos como *gravastars* utilizando fluidos com pressão isotrópica, na RG, para a descrição da geometria do seu interior até o limite de Buchdahl (BUCHDAHL, 1959) e, a partir da superfície de Buchdahl, se constrói uma camada preenchida com fluido de pressão anisotrópica (KONOPLYA et al., 2019), constituindo assim, uma estrela híbrida, contendo parte de pressão isotrópica e outra parte de pressão anisotrópica.

Portanto, dentro do cenário correspondente as $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$, que possui uma vasta quantidade de aplicações na literatura (FELICE; TSUJIKAWA, 2010; CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011; NOJIRI; ODINTSOV, 2011; NOJIRI; ODINTSOV; SAEZ-GOMEZ, 2009), investigaremos numericamente modelos de estrelas esfericamente simétricas e estáticas constituídas por fluido de pressão isotrópica e anisotrópica para dois perfis de densidades simples que possuem um comportamento quase constante dentro da estrela e decaem suavemente próximo à superfície. Tais perfis, suavizam a descontinuidade da densidade na superfície da estrela presentes ao se utilizar o perfil de densidade constante em toda a região interna do objeto. Por conta disso, possíveis divergências devido à existência de derivadas segundas da densidade em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini podem ser suavizadas. Como uma primeira análise, nos dedicamos a entender o comportamento da pressão isotrópica e da geometria no interior de OCs para um perfil de densidade em particular. Também discutimos, no contexto de OCs e OUCs, as regiões de aprisionamento de partículas sem massa. Tal fenômeno é importante em estudos envolvendo a aparência ótica de uma estrela em um colapso gravitacional (NOVOTNÝ; HLADÍK; STUHLÍK, 2017) bem como na análise dos modos quase normais de OCs (CARDOSO et al., 2009). O aprisionamento de partículas sem massa também pode influenciar na estabilidade e no resfriamento de OCs e OUCs (STUHLIK; HLADIK; URBANEC, 2011). Compararemos todos os resultados obtidos para esse modelo com os da RG de modo a entender se eles produzem objetos mais ou menos compactos do que aqueles obtidos pela RG para o mesmo perfil de densidade e se são capazes, inclusive de ultrapassar o limite de Buchdahl, que estabelece o limite de máxima compacticidade na RG, independentemente da equação

de estado utilizada¹². Numa segunda análise, investigamos estrelas preenchidas por fluidos de pressão anisotrópica¹³ para um perfil de densidade diferente do estudado no caso isotrópico. Assim, também analisamos os comportamentos da pressão radial e tangencial e da geometria no interior da estrela. Deste modo, todo o levantamento de informações e comparações dos resultados com os da RG (e adicionalmente com o caso isotrópico) foram repetidos para esse caso. Além de estrelas, o fato de configurações de pressão anisotrópica alcançar valores de pressões negativas, nos possibilitou analisar modelos de OEs como *gravastars*.

Esta tese está organizada da seguinte forma: como fundamentação teórica pertinente ao trabalho desenvolvido aqui, dedicamos os capítulos 1 e 2. No primeiro, revisamos os principais aspectos das teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini, como suas equações de campo e propriedades, o que se sabe sobre seus requisitos básicos para a considerarmos uma candidata à teoria gravitacional e seu domínio de compatibilidade com a RG, entre outros. O segundo capítulo é dedicado à revisão sobre estrutura estelar no âmbito da RG, nele discutimos algumas características da física envolvida em objetos estelares com foco nos OCs, OUCs e OEs. Também nos dedicamos a analisar soluções do interior de estrelas particularmente envolvendo casos de fluidos com pressão isotrópica e anisotrópica. Por fim, o capítulo 3 contém os resultados obtidos durante o doutorado. Nele discutimos sobre objetos estelares, com foco nos OCs, OUC e OEs, no âmbito de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini. Vale lembrar que conteúdos complementares referentes aos assuntos discutidos nesta tese foram direcionados aos Apêndices¹⁴.

¹² Os resultados desse trabalho foram publicados na revista EPJC e se encontram no Apêndice (I).

¹³ Os estudos do caso anisotrópico realizados nesta tese são preliminares e precisam ser investigados mais a fundo, porém possuem algumas similaridades com o caso isotrópico que valem a pena discutir.

¹⁴ Há ainda um resultado original contido no Apêndice (D.1) que foi desenvolvido durante o doutorado que não encontra-se no corpo principal desta tese devido ao fato de não se tratar sobre a física do interior de corpos celestes.

1 TEORIAS $f(\mathcal{R})$ NO FORMALISMO DE PALATINI: UMA REVISÃO

O objetivo deste capítulo é apresentarmos uma revisão sobre teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini. Além disso, ele servirá como fundamentação teórica para os desenvolvimentos originais aos quais essa tese se propõe.

1.1 Preliminares

No âmbito de teorias modificadas da gravitação, existem alguns critérios necessários para considerarmos uma teoria como uma real candidata à descrição da gravitação. Por conta disso, iremos relembrar o que teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini nos dizem sobre tais requisitos. É importante dizer que a nossa discussão é feita em forma de resumo e para um aprofundamento sobre os conceitos discutidos a seguir e suas technicalidades, estes podem ser encontrados nos trabalhos citados no decorrer do texto. Para evitar repetições no texto a seguir, denotaremos “ T ” como sendo o traço do tensor energia-momento da distribuição de matéria e energia, “ \mathcal{R} ” como sendo o escalar de Ricci construído com a conexão afim tal que $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \neq \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\lambda}$ e que tem o significado de $\mathcal{R}(T)$, “ \mathbf{R} ” como sendo o escalar de Ricci construído com os símbolos de Christoffel, “ ω_0 ” como sendo o parâmetro de Brans-Dicke, da representação de teorias escalares-tensoriais da gravitação¹⁵, “ ϕ ” como sendo o campo escalar proveniente de teorias escalares-tensoriais, definido como $\phi = \phi(T)$.

No trabalho (SOTIRIOU; FARAONI, 2010), são discutidas algumas características para que uma teoria seja considerada uma possibilidade interessante para descrição da gravitação, tais como: i) “ter um correto limite de campo fraco em ambos os níveis: newtoniano e pós-newtoniano, isto é, aqueles que são compatíveis com os experimentos do sistema solar”; ii) “admitir um bem-posto problema de Cauchy”; iii) estabilidade a nível clássico e semi-clássico; iv) ausência de instabilidade de Ostrogradsky (conter ou não campos fantasmas) (MOTOHASHI; SUYAMA, 2015).

Sobre o limite de campo fraco, é sabido que no vácuo¹⁶, teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini se reduzem à RG com ou sem constante cosmológica¹⁷. Portanto, tem como solução esféricamente simétrica a geometria de Schwarzschild (de Sitter). Isso significaria que o limite de campo fraco é garantido. Por outro lado, a existência de uma solução no vácuo

¹⁵ Para mais informações sobre teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini na representação escalar-tensorial consulte o apêndice (C.1).

¹⁶ Especificamente quando o traço do tensor energia-momento é constante ou nulo. Para mais informações vejam a seção (1.2).

¹⁷ Possuir ou não constante cosmológica vai depender da $f(\mathcal{R})$ adotada.

não garante um “bom” limite newtoniano, pois na presença de matéria o limite de campo fraco também deve ser assegurado (SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

O trabalho (OLMO, 2005), onde são discutidos limites para funções $f(\mathcal{R})$ nos formalismos métrico e Palatini de acordo com os testes do sistema Solar, contém uma discussão sobre limite de campo fraco na representação escalar-tensorial da teoria. No caso de $f(\mathcal{R})$ Palatini, são estudados separadamente os casos em que o parâmetro de Brans-Dicke são $\omega_0 = -3/2$ e $\omega_0 \neq -3/2$. As soluções de campo fraco são exploradas via perturbações em torno de Minkowski. Tais soluções são análogas as da RG tanto para $\omega_0 \neq -3/2$ quanto para $\omega_0 = -3/2$, com uma pequena correção para este último caso no qual aparecem dois termos extras: um correspondendo ao termo de constante cosmológica¹⁸ que pode ser considerado desprezível por ser muito pequeno e o outro é uma função do traço do tensor energia-momento¹⁹, T , ($\Omega(T)$), que também é negligenciado por ser muito pequeno. Considerando tudo isso, e que as constantes, G_{ef} (constante de Newton efetiva) e $M_\odot \equiv \phi_0 \int d^3\vec{x} \rho(t, \vec{x}) / \phi$ (onde $\phi_0 = \phi(T=0)$ e $\rho(t, \vec{x})$ é a densidade de energia), previstas em $f(\mathcal{R})$ Palatini serão iguais àquelas já conhecidas da teoria newtoniana, isto é, $G_{ef} M_\odot = G M_N$, onde $M_N \equiv \int d^3\vec{x} \rho(t, \vec{x})$, sendo G a constante de Newton e “ N ” é um índice para newtoniano, é possível garantir um bom limite newtoniano e parâmetro pós-newtoniano, γ , como sendo $\gamma \simeq 1$.

Entretanto, essa discussão sobre o limite newtoniano e pós-newtoniano para teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini pode não estar totalmente concluída. O trabalho (SOTIRIOU; FARAONI, 2010) há uma importante reflexão sobre esse assunto que é basicamente o caso em que não podemos considerar $\Omega(T)$ pequeno e conseqüentemente desprezá-lo. Os autores alegam que essa restrição valerá para uma limitada classe de densidades e que por conta disso não contempla todas as possibilidades de densidades relevantes para a descrição dos testes do sistema solar. Nesse caso, a teoria poderia não reproduzir um correto limite newtoniano e o parâmetro pós-newtoniano dependeria da densidade.

Sobre o problema de Cauchy, podemos dizer, segundo (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2012; OLMO; SANCHIS-ALEPUZ, 2011; SOTIRIOU; FARAONI, 2010), que estudar tal problema de uma teoria consiste basicamente em analisar se o problema do valor inicial (PVI) é bem-formulado e bem-posto. Ser bem-formulado significa que “dadas as adequadas condições iniciais, a evolução dinâmica do sistema físico é unicamente determinado” (OLMO, 2011b; CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009b). Além de ser bem-formulado, a teoria necessita de dois outros requerimentos: “mudanças na região das condições iniciais têm que preservar a estrutura causal da teoria; a teoria deve ser estável

¹⁸ Que também está presente para o caso de $\omega_0 \neq -3/2$.

¹⁹ Essa relação surge do fato de que teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini na representação escalar-tensorial da gravitação possuem uma relação entre o campo escalar, ϕ , e o traço do tensor energia-momento, T , do tipo $\phi = \phi(T)$ (OLMO, 2011b).

de modo a ser preditiva” (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009b). Esse segundo requisito significa que “pequenas mudanças e perturbações nas condições iniciais devem produzir pequenas perturbações na dinâmica sobre todo o espaço-tempo onde ele está definido” (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009b). Se tais critérios são satisfeitos, o problema do valor inicial da teoria é dito bem-posto.

No ano de 2007 foi lançado um trabalho, (LANAHAN-TREMBLAY; FARAONI, 2007), que afirmava que as $f(\mathcal{R})$ Palatini não tinham problema de Cauchy bem-formulado, em geral, e não teriam um PVI bem-formulado e bem-posto no caso de vácuo de modo afirmarem a não-viabilidade destas teorias.

Em 2009 foi publicado um comentário (*comment*), (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009a), sobre o artigo (LANAHAN-TREMBLAY; FARAONI, 2007), onde se discute que o PVI pode ser sim bem-formulado e que, para o caso de vácuo e em casos onde o traço do tensor energia-momento é constante, teremos que as $f(\mathcal{R})$ Palatini se reduzem à RG, com ou sem constante cosmológica, à qual sabemos que possui problema de Cauchy bem-formulado e bem-posto. Neste mesmo ano, um dos autores do primeiro trabalho (LANAHAN-TREMBLAY; FARAONI, 2007) lança uma resposta (*reply*), (FARAONI, 2009), ao *comment* (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009a) onde ele reafirma os pontos desenvolvidos neste último, mas diz que ainda assim, para o caso geral em que o traço do tensor energia-momento não é constante e não-nulo o problema de Cauchy para as $f(\mathcal{R})$ Palatini pode ser mal formulado.

No mesmo ano do *comment* e do *reply*, foram publicados dois trabalhos, (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009b) e (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009c), o primeiro discutindo que o PVI para teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini era bem-formulado no contexto de vácuo e na presença de matéria e energia para os casos particulares de: fluido perfeito e para campos de Klein-Gordon e Yang-Mills, além das tradicionais situações em que o traço do tensor energia-momento é constante ou nulo. O segundo mostrando que o problema de Cauchy é bem-formulado e será bem-posto para o caso de fluido perfeito se uma determinada condição²⁰, envolvendo a densidade e pressão efetivas, for satisfeita. E, no ano seguinte, porém publicado posteriormente, é mostrado que para o caso dos campos de Klein-Gordon, o PVI é bem-formulado e para ser bem-posto dependerá, de forma similar ao fluido perfeito, se uma determinada condição²¹, envolvendo os campos escalares, for satisfeita (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2011). Nos dois últimos cenários, de fluido perfeito e Klein-Gordon, as condições a serem satisfeitas para que o PVI seja bem-posto dependerá, essencialmente, da fonte de matéria e energia e da $f(\mathcal{R})$ escolhida.

Em 2011 surge o trabalho²² (OLMO; SANCHIS-ALEPUZ, 2011) em que é dis-

²⁰ Tal condição corresponde a inequação (32) do trabalho (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2009c).

²¹ Tal condição corresponde a inequação (29) do trabalho (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2011).

²² Uma análise desse trabalho também pode ser encontrada no trabalho de revisão (OLMO, 2011b).

cutido o problema de Cauchy via formulação hamiltoniana de $f(\mathcal{R})$ Palatini sobre a perspectiva de teorias escalares-tensoriais da gravitação. Em tal artigo, é analisado cuidadosamente o PVI que possui como objeto central de estudo as equações de evolução e de restrições envolvendo o campo escalar, que são exploradas separadamente para as condições $\omega_0 \neq -3/2$ e $\omega_0 = -3/2$. Para a primeira condição, é afirmado que o PVI é bem-formulado e que pode ser bem-posto ao usarmos diferentes variáveis e representações das equações de evolução e de restrições. A segunda condição, que é um pouco mais delicada, impõe a necessidade de, segundo os autores, especificar um valor inicial para um multiplicador de Lagrange e avaliar as equações que levam a certas restrições, para estabelecer consistentemente os valores iniciais. Não foi mostrado explicitamente que o PVI é bem-posto para esse segundo caso, mas eles exploram a semelhança entre as equações de evolução e de restrições com as da RG para concluir que o PVI pode ser bem-posto para esse caso também, mas isso dependerá de modelo para modelo. Em resumo, eles afirmam que o PVI é bem-formulado no caso geral de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini e não há nenhuma razão para que ele não possa ser bem-posto também.

Por fim, no mesmo ano de 2011, porém publicado no ano seguinte, é divulgado o trabalho que é uma visão geral sobre PVI para as $f(\mathcal{R})$ nos formalismos métrico e Palatini, (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2012), em que organizam as ideias, apontando semelhanças e divergências entre os dois formalismos. Também reforçam algumas ideias discutidas nos seus próprios trabalhos anteriores, dando como exemplos de problema de Cauchy bem-formulado e bem-posto, em $f(\mathcal{R})$ Palatini, os casos particulares de fluido perfeito e campos de Klein-Gordon.

Desta forma, para finalizar a nossa breve discussão sobre o problema de Cauchy em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, como discutido em (CAPOZZIELLO; VIGNOLO, 2011), pelo fato das teorias $f(\mathcal{R})$ serem uma teoria de “calibre” (coordenadas) o PVI dependerá de adequadas restrições e adequadas escolhas de calibre de forma que o problema de Cauchy seja bem-formulado e possivelmente bem-posto. Como na RG, a escolha de coordenadas é essencial para uma formulação correta do PVI e para cada fonte em consideração é necessário uma discussão cuidadosa para se obter um problema bem-posto ou não. Portanto, a conclusão a que chegamos para teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini é que elas possuem em geral um PVI bem-formulado e a análise de que ele seja bem-posto ou não vai depender escolha da teoria $f(\mathcal{R})$ e da fonte, isto é, da distribuição de matéria e energia.

Sobre a estabilidade da teoria a nível clássico e semi-clássico, existem vários possíveis estudos de estabilidades (SOTIRIOU; FARAONI, 2010) podendo ou não depender de uma escolha da $f(\mathcal{R})$. Podemos citar como um exemplo de estudo de estabilidade, a clássica análise de Dolgov-Kawasaki (DOLGOV; KAWASAKI, 2003). No caso do formalismo métrico, por exemplo, tal instabilidade pode surgir no setor de matéria em teorias $f(\mathcal{R})$ do tipo $\mathcal{R} + \mu\mathcal{R}^{-1}$, onde μ é uma constante, (FARAONI, 2006). Por outro lado, segundo (SOTIRIOU, 2007), não ocorre instabilidade Dolgov-Kawasaki em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini.

O principal motivo da não-ocorrência desse fato é devido à forma da equação do traço do tensor energia-momento, isto é, a equação que relaciona²³ \mathcal{R} e T , ser do tipo algébrica, enquanto no formalismo métrico, temos uma equação diferencial que relaciona \mathbf{R} e T .

Sobre a instabilidade de Ostrogradsky conter campos fantasmas numa teoria significa ela não ser unitária ou “assumir estados massivos de norma negativa que cause uma aparente falta de unitariedade” (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). A presença de campos fantasmas na teoria pode ser manifestada quando as equações de campo da teoria levam a ordens superiores a dois na derivada da métrica. Isso consequentemente tem a ver com a escolha da $f(\mathcal{R})$ e com o formalismo utilizado no princípio variacional. O formalismo de Palatini não gera derivadas de ordens superiores a dois na métrica nas equações de campo, independentemente da escolha da $f(\mathcal{R})$. Isso porque nesse formalismo temos uma relação do tipo $\mathcal{R}(T)$. Basicamente a teoria final é: $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}^{ef}$, onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e $T_{\mu\nu}^{ef}$ é um tensor energia-momento efetivo, que contém informações da $f(\mathcal{R}(T))$, além do $T^{\mu\nu}$ usual. A ordem mais alta da derivada na métrica está contida no tensor de Einstein, como no caso da RG.

Portanto, podemos concluir que teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, de um modo geral, satisfazem critérios básicos para as consideramos candidatas a teorias de gravitação. Claramente elas não estão totalmente livre de patologias, como o fato do parâmetro pós-newtoniano, em alguns casos, depender da densidade. Temos também conflito das teorias com o modelo padrão de física de partículas (IGLESIAS et al., 2007; OLMO, 2008), falta de predictividade (FLANAGAN, 2004a), entre outros.

1.2 Equações de campo

No formalismo de Palatini a métrica, $g_{\mu\nu}$, e a conexão afim, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$, são consideradas independentes no princípio variacional. Nesse contexto, considera-se que a matéria não se acopla com a conexão. Matematicamente isso se traduz em escrever tal ação simplesmente como $S_M = S_M(g_{\mu\nu}, \psi)$ onde $g_{\mu\nu}$ representa a componente da métrica que descreve o campo gravitacional e ψ os campos de matéria. Assumiremos também que o tensor métrico é simétrico, isto é, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, enquanto a conexão afim, $\tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^{\alpha}$, não é simétrica a priori, ou seja, $\tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^{\alpha} \neq \tilde{\Gamma}_{\sigma\beta}^{\alpha}$, uma vez que ela é determinada dinamicamente.

Para obter as equações de campo, que descrevem a dinâmica do espaço-tempo descrito pelos campos $g_{\mu\nu}$ e $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$, vamos nos basear nas discussões apresentadas em (OLMO, 2011b; SOTIRIOU; FARAONI, 2010; WOJNAR, 2016). Assim, consideremos a seguinte

²³ Isso pode ser visto na seção (1.2).

ação

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (1)$$

onde $\kappa \equiv 8\pi G$ (se $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$), sendo G a constante de Newton, g é o determinante da métrica, $f(\mathcal{R})$ é uma função arbitrária do escalar de Ricci, $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$, tal que $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ e $\mathcal{R}^\alpha_{\beta\sigma\rho} = \partial_\sigma \tilde{\Gamma}^\alpha_{\rho\beta} - \partial_\rho \tilde{\Gamma}^\alpha_{\sigma\beta} + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\beta} \tilde{\Gamma}^\alpha_{\sigma\lambda} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\beta} \tilde{\Gamma}^\alpha_{\rho\lambda}$ representa as componentes do tensor de Riemann, sendo $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\sigma}$ a conexão afim. A variação da ação²⁴ (1) com relação a $g_{\mu\nu}$ nos fornece a seguinte equação de campo

$$f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

onde $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$ representa a parte simétrica do tensor de Ricci, $f_{\mathcal{R}} \equiv df(\mathcal{R})/d\mathcal{R}$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da distribuição de matéria e energia, isto é,

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3)$$

Tomando o traço da equação (2) temos

$$f_{\mathcal{R}} \mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) = \kappa T, \quad (4)$$

onde $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$.

Por outro lado, a variação da ação (1) em relação á conexão nos fornece

$$-\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}) + \delta^\nu_\lambda \tilde{\nabla}_\rho (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\rho}) + 2\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} (g^{\mu\nu} S^\sigma_{\sigma\lambda} - \delta^\nu_\lambda g^{\mu\rho} S^\sigma_{\sigma\rho} + g^{\mu\sigma} S^\nu_{\lambda\sigma}) = 0, \quad (5)$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada covariante construída com a conexão $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ e $2S^\lambda_{\rho\nu} \equiv \tilde{\Gamma}^\lambda_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\nu\rho}$ representa a torção. Tomando o traço da equação (5), teremos

$$\tilde{\nabla}_\nu (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}) = \frac{4}{3} \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} S^\sigma_{\sigma\nu}. \quad (6)$$

²⁴ O desenvolvimento do princípio variacional para a ação (1) no formalismo de Palatini pode ser encontrado na referência (OLMO, 2011b) e no Apêndice (A.1) desta tese.

Na ausência de torção²⁵, isto é, $S_{\lambda\nu}^\sigma = 0$, a equação (6) se torna

$$\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) = 0. \quad (7)$$

A equação (4) é uma equação algébrica para \mathcal{R} e nos diz que existe uma relação entre o escalar de Ricci, \mathcal{R} , e o traço do tensor energia-momento da distribuição de matéria, T . Ou seja, dada uma $f(\mathcal{R})$, é possível extrair um informação do tipo²⁶ $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$. Para $T = 0$ ou $T = \text{constante}$, a equação (4) nos fornecerá um (ou vários, dependendo do número de raízes) \mathcal{R}_* constante.

Note, por outro lado, que podemos facilmente encontrar a solução da equação (7) fazendo uso de uma métrica conforme, isto é, $h_{\mu\nu} \equiv f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}$ de tal forma que a equação (7) se torna

$$\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0, \quad (8)$$

onde foi usado o fato de que $\sqrt{-h}h^{\mu\nu} = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}$. Assim, vemos que a equação (8) é a definição da conexão de Levi-Civita para a métrica $h_{\mu\nu}$ onde temos

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}h^{\lambda\sigma}(\partial_\mu h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}). \quad (9)$$

Voltando para a métrica $g_{\mu\nu}$, a equação (9) ficará

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\delta_\nu^\lambda}{2f_{\mathcal{R}}}(\partial_\mu f_{\mathcal{R}}) + \frac{\delta_\mu^\lambda}{2f_{\mathcal{R}}}(\partial_\nu f_{\mathcal{R}}) - \frac{g^{\lambda\sigma}}{2f_{\mathcal{R}}}g_{\mu\nu}(\partial_\sigma f_{\mathcal{R}}), \quad (10)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (11)$$

é a conexão de Levi-Civita da métrica $g_{\mu\nu}$. Substituindo (10) na equação de campo para

²⁵ No apêndice B.1 nós exploramos a questão da torção em $f(\mathcal{R})$ Palatini, onde discutimos que está implícito a imposição do vínculo $S_{\sigma\mu}^\sigma = 0$ e a informação da torção em tais teorias passa a não existir. No entanto, existir ou não termos de torção é irrelevante para as equações de campo de $g_{\mu\nu}$, isso também é justificado nesse apêndice.

²⁶ Podemos ver que para $f(\mathcal{R}) \propto \mathcal{R}^2$ teremos que $f_{\mathcal{R}} \propto 2\mathcal{R}$ e o lado esquerdo da equação (4) será nulo e consequentemente teremos $T = 0$, identicamente. Essa escolha de $f(\mathcal{R})$ leva a uma teoria conformemente invariante (SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

$g_{\mu\nu}$, equação (2), temos

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{f\mathcal{R}}T_{\mu\nu} - \frac{(\mathcal{R}f\mathcal{R} - f)}{2f\mathcal{R}}g_{\mu\nu} - \frac{3}{2f\mathcal{R}^2} \left[\nabla_\mu f\mathcal{R} \nabla_\nu f\mathcal{R} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \nabla_\alpha f\mathcal{R} \nabla^\alpha f\mathcal{R} \right] + \frac{1}{f\mathcal{R}} [\nabla_\mu \nabla_\nu f\mathcal{R} - g_{\mu\nu} \square f\mathcal{R}], \quad (12)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, isto é,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Note que o tensor de Einstein na equação (12) (e os ∇ do lado direito) são construídos com a conexão de Levi-Civita (11). Além disso, os termos do lado direito da equação (12) são escritos em termos de \mathcal{R} caracterizando o fato de serem funções do traço do tensor energia-momento, isto é, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$, uma consequência da equação (4). Desta forma, vemos que conexão $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ acaba sendo apenas um campo auxiliar no âmbito de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini. Note ainda que essa maneira de obtermos a equação (12) é equivalente a usarmos, na equação (2), a transformação do tensor de Ricci e do escalar de Ricci para a métrica conforme $h_{\mu\nu} = f\mathcal{R}g_{\mu\nu}$, ou seja,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \frac{1}{f\mathcal{R}^2} \nabla_\mu f\mathcal{R} \nabla_\nu f\mathcal{R} - \frac{1}{f\mathcal{R}} \left(\nabla_\mu f\mathcal{R} \nabla f\mathcal{R} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \square f\mathcal{R} \right), \quad (14)$$

e, a contração com $g_{\mu\nu}$ do tensor de Ricci, (14), nos fornece o escalar de Ricci

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2f\mathcal{R}^2} \nabla_\mu f\mathcal{R} \nabla_\nu f\mathcal{R} - \frac{3}{f\mathcal{R}} \square f\mathcal{R}, \quad (15)$$

onde $R_{\mu\nu}$, R , ∇^μ e ∇_μ são calculados usando a conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$, equação (11), (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Para evitar confusões, é importante notar a diferença entre analisar a não-metricidade utilizando $\tilde{\nabla}_\alpha$ ou ∇_α . O primeiro operador está associado à conexão (9) e o segundo a conexão (11). Claramente temos não-metricidade ao fazermos $\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\alpha \ln f\mathcal{R}(T) \neq 0$, fato este que está sempre presente em espaços métrico-afins²⁷. Enquanto a metricidade é mantida ao utilizarmos o ∇_α , isto é, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. O tensor energia-momento também é conservado²⁸ utilizando ∇_μ , ou seja, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Isso implicará que partículas testes seguirão geodésia da métrica $g_{\mu\nu}$. Além disso, a equação (12) pode ser escrita na forma das equações de Einstein com um termo que, no vácuo, se

²⁷ Entretanto, segundo (SOTIRIOU; FARAONI, 2010), teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini são teorias métricas no sentido que elas satisfazem os postulados métricos.

²⁸ É importante dizer que o fato da teoria ser invariante sobre difeomorfismos garantirá a conservação do tensor energia-momento naturalmente (OLMO, 2011b; SOTIRIOU; FARAONI, 2010).

comporta como constante cosmológica da forma

$$G_{\mu\nu} = \Lambda_{ef}(T)g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{ef}, \text{ onde} \quad (16)$$

$$\Lambda_{ef}(T) \equiv -[\mathcal{R}f_{\mathcal{R}} - f(\mathcal{R})]/2f_{\mathcal{R}}^2 \text{ e,} \quad (17)$$

$$T_{\mu\nu}^{ef} \equiv \frac{\kappa}{f_{\mathcal{R}}}T_{\mu\nu} - \frac{3}{2f_{\mathcal{R}}^2} \left[\nabla_{\mu}f_{\mathcal{R}}\nabla_{\nu}f_{\mathcal{R}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}f_{\mathcal{R}}\nabla^{\alpha}f_{\mathcal{R}} \right] + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}}[\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_{\mathcal{R}} - g_{\mu\nu}\square f_{\mathcal{R}}] \quad (18)$$

Vamos explorar algumas consequências da equação (12). Assim, para $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ temos que a teoria se reduz à RG. Quando o traço do tensor energia-momento é nulo ou constante, recuperamos a RG com constante cosmológica, isto é, $G_{\mu\nu} = \kappa_{ef}T_{\mu\nu} - \lambda_{ef}g_{\mu\nu}$, onde $\kappa_{ef} \equiv \kappa/f_{\mathcal{R}_*}$ e $\lambda_{ef} \equiv (\mathcal{R}_*f_{\mathcal{R}_*} - f_*)/2f_{\mathcal{R}_*}$, de modo que \mathcal{R}_* simboliza a(s) constante(s) quando $T = 0$ ou $T = \text{constante}$, determinada pela equação (4). Isso significa que o teorema de Birkhoff, que diz que a única solução esfericamente simétrica no vácuo é Schwarzschild²⁹ (com ou sem constante cosmológica (CARROLL, 2004; SCHLEICH; WITT, 2010)), é válido para essa teoria. Desta forma, vemos que as teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini só serão diferentes da RG, com ou sem constante cosmológica, quando o traço do tensor energia-momento for não-nulo e não-constante. Uma das vantagens técnicas do formalismo de Palatini com relação ao formalismo métrico é que as derivadas que aparecem do lado direito da equação (12) não representam ordens superiores a dois na métrica, $g_{\mu\nu}$, devido ao fato de $f(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R}(T))$; enquanto no formalismo métrico temos o surgimento de ordens mais altas que dois. Assim, temos que a equação (12) possui somente derivadas em segunda ordem em $g_{\mu\nu}$ proveniente do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, como no caso da RG. Entretanto, teremos ordens superiores a um na derivada do traço do tensor energia-momento em $f(\mathcal{R})$ Palatini.

Uma outra maneira de fazer contas com $f(\mathcal{R})$ Palatini é utilizando a equação (2) para a métrica auxiliar $h_{\mu\nu}$. Deste modo, usando o fato de que $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}$, podemos escrever a equação (2) como (OLMO, 2011b)

$$\mathcal{R}^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{f_{\mathcal{R}}^2} \left[\kappa T^{\mu}_{\nu} + \frac{f(\mathcal{R})}{2} \delta^{\mu}_{\nu} \right], \quad (19)$$

ou ainda, adicionando $-\mathcal{R}h_{\mu\nu}/2$ em cada lado da equação (2), temos

$$G_{\mu\nu}(h) = \frac{\kappa}{f_{\mathcal{R}}}T_{\mu\nu} - \Lambda(T)h_{\mu\nu}, \quad (20)$$

onde $\Lambda(T) = [\mathcal{R}f_{\mathcal{R}} - f(\mathcal{R})]/2f_{\mathcal{R}}^2 = [f(\mathcal{R}) + \kappa^2 T]/2f_{\mathcal{R}}^2$. Nesses casos, usamos a métrica $h_{\mu\nu}$ para “subir” e “descer” índices. As equações (19) e (20) possuem como solução $h_{\mu\nu}$, para

²⁹ Diferentemente do que acontece no caso das $f(R)$ métrico, onde o teorema de Birkhoff não se mantém, e outras soluções de BN poderiam surgir, a não ser que seja imposto restrições no campo escalar e na curvatura, na descrição escalar-tensorial da teoria, (OLMO, 2012; SOTIRIOU; FARAONI, 2010) .

um $T_{\mu\nu}$ e uma $f(\mathcal{R})$ dados, e encontrar a solução física $g_{\mu\nu}$ se torna fácil uma vez que conhecemos a relação entre estas duas métricas.

Para finalizar essa discussão, vemos que se compararmos as equações (12) e (20) no vácuo teremos

$$G_{\mu\nu}(g) = -\Lambda_{ef}g_{\mu\nu} = -\tilde{\Lambda}_{ef}h_{\mu\nu}, \quad (21)$$

onde $\Lambda_{ef} = f_{\mathcal{R}_*}\tilde{\Lambda}_{ef}$, sendo \mathcal{R}_* a solução da equação (4) no vácuo. Essa diferença acontece, pois $f_{\mathcal{R}_*}$ não é necessariamente igual a 1 no vácuo, vai depender da $f(\mathcal{R})$ e, consequentemente, $g_{\mu\nu} \neq h_{\mu\nu}$. Para que na ausência de matéria tenhamos $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ podemos fazer $g_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}_*}/f_{\mathcal{R}}h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}/\rho(T)$, onde $\rho(T) \equiv f_{\mathcal{R}_*}/f_{\mathcal{R}}$ (OLMO, 2011b). Assim, longe da distribuição de matéria e energia, temos $\rho(T) \rightarrow 1$ e, com isso, Λ_{ef} e $\tilde{\Lambda}_{ef}$ terão a mesma unidade, ou seja, $\Lambda_{ef} = \tilde{\Lambda}_{ef}$. Além disso, para $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}/\rho(T)$ a equação (20) pode ser escrita como

$$G_{\mu\nu}(h) = \frac{\tilde{\kappa}}{\rho(T)}T_{\mu\nu} - \tilde{\Lambda}(T)h_{\mu\nu}, \quad (22)$$

onde usamos o fato de que $G_{\mu\nu}(h_{\mu\nu}) = G(\lambda h_{\mu\nu})$, desde que λ seja uma constante, $\tilde{\kappa} \equiv \kappa/f_{\mathcal{R}_*}$ e $\tilde{\Lambda} \equiv (f/f_{\mathcal{R}_*} + \tilde{\kappa}T)/2\rho(T)^2$.

1.3 Um breve panorama sobre outras teorias $f(\mathcal{R})$ alternativas da gravitação

Além das teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini, há uma série de outras, também $f(R)$, candidatas que se propõem a descrever a gravitação de forma mais completa, (SOTIRIOU; FARAONI, 2010; SOTIRIOU; LIBERATI, 2007; IOSIFIDIS, 2019; CAPOZZIELLO et al., 2015). Porém, todas elas possuem suas vantagens e desvantagens. Assim, o objetivo desta seção é apresentarmos, de forma breve, pelo menos mais duas alternativas com relação às teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini.

1.3.1 Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo métrico

No formalismo métrico, a conexão não é independente da métrica $g_{\mu\nu}$ a priori e a única variável dinâmica independente é a métrica, $g_{\mu\nu}$. Nesse caso, a variação da ação (1) fica, (SOTIRIOU; FARAONI, 2010),

$$f'(\mathcal{R})\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(\mathcal{R})g_{\mu\nu} - [\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square]f'(\mathcal{R}) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (23)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da distribuição de matéria dado pela equação (3), ∇_μ é a derivada covariante associada a conexão de Levi-Civita da métrica, $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$ e $\kappa \equiv 8\pi G$.

O traço da equação (23) é dado por

$$3\square f_{\mathbb{R}} + f_{\mathbb{R}}\mathbb{R} - 2f(\mathbb{R}) = \kappa T, \quad (24)$$

onde T é o traço do tensor energia-momento, $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$.

Vemos que, diferentemente do formalismo de Palatini, a equação do traço (24) é uma equação dinâmica. Isso significa que há uma indicação de que as equações de campo nesse caso admitem mais soluções que as da RG, (SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Além disso, a equação (23) tem ordens mais altas que dois na derivada da métrica, no terceiro e quarto termos do lado esquerdo.

1.3.2 Teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo métrico afim

No formalismo métrico-afim, temos que a métrica $g_{\mu\nu}$ e conexão $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ são considerados independentes no princípio variacional. Além disso, a informação da conexão, $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, pode ou não estar presente na ação de matéria. A situação em que não temos conexão acoplada com a matéria foi a que estudamos nesse capítulo sobre o contexto de Palatini. Por outro lado, ao lidarmos com a informação da conexão na ação de matéria, isto é, $S_M = S_M(g_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda, \psi)$, teremos uma outra possibilidade de teoria de gravidade diferente da discutida em (1.2).

Portanto, considerando a ação de matéria contida em (1) como sendo $S_M(g_{\mu\nu}, \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda, \psi)$ podemos variar a ação S resultante com relação à métrica, onde obtemos (IOSIFIDIS, 2019),

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f(\mathcal{R})}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (25)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é aquele definido em (3), e $\mathcal{R}_{(\mu\nu)}$ é a parte simétrica do tensor de Ricci. Variando com respeito a conexão, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, temos

$$-\frac{\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} + \frac{\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\alpha}\delta_\lambda^\nu)}{\sqrt{-g}} + 2f_{\mathcal{R}}(S_\lambda g^{\mu\nu} - S^\mu \delta_\lambda^\nu - S_\lambda^{\mu\nu}) = \kappa \Delta_\lambda^{\mu\nu}, \quad (26)$$

onde, $\tilde{\nabla}_\alpha$ é o operador construído com $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ e

$$\Delta_\lambda^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda}, \quad (27)$$

é o tensor de hipermomentum, o qual nos informa sobre o spin, cisalhamento e dilatação da matéria e $2S^\lambda{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\mu}$ é o torção (IOSIFIDIS, 2019). Definindo,

$$P_\lambda{}^{\mu\nu} \equiv -\frac{\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f\mathcal{R}g^{\mu\nu})}{\sqrt{-g}} + \frac{\tilde{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f\mathcal{R}g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\lambda)}{\sqrt{-g}} + 2f\mathcal{R}(S_\lambda g^{\mu\nu} - S^\mu\delta^\nu{}_\lambda - S_\lambda{}^{\mu\nu}), \quad (28)$$

temos,

$$P_\lambda{}^{\mu\nu} = \kappa\Delta_\lambda{}^{\mu\nu}, \quad (29)$$

onde $P_\lambda{}^{\mu\nu}$ é o tensor de Palatini. É possível mostrar que ele tem a seguinte propriedade

$$P_\mu{}^{\mu\nu} = 0. \quad (30)$$

Desta forma, vemos que a equação (25) tem a mesma forma da (2) como tinha que ser, porém a introdução da conexão, $\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}$, na ação de matéria, produz uma equação de campo, (26), muito mais complexa para $\tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu}$ que aquela dada por (7).

2 OBJETOS COMPACTOS, ULTRACOMPACTOS E EXÓTICOS NA RELATIVIDADE GERAL

Esse capítulo servirá de fundamentação teórica para o objetivo principal desta tese. Assim, são discutidas aqui a geometria interior de objetos estelares, o conceito de fóton-esfera e aprisionamento de partículas sem massa no âmbito de OCs e OUCs na RG. Nesse contexto, também são analisados OEs conhecidos como *gravastars*.

2.1 Preliminares

Dentre os objetos astrofísicos estão os objetos ou, genericamente, estrelas sem horizontes de eventos que podem pertencer a uma das categorias, segundo a classificação³⁰ (CARDOSO; PANI, 2017): objetos compactos, objetos ultracompactos e *ClePhos*. Temos ainda os objetos exóticos, que podem pertencer a qualquer uma das categorias anteriores.

A motivação de estudar tais objetos, como discutido na introdução, é essencialmente devida a termos a atual capacidade (e, nos próximos anos, com possibilidades mais sofisticadas ainda) de investigar a existência de objetos estelares em condições extremas, tentar oferecer alternativas aos (ou fornecer opções além dos) BNs, além de testar teorias gravitacionais e o comportamento da matéria em situações extremas.

O estudo da física de objetos sem horizonte de eventos abrange uma série de linhas de pesquisas como as que investigam seu processo de formação, sua possível estabilidade, possibilidade de observação dentro do espectro eletromagnético, processo de formação de ondas gravitacionais e conseqüentemente sua capacidade de detecção, entre outros.

Atualmente, com exceção das estrelas de fluidos³¹ e de bósons (SEIDEL; SUEN, 1994; BRITO et al., 2016), não sabemos como tais objetos se formam num colapso gravitacional ou num processo de fusão. Sobre a questão da estabilidade, existem fortes indícios que boa parte deles possam ser estáveis frente a pequenas perturbações, como no caso de OUCs e *ClePhos* (CARDOSO; PANI, 2019; VISSER; WILTSHIRE, 2004). Existem candidatos a objetos sem horizontes de eventos que não foram descartados através de observações dentro do espectro eletromagnético, como as estrelas de bósons (VINCENT et al., 2016), estrelas isotrópicas e anisotrópicas (SILVA et al., 2015), entre outros, (CAR-

³⁰ No Apêndice (E.1) é possível encontrar mais informações sobre esta classificação.

³¹ Aqui estaremos nos referindo a denominação dada pela referência (CARDOSO; PANI, 2017), onde entende-se estrelas de fluidos os tradicionais objetos vastamente estudados de pressão isotrópica, anisotrópica, entre outros, que configurem OCs (como estrelas de nêutrons) e/ou OUCs. Assim, nesta tese, faremos uso do abuso de linguagem e ao nos referirmos sobre objetos de fluidos isotrópicos/anisotrópicos queremos dizer fluidos com pressão isotrópica/anisotrópica.

DOSO; PANI, 2019). Enquanto as OGs provenientes deles foram estudadas no contexto de estrelas de fluidos isotrópicas (CARDOSO et al., 2014) e anisotrópicas (RAPOSO et al., 2019), *gravastars* (VöLKEL; KOKKOTAS, 2017), etc..

Por fim, existem algumas características, segundo³² (URBANO; VEERMäE, 2019; CARDOSO; PANI, 2017), que podem ser usadas no processo de observação de tais objetos como estudos envolvendo: i) “ecos” que são pulsos de radiação gravitacional proveniente de objetos suficientemente compactos que possuam fóton-esfera; acredita-se que tais sinais sejam semelhantes aos provenientes de BNs entretanto, a ausência de um horizonte faz com que exista uma modificação no espectro dos modos quase normais que possam afetar a fase do *ringdown*³³. ii) Números de *Love* de maré não-nulos: a atração gravitacional entre sistemas binários é capaz de produzir uma deformação no objeto vizinho de modo a induzir um momento de quadrupolo proporcional ao campo de forças de maré; a deformidade proveniente do campo de maré é codificada nos números de *Love* que podem modificar o sinal de OGs. iii) Ausência de aquecimento de maré para OEs: sistemas binários em rotação podem causar deformidades de maré capazes de gerar fricção no interior destes objetos e conseqüentemente produzir calor; porém, espera-se que sistemas binários formados por OEs possuam fluxo de energia nulo associado a aquecimentos de maré diferentemente ao que acontece com a dos BNs. Tal fato poderia ser investigados analisando possíveis fases de OGs. iv) Estruturas multipolares diferentes: espera-se que momentos de multipolos provenientes da métrica de Kerr sofram desvios em relação aos previsto pelos OCs. Assim, OGs poderiam ser utilizadas para detetar tais desvios.

Portanto, nesse capítulo, discutiremos o comportamento da pressão isotrópica e anisotrópica bem como a geometria encontrada no interior de objetos estelares, com foco nos OCs, OUCs e OEs que se conectam suavemente com a solução exterior de Schwarzschild e algumas de suas propriedades especificamente na teoria da RG. Tal teoria descreve matematicamente a física gravitacional através das equações de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (31)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da distribuição de matéria e energia e $\kappa \equiv 8\pi G$, sendo G a constante de Newton. Ou seja, temos geometria de um lado da equação e matéria e energia de outro. Logo, a gravitação na RG pode ser interpretada como sendo uma deformação no espaço-tempo provocada por uma fonte de matéria e energia.

³² Para não repetir diversas vezes a mesma referência, toda a informação obtida nesse parágrafo provêm das referências (URBANO; VEERMäE, 2019; CARDOSO; PANI, 2017) que contêm diversos outros trabalhos sobre os assuntos aqui mencionados.

³³ *Ringdown* é a último estágio de uma fusão num sistema binário (CARDOSO; PANI, 2019).

2.2 Estrutura estelar de fluidos isotrópicos

Trabalharemos com modelos estelares esfericamente simétricos e estáticos, cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -e^{A(r)} dt^2 + e^{B(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (32)$$

onde $\Omega^2 \equiv dr^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$. A matéria que constitui o objeto estelar idealizado será descrita por um fluido perfeito cujo tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (33)$$

onde a densidade de energia, ρ , e a pressão isotrópica, p , dependem da coordenada radial, r , somente, enquanto u_α é 4-velocidade do fluido.

Por outro lado, a componente $\nu = r$ da equação da continuidade, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, para a geometria (32) e fluido perfeito, nos fornece

$$p'(r) = -\frac{A'(r)}{2}[\rho(r) + p(r)]. \quad (34)$$

O conjunto de funções³⁴ $A(r)$, $B(r)$, $\rho(r)$ e $p(r)$ determinam matematicamente a estrutura de um modelo de estrela que é determinado pelas equações de Einstein, (31), pela lei de conservação do tensor energia-momento do fluido perfeito e por uma equação de estado (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). Desta forma, as componentes³⁵, tt e rr das equações de Einstein para a geometria (32) e fluido perfeito, se tornam, respectivamente,

$$m'(r) = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (35)$$

$$A'(r) = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r[r - m(r)]}, \quad (36)$$

onde “linha” corresponde a derivada com respeito ao argumento, e estamos considerando

³⁴ Estamos considerando casos simplificados e, portanto, desconsiderando outras possíveis contribuições, como as das funções $n(r)$, que representam o número de densidade de bárions no referencial de repouso do fluido e s , que representa entropia por bárion (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973).

³⁵ Ao invés de utilizarmos a equação da continuidade, poderíamos usar a componente $\theta\theta$ das equações de Einstein que teria o mesmo efeito na determinação das soluções para as equações de campo. Porém ela é mais complicada do que a equação da continuidade e, portanto, trabalharemos com a equação (34) e não utilizaremos a componente $\theta\theta$. Além disso, a equação proveniente da componente $\phi\phi$ é proporcional a equação $\theta\theta$ de modo que também não a utilizaremos aqui.

$$m(r) \equiv \frac{r}{2}[1 - e^{-B(r)}]. \quad (37)$$

A equação (36) junto com a equação da continuidade (34) nos fornece a equação de equilíbrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

$$p'(r) = -\frac{[\rho(r) + p(r)][m(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r[r - 2m(r)]}. \quad (38)$$

Assim, as quantidades físicas que descrevem o campo gravitacional, representado pelas componentes da métrica, $g_{\mu\nu}$, densidade, $\rho(r)$ e pressão, $p(r)$, dentro da estrela, serão dadas matematicamente através das soluções das equações (35), (36) e (38), para uma equação de estado previamente fornecida.

Últimos itens necessários para a construção completa da estrutura estelar são as condições de fronteira. Assim, fora da estrela, o teorema de Birkhoff nos garante que a solução será descrita pela geometria de Schwarzschild. Além disso, $p(r = R) = 0$ define o raio da estrela em R . Para $r = 0$ teremos a pressão central $p(r = 0) = p_c$. Enquanto $A(r = 0) = A_0$, que significa que $A'(r = 0) = 0$, ou seja, A_0 é qualquer constante. Com isso, ao alcançarmos a superfície, R , podemos renormalizar $A(r)$ adicionando qualquer constante onde for necessário de tal modo que tenhamos $A(r = R) = \ln(1 - 2M/R)$. E, por fim, teremos $m(r = 0) = 0$ e $m(r) = M$ para $r \geq R$, onde M é a massa total do objeto. Todas essas condições nos levarão a uma geometria de Schwarzschild fora da fonte de curvatura e são suficientes para resolver o sistema de equações para $A(r)$, $m(r)$ e $p(r)$ ditadas por alguma equação de estado previamente dada. Além disso, para uma equação de estado que obedeça a condição $\rho \geq 0$ para todo $p \geq 0$, a equação TOV (38) garante que a pressão decrescerá monotonicamente (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973).

2.3 Objetos isotrópicos na RG: exemplos

Estrelas constituídas de matéria isotrópica, isto é, fluidos nos quais propriedades físicas são independentes da direção, podem ser consideradas como uma primeira aproximação da matéria. Assim, vamos dedicar essa seção para extrair informações destes modelos para perfis de densidade constante e para um perfil de densidade que é quase constante dentro da estrela, mas que decresce suavemente na superfície da mesma e algumas de suas propriedades.

2.3.1 Objetos com densidade constante

Objetos constituídos de fluidos com densidade constante e pressão isotrópica são exemplos de configurações compactas discutidas sobre vários aspectos, como exemplo podemos citar (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973), envolvendo análise de sua estrutura e questões sobre estabilidade de tais objetos foram investigados em (CHANDRASEKHAR, 1964). Também foram focos de pesquisas envolvendo ecos gravitacionais (PANI; FERRARI, 2018) bem como na análise da luminosidade e do processo de resfriamento de OCs devido ao aprisionamento de partículas sem massa (STUHLIK et al., 2009). Apesar desse modelo ser idealizado por ser incompressível e ter velocidade do som maior que a velocidade da luz ele é importante para trazer intuições em estudos de modelos mais realísticos.

Assim, para o modelo descrito por

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & 0 < r < R, \\ 0, & R \geq 0, \end{cases} \quad (39)$$

onde ρ_0 e R são constantes, podemos integrar facilmente as equações (35), (36) e (38), onde obtemos os seguintes resultados, (SCHWARZSCHILD, 1916):

- Massa:

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0, & r < R, \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 = M, & r \geq R, \end{cases} \quad (40)$$

onde M é a massa total do objeto.

- Pressão:

$$p(r) = \rho_0 \left[\frac{R\sqrt{R-2M} - \sqrt{R^3 - 2Mr^2}}{\sqrt{R^3 - 2Mr^2} - 3R\sqrt{R-2M}} \right], \text{ para } r < R, \quad (41)$$

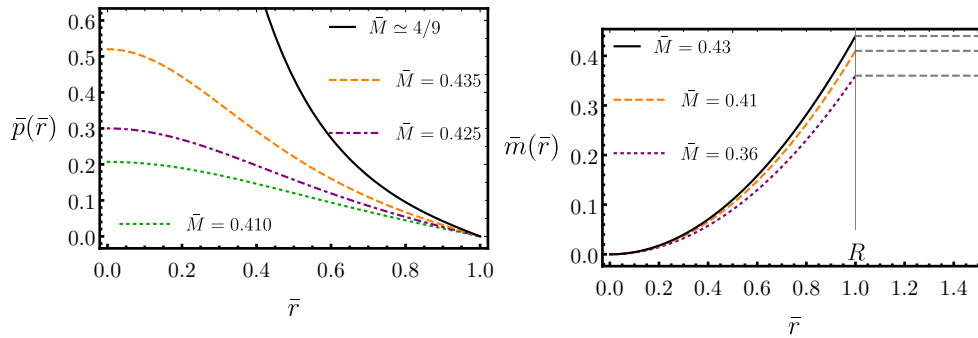
sendo R o raio da estrela, definido de tal forma que $p(r = R) = 0$.

- Pressão central:

$$p_c = \rho_0 \left[\frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1} \right], \quad (42)$$

onde $p_c \equiv p(r = 0)$.

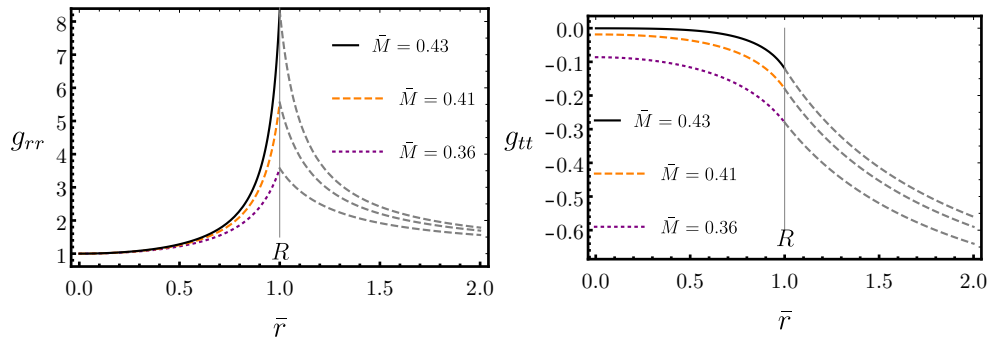
Gráfico 1 - Pressão e massa para o caso de densidade constante em função da coordenada radial na RG.



Legenda: Comportamento da pressão e da massa para vários valores de densidade.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 2 - Componentes g_{rr} e g_{tt} para o caso de densidade constante na RG.



Legenda: Componentes g_{rr} (esquerda) e g_{tt} (direita) da métrica em função da coordenada adimensionalizada dentro e fora da estrela para várias densidades.

Fonte: A autora, 2020.

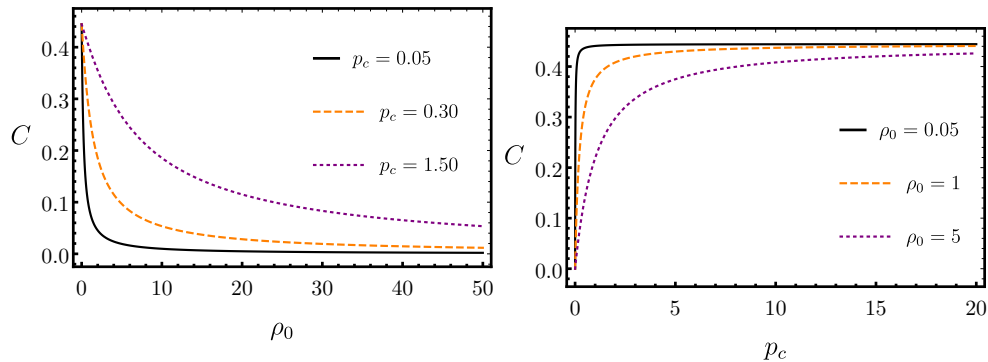
- Componente g_{tt} da métrica:

$$e^{A(r)} = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \right)^2, & r < R, \\ \left(1 - \frac{2M}{R} \right), & r \geq R. \end{cases} \quad (43)$$

- Componente g_{rr} da métrica:

$$e^{B(r)} = \begin{cases} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3} \right)^{-1}, & r < R, \\ \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1}, & r \geq R. \end{cases} \quad (44)$$

Gráfico 3 - Compacidade para o caso de densidade constante em função da densidade e da pressão central na RG.



Legenda: Compacticidade em função da densidade (esquerda) e em função da pressão central (direita).

Fonte: A autora, 2020.

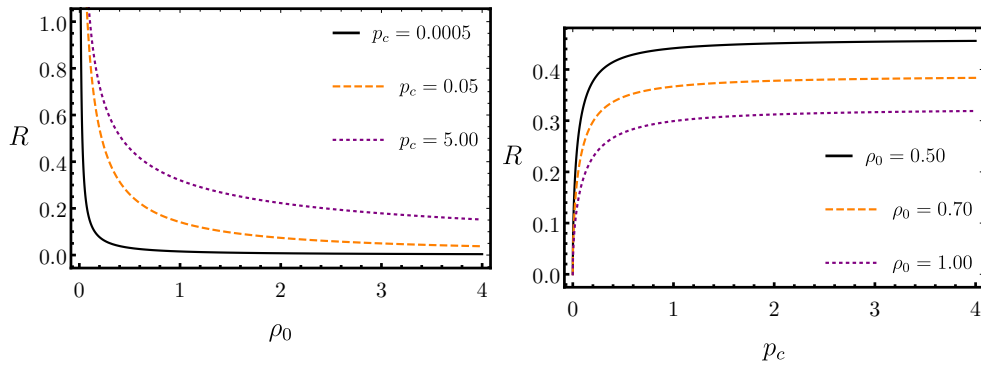
Nos gráficos (1) e (2), temos as soluções para a massa, pressão e componentes g_{tt} e g_{rr} da métrica (dentro e fora da estrela), adimensionalizadas com relação a R . Isso significa que foi usado $r = \bar{r}R$, $p(r) = \bar{p}(\bar{r})R^{-2}$, $\rho = \bar{\rho}R^{-2}$, $m(r) = \bar{m}(\bar{r})R$ e $dp(r)/dr = d\bar{p}(\bar{r})/d\bar{r}R^{-3}$ onde os elementos com barra são quantidades adimensionais e R é o raio da estrela definido por $p(r = R) = 0$, que possui unidade de comprimento³⁶, isto é, $[R] = L$. Essa adimensionalização pelo raio faz com que possamos eliminar um parâmetro (o R) presente nos cálculos envolvidos que será de muita utilidade posteriormente. Porém, a consequência dessa escolha faz com que não seja possível em nenhum momento saber quanto vale o raio e massa das configurações analisadas, pois o que será obtido nas integrações numéricas é a razão conhecida como compacidade definida como a quantidade adimensional $C \equiv M/R$ ou $\bar{M} \equiv M/R$ que nos informa o quão compacto um objeto pode ser. Graficamente, ela pode ser visualizada no gráfico (3). Além disso, o valor de $\bar{r} = 1$ presentes nos gráficos numéricos corresponde, não ao raio da estrela, mas a informação que o raio da estrela foi alcançado. Isto é, ao fazermos $r = \bar{r}R$ teremos então que $\bar{r} = r/R$, logo, quando $\bar{r} = 1$ significa que $r = R$ e, portanto, o raio da estrela foi alcançado. Assim, essa adimensionalização faz com que necessariamente tenhamos $\bar{p}(\bar{r} = 1) = 0$, sempre.

Por outro lado, vale a pena destacar o comportamento da componente g_{rr} (2) (esquerda) que é contínua em todo o espaço dentro e fora da estrela, incluindo na superfície. No entanto, a sua derivada primeira, dg_{rr}/dr , não é contínua em toda a região, ela apresenta descontinuidade na superfície³⁷.

³⁶ Em unidades $c = G = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e G a constante de Newton.

³⁷ Vejam o Apêndice (G) para mais discussões sobre esse fato.

Gráfico 4 - Raio da estrela em função da densidade e da pressão central na RG



Legenda: Comportamento do raio da estrela em função i) da densidade, para vários valores da pressão central fixa (superior); ii) da pressão central, para várias densidade fixas (inferior).

Fonte: A autora, 2020.

2.3.1.1 Limite de Buchdahl

A pressão central, equação (42), pode ser escrita como uma função do tipo $p_c = p_c(\rho_0, R)$, uma vez que ao utilizarmos a equação (40), poderemos escrever $M = M(\rho_0)$, para $r < 0$, e $M = M(\rho_0, R)$ ou $M = M(\rho_0, p_c)$, para $r \geq R$. Por outro lado, uma forma de reescrever e analisar a pressão central, que será útil no futuro, é explorando a função inversa. Assim, por conta de $p_c(\rho_0, R)$ ser uma função inversível, matematicamente é possível escrever tanto $R = R(\rho_0, p_c)$ quanto $M = M(\rho_0, p_c)$, que correspondem, respectivamente a

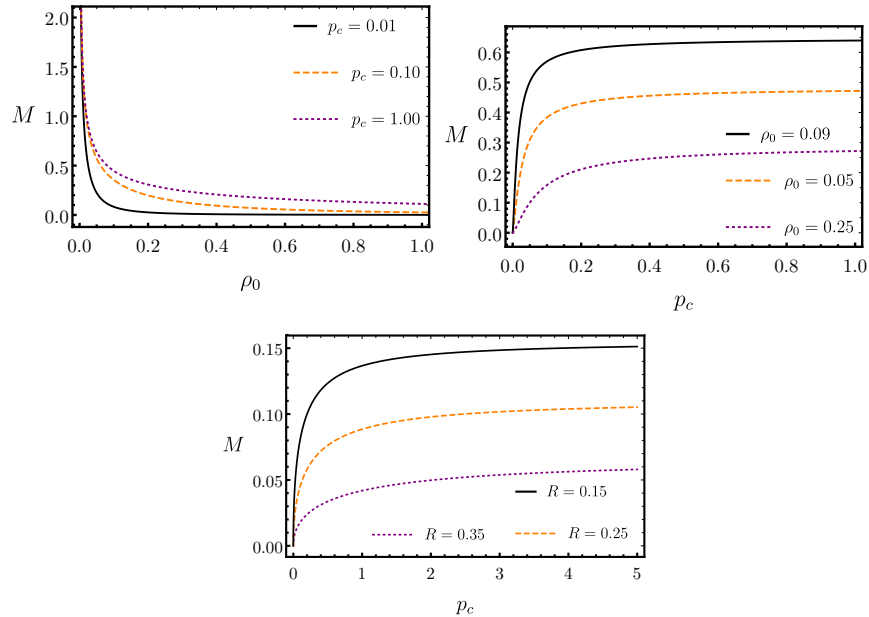
$$R(\rho_0, p_c) = \frac{(3/2\pi)^{1/2}(2p_c^2 + p_c\rho_0)^{1/2}}{(9p_c^2\rho_0 + 6p_c\rho_0^2 + \rho_0^3)^{1/2}}, \text{ e,} \quad (45)$$

$$M(\rho_0, p_c) = \frac{(6/\pi)^{1/2}\rho_0(2p_c^2 + p_c\rho_0)^{3/2}}{(9p_c^2\rho_0 + 6p_c\rho_0^2 + \rho_0^3)^{3/2}}. \quad (46)$$

Ambas as funções são representadas nos gráficos (4) e (5). Vemos por meio do gráfico (4) (direita) que quando p_c é suficientemente grande se estabelece um raio máximo, $R_{m\acute{a}x}$, que pode mudar conforme a densidade muda. De forma similar acontece no gráfico (5) (superior-direita e inferior) que estabelece uma massa máxima, $M_{m\acute{a}x}$, quando p_c é suficientemente grande e que também muda conforme a densidade ou raio muda. Em outras palavras para um ρ_0 fixo teremos um domínio para o raio tal que $R_{min} < R < R_{m\acute{a}x}$. De forma similar, para um ρ_0 ou R fixo, teremos um intervalo para a massa tal que $M_{min} < M < M_{m\acute{a}x}$.

Tudo isso é consequência do fato de que a equação (42) terá seu denominador sendo nulo para valores de $M_{m\acute{a}x}$ (ou $R_{m\acute{a}x}$) tais que $M_{m\acute{a}x} = 4R/9$ (ou $R_{m\acute{a}x} = 9M/4$). A partir

Gráfico 5 - Massa em função da densidade e da pressão central na RG.



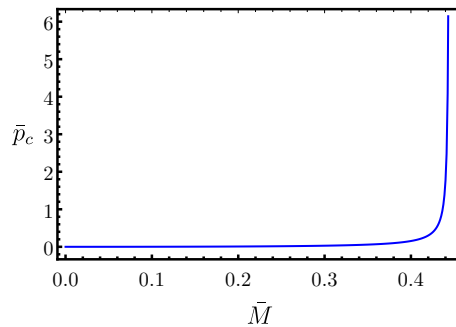
Legenda: Massa em função: i) da densidade, para várias pressões centrais fixas (superior-esquerda); ii) da pressão central, para várias densidades fixas (centro-direita); iii) da pressão central, para vários raios fixos (inferior).

Fonte: A autora, 2020.

desse ponto, a pressão central diverge. Esse resultado é conhecido como limite de Buchdahl (BUCHDAHL, 1959). Fisicamente ele impõe um limite superior para a massa (ou raio) de objetos estelares, a partir do qual se torna impossível sua existência uma vez que a pressão diverge no centro. É importante dizer que a existência de um limite superior para a massa (ou raio) não é uma particularidade válida somente para o modelo (39). De fato, Buchdahl mostrou que para uma densidade de energia positiva e que decresce monotonicamente com r , existirá um limite de massa (ou raio) máxima que é independente da relação entre pressão e densidade (KONOPLYA et al., 2019; BUCHDAHL, 1959). Note que podemos escrever o limite de Buchdahl em termos da compacticidade, C , de modo que a compacticidade máxima estabelecida por Buchdahl será $C_B = M/R = 4/9$.

Assim, para os resultados adimensionalizados pelo R , representados no gráfico (6), a massa máxima (que nesse caso coincide com a compacticidade máxima, C_B , uma vez que $\bar{r} = r/R$) será $C_B = \bar{M}_{m\acute{a}x} = 4/9 \simeq 0.44$. Esse fato também pode ser visto nos gráficos (6) e (1) (esquerda) de modo que a curva em de cor preta foi construída para $\bar{M} \simeq \bar{M}_{max}$, onde podemos ver que a pressão diverge no centro.

Gráfico 6 - Pressão central em função da massa adimensionalizada na RG.



Legenda: Comportamento da pressão central em função da massa.

Fonte: A autora, 2020.

2.3.1.2 Fóton-esfera e aprisionamento de partículas sem massa

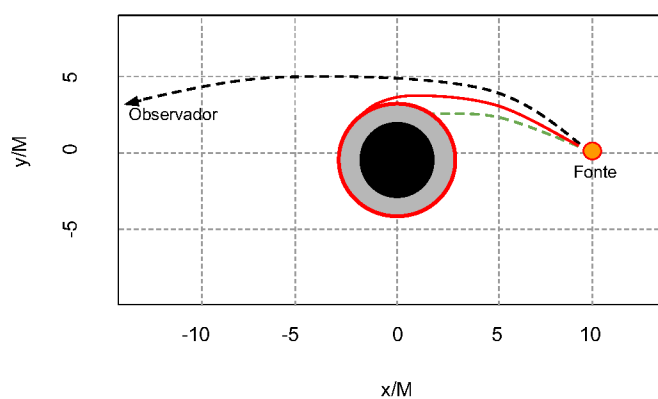
Discutiremos os conceitos de fóton-esfera e aprisionamento de partículas sem massa primeiramente de forma qualitativa para introduzir as ideias e conceitos e, posteriormente, de forma quantitativa.

Tais conceitos envolvem a análise de geodésicas nulas que segundo (CARDOSO et al., 2009) são componentes importantes em estudos envolvendo a aparência ótica de uma estrela em um colapso gravitacional. Também são usadas no estudo de modos quase normais de OCs, que são modos de vibração “livres” e que podem ser interpretados em termos de aprisionamento de partículas sem massa em órbitas instáveis (CARDOSO et al., 2009). São focos de pesquisa envolvendo seus impactos sobre a estabilidade e resfriamento de OCs e OUCs (RAPOSO et al., 2019) e (STUHLIK et al., 2009), entre outros.

Assim, a ideia por trás desses fenômenos pode ser entendida qualitativamente por meio do seguinte contexto (CARDOSO; PANI, 2019): quando uma fonte emite partículas de massa zero, como fótons, em direção a um objeto estelar, três trajetórias para o feixe de luz são possíveis devido à curvatura do espaço-tempo: i) podem ser fracamente desviados; ii) podem passar um tempo infinito em órbita circular no anel de luz antes de serem espalhados ou absorvidos; iii) os fótons podem ser capturados. Em termos de valores do parâmetro de impacto temos parâmetro de impacto alto para o caso i) e baixo para ii) e iii). Na figura (1) temos uma ilustração da situação i) curva preta, ii) curva vermelha e iii) curva verde.

Desta forma, a grosso modo, uma fóton-esfera é uma superfície definida no espaço-tempo sobre a qual partículas de massa zero seguem geodésicas circulares (ver figura (1)).

Figura 1 - Possíveis trajetórias de um raio de luz ao passar próximo de uma fonte gravitacional.



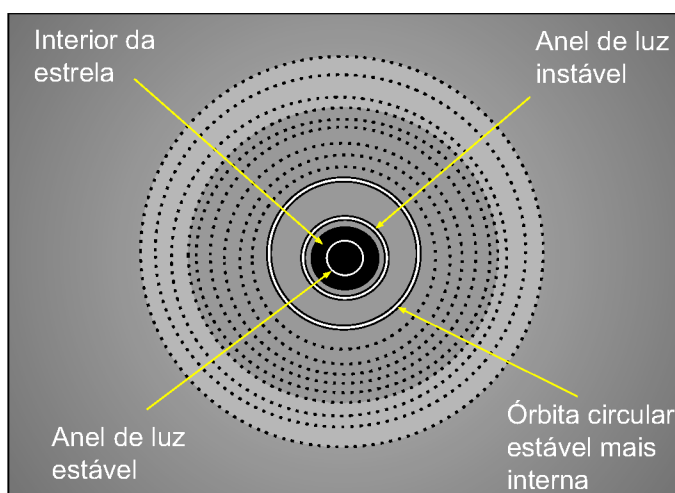
Legenda: Trajetórias possíveis de um raio de luz emitido por uma fonte luminosa (círculo laranja) ao passar próximo de um objeto compacto (círculo preto). A área em cinza é a fóton-esfera.

Fonte: CARDOSO; PANI, 2019, p. 14. Adaptada pela autora.

O plano equatorial, que abriga a superfície da foton-esfera, é chamado de anel de luz. No caso de objetos sem horizontes³⁸ haverá dois anéis de luz: um estável e outro instável. De maneira simplificada podemos caracterizar as regiões de objetos sem horizonte como a seguir e, que estão representados na figura (2), (CARDOSO; PANI, 2019)

- Órbita circular estável: superfície onde planetas podem orbitar de maneira estável³⁹.
- Anel de luz instável: superfície onde partículas sem massa como fótons e OGs realizam órbitas circulares instável⁴⁰.
- Anel de luz estável: superfície onde partículas sem massa podem orbitar de maneira estável presente apenas em objetos sem horizontes.

Figura 2 - Esquematização dos anéis de luz.



Legenda: Classificação das regiões: i) pontos pretos são planetas que orbitam a estrela (círculo preto no centro); ii) um anel de luz instável existe entorno da estrela; iii) um outro anel de luz estável existe no interior da estrela.

Fonte: CARDOSO; PANI, 2019, p. 10. Adaptada pela autora.

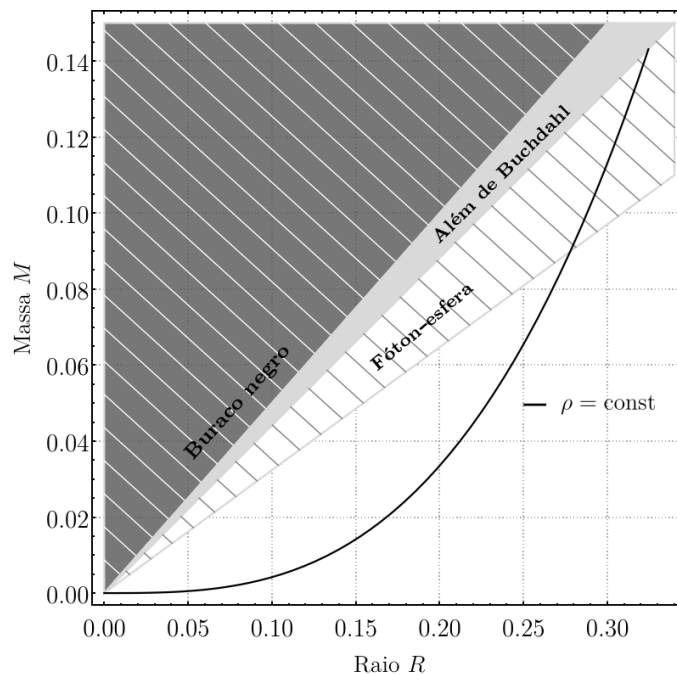
³⁸ Foi provado um teorema, (CUNHA; BERTI; HERDEIRO, 2017), em que afirmam que qualquer solução ultracompacta assimétrica e estacionária das equações de Einstein que foram formadas através de um colapso gravitacional de matéria obedecendo a condição de energia nula deve possuir ao menos dois anéis de luz, sendo um deles estável.

³⁹ A órbita mais interna estável possível possui raio $r = 6M$ para geometria de Schwarzschild (CARROLL, 2004).

⁴⁰ Tal superfície corresponde a $r = 3M$ para geometria de Schwarzschild (CARROLL, 2004).

Por outro lado, para finalizar essa discussão qualitativa, o diagrama massa-raio estabelece o espaço de parâmetros que nos possibilita caracterizar algumas regiões. Assim, podemos estabelecer as regiões que definem os BNs de Schwarzschild a partir de $r = 2M$, os OCs e OUCs que violam o limite de Buchdahl estão entre $4/9 < M/R < 1/2$, e os OCs e OUCs que não violam o limite de Buchdahl e possuem fóton-esfera estão entre $1/3 < M/R < 4/9$. Isso está esquematizado no diagrama da figura (3) onde inclui a informação de densidades constantes representada pela curva de cor preta contínua. Note, portanto, que tais modelos podem ser bastante compactos.

Figura 3 - Diagrama massa-raio RG com densidade constante



Legenda: Definindo o espaço de parâmetros massa-raio nos quais temos BNs (área mais escura da imagem). Objetos que estão além do limite de Buchdahl e tem fóton-esfera (área em cinza claro) e os com fóton-esfera e que não ultrapassam o limite de Buchdahl (área em branco tracejada). O perfil de densidade constante também é apresentado. Massa e raio são dados em unidades de $\rho_0^{-1/2}$.

Fonte: URBANO; VEERMÄE, 2019, p. 10.

Adaptada pela autora.

Matematicamente, podemos quantificar as regiões de aprisionamento de partículas

sem massa em objetos sem horizontes de eventos calculando suas geodésicas nulas (STUCHLIK et al., 2009; STUCHLIK; HLADIK; URBANEC, 2011; NOVOTNÝ; HLADÍK; STUCHLÍK, 2017). Desta forma, para a geometria (32), temos que as quantidades conservadas associadas aos vetores de Killing, $K_\mu = (-e^{A(r)}, 0, 0, 0)$ e $R_\mu = (0, 0, 0, r^2)$, são dadas por

$$E = e^{A(r)} \frac{dt}{d\tau} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = E e^{-A(r)} \quad (47)$$

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \quad (48)$$

onde E é energia, L momento axial e τ é o parâmetro afim. Expandindo $p^\mu p_\mu = 0$ em componentes e assumindo que o movimento seja tal que por simplicidade podemos escolher $\theta = \pi/2$ devido à simetria esférica, temos

$$-e^{A(r)} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + e^{B(r)} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (49)$$

Usando as quantidade (47) e (48) em (49) temos

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = e^{-[A(r)+B(r)]} E^2 \left(1 - \frac{\ell^2}{r^2} e^{A(r)} \right), \quad (50)$$

onde ℓ é o parâmetro de impacto definido como $\ell \equiv L/E$. Desta forma, como $(dr/d\tau)^2 > 0$ e $e^{-[A(r)+B(r)]} E^2 > 0$ para que a equação (50) faça sentido o termo $[1 - \ell^2/(r^2 e^{A(r)})]$ tem que ser maior que zero ou nulo. Assim, temos que o movimento é restringido pelo potencial efetivo relacionado ao parâmetro de impacto ℓ e definido por

$$\ell^2 \leq V_{eff} = \begin{cases} V_{ef}^{int} \equiv \frac{r^2}{\exp(A_{int})}, & r < R, \\ V_{ef}^{ext} \equiv \frac{r^2}{\exp(A_{ext})}, & r \geq R. \end{cases} \quad (51)$$

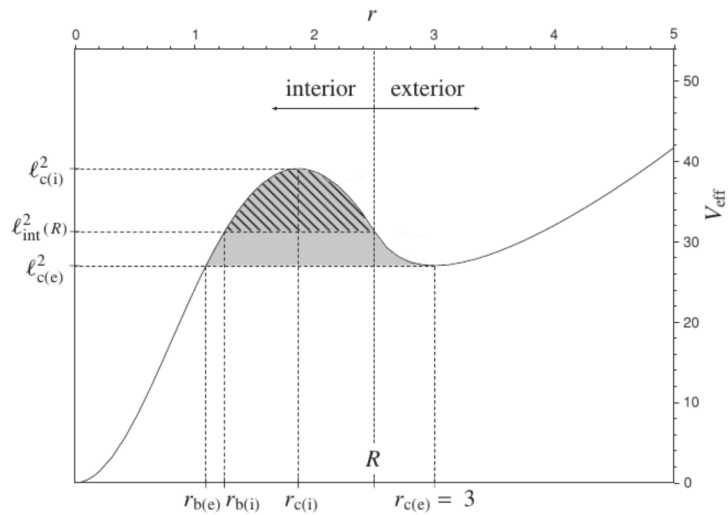
Com essa forma para o potencial, podemos estabelecer as possíveis órbitas das partículas sem massa. Assim, graficamente o potencial (51) para a densidade (39) é representado na figura (4) onde delimitamos as regiões segundo o parâmetro de impacto ℓ (STUCHLIK et al., 2009)

- Aprisionamento de partículas sem massa no interior da estrela⁴¹ (parte superior da figura (4) (esquerda) hachurada) parte da área sombreada de parâmetro de impacto entre ℓ_{int}^2 e $\ell_{c(i)}^2$: seu movimento é restrito ao interior dela.

⁴¹ Corresponde ao anel de luz estável da ilustração representada na figura (2).

- Aprisionamento de partículas sem massa externamente⁴² (parte inferior, figura (4) (esquerda), da área sombreada com parâmetro de impacto entre $\ell_{c(e)}^2$ e $\ell_{int}^2(R)$): podem deixar o objeto, mas elas podem entrar de novo nele.

Figura 4 - Caracterização do potencial efetivo de estrelas sem horizontes de eventos segundo o parâmetro de impacto.



Legenda: Defindo as regiões de aprisionamento de partículas sem massa de acordo com o parâmetro de impacto ℓ para $M = 1$ e $R = 2.5$ para densidade contante.

Fonte: STUHLIK et al., 2009, p. 7.

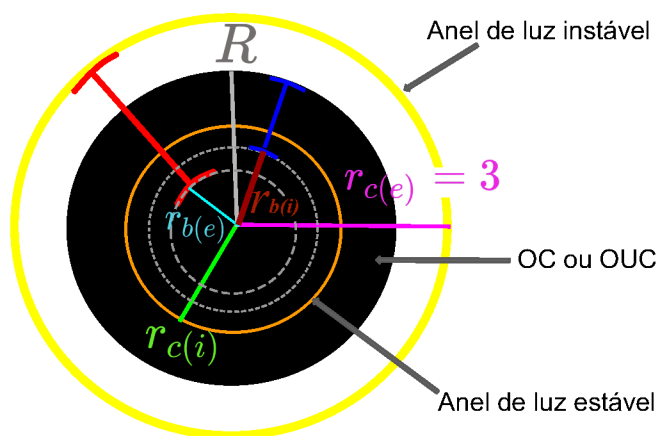
Desta forma, vemos na figura (6) que só teremos regiões de aprisionamento de partículas sem massa para valores $R < 3$ (onde $M = 1$). Para além disso, o objeto não será suficientemente compacto e o raio dele cobrirá a região da fóton-esfera. Portanto, somente em objetos bastante compactos, como OCs, OUCs e *ClePhos* é que será possível a existência de regiões de aprisionamento de partículas sem massa.

Podemos encontrar o ponto de máximo e mínimo do potencial efetivo para o espaço-tempo interno e externo ao fazermos $dV_{ef}/dr = 0$, que determinará as posições das geodésicas circulares nulas. Assim, para o potencial (51) temos

$$e^{-A(r)} r [2 - r A'(r)] = 0. \quad (52)$$

⁴² Corresponde ao anel de luz instável da ilustração representada na figura (2).

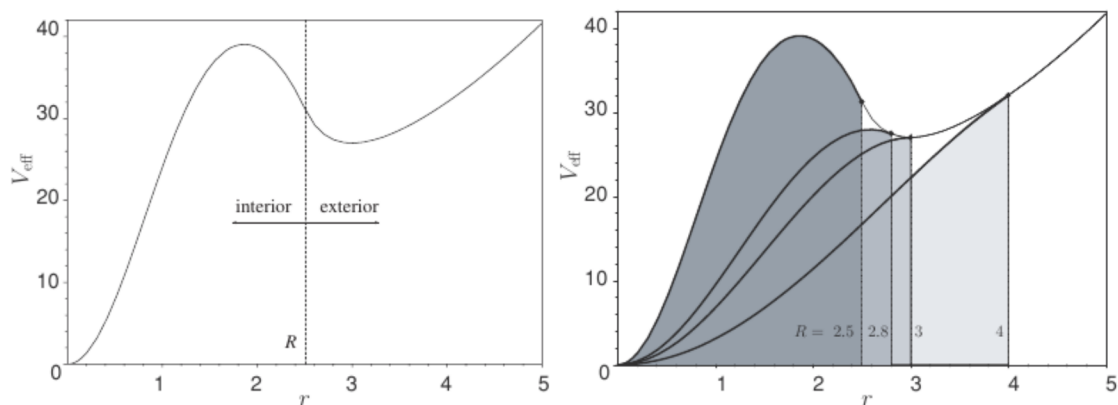
Figura 5 - Esquematização dos anéis de luz.



Legenda: OC ou OUC em preto e representação das possíveis regiões de aprisionamento de partículas sem massa entre a marcação vermelha e azul segundo o gráfico da anterior e da descrição acima.

Fonte: A autora, 2020.

Figura 6 - Caracterização do potencial efetivo de estrelas sem horizontes de eventos segundo a compacticidade.



Legenda: Possíveis comportamentos do potencial para $M = 1$ e $R = 2.5$ (esquerda) e para vários valores de R (direita) e densidade constante.

Fonte: STUHLIK et al., 2009, p. 6.

Para a densidade (39), a equação (52) nos proporciona o ponto de máximo em

$$r_{c(i)}^2 = \frac{R^3}{2M} \frac{(4R/9M - 1)}{2M(R/2M - 1)}, \quad (53)$$

e parâmetro de impacto em

$$\ell_{c(i)}^2 = \frac{4a^2}{9Y_1 - 1}, \quad (54)$$

onde $a \equiv R^{3/2}/(2M)^{1/2}$ representa a curvatura do espaço-tempo interno e $Y_1 \equiv (1 - R^2/a^2)^{1/2}$ (STUCHLIK et al., 2009).

Enquanto o ponto de inflexão do potencial efetivo é determinado pela condição $d^2V_{ef}/dr^2 = 0$, isto é,

$$e^{-A(r)} \{6rA'(r)^2 - r^2A'(r)^3 + 3A'(r)[r^2A''(r) - 2] - r[6A''(r) + rA'''(r)]\} = 0. \quad (55)$$

Desta forma, órbitas circulares estáveis são aquelas dadas por $d^2V_{ef}/dr^2 < 0$ e instáveis por $d^2V_{ef}/dr^2 > 0$.

Por outro lado, o mínimo do potencial⁴³ para a densidade (39) é dado por

$$r_{c(e)} = 3M, \quad (56)$$

e parâmetro de impacto

$$\ell_{c(e)}^2 = 27M^{1/2}. \quad (57)$$

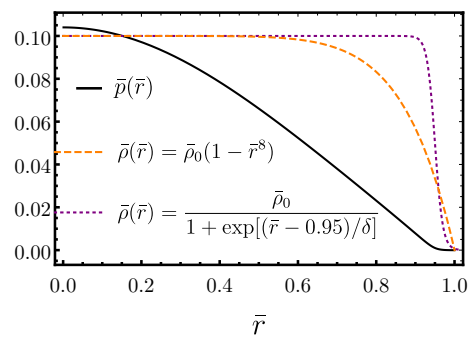
2.3.2 Densidade com decaimento na superfície

A motivação de se discutir esse perfil de densidade é devido ao fato de que teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini não suportam perfis de densidade constante como aquele dado pela equação (39). A justificativa para isso será dada no próximo capítulo.

Assim, para evitar o comportamento de função degrau da densidade na superfície da estrela, adotaremos um perfil de densidade que é quase constante dentro da estrela e que decai de forma suave próximo da superfície da mesma, como podemos visualizar simbolicamente na figura (7). Isso pode ser feito utilizando funções do tipo, (KAINULAINEN; REIJONEN; SUNHEDE, 2007; DEBENEDICTIS et al., 2006),

⁴³ Todos os outros pontos da figura (4) tais como $r_{b(e)}$, $r_{b(i)}$ e $\ell_{int}^2(R)$ foram calculados em (STUCHLIK et al., 2009).

Figura 7 - Modelos de densidades aproximadamente constantes dentro da estrela e decrescem suavemente na superfície da mesma.



Legenda: Pressão (curva preta) definindo a superfície em R . Modelos de densidades que caem suavemente próximo à superfície da estrela (curvas laranja e roxa).

Fonte: A autora, 2020.

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r-r_0)/\delta]}, & r < r_0, \\ 0, & r \geq r_0, \end{cases} \quad (58)$$

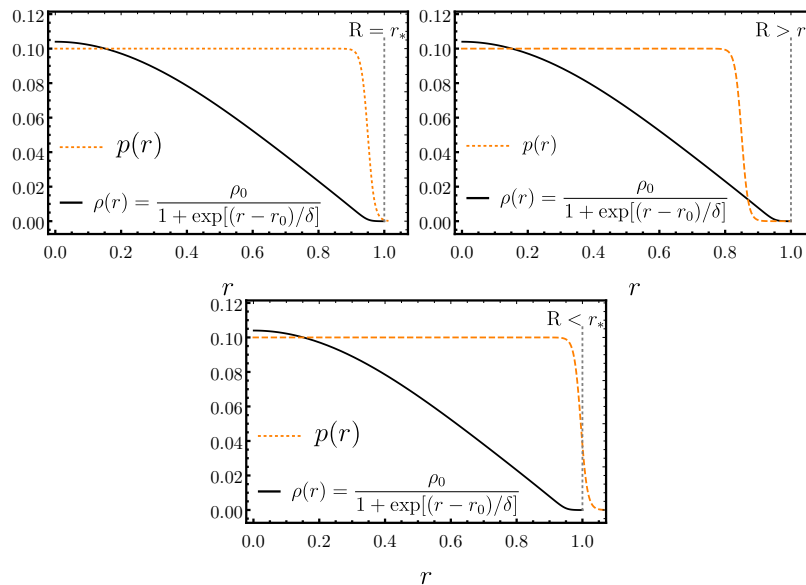
onde r_0 é uma constante que determina a posição da queda da função $\rho(r)$ e δ outra constante que determina o quão próximo da função degrau a função $\rho(r)$ pode ser, ou,

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_*} \right)^8 \right], & r < r_*, \\ 0, & r \geq r_*, \end{cases} \quad (59)$$

onde r_* é uma constante. Para densidades descritas pela equação (58), teremos que tal função nunca chegará a $r = 0$, apenas chegará tão próximo quanto quisermos. Por outro lado, a densidade (59) se anula em $r = r_*$.

No contexto desses modelos de densidade que decrescem próximo da superfície, é importante notar o seguinte: o raio da estrela, definido de tal forma que $p(r = R) = 0$, nem sempre coincidirá com o r_* definido de tal forma em que⁴⁴ $\rho(r = r_*) = 0$ e poderemos ter as três situações possíveis:

Figura 8 - Possíveis modelos de estrelas para densidade que decrescem na superfície.



Legenda: Densidade (curva laranja) que se anula aproximadamente em $r = r_*$ e pressão (curva preta) que se anula em $r = R$.

Fonte: A autora, 2020.

⁴⁴ Ou aproximadamente zero em $r = r_*$ para a densidade (58).

1. $R = r_*$, correspondente a imagem esquerda da figura (8).
2. $R > r_*$, correspondente a imagem do centro da figura (8).
3. $R < r_*$, correspondente a imagem direita da figura (8).

O item 1 acima descreve um modelo onde a densidade cai suavemente próximo à superfície da estrela; matematicamente isso significa que $\rho(r = R) = p(r = R) = 0$. Enquanto o item 2 corresponde⁴⁵ um modelo onde a densidade se anula em r_* antes de chegar na superfície da estrela, R ; matematicamente isso significa que $p(r = R) = 0$ e $\rho(r = R) \neq 0$ ou $\rho(r = r_*) = 0$ tal que $r_* < R$. Por fim, o item 3 representa um modelo em que a densidade começa a cair suavemente na superfície da estrela, porém só a região $0 < r \leq R$, da densidade, contribuirá para a matéria que constitui a estrela⁴⁶; matematicamente isso significa que $p(r = R) = 0$ e $\rho(r = R) \neq 0$ ou $\rho(r = r_*) = 0$ onde $r_* > R$.

Nesta tese, nos concentraremos apenas em modelos descritos pelo item⁴⁷ 1 acima (ou imagem da esquerda da figura (8)). Assim, utilizaremos funções adimensionalizadas e configurações de estrelas que possuam densidades que decaiam de forma suave próximo à superfície fixada em $r_* = R$, o que significa que⁴⁸ $p(r = R) = \rho(r = R) = 0$ onde numericamente será representado por⁴⁹ $\bar{p}(\bar{r} = 1) = \bar{\rho}(\bar{r} = 1) = 0$. Além disso, usaremos o modelo (58) para o estudo de objetos preenchidos com fluidos de pressão isotrópica e (59) para objetos com fluidos de pressão anisotrópicos⁵⁰

Portanto, ao integrarmos numericamente as equações (35), (36) e (38), para a densidade (58) foi possível obter os gráficos (7), (8) e (9) que correspondem aos comportamentos das componentes g_{tt} , g_{rr} , potencial efetivo e massa adimensionalizadas pelo raio, respectivamente.

Discussão

Os comportamentos da pressão, potencial, massa, componentes g_{tt} e g_{rr} , descritos para a densidade (58), são muito semelhantes aos comportamentos descritos para a

⁴⁵ Fisicamente, esse modelo 2 não faz muito sentido, mas matematicamente ele faz e no contexto numérico que discutiremos em breve o que teremos são aproximações numéricas dos modelos 2 e 3 que mais se aproximam do 1.

⁴⁶ O caso de densidade constante pode ser um caso particular desse, quando $r_* \gg R$.

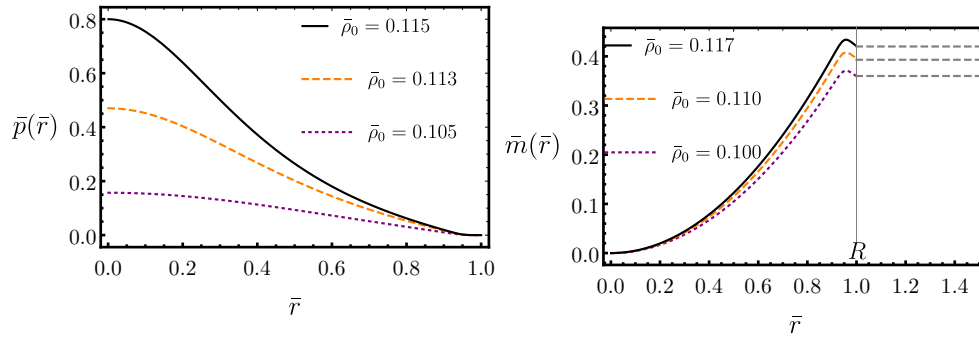
⁴⁷ Mais precisamente, ao utilizarmos a densidade (58) estaremos na verdade trabalhando o modelo (8) direita, mas que aproximadamente é o da esquerda. Enquanto para a densidade (59) estaremos trabalhando com o modelo (8) (esquerda).

⁴⁸ Ou $p(r = R) = \rho(r = R) \simeq 0$ para o caso de densidade (58).

⁴⁹ Ou $\bar{p}(\bar{r} = 1) = \bar{\rho}(\bar{r} = 1) \simeq 0$ para o caso de densidade (58).

⁵⁰ A justificativa para isso é simplesmente porque foi mais fácil integrar numericamente o perfil de densidade (59) para modelos anisotrópicos em $f(\mathcal{R})$ Palatini.

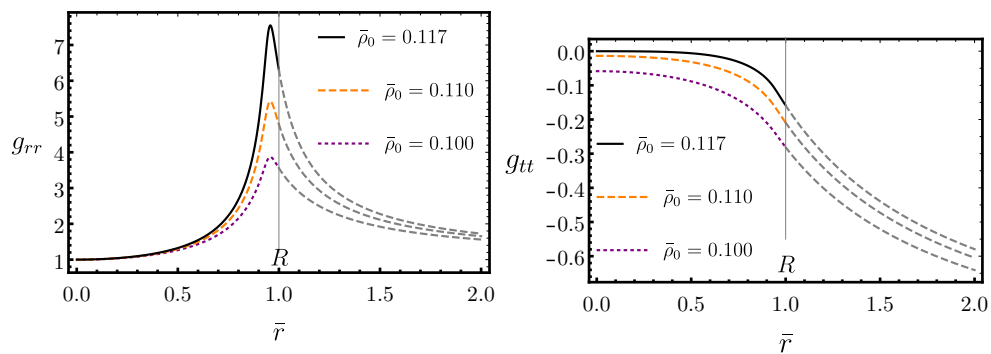
Gráfico 7 - Pressão e massa adimensionalizados em função da coordenada radial adimensionalizada na RG.



Legenda: Comportamento da pressão e da massa para vários valores de densidade com $\bar{\delta} = 0.01$ e $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

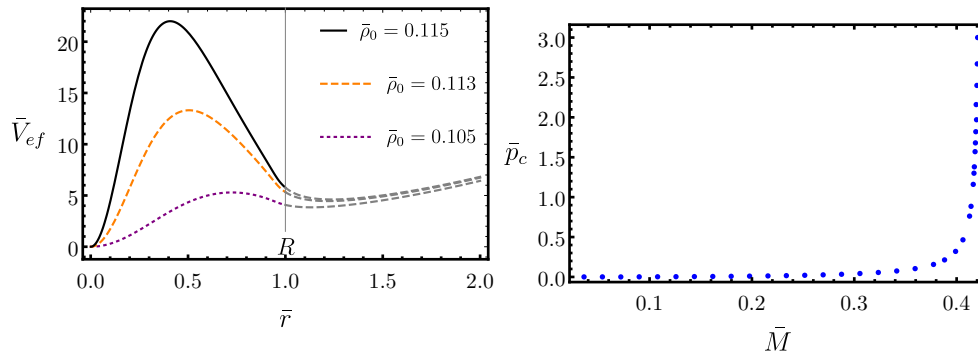
Gráfico 8 - Componentes g_{rr} e g_{tt} na RG.



Legenda: Componentes g_{rr} (esquerda) e g_{tt} (direita) da métrica em função da coordenada adimensionalizada dentro e fora da estrela para várias densidades com $\bar{\delta} = 0.01$ e $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 9 - Potencial e pressão central em função da massa na RG.



Legenda: Comportamento com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$: i) do potencial em função da coordenada radial (esquerda) para vários valores de densidade; ii) da pressão central em função da massa (direita).

Fonte: A autora, 2020.

densidade constante, equação (39), exceto pelo comportamento da componente g_{rr} (e consequentemente de $\bar{m}(\bar{r})$) perto da superfície. Assim, o fato da densidade cair suavemente próximo à superfície, substituindo a característica de função degrau na densidade dentro e fora da estrela caracterizada pela densidade constante, suaviza⁵¹ a descontinuidade da derivada presente na função g_{rr} representada no gráfico (2).

Por outro lado, modelos produzidos pela densidade (58) nos fornecem uma massa máxima (ou compacticidade máxima) que é $C_{m\acute{a}x} = \bar{M}_{m\acute{a}x} \simeq 0.420$, conforme pode ser visto no gráfico (9) (direita) onde se estabelece um valor $\bar{M}_{m\acute{a}x}$, quando a pressão central aumenta muito, mas não diverge. Além disso, ainda em comparação com o modelo de densidade constante, vimos que a massa máxima se estabelece em $\bar{M}_{m\acute{a}x} \simeq 0.44$ enquanto para a densidade que varia na superfície, (58), temos um valor de $\bar{M}_{m\acute{a}x} \simeq 0.420$. Isso se deve ao fato de que as estrelas abrigam mais conteúdo de matéria para densidade constante, (39), do que para a densidade que cai suavemente na superfície, (58).

2.4 Estrutura estelar de fluidos anisotrópicos na RG

Configurações de objetos esféricamente simétricos e estáticos constituídos de matéria anisotrópica, isto é, fluidos nos quais propriedades físicas dependem da direção, também já foram vastamente explorados na literatura sobre inúmeros aspectos. Como exemplo, podemos citar o trabalho (BOWERS; LIANG, 1974) onde se discute sobre a

⁵¹ Suaviza, pois a descontinuidade na derivada não desaparece. Ela pode ser vista claramente no gráfico da massa, (7), figura inferior, uma vez que $m(r)$ e $B(r)$ estão relacionados pela definição (37).

massa máxima e as condições de máximos para a superfície do desvio para o vermelho, enquanto no trabalho (SETIAWAN; SULAKSONO, 2019) são analisadas as condições de energia para configurações de estrelas de nêutrons. Também temos o trabalho (RAPOSO et al., 2019) onde estudam as configurações de objetos que podem ser tão compactos quanto BNs num contexto covariante e diversas outras questões como estabilidade e número de *Love*, etc.. A origem da anisotropia local em modelos estelares foi discutida em (HERRERA; SANTOS, 1997) onde afirmam que para densidades altas, ela pode ter origem em possíveis transições de fase exóticas da matéria, por exemplo, durante o colapso gravitacional; ou, para o caso de densidades mais baixas, ela pode surgir na mistura de dois gases distintos, entre outros.

Segundo (MAK; HARKO, 2003), objetos descritos por densidades não muito altas ($\rho < 10^{15} g/cm^3$) podem descrever modelos estelares mais realísticos se o conteúdo de matéria nuclear for anisotrópica. Um simples exemplo que podemos citar de sistemas em que a pressão anisotrópica ocorre naturalmente em OCs é o caso do campo escalar acoplado minimamente com a gravidade que pode dar surgimento as estrelas de bósons (RAPOSO et al., 2019). Além disso, também se sabe que a anisotropia pode influenciar de maneira significativa em certos aspectos físicos da estrela como no desvio para o vermelho, na sua estabilidade e podem fornecer objetos mais compactos⁵² que aqueles descritos por fluidos isotrópicos (MAK; HARKO, 2003; RAPOSO et al., 2019; BOWERS; LIANG, 1974). Isso significa que estrelas anisotrópicas podem exceder o limite de Buchdahl e que tal limite tem como hipótese a isotropia (RAPOSO et al., 2019).

Atualmente a anisotropia também é usada para descrever objetos exóticos como *gravastars* (CATTOEN; FABER; VISSER, 2005; DEBENEDICTIS et al., 2006; MAZUR; MOTTOLA, 2001), que são modelos esfericamente simétricos com densidade positiva e pressão central negativa. Nas *gravastars*, acredita-se que uma transição de fase possa ocorrer de maneira a gerar um núcleo repulsivo tipo de Sitter, o qual ajudaria a balancear o colapso do objeto, prevenindo assim, a formação do horizonte e da singularidade (DEBENEDICTIS et al., 2006).

Nessa tese, discutiremos configurações de objetos esfericamente simétricos descritos pela geometria (32) constituídos por fluidos de pressão anisotrópica de modo que o tensor energia-momento é dado por (MAK; HARKO, 2003; URBANO; VEERMÄE, 2019; BOWERS; LIANG, 1974)

$$T_{\mu\nu} = [p_t(r) + \rho(r)]u_\mu u_\nu + p_t(r)g_{\mu\nu} + [p_r(r) - p_t(r)]s_\mu s_\nu, \quad (60)$$

onde temos $T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p_r, p_\theta, p_\phi) = \text{diag}(-\rho, p_r, p_t, p_t)$, u_μ e s_μ são as 4-velocidades

⁵² Para modelos discutidos em (RAPOSO et al., 2019), os objetos tem como limite de compacticidade máxima valores próximo do raio de Schwarzschild.

do fluido tal que $u^\mu u_\mu = -1$, $s^\nu s_\nu = -1$. Nesse caso, a equação da continuidade se torna

$$p'_r(r) = -\frac{[\rho(r) + p_r(r)]}{2}A'(r) - [p_r(r) - p_t(r)]\frac{2}{r}, \quad (61)$$

enquanto as componentes tt e rr das equações de Einstein e a equação TOV modificada são dadas, respectivamente, por

$$m'(r) = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (62)$$

$$A'(r) = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p_r(r)}{r[r - m(r)]}, \quad (63)$$

$$p'_r(r) = -\frac{[\rho(r) + p_r(r)]}{2}A'(r) - [p_r(r) - p_t(r)]\frac{2}{r}. \quad (64)$$

Além disso, defini-se a razão adimensional

$$\Delta \equiv \frac{p_t(r) - p_r(r)}{\rho(r)}, \quad (65)$$

como parâmetro de anisotropia, que em geral é determinado pela natureza exata da interação entre as partículas da matéria que constitui a estrela (BOWERS; LIANG, 1974).

Desta forma, duas equações são necessárias para fechar o sistema de equações dadas por (62), (63) e (64), a equação de estado e outra equação para Δ . Segundo (MAK; HARKO, 2003), o termo $2(p_r - p_t)/r$, que aparece na equação (64), representa uma força que é devida à natureza anisotrópica do fluido e que será direcionada para fora da estrela⁵³ se $p_t > p_r$ e para dentro da estrela⁵⁴ se $p_t < p_r$.

As condições de fronteira para estrelas anisotrópicas, (BOWERS; LIANG, 1974), são similares àquelas do caso isotrópico, isto é, $m(r=0) = 0$ e $A'(r) = 0$. Enquanto assumiremos $p_r(r)$ finito em $r = 0$ e que $p_t - p_r$ se anule mais rápido que r para $r \rightarrow 0$, isto é, $\lim_{r \rightarrow 0} (p_t - p_r)/r = 0$, limite esse que nos permite recuperar a isotropia. Quando $p_r(r=R) = 0$ se estabelece o raio da estrela em R porém, não há necessidade de que $p_t(r)$ seja nulo em $r = R$.

2.4.0.1 Restrições para fluidos anisotrópicos

As soluções no interior da estrela, para ter sentido físico, devem satisfazer algumas condições que, segundo⁵⁵ (MAK; HARKO, 2003), são:

⁵³ São esses casos que podem gerar objetos mais compactos que aqueles utilizando fluidos isotrópicos (MAK; HARKO, 2003).

⁵⁴ Esse caso pode gerar objetos menos compactos que aqueles descritos pelo fluido perfeito.

⁵⁵ Os nomes e as condições de energia também podem ser consultadas em (CURIEL, 2017).

- Dentro da estrela temos que ter $\rho \geq 0$, $p_r \in [-\rho(r), +\rho(r)]$ e $p_t \in [-\rho(r), +\rho(r)]$;
- Os gradientes $d\rho/dr$ e dp_r/dr devem ser negativos;
- Dentro de uma configuração estática a velocidade do som deve ser menor que a velocidade da luz, isto é, $0 \leq dp_r/d\rho \leq 1$ e $0 \leq dp_t/d\rho \leq 1$;
- Condição de energia forte: $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$, $\rho + p_r \geq 0$ e $\rho + p_t \geq 0$;
- A métrica interior deve se juntar continuamente com a métrica exterior de Schwarzschild na superfície da estrela;
- A pressão radial p_r e tangencial p_t devem ser iguais no centro da estrela, isto é, $p_r(r=0) = p_t(r=0) = p_c$.

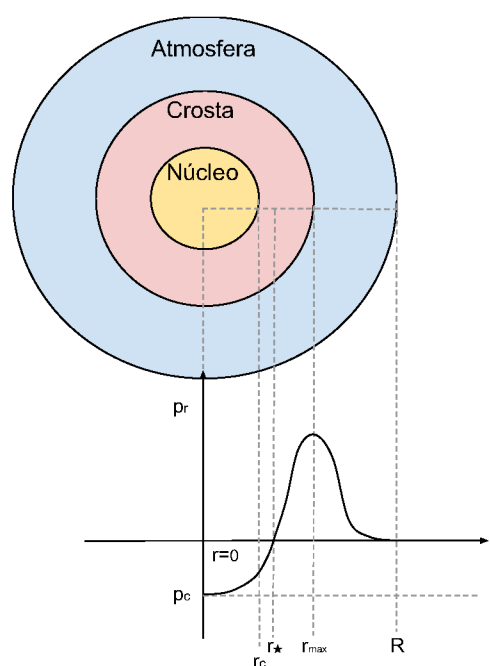
2.4.0.2 Restrições para fluidos anisotrópicos exóticos

Como já mencionado, matéria constituída por fluidos anisotrópicos também pode descrever OEs como *gravastars*. Na figura (9) temos um esquema típico de *gravastar*, onde a região $r \in (0, r_c)$ é o núcleo e a física é qualitativamente (não necessariamente quantitativamente) similar ao espaço de de Sitter; e a aceleração da gravidade local é para fora. Enquanto a região $r \in (r_c, r_{m\acute{a}x})$ é a crosta onde a aceleração local devido a gravidade é para dentro. Por fim, a região $r \in (r_{m\acute{a}x}, R)$ é a atmosfera onde a aceleração local devido a gravidade é para dentro (CATTOEN; FABER; VISSER, 2005).

No caso das *gravastars* é importante estabelecer os seguintes critérios para seu estudo, segundo (CATTOEN; FABER; VISSER, 2005),

- Dentro da *gravastar*, $r < R$, a densidade é sempre positiva e finita.
- A pressão central (em $r = 0$) é negativa tal que $\rho = -p_r = -p_t = p_c$.
- Assumi-se que o espaço-tempo não possua um horizonte de eventos. Isso implica que para qualquer r teremos $2m(r) < r$.
- Para manter o centro do espaço-tempo regular, impomos $p'_r(r=0) = 0$.
- A pressão máxima deve se dar próximo do raio de Schwarzschild, R_S , isto é, $r_{m\acute{a}x} \approx R_S$, satisfazendo $p_r(r_{m\acute{a}x}) > 0$ e $p'_r(r_{m\acute{a}x}) = 0$.
- Existem dois raios onde a pressão radial é nula:
 - O primeiro zero da pressão é em $r = r_\star$ tal que $p_r(r = r_\star) = 0$, tendo $p'_r(r_\star) > 0$, enquanto

Figura 9 - Modelo simplificado de uma *gravastar*.



Legenda: Caracterizando as regiões de uma *gravastar* segundo sua pressão radial.

Fonte: CATTOEN; FABER; VISSER, 2005, p. 4. Adaptada pela autora.

- o segundo zero da pressão é em R tal que $p_r(r = R) = 0$, tendo $p'_r(R) \leq 0$. O ponto R , (que por construção deve satisfazer $R > r_{máx} > r_*$), é chamado de superfície da *gravastar*.
- A pressão radial deve ser contínua. Em contrapartida, às vezes é útil p_t possa ser descontínua.
- A condição de energia forte, isto é, $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$, é definitivamente violada, a menos no centro da *gravastar*.
- Escolhe-se impor a condição de energia nula, isto é, $\rho + p_i \geq 0$ na *gravastar*.
- Não é imposto a condição de energia dominante, isto é, $\rho \geq 0$ e $|p_i \leq \rho|$. De fato, tal condição pode falhar em partes da *gravastar* que são suficientemente “fechadas” para formar horizonte.

Para concluir, é interessante dizer que modelos de *gravastars* não podem ser descritos por um fluido perfeito conforme discutido em (CATTOEN; FABER; VISSER, 2005), pois o objeto formado por um fluido perfeito não obedecerá as condições acima. Em outras palavras, sua pressão (isotrópica) não terá o mesmo comportamento descrito pela figura (9).

2.5 Objetos anisotrópicos na RG: um exemplo

Dedicaremos essa seção para discutir um modelo de objeto anisotrópico com $p_c > 0$. Assim, trabalharemos com densidade e parâmetro de anisotropia descritos, respectivamente, pelas equações⁵⁶ (59) e⁵⁷

$$\Delta = \frac{\sigma r^2}{\sqrt{r^2 + r_k^2}}, \quad (66)$$

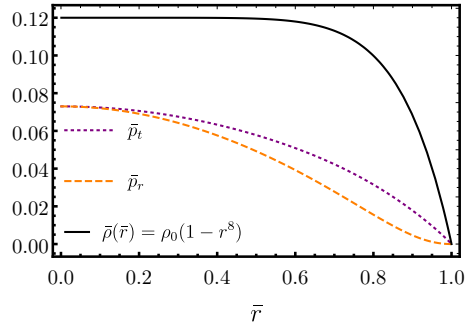
onde σ é uma constante que mede a intensidade relativa da anisotropia e r_k outra constante. Para $\sigma = 0$ recuperamos a isotropia. A motivação para estas escolhas é simplesmente por ser matematicamente mais simples⁵⁸, e que respeitam os critérios de anisotropia, como $(p_t - p_r)/r \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$.

⁵⁶ Não discutiremos densidade constante para esse caso, pois não é interessante para o propósito dessa tese, porém a solução para pressão anisotrópica com densidade constante pode ser encontrada em (DEV; GLEISER, 2002; BOWERS; LIANG, 1974; RAPOSO et al., 2019; MAK; HARKO, 2003).

⁵⁷ Modelos similares ao Δ , equação (66), foram utilizados em (MAK; HARKO, 2003).

⁵⁸ Uma forma covariante para o Δ foi discutida em (RAPOSO et al., 2019).

Gráfico 10 - Perfil de densidade,
pressão radial e
tangencial na RG.



Legenda: Comportamento da
densidade (curva preta),
pressão radial (curva
laranja) e tangencial
(curva roxa) em função
da coordenada radial
para $\bar{\sigma} = 1$, $\bar{r}_* = 1$, $\bar{r}_k = 1$
e $\bar{\rho}_0 = 0.117$.

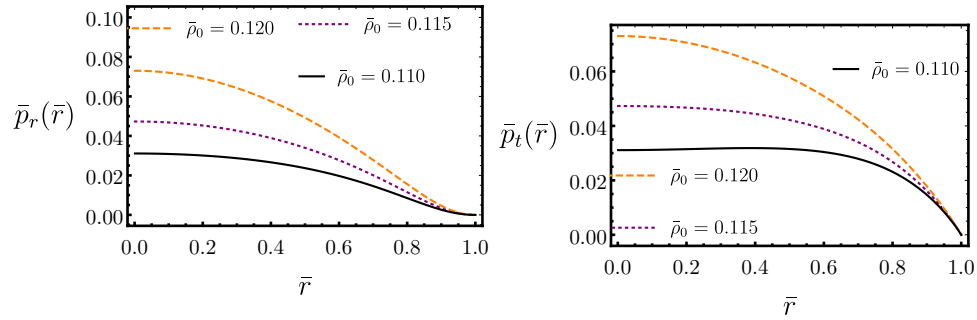
Fonte: A autora, 2020.

Desta forma, integrando numericamente as equações (62), (63) e (64), temos que os gráficos correspondentes as pressões radial e tangencial, massa e potencial efetivo, adimensionalizados pelo raio são dados pelos gráficos (10) - (16).

Discussão

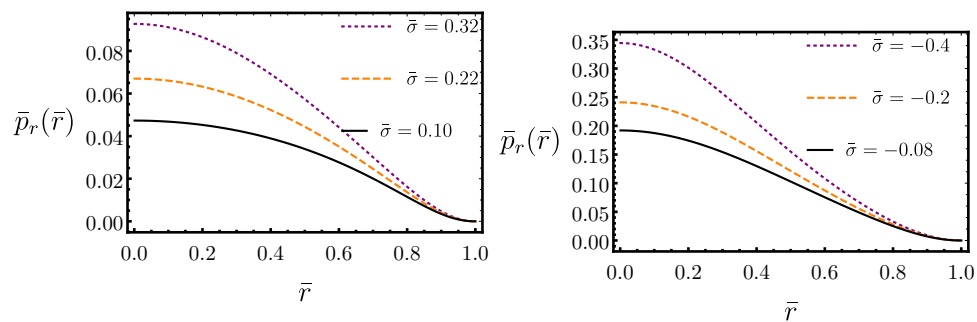
O comportamento das componentes g_{tt} e g_{rr} da métrica para o caso anisotrópico é similar ao caso isotrópico, por isso não estão representados graficamente aqui. Porém, o comportamento de $m(r)$ (que está relacionada com o $B(r)$) em função da coordenada radial é representada nos gráficos (13) (esquerda) e (15) para $\bar{\rho}_0$ fixo e $\bar{\sigma}$ fixo. Da mesma forma, os potenciais (que estão relacionados com o $A(r)$), estão representados nos gráficos (13) (direita) e (16).

Os gráficos que representam o comportamento da pressão radial, (11) (esquerda) e (12) (esquerda), pressão tangencial (11) (direita) e (12) (direita), e potencial (13) (direita) e (16) para $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\sigma}$ fixos são também similares aos casos isotrópicos. O fato de termos um parâmetro extra, σ , com relação ao fluido de pressão isotrópica, nos possibilita gerar mais configurações de regiões de aprisionamento de partículas sem massa como podemos ver

Gráfico 11 - Pressão radial e tangencial para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.

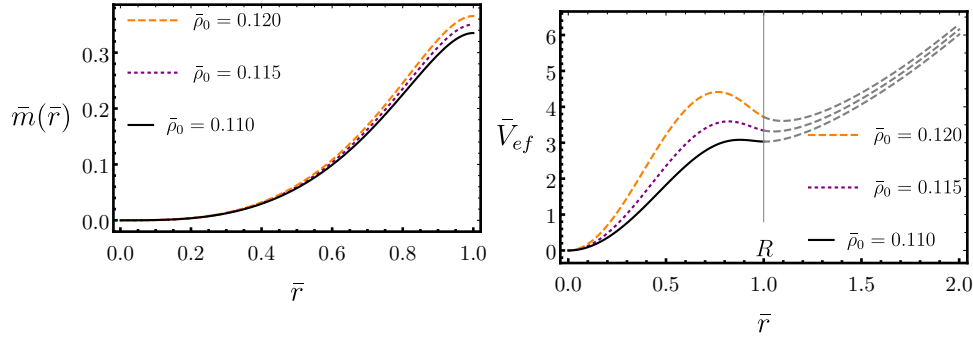
Legenda: Comportamento da pressão radial (esquerda) e tangencial (direita) em função da coordenada radial para vários valores de densidade com $\bar{r}_* = 1$, $\bar{r}_k = 1$ e $\bar{\sigma} = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 12 - Pressão radial para $\bar{\sigma}$ fixo na RG.

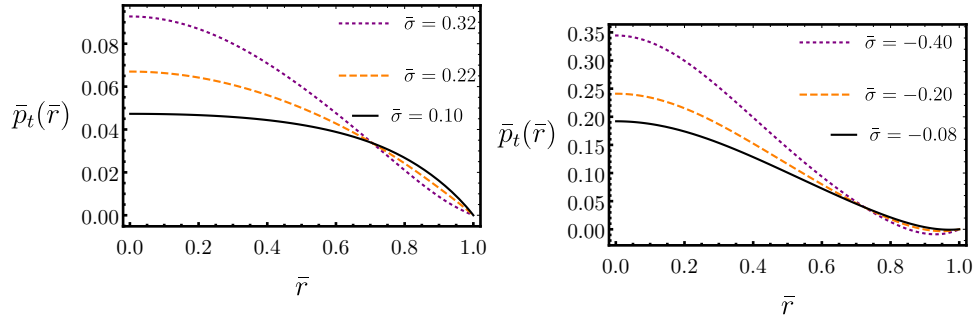
Legenda: Comportamento da pressão radial (esquerda) e tangencial (direita) em função da coordenada radial para vários valores de $\bar{\sigma}$ densidade $\bar{\rho}_0 = 0.12$, $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 13 - Massa e potencial para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.

Legenda: Comportamento da massa (esquerda) e potencial (direita) efetivo em função da coordenada radial para vários valores de densidade com $\bar{r}_* = 1$, $\bar{r}_k = 1$ e $\bar{\sigma} = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 14 - Pressão tangencial para $\bar{\sigma}$ fixo na RG.

Legenda: Comportamento da pressão tangencial em função da coordenada radial para vários valores de $\bar{\sigma}$ e densidade $\bar{\rho}_0 = 0.12$, $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

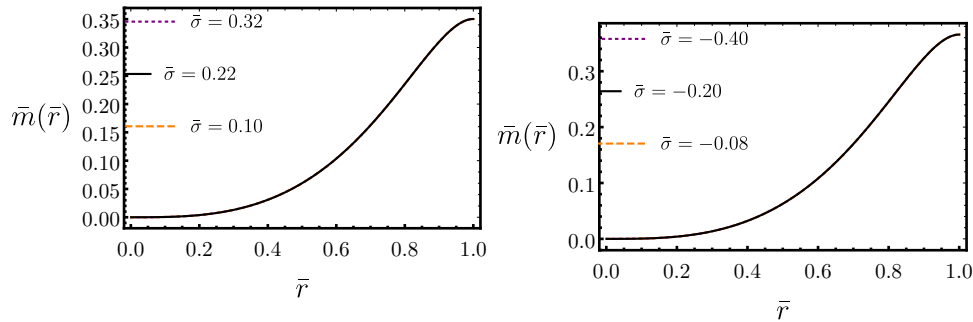
nos gráficos dos potenciais.

Vemos nos gráficos de (11) que as pressões radial e tangencial aumentam conforme a densidade aumenta o que faz sentido, pois conforme a densidade aumenta o objeto se torna cada vez mais compacto. Além disso, nesse mesmo gráfico, (11), vemos que a pressão tangencial e radial possuem comportamentos muito semelhantes, isso porque na relação,

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{p}_t - \bar{p}_r}{\bar{\rho}(\bar{r})} = \frac{\bar{\sigma}\bar{r}^2}{\sqrt{\bar{r}^2 + 1}} \implies \bar{p}_t = \bar{p}_r + \bar{\rho}(\bar{r}) \frac{\bar{\sigma}\bar{r}^2}{\sqrt{\bar{r}^2 + 1}}, \quad (67)$$

ao fixamos $\bar{\sigma}$ e $\bar{\rho}_0$, o termo resultante da adição na pressão radial em (67) é pequeno. Em particular, conforme podemos ver no gráfico (10) essa escolha de $\bar{\Delta}$ faz com que a pressão central (radial e tangencial) coincidam. Isso se deve ao fato de que quando

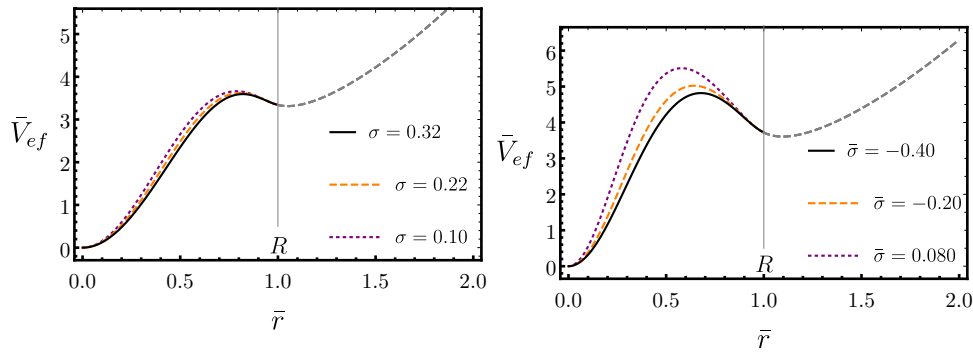
Gráfico 15 - Comportamento da massa em função da coordenada radial na RG.



Legenda: Comportamento da massa em função da coordenada radial para vários valores de $\bar{\sigma}$ e densidade $\bar{\rho}_0 = 0.12$, $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 16 - Comportamento do potencial efetivo na RG.

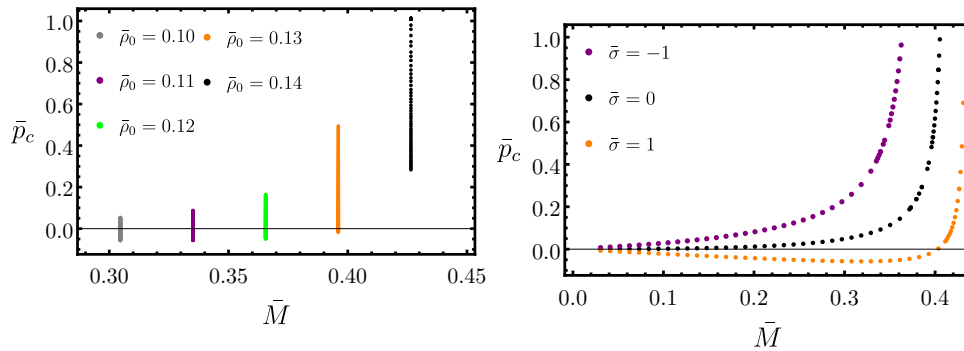


Legenda: Comportamento do potencial efetivo em função da coordenada radial para vários valores de $\bar{\sigma}$ e densidade $\bar{\rho}_0 = 0.12$, $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

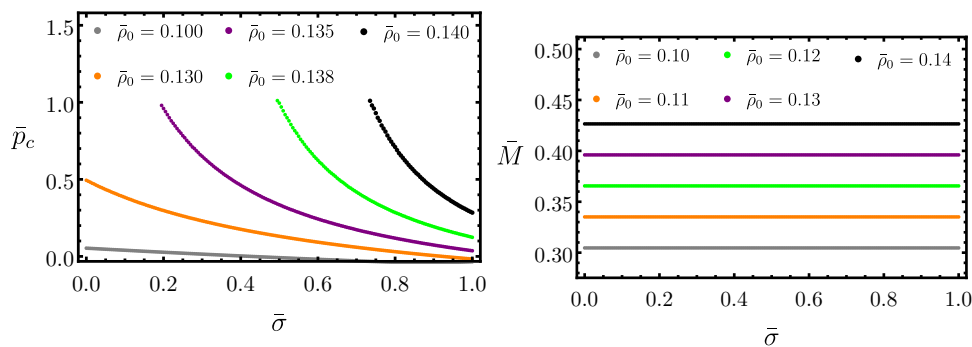
$\bar{r} \rightarrow 0$ teremos que $\bar{\rho}(\bar{r}) \rightarrow \bar{\rho}_0$, conforme vemos na equação (59), e $\bar{\sigma}\bar{r}^2/\sqrt{\bar{r}^2+1} \rightarrow 0$, logo a pressão central radial, \bar{p}_c^r , e a pressão central tangencial, \bar{p}_c^t , serão iguais, $\bar{p}_c^r = \bar{p}_c^t = \bar{p}_c$. Por outro lado, o fato de estarmos trabalhando especificamente com $\bar{p}(\bar{r} = 1) = 0$ as curvas da \bar{p}_r e \bar{p}_t também coincidiram nesse ponto. Isto é, quando $\bar{r} \rightarrow 1$ teremos que $\bar{\rho}(\bar{r}) \rightarrow 0$, logo, $\bar{p}_r(\bar{r}) = \bar{p}_t(\bar{r})$ em $\bar{r} = 1$.

Uma vez que $\bar{m}(\bar{r})$ não depende de $\bar{\sigma}$, teremos que a massa será sempre a mesma, conforme podemos ver nos gráfico (15) e (18) (direita), ao fixarmos $\bar{\rho}_0$ e variar $\bar{\sigma}$. Além disso, vemos que o potencial efetivo varia conforme $\bar{\sigma}$ varia. No caso de $\bar{\sigma} > 0$, temos que o máximo do potencial aumenta conforme $\bar{\sigma}$ diminui. Isso se deve ao fato de a pressão central diminuir conforme $\bar{\sigma}$ aumenta, como visto no gráfico (18) (esquerda). No caso de $\bar{\sigma} < 0$ temos que o máximo do potencial aumenta conforme $\bar{\sigma}$ diminui em módulo, conforme visto em (16) (direita). Isso se deve ao fato da pressão central diminuir conforme $\bar{\sigma}$ aumenta, como visto em (19) (esquerda).

Gráfico 17 - Pressão central em função da massa para $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\sigma}$ fixo na RG.

Legenda: Comportamento da pressão central em função da massa para $\bar{\rho}_0$ fixo com $-1 < \bar{\sigma} < 1$ (esquerda) e para $\bar{\sigma}$ fixo com $0.010 < \bar{\rho}_0 < 0.135$ (direita) com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

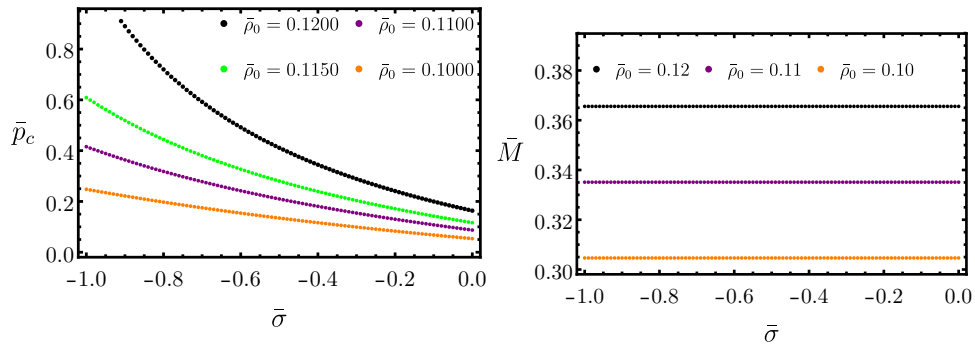
Gráfico 18 - Pressão central e massa em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.

Legenda: Comportamento da pressão central (esquerda) e massa (direita) para $\bar{\rho}_0$ fixo e com $\bar{\sigma} > 0$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Quanto a comparação entre os casos isotrópicos e anisotrópicos, no gráfico (17) (direita) vemos que teremos objetos mais compactos para os casos com $\bar{\sigma} > 0$ do que para o caso isotrópico ($\bar{\sigma} = 0$). Enquanto para $\bar{\sigma} < 0$, teremos objetos menos compactos que o caso isotrópico. Além disso, vemos que a \bar{p}_c pode alcançar valores negativos e positivos tanto para densidades baixas quanto para densidades relativamente altas. No caso de densidade alta haverá casos onde a pressão central é somente positiva, como visto do gráfico (17) (esquerda).

As configurações de parâmetros $(\bar{\rho}_0, \bar{\sigma})$ que nos fornecem pressões centrais positivas podem fisicamente se comportarem como estrelas de fluidos anisotrópicos enquanto para configurações em que as pressões centrais são negativas, podemos ter objetos exóticos como *gravastars*, que discutiremos a seguir.

Gráfico 19 - Pressão central e massa em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\rho}_0$ fixo na RG.

Legenda: Comportamento da pressão central (esquerda) e massa (direita) em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\rho}_0$ fixo com $\bar{\sigma} < 0$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

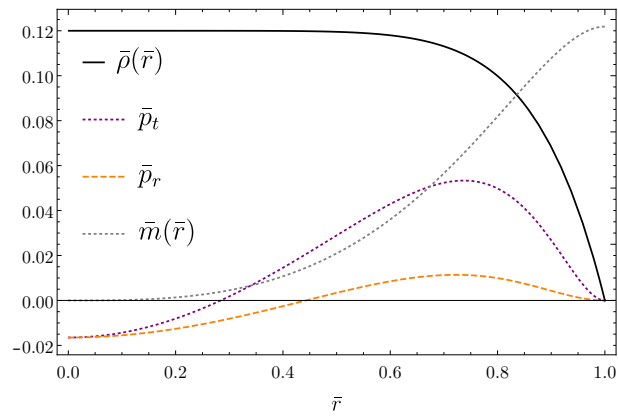
Fonte: A autora, 2020.

2.6 Objetos anisotrópicos exóticos na RG: um exemplo

Como uma extensão natural de objetos anisotrópicos, analisaremos também o caso em que a pressão central satisfaz $p_c < 0$, também descritos pela densidade (59) e pelo parâmetro de anisotropia dado pela equação (66). Tais características podem representar modelos exóticos como *gravastars*.

Discussão

Como podemos ver no gráfico (17) (direita), só haverá objetos exóticos para valores de $\bar{\sigma} > 0$. As condições discutidas em (2.4.0.2) são satisfeitas para esse modelo, podemos ver isso no gráfico (20), sem muita dificuldade. Isso implica que essencialmente a pressão radial e densidade de energia satisfazem as condições de energia assumidas serem válidas para soluções de *gravastars*.

Gráfico 20 - *Gravastar* na RG.

Legenda: Comportamento da massa ($\bar{m}(\bar{r})/3$),
 densidade, pressão radial e tangencial
 para $\bar{\rho}_0 = 0.12$, $\bar{p}_c = -0.0165$, $\bar{\sigma} = 1$,
 $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

3 OBJETOS COMPACTOS, ULTRACOMPACTOS E EXÓTICOS EM TEORIAS $f(\mathcal{R})$ PALATINI

Observação: os gráficos desse capítulo saíram com a representação do raio da estrela diferente do capítulo anterior, mas representam os mesmos raios, isso é, $R = \bar{R}$.

3.1 Preliminares

Teorias alternativas da gravitação tipicamente possuem uma estrutura estelar própria que diferem daquelas conhecidas da RG devido ao fato de possuírem equações de campo diferentes. A principal consequência dessa diferença é a de gerar modificações na equação TOV, ou seja, na equação de equilíbrio hidrostático. Consequentemente, isso pode trazer impactos sobre os estudos advindos da análise da estrutura estelar como na física de objetos em condições extremas, na relação massa-raio, massa máxima, ECOS gravitacionais, número de *Love*, luminosidade, entre outros (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019b). Tais fatos nos abre uma nova janela que nos possibilita investigar possíveis restrições nas teorias de gravitação alternativas a RG por meio de observações presentes e futuras de diferentes tipos de estrelas (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019b).

A área de estrutura estelar em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini teve poucos avanços no passado porém, recentemente tem crescido bastante o interesse nesse campo de pesquisa. Uns dos principais motivos é a nossa atual capacidade de testar e restringir teorias na descrição de objetos em condições gravitacionais extremas por meio dos detetores de ondas gravitacionais e dos novos e sofisticados telescópios como o *Horizon Event Telescope*⁵⁹. Assim, no âmbito das teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, podemos citar os recentes trabalhos de (REIJONEN, 2009), onde se estuda estrutura estelar de objetos compactos utilizando uma equação de estado de um gás de Fermi e o artigo (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2011) onde se analisa configurações de BNs carregados eletricamente. Há ainda (SHARIF; YOUSAF, 2014), onde se discute a dinâmica de instabilidade de um colapso não-adiabático e anisotrópico num sistema esférico auto-gravitante. No trabalho (PANNIA et al., 2017) foram estudados configurações de estrelas de nêutrons utilizando uma equação de estado realística. E, mais recentemente ainda, temos o trabalho (WOJNAR, 2019) onde se estuda estrelas politrópicas por meio da utilização da equação modificada de Lane-Emden e (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019a) onde se analisa as condições de limite

⁵⁹ Mais informações em <https://eventhorizontelescope.org/>.

mínimo da massa necessária para que o hidrogênio contido no interior de anãs marrons queime⁶⁰. Tal o fenômeno é conhecido como sequência de massa mínima (MMSM⁶¹). O trabalho (WOJNAR, 2020) discute estabilidade de estrelas politrópicas. A revisão, (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019b), sobre a estrutura estelar analisadas para várias teorias gravitacionais inclusive $f(\mathcal{R})$ Palatini. Um relevante trabalho em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini sobre condições de junções (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2020), também foi endereçado esse ano para publicação, entre outros.

Assim, o objetivo deste capítulo, e desta tese em geral, é entendermos como objetos estelares, com o foco nos compactos, ultracompactos e exóticos são descritos por uma $f(\mathcal{R})$ em particular no formalismo de Palatini e suas principais diferenças com relação aos resultados fornecidos pela RG. Desta forma, investigaremos se tais teorias $f(\mathcal{R})$ são capazes de gerar objetos mais ou menos compactos do que aqueles produzidos pela RG, para uma mesma densidade, e se é possível exceder o limite de Buchdahl da RG. Para tal propósito, analisaremos OCs e OUCs construídos por fluidos⁶² isotrópicos e anisotrópicos onde, neste último, também se discute OEs como *gravastars*. Nesse contexto, analisamos os comportamentos da geometria dentro da estrela, da pressão isotrópica e anisotrópica, da compacticidade máxima permitida por estes modelos e quanto tais resultados se aproximam ou se afastam dos da RG. Também estudamos a relação entre pressão central e massa bem como seu comportamento com os outros parâmetros provenientes da $f(\mathcal{R})$ utilizada. Apesar de trabalharmos com modelos idealizados, eles são um importante passo na direção do entendimento de situações que estão no campo realístico. Todos os estudos desenvolvido aqui são peças fundamentais para explorar a física de objetos sem horizontes de eventos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, como ECOS gravitacionais, números de *Love*, desvio para o vermelho, estabilidade, entre outros.

⁶⁰ Nesse trabalho, eles utilizam uma $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini para “mostrar que a correspondente equação de equilíbrio hidrostático contém um novo termo cujo efeito é introduzir um enfraquecimento/fortalecimento da interação gravitacional dentro dos corpos astrofísicos” (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019a).

⁶¹ Do inglês “*minimum main sequence mass*”.

⁶² Mais especificamente com fluidos com pressão isotrópica ou anisotrópica.

3.2 Estrutura estelar em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini

As equações de campo (12) para um fluido perfeito (33) e geometria (32) fornecem componentes tt e rr dadas por, (REIJONEN, 2009),

$$A'(r) = -\frac{1}{1+\gamma} \left[\frac{1-e^{B(r)}}{r} - \frac{e^{B(r)}}{f_R} 8\pi p(r) + \frac{\alpha}{r} \right], \quad (68)$$

$$B'(r) = \frac{1}{1+\gamma} \left[\frac{1-e^{B(r)}}{r} + \frac{e^{B(r)}}{f_R} 8\pi r \rho(r) + \frac{\alpha+\beta}{r} \right], \quad (69)$$

onde

$$\alpha \equiv \alpha(r) \equiv r^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{f'_R}{f_R} \right)^2 + \frac{2f'_R}{rf_R} + \frac{e^{B(r)}}{2} \left(\mathcal{R} - \frac{f}{f_R} \right) \right], \quad (70)$$

$$\beta \equiv \beta(r) \equiv r^2 \left[\frac{f''_R}{f_R} - \frac{3}{2} \left(\frac{f'_R}{f_R} \right)^2 \right], \quad (71)$$

$$\gamma \equiv \gamma(r) \equiv \frac{rf'_R}{2f_R}, \quad (72)$$

enquanto “linha” corresponde a derivada com relação a r , isto é, $f'(\mathcal{R}) \equiv df(\mathcal{R})/dr$ e $f''(\mathcal{R}) \equiv d^2f(\mathcal{R})/dr^2$, e α, β, γ são quantidade adimensionais.

Note que $f(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R}(p, \rho))$ logo, $f'(\mathcal{R})$ e $f''(\mathcal{R})$, na sua forma geral, contêm informações da derivada primeira e segunda de p e ρ . Para fechar o sistema equações dado por (68), (69) e (34) basta uma equação de estado, e com isso será possível determinar a densidade $\rho(r)$, pressão $p(r)$, $A(r)$, $B(r)$ e conseqüentemente a massa. Nesse caso, no trabalho (REIJONEN, 2009), contém uma simplificação das equações de campo, utilizando uma equação de estado de forma implícita. Ao trabalharmos com perfis de densidade específicos, sem que estejam vinculados a uma equação de estado, podemos seguir os passos do que foi feito em (REIJONEN, 2009) e eliminar a dependência da derivada segunda de p em β , equação (71), da seguinte forma: i) podemos substituir $A'(r)$, equação (68), na equação da continuidade (34), desta forma eliminamos a dependência de $A'(r)$ da equação (34) e teremos uma versão modificada da equação TOV; ii) derivamos a equação resultante da operação realizada em (i), equação TOV modificada, com isso teremos uma equação para a derivada segunda da pressão que depende de outras funções e da derivada primeira de funções; iii) substituímos a derivada segunda da pressão proveniente da operação (ii) na equação para β , equação (71). Com isso teremos um sistema de equações de primeira ordem na derivada somente, exceto pela presença da derivada segunda da densidade $\rho(r)$ que deverá ser dada de partida, como faremos em breve.

Uma outra forma de escrever as equações (68) e (69) pode ser dado por (OLMO;

RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019b)

$$p'(r) = -\frac{1}{1+\gamma} \frac{[p(r)+\rho(r)]}{r[r-2m(r)]} \left\{ m(r) + \frac{4\pi r^3 p(r)}{f_{\mathcal{R}}} - \frac{\alpha}{2}[r-2m(r)] \right\}, \quad (73)$$

$$m'(r) = \frac{1}{1+\gamma} \left[\frac{4\pi r^2 \rho(r)}{f_{\mathcal{R}}} + \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{m(r)}{r}(\alpha+\beta-\gamma) \right], \quad (74)$$

onde $2m(r) \equiv r[1 - \exp^{-B(r)}]$. Tais equações são a versão da equação TOV para $f(\mathcal{R})$ Palatini. Além disso, uma vez que no vácuo a equação (16) nos diz que haverá um termo de constante cosmológica dependendo da escolha da $f(\mathcal{R})$, o parâmetro de massa M para $r \geq R$ é dado, em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, como (OLMO; RUBIERA-GARCIA; WOJNAR, 2019b; KAINULAINEN; REIJONEN; SUNHEDE, 2007)

$$M = m(R) - \frac{\mathcal{R}_* R^3}{6}, \quad (75)$$

onde R é o raio da estrela definido de tal forma que a pressão, $p(r)$, se anula, isto é, $p(r=R)=0$, e \mathcal{R}_* é a solução da equação (4) no vácuo.

O fato da massa gravitacional, $m(r)$, ter uma relação com densidade, $\rho(r)$, e pressão, $p(r)$, e de suas derivadas de primeira e segunda ordem, conforme podemos ver na equação (74), diferentemente da RG, implicará que $\rho(r)$ e $p(r)$ devem ter derivadas suaves até segunda ordem.

Nos trabalhos (BARAUSSE; SOTIRIOU; MILLER, 2008b; BARAUSSE; SOTIRIOU; MILLER, 2008a) foi discutido que teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini podem apresentar problemas na superfície de objetos esfericamente simétricos e estáticos ao se utilizar uma equação de estado politrópica para os índices politrópicos entre $3/2 < \Gamma_p < 2$, para qualquer $f(\mathcal{R})$. Nesses trabalhos, discute-se que para esse intervalo do índice politrópico, escalares de curvatura irão divergir e conseqüentemente irão induzir forças de maré infinitas na superfície da estrela. Entretanto, foi mostrado recentemente no trabalho (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2020), onde se discute condições de junções em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, que ao se utilizar as condições de junção apropriadas, que são diferentes das utilizadas em RG e em teorias $f(\mathcal{R})$ métrica, o intervalo do índice politrópico que gera problemas na teoria é deslocado para além do domínio de relevância de aplicações físicas. Assim, a “junção suave entre a solução de Schwarzschild e a solução interna para um fluido politrópico em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini é possível para qualquer índice politrópico tal que $\Gamma_p < 2$ quando um tratamento distributivo adequado na junção da superfície é considerado” (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2020).

Por fim, as condições de fronteira para $A(r)$, $B(r)$ (ou $m(r)$) e $p(r)$ em $f(\mathcal{R})$ Palatini, são as mesmas usadas na RG.

3.3 Objetos isotrópicos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini: um exemplo

Teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini não suportam o modelo de densidade constante devido ao fato de carregarem informações de derivada primeira e segunda do traço do tensor energia-momento o que conseqüentemente acarreta em derivadas primeira e segunda na densidade e na pressão em suas equações de campo. Assim, como a densidade (39) é uma função degrau, sua derivada segunda seria a derivada da delta de Dirac, que não está definida no espaço de funções. Por conta disso, não discutiremos o modelo (39) e trabalharemos apenas com modelos descrito pela densidade (58) e (59). Estes dois últimos modelos, por possuírem um comportamento onde a densidade é quase constante dentro da estrela e decaem na “atmosfera” da mesma, suavizam a descontinuidade da densidade.

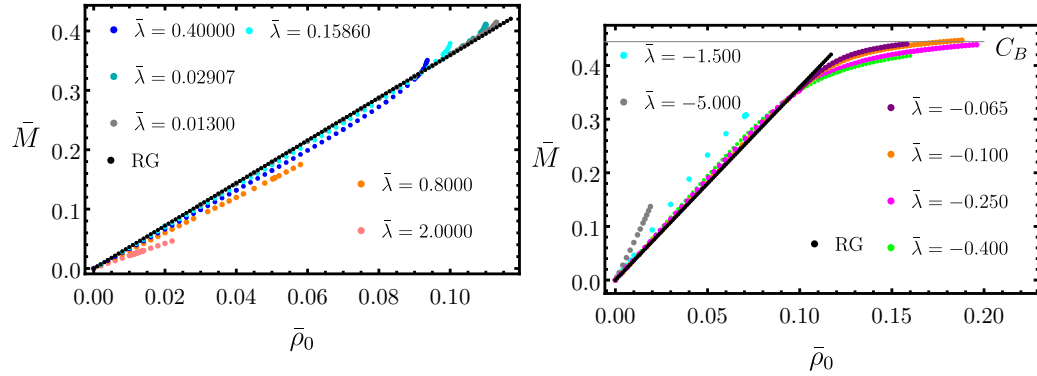
Além disso, vamos nos concentrar somente em teorias descritas por $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$. Tal modelo tem sido bastante explorado e possui resultados interessantes como no contexto de BNs carregados (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2015) e soluções não-singulares de BNs em (BAMBI et al., 2016; BEJARANO; OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2017). Foram utilizadas no estudo de soluções de buracos de minhoca (BAMBI et al., 2016) e na estrutura estelar de estrelas de nêutron (PANNIA et al., 2017). Também foram consideradas no estudo de estrelas politrópicas (WOJNAR, 2019), entre outros⁶³. Nesse caso, a equação (4) nos fornece uma constante cosmológica nula, uma vez que $f_{\mathcal{R}_*}\mathcal{R}_* - 2f(\mathcal{R}_*) = 0 \implies \mathcal{R}_* = 0$. Além disso, a equação (4) também nos informa que é possível escrever $f(\mathcal{R})$ como $f(T) = -T + \lambda T^2$, pois $\mathcal{R} = -T$, onde o T é o traço do tensor energia-momento do fluido perfeito, (33), isto é, $T \equiv T(r) = 3p(r) - \rho(r)$.

Desta forma, ao integrarmos numericamente as equações (68), (69) e (34) para a densidade (58) teremos os resultados, adimensionalizados pelo raio, representados nos gráficos (21)-(35).

Discussão

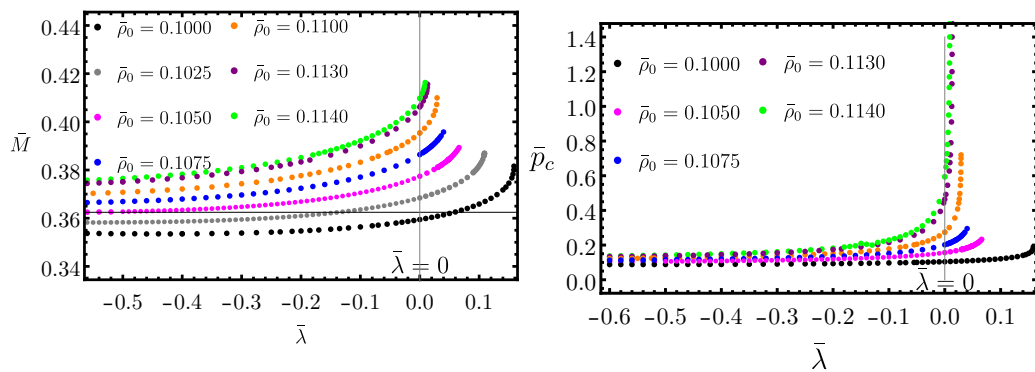
Nos gráficos (21) e (22) (esquerda), podemos observar que a massa, \bar{M} , (ou compacticidade) em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini, será uma função que depende da densidade, $\bar{\rho}_0$, e de $\bar{\lambda}$, ou seja, $\bar{M} = \bar{M}(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$. Por conta disso, poderemos ter massas maiores, menores ou

⁶³ No contexto da cosmologia, existem muitos outros trabalhos onde a $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini é utilizada. Entre eles temos, os estudos cosmológicos de ricochete (OLMO; SANCHIS-ALEPUZ; TRIPATHI, 2009), limites impostos por *redshift drift* foram apresentados em (PANNIA; BERGLIAFFA; MANSKE, 2019), a seqüência de eras cosmológicas usando análise do espaço de fase foi considerada em (FAY; TAVAKOL; TSUJIKAWA, 2007) e inflação foi discutida em (ENCKELL et al., 2019).

Gráfico 21 - Massa em função da densidade para $\bar{\lambda}$ fixo.

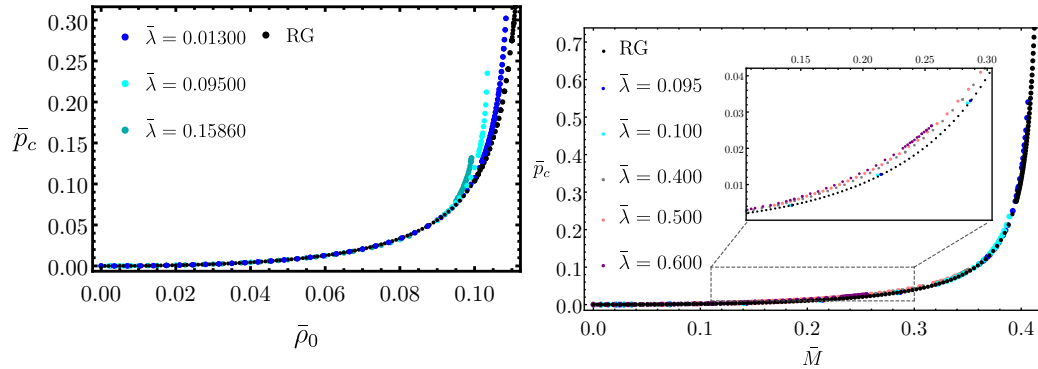
Legenda: Comportamento da massa \bar{M} em função de $\bar{\rho}_0$ para $\bar{\lambda} > 0$ (esquerda) e $\bar{\lambda} < 0$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 22 - Massa e pressão central em função $\bar{\lambda}$ para densidade fixa.

Legenda: Comportamento da massa \bar{M} e da pressão central \bar{p}_c em função de $\bar{\lambda}$ para $\bar{\rho}_0$ fixo com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 23 - Pressão central em função de $\bar{\rho}_0$ para $\bar{\lambda}$ fixo.

Legenda: Comportamento da \bar{p}_c em função de $\bar{\rho}_0$ para $\bar{\lambda} > 0$ e \bar{p}_c em função de \bar{M} para $\bar{\lambda} < 0$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

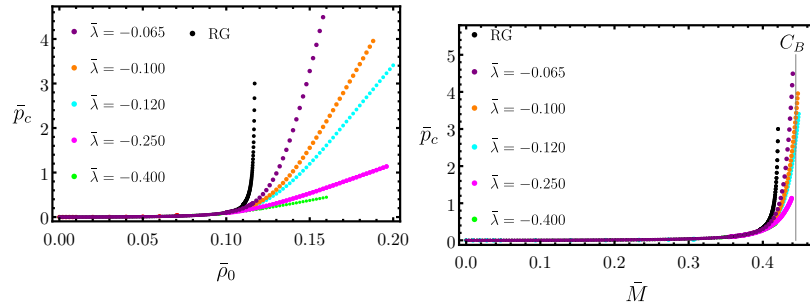
Fonte: A autora, 2020.

iguais as da RG ao variarmos o $\bar{\lambda}$ para a mesma densidade, ρ_0 . Além disso, foi observado⁶⁴ que para cada um desses pares, $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$, teremos um intervalo de existência para $\bar{\lambda}$ tal que $\bar{\lambda}_{min} < \bar{\lambda} < \bar{\lambda}_{máx}$ e um intervalo para $\bar{\rho}_0$ tal que $\bar{\rho}_{0min} < \bar{\rho}_0 < \bar{\rho}_{0máx}$ o que implicará em $\bar{M}_{min} < \bar{M} < \bar{M}_{máx}$. A pressão central, \bar{p}_c , também vai depender da densidade, $\bar{\rho}_0$, e de $\bar{\lambda}$, ou seja, $\bar{p}_c(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$, como é possível visualizar nos gráficos (22) (direita) e (23) (esquerda). Além disso, a RG e as teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ possuem combinações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$, sendo $\bar{\lambda} = 0$ para a RG, onde a massa e a pressão central coincidem em ambas as teorias. Também temos os casos dentro das teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ em que a pressão central e massa coincidem para $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\lambda} < 0$.

No caso $\bar{\lambda} > 0$, para obtermos uma massa grande temos então, que aumentar a densidade e diminuir o $\bar{\lambda}$ até chegar num ponto em que $\bar{\lambda}$ tende a zero e consequentemente a massa resultante será bem próxima da massa dada pela RG. Em números, temos que a massa máxima (ou compacticidade máxima) na RG com densidade (58) será $C_{max} = \bar{M}_{máx} \approx 0.420$ enquanto a massa limite de $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ será $C_{max} = \bar{M}_{máx} \approx 0.417$. Isso significa que a $f(\mathcal{R})$ estudada, no caso de $\bar{\lambda} > 0$, tem um limite superior de compacticidade máxima inferior⁶⁵ ao da RG. A teoria se torna aproximadamente a RG quando trabalhamos com massas muito próximas do valor da massa máxima da RG. Tudo isso podemos ver no gráfico (23) (direita). De forma geral então, podemos dizer que o regime de existência das soluções para as teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ com $\bar{\lambda} > 0$

⁶⁴ Configurações em que $\bar{r} = r/R$ não seja necessariamente igual a 1, devido a nossa escolha de se adimensionalizar pelo R , mas onde $\bar{r} \approx 1$ também foram verificados e observamos que, quando se exige isso, cairemos na situação 3 descrita do gráfico (8), seção (2.3.2). Ou seja, a pressão ultrapassa a densidade e alcança o zero mais longe que a densidade. Tais configurações produzem objetos fora da classe de OCs e OUCs.

⁶⁵ Numericamente poderíamos dizer praticamente igual ao da RG.

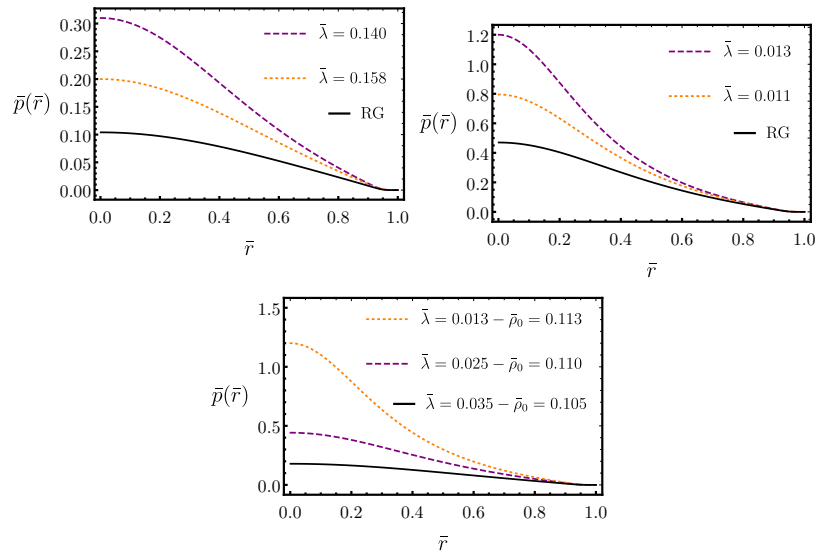
Gráfico 24 - Pressão central em função da massa para $\bar{\lambda}$ fixo.

Legenda: Comportamento da \bar{p}_c em função de \bar{M} para $\bar{\lambda} > 0$ (esquerda) e para $\bar{\lambda} < 0$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

e densidade (58) é aquele no qual temos $\bar{M} < 0.420$ de modo que para $\bar{M} \simeq 0.420$ (ou mais especificamente $\bar{\rho}_0 \simeq 0.117$) teremos $\bar{\lambda} \simeq 0$. Por outro lado, para $\bar{M} \ll 0.420$ teremos um impacto relativamente forte de $\bar{\lambda}$ sobre as soluções. Tudo isso pode ser visto no gráfico (23) (direita) onde podemos ver que quanto maior o $\bar{\lambda}$, menor é a massa máxima. Por exemplo, para $\bar{\lambda} = 0.600$, teremos que o alcance máximo da massa para este $\bar{\lambda}$ será $\bar{M} \simeq 0.250$ enquanto para $\bar{\lambda} = 0.095$ o alcance máximo da massa é $\bar{M} \simeq 0.408$. Além disso, há um suave deslocamento dos pontos entre $\bar{\lambda} = 0$ (RG) e $\bar{\lambda} > 0$ particularmente dentro de um intervalo de densidades que também é visto nos gráficos (21) (esquerda) e (23) (esquerda). Para finalizar, vemos que teremos massas maiores, menores ou iguais com relação àquelas fornecidas pela RG, para a mesma densidade, para cada $\bar{\lambda} > 0$, fixo, que pode ser visto no gráfico (21) (esquerda) onde, por exemplo, para $\bar{\rho}_0 \simeq 0.06$ e $\bar{\lambda} = 0.4000$ teremos uma massa menor do que aquela fornecida pela RG para a mesma densidade enquanto para $\bar{\rho}_0 \simeq 0.10$ e $\bar{\lambda} = 0.15860$ teremos uma massa maior do que aquela da RG, para uma mesma densidade.

Para o caso de $\bar{\lambda} < 0$, também teremos massas maiores, menores ou iguais com relação aquelas fornecidas pela RG para a mesma a densidade. Por exemplo, como podemos ver no gráfico (21) (direita), para $\bar{\rho}_0 \simeq 0.075$ e $\bar{\lambda} = -0.400$ teremos uma massa maior do que aquela fornecida pela RG, para a mesma densidade. Para $\bar{\rho}_0 \simeq 0.112$ e $\bar{\lambda} = -0.400$ teremos uma massa menor do que aquela da RG para a mesma densidade. Enquanto para $\bar{\rho}_0 \simeq 0.15$ e $\bar{\lambda} = -0.065$ teremos uma massa maior do que aquela fornecida pela RG para a mesma densidade. Também há um deslocamento dos pontos entre $\bar{\lambda} = 0$ e $\bar{\lambda} < 0$ para um intervalo de densidades que pode ser visto nos gráficos (21) (direita) e (24) (direita). Além disso, há configurações $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ para $\bar{\lambda} < 0$ onde a massa resultante ultrapassa a massa máxima da RG. Isso pode ser visto tanto no gráfico (21) (direita), quanto em (24) (direita) onde a massa máxima da RG pode ser vista quando a pressão central cresce muito e se estabelece uma massa máxima limite (ou compacticidade máxima, $C_{m\acute{a}x}$), que

Gráfico 25 - Pressão em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$.

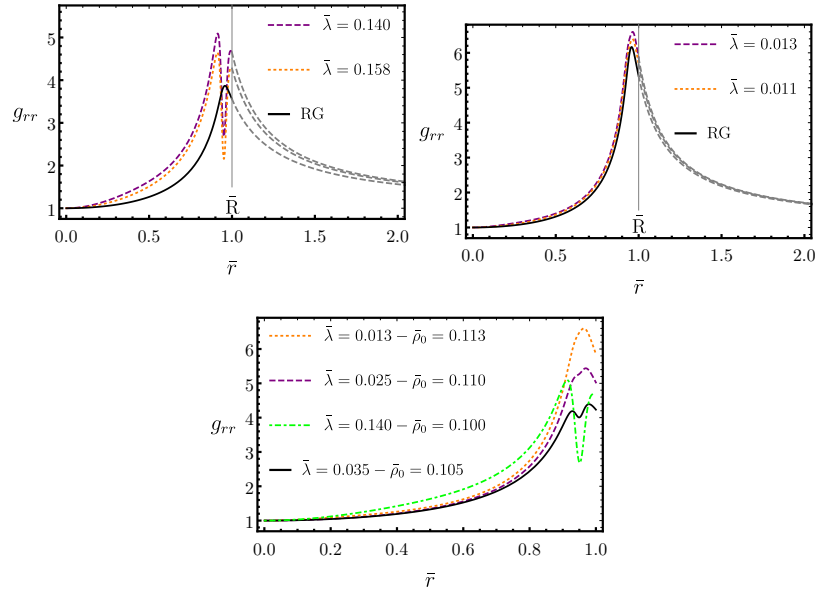
Legenda: Comportamento da $\bar{p}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (esquerda-superior), $\bar{\rho}_0 = 0.124$ (direita-superior) e várias configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ (inferior) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

para a densidade (58) é $C_{m\acute{a}x} = \bar{M}_{M\acute{a}x} \simeq 0.420$ enquanto para $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ com $\bar{\lambda} < 0$ pode chegar em $\bar{M}_{m\acute{a}x} \simeq 4/9$. Porém, a compacticidade máxima permitida pelo limite de Buchdahl para a RG é $C_B = 4/9$. Nossos cálculos não têm precisão numérica suficiente para valores de massas (ou compacticidades) próximos do limite de Buchdahl, isto é, dos valores de massas tais que $\bar{M}_{m\acute{a}x} \simeq 4/9$, nos casos de $\bar{\lambda} \simeq -0.100$ ou $\bar{\lambda} \simeq -0.120$, por exemplo, que fazem com que não seja possível afirmar se teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$, para $\bar{\lambda} < 0$, possam ou não ultrapassar o limite de Buchdahl. A princípio, não há nenhuma restrição teórica conhecida para que tais teorias não ultrapassem tal limite.

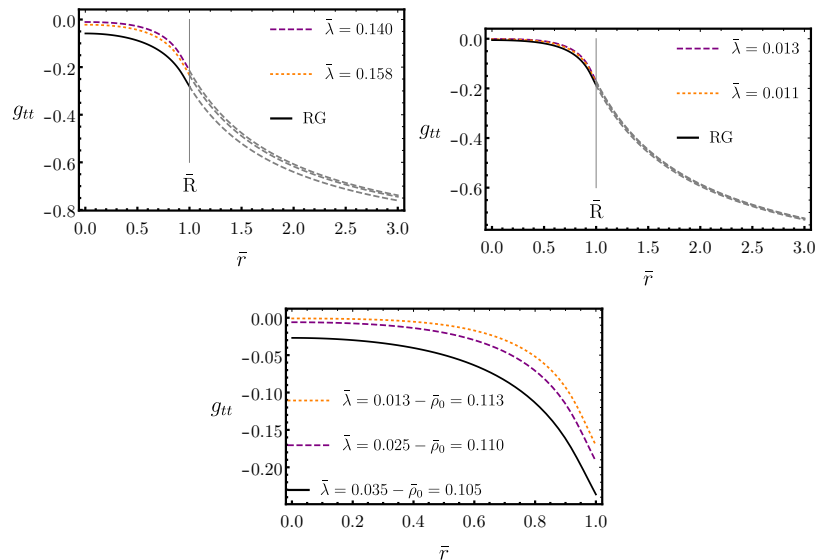
Por fim, nos gráficos (25)-(32) temos a pressão, componentes g_{rr} e g_{tt} e massa, que são similares aos comportamentos da RG porém, devido ao aumento ou diminuição da massa conforme variamos $\bar{\lambda}$ haverá um deslocamento das curvas com relação a curva da RG.

Assim, para $\bar{\lambda} > 0$, temos representado nos gráficos (25), (26), (27) e (28), a pressão, g_{rr} , g_{tt} e massa, respectivamente, onde, em todos os casos, estamos mostrando uma situação (gráficos da esquerda-superior) onde a pressão central não aumenta conforme $\bar{\lambda}$ aumenta, para uma densidade fixa, e, isso é mais fácil de ser visualizado no gráfico (25). Uma outra situação em que a pressão central aumenta conforme $\bar{\lambda}$ aumenta (gráficos da direita-superior), para uma densidade fixa. E, por fim, uma situação em que há várias combinações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ (gráficos inferiores). Desta forma, devido ao fato de termos objetos mais, menos ou tão compactos quanto os da RG para $\bar{\lambda} > 0$, as situações em que a

Gráfico 26 - Componente g_{rr} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$.

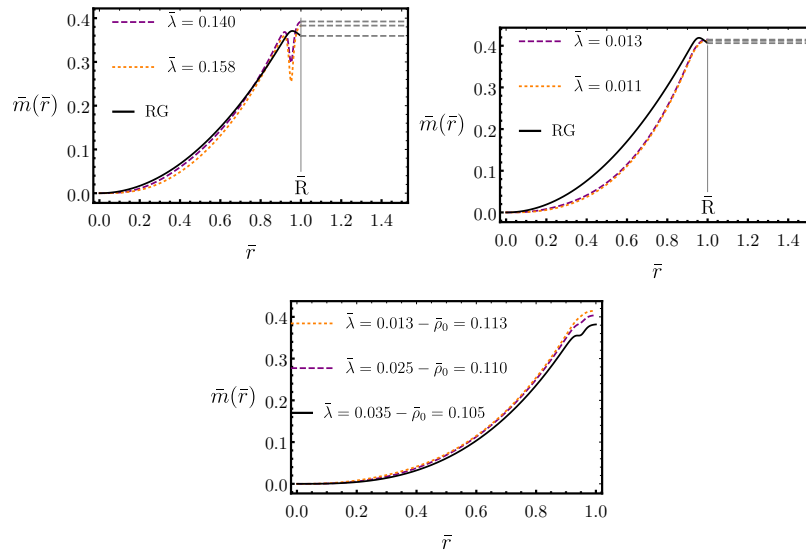
Legenda: Comportamento de g_{rr} em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (esquerda-superior), $\bar{\rho}_0 = 0.113$ (direita-superior) e várias configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ (inferior) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 27 - Componente g_{tt} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$.

Legenda: Comportamento de g_{tt} em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (esquerda-superior), $\bar{\rho}_0 = 0.113$ (direita-superior) e várias configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ (inferior) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 28 - Massa função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$.

Legenda: Comportamento de $\bar{m}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (esquerda-superior), $\bar{\rho}_0 = 0.113$ (direita-superior) e várias configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ (inferior) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

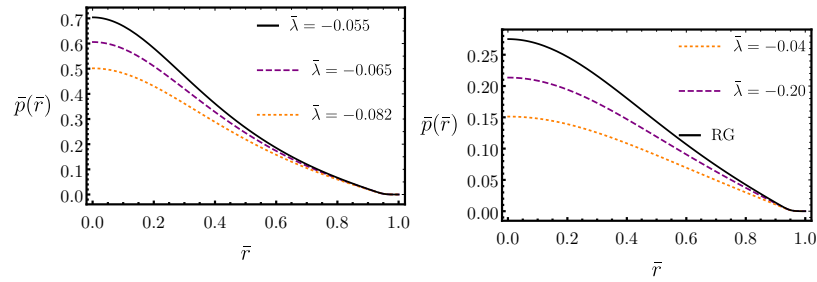
Fonte: A autora, 2020.

densidade é alta⁶⁶ se é exigido pela teoria $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ que o $\bar{\lambda}$ seja pequeno e com isso os resultados se tornam muito próximos dos da RG. Enquanto para o caso de densidades mais baixas, o alcance de $\bar{\lambda}$ pode ser maior, e com isso podemos ver diferenças mais profundas dos resultados produzidos pela RG. Há um comportamento peculiar em relação a RG no gráfico (26), onde o comportamento da componente g_{rr} próximo à superfície possui um ponto de máximo e mínimo, mais expressivos nos casos de densidade baixa e $\bar{\lambda}$ alto. Isso se deve ao fato das teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini carregarem informações de derivada primeira e segunda da densidade originários de $f_{\mathcal{R}}(T) = -\kappa + 2\kappa^2\lambda T$ e, portanto, $f'_{\mathcal{R}}(T) = 2\lambda\kappa^2T'$ e $f''_{\mathcal{R}}(T) = 2\lambda\kappa^2T''$, onde “linha” significa derivada com relação a r . Isso é um indicativo de que para $\bar{\lambda}$ alto, pode haver um forte impacto nos termos de $f''_{\mathcal{R}}(T)$ uma vez que esse comportamento presente em g_{rr} , próximo à superfície, é muito similar ao comportamento da derivada segunda da densidade (58), próximo à superfície⁶⁷. Este tipo de comportamento também ocorre na componente de g_{rr} (ou $m(r)$) presentes no trabalho (PANNIA et al., 2017) onde foi analisado soluções para estrelas de nêutrons. Esse fato não ocorre para $\bar{\lambda} < 0$ conforme podemos observar no gráfico (30).

Para o caso de $\bar{\lambda} < 0$ temos os resultados representados nos gráficos (29), (30),

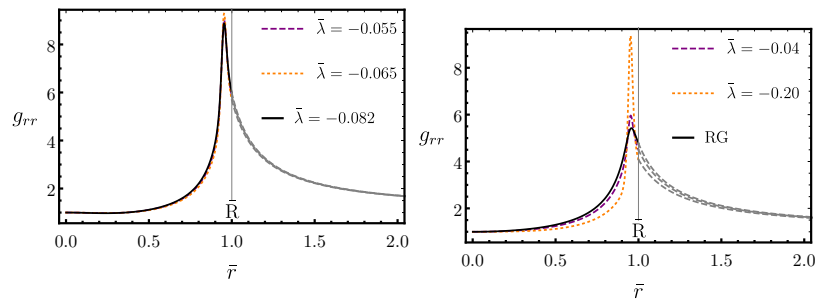
⁶⁶ A relativização do conceito de densidade alta ou baixa aqui pode ser visualizado nos gráficos (28) e (32).

⁶⁷ No Apêndice (F) contém as informações da densidade (58) e de suas derivadas primeira e segunda.

Gráfico 29 - Pressão em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$.

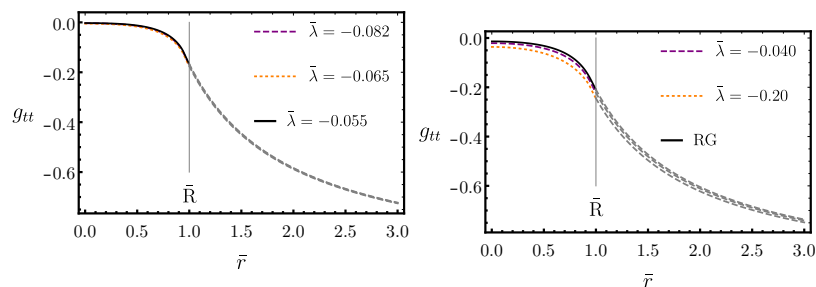
Legenda: Comportamento da $\bar{p}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.124$ (esquerda), $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 30 - Componente g_{rr} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$.

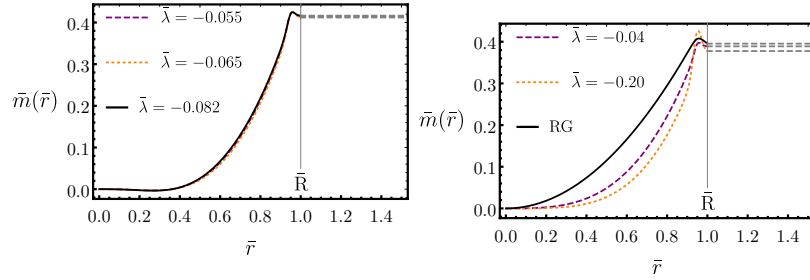
Legenda: Comportamento da g_{rr} em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.124$ (esquerda) e $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 31 - Componente g_{tt} função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$.

Legenda: Comportamento da g_{tt} em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.124$ (esquerda) e $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 32 - Massa função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$.

Legenda: Comportamento da $\bar{m}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.124$ (esquerda) e $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

(31) e (32). Tais casos foram construídos da seguinte forma: os gráficos da esquerda representam configurações além da massa máxima da RG (ou densidade máxima), ou seja, fora do regime de existência da RG. Nesse caso, vale destacar os comportamentos da pressão e da componente g_{rr} , em que podemos ver que conforme aumentamos o $\bar{\lambda}$ em módulo teremos que a pressão central diminui, como é possível visualizar no gráfico (29) (esquerda). No gráfico (30) há uma similaridade com relação ao comportamento de g_{rr} da RG porém, próximo à superfície há um aumento do ponto de máximo da curva. Os gráficos da direita foram construídos para uma densidade fixa dentro do regime da RG. Nesse caso também vale destacar o comportamento da pressão, onde podemos observar que a pressão central será maior na RG e que ela diminui para teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ conforme diminuimos o $\bar{\lambda}$ em módulo. Além disso, no gráfico (30) (direita), vemos que o comportamento de g_{rr} próximo da superfície possui um alcance maior para o ponto de máximo para $\bar{\lambda}$ grandes em relação a RG para uma mesma densidade. Nesse caso, vale destacar também o comportamento da massa, onde vemos nos gráficos (32) que na região $0 \lesssim \bar{r} \lesssim 0.7$ há um afastamento das curvas de $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ com relação a da RG e que quanto maior é o $\bar{\lambda}$ maior será esse afastamento. Desta forma, há configurações, principalmente para os casos fora do domínio da RG, que produzem um comportamento para a função $\bar{m}(\bar{r})$ onde, dentro da região $0 \lesssim \bar{r} \lesssim 0.7$, $\bar{m}(\bar{r})$ se torna negativa⁶⁸. Isso porque a função $m(r)$ em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini carregam informações da densidade e de suas derivadas primeira e segunda, da pressão e de suas derivadas (primeira e segunda) e, no caso de $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$, também carregam informações de λ . É possível visualizar tudo isso na equação (74). Por conta disso, teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ podem possuir comportamentos diferentes nesse aspecto, onde se torna possível $m(r)$ possuir regiões em que $m(r) < 0$ enquanto para a RG isso não acontece.

⁶⁸ Vejam Apêndice (F) para mais informações.

Além disso, é importante observar o seguinte: como discutimos no capítulo anterior, a componente g_{rr} é contínua tanto dentro quanto fora da estrela porém, há uma descontinuidade na derivada de g_{rr} que foi suavizada ao utilizarmos a fonte (58), no entanto, ela ainda está presente e pode ser observada no gráfico da função $m(r)$. Além disso, o fato de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini carregarem informações de derivadas de ordens mais altas que um em $\rho(r)$ e em $p(r)$ nas equações de campo, pode gerar problemas nos escalares de curvaturas. No Apêndice (F), colocamos a forma do tensor de Riemann, necessário para calcular o escalar de Kretschmann, para a geometria (32) e o escalar de Ricci para as soluções numéricas encontradas aqui. Ao analisar o tensor de Riemann vemos que ele não carrega informações de derivadas segundas de $B(r)$ (ou $m(r)$). Além disso, os gráficos do escalar de Ricci, construídos numericamente para as geometrias (32), nos mostram que não há singularidades no centro da estrela nem na superfície.

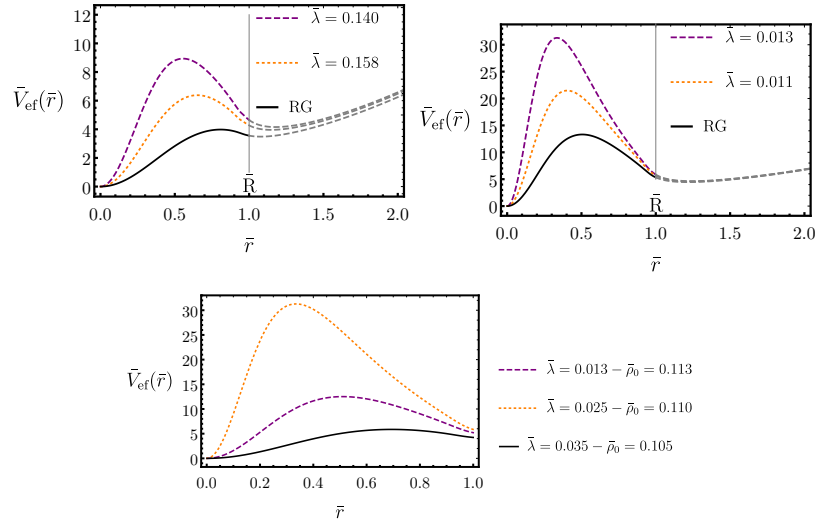
3.3.1 Aprisionamento de partículas sem massa

O fato de teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ terem a capacidade de gerar objetos mais, menos ou tão compactos quanto os produzidos pela RG, se refletirá no potencial efetivo podendo haver casos em que o máximo do potencial se torne maior, menor ou igual ao da RG. Isso fisicamente pode influenciar no aprisionamento de partículas sem massa, que podem produzir consequências na aparência ótica de uma estrela em colapso, também pode causar impactos significativos na estabilidade e no resfriamento destes objetos, entre outros.

No gráfico (33) (superior a esquerda), vemos que para $\bar{\lambda} > 0$, os máximos dos potenciais são maiores que os da RG, para o conjunto de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ escolhidos, de modo o máximo do potencial não aumenta conforme aumentamos o $\bar{\lambda}$. Enquanto no gráfico superior a direita, o máximo do potencial aumenta conforme aumentamos o $\bar{\lambda}$.

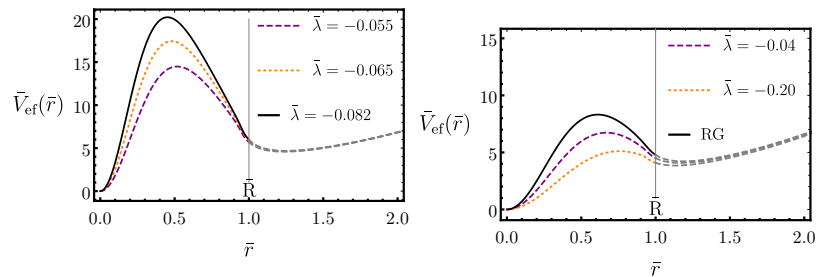
Para $\bar{\lambda} < 0$ temos representado no gráfico (34) na imagem da esquerda, onde temos configurações fora do domínio da RG, e vemos que conforme aumentamos o $\bar{\lambda}$ em módulo, o máximo do potencial aumenta. Enquanto no gráfico da direita estamos no regime validade da RG, e temos configurações onde o máximo do potencial é menor do que aquele produzido pela RG e que não diminui conforme diminuimos em módulo o $\bar{\lambda}$.

Por fim, temos alguns comportamentos do potencial no gráfico (35) onde consideramos os casos de $\bar{\lambda}$ fixo e variamos o $\bar{\rho}_0$. Ambos os casos, temos configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ onde o máximo do potencial aumenta conforme aumentamos a densidade.

Gráfico 33 - Potencial efetivo em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} > 0$.

Legenda: Comportamento de $\bar{V}_{ef}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (esquerda-superior), $\bar{\rho}_0 = 0.113$ (direita-superior) e várias configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ (inferior) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

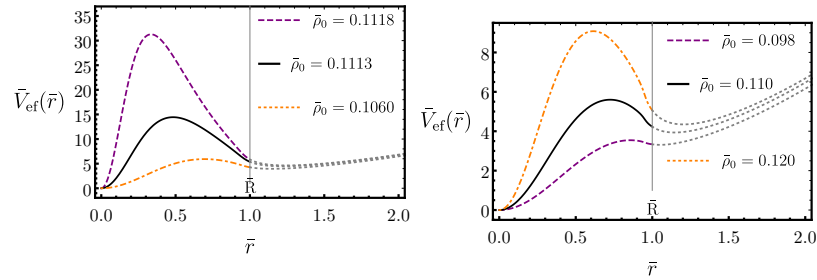
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 34 - Potencial efetivo em função da coordenada radial para $\bar{\lambda} < 0$.

Legenda: Comportamento da $\bar{V}_{ef}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.124$ (esquerda) e $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 35 - Potencial efetivo em função da coordenada.



Legenda: Comportamento da $\bar{V}_{ef}(\bar{r})$ em função de \bar{r} para vários valores de $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\lambda} = 0.113$ (esquerda) e $\bar{\lambda} = -0.12$ (direita) com $\bar{\delta} = 0.01$, $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

3.4 Objetos anisotrópicos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini: um exemplo

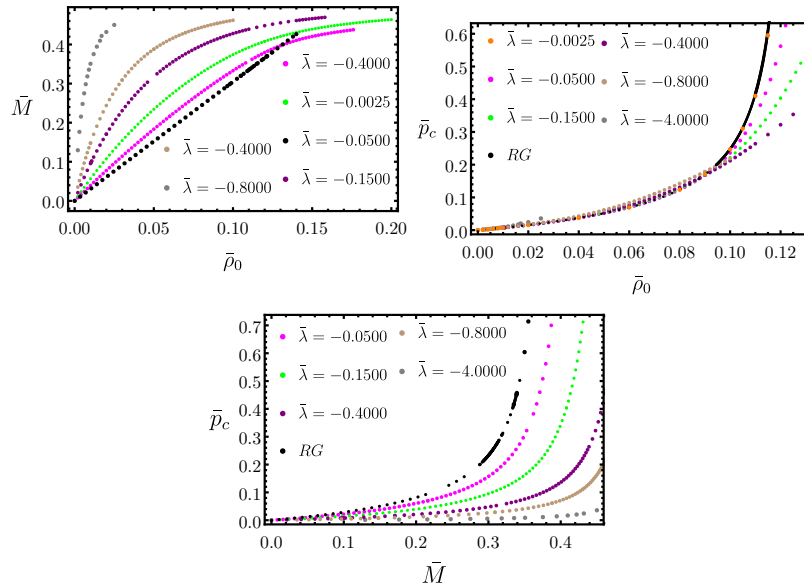
Assim como feito no capítulo 2 para a RG faremos para teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini, onde utilizaremos os casos particulares de $\rho(r)$ e Δ dados pelas equações (59) e (66), respectivamente, no estudo de estrelas constituídas por fluidos anisotrópicos. De novo, a motivação destas escolhas é simplesmente devido ao fato de serem matematicamente simples e mais fácil de calcular as soluções para teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini e respeitam os critérios de anisotropia discutidos no capítulo anterior.

Desta forma, utilizaremos a $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ e o tensor energia-momento dado pela equação (60) de modo que as equações (68) e (69) se tornam diferentes do caso isotrópico somente pela substituição de $p(r)$ por $p_r(r)$, pois $T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p_r, p_\theta, p_\phi) = \text{diag}(-\rho, p_r, p_t, p_t)$. Além disso, a equação da continuidade para esse caso passa a ser a equação (61) ao invés de (34). Enquanto o traço do tensor energia-momento é $T(r) = -\rho(r) + 2p_t + p(r)$. Assim, integrando numericamente as equações (68), (69) e (61) para o tensor energia-momento (60) correspondente a densidade (59) e parâmetro de anisotropia (66), os resultados, adimensionalizados pelo raio, estão representados nos gráficos (36)-(47).

Discussão

No caso de objetos anisotrópicos temos que a pressão central e a massa irão depender não somente de $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\lambda}$, mas também de $\bar{\sigma}$, ou seja, $\bar{p}_c(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ e $\bar{M}(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma})$. Assim, podemos ver em praticamente todos os gráficos que também haverá configurações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ em que podemos ter objetos mais, menos ou tão compactos quanto aqueles produzidos pela RG. Por exemplo, nos gráficos (36), para $\{\bar{\lambda} < 0, \bar{\sigma} < 0\}$, há regiões entre $0 \lesssim \bar{\rho}_0 \lesssim 0.14$ em que os objetos são mais compactos enquanto há uma pequena região

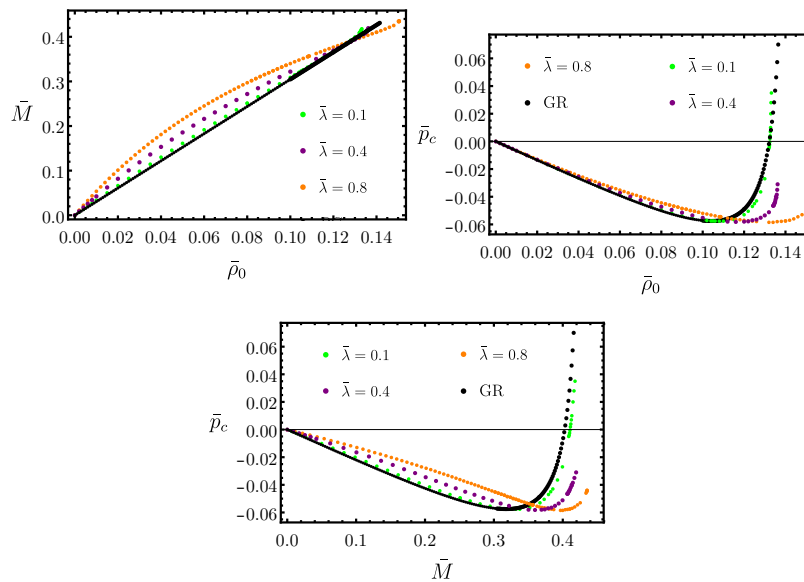
Gráfico 36 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = -1$
 $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\rho}_0$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\rho}_0$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} < 0$ e $\bar{\sigma} = -1$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

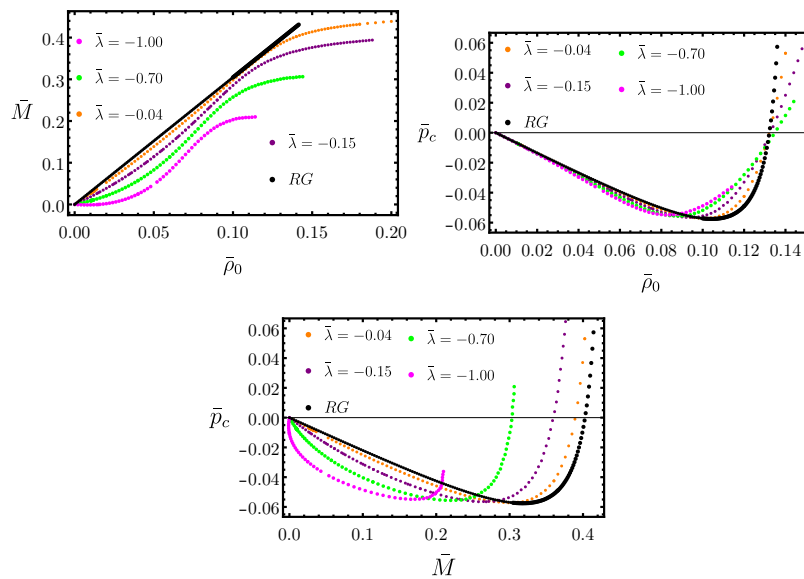
Gráfico 37 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = +1$
 $\bar{\lambda} > 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\rho}_0$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\rho}_0$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\sigma} = +1$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 38 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = +1$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\rho}_0$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\rho}_0$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} < 0$ e $\bar{\sigma} = +1$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

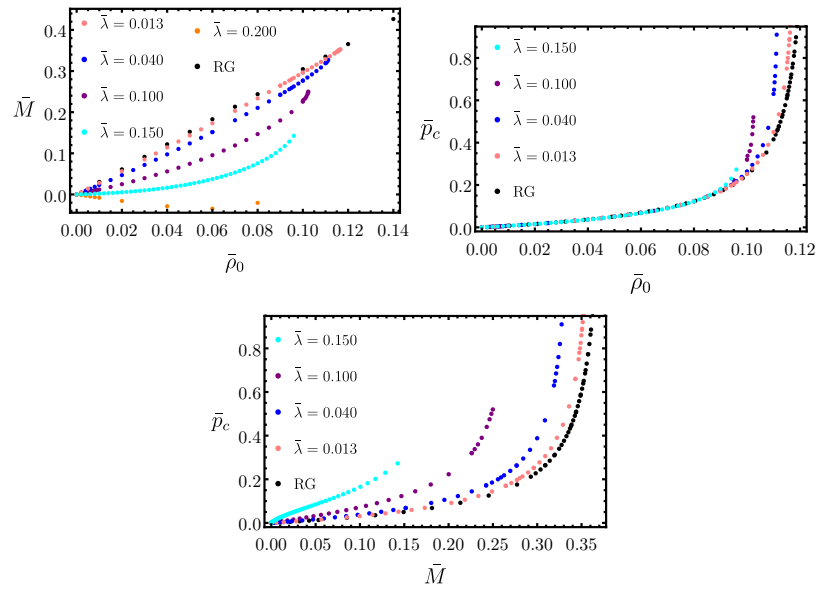
Fonte: A autora, 2020.

próximo de $\bar{\rho}_0 \simeq 0.14$ (praticamente só a curva de cor magenta) em que os objetos também podem ser menos compactos do que aqueles fornecidos pela RG.

Porém, teremos uma predominância de configurações nesse caso. Por exemplo, para $\{\bar{\lambda} > 0, \bar{\sigma} < 0\}$ e $\{\bar{\lambda} < 0, \bar{\sigma} > 0\}$ teremos o predomínio de objetos mais compactos do que os da RG para o mesmo conjunto de $\{\bar{\rho}_0, \bar{\sigma}\}$, isso pode ser visto nos gráficos (36) e (37). Por outro lado, para $\{\bar{\lambda} < 0, \bar{\sigma} > 0\}$ e $\{\bar{\lambda} > 0, \bar{\sigma} > 0\}$ teremos uma dominância de situações de objetos menos compactos do que os da RG para um mesmo conjunto de $\{\bar{\rho}_0, \bar{\sigma}\}$, isso pode ser visto nos gráficos (38) e (39).

Discutimos no capítulo anterior que na RG a massa, \bar{M} , e a pressão central, \bar{p}_c , não dependem de $\bar{\sigma}$, como é mostrado nos gráficos (17) - (19). No entanto, como mencionado anteriormente, teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda \mathcal{R}^2$ têm uma característica diferente nesse aspecto e \bar{M} e \bar{p}_c passam a depender de $\bar{\sigma}$ (além de $\bar{\lambda}$). Assim, nos gráficos (40)-(43) são representados algumas configurações mostrando o impacto de $\bar{\sigma}$ sobre \bar{p}_c e \bar{M} (no Apêndice (H) há outras representações de gráficos). Não é possível generalizar padrões de configurações, pois conforme podemos checar no Apêndice (H), é possível ter resultados diferentes para as combinações de $(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma})$ mostradas nessa seção. Porém, podemos destacar alguns comportamentos nos gráficos presentes aqui, como no gráfico (40) (superior-esquerda) onde a massa, \bar{M} , cresce e depois diminui conforme $\bar{\sigma}$ aumenta em módulo. Além disso, todas as configurações de $\bar{\lambda} < 0$ nesse caso ultrapassam o valor da massa da RG para $\bar{\rho}_0 =$

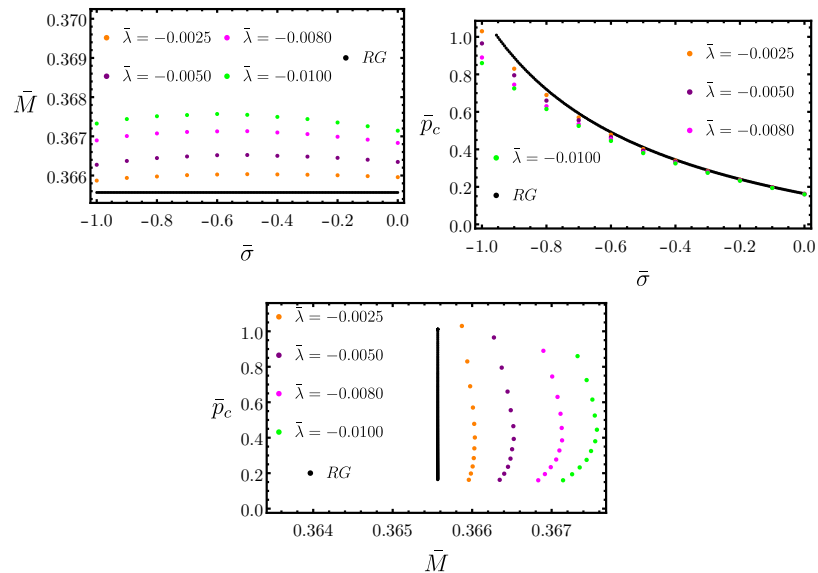
Gráfico 39 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\rho}_0$ variando com $\bar{\sigma} = -1$ e $\bar{\lambda} > 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\rho}_0$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\rho}_0$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\sigma} = -1$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

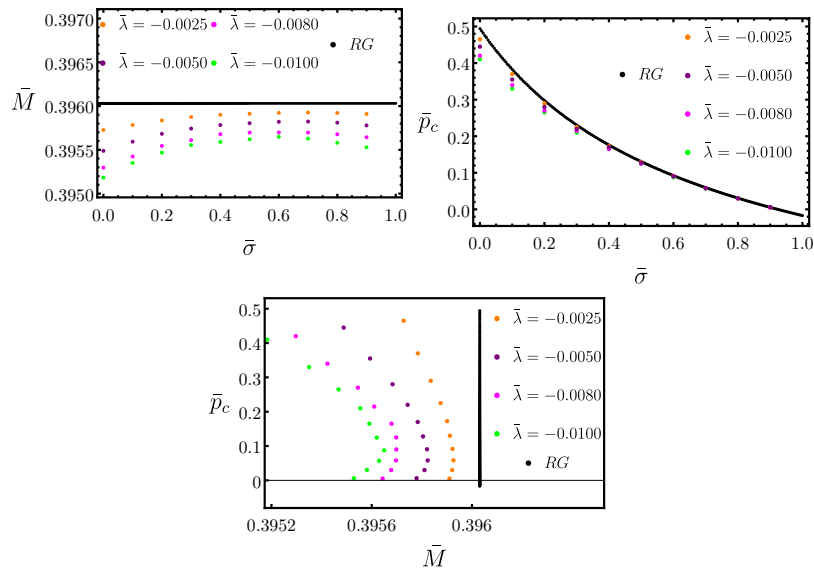
Gráfico 40 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.12$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} < 0$ e $\bar{\rho} = 0.12$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 41 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.13$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\rho} = 0.13$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

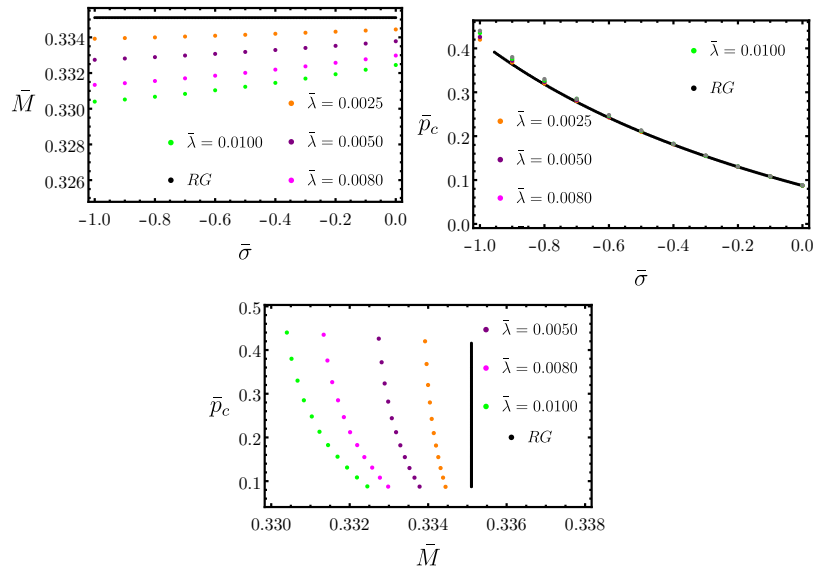
0.12. Situações similares acontecem nos casos representados nos gráficos (41) (esquerda-superior), (42) (esquerda-superior) e (43) (esquerda-superior), porém há configurações onde a massa pode ser maior ou menor que a da RG, vai depender dos sinais de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\sigma}$ e também da escolha do $\bar{\rho}_0$. No gráfico (42) (esquerda-superior) temos que um comportamento linear de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\lambda} \neq 0$ e isso pode ser devido ao fato de estarmos trabalhando⁶⁹ em regiões onde a curva $\bar{M} = \bar{M}(\bar{\rho}_0)$ passa abaixo da curva da RG e densidade não muito altas.

Com respeito ao comportamento de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ para $\bar{\rho}_0$ e λ fixos, vemos no gráfico (40) (direita-superior) que conforme $\bar{\sigma}$ varia, há um deslocamento das curvas de $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda \mathcal{R}^2$ com relação a RG que se faz mais significativo quanto maior é o $\bar{\lambda}$ em módulo. Comportamentos similares acontecem nos gráficos (41) (direita-superior), (42) (direita-superior) e (43) (direita-superior), podendo ter situações de pressão central iguais, maiores ou menores do que as da RG, para o mesmo conjunto $\{\bar{\rho}_0, \bar{\sigma}\}$.

Nos gráficos \bar{p}_c em função de \bar{M} quando $\bar{\sigma}$ varia, há combinações de $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma}\}$ que caracterizam massas maiores ou menores que as da RG para um mesmo para $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}\}$. Além

⁶⁹ Conforme pode-se verificar no Apêndice (H) há outras configurações similares a essa de modo que estamos considerando outros valores de $\bar{\rho}_0$, e de $\bar{\lambda}$ onde trabalhamos em regiões onde a curva $\bar{M} = \bar{M}(\bar{\rho}_0)$ passa acima da curva da RG e com densidade mais altas.

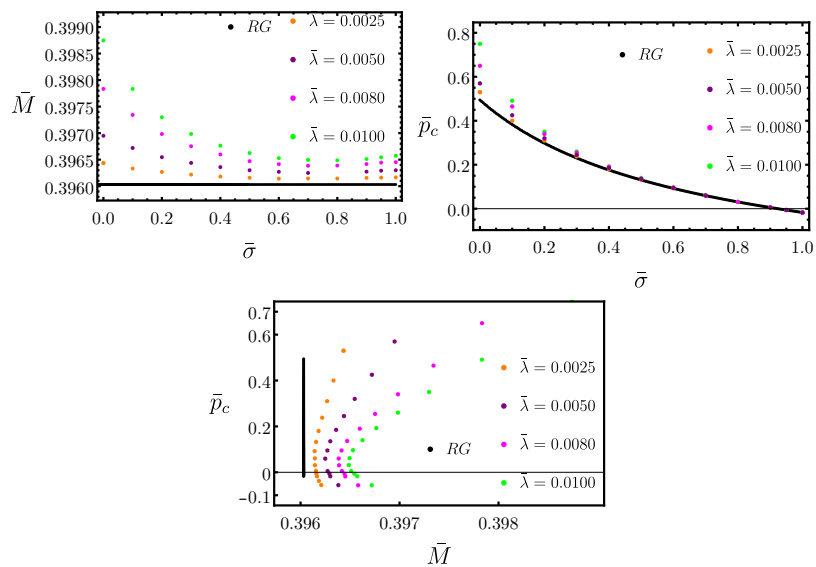
Gráfico 42 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.11$ e $\bar{\lambda} > 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\rho} = 0.11$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

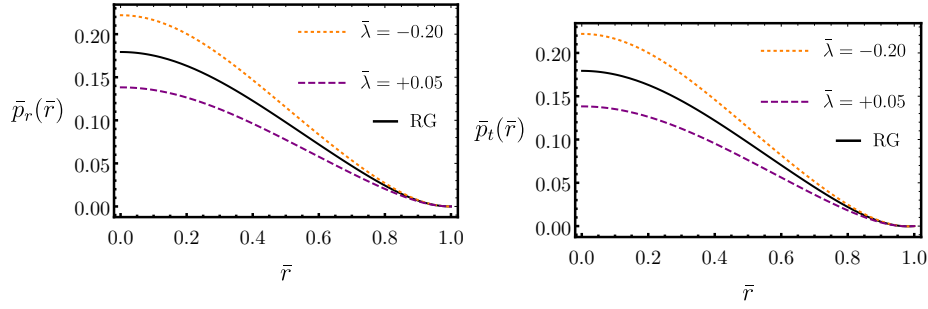
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 43 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.13$ e $\bar{\lambda} > 0$.



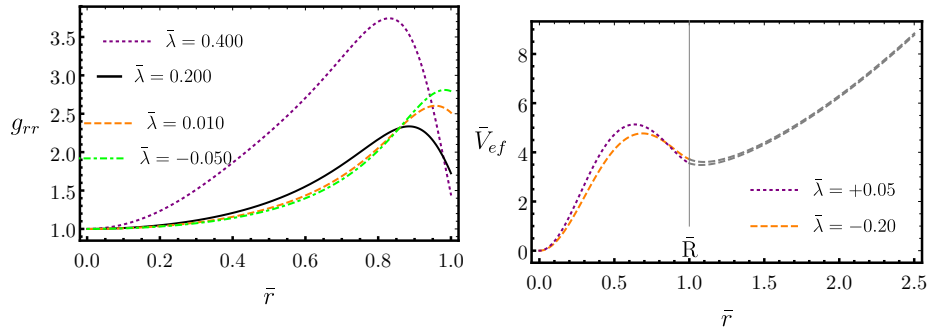
Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda-superior) de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita-superior) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (inferior) para vários valores de $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\rho} = 0.13$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 44 - Pressão radial e tangencial em função de \bar{r} para $\bar{\sigma} < 0$.

Legenda: Comportamento de $\bar{p}_r(\bar{r})$ (esquerda) e de $\bar{p}_t(\bar{r})$ (direita) para RG e valores de $\bar{\lambda}$ positivo e negativo. Em todos os caso fizemos $\bar{\sigma} = -0.045$ e $\bar{\rho}_0 = 0.12$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

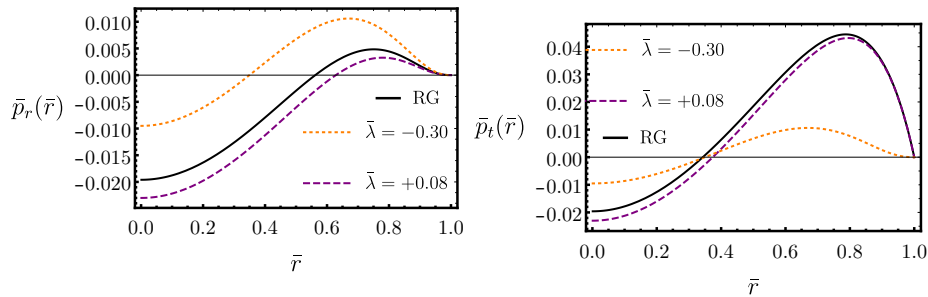
Gráfico 45 - Comportamento da componente g_{rr} e $\bar{V}_{ef}(\bar{r})$ em função de \bar{r} .

Legenda: Comportamento de g_{rr} (esquerda) e $\bar{V}_{ef}(\bar{r})$ (direita) para RG e para valores de $\bar{\lambda}$ positivo e negativo. Em todos os casos fizemos $\bar{\rho}_0 = 0.11$, $\bar{\sigma} = -0.10$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

disso, temos que a pressão central muda conforme a massa muda, tendo na maioria das situações, um comportamento onde a massa cresce e depois diminui conforme a pressão central aumenta. Enquanto na RG o aumento da pressão central é linear. Isso tudo pode ser visto nos gráficos (40) (inferior), (41) (inferior), (42) (inferior) e (43) (inferior).

Algumas configurações possíveis de pressão radial e tangencial são mostradas nos gráficos (44), para $\{\bar{\sigma} < 0 : \bar{\lambda} > 0, \bar{\lambda} = 0, \bar{\lambda} < 0\}$. Também é representado algumas situações para $\{\bar{\sigma} > 0 : \bar{\lambda} > 0, \bar{\lambda} = 0, \bar{\lambda} < 0\}$, gráficos (46), que podem caracterizar OEs como *gravastars*. Por fim, no gráfico (45) (esquerda) temos alguns comportamentos da componente g_{rr} para a densidade (59) em que não foi encontrado situações onde há um ponto de máximo e um ponto de mínimo próximo à superfície que difere do perfil de densidade (58) o que reforça a indicação de que a derivada segunda de $\bar{\rho}(\bar{r})$ é relevante para ditar

Gráfico 46 - Pressão radial e tangencial em função de \bar{r} para $\bar{\sigma} > 0$.

Legenda: Comportamento de $\bar{p}_r(\bar{r})$ (esquerda) e de $\bar{p}_t(\bar{r})$ (direita) para RG e valores de $\bar{\lambda}$ positivo e negativo. Em todos os caso fizemos $\bar{\sigma} = +0.80$ e $\bar{\rho}_0 = 0.12$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

tal comportamento⁷⁰. Esse caso também é semelhante ao obtido no trabalho (REIJONEN, 2009), onde utiliza-se uma equação de estado para um gás de Fermi associado a um fluido anisotrópico. O comportamento da densidade, no caso do gás de Fermi, é similar ao perfil de densidade (59), produzindo assim, comportamentos semelhantes para a componente g_{rr} em ambos os casos. Enquanto do lado direito do gráfico (45) temos algumas configurações do potencial efetivo para os casos de $\{\bar{\sigma} < 0 : \bar{\lambda} > 0, \bar{\lambda} = 0, \bar{\lambda} < 0\}$. Por fim, não foi observado configurações de massa além de $\bar{M} = 4/9$ nesse estudo envolvendo $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$, densidade (59) e pressão anisotrópica.

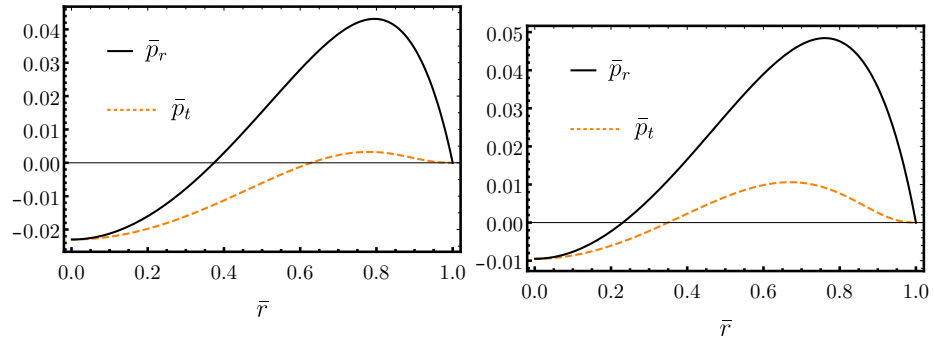
3.5 Objetos anisotrópicos exóticos em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini: um exemplo

Como era de se esperar, devido ao fato de estarmos trabalhando com modelos de objetos anisotrópicos, há o surgimento de regiões de pressão negativa que podem caracterizar configurações de OEs como *gravastars*. Isso pode ser visto nos gráficos para $\bar{\sigma} > 0$ como (37) e (38). Neles é possível observar que para $\bar{\lambda} < 0$ teremos situações em geral de objetos menos compactos do que na RG. Enquanto para $\bar{\lambda} > 0$ teremos objetos mais compactos que os da RG. Essencialmente isso vai influenciar nos valores de pressão central onde, para cada massa fixa, teremos pressões centrais maiores ou menores que as da RG.

Por fim, no gráfico (47), temos algumas configurações de *gravastars* em teorias

⁷⁰ No Apêndice (F) temos os comportamentos dos perfis de densidade (58) e (59) e de suas derivadas. Lá vemos que a derivada segunda do perfil de densidade (58) é diferente do (59) podendo, tais comportamentos, são capazes de influenciar significativamente na componente g_{rr} próximo à superfície, uma vez que próximo à superfície a pressão é praticamente numa e a densidade passa a dominar.

Gráfico 47 - Pressão radial e tangencial juntos para $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de $\bar{p}_r(\bar{r})$ e $\bar{p}_t(\bar{r})$ juntos para $\bar{\lambda} = +0.08$ (direita) e $\bar{\lambda} = -0.30$ (esquerda). Todos para $\bar{\sigma} = 0.80$ e $\bar{\rho}_0 = 0.12$ com $\bar{r}_* = 1$ e $\bar{r}_k = 1$.

Fonte: A autora, 2020.

$f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini para $\bar{\lambda} > 0$ (esquerda) e $\bar{\lambda} < 0$ (direita).

CONCLUSÃO

Nesta tese, analisamos, na âmbito numérico, duas configurações de estrelas esféricamente simétricas e estáticas contendo fluidos de pressão isotrópica e anisotrópica no cenário de $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ no formalismo de Palatini. No primeiro caso, investigamos, para o perfil de densidade $\rho(r) = \rho_0/[1 + \exp(r - r_0)/\delta]$ que é praticamente constante no interior da estrela e cai suavemente na superfície da mesma, o comportamento da pressão isotrópica e da geometria no interior da estrela. Também discutimos as regiões de aprisionamento de partículas sem massa no contexto de OCs e OUCs. Observamos, das soluções das equações TOV modificadas que, diferentemente da RG, a função $m(r)$ é uma função da densidade, $\rho(r)$, pressão, $p(r)$, e de suas derivadas (primeira e segunda). Isso se deve ao fato da informação da teoria gravitacional $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ entrar nas equações de campo da forma $f(T) = -T + 2\lambda T^2$ onde, para o caso isotrópico, temos $T = 3p(r) - \rho(r)$. A consequência disso tudo é que $m(r)$ dependerá dos parâmetros ρ_0 e λ , fornecendo assim, a possibilidade de gerar objetos mais, menos ou tão compactos quanto os da RG para uma mesma densidade, ao variarmos o λ . Além disso, vimos que a utilização deste perfil de densidade em particular suavizou a descontinuidade presente na componente g_{rr} da métrica na superfície da estrela. Por conta disso, as possíveis divergências físicas na superfície devido a existência de derivadas de segunda ordem da densidade foram são evitadas.

Assim, vimos que, independente do sinal de $\bar{\lambda}$, há configurações de objetos mais, menos ou tão compactos quanto aqueles descritos pela RG para a mesma densidade. Isto é, para $\bar{\lambda} > 0$, obtemos situações onde, dependendo da escolha do par $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}\}$, é possível descrever objetos mais, menos ou tão compactos quanto os da RG para a mesma densidade. Além disso, ainda para $\bar{\lambda} > 0$, foi constatado que para valores de massa $\bar{M} \simeq 4/9$ teremos $\bar{\lambda} \simeq 0$ uma vez que quanto maior a densidade, $\bar{\rho}_0$, menor terá que ser $\bar{\lambda}$. Desta forma, para $\bar{\lambda} > 0$, não foi identificada nenhuma configuração numérica além do limite de Buchdahl.

Para $\bar{\lambda} < 0$, ainda sobre o caso isotrópico, verificamos que dependendo da escolha do par $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}\}$, também é possível obter objetos mais, menos ou tão compactos quanto os da RG para uma mesma densidade. Nesse caso foi verificado uma possível existência de um intervalo de $\bar{\lambda}$ (e $\bar{\rho}_0$) para o qual é possível, numericamente, ultrapassar marginalmente o limite de Buchdahl. Porém, para a precisão numérica com a qual esse trabalho foi desenvolvido, não é possível afirmar se há configurações que excedem o limite de Buchdahl para esses modelos em particular. Para tal finalidade, há necessidade de uma análise numérica mais precisa particularmente para esse intervalo de $\bar{\lambda}$ (e $\bar{\rho}_0$) em que há configurações com compactidades maiores que $C_B = M/R = 4/9$.

Por fim, para as configurações de aprisionamento de partículas sem massa, no âmbito de OCs e OUCs, observamos que para determinados pares de $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}\}$ haverá con-

figurações em que o potencial efetivo terá um máximo maior ou menor do que os gerados pela RG para uma mesma densidade. Claramente isso é consequência direta do fato de ser possível, em teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini, gerar objetos mais ou menos compactos do que os da RG para uma mesma densidade ao variarmos λ . Isso influenciará fisicamente na capacidade de um objeto abrigar, mais ou menos intensamente, regiões internas e externas de aprisionamento de partículas sem massa como ondas gravitacionais e partículas fracamente interagentes. A consequência física desse fato se refletirá na aparência ótica de uma estrela em um colapso gravitacional, no seu resfriamento, na produção de ECOS gravitacionais e serão significativamente importante no contexto da estabilidade de tais objetos.

No âmbito de estrelas constituídas por fluidos com pressão anisotrópica, foi analisado um perfil de densidade, dado por $\rho(r) = \rho_0[1 - (r/r_*)^8]$, diferente do estudo envolvendo pressão isotrópica. Nesse caso investigamos o impacto do parâmetro de anisotropia $\Delta = \sigma r^2(r^2 + r_k^2)^{-1/2}$ em teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini, particularmente para $\sigma \neq 0$. Assim, também analisamos o comportamento da pressão radial e tangencial e da geometria no interior da estrela, além das situações de aprisionamento de partículas sem massa para OCs e OUCs. Vimos que a função relacionada com a massa, $m(r)$, além dos parâmetros presentes no estudo isotrópico como $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\lambda}$ haverá a dependência adicional de $\bar{\sigma}$ presente nela. Apesar da presença de $\bar{\sigma}$ em $m(r)$ teremos configurações semelhantes aos analisados no caso isotrópico. Desta forma, observamos que dependendo da escolha dos parâmetros $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma}\}$ poderemos ter objetos mais, menos ou tão compactos quanto os fornecidos pela RG para uma mesma densidade e $\bar{\sigma}$. Porém, foi constatado que há uma predominância de situações nesse caso, como para $\{\bar{\lambda} < 0, \bar{\sigma} < 0\}$ e $\{\bar{\lambda} > 0, \bar{\sigma} > 0\}$ temos uma prevalência de configurações de objetos mais compactos do que aqueles produzidos pela RG para a mesma densidade e mesmo $\bar{\sigma}$. Enquanto nos casos $\{\bar{\lambda} < 0, \bar{\sigma} > 0\}$ e $\{\bar{\lambda} > 0, \bar{\sigma} < 0\}$ observou-se um predomínio de objetos menos compactos do que os produzidos pela RG para a mesma densidade e mesmo $\bar{\sigma}$. Todas as análises feitas no caso isotrópico foram realizados nesse caso também, como as comparações convenientes com a RG e o aprisionamento de partículas sem massa. Entretanto, o fato de existir configurações de pressão negativa ao lidarmos com pressão anisotrópica, foi possível analisar além de estrelas, configurações de OEs como *gravastars* em $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$. Constatamos que os casos particulares de $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}, \bar{\sigma}\}$ analisados são semelhantes aos fornecidos pela RG exceto pela possibilidade de conseguirmos gerar mais configurações do que aquelas permitidas pela RG para um par $\{\bar{\rho}_0, \bar{\sigma}\}$ devido a liberdade de escolha do $\bar{\lambda}$. Como a anisotropia não é um dos critérios existentes dentro dos requisitos presentes no limite de Buchdahl, não faz sentido essa discussão para esse caso. É importante dizer que é preciso fazer um estudo mais amplo, analisando outras configurações no espaço de parâmetros para o modelo anisotrópico discutido aqui.

Como perspectivas, deixamos a análise de se teorias $f(\mathcal{R})$ podem ou não ultrapassar

o limite de Buchdahl no âmbito numérico e também de forma mais globalmente válida via métodos analíticos. Outras possibilidades de estudo consistem em investigar a estabilidade das soluções encontradas nesta tese e assim, fixar restrições sobre os parâmetros, explorar mais o espaço de parâmetros do caso anisotrópico que discutimos, analisar outros modelos de $f(\mathcal{R})$, densidade e parâmetro de anisotropia Δ . Por fim, utilizar equações de estado mais realísticas que possam configurar OCs e OUCs no contexto de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 116, n. 24, p. 1-16, jun. 2016.
- AGULLO, I.; SINGH, P. Loop Quantum Cosmology: a brief review. **Loop quantum gravity: the first 30 Years**, Louisiana, v. 1, n. 43, p. 183–240, mar. 2017.
- AKIYAMA, K. et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. **Astrophys. J.**, Londres, v. 85, n. 1, p. 163-208, abr. 2019.
- ALLEMANDI, G. et al. Conformal aspects of Palatini approach in extended theories of gravity. **Gen. Rel. Grav.**, New York, v. 38, n. 12, p. 33–60, jun. 2006.
- BAMBI, C. et al. Wormholes and nonsingular spacetimes in Palatini $f(R)$ gravity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 93, n. 6, p. 64-160, mar. 2016.
- BARACK, L. et al. Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 36, n. 14, p. 143-165, fev. 2019.
- BARAUSSE, E.; SOTIRIOU, T. P.; MILLER, J. C. A No-go theorem for polytropic spheres in Palatini $f(R)$ gravity. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 25, n. 23, p. 1-18, jan. 2008.
- BARAUSSE, E.; SOTIRIOU, T. P.; MILLER, J. C. Curvature singularities, tidal forces and the viability of Palatini $f(R)$ gravity. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 25, n. 5, p. 105-128, abr. 2008.
- BARS, I.; STEINHARDT, P.; TUROK, N. Local Conformal Symmetry in Physics and Cosmology. **Phys. Rev. D**, New York, v. 89, n. 4, p. 125-142, nov. 2014.
- BEJARANO, C. ; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. What is a singular black hole beyond General Relativity? **Phys. Rev. D**, New York, v. 95, n. 6, p. 208-219, feb. 2017.
- BEKENSTEIN, J. D. Black hole hair: 25 - years after. **Physics Proceedings, 2nd International A.D. Sakharov Conference**, Moscow, v. 1, n. 1, p. 116–219, mai. 1996.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes: Classical properties, thermodynamics and heuristic quantization. **9th Brazilian School of Cosmology and Gravitation (BSCG 1998)**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-192, jan. 1998.
- BIZON, P. Colored black holes. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 64, n.12, p. 2844–2847, mar. 1990.
- BIZON, P.; CHMAJ, T. Gravitating skyrmions. **Phys. Lett. B.**, Netherlands, v. 7, n. 23, p. 55–62, jun. 1992.
- BOWERS, R. L.; LIANG, E.P.T. Anisotropic Spheres in General Relativity. **Astrophys. J.**, Londres, v. 188, n. 5, p. 657–665, mar. 1974.

- BRITO, R. et al. Interaction between bosonic dark matter and stars. **Phys. Rev. D**, New York, v. 93, n. 4, p. 342-356, abr. 2016.
- BUCHDAHL, H. A. General Relativistic Fluid Spheres. **Phys. Rev. D.**, New York, v. 116, n. 12, p. 127-139, nov. 1959.
- CAPOZZIELLO, S. et al. Hybrid metric-Palatini gravity. **Universe**, Suíça, v. 1, n. 2, p. 199–238, mar. 2015.
- CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. Extended Theories of Gravity. **Phys. Rept.**, United Kingdom, v. 509, n. 12, p. 167–321, jul. 2011.
- CAPOZZIELLO, S.; VIGNOLO, S. A Comment on ‘The Cauchy problem of $f(R)$ - gravity’, **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 26, n. 6, p. 168-201, abr. 2009.
- CAPOZZIELLO, S.; VIGNOLO, S. On the well formulation of the initial value problem of metric-affine $f(R)$ -gravity. **Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.**, New York, v. 6, n. 12, p. 985–1001, abr. 2009.
- CAPOZZIELLO, S.; VIGNOLO, S. The Cauchy problem for metric-affine $f(R)$ -gravity in presence of perfect-fluid matter. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 26, n. 7, p. 17-29, mar. 2009.
- CAPOZZIELLO, S.; VIGNOLO, S. The Cauchy problem for metric-affine $f(R)$ -gravity in presence of a Klein-Gordon scalar field. **Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.**, New York, v. 8, n. 5, p. 167–176, ago. 2011.
- CAPOZZIELLO, S.; VIGNOLO, S. The Cauchy problem for $f(R)$ -gravity: An Overview. **Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.**, Londres, v. 9, n. 2, p. 125-142, abr. 2012.
- CARDOSO, V. et al. Light rings as observational evidence for event horizons: long-lived modes, ergoregions and nonlinear instabilities of ultracompact objects. **Phys. Rev. D**, New York, v. 90, n. 4, p. 4469-4478, jun. 2014.
- CARDOSO, V. et al. Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes. **Phys. Rev. D**, New York, v. 79, n. 5, p. 64-78, jan. 2009.
- CARDOSO, V.; PANI, P. The observational evidence for horizons: from echoes to precision gravitational-wave physics. **Nat. Astron.**, Reino Unido, v.1, n. 3, p. 586-591, out. 2017.
- CARDOSO, V.; PANI, P. Testing the nature of dark compact objects: a status report. **Living Rev. Rel.**, Germany, v. 22, n. 1, p. 14-31, mar. 2019.
- CARROLL, S. **Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity**, 1 st ed. California, Cambridge, 2001, 207 p.
- CARTER, B. Has the black hole equilibrium problem been solved? Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation, and relativistic field theories. **Proceedings, 8th Marcel Grossmann meeting, MG8**, Jerusalem, v. 1, n.1, p. 136–155, jun. 1997.
- CASARES, P. A. M. **A review on Loop Quantum Gravity**. 2018. 75 f. Tese (Doutorado em Física) - University of Oxford, England, 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1808.01252.pdf>. Acesso em: 07 jul. 2020.

- CATTOEN, C.; FABER, T.; VISSER, M. Gravastars must have anisotropic pressures. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 22, n. 4, p. 4189–4202, set. 2005.
- CHANDRASEKHAR, S. Dynamical Instability of Gaseous Masses Approaching the Schwarzschild Limit in General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 12, n. 5, p. 114–116, fev. 1964.
- CHRUSCIEL, P. T.; COSTA, J. L.; HEUSLER. Stationary black holes: uniqueness and beyond. **Living Rev. Rel.**, Germany, v. 3, n. 5, p. 145-162, set. 2012.
- COSTA, J. L. **On black hole uniqueness theorems**. 2010. 145 f. Tese (Doutorado em Física) - University of Oxford, England, 2010. Disponível em: <https://homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/papers/TeseFinal.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2019.
- CUNHA, P. V.P.; BERTI, E.; HERDEIRO, C. A.R. Light-Ring Stability for Ultracompact Objects. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 119, n. 25, p. 25-37, ago. 2017.
- CURIEL, E. A Primer on Energy Conditions. **InspireHep**. Columbia, v. 1, n. 1, p. 1-52, apr. 2014. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/1405.0403.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2020.
- DEB, D. et al. Strange stars in $f(R, T)$ gravity. **JCAP**, Londres, v. 03, n. 2, p. 44-71, mar. 2018.
- DEBENEDICTIS, A. et al. Gravastar solutions with continuous pressures and equation of state. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 23, n. 12, p. 2303–2316, jan. 2006.
- DEV, K.; GLEISER, M. Anisotropic stars: Exact solutions. **Gen. Rel. Grav.**, New York, v. 34, n. 5, p. 1793–1818, jun. 2002.
- DOLGOV, A.D.; KAWASAKI, M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? **Phys. Lett. B**, Netherlands, v. 573, n. 5, p. 1–4, jun. 2003.
- ENCKELL, V. et al. Inflation with R^2 term in the Palatini formalism. **JCAP**, Londres, v. 02, n. 12, p. 22-35, set. 2019.
- FARAONI, V. Matter instability in modified gravity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 74, n. 4, p. 104-117, jun. 2006.
- Faraoni, V. Reply to ‘A Comment on ‘The Cauchy problem of $f(R)$ gravity’’. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 26, n. 5, p. 168-195, abr. 2009.
- FAY, S.; TAVAKOL, R.; TSUJIKAWA, S. $f(R)$ gravity theories in Palatini formalism: Cosmological dynamics and observational constraints. **Phys. Rev. D**, New York, v. 75, n. 2, p. 63-81, mar. 2007.
- FELICE, A.; TSUJIKAWA, S. $f(R)$ theories. **Living Rev. Rel.**, Germany, v. 13, n. 3, p. 3, jan. 2010.
- FLANAGAN, E. E. Palatini form of $1/R$ gravity. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 92, n. 5, p. 156-172, abr. 2004.
- FLANAGAN, E. E. The Conformal frame freedom in theories of gravitation. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 21, n. 6, p. 3817-3829, out. 2004.

FROLOV VALERI P.; ZELNIKOV, A. **Introduction to Black Hole Physics**. 1 st ed. England: Oxford University Press, 2011. 125 p.

FUJII, Y.; MAEDA, K. **The scalar-tensor theory of gravitation**. 1s ed. England: Cambridge University Press, 2007. 211 p.

GIALAMAS, I. D.; KARAM, A.; RACIOPPI, A. Dynamically induced Planck scale and inflation in the Palatini formulation. **JCAP**, Londres, v. 2, n. 5, p. 112-1235, abr. 2020.

GRAHAM, A. A. H.; JHA, Rahul. Nonexistence of black holes with noncanonical scalar fields. **Phys. Rev. D**, New York, v. 89, n. 8, p. 56-71, mar. 2014.

HAMILTON, A. J. S. General Relativity, Black Holes, and Cosmology. **InspireHep**, Columbia, v. 1, n. 1, p. 1-1108, jan. 2020. Disponível em: https://jila.colorado.edu/~ajsh/astr3740_17/grbook.pdf. Acesso em: mai. 2020.

HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. General Relativity: An Einstein centenary survey. **InspireHep**, Columbia, v. 1, n. 1, p. 1-919, mar. 1979. Disponível em: http://www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item1131443/?site_locale=en_US. Acesso em: 13 mai. 2020.

HERDEIRO, C. A. R.; RADU, E. Asymptotically flat black holes with scalar hair: a review. **Int. J. Mod. Phys.**, New York, v. 24, n. 09, p. 1542-1564, mar. 2015.

HERRERA, L.; SANTOS, N.O. Local anisotropy in self-gravitating systems. **Phys. Rept.**, Netherlands, v. 286, n. 34, p. 53–130, jun. 1997.

IGLESIAS, A. et al. How (Not) to Palatini. **Phys. Rev. D**, New York, v. 76, n. 4, p. 104-112, mar. 2007.

IOSIFIDIS, D. **Metric-Affine Gravity and Cosmology/Aspects of Torsion and non-Metricity in Gravity Theories**. 2019. 270 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Thessaloniki University, Grécia, 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1902.09643.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2020.

ISRAEL, W. Event horizons in static vacuum space-times. **Phys. Rev. D.**, New York, v. 164, n. 2, p. 1776–1779, out. 1967.

JINNO, R. et al. Higgs inflation in metric and Palatini formalisms: Required suppression of higher dimensional operators. **JCAP**, Londres, v. 03, n. 6, p. 63-74, nov. 2020.

KAINULAINEN, K.; REIJONEN, V.; SUNHEDE, D. The Interior spacetimes of stars in Palatini $f(R)$ gravity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 76, n. 4, p. 435-443, mar. 2007.

KONOPLYA, R. A. et al. Stable Schwarzschild stars as black-hole mimickers. **Phys. Rev. D**, New York, v. 100, n. 4, p. 124-135, mar. 2019.

KREMER, G. M.; ALVES, D. S.M. Palatini approach to $1/R$ gravity and its implications to the late Universe. **Phys. Rev. D**, New York, v. 70, n. 23, p. 235-246, jun. 2004.

LANAHAN-TREMBLAY, N.; FARAONI, V. The Cauchy problem of $f(R)$ gravity. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 24, n. 4, p. 5667–5680, ago. 2007.

MAK, M.K.; HARKO, T. Anisotropic stars in general relativity. **Proc. Roy. Soc. Lond.** Londres, v. 59, n. 54, p. 393–408, abr. 2003.

- MARTÍNEZ-ASENCIO, J.; OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCÍA, D. Black holes in extended gravity theories in Palatini formalism. **Springer Proc. Math. Stat.**, Louisiana, v. 60, n. 5. p. 333–337, nov. 2014.
- MATHUR, S. D. The Fuzzball proposal for black holes: An Elementary review. **Fortsch. Phys.**, Londres, v. 53, n. 7, p. 793–827, jun. 2005.
- MAZUR, P. O. Black hole uniqueness theorems. **InspireHep**, Columbia, v. 1, n. 1, p. 1-134, dec. 2000. Disponível em <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0101012.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2020.
- MAZUR, P. O.; MOTTOLA, E. Gravitational condensate stars: An alternative to black holes. **InspireHep**, Columbia, v.1, n. 1, p. 1-4, feb. 2002. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0109035.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.
- Pawel, O. M.; Mottola, E. Gravitational vacuum condensate stars. **Proc. Nat. Acad. ci.**, Washington, v. 101, n. 12, p. 9545–9550, abr. 2004.
- Misner, C. W.; Throne, K. S.; Wheeler, J. A. **Gravitation**. 1 st ed. New York, W. H. Freeman and Company, 1973. 1036 p.
- MORRIS, M.S.; THORNE, K.S. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. **Am. J. Phys.**, Germany, v. 56, n. 25, p. 395–412, set. 1988.
- MOTOHASHI, H.; SUYAMA, T. Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability. **Phys. Rev. D**, New York, v. 91, n. 8, p. 85-92, jul. 2015.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. **Phys. Rept.**, Netherlands, v. 505, n. 3, p. 59–144, mai. 2011.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D.; SAEZ-GOMEZ, D. Cosmological reconstruction of realistic modified F(R) gravities. **Phys. Lett. B**, Netherlands, v. 681, n. 5, p. 74–80, jun. 2009.
- NOVOTNÝ, J.; HLADÍK, J.; STUHLÍK, Z. Polytropic spheres containing regions of trapped null geodesics. **Phys. Rev. D**, New York, v. 95, n. 4, p. 145-167, jan. 2017.
- NOZARI, K.; SADATIAN, S. D. Comparison of Frames: Jordan vs Einstein Frame for a Non-minimal Dark Energy Model. **Mod. Phys. Lett. A**, Portsmouth, v. 24, n. 5, p. 3143–3155, out. 2009.
- OLMO, G. J. RUBIERA-GARCIA, D. Charged black holes in Palatini f(R) theories. **13th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories**, Colorado, v.1, n.5, p. 1170–1172. abr. 2015
- OLMO, G. J. The Gravity Lagrangian according to solar system experiments. **Phys. Rev. Lett.** New York, 2005, v. 95, n. 7, p. 2611-2624, jul. 2005.
- OLMO, G. J. Hydrogen atom in Palatini theories of gravity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 77, n. 4, p. 840-862, abr. 2008.

- Olmo, G. Non-singular Universes a la Palatini. **J. Phys. Conf. Ser.**, Sérvia, v. 314, n. 7, p. 124-136, fev. 2011.
- OLMO, G. Palatini Approach to Modified Gravity: $f(R)$ Theories and Beyond. **Int. J. Mod. Phys.**, New York, v. 20, n. 2, p. 413–462, nov. 2011.
- Olmo, G. J. Birkhoff's theorem and perturbations in $f(R)$ theories. **Annalen Phys.**, Germany, v. 524, n.12, p. 87–121, abr. 2012.
- OLMO, G.J.; RUBIERA-GARCIA, D. Palatini $f(R)$ Black Holes in Nonlinear Electrodynamics. **Phys. Rev. D**, New York, v. 84, n. 6, p. 1240-1252, dez. 2011.
- OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D. Junction conditions in Palatini $f(R)$ gravity. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 37, n. 8, p. 185-201, mar. 2020.
- OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D.; WOJNAR, A. Minimum main sequence mass in quadratic Palatini $f(R)$ gravity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 100, n. 4, p. 4402-44025, jun. 2019.
- OLMO, G. J.; RUBIERA-GARCIA, D.; WOJNAR, A. Stellar structure models in modified theories of gravity: lessons and challenges. **Phys. Rept.**, Bélgica, v. 3, n. 4, p. 876-889, out. 2020.
- OLMO, G. J.; SANCHIS-ALEPUZ, H. Hamiltonian Formulation of Palatini $f(R)$ theories a la Brans-Dicke. **Phys. Rev. D**, New York, v. 83, n. 6, p. 104-120, mar. 2011.
- OLMO, G. J.; SANCHIS-ALEPUZ, H.; TRIPATHI, S. Dynamical Aspects of Generalized Palatini Theories of Gravity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 80, n. 4, p. 24013-24028, mai. 2009.
- OLMO, G. J.; SINGH, P. Effective Action for Loop Quantum Cosmology a la Palatini. **JCAP**, Londres, v. 01, n. 12, p. 30-48, ago. 2009.
- OWSKI, M. S.; STACHOWSKI, A. Polynomial $f(R)$ Palatini cosmology– dynamical system approach. **Phys. Rev. D**, New York, v. 97, n. 10, p. 103-116, set. 2018.
- PANI, P.; FERRARI, V.. On gravitational-wave echoes from neutron-star binary coalescences. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 35, n. 15, p. 154-180, mar. 2018.
- PANNIA, F. A. Teppa; BERGLIAFFA, S. E. P.; MANSKE, N. Cosmography and the redshift drift in Palatini $f(R)$ theories. **Eur. Phys. J. C**, Londres, v. 79, n. 3, p. 267-284, jun. 2019.
- PANNIA, F. A. T. et al. Structure of Compact Stars in R-squared Palatini Gravity. **Gen. Rel. Grav.**, Louisiana, v. 49, n. 2, p. 25-38, mar. 2017.
- PINTO, P. et al. Extended cosmology in Palatini $f(R)$ -theories. **JCAP**, Londres, v. 11, n.2, p. 45-63, jun. 2018.
- PRESKILL, J. Do black holes destroy information? **International Symposium on Black holes, Membranes, Wormholes and Superstrings**. Califórnia, v. 2, n. 5, p. 22–39, abr. 1992.
- QUIROS, I. Selected topics in scalar–tensor theories and beyond. **Int. J. Mod. Phys. D**, Chicago, v. 28, n. 07, p. 1930-1957, set. 2019.

- RAPOSO, G. et al. Anisotropic stars as ultracompact objects in General Relativity. **Phys. Rev. D**, New York, v. 99, n. 10, p. 104072-104102, jan. 2019.
- REIJONEN, V. On white dwarfs and neutron stars in Palatini $f(R)$ gravity. **InspireHep.**, Finland, v. 1, n. 1, p. 1-9, dez. 2009. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0912.0825.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2020.
- ROBINSON, D. Four decades of black holes uniqueness theorems. **Kerr Fest: Black Holes in Astrophysics, General Relativity and Quantum Gravity Christchurch**, New Zealand, v. 1, n.1, p. 1-23, ago. 2004. Disponível em: <http://www2.phys.canterbury.ac.nz/kerrfest/Robinson.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2020.
- RUFFINI, R.; WHEELER, J. A. Introducing the black hole. **Phys. Today**, New York, v. 24, n. 1, p. 1-30, mar. 1971.
- SCHLEICH, K.; WITT, D. M. A simple proof of Birkhoff's theorem for cosmological constant. **J. Math. Phys.**, São Francisco, v. 51, n. 5, p. 1125-1132, out. 2010.
- SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory. **Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.** Berlin, v. 24, n. 6, p. 424-434, abr. 1916.
- SEIDEL, E.; SUEN, W. Formation of solitonic stars through gravitational cooling. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 72, n. 7, p. 2516-2519, set. 1994.
- SERGYEYEV, A.; WOJNAR, A. The Palatini star: exact solutions of the modified Lane-Emden equation. **Eur. Phys. J. C**, Londres, v. 80, n. 4, p. 313, nov. 2020.
- SETIAWAN, A.M.; SULAKSONO, A. Anisotropic neutron stars and perfect fluid's energy conditions. **Eur. Phys. J. C**, Londres, v. 79, n. 9, p. 632-755, jan. 2019.
- SHARIF, M.; WASEEM, Arfa. Study of isotropic compact stars in $f(R, T, R_{\mu\nu}T^{\mu\nu})$ gravity. **Eur. Phys. J. Plus**, Londres, v. 131, n. 6, p. 174-190, jun. 2016.
- SHARIF, M.; YOUSAF, Z. Dynamical analysis of radiating spherical collapse in Palatini $f(R)$ gravity. **Astrophys. Space Sci.**, Liverpool, v. 354, n. 2, p. 2116-2201, mai. 2014.
- SILVA, H. O. et al. Slowly rotating anisotropic neutron stars in general relativity and scalar-tensor theory. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 32, n. 12, p. 1450-1468, set. 2015.
- SINGH, T.; RAI, L. N. Scalar-Tensor Theories of Gravitation: Foundations and Prospects. **Gen. Rel. Grav.**, New York, v. 15, n. 5, p. 28, fev. 1982.
- SINGH, T.; RAI, L. N. - Tensor theories of gravitation: foundations and prospects. **Gen. Rel. Grav.**, New York, v. 15, n. 3, p. 875-898, jul. 1983.
- SOTIRIOU, T. P. Constraining $f(R)$ gravity in the Palatini formalism. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 23, n. 7, p. 1253-1267, nov. 2006.
- SOTIRIOU, T. P. Curvature scalar instability in $f(R)$ gravity. **Phys. Lett. B**, Netherlands, v. 645, n. 6, p. 389-392, abr. 2007.
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ Theories Of Gravity. **Rev. Mod. Phys.**, Colorado, v. 82, n. 7, p. 451-497, ago. 2010.

SOTIRIOU, T. P.; LIBERATI, S. The Metric-affine formalism of $f(R)$ gravity. **J. Phys. Conf. Ser.**, Sérvia, v. 68, n. 12, p. 12022-12055, nov. 2007.

SOTIRIOU, T. P.; ZHOU, S. Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 112, n. 8, p. 251-263, fev. 2014.

STUHLIK, Z.; HLADIK, J.; URBANEC, M. Neutrino trapping in braneworld extremely compact stars. **Gen. Rel. Grav.**, New York, v. 43, n. 12, p. 3163–3190, abr. 2011.

STUHLIK, Zden et al. Neutrino trapping in extremely compact objects: I. Efficiency of trapping in the internal Schwarzschild spacetimes. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, 2009, v. 26, n. 3, p. 350-372, jun. 2009.

TOUBAL, W. **No-Hair Theorems and introduction to Hairy Black Holes**. 2010. 126 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Imperial College London, Londres, 2010. Disponível em: <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/dissertations/2010/Wahiba-Toubal-Dissertation.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2019.

URBANO, A.; VEERMÄE, H. On gravitational echoes from ultracompact exotic stars. **JCAP**, Londres, v. 04, n. 2, p. 11-25, mai. 2019.

VINCENT, F.H. et al. Imaging a boson star at the Galactic center. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 33, n. 10, p. 136-149, abr. 2016.

VISSER, M.; WILTSHIRE, D. L. Stable gravastars: An Alternative to black holes? **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 21, p. 1135–1152, mar. 2004.

VOLKOV, M. S.; GALTSOV, D. V. NonAbelian Einstein Yang-Mills black holes. **JETP Lett.**, Londres, v. 50, n. 5, p. 346–350, out. 1989.

VöLKEL, S. H.; KOKKOTAS, K. D. A. Semi-analytic Study of Axial Perturbations of Ultra Compact Stars. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 34, n. 12, p. 12506-12518, jul. 2017.

WEINBERG, Erick J. Black holes with hair. **NATO Sci. Ser. II**, Colorado, v. 60, n. 12, p. 523–544, jan. 2002.

WILL, C. M. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Rev. Rel.**, Londres, v. 17, n. 3, p. 45-59, mar. 2014.

WINSTANLEY, E. Dressing a black hole with non-minimally coupled scalar field hair. **Class. Quant. Grav.**, Louisiana, v. 22, n. 6, p. 2233–2248, set. 2005.

WOJNAR, A. **Extended Theories of Gravity in Cosmological and Astrophysical Applications**. 2016. 156 f. Tese (Doutorado em Física) - University of Ukraine, Ukraine, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1610.09892.pdf>. Acesso em: 5 ago 2020.

WOJNAR, A. Polytropic stars in Palatini gravity. **Eur. Phys. J. C**, Londres, v. 79, n. 1, p. 51, abr. 2019.

WOJNAR, A. Stability of polytropic stars in Palatini gravity. **Acta Phys. Polon. Supp.** Polônia, v. 13, n. 2, p. 249, ago. 2020.

ZUBAIR, M.; ABBAS, G. Anisotropic Compact Stars in $f(R)$ Gravity. **InspireHep**, Columbia, v. 1. n. 1, p. 1-20, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1412.2120.pdf>. Acesso em: 14 jul. 2020.

APÊNDICE A – Variação da ação no formalismo de Palatini

A.1 Variação da ação no formalismo de Palatini

Vamos dedicar essa seção para mostrar alguns passos da variação da ação (1). No basearemos na discussão feita em (OLMO, 2011b). Assim, relembro a ação aqui, onde temos

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_m[g_{\mu\nu}, \psi]. \quad (76)$$

A variação da ação (76) nos fornece

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f(\mathcal{R})}{2} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu} \right] + \delta S_m \quad (77)$$

A variação $\delta \mathcal{R}_{\mu\nu}$ pode ser escrita como

$$\delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = \tilde{\nabla}_\lambda (\delta \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda) - \tilde{\nabla}_\nu (\tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\lambda) + 2S_{\rho\nu}^\lambda \delta \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\rho. \quad (78)$$

A contribuição deste último termo, na integral (77), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \{ \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} J^\lambda) + \delta \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda [\tilde{\nabla}_\rho (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\rho}) + \\ &\quad - \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}) + 2\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\sigma} S_{\lambda\sigma}^\nu] \}, \end{aligned} \quad (79)$$

onde $J^\lambda \equiv f_{\mathcal{R}} (g^{\mu\nu} \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \tilde{\Gamma}_{\sigma\mu}^\sigma)$. Além disso, o termo $\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} J^\lambda)$ pode ser escrito como

$$\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} J^\lambda) = \partial_\lambda (\sqrt{-g} J^\lambda) + \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} (g^{\mu\nu} S_{\sigma\lambda}^\sigma - \delta_\lambda^\nu g^{\mu\rho} S_{\sigma\rho}^\sigma) \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (80)$$

onde usamos o fato $\tilde{\nabla}_\mu \sqrt{-g} = \partial_\mu \sqrt{-g} - \tilde{\Gamma}_{\mu\sigma}^\sigma \sqrt{-g}$. Substituindo (80) na (79) temos

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \{ \partial_\lambda (\sqrt{-g} J^\lambda) + \sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} (g^{\mu\nu} S_{\sigma\lambda}^\sigma - \delta_\lambda^\nu g^{\mu\rho} S_{\sigma\rho}^\sigma) \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \\ &\quad + \delta \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\lambda [\tilde{\nabla}_\rho (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\rho}) - \tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}) \\ &\quad + 2\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\rho} S_{\lambda\sigma}^\nu] \}. \end{aligned} \quad (81)$$

Substituindo (81) em (77) e assumindo que o termo $\int d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} J^\lambda)$ desaparece na superfície, então, ao fazermos $\delta S / \delta g^{\mu\nu}$ e $\delta S / \delta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$, respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{f(\mathcal{R})}{2} g_{\mu\nu} &= \kappa T_{\mu\nu}, \\ -\tilde{\nabla}_\lambda (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu}) + \delta_\lambda^\nu \tilde{\nabla}_\rho (\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} g^{\mu\rho}) + 2\sqrt{-g} f_{\mathcal{R}} (g^{\mu\nu} S_{\sigma\lambda}^\sigma - \delta_\lambda^\nu g^{\mu\rho} S_{\sigma\rho}^\sigma + g^{\mu\sigma} S_{\lambda\sigma}^\nu) &= 0. \end{aligned}$$

APÊNDICE B – Discussão sobre a equação de campo para a conexão

B.1 Discussão sobre a equação de campo para a conexão

Vamos explorar matematicamente a equação (5) para tirar algumas informações interessantes sobre a torção. Toda a análise discutida a seguir foi desenvolvida em (OLMO, 2011b). Veremos que a solução para $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ contém um termo extra dado por $-2\delta_\nu^\alpha A_\mu/3$ responsável pela existência da torção, $2S^\sigma = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\sigma - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^\sigma$, a menos que seja imposto o vínculo $S_{\sigma\mu}^\sigma = 0$. Porém, independentemente da imposição desse último vínculo as equações campo para $g_{\mu\nu}$, (2) e (12), não irão carregar informações da torção.

Assim, relembando as equações (5) e (6) aqui, onde temos,

$$-\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) + \delta_\lambda^\nu\tilde{\nabla}_\rho(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\rho}) + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}(g^{\mu\nu}S_{\sigma\lambda}^\sigma - \delta_\lambda^\nu g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^\nu) = 0, \quad (82)$$

$$\tilde{\nabla}_\rho(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\rho}) = \frac{4}{3}\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\rho}S_{\lambda\rho}^\sigma. \quad (83)$$

Substituindo a equação (83) na equação (82) temos

$$-\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) + 2\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}\left(g^{\mu\nu}S_{\sigma\lambda}^\sigma - \frac{\delta_\lambda^\nu}{3}g^{\mu\rho}S_{\sigma\rho}^\sigma + g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^\nu\right) = 0. \quad (84)$$

Vamos tratar a conexão separadamente em parte simétrica, $C_{\mu\nu}^\lambda$, e parte antisimétrica que é a torção, $S_{\mu\nu}^\lambda$. Desta forma, podemos rescrever $\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu})$, numa parte dependente da conexão simétrica, $C_{\mu\nu}^\lambda$, e em outra parte dependente da torção, $S_{\mu\nu}^\lambda$, isto é,

$$\tilde{\nabla}_\lambda(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) = \nabla_\lambda^C(f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}[g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^\nu + g^{\nu\sigma}S_{\sigma\lambda}^\mu + g^{\mu\nu}S_{\sigma\rho}^\sigma], \quad (85)$$

onde ∇_μ^C é construído somente com a conexão simétrica, $C_{\beta\sigma}^\alpha$. Substituindo (85) na equação (84) temos

$$\nabla_\lambda^C(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}[g^{\mu\nu}S_{\sigma\lambda}^\sigma - g^{\nu\sigma}S_{\lambda\sigma}^\mu + g^{\mu\nu}S_{\sigma\lambda}^\sigma - \frac{2}{3}\delta_\lambda^\nu g^{\mu\rho}S_{\sigma\rho}^\sigma]. \quad (86)$$

Somando a equação (86) por ela mesmo, porém trocando os índices μ por ν , chegamos em

$$\nabla_\lambda^C(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) = \sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}[g^{\mu\nu}S_{\sigma\lambda}^\sigma - \frac{1}{3}(\delta_\lambda^\nu g^{\mu\rho} + \delta_\lambda^\mu g^{\nu\rho})S_{\sigma\rho}^\sigma]. \quad (87)$$

Enquanto subtraindo a equação (86) por ela mesmo, porém trocando os índices μ por ν chegamos em

$$g^{\mu\sigma}S_{\lambda\sigma}^\nu - g^{\nu\sigma}S_{\lambda\sigma}^\mu = \frac{1}{3}(\delta_\lambda^\nu g^{\mu\rho} - \delta_\lambda^\mu g^{\nu\rho})S_{\sigma\rho}^\sigma. \quad (88)$$

Com o objetivo de simplificar as equações (87) e (88), definiremos

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{2}{3}\delta_{\nu}^{\lambda}S_{\sigma\mu}^{\sigma}, \quad (89)$$

que implicará em $\bar{S}_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \bar{\Gamma}_{[\mu\nu]}^{\lambda}$ e $\bar{S}_{\sigma\nu}^{\sigma} = 0$. As relações entre as conexões simétricas e antisimétricas nessa nova variável são dadas por

$$\bar{C}_{\mu\nu}^{\lambda} = C_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{3}(\delta_{\nu}^{\lambda}S_{\sigma\mu}^{\sigma} + \delta_{\mu}^{\lambda}S_{\sigma\nu}^{\sigma}), \quad (90)$$

$$\bar{S}_{\mu\nu}^{\lambda} = S_{\mu\nu}^{\lambda} + \frac{1}{3}(\delta_{\nu}^{\lambda}S_{\sigma\nu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\lambda}S_{\sigma\nu}^{\sigma}). \quad (91)$$

Desta forma, as equações (87) e (88) usando as novas variáveis se tornarão

$$\nabla_{\lambda}^{\bar{C}}(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) = 0, \quad (92)$$

$$g^{\mu\sigma}\bar{S}_{\lambda\sigma}^{\nu} - g^{\nu\sigma}\bar{S}_{\lambda\sigma}^{\mu} = 0. \quad (93)$$

Vamos agora explorar as equações (92) e (93). A solução da equação (92) pode ser encontrada definindo uma métrica conforme tal que $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}$ e assim a equação (92) fica

$$\nabla_{\lambda}^{\bar{C}}(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0, \quad (94)$$

que nos fornece a seguinte solução

$$\bar{C}_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{h^{\alpha\rho}}{2}(\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\rho\mu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}). \quad (95)$$

Por outro lado, a equação (93) nos diz que $\bar{S}_{\beta\lambda\alpha} = \tilde{S}_{\alpha\lambda\beta}$ e junto com o fato de que a torção é antisimétrica nos dois últimos índices, chegaremos na conclusão de que $\bar{S}_{\beta\lambda\alpha} = 0$, e, $\bar{S}_{\lambda\alpha}^{\nu} = 0$. Tendo em mãos essas informações e usando na equação (91) temos

$$S_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{3}(\delta_{\mu}^{\lambda}S_{\sigma\nu}^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\lambda}S_{\sigma\mu}^{\sigma}). \quad (96)$$

A equação (96) nos diz que a torção é gerada por um 4-vetor dado por $A_{\mu} \equiv S_{\sigma\mu}^{\sigma}$.

Um das principais conclusões dessa discussão é o fato de podermos escrever a conexão como

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \bar{C}_{\mu\nu}^{\alpha} - \frac{2}{3}A_{\mu}\delta_{\nu}^{\alpha}, \quad (97)$$

que implicará em

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\beta\mu\nu}^{\alpha}(\tilde{\Gamma}) &= \mathbf{R}_{\beta\mu\nu}^{\alpha}(\bar{C}) - \frac{4}{3}\partial_{[\mu}A_{\nu]}\delta_{\nu}^{\alpha}, \\ \mathbf{R}_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) &= \mathbf{R}_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}(\tilde{\Gamma}) = \mathbf{R}_{\mu\nu}(\bar{C}) - \frac{4}{3}\partial_{[\mu}A_{\nu]}\delta_{\beta}^{\alpha}, \\ \mathbf{R}_{(\mu\nu)}(\tilde{\Gamma}) &= \mathbf{R}_{(\mu\nu)}(\bar{C}), \end{aligned} \tag{98}$$

$$\mathbf{R}(\tilde{\Gamma}) = \mathbf{R}(\bar{C}). \tag{99}$$

Vemos que as duas últimas equações, (98) e (99), acarretaram no fato das equações de campo para $g_{\mu\nu}$ (82) não dependerem da torção. Além disso, usando a equação (95) na equação (97), e voltando a métrica $g_{\mu\nu}$ teremos que a solução para a equação (82) será

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{2f\mathcal{R}}[\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}f\mathcal{R} - g_{\mu\nu}\partial^{\alpha}f\mathcal{R}] - \frac{2}{3}\delta_{\nu}^{\alpha}\left(A_{\mu} - \frac{3}{4f\mathcal{R}}\partial_{\mu}f\mathcal{R}\right), \tag{100}$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = (g^{\alpha\rho}/2)(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})$. A equação (100) é a equação (10) a menos do termo com A_{μ} que é responsável pela torção, $S_{\mu\nu}^{\lambda} = (\delta_{\mu}^{\lambda}A_{\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda}A_{\mu})/3$. Para termos a mesma solução para $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ devemos impor que a torção seja nula fazendo $A_{\mu} \equiv S_{\sigma\mu}^{\sigma} = 0$.

APÊNDICE C – Teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini como uma teoria escalar-tensorial

C.1 Teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini como uma teoria escalar-tensorial

As teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini podem ser escritas como uma teoria escalar-tensorial. Esta última é uma modificação na teoria de Einstein que trabalha com um campo escalar, ϕ , além da métrica, g , e por isso são chamadas de teorias escalares-tensoriais da gravitação, (SINGH; RAI, 1983; FUJII, 2007).

A motivação de se trabalhar com tais teorias era de se obter uma gravitação que fosse compatível com princípio de Mach e conseqüentemente para isso, deveríamos abrir mão do princípio de equivalência forte (SINGH; RAI, 1982). Segundo (ALLEMANDI et al., 2006), o princípio de Mach afirma que “referenciais inerciais locais são determinados por uma média do movimento de objetos astronômicamente distantes e, portanto, o acoplamento gravitacional pode ser dependente de escala e relacionado a algum campo escalar”. Em tais teorias a constante de Newton, G , passa a variar conforme ϕ varia.

Tais teorias têm sido bastante usadas em estudos que envolve Física fundamental, onde são consideradas no estudo de correções quânticas envolvendo o acoplamento não-mínimo entre campo escalar e geometria provenientes, por exemplo, de abordagens de teorias de unificação (ALLEMANDI et al., 2006; QUIROS, 2019). Também são utilizadas no estudo de cosmologia, como na questão da inflação, onde o campo escalar atua como *inflaton* e são capazes de fornecer convenientes ajustes ao modelo padrão cosmológico baseado na RG (QUIROS, 2019). Outro uso de tais teorias em cosmologia envolve a utilização de um campo escalar em estudos de energia escura, a qual acredita-se ser responsável pela expansão acelerada do Universo (QUIROS, 2019).

Desta forma, neste Apêndice discutiremos sobre teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini na representação (*frame*) escalar-tensorial. Ele servirá de fundamentação teórica para a análise do problema da equivalência entre representações, a ser desenvolvido no Apêndice (D.1).

C.1.1 Representação de Jordan-Brans-Dicke

Para a discussão de teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini na representação escalar-tensorial, vamos nos basear nas discussões apresentadas em (OLMO, 2011b; SOTIRIOU; FARAONI, 2010). Assim, para essa análise, vamos introduzir um grau de liberdade a mais que será descrito pelo campo φ e considerar a ação dinamicamente equivalente a ação (1) tal que

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\varphi) + f'(\varphi)(\mathcal{R} - \varphi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (101)$$

Variando a ação (101) com relação a φ obtemos a seguinte equação, (OLMO, 2011b),

$$f''(\varphi)(\mathcal{R} - \varphi) = 0. \quad (102)$$

Vemos que se $f''(\varphi) \neq 0$, recuperamos a ação (1) quando $\varphi = \mathcal{R}$. Fazendo agora $\varphi \equiv f'(\phi)^{-1}$ ou, de outra forma $\phi = f'(\varphi)$, a ação (101) pode ser reescrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi \mathcal{R} - V(\phi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (103)$$

onde definimos o potencial como

$$V(\phi) \equiv \varphi(\phi)\phi - f(\varphi(\phi)). \quad (104)$$

Note que o fato de estarmos trabalhando com \mathcal{R} faz com que a ação (103) não possa ser interpretada como ação de Brans-Dicke para $\omega_0 = 0$. No entanto, podemos obter a ação de Brans-Dicke usando a transformação (15). Assim, sairemos da métrica $h_{\mu\nu}$ e passamos a trabalhar com métrica $g_{\mu\nu}$ através da relação $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}} g_{\mu\nu}$, com isso a ação (103) ficará

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \left[\phi \mathcal{R} - \frac{\omega_0}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - V(\phi) \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (105)$$

onde $\omega_0 = -3/2$ é o parâmetro de Brans-Dicke. Variando a ação (105) com relação a métrica e ϕ , temos respectivamente, as seguintes equações de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{3}{2\phi^2} \left[\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi \right] + \frac{1}{\phi} \left[\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi \right] - \frac{V(\phi)}{2\phi} g_{\mu\nu}, \quad (106)$$

$$\square \phi = \frac{\phi}{3} [\mathcal{R} - V'(\phi)] + \frac{1}{2\phi} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi. \quad (107)$$

Podemos eliminar o \mathcal{R} da equação (107) tomando o traço da equação (106) e usando o resultado na equação (107) que nos fornece a seguinte equação

$$2V(\phi) - \phi V'(\phi) = \kappa T. \quad (108)$$

A equação (108) nos diz que há uma relação algébrica entre ϕ e o traço do tensor energia-momento, T , ou seja, dado um $V(\phi)$ (especificamente uma $f(\mathcal{R})$), podemos encontrar solução tal que $\phi = \phi(T)$.

C.1.2 Representação de Einstein

Fazendo uso da transformação conforme tal que $g_{\mu\nu} = \phi^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}$ podemos reescrever a ação na representação de Jordan-Brans-Dicke , (105), na ação na representação de Einstein

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{\mathcal{R}}}{2\kappa} - U(\phi) \right] + S_M(\phi^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}, \psi), \quad (109)$$

onde

$$U(\phi) \equiv \frac{\mathcal{R}(\phi)\phi^2 - f(\mathcal{R}(\phi))}{2\kappa\phi^2}. \quad (110)$$

A variação da ação (109) com relação a métrica e ao campo escalar nos fornece as seguintes equações de campo , respectivamente

$$\tilde{G}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu}U(\phi)\kappa = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (111)$$

$$U'(\phi) = -\frac{T}{2\kappa}. \quad (112)$$

Diferente do que temos na representação de Jordan-Brans-Dicke , onde a equação de campo para ϕ , (107), nos fornece uma solução do tipo $\phi = \phi(T)$, na representação de Einstein não teremos isso devido ao fato de que o traço do tensor energia-momento depende de ϕ , isto é, $T = T(\tilde{g}_{\mu\nu}\phi^{-1}, \psi)$. O que teremos é uma solução ϕ que depende dos campos de matéria.

Por fim, tanto na representação de Jordan-Brans-Dicke quanto na representação de Einstein, teremos o limite da RG quando o traço do tensor energia-momento for nulo ou constante. Longe da fonte de curvatura no espaço-tempo o $U(\phi)$ da equação (111) pode ser interpretado como constante cosmológica que pode ser nula ou não, dependerá da $f(\mathcal{R})$. Além disso, de forma equivalente ao que foi discutido no final da seção (1.2) o termo equivalente a constante cosmológica na representação de Jordan-Brans-Dicke terá um fator $f_{\mathcal{R}_*}$ de diferença com relação a representação de Einstein, devido ao fato de no vácuo não termos necessariamente $\tilde{g}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$.

APÊNDICE D – No-hair: um estudo

D.1 Explorando a não-existência de buracos negros com cabelos escalares em teorias escalares-tensoriais na representação de Einstein-Palatini

D.2 Resumo

Foi feito um estudo sobre a possível não-existência de cabelo em teorias $f(\mathcal{R})$ na representação de Einstein-Palatini. Para esta finalidade, foi usado o método de Bekenshtein. Este método consiste somente na análise da ação de matéria e não depende da teoria gravitacional, a não ser que a ação de matéria seja modificada de tal forma a incluir informações da gravitação. Este é caso das teorias escalares-tensoriais na representação de Einstein.

A pergunta que nos motivou estudar a aplicação de tal método na representação de Einstein-Palatini é a seguinte: uma transformação conforme na ação de matéria é capaz de trazer novas informações sobre as condições da não-existência de BN com cabelo escalar incluindo restrições sobre a gravitação modificada?

A conclusão desse estudo foi que os resultados já conhecidos do método de Bekenshtein, para ação de matéria original, se mantém independente da modificação introduzida pela representação de Einstein, não trazendo assim, novas informações.

É importante dizer que não existe um consenso científico sobre a invariância (ou não) dos resultados físicos das teorias ao mudarmos de representação. Ou seja, há uma equivalência matemática, mas não necessariamente física entre a representação métrica (ou métrica-afim) e a sua representação escalar-tensorial (NOZARI; SADATIAN, 2009; QUIROS, 2019; FUJII; MAEDA, 2007; FLANAGAN, 2004b; BARS; STEINHARDT; TUROK, 2014). Nossos resultados estão alinhados a vários outros que indicam uma invariância física ao mudarmos de representação.

D.3 Preliminares

O teorema da unicidade para a família⁷¹ de métricas de Kerr-Newman, também conhecido como teorema *no-hair* (ausência de cabelo), descreve a conjectura de que o estado final de equilíbrio do espaço-tempo de um BN estacionário e assimétrico será descrito pela geometria de Kerr-Newman da RG(HAWKING; ISRAEL, 1979; ROBINSON,

⁷¹ Daqui para frente fica subentendido que quando falarmos sobre soluções de Kerr-Newman queremos dizer a família de soluções.

2004; COSTA, 2010; TOUBAL, 2010; CHRUSCIEL; COSTA; HEUSLER, ; CARTER, 1997; BEKENSTEIN, 1998). Em outras palavras, um BN estacionário será descrito somente por massa, M , carga⁷², Q , e momento angular⁷³, a . Esse fato pode ser considerado razoável se pensarmos que BNs podem ser entendidos como um sistema “termodinâmico” e tais sistemas, quando em equilíbrio, são descritos por um pequeno conjunto de variáveis de estado macroscópicas associadas à quantidades conservadas do sistema (CHRUSCIEL; COSTA; HEUSLER, ; HAMILTON, 1971). Além disso, essas quantidades M , Q e a sobrevivem ao colapso gravitacional, pois são quantidades conservadas associadas à simetrias fundamentais como aquelas relacionadas à lei de Gauss, por exemplo. Por outro lado, os números bariônicos e leptônicos também são quantidades conservadas, porém não há uma lei de Gauss ligada a elas. De acordo com a referência⁷⁴ (RUFFINI; WHEELER, 1971) temos que nesse caso, “o princípio da conservação de bárions [e léptons] não é violado diretamente; é transcendido. É transcendido porque, em um colapso, perde-se a possibilidade de medir o número de bárions [e léptons] e, portanto, essa quantidade não pode ser bem definida para um objeto colapsado.” Portanto, podemos dizer que “a afirmação de que ‘BNs não têm cabelo’⁷⁵ significa que eles podem somente ser ‘vestidos’ por um campo que obedece à lei de Gauss, como o campo eletromagnético” (TOUBAL, 2010).

Fisicamente, sabemos que um BN recém criado, seja a partir de um colapso gravitacional ou por meio da colisão de dois BNs, será não-estacionário (FROLOV VALERI P.; ZELNIKOV, 2011; HAMILTON, 1971). Desta forma, ele emitirá parte de sua energia através de ondas gravitacionais, perdendo inclusive possíveis cabelos nesse processo e, outra parte de sua energia será absorvida por ele até que seja alcançado o estado estacionário. Além disso, ainda sobre processos físicos de um BN é bastante conveniente destacar um trecho da referência (FROLOV VALERI P.; ZELNIKOV, 2011) em que temos “...um BN é um espaço vazio. A matéria, a qual criou o BN, tem caído dentro de seu abismo. A matéria atrás do horizonte de evento não pode afetar o exterior. Somente essas características do campo que são conectadas com integrais globalmente conservadas, tal como massa, momento angular [e carga], sobrevivem.”

Atribuí-se ao trabalho de Israel, (ISRAEL, 1967), o qual discute que a única geometria estática e assintoticamente plana das equações de Einstein no vácuo, com horizonte de evento regular, será descrita pela solução de Schwazschild, o início dos esforços para provar teoremas da unicidade para BNs mais gerais. Assim, desde a década de 1960 muito

⁷² Geralmente se descarta a possibilidade de BNs eletricamente carregados uma vez que durante sua formação a carga elétrica acaba sendo neutralizada durante o processo.

⁷³ Geralmente descrito por momento angular por massa.

⁷⁴ Recomendamos também a referência (BEKENSTEIN, 1996) sobre esse tópico.

⁷⁵ Atribuí-se a Wheeler o responsável pela frase ‘BNs não têm cabelo’ (*black holes have no hair*) e, posteriormente, foi sendo utilizado por outros/outras pesquisadores/pesquisadoras até chegar na forma de “teorema no-hair”, (CHRUSCIEL; COSTA; HEUSLER, ; ROBINSON, 2004; BEKENSTEIN, 1998).

se tem trabalhado e, nessa direção, importantes nomes da física de BNs como Carter, Robinson, Hawking, Wheeler, Wald, entre outros, têm contribuído na elaboração conceitos fundamentais para a prova de tal conjectura que é matematicamente densa (HAWKING; ISRAEL, 1979; RUFFINI; WHEELER, 1971; MAZUR, 2000). Entretanto, mesmo com bastante avanços na direção da prova de tal teorema, existem questões em aberto que ainda não estão bem estabelecidas até hoje como por exemplo, a questão da censura cósmica (fraca) que é usada na construção do teorema (MAZUR, 2000; COSTA, 2010; ROBINSON, 2004).

Por outro lado, paralelamente as tentativas de provar a conjectura da unicidade, foram surgindo contra-exemplos no qual descreviam BNs cabeludos, (WEINBERG, 2002; VOLKOV; GALTISOV, 1989; BIZON, 1990; BIZON; CHMAJ, 1992). Porém, tais soluções com cabelo não são estáveis e perderiam seu cabelo em algum momento. Além disso, não se conhece o mecanismo de formação de tais BNs cabeludos (BARACK et al., 2019). Conforme Bekenstein, (BEKENSTEIN, 1998), mencionou, podemos pensar que “massa e carga de um BN são análogas a massa e número atômico [de um átomo]. Assim, se BNs pudessem ter outros parâmetros, tal como BNs cabeludos, isso seria análogo a átomos e radicais excitados, objetos de química exótica”.

Existem maneiras diferentes de se estudar o teorema *no-hair*. Podemos trabalhar na linha mais árdua da conjectura em si que seria estudar as hipóteses do teorema e procurar somar esforços nas construções do que ainda pode não estar rigorosamente bem provado ou bem definido e suas possíveis validades para outras teorias da gravitação. Ou podemos buscar formas simples de excluir fontes de cabelo em soluções de BNs⁷⁶. Esta última pode ser realizada também de formas diferentes (BEKENSTEIN, 1998; WINSTANLEY, 2005; SOTIRIOU; ZHOU, 2014; HERDEIRO; RADU, 2015). A maneira que utilizaremos para analisar tal teorema em teorias escalares-tensoriais no referencial de Einstein-Palatini é o método de Bekenstein, (BEKENSTEIN, 1998), que discutiremos brevemente a seguir.

D.3.1 Método de Bekenstein

Como dissemos anteriormente, nosso objetivo é estudar o teorema *no-hair* utilizando métodos que possam descartar soluções de BNs com cabelo. E, o método de

⁷⁶ Nesse caso não estaremos “provando o teorema *no-hair*”, uma vez que isso significaria provar o teorema da unicidade para a métrica de Kerr-Newman. É bastante comum extrapolar seu significado e utilizar “teorema *no-hair*” para caracterizar um tipo de solução única que possivelmente não irá ser descrita por algum campo extra, como BNs que não são dotadas com cargas escalares (ou cabelo escalar), ou que o teorema da unicidade para a métrica de Schwarzschild é um “teorema *no-hair*” (para Schwarzschild), etc..

Bekenstein nos permite, quando possível, dizer se, dada uma fonte de matéria e energia, como campos escalares, é possível estabelecer condições em que não existirão soluções de BN com cabelo, como cabelo escalar? Para exemplificar o método vamos considerar o caso desenvolvido em (GRAHAM; JHA, 2014) onde é considerado uma ação de matéria de um campo escalar cuja lagrangiana é $P(\psi, X)$, onde ψ é o campo escalar e $X = -\nabla_\mu\psi\nabla^\mu\psi/2$. É importante dizer que o método de Bekenstein não faz uso das equações de campo gravitacional. Assim, temos

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} P(\psi, X), \quad (113)$$

cuja equação de campo é dada por

$$P_{,X} \square\psi + \nabla^\mu\psi(\nabla_\mu\psi P_{,X\psi} - \nabla^\nu\psi\nabla_\mu\nabla_\nu\psi P_{,XX}) + P_{,\psi} = 0, \quad (114)$$

onde $P_{,X} \equiv dP/dX$, $P_{,X\psi} \equiv dP_{,X}/d\psi$ e $\square = \nabla_\mu\nabla^\mu$. Vamos agora multiplicar a equação (114) por $P_{,\psi}$ e integrar ao longo de uma hipersuperfície Σ a partir do horizonte até o infinito. Integrando por partes, chegamos na seguinte identidade

$$\int_\Sigma (P_{,X} P_{,\psi\psi} \nabla_a\psi\nabla^a\psi - P_{,\psi}^2) \sqrt{-h} d^3x + \int_{\partial\Sigma} \psi P_{,X} \nabla^a\psi d\Sigma_a = 0, \quad (115)$$

onde h_{ij} é a métrica induzida sobre a hipersuperfície Σ . Neste exemplo consideraremos somente casos em que $P(\psi, X) = K(\psi) + V(X)$, onde $K(\psi)$ é uma função arbitrária de ψ e $V(X)$ uma função arbitrária de X , de modo que $P_{,\psi X} = 0$, assumindo a configuração de um BN assintoticamente plano e estacionário ($\partial\psi/\partial t = 0$). As contribuições no infinito e no horizonte desaparecerão e, portanto, a contribuição de fronteira desaparecerá da equação (115). A primeira desaparece, pois a solução é assintoticamente plana, a qual requer que ψ decaia apropriadamente no infinito. A última desaparece, pois o horizonte é uma superfície nula, uma vez que $d\Sigma_a d\Sigma^a$ deve ser zero, e o campo escalar é assumido ser regular no horizonte. Logo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $|\psi \tilde{\nabla}^a\psi d\Sigma_a| \leq (\psi^2 \tilde{\nabla}_a\psi \tilde{\nabla}^a\psi d\Sigma_b d\Sigma^b) = 0$. Por tudo isso, resta-nos a integral

$$\int_\Sigma [P_{,X} P_{,\psi\psi} \nabla_a\psi\nabla^a\psi - P_{,\psi}^2] \sqrt{-h} d^3x = 0. \quad (116)$$

Assumindo que $\nabla_a\psi\nabla^a\psi$ é positivo fora do horizonte, a identidade, equação (116), nos diz que ela não será satisfeita quando

$$P_{,X} P_{,\psi\psi} < 0. \quad (117)$$

Com essa condição, equação (117), a identidade (116) passa a não fazer mais sentido matemático por comportar todos os termos do lado esquerdo da identidade com mesmo sinal enquanto do lado direito da mesma temos um zero. Assim, a inequação (117)

estabelece as condições de *no-hair* de descarte de soluções de BNs com cabelo escalar, nas teorias em exemplo.

Assim, por exemplo, para $P(\psi, X) = X - V(\psi)$ as condições de *no-hair* se reduzem a $V''(\psi) > 0$ que claramente será satisfeita para potenciais do tipo $V(\psi) = m^2\psi^2/2$. Para o caso de fantasma (*ghost*) canônico, isto é, $P(\psi, X) = -X - V(\psi)$, teremos a condição de *no-hair* do tipo $V''(\psi) < 0$.

Portanto, a técnica de Bekenstein para explorar possíveis soluções de BNs sem cabelo consiste basicamente em analisar a integral da equação de campo proveniente da ação de matéria. É importante dizer que no estudo de outros tipos de Lagrangianas nem sempre será possível analisar os sinais dos elementos que compõem a integral da equação de campo tornando o método não muito eficaz para esses casos. Além disso, existem outras maneiras em que podemos explorar o teorema *no-hair* de Bekenstein. Poderíamos ter multiplicado a equação (114) por ψ ao invés de $P_{,\psi}$ ou multiplicar por $V'(\psi)$. As condições de *no-hair* mudam sensivelmente⁷⁷.

D.4 Método de Bekenstein aplicado à teorias escalares-tensoriais na representação de Einstein-Palatini

D.4.1 Equações de campo

Como sabemos, o método de Bekenstein só depende da ação de matéria. Por conta disso, o resultado do teorema é válido para teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini no geral, exceto⁷⁸ aquelas que modificam de alguma forma a ação de matéria. Na seção (C.1) apresentamos a versão escalar-tensorial das teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini na representação de Einstein e vimos que a ação de matéria é afetada por um campo escalar ϕ . Assim, o objetivo dessa seção é aplicarmos o método de Bekenstein em tais teorias e investigar a consequência da influência do campo ϕ sobre a ação de matéria de campos escalares com relação aos resultados já conhecidos do método de Bekenstein, isto é, a condição (117).

A ação de matéria (113) na representação de Einstein, onde usamos a transforma-

⁷⁷ Para mais exemplos vejam em (HERDEIRO; RADU, 2015).

⁷⁸ Na verdade, nem sempre modificar a ação de matéria significa que teremos uma modificação nas condições de não-existência de BNs com cabelos com relação a ação de matéria original. Como veremos na conclusão deste estudo, a modificação oferecida pela representação de Einstein-Palatini não nos leva a uma modificação nas condições de *no-hair* oferecidas pela ação de matéria original.

ção conforme $g_\mu = \phi^{-1}\tilde{g}_{\mu\nu}$, será

$$S_M = \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\phi^2} P(\chi, \psi), \text{ onde} \quad (118)$$

$$\chi \equiv -\frac{1}{2} \phi \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi = \phi \tilde{X}, \text{ e,} \quad (119)$$

$$\tilde{X} \equiv -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi. \quad (120)$$

Além disso, foi usado o fato de que $\sqrt{-g} = \sqrt{-\tilde{g}}/\phi^2$. Com isso, a ação (109) com a ação de matéria (118) fica

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{\mathcal{R}}}{2\kappa} - U(\phi) \right] + \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\phi^2} P(\chi, \psi) \quad (121)$$

A equação de campo para a métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é dado por

$$\tilde{G}_{\mu\nu} + \tilde{g}_{\mu\nu} \kappa U(\phi) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (122)$$

onde $\tilde{G}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $T_{\mu\nu}$ é tensor de energia-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{P(\chi, \psi)}{\phi^2} \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{P_{;\chi}}{\phi} \tilde{\nabla}_\mu \psi \tilde{\nabla}_\nu \psi. \quad (123)$$

$$(124)$$

Enquanto a equação de campo para o campo ϕ é dada por

$$4P(\chi, \psi) + P_{,\chi} \phi \tilde{\nabla}^\mu \psi \tilde{\nabla}_\mu \psi + 2\phi^3 U'(\phi) = 0. \quad (125)$$

Podemos escrever a equação de campo (125) usando o traço do tensor energia-momento, (123), que ficará

$$T^\psi(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi, \psi, \chi) + 2\kappa \phi U'(\phi) = 0. \quad (126)$$

Uma observação em relação a equação (125) é que para $P(\psi, \chi)$ e $f(\mathcal{R})$ dados ela nos permite extrair a seguinte informação: $\phi = \phi(\psi, \tilde{X})$.

Por fim, a equação para o campo ψ é dada por

$$P_{,\psi} - 2\chi P_{,\chi\psi} + P_{,\chi\chi} \phi \tilde{\nabla}^\mu \psi \tilde{\nabla}_\mu \chi - P_{,\chi} \tilde{\nabla}^\mu \psi \tilde{\nabla}_\mu \phi + \phi P_{,\chi} \square \psi = 0, \quad (127)$$

Note que para $\phi = 1$ a equação (127) se reduz a equação (114). Tendo em mãos todas essas informações, vamos utilizar o método Bekenstein para encontrar as condições da não-existência de BNs com cabelo escalar.

D.4.2 Aplicação do método de Bekenstein

Multiplicando a equação (127) por $P_{,\psi}$, integrando e, em seguida, integrando por partes temos

$$\int_{\mathcal{V}} \sqrt{-\tilde{h}} d^3x [P_{,\psi}^2 - \phi P_{,\chi} P_{,\psi\psi} \tilde{\nabla}^a \psi \tilde{\nabla}_a \psi - 2P_{,\psi} P_{,\chi} \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a \psi] + \int_{\partial\mathcal{V}} \phi P_{,\psi} P_{,\chi} \tilde{\nabla}^a \psi d\Sigma_a = 0. \quad (128)$$

Portanto, de forma similar ao que foi feito em (115), as condições de ausência de cabelo, assumindo $\phi > 0$, são

$$P_{,\chi} P_{,\psi\psi} < 0, \quad (129)$$

$$P_{,\chi} P_{,\psi} \tilde{\nabla}^a \psi \tilde{\nabla}_a \phi < 0. \quad (130)$$

onde estamos considerando nesse caso $P(\psi, \chi) = K(\chi) + V(\psi)$ de modo que $P_{,\chi\psi} = 0$.

Note que (129) é a mesma condição para o caso dado por (116), isto é, inequação (117). Apesar de existir informações de ϕ em P e em χ , por exemplo, o fato de ϕ ser positivo⁷⁹ não altera o sinal do resultado final. Desta forma, podemos concluir que as condições de ausência de cabelo, para a ação de matéria modificada, equação (118), são as mesmas da ação de matéria original, equação (113), com termos extras dado pela inequação (130). Porém, tais informações extras são irrelevantes para caracterizar condições de BNs sem cabelo escalar uma vez que as condições de *no-hair* da ação de matéria original já foram estabelecidas.

Por exemplo, para $P(\psi, \chi) = \chi - V(\psi)$, a condição (129), é $V''(\psi) > 0$, que é a mesma dada por (117). Vemos que o principal ponto do método de Bekenstein se reduz em estabelecer condições sobre o potencial, que não muda com essa maneira particular de modificar a ação de matéria através da representação de Einstein-Palatini. Assim, $g_{\mu\nu}$ sem cabelo escalar não muda se mudarmos de representação, isto é, tendo estabelecido as condições de *no-hair* de Bekenstein, $g_{\mu\nu}$ segue sem cabelo escalar.

Portanto, a resposta para a pergunta inicial, que motivou todo esse estudo: se uma transformação conforme na ação de matéria é capaz de trazer novas informações sobre as condições de não-existência de BN com cabelo escalar incluindo restrições sobre gravitação modificada? A resposta é: não, não é capaz de trazer novas informações sobre a não-existência de BN com cabelo. Esse resultado nos informa que pode existir uma inva-

⁷⁹ Se fosse possível tratar ϕ como $\phi < 0$, isso nos levaria afirmar que as condições de não-existência de cabelo da ação de matéria original, equação (113), e as da ação de matéria conformemente relacionada, equação (118), serão contraditórias. Por exemplo, para ação de matéria original, equação (116), teríamos a condição $P_{,\chi} P_{,\psi\psi} < 0$ enquanto para a ação de matéria conformemente relacionada, equação (128), seria $P_{,\chi} P_{,\psi\psi} > 0$.

riância sobre os resultados apresentados nas duas representações, isto é, na representação tradicional da teoria, sem campo escalar, e na representação escalar tensorial da mesma.

APÊNDICE E – Classificação de objetos sem horizonte de eventos.

E.1 Uma breve discussão sobre classificação de objetos sem horizonte

Existem diversas maneiras de analisar o quão próximo de um BN esfericamente simétrico, um objeto escuro possa estar. Uma delas, é utilizando o parâmetro ϵ , (CARDOSO; PANI, 2019), válido para objetos sem horizonte esfericamente simétricos, de modo que o teorema de Birkhoff contribui para a seguinte escolha

$$r_0 = 2M(1 + \epsilon), \quad (131)$$

onde r_0 define a superfície do objeto (note que ele mede a compacticidade do objeto $\epsilon = r_0/(2M) - 1$). Assim, para $\epsilon \rightarrow 0$, recuperamos a superfície de um BN.

Com isso, podemos classificar tais objetos da seguinte forma, (CARDOSO; PANI, 2017; CARDOSO; PANI, 2019),

- Objetos compactos (OCs): são aqueles que possuem $r_0 < 6M$ ou $\epsilon < 2$; ou seja, são aqueles onde a fóton-esfera está no interior deles.
- Objetos ultracompactos (OUCs): são aqueles que possuem $r_0 < 3M$ ou $\epsilon < 1/2$; ou seja, aqueles com fóton-esfera externa a eles⁸⁰.
- Objetos de fóton-esfera limpa (*ClePhos*⁸¹): são objetos ultracompactos⁸² com $r_0 < 2.038M$ ou $\epsilon \lesssim 0.0019$ e, portanto, possuem uma fóton-esfera “limpa”.

Os objetos compactos (ou ultracompactos) exóticos (OEs) podem pertencer a qualquer uma das classificações anteriores.

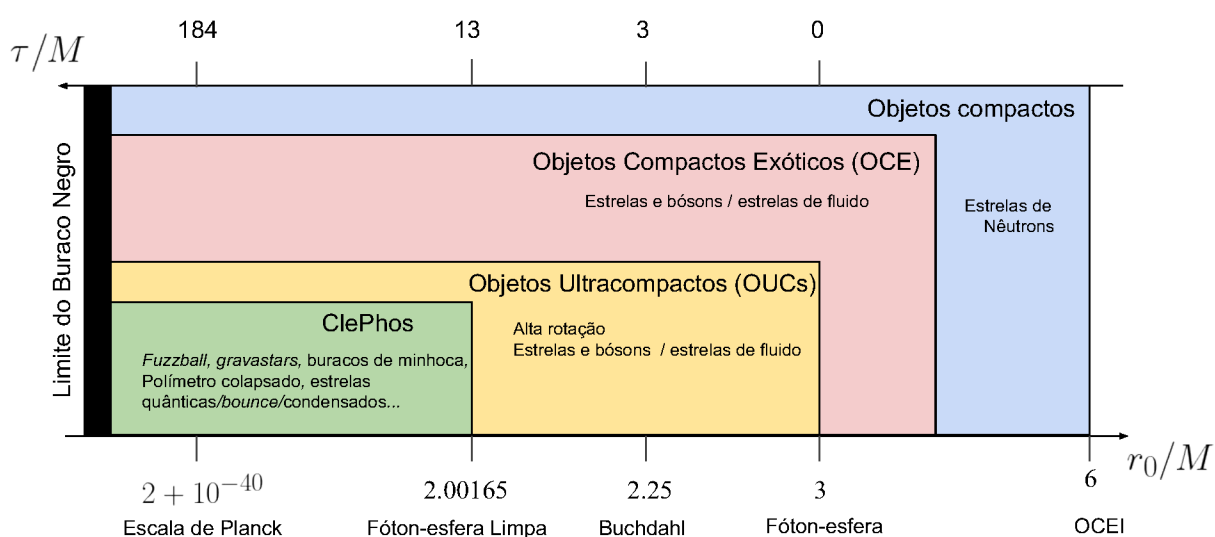
Na figura (10) temos uma ilustração do que acabamos de dizer. Assim, podemos ver que exemplos de OCs (ou os OEI - objetos com Órbita Circular Estável mais Interna) são as estrelas de nêutrons enquanto OEs e OUCs podem ser estrelas de bósons. Por fim, temos objetos como *gravastars* e buracos de minhocas na categoria de *ClePhos*.

A seguir, temos uma ilustração da deformação de um espaço-tempo produzido por um objeto esfericamente simétrico e estático em equilíbrio hidrostático bastante compacto em cinza e algumas regiões do espaço-tempo são representadas como o raio de Schwarzschild em $r = 2M$.

⁸⁰ Segundo (CARDOSO; PANI, 2019) “para esses objetos, a fenomenologia relacionada a fóton-esfera deve ser muito similar a de um BN.”

⁸¹ Do inglês “Clean-photon sphere object”.

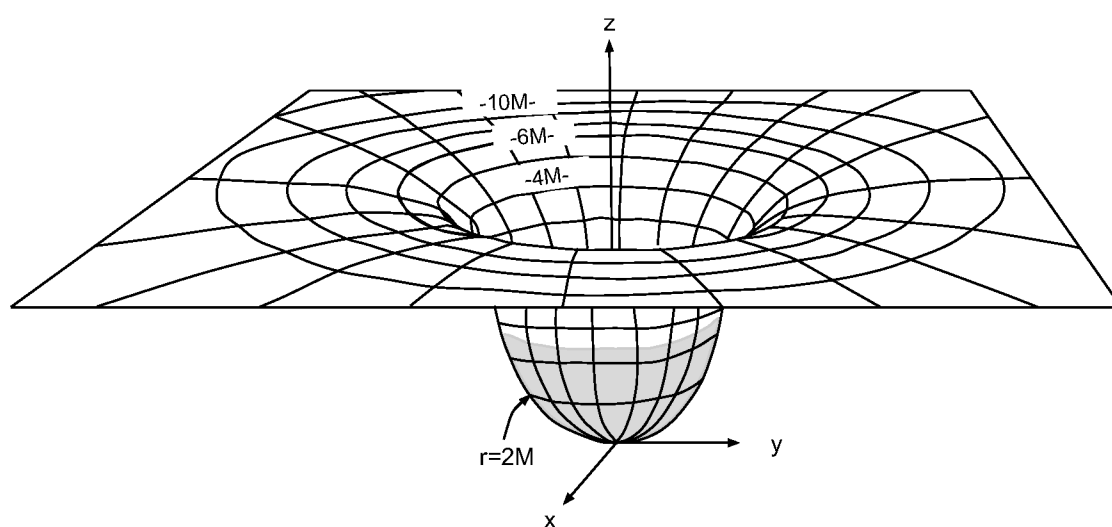
⁸² Segundo (CARDOSO; PANI, 2019) “para esses objetos, espera-se que o ‘*early-time*’ de *ClePhos* seja o mesmo dos BNs.”

Figura 10 - Classificação de OCs, OUCs e *ClePhos*.

Legenda: Classificação de objetos de acordo com sua compacticidade (em escala logarítmica).

Fonte: CARDOSO; PANI, 2017, p. 8. Adaptada pela autora.

Figura 11 - Objetos compactos: uma ilustração.



Legenda: Ilustração de um objeto bastante compacto em cinza com raio $R = 2.66M$ deformando o espaço-tempo.

Fonte: MISNER; THORNE; WHEELER, 1973, p. 614. Adaptada pela autora.

APÊNDICE F – Complementação gráfica do caso isotrópico.

Este apêndice será dedicado a mostrar os comportamentos das densidades (58) e (59) e de suas derivadas.

F.0.1 Densidade

Perfil 1

No gráfico (48) temos a representação da função

$$\bar{\rho}(\bar{r}) = \frac{\bar{\rho}_0}{1 + \exp\left(\frac{\bar{r} - \bar{r}_0}{\delta}\right)} \quad (132)$$

e de suas derivadas.

Perfil 2

No gráfico (49) temos a representação da função

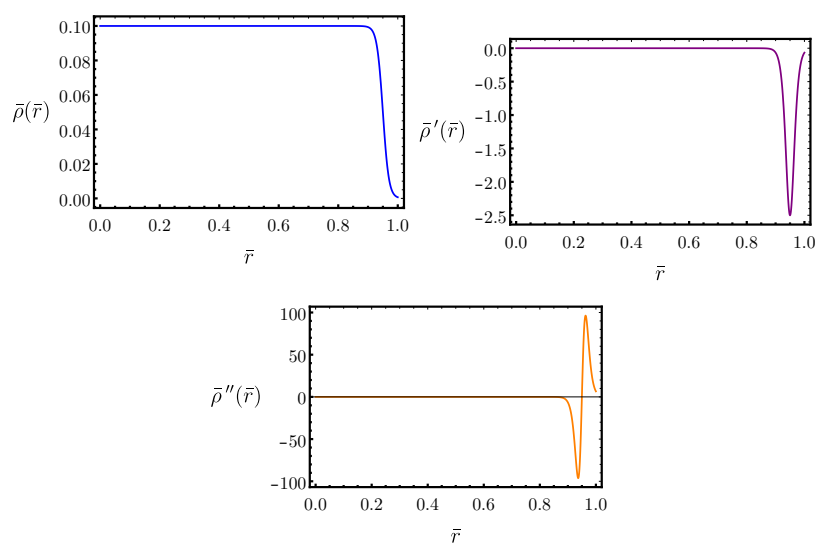
$$\bar{\rho}(\bar{r}) = \bar{\rho}_0(1 - \bar{r}^8) \quad (133)$$

e de suas derivadas.

Podemos ver no gráfico (48) (direita) que há um comportamento similar ao que acontece na componente g_{rr} da métrica, sobretudo para $\bar{\lambda} > 0$, relacionada a equação de campo para $B'(r)$, próximo à superfície ao se utilizar a densidade (132). Como já mencionado anteriormente, esse fato pode ser devido ao comportamento da derivada segunda deste perfil de densidade sendo dominante na equação para $B'(r)$ uma vez que a pressão próximo à superfície se torna aproximadamente nula e a parte do traço do tensor energia-momento presente na equação de $B'(r)$ correspondente a densidade passa a dominar.

Por outro lado, o perfil de densidade (133) tem um comportamento diferente em relação ao perfil (132), para sua derivada segunda, especialmente próximo da superfície. A consequência disso é que a componente g_{rr} associada a esse perfil de densidade não gera um ponto de máximo e outro de mínimo em g_{rr} próximo à superfície, apenas um ponto de máximo.

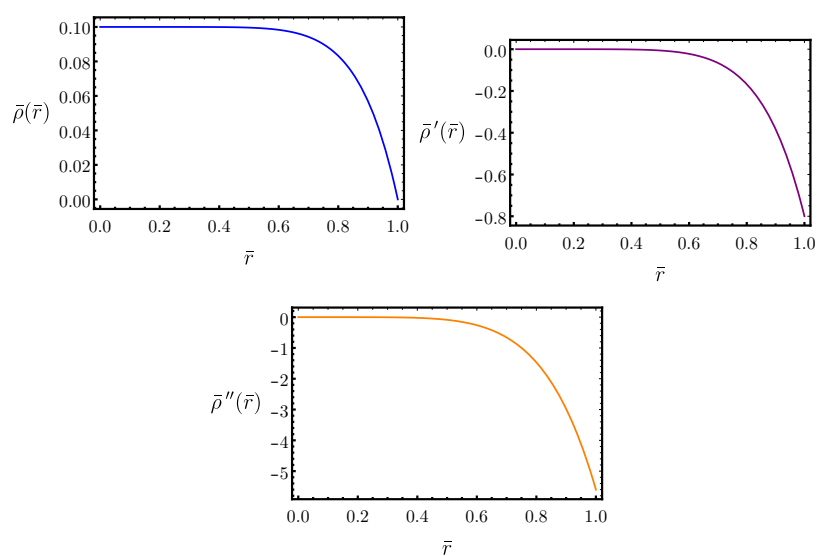
Gráfico 48 - Perfil de densidade e suas derivadas 1.



Legenda: Comportamento da densidade para $\bar{\rho}_0 = 0.10$, $\bar{r}_0 = 0.95$ e $\delta = 0.01$.

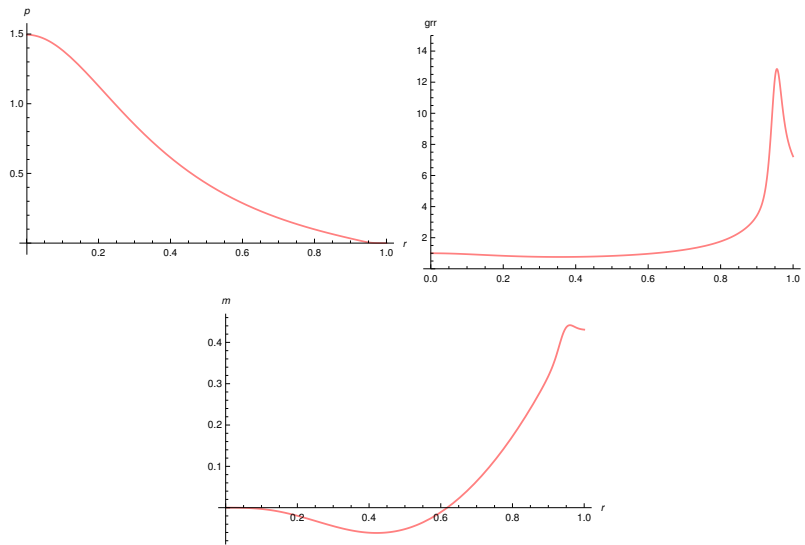
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 49 - Perfil de densidade e suas derivadas 2.



Legenda: Comportamento da densidade para $\bar{R} = 1$ e $\bar{\rho}_0 = 0.10$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 50 - Comportamento da pressão, g_{tt} e $m(\bar{r})$.

Legenda: Comportamento da pressão adimensional $\bar{p}(\bar{r})$ (superior-esquerda), componente g_{rr} (superior-direita) e $\bar{m}(\bar{r})$ em função da coordenada \bar{r} (inferior) para $\bar{\lambda} = -0.090$, $\bar{\rho}_0 = 0.145$, $\bar{p}_c = 1.495$, $\bar{\delta} = 0.01$ e $\bar{r}_0 = 0.95$.

Fonte: A autora, 2020.

Portanto, podemos concluir que para λ altos, possivelmente os termos de derivadas segundas de $\rho(r)$ passam a dominar próximo à superfície da estrela em teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini nas equações de campo para $B'(r)$, correspondentes à componente g_{rr} da métrica.

F.0.2 Comportamento de $m(r)$ para altas densidades

No gráfico (50) temos configurações além do domínio de existência da RG, onde a densidade corresponde a compacticidade próxima ao limite de Buchdahl. Vemos que na figura inferior que há uma região da função $\bar{m}(\bar{r})$ que se torna negativa. Isso pode acontecer teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini devido ao fato da função $m(r)$ envolver além da função densidade $\rho(r)$, mas também suas derivadas primeira e segunda, a pressão e suas derivadas (primeira e segunda) e de λ .

APÊNDICE G – Tensor de Riemann e escalar de Ricci

Este Apêndice será dedicado à relembrar o tensor de Riemann para uma geometria esfericamente simétrica e o escalar de Ricci para as soluções numéricas encontradas para $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ para os casos isotrópico e anisotrópico.

G.1 Tensor de Riemann

Para a geometria (32), as componentes do tensor de Riemann são dadas por

$$\mathbf{R}^r_{\theta\theta r} = -\frac{1}{2}e^{-B}rB', \quad (134)$$

$$\mathbf{R}^r_{\phi\phi r} = -\frac{1}{2}e^{-B}rB'\text{Sen}^2\theta, \quad (135)$$

$$\mathbf{R}^r_{ttr} = -\frac{1}{4}e^{A-B}(A'^2 - A'B' + 2A''), \quad (136)$$

$$\mathbf{R}^\theta_{r\theta r} = \frac{B'}{2r}, \quad (137)$$

$$\mathbf{R}^\theta_{\phi\phi\theta} = (-1 + e^{-B})\text{Sen}^2\theta, \quad (138)$$

$$\mathbf{R}^\theta_{t\theta t} = -\frac{e^{A-B}A'}{2r}, \quad (139)$$

$$\mathbf{R}^\phi_{r\phi r} = \frac{B'}{2r}, \quad (140)$$

$$\mathbf{R}^\phi_{\theta\phi\theta} = (1 - e^{-B}), \quad (141)$$

$$\mathbf{R}^\phi_{t\phi t} = -\frac{e^{A-B}A'}{2r}, \quad (142)$$

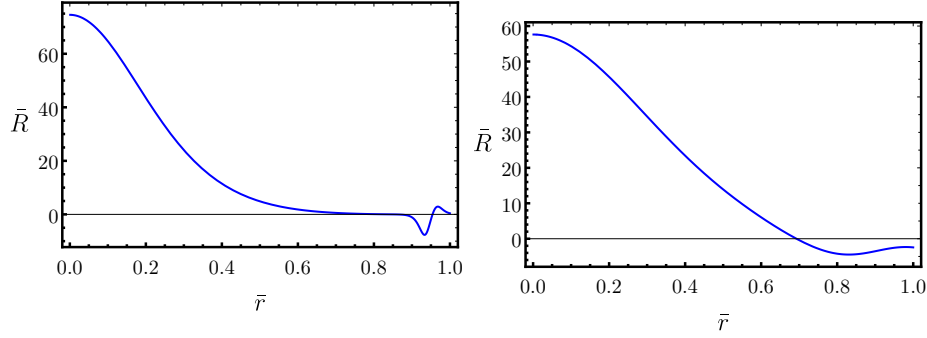
$$\mathbf{R}^t_{rtr} = \frac{1}{4}(-A'^2 + A'B' - 2A''), \quad (143)$$

$$\mathbf{R}^t_{\theta t\theta} = -\frac{1}{2}e^{-B}rA', \quad (144)$$

$$\mathbf{R}^t_{\phi t\phi} = -\frac{1}{2}e^{-B}rA'\text{Sen}^2\theta. \quad (145)$$

Como podemos observar, as componentes do tensor de Riemann não apresentam informações de derivadas de segunda ordem em $B(r)$. Assim, no âmbito da análise dos tensores de Riemann (e conseqüentemente dos escalares) não há possibilidade de divergências para os modelos estudados nessa tese. Uma ilustração desse fato, oferecidas pela soluções numéricas obtidas nessa tese, são apresentadas a seguir para o escalar de Ricci.

Gráfico 51 - Comportamentos do escalar de Ricci.



Legenda: Comportamento do escalar de Ricci.

Fonte: A autora, 2020.

G.2 Escalar de Ricci

Há uma simplicidade técnica em teorias $f(\mathcal{R})$ Palatini que nos permite calcular o escalar de Ricci R , a partir do escalar de Ricci $\mathcal{R}(T)$. Para isso usaremos transformação da métrica conforme para o escalar de Ricci, isto é, equação (15), que lembrando aqui é

$$\mathcal{R} = R + \frac{3}{2f_{\mathcal{R}}^2} \nabla_{\mu} f_{\mathcal{R}} \nabla^{\mu} f_{\mathcal{R}} + \frac{3}{f_{\mathcal{R}}} \square f_{\mathcal{R}}. \quad (146)$$

Assim, para a geometria (32) temos que

$$\nabla_{\mu} f_{\mathcal{R}} \nabla^{\mu} f_{\mathcal{R}} = g^{rr} (\partial_r f_{\mathcal{R}})^2 = e^{-B} (\partial_r f_{\mathcal{R}})^2 \quad (147)$$

e,

$$\square = \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} f_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} f_{\mathcal{R}}) = e^{-\frac{(A+B)}{2}} r^{-2} \partial_r [e^{\frac{A+B}{2}} r^2 e^{-B} \partial_r f_{\mathcal{R}}]. \quad (148)$$

Para as teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda \mathcal{R}^2$ a equação (4) nos informa que a relação entre \mathcal{R} e o traço do tensor energia-momento, T , é dado por $\mathcal{R} = -\kappa T$. Portanto, a equação (146) pode ser escrita como

$$R = -\kappa T - \frac{3}{2f_{\mathcal{R}}^2} e^{-B} (\partial_r f_{\mathcal{R}})^2 - \frac{3}{f_{\mathcal{R}}} e^{-\frac{(A+B)}{2}} r^{-2} \partial_r [e^{\frac{A+B}{2}} r^2 e^{-B} \partial_r f_{\mathcal{R}}], \quad (149)$$

onde $f_{\mathcal{R}} = -\kappa + 2\kappa\lambda T$. Desta forma a equação (149) passa a depender apenas de informações do traço do tensor energia-momento, essencialmente da densidade $\rho(r)$, pressão, $p(r)$, e de suas derivadas (primeira e segunda).

Representamos graficamente em (51) dois exemplos associados as soluções isotró-

pica (esquerda), com perfil de densidade (132), e anisotrópica (direita), com perfil de densidade (133), para um conjunto de parâmetros específicos, porém outras configurações são mais ou menos similares a estes casos. Assim, podemos ver nesse gráfico, que a derivada segunda da densidade também parece dominar, particularmente próximo à superfície. Vemos ainda que não há singularidades presentes no centro da estrela nem superfície.

APÊNDICE H – Complementação gráfica para o caso anisotrópico.

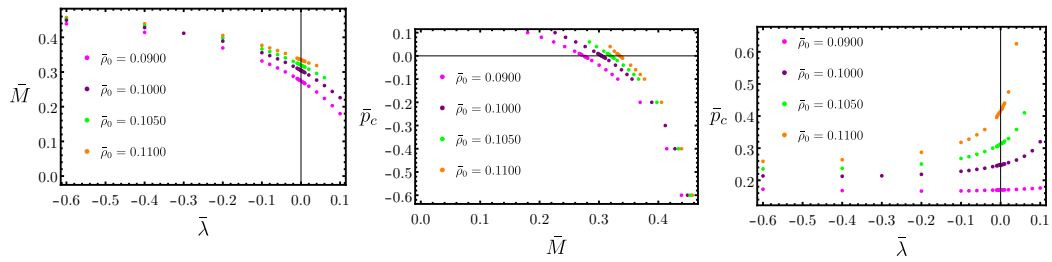
Este Apêndice será dedicado a expor mais algumas configurações de objetos anisotrópico em teorias $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini.

H.0.1 Objetos anisotrópicos

Nos gráficos (52) temos algumas configurações que não foram discutidas no capítulo 3 como, por exemplo, o caso de $\bar{\lambda}$ variando. Em tal gráfico podemos ver que para $\bar{\sigma} > 0$, a massa diminui conforme $\bar{\lambda}$ aumenta em módulo enquanto a pressão central aumenta conforme $\bar{\lambda}$ aumenta em módulo. Tudo isso pode ser visto no gráfico (52) esquerda e direita. Com respeito ao gráfico do centro onde temos uma relação entre a pressão central e a massa, vemos que o impacto da variação de $\bar{\lambda}$ sobre tal relação, provoca um comportamento onde, conforme a massa aumenta, a pressão central diminui, tornando-se inclusive negativa.

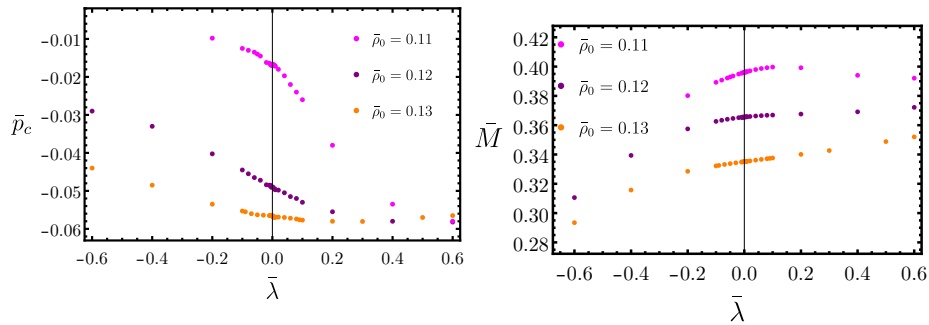
Nos gráficos que correspondem a variação de $\bar{\sigma}$ com $\{\bar{\rho}_0, \bar{\lambda}\}$ fixos, temos comportamentos similares aos já discutidos no capítulo 3, exceto pela troca das situações, como por exemplo, no gráfico (54), que representa o caso $\{\bar{\lambda} > 0, \bar{\sigma} > 0\}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.12$, há configurações de massas menores que as da RG e que diminuem conforme $\bar{\sigma}$ aumenta. Enquanto que para o gráfico (43), que representa a situação $\{\bar{\sigma} > 0, \bar{\lambda} > 0\}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.13$, há configurações de massas maiores do que as da RG e que diminuem conforme $\bar{\sigma}$ aumenta. O comportamento da relação \bar{M} e $\bar{\sigma}$ também muda. No caso de (54) temos um comportamento linear enquanto no caso (43) não. Tudo isso tem a ver com a escolha de $\bar{\rho}_0$ e do $\bar{\lambda}$, que podem configurar objetos mais ou menos compactos para um conjunto $\{\bar{\sigma} > 0, \bar{\lambda} > 0\}$ (ou $\{\bar{\sigma} < 0, \bar{\lambda} < 0\}$) fixo. Como visto nos gráficos onde $\bar{\rho}_0$ varia, como em (36) ou (39) há regiões da curva $\bar{M} = \bar{M}(\bar{\rho}_0)$ que podem passar acima ou abaixo da curva da RG, fornecendo objetos mais, menos ou tão compactos quanto os da RG.

Gráfico 52 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\lambda} < 0$ variando com $\bar{\sigma} = +1$ e $\bar{\lambda} < 0$.



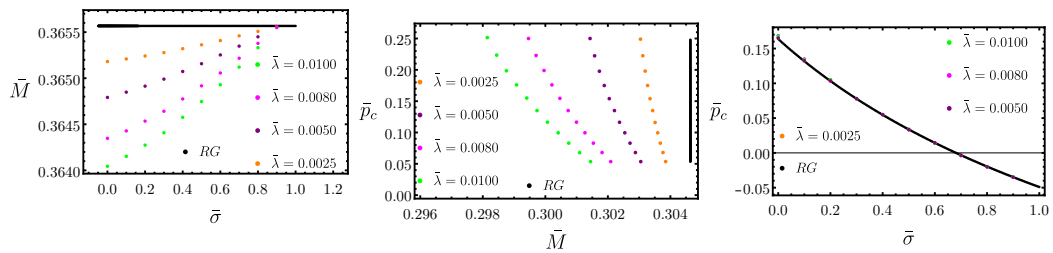
Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\lambda}_0$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de $\bar{\lambda}$ (centro) e de \bar{p}_c em função de \bar{M} (direita) para vários valores de $\bar{\rho}_0$ e $\bar{\sigma} = +1$.
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 53 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\lambda} < 0$ variando com $\bar{\sigma} = -1$ e $\bar{\lambda} < 0$.



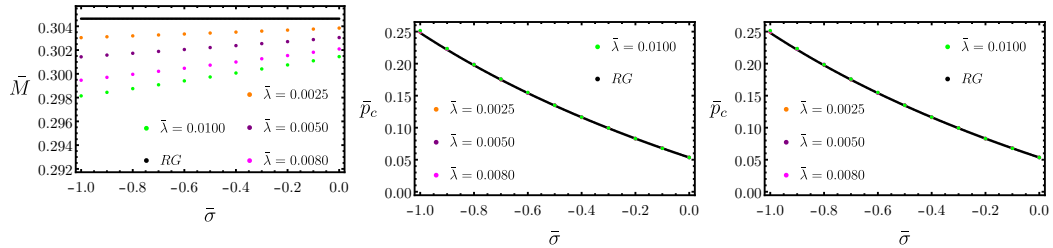
Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\lambda}_0$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de $\bar{\lambda}$ (direita) para vários valores de $\bar{\rho}_0$, $\bar{R} = 1$ e $\bar{\sigma} = -1$.
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 54 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.12$ e $\bar{\lambda} > 0$.



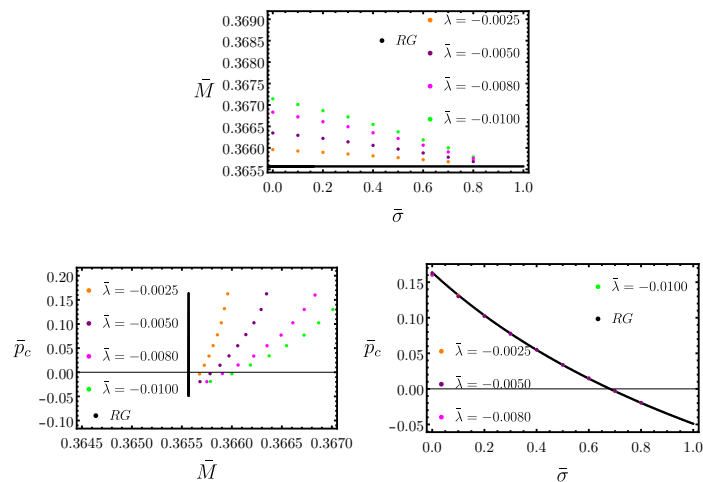
Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de \bar{M} (centro) e de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita) para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.12$.
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 55 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.10$ e $\bar{\lambda} > 0$.



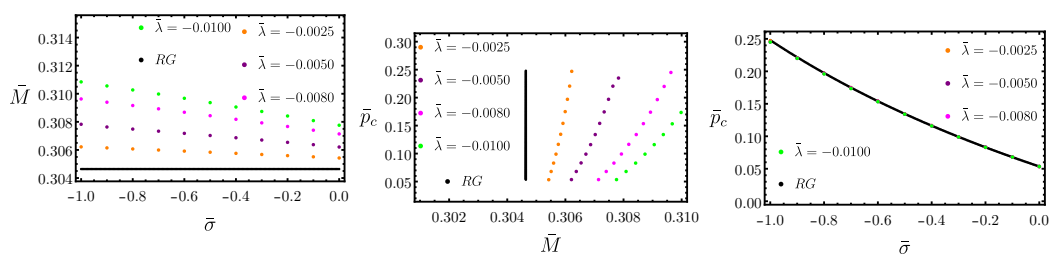
Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de \bar{M} (centro) e de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita) para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.10$.
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 56 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} > 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.12$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de \bar{M} (centro) e de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita) para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.12$.
Fonte: A autora, 2020.

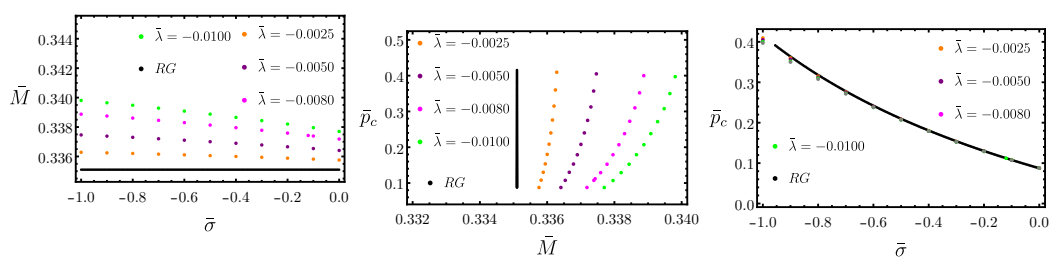
Gráfico 57 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.10$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de \bar{M} (centro) e de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita) para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.10$.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 58 - Comportamentos da massa e pressão central para $\bar{\sigma} < 0$ variando com $\bar{\rho} = 0.11$ e $\bar{\lambda} < 0$.



Legenda: Comportamento de \bar{M} em função de $\bar{\sigma}$ (esquerda) de \bar{p}_c em função de \bar{M} (centro) e de \bar{p}_c em função de $\bar{\sigma}$ (direita) para vários valores de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\rho}_0 = 0.11$.

Fonte: A autora, 2020.

APÊNDICE I – Artigo publicado.

Segue o artigo fruto desta tese.

Observação final: Há uma versão desta tese que é mais confortável para ler presente em:

<https://drive.google.com/file/d/1mq1NdzVhZ03rDX8sf3wpbD6KBthbUqqj/view?usp=sharing>



A model of compact and ultracompact objects in $f(\mathcal{R})$ -Palatini theory

Fernanda Alvarim Silveira, Rodrigo Maier, Santiago Esteban Perez Bergliaffa^a

Departamento de Física Teórica, Instituto de Física, Universidade do Estado de Rio de Janeiro, CEP 20550-013 Rio de Janeiro, Brazil

Received: 25 August 2020 / Accepted: 20 December 2020
© The Author(s) 2021

Abstract We present the features of a model which generalizes Schwarzschild's homogeneous star by adding a transition zone for the density near the surface. By numerically integrating the modified TOV equations for the $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ Palatini theory, it is shown that the ensuing configurations are everywhere finite. Depending on the values of the relevant parameters, objects more, less or as compact as those obtained in GR with the same density profile have been shown to exist. In particular, in some region of the parameter space the compactness is close to that set by the Buchdahl limit.

1 Introduction

The idea that the endpoint of stellar evolution of sufficiently massive and compact stars is a black hole can be tested by exploring the consequences of the existence of very compact objects, which would offer a window to extreme relativistic effects, and point out to new physics (for a review see [1]). In the realm of General Relativity, there are currently many examples of such objects: boson stars [2], gravastars [3], wormholes [4, 5], quasi-black holes [6], and superspinars [7], among others which, under reasonable assumptions, obey the Buchdahl limit ($M/R < 4/9$) [8]. In the family of compact objects, those that are ultra-compact (UCOs) are particularly interesting. In the static and spherically symmetric case they obey $2M < R < 3M$ [9]. Hence they have a photosphere, and a second - stable - light ring [10, 11], that give rise to a trapping zone for particles with zero mass. Such a zone may have important consequences for gravitational perturbations [12],¹ since some of their modes can decay very slowly [14], and source nonlinear effects which may destabilize the system [15].

¹ See [13] for the case of weakly interacting massless particles.

^ae-mail: sepbergliaffa@gmail.com (corresponding author)

The simplest UCO in GR is the one described by the Schwarzschild solution [16]. Several aspects of this model have been studied, such as its stability under radial perturbations [17], and its mode structure [12]. The constant density star has also been used to model the gravitational-wave echoes of the remnant of neutron-star binary coalescences [18], and to describe gravastars (by going beyond the Buchdahl limit) [19–22]. The slowly-rotating generalization of the homogeneous star was obtained in [23], while the influence of a nonzero cosmological constant was considered in [13, 24–27].² The goal of the present work is to study the features of a simple UCO, inspired in the constant density star, when a theory different from GR is considered. In particular, we shall concentrate here in $f(\mathcal{R})$ theories of gravity in their Palatini version (see [31, 32] for reviews). Such theories offer an alternative to GR, and their consequences have been widely studied in compact objects (see for instance [33–35]).³

We shall consider a model described by a density that is almost constant inside the object, and falls smoothly to zero near the surface.⁴ It will be shown that the models built with this density profile in the theory given by $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ are everywhere regular.⁵ This type of $f(\mathcal{R})$ has been frequently employed both in the metric and the Palatini formalism. In the latter, among many examples we can cite the following: charged black hole solutions with nonlinear electrodynamics as a source have been analysed in [42] (and their quasinormal modes in [43]), wormholes solutions in [44], and nonsingular black holes in [45]. The ratio of crustal

² A detailed investigation of the structure of compact objects in the polytropic case was presented in [28–30].

³ For applications in a cosmological setting, see [36–40], among others.

⁴ Such a profile was used in [41] to study the structure of nonrelativistic stars in Palatini $f(\mathcal{R})$ theories.

⁵ We shall also show that the -inconsequential- discontinuities of the constant density model at the surface of the star in GR (i.e. the discontinuities in the derivatives of the pressure and of the rr component of the metric tensor) are smoothed out.

to the total moment of inertia of NSs in this theory was calculated in [46]. The structure of neutron stars focusing in the role of the derivatives of the equation of state was studied in [33]. Polytropic stars in the Ehlers–Pirani–Schild approach to Palatini \mathcal{R} -squared gravity have been considered in [34].⁶

The paper is structured as follows. The modified TOV equations for $f(\mathcal{R})$ a la Palatini are presented in Sect. 2. The results obtained by numerical integration of such equations, paying special attention to the compactness and the central pressure, and to the comparison with the model obtained with the same density profile in GR, will be displayed in Sect. 3. An examination of the trapping zones using the effective potential will be given in Sect. 4. Our closing remarks are presented in Sect. 5.

2 Stellar structure in $f(\mathcal{R})$ Palatini gravity

The modified Hilbert-Einstein action is given by

$$S[g_{\mu\nu}, \Gamma, \psi_m] = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_m[g_{\mu\nu}, \psi_m], \tag{1}$$

where $f(\mathcal{R})$ is a function of the Ricci scalar $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma)$, with $\mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma) = -\partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda + \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$. In the Palatini formalism [50], both the metric and the connection Γ are taken as independent fields. The matter action S_m depends on the matter fields ψ_m and the metric $g_{\mu\nu}$. The field equations, obtained by varying the action with respect to the metric and the connection [51], are given by

$$f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \mathcal{R}_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} f(\mathcal{R}) g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

$$\nabla_\rho \left[\sqrt{-g} \left(\delta_\lambda^\rho f_{\mathcal{R}} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_\lambda^\mu f_{\mathcal{R}} g^{\rho\nu} - \frac{1}{2} \delta_\lambda^\nu f_{\mathcal{R}} g^{\mu\rho} \right) \right] = 0, \tag{3}$$

where $f_{\mathcal{R}} \equiv df/d\mathcal{R}$ and $T_{\mu\nu} \equiv (2/\sqrt{-g}) \delta S_m / \delta g^{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor, which satisfies the conservation equation

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{4}$$

The trace of Eq. (2) yields

$$f_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}) \mathcal{R} - 2f(\mathcal{R}) = 8\pi T. \tag{5}$$

⁶ In a cosmological setting, there are many works devoted to \mathcal{R} -squared gravity in the Palatini approach. Among them, bouncing cosmologies have been studied in [47], limits imposed by the redshift drift were presented in [39], the possible development of singularities has been analyzed in [48], the sequence of cosmological eras using phase space analysis was considered in [36], and inflation was studied in [49].

For a given $f(\mathcal{R})$, this algebraic equation yields the scalar curvature \mathcal{R} as a function of the trace T of the energy-momentum tensor.

The stellar structure is computed by assuming a spherically-symmetric and static metric with line element

$$ds^2 = -e^{A(r)} dt^2 + e^{B(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{6}$$

and a perfect-fluid matter with energy-momentum tensor $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, where $\rho(r)$ is the density and $p(r)$ is the pressure, and u^μ the four-velocity of the fluid. Under these assumptions, Eq. (4) yields

$$p' = -\frac{A'}{2}(\rho + p), \tag{7}$$

where the prime denotes derivative with respect to the radial coordinate, r . The tt and rr components of the field equations (2) are [52,53]

$$A' = -\frac{1}{1 + \gamma_0} \left(\frac{1 - e^B}{r} - \frac{e^B}{f_{\mathcal{R}}} 8\pi r p + \frac{\alpha_0}{r} \right), \tag{8}$$

$$B' = \frac{1}{1 + \gamma_0} \left(\frac{1 - e^B}{r} + \frac{e^B}{f_{\mathcal{R}}} 8\pi r \rho + \frac{\alpha_0 + \beta_0}{r} \right), \tag{9}$$

where

$$\alpha_0 \equiv r^2 \left[\frac{3}{4} \left(\frac{f'_{\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}} \right)^2 + \frac{2f'_{\mathcal{R}}}{rf_{\mathcal{R}}} + \frac{e^B}{2} \left(\mathcal{R} - \frac{f}{f_{\mathcal{R}}} \right) \right], \tag{10}$$

$$\beta_0 \equiv r^2 \left[\frac{f''_{\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}} - \frac{3}{2} \left(\frac{f'_{\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}} \right)^2 \right], \tag{11}$$

$$\gamma_0 \equiv \frac{rf'_{\mathcal{R}}}{2f_{\mathcal{R}}}, \tag{12}$$

are dimensionless. Using Eq. (8) in Eq.(7), and introducing the mass parameter $m(r) \equiv r(1 - e^{-B})/2$, the generalised TOV equations take the form [41,53]

$$p' = -\frac{1}{1 + \gamma_0} \frac{\rho + p}{r(r - 2m)} \left[m + \frac{4\pi r^3 p}{f_{\mathcal{R}}} - \frac{\alpha_0}{2}(r - 2m) \right], \tag{13}$$

$$m' = \frac{1}{1 + \gamma_0} \left[\frac{4\pi r^2 \rho}{f_{\mathcal{R}}} + \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \frac{m}{r}(\alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0) \right]. \tag{14}$$

For a given $f(\mathcal{R})$, the functions $A(r)$, $B(r)$, $\rho(r)$, and $p(r)$ determine the stellar structure of a model governed ultimately by the field equations (2), (3), and obeying the conservation equation (4). The boundary conditions are the usual ones ($p(0) = p_c$ and $m(0) = 0$), and an equation that defines the form of the energy density is to be added to the system for the numerical integration (see below). Since Birkhoff’s theorem is valid in $f(\mathcal{R})$ -Palatini theories (see for instance [32]), the exterior solution of our models is the Schwarzschild-de

Sitter solution. Therefore, at the surface of the star, defined by $p(R) = 0$, we have $A(r = R) = \ln(1 - 2M/R - \Lambda R^2)$, where $\Lambda = \mathcal{R}_*/4$, and the mass of the configuration is given by

$$M = m(R) - \frac{\mathcal{R}_* R}{3},$$

where \mathcal{R}_* is the solution of Eq. (5) for $T = 0$, and R is the radius of star.

Let us point out that Eqs. (13) and (14) are very different from those corresponding to the GR case (i.e. for $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$). Leaving aside both the overall $1/(1 + \gamma_0)$ factor on the rhs of both equations and the important changes brought by the explicit form of α_0, β_0 , and γ_0 (to be discussed below), the rhs of Eq. 14 depends on both ρ and m .

To solve the system numerically, the dependence of α_0, β_0 , and γ_0 with R and its derivatives is written in terms of ρ, p , and their derivatives using Eq. (5).⁷ From now on, we will work with the so-called \mathcal{R} -squared gravity, characterised by the function $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda \mathcal{R}^2$, where $[\lambda] = L^2$. It follows from Eq. (5) that⁸ $\mathcal{R} = -8\pi T = -8\pi(-\rho + 3p)$. Hence, the energy density and the pressure appear on the r.h.s. of Eqs. (13) and (14), as well as their first and second derivatives. Although, under some assumptions, the dependence on such derivatives leads to the appearance of singularities at the surface of stars built with the equations presented above [52], we shall see in the next section that the model introduced here is everywhere regular.

3 Results

The results of the numerical integration of the system (13)-(14) will be presented next, assuming the following form of the matter density:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[\frac{r-q}{\Delta}\right]}, \tag{15}$$

where ρ_0, q and Δ are parameters. Such a form improves the case $\rho = \text{constant}$ by replacing the abrupt fall to zero of the latter at the surface of the star with a transition zone, which can be considered as a first approach to an atmosphere. In fact, this form of the density smooths out discontinuities of the constant density model at the surface of the star both for GR (where the density as well as the first derivative of the metric component g_{rr} and of the pressure are -inconsequentially-discontinuous, see the Appendix), and for the model considered here, as will be shown below.

⁷ For reviews of relativistic stellar structure in modified theories of gravity, see [54,55].

⁸ Notice that $R_* = 0$ for $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda \mathcal{R}^2$.

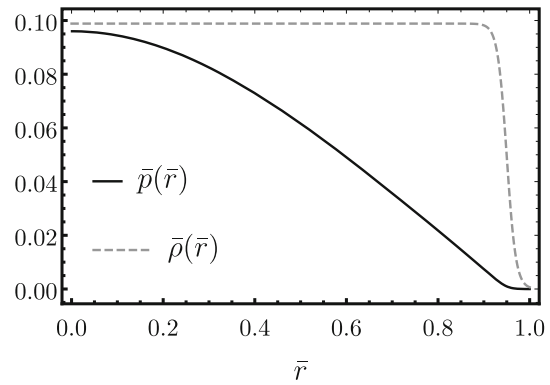


Fig. 1 The plot shows an example of the radial dependence of the density and the pressure of the models considered here

In the following we shall present the results of the integration of the modified TOV system with the density profile given above, for different values of the parameters (the results for GR are presented in the Appendix).⁹ Let us recall that to integrate the system of first order differential equations we need to specify $p(0) \equiv p_c$, and $m(0) = 0$, as well as the value of the parameters λ , and ρ_0 . Numerical integration then provides $M = M(p_c, \rho_0, \lambda)$ and $R = R(p_c, \rho_0, \lambda)$. In the following, we shall choose to render the parameters dimensionless using R , the radius of each configuration. Such a choice reduces the number of parameters and yields, upon integration, directly the compactness $\bar{M} = M/R$, at the price of disposing of the values of the radius and the mass of each configuration, a fact that does not have any impact on our results, see next section.¹⁰ It also entails that $\bar{p}(\bar{r} = 1) = 0$ in all cases, and permits the construction of point plots of the form $\bar{p}_c = \bar{p}_c(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$ and $\bar{M} = \bar{M}(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$, among others.

Before presenting the results, it is important to point out that we shall only consider sets of parameters such that the surface of the star is located after the region in which the density falls exponentially to zero, as shown in Fig. 1. Note that at the zero of the pressure (located at $\bar{r} = 1$), the energy density is extremely small.

There is a limited range of values of $\bar{\lambda}$ and $\bar{\rho}_0$ that allow for this type of configuration. This in turn leads to limits on \bar{p}_c and \bar{M} .¹¹ Other configurations are possible, for instance those in which the pressure decays slower than the density, and approaches zero from above the latter. Since these models lead to configurations with a very small \bar{M} , we shall not study them here.

⁹ We shall keep $q = 0.95$ and $\Delta = 0.01$ fixed, since they do not qualitatively influence the results.

¹⁰ Dimensionless quantities will be distinguished from dimensional ones by a bar.

¹¹ The adoption of the exponential profile for the density also leads to limits on the parameters in models based in GR, see Appendix.

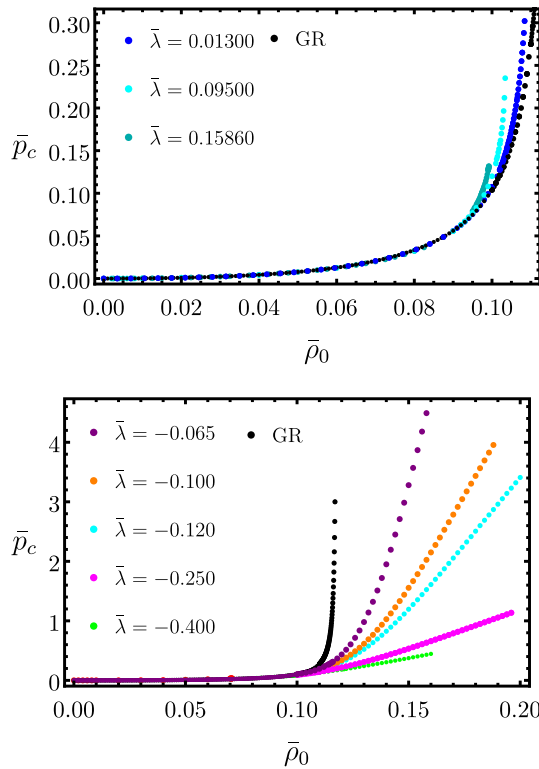


Fig. 2 \bar{p}_c as a function of $\bar{\rho}_0$, for various values of $\bar{\lambda} > 0$ (upper panel) and $\bar{\lambda} < 0$ (lower panel)

Let us begin by showing the values of the central pressure as a function of $\bar{\rho}_0$ for fixed $\bar{\lambda}$, see Fig. 2.

Note that, contrary to what the plots seem to indicate, the central pressure is finite for all values of $\bar{\lambda}$, since for each of them there is a maximum value of $\bar{\rho}_0$ which, along with the corresponding value of \bar{p}_c , is such that the pressure decays faster than the density, as in Fig. 1. By incrementing $\bar{\lambda}$ beyond that value, the model changes to the non-compact type alluded to above. The plots in Fig. 2 show that for $\bar{\rho}_0$ up to approximately 0.095, there are no appreciable differences between the values of \bar{p}_c with $\bar{\lambda} \neq 0$ and those of GR. For higher densities, the behaviour is strongly dependent of the sign of $\bar{\lambda}$. For a given $\bar{\rho}_0$, the values of \bar{p}_c for positive $\bar{\lambda}$ are larger than those corresponding to GR.

In the case of $\bar{\lambda} < 0$, for a given value of \bar{p}_c larger than approximately 0.20, there are configurations with a higher (sometimes much higher) value of $\bar{\rho}_0$. Also, for densities higher than ≈ 0.15 , the central pressure can be substantially larger than that of GR, and for a given $\bar{\rho}_0$ in that region the pressure is higher for smaller $|\bar{\lambda}|$. It is important to point out that, as in the case of GR with density profiles of the form $\rho = \rho_0\chi(r)$, where χ is dimensionless, it follows from the modified TOV equations that p_c must have the form $p_c = \rho_0g(\bar{\rho}_0, \bar{\lambda})$, where g is dimensionless. Hence, the curves $p_c \times \rho_0$ for any fixed λ and R will look like the ones displayed in Fig. 2.

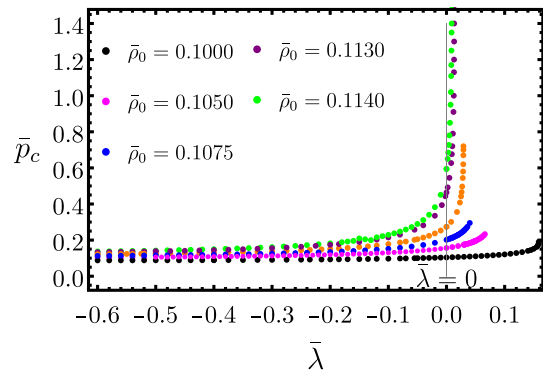


Fig. 3 Central pressure as a function of $\bar{\lambda}$ for different values of $\bar{\rho}_0$

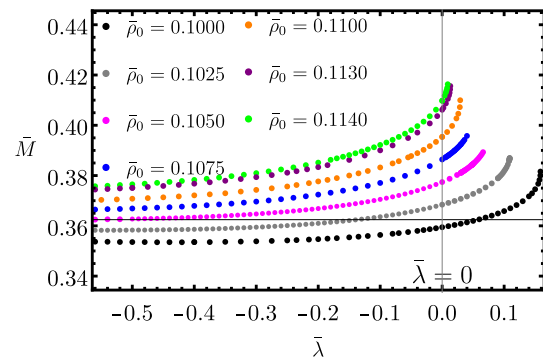


Fig. 4 \bar{M} as a function of $\bar{\lambda}$, for different values of $\bar{\rho}_0$

The variation of \bar{p}_c with $\bar{\lambda}$, for several values of $\bar{\rho}_0$ is displayed in Fig. 3. The interval of values for $\bar{\rho}_0$ was chosen in the figure to analyze the behaviour of the configurations with high \bar{p}_c in the case of $\bar{\lambda} > 0$ (see Fig. 2).

The plots show that, in the interval of ρ_0 ¹² considered here, p_c is always higher (lower) than the GR case for $\lambda > 0$ (< 0). Also, for a given ρ_0 the central pressure of the configurations grows with λ . The models that have central pressure much larger than that of the GR case are those with smaller λ and higher ρ_0 .

Figure 4 exhibits the compactness $\bar{M} = M/R$ in terms of $\bar{\lambda}$ for fixed $\bar{\rho}_0$.¹³ It is seen that \bar{M} as a function of $\bar{\lambda}$, for fixed $\bar{\rho}_0$, behaves as the central pressure does, for values of $\bar{\rho}_0$ chosen as in Fig. 3. In particular, objects with $\bar{\lambda} > 0$ are more compact than those with $\bar{\lambda} \leq 0$, for any $\bar{\rho}_0$, and the latter are less compact than those of GR. These configurations would be in agreement with the idea that the \mathcal{R} -squared term strengthens or weakens gravity according to the sign of $\bar{\lambda}$.¹⁴

¹² The remarks concerning the previous figure are also valid here.

¹³ Since \bar{M} is dimensionless by definition, this plot does not actually depend on the use of R to render quantities dimensionless.

¹⁴ An analogous behaviour has been also observed in the Newtonian hydrostatic equilibrium equation with Palatini corrections used to study the minimum main sequence mass in [56].

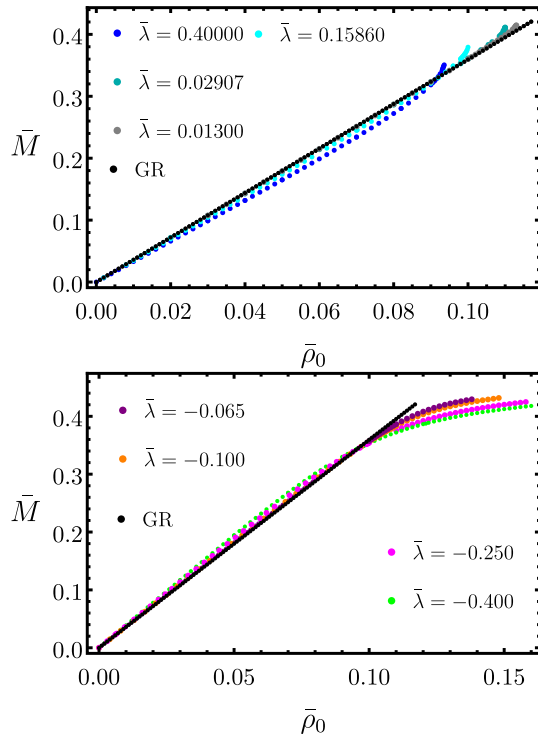


Fig. 5 \bar{M} as a function of $\bar{\rho}_0$, for various values of $\bar{\lambda} > 0$ (upper panel) and $\bar{\lambda} < 0$ (lower panel)

However, we shall see below that there are configurations they do not behave like this.

Figure 5 shows the dependence of \bar{M} with $\bar{\rho}_0$ for different values of $\bar{\lambda}$.

It is seen that for any $\bar{\lambda} \neq 0$, the compactness starts to depart from the GR case at low densities, yielding slightly higher (lower) values of \bar{M} than those of the GR case for $\bar{\lambda} < 0$ (> 0). At densities of approximately 0.095, \bar{M} is very close to that of GR for any $\bar{\lambda}$. The behaviour for higher $\bar{\rho}_0$ depends on the sign of $\bar{\lambda}$. For positive, the maximum \bar{M} attained in the model was approximately 0.42, while for $\bar{\lambda} < 0$, \bar{M} can be close to the Buchdahl limit in GR. The fact that there are configurations with \bar{M} higher than that of GR in the model explored here is also displayed in the plot of \bar{p}_c against \bar{M} , see Fig. 6.¹⁵

The variation of the pressure as a function of \bar{r} for fixed $\bar{\rho}_0$ is shown in Fig. 7 (for $\bar{\lambda} > 0$) and Fig. 8 ($\bar{\lambda} < 0$). The pressure and its derivatives go smoothly to zero at the surface of the star.

Figures 9 and 10 show \bar{m} as a function of \bar{r} for several values of $\bar{\lambda}$ and $\bar{\rho}_0$. The presence of extrema in the transition zone is to be expected, following the discussion in [33].

¹⁵ Note that, while the plots in Fig. 6 undeniably show that high values of \bar{M} can be attained, the values of p_c could only be retrieved using the value of the radius of each configuration. This remark is also valid for the plots of $\bar{m}(\bar{r})$ and $\bar{V}_{\text{eff}}(\bar{r})$.

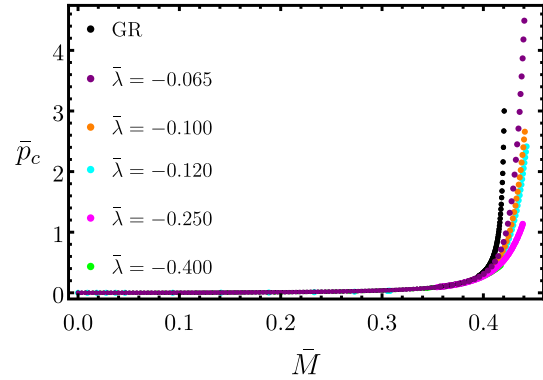


Fig. 6 Central pressure as a function of \bar{M}

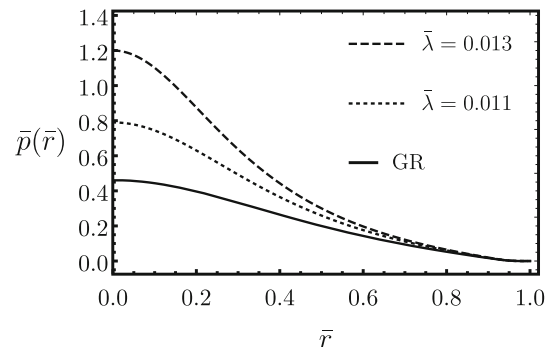
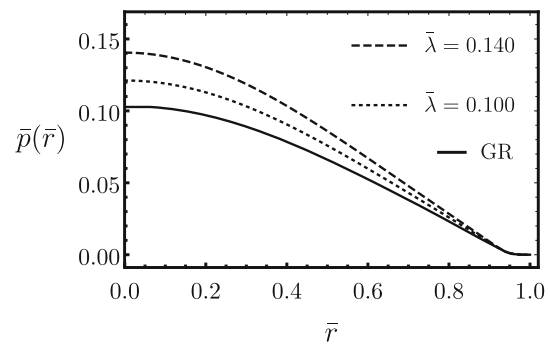


Fig. 7 Dependence of \bar{p} with \bar{r} , for $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (upper panel), and $\bar{\rho}_0 = 0.113$ (lower panel)

Notice that, from the plots, \bar{m} is finite and continuous at $r = R$, while \bar{m}' is finite but has an inconsequential discontinuity there. Since A and its derivatives are finite and continuous at the surface (see next section), tidal forces are finite at the surface of the star. Hence, the models presented here are everywhere regular, and free of the problems pointed out in [52].¹⁶

In the next section we shall examine the trapping regions associated to the compact configurations presented above.

¹⁶ We have also examined the effective EOS near the surface in a few examples, finding that it is of the type $p \propto \rho$. Hence, the barotropic index is outside the potentially problematic range found in [52] and [57].

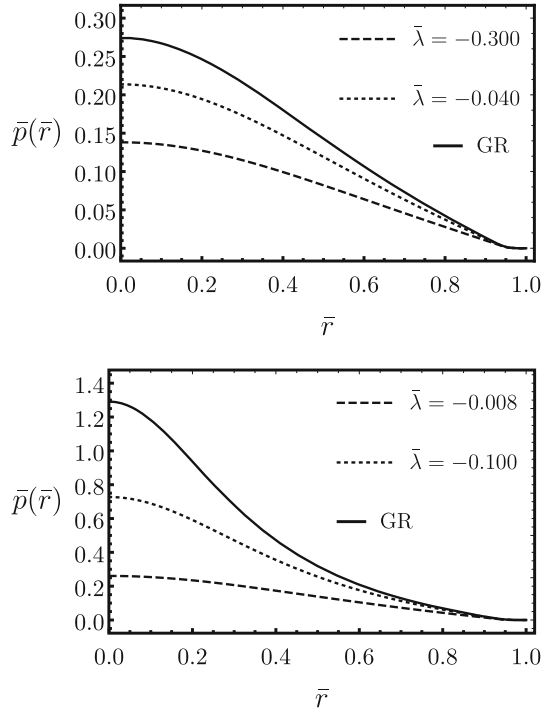


Fig. 8 Pressure as a function of r for different values of $\bar{\lambda}$ and $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (upper panel), and $\bar{\rho}_0 = 0.116$ (lower panel)

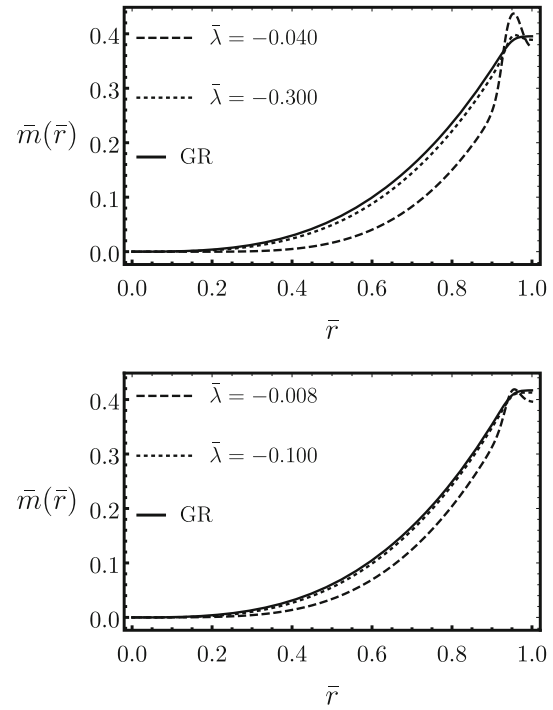


Fig. 10 $\bar{m}(r)$ as a function of \bar{r} for different values of $\bar{\lambda} < 0$ and $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (upper panel), and $\bar{\rho}_0 = 0.116$ (lower panel)

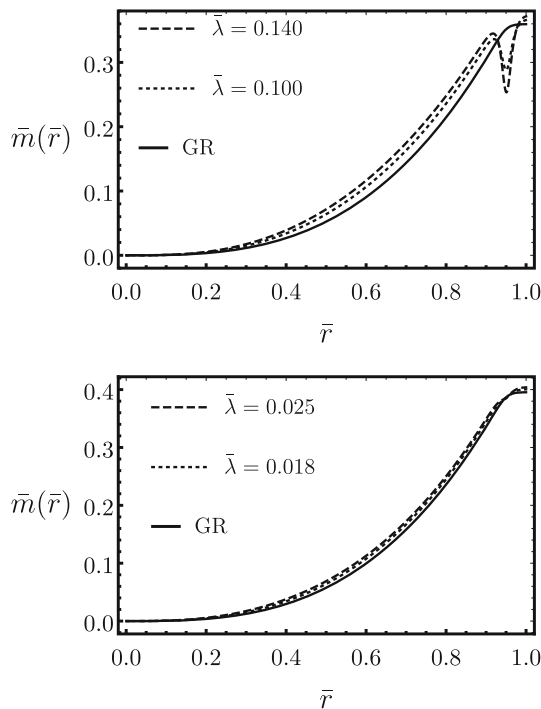


Fig. 9 \bar{m} as a function of \bar{r} , for $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (upper panel), and $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (lower panel)

4 Effective potential and trapping regions

As shown next, the models under consideration display regions in which zero mass particles are trapped. Such trapping regions are of importance because they may accommodate long-lived axial gravitational perturbations, which in turn may lead to nonlinear effects that destabilize the system [12]. Following [27], the trapping zones will be studied using the effective potential. The motion of zero mass particles is determined by $p^\mu p_\mu = 0$, with $p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}$. Due to spherical symmetry, it is confined to a plane, which can be chosen as $\theta = \pi/2$. The corresponding constants of motion are $E = -p_t$, $L = p_\phi$. The radial component of the null geodesics equation is

$$(p^r)^2 = E^2 e^{-(A(r)+B(r))} \left(1 - e^{A(r)} \frac{\ell^2}{r^2} \right), \tag{16}$$

where $\ell \equiv L/E$ is the impact parameter. The regions where the motion is possible are determined by the condition

$$\ell^2 \leq V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{r^2}{e^{A(r)}}. \tag{17}$$

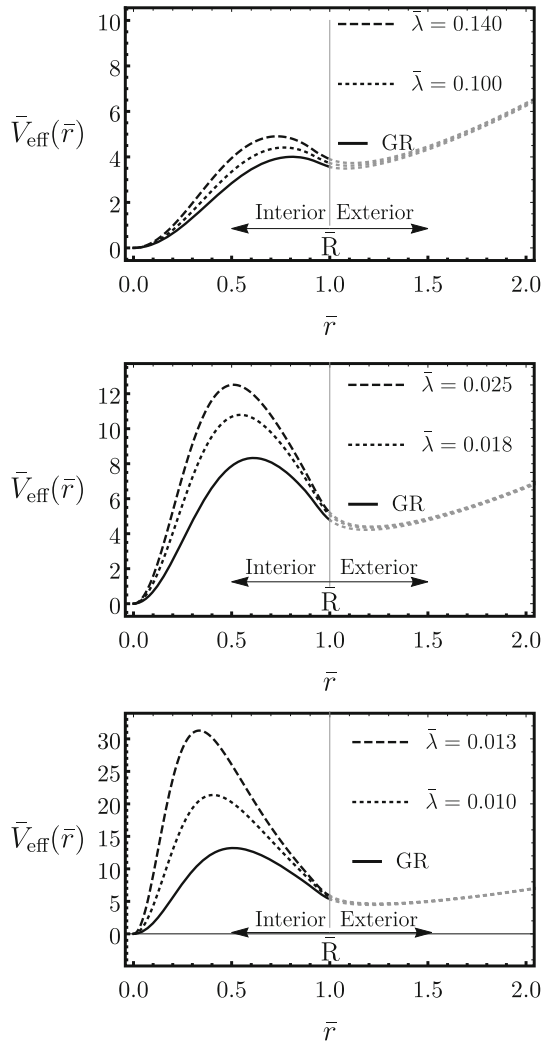


Fig. 11 \bar{V}_{eff} as a function of \bar{r} , for $\bar{\rho}_0 = 0.100$ (upper panel), $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (center panel), and $\bar{\rho}_0 = 0.113$ (lower panel)

V_{eff} smoothly matches the effective potential for null geodesics of the external Schwarzschild solution at $\bar{r} = 1$, as seen in Fig. 11 for the case $\bar{\lambda} > 0$.¹⁷

The effective potential, plotted there for several values of $\bar{\lambda}$ and different values of $\bar{\rho}_0$, has a maximum and a minimum, corresponding to stable and unstable null circular geodesics, respectively. The extension of the trapping zone can be visualized by a horizontal line parallel to the \bar{r} axis and tangent to the minimum of the potential. The figures show that, for $\bar{\lambda} > 0$ and at fixed $\bar{\rho}_0$, the trapping zone is always larger than that of GR, its extension grows with $\bar{\lambda}$, and its inner boundary moves closer to the center of the star. The maximum of the effective potential (hence the height of the trapping zone in terms of ℓ) grows with $\bar{\lambda}$, and moves inward for larger $\bar{\lambda}$.

¹⁷ Such plots also show that the metric coefficient A and its derivatives are finite and continuous on the surface of the star.

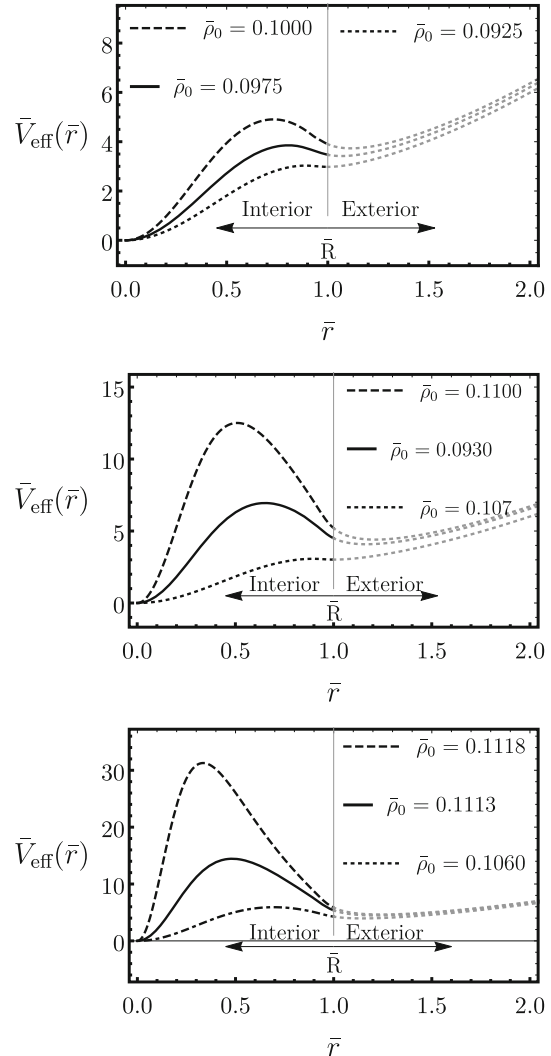


Fig. 12 $V_{\text{eff}}(r)$ for different values of $\bar{\rho}_0$ and $\bar{\lambda} = 0.10$ (upper panel), $\bar{\lambda} = 0.025$ (center panel), $\bar{\lambda} = 0.013$ (lower panel)

Figure 12 show that, for fixed $\bar{\lambda}$ the trapping regions grow and the maximum of the effective potential grows and moves inward for larger values of $\bar{\rho}_0$

For negative values of $\bar{\lambda}$ the curves change in exactly the opposite way to the changes in the $\lambda > 0$ case. We show some examples in Fig. 13.

These features of the effective potential will most likely influence the behaviour of the metric perturbations.¹⁸

5 Concluding remarks

We have shown that Schwarzschild’s homogeneous star can be ameliorated by the addition of a transition zone near the

¹⁸ In the GR case, the potential for the metric perturbations reduces to the geodesic potential in the eikonal limit [12].

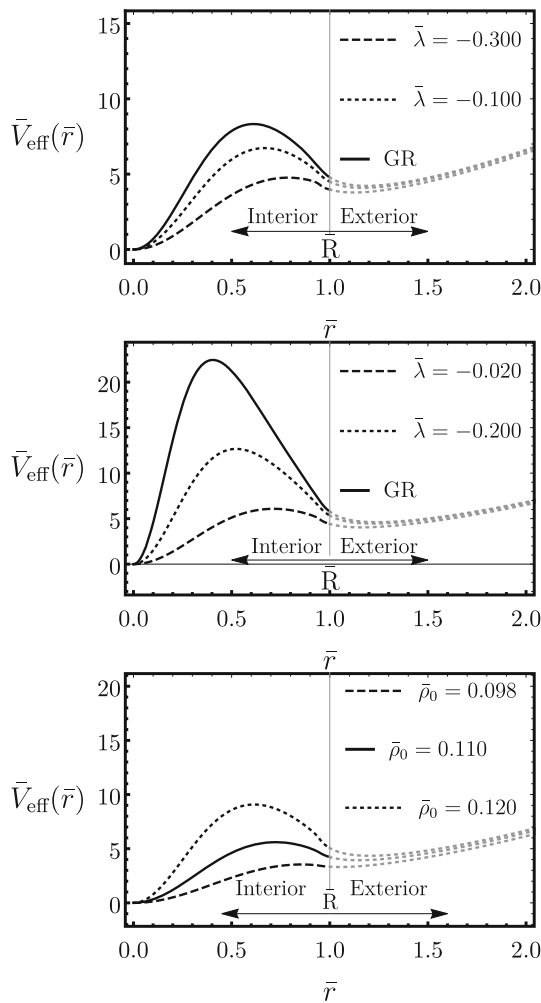


Fig. 13 \bar{V}_{eff} as a function of \bar{r} for different values of $\bar{\lambda} < 0$, and $\bar{\rho}_0 = 0.110$ (upper panel), $\bar{\rho}_0 = 0.115$ (center panel), and for different values of $\bar{\rho}_0$ and $\bar{\lambda} = -0.12$ (lower panel)

surface of the star. Such a zone smooths out the discontinuity in the density at the surface of the constant density model. By numerically integrating the modified TOV equations in the $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R} + \lambda\mathcal{R}^2$ theory in Palatini for a density profile with the abovementioned features, we have shown that the resultant models are everywhere regular. .

The values of the relevant parameters were chosen in most cases in such a way that the resultant objects are compact. Depending on the choice of the relevant parameters, they can be less, more, or as compact as those in GR with the same profile. UCOs are obtained both for negative and positive values of $\bar{\lambda}$. Objects more compact than those in GR with the same density profile and fixed $\bar{\rho}_0$ were obtained with positive values of $\bar{\lambda}$. Objects with compactness larger than the maximum \bar{M} of the model in GR were obtained for $\bar{\lambda} < 0$ and high values of ρ_0 . Such configurations are close to that corresponding to the Buchdahl limit in GR.

The features of the trapping zones depend on $\bar{\rho}_0$ and the sign of $\bar{\lambda}$, and may be crucial for the stability of the models. The latter may be studied using the scalar-tensor representation of the Palatini theories [31], along the lines presented in [58].¹⁹ Also of great importance is the possible degeneracy of the solution, best displayed in mass-radius diagrams. We hope to return to these issues in a future publication.

Acknowledgements F. A. S. was supported by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001, and would like to thank Gustavo P. de Brito for help with Mathematica.

Data Availability Statement This manuscript has no associated data or the data will not be deposited. [Authors’ comment: There are no external data associated with the manuscript.]

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article’s Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article’s Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.
Funded by SCOAP³.

Appendix

We present here some results of the integration of the TOV equations in GR for the density profile given in Eq. (15), and compare them with the case of constant density. Since we are interested here in qualitative differences only, we shall set $\rho_0 = 0.10$, $q = 0.95$, and $\Delta = 0.01$. Figure 14 shows the metric coefficient g_{rr} as a function of \bar{r} , both for the homogeneous star, and the exponential profile for the density. While the first derivative of g_{rr} is discontinuous at the surface of the star for the constant density case (due to the discontinuity of ρ there), the discontinuity is smoothed out for the profile given in Eq. (15).

Figure 15 shows an example of the variation of \bar{p} with \bar{r} for the constant density case, and for the exponential profile, as well as the result of the integration of the TOV equations in the Palatini formalism, with $\bar{\lambda} = 10^{-14}$, to check if the correct limit is recovered in the numerical integration. While the pressure for the constant density case does not go to zero smoothly at the surface, it does so for the exponential profile.

Finally, we show in Fig. 16 the variation of the compactness \bar{M} with the central pressure for the exponential profile

¹⁹ See also [59].

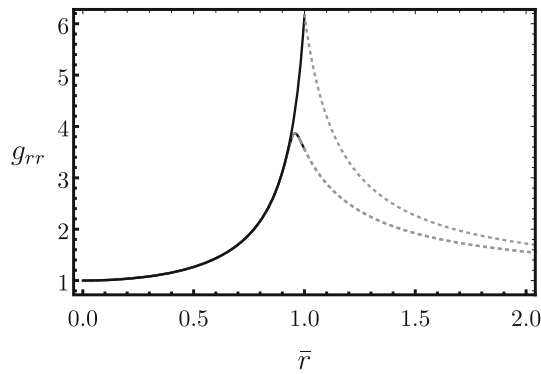


Fig. 14 g_{rr} as a function of \bar{r} in RG, for the constant density case (upper curve), and for the exponential profile, with $\bar{\rho}_0 = 0.10$

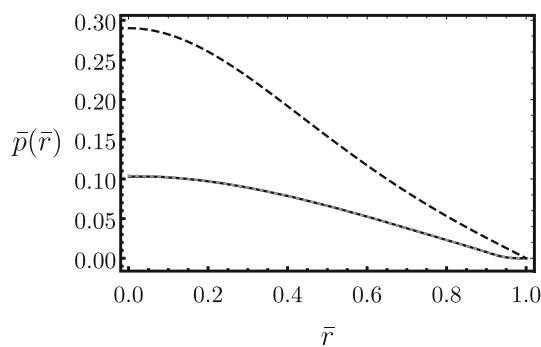


Fig. 15 Pressure as a function of \bar{r} in RG, for the constant density case (upper curve), and for the exponential profile (dashed lower curve), with $\bar{\rho}_0 = 0.10$. The curve in grey was obtained by the integration of the Palatini equations with $\lambda = 10^{-14}$

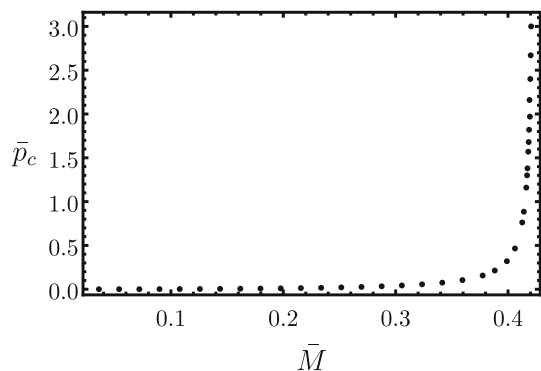


Fig. 16 The plot shows the dependence of \bar{M} with the central pressure in GR with the exponential profile ($\bar{\rho}_0 = 0.10$). The maximum value of \bar{M} is approx. 0.42, and corresponds to $\bar{p}_c \approx 3$

in GR. Due to the requirement that the pressure behaves as in Fig. 1, there is a maximum value both for \bar{p}_c and \bar{M} , given by approx. 3 and 0.42, respectively.

References

1. V. Cardoso, P. Pani, Living Rev. Relativ. **22**(1), 4 (2019). <https://doi.org/10.1007/s41114-019-0020-4>
2. S.L. Liebling, C. Palenzuela, Living Rev. Relativ. **15**(1), 6 (2012). <https://doi.org/10.12942/lrr-2012-6>
3. P.O. Mazur, E. Mottola, Proc. Natl. Acad. Sci. **101**(26), 9545 (2004). <https://doi.org/10.1073/pnas.0402717101>
4. M. Visser, *Lorentzian Wormholes* (1996)
5. V. Cardoso, E. Franzin, P. Pani, Phys. Rev. Lett. **116**(17), 171101 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.171101>
6. J.P.S. Lemos, O.B. Zaslavskii, Phys. Rev. D **78**, 024040 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.024040>
7. E.G. Gimon, P. Hořava, Phys. Lett. B **672**(3), 299 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.01.026>
8. H.A. Buchdahl, Phys. Rev. **116**(4), 1027 (1959). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1027>
9. B.R. Iyer, C.V. Vishveshwara, S.V. Dhurandhar, Class. Quantum Gravity **2**(2), 219 (1985). <https://doi.org/10.1088/0264-9381/2/2/013>
10. P.V.P. Cunha, E. Berti, C.A.R. Herdeiro, Phys. Rev. Lett. **119**(25), 251102 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.251102>
11. S. Hod, Phys. Lett. B **776**, 1 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.11.021>
12. V. Cardoso, L.C.B. Crispino, C.F.B. Macedo, H. Okawa, P. Pani, Phys. Rev. D **90**(4), 044069 (2014). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.044069>
13. Z. Stuchlík, G. Torok, S. Hledík, M. Urbanec, Class. Quantum Gravity **26**, 035003 (2009). <https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/3/035003>
14. V. Cardoso, A.S. Miranda, E. Berti, H. Witek, V.T. Zanchin, Phys. Rev. D **79**(6), 064016 (2009). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.064016>
15. J. Keir, Class. Quantum Gravity **33**(13), 135009 (2016). <https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/13/135009>
16. K. Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys). **1916**, 424 (1916)
17. S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **140**, 417 (1964). <https://doi.org/10.1086/147938>
18. P. Pani, V. Ferrari, Class. Quantum Gravity **35**(15), 15LT01 (2018). <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aac8f>
19. C. Cattoen, T. Faber, M. Visser, Class. Quantum Gravity **22**(20), 4189 (2005). <https://doi.org/10.1088/0264-9381/22/20/002>
20. P.O. Mazur, E. Mottola, Class. Quantum Gravity **32**(21), 215024 (2015)
21. C. Posada, C. Chirenti, Class. Quantum Gravity **36**, 065004 (2019). <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab0526>
22. C. Chirenti, C. Posada, V. Guedes, Class. Quant. Grav. **37**(19), 195017 (2020)
23. S. Chandrasekhar, J.C. Miller, Mon. Not. R. Astron. Soc. **167**, 63 (1974). <https://doi.org/10.1093/mnras/167.1.63>
24. Z. Stuchlík, S. Hledík, Phys. Rev. D **60**(4), 044006 (1999). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.044006>
25. Z. Stuchlík, S. Hledík, J. Soltes, E. Ostgaard, Phys. Rev. D **64**, 044004 (2001). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.044004>
26. Z. Stuchlík, Acta Phys. Slov. **50**, 219 (2000)
27. Z. Stuchlík, J. Hladík, M. Urbanec, G. Torok, Gen. Relativ. Gravit. **44**, 1393 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10714-012-1346-3>
28. Zcv Stuchlík, S. Hledík, J. Novotný, Phys. Rev. D **94**, 103513 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.103513>
29. J. Novotný, J. Hladík, Zcv Stuchlík, Phys. Rev. D **95**, 043009 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.043009>
30. Z. Stuchlík, J. Schee, B. Toshmatov, J. Hladík, J. Novotný, J. Cosmol. Astropart. Phys. **2017**(06), 056 (2017). <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/06/056>

31. T.P. Sotiriou, V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.451>
32. G.J. Olmo, *Int. J. Mod. Phys. D* **20**, 413 (2011). <https://doi.org/10.1142/S0218271811018925>
33. F.A. Teppa Pannia, F. Garca, S.E. Perez Bergliaffa, M. Orellana, G. Romero, *Gen. Relativ. Gravit.* **49**(2), 25 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10714-016-2182-7>
34. A. Wojnar, *Eur. Phys. J. C* **79**(1), 51 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6555-4>
35. A.V. Astashenok, S.D. Odintsov, A. de la Cruz-Dombriz, *Class. Quantum Gravity* **34**(20), 205008 (2017). <https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8971>
36. S. Fay, R. Tavakol, S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **75**(6), 063509 (2007). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.063509>
37. S. Tsujikawa, K. Uddin, R. Tavakol, *Phys. Rev. D* **77**, 043007 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.043007>
38. F. Bauer, D.A. Demir, *Phys. Lett. B* **665**(4), 222–226 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.06.014>
39. F.A. Teppa Pannia, S.E. Perez Bergliaffa, N. Manske, *Eur. Phys. J. C* **79**(3), 267 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6764-x>
40. T. Tenkanen, *Gen. Relativ. Gravit.* **52**, 4 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10714-020-02682-2>
41. K. Kainulainen, V. Reijonen, D. Sunhede, *Phys. Rev. D* **76**, 043503 (2007). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.043503>
42. G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Phys. Rev. D* **84**, 124059 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.124059>
43. C.Y. Chen, M. Bouhmadi-Lpez, P. Chen, *Eur. Phys. J. C* **79**(1), 63 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6585-y>
44. C. Bambi, A. Cardenas-Avendano, G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Phys. Rev. D* **93**(6), 064016 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.064016>
45. G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Universe* **1**(2), 173 (2015). <https://doi.org/10.3390/universe1020173>
46. K. Staykov, K.Y. Ekşi, S.S. Yazadjiev, M.M. Trkoğlu, A.S.S. Arapoğlu, *Phys. Rev. D* **94**(2), 024056 (2016). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.024056>
47. C. Barragán, G.J. Olmo, H. Sanchis-Alepuz, *Phys. Rev. D* **80**, 024016 (2009). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.024016>
48. A. Stachowski, M. Szydłowski, A. Borowiec, *Eur. Phys. J. C* **77**(6), 406 (2017). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4981-8>
49. V.M. Enckell, K. Enqvist, S. Räsänen, L.P. Wahlman, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2019**(2), 022 (2019). <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/02/022>
50. A. Palatini, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **43**(1), 203 (1919). <https://doi.org/10.1007/BF03014670>
51. G.J. Olmo, *Phys. Rev. D* **78**, 104026 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.104026>
52. E. Barausse, T.P. Sotiriou, J.C. Miller, *Class. Quantum Gravity* **25**, 105008 (2008). <https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/10/105008>
53. V. Reijonen, e-Print: 0912.0825 [gr-qc]
54. G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, A. Wojnar, *Phys. Rept.* **876**, 1–75 (2020)
55. D. Rubiera-Garcia, in *5th Amazonian Symposium on Physics: Celebrating 100 years of the first experimental tests of General Relativity* (2020)
56. G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, A. Wojnar, *Phys. Rev. D* **100**, 044020 (2019). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.044020>
57. G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, *Class. Quant. Grav.* **37**(21), 215002 (2020)
58. T. Harada, *Prog. Theor. Phys.* **98**(2), 359 (1997). <https://doi.org/10.1143/PTP.98.359>
59. A. Wojnar, H. Velten, *Eur. Phys. J. C* **76**(12), 697 (2016). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4549-z>