



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto Politécnico

Eiji Watanabe

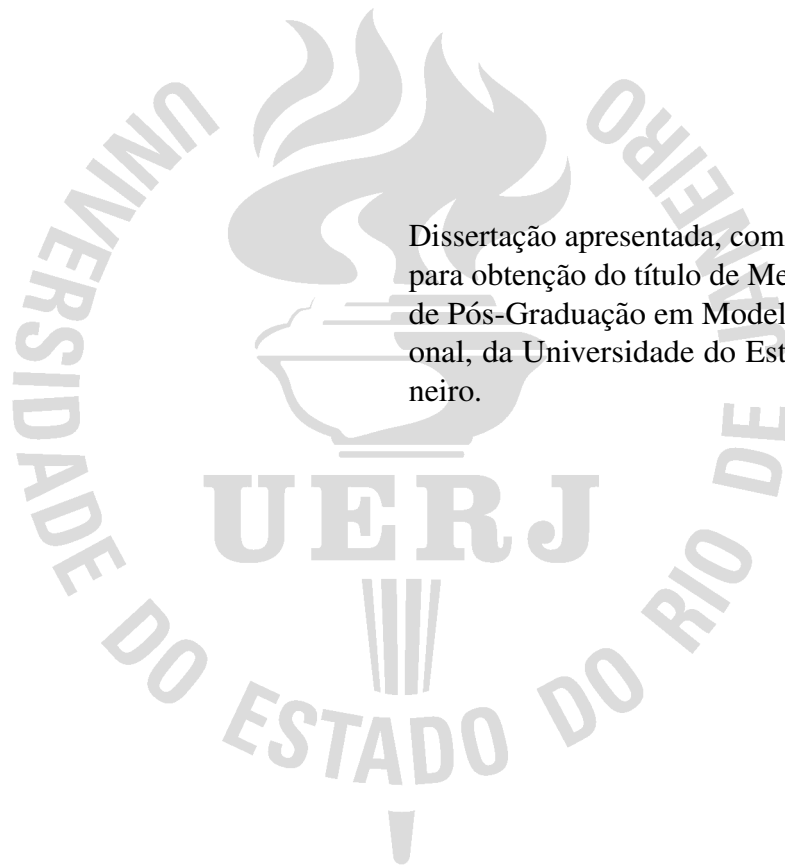
**Identificação de falhas de contato em meios compostos via inferência  
Bayesiana e modelos reduzidos**

Nova Friburgo

2021

Eiji Watanabe

**Identificação de falhas de contato em meios compostos via inferência Bayesiana e modelos reduzidos**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto da Silva Abreu

Orientador: Prof. Dr. Diego Campos Knupp

Nova Friburgo

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/REDE SIRIUS/BIBLIOTECA CTC/E

W324 Watanabe, Eiji.

Identificação de falhas de contato em meios compostos via inferência bayesiana e modelos reduzidos / Eiji Watanabe. – 2021. 104 f. : il.

Orientadores: Luiz Alberto da Silva Abreu e Diego Campos Knupp.

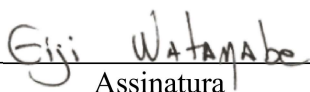
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico.

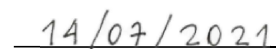
1. Calor – Medidores de fluxo - Teses. 2. Condutividade térmica – Modelos matemáticos - Teses. 3. Calor – Transmissão – Modelos matemáticos – Teses. 4. Problemas inversos (Equações diferenciais) - Teses. 5. Temperatura – Métodos de simulação – Teses. I. Abreu, Luiz Alberto da Silva. II. Knupp, Diego Campos. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Politécnico. IV. Título.

CDU 536.24:519.872

Bibliotecária Cleide Sancho CRB7/5843

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

  
Assinatura

  
Data

Eiji Watanabe

**Identificação de Falhas de Contato em Meios Compostos  
via Inferência Bayesiana e Modelos Reduzidos**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 13 de maio de 2021.

Banca examinadora:



---

Prof. Luiz Alberto da Silva Abreu, D.Sc. – Orientador  
Instituto Politécnico – UERJ



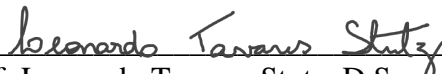
---

Prof. Diego Campos Knupp, D.Sc. – Orientador  
Instituto Politécnico – UERJ



---

Prof<sup>a</sup>. Bruna Rafaella Loiola, D.Sc.  
Instituto Militar de Engenharia – IME



---

Prof. Leonardo Tavares Stutz, D.Sc.  
Instituto Politécnico – UERJ

Nova Friburgo

2021

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os que me apoiaram ao longo desta caminhada, especialmente à minha mãe Alessandra e ao meu pai Eichi.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos orientadores Luiz Alberto da Silva Abreu e Diego Campos Knupp por terem me aceitado mais uma vez como orientado, pela competência, dedicação e ensinamentos ao longo da execução deste trabalho, que foram fundamentais para que eu pudesse enfrentar os inúmeros desafios encontrados durante esta caminhada e concluir este trabalho de mestrado.

À minha família e aos meus amigos pelo todo apoio e incentivo proporcionado durante esta etapa da minha vida.

A todos os professores e funcionários do IPRJ pela dedicação e pelo trabalho realizado que mantêm o funcionamento do Instituto com o prestígio que ele possui.

Agradeço também à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro, FAPERJ.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

## RESUMO

WATANABE, E. *Identificação de falhas de contato em meios compostos via inferência Bayesiana e modelos reduzidos*. 2021. 104 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2021.

Este trabalho apresenta um problema de condução de calor em um compósito laminado com aquecimento por meio da aplicação de um fluxo de calor na superfície inferior e trocando calor com o ambiente por convecção na superfície superior e tem como objetivo avaliar e detectar a possível existência de falhas de contato na região de um adesivo que une as camadas. As equações do problema foram escritas obedecendo a uma formulação de domínio único, que possibilita redigir o mesmo sistema de equações para os diferentes domínios do problema, bastando apenas escrever as propriedades dos materiais como funções com variação espacial. Devido ao alto custo computacional observado para solucionar o problema direto associado, neste trabalho são propostos dois modelos reduzidos diferentes que representam uma aproximação do modelo completo, porém com menor custo computacional. O primeiro envolve a modelagem da região do adesivo utilizando uma formulação *Improved Lumped*. Por sua vez, o segundo envolve a modelagem da camada superior do material. O problema direto foi resolvido utilizando a função *NDSolve* do *software* Mathematica e para verificar a convergência da solução foi utilizada a técnica da transformada integral clássica e o *software* COMSOL. A identificação de falha, para ambos os modelos propostos, envolve a estimativa de funções com variação espacial. O problema inverso foi resolvido utilizando o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) dentro de uma abordagem Bayesiana, que foi implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings com priori *Total Variation*. As metodologias de detecção de falhas foram analisadas por meio de medidas simuladas de temperatura. Foi observado que os modelos reduzidos propostos foram capazes de estimar a região de falha de contato em todos os casos considerados com redução do custo computacional.

Palavras-chave: Identificação de falhas de contato. Condutividade térmica. Modelos reduzidos. Compósitos laminados. Monte Carlo via Cadeias de Markov. *Improved Lumped*.

## ABSTRACT

WATANABE, E. *Identification of contact failures in composite materials via Bayesian inference and reduced models*. 2021. 104 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2021.

This work presents a heat conduction problem in a laminated composite with heating through the application of a heat flux on the lower surface and exchanging heat with the environment by convection on the upper surface and aims to evaluate and detect the possible existence of contact failures in the region of an adhesive that joins the layers. The problem equations were written following a single domain formulation, which makes it possible to write the same system of equations for the different problem domains, just writing the material properties as functions with spatial variation. Due to the high computational cost observed to solve the associated direct problem, in this work two different reduced models are proposed that represent an approximation of the complete model, but with lower computational cost. The first involves modeling the adhesive region using an *Improved Lumped* formulation. In turn, the second involves modeling the top layer of material. The direct problem was solved using the *NDSolve* function of the software Mathematica and to verify the convergence of the solution both the Classical Integral Transform Technique and the software COMSOL were used. The failures detection, for both proposed models, involves the estimation of functions with spatial variation. The inverse problem was solved using the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method within a Bayesian approach, which was implemented with the Metropolis-Hastings algorithm with Total Variation prior. Failure detection methodologies were analyzed through simulated temperature measurements. It was observed that the proposed reduced models were able to estimate the contact failure region in all cases considered with reduced computational cost .

Palavras-chave: Detection of contact failure. Thermal conductivity. Reduced Models. Laminated composites. Markov Chain Monte Carlo. Improved Lumped.



## LISTA DE FIGURAS

|        |  |    |
|--------|--|----|
| Figura | 1 - Problema físico. . . . .   | 23 |
| Figura | 2 - Identificação das abordagens propostas. . . . .  | 36 |
| Figura | 3 - Representação esquemática do modelo reduzido 1. . . . .  | 38 |
| Figura | 4 - Representação esquemática do modelo reduzido 2. . . . .  | 43 |
| Figura | 5 - Materiais e dimensões utilizados no problema direto do modelo completo. . . . .  | 53 |
| Figura | 6 - Perfil da temperatura ao longo da direção $x$ em $y = 0,0505\text{ m}$ e $t = 5000\text{ s}$<br>- Modelo Completo. . . . .           | 53 |
| Figura | 7 - Perfil da temperatura ao longo da direção $x$ em $y = 0,0505\text{ m}$ e $t = 10.000\text{ s}$<br>- Modelo Completo. . . . .         | 54 |
| Figura | 8 - Gradiente de temperatura no instante $t = 10.000\text{ s}$ - Modelo completo. . . . .  | 55 |
| Figura | 9 - Gráfico da convergência da solução obtida com o COMSOL - Modelo completo. . . . .  | 55 |
| Figura | 10 - Geometria proposta para o modelo reduzido 1. . . . .  | 56 |
| Figura | 11 - Comportamento da temperatura no tempo $t = 60\text{ s}$ ao longo do eixo $x$ em $y = 0$ - Modelo reduzido 1. . . . .                | 56 |
| Figura | 12 - Comportamento da temperatura no tempo $t = 20.000\text{ s}$ ao longo do eixo $x$ em $y = 0$ - Modelo reduzido 1. . . . .            | 57 |
| Figura | 13 - Gradiente da temperatura no tempo $t = 20.000\text{ s}$ - Modelo reduzido 1. . . . .  | 58 |
| Figura | 14 - Gráfico da convergência da solução obtida com o COMSOL - Modelo reduzido 1. . . . .   | 58 |
| Figura | 15 - Geometria proposta para o modelo reduzido 2. . . . .  | 59 |
| Figura | 16 - Comportamento da temperatura no tempo $t = 2900\text{ s}$ ao longo do eixo $x$ em $y = 0,02\text{ m}$ - Modelo reduzido 2. . . . .  | 59 |
| Figura | 17 - Comportamento da temperatura no tempo $t = 20000\text{ s}$ ao longo do eixo $x$ em $y = 0,02\text{ m}$ - Modelo reduzido 2. . . . . | 60 |
| Figura | 18 - Perfil da temperatura no tempo $t = 20.000\text{ s}$ - Modelo reduzido 2. . . . .   | 61 |
| Figura | 19 - Gráfico da convergência da solução obtida com o COMSOL na Modelo reduzido 2. . . . .  | 61 |
| Figura | 20 - Gráficos das medidas experimentais sintéticas . . . . .   | 63 |
| Figura | 21 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 0A. . . . .  | 64 |
| Figura | 22 - Evolução das cadeias de Markov do Caso 0A. . . . .  | 65 |
| Figura | 23 - Comparação da função exata com a média da condutividade térmica estimada no Caso 0A. . . . .  | 65 |
| Figura | 24 - Erro percentual dos parâmetros estimados no Caso 0A. . . . .  | 66 |
| Figura | 25 - Materiais e dimensões utilizados Caso 0B. . . . .   | 66 |
| Figura | 26 - Evolução das cadeias de Markov do Caso 0B. . . . .  | 67 |
| Figura | 27 - Comparação da função exata com a média do fluxo de calor estimado no Caso 0B. . . . .   | 67 |
| Figura | 28 - Erro percentual dos parâmetros estimados no Caso 0B. . . . .  | 68 |
| Figura | 29 - Casos. . . . .  | 69 |
| Figura | 30 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 1. . . . .   | 70 |
| Figura | 31 - Cadeias de Markov do Caso 1. . . . .  | 70 |
| Figura | 32 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 1. . . . .   | 71 |
| Figura | 33 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 1. . . . .  | 71 |
| Figura | 34 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 2. . . . .   | 72 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| Figura | 35 - Cadeias de Markov do Caso 2. . . . .   | 73  |
| Figura | 36 - Aproximação do gráfico das Cadeias de Markov do Caso 2. . . . .                          | 73  |
| Figura | 37 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 2. . . . .          | 74  |
| Figura | 38 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 2. . . . .                               | 74  |
| Figura | 39 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 3. . . . .                                      | 75  |
| Figura | 40 - Cadeias de Markov do Caso 3. . . . .   | 75  |
| Figura | 41 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 3 sem DAMH. . . . . | 76  |
| Figura | 42 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 3. . . . .                               | 76  |
| Figura | 43 - Cadeias de Markov do Caso 3 com DAMH. . . . .  | 77  |
| Figura | 44 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 3 com DAMH. . . . .                      | 77  |
| Figura | 45 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 3 com DAMH. . . . . | 78  |
| Figura | 46 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 4. . . . .                                      | 79  |
| Figura | 47 - Cadeias de Markov do Caso 4. . . . .   | 79  |
| Figura | 48 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 4. . . . .          | 80  |
| Figura | 49 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 4 com DAMH. . . . .                      | 80  |
| Figura | 50 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 5. . . . .                                      | 81  |
| Figura | 51 - Cadeias de Markov do Caso 5. . . . .   | 81  |
| Figura | 52 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 5. . . . .          | 82  |
| Figura | 53 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 5. . . . .                               | 82  |
| Figura | 54 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 6. . . . .                                      | 83  |
| Figura | 55 - Cadeias de Markov do Caso 6. . . . .   | 83  |
| Figura | 56 - Cadeias de Markov do Caso 6. . . . .   | 84  |
| Figura | 57 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 6. . . . .          | 84  |
| Figura | 58 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 6. . . . .                               | 85  |
| Figura | 59 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 7. . . . .                                      | 86  |
| Figura | 60 - Cadeias de Markov do Caso 7. . . . .   | 86  |
| Figura | 61 - Média do fluxo de calor estimado do Caso 7. . . . .                                      | 87  |
| Figura | 62 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 8. . . . .                                      | 87  |
| Figura | 63 - Cadeias de Markov do Caso 8. . . . .   | 88  |
| Figura | 64 - Média do fluxo de calor estimado do Caso 8. . . . .                                      | 88  |
| Figura | 65 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 9. . . . .                                      | 89  |
| Figura | 66 - Cadeias de Markov do Caso 9. . . . .   | 89  |
| Figura | 67 - Média do fluxo de calor estimado do do Caso 9. . . . .                                   | 90  |
| Figura | 68 - Representação da geometria criada no COMSOL. . . . .                                     | 100 |
| Figura | 69 - Representação da malha gerada no COMSOL. . . . .   | 101 |
| Figura | 70 - Representação da geometria do modelo reduzido 1 criada no COMSOL. . . . .                | 103 |
| Figura | 71 - Representação da malha do modelo reduzido 1 gerada no COMSOL. . . . .                    | 103 |
| Figura | 72 - Representação da geometria do modelo reduzido 2 criada no COMSOL. . . . .                | 104 |
| Figura | 73 - Representação da malha do modelo reduzido 2 gerada no COMSOL. . . . .                    | 104 |

## LISTA DE TABELAS

|        |  |    |
|--------|--|----|
| Tabela | 1 - Propriedades dos materiais utilizados. . . . .   | 51 |
| Tabela | 2 - Propriedades dos materiais utilizados. . . . .   | 52 |
| Tabela | 3 - Análise da solução do problema direto do modelo completo obtida via <i>NDSolve</i> com variação do parâmetro $mc$ em $y = 0,071 m$ . . . . . | 54 |
| Tabela | 4 - Análise da solução com <i>Improved Lumped</i> com variação do parâmetro $mc$ em $y = 0$ - Modelo reduzido 1. . . . .                         | 57 |
| Tabela | 5 - Análise da solução com variação do parâmetro $mc$ em $y = 0,02 m$ - Modelo reduzido 2. . . . .   | 60 |
| Tabela | 6 - Tempo despendido por cada método para computar o problema direto. . . . .  | 61 |

## SUMÁRIO

|       |  |     |
|-------|--|-----|
|       | <b>INTRODUÇÃO</b>  | 11  |
| 1     | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>                                       | 14  |
| 1.1   | <b>Identificação de falhas de contato</b>                          | 14  |
| 1.2   | <i>Improved Lumped Formulation</i>                                 | 17  |
| 1.3   | <b>Problemas Inversos via Inferência Bayesiana</b>                 | 20  |
| 2     | <b>CONDUÇÃO DE CALOR EM COMPÓSITO LAMINADO COM FALHA DE ADESÃO</b> | 23  |
| 2.1   | <b>Formulação da Técnica da Transformada Integral Clássica</b>     | 25  |
| 2.2   | <b>Aplicação da CITT no problema físico</b>                        | 33  |
| 3     | <b>MODELO REDUZIDO</b>   | 36  |
| 3.1   | <b>Abordagem 1</b>   | 37  |
| 3.1.1 | <u>Modelo Reduzido 1</u>   | 38  |
| 3.2   | <b>Abordagem 2</b>   | 43  |
| 4     | <b>PROBLEMA INVERSO</b>  | 45  |
| 4.1   | <b>Inferência Bayesiana</b>  | 46  |
| 4.1.1 | <i>Delayed Acceptance Metropolis-Hastings (DAMH)</i>               | 48  |
| 4.2   | <b>Problemas Reduzidos</b>   | 50  |
| 5     | <b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>                                     | 51  |
| 5.1   | <b>Problema Direto</b>   | 52  |
| 5.1.1 | <u>Modelo Completo</u>   | 52  |
| 5.1.2 | <u>Modelos Reduzidos</u>   | 55  |
| 5.1.3 | <u>Custo Computacional</u>   | 61  |
| 5.2   | <b>Problema Inverso</b>  | 62  |
| 5.2.1 | <u>Verificação do código computacional</u>                         | 63  |
| 5.2.2 | <u>Casos considerados</u>  | 68  |
| 5.2.3 | <u>Identificação de falhas utilizando o modelo reduzido 1</u>      | 69  |
| 5.2.4 | <u>Identificação de falhas utilizando o modelo reduzido 2</u>      | 85  |
|       | <b>CONCLUSÕES</b>  | 91  |
|       | <b>REFERÊNCIAS</b>   | 94  |
|       | <b>APÊNDICE A</b>  | 100 |
|       | <b>APÊNDICE B</b>  | 103 |

## INTRODUÇÃO

A aplicação de materiais compósitos na engenharia tornou-se muito comum, visto que a sua fabricação permite uma combinação de propriedades mecânicas de dois ou mais materiais diferentes conforme a necessidade do uso, obtendo-se assim um material com propriedades específicas aperfeiçoadas (CHUNG, 2003). Por isso, seu emprego pode ser observado em vários campos da engenharia, como por exemplo, sendo um dos mais comuns, o concreto armado utilizado em estruturas de construções, que é concreto reforçado com aço que resiste a altas forças de compressão. Ainda em aplicação estrutural, podem-se citar materiais compósitos que, além de possuírem boas propriedades mecânicas, possuem baixa densidade, reduzindo o consumo de combustível, desejável para aplicação em aviões ou em carros de alta velocidade, como fibra de carbono ou fibra de vidro reforçado com resina plástica e Kevlar (CHUNG, 2003). Em aplicações no campo da eletrônica, têm-se como exemplo os componentes que são feitos de materiais compósitos, como resistores, capacitores, indutores, transistores, entre outros (CHUNG, 2003). Em aplicações térmicas, com a miniaturização dos componentes eletrônicos e com o aumento da potência dos microeletrônicos, a dissipação de calor é crucial para manter a confiabilidade e a performance desses componentes. Como esses componentes possuem baixo coeficiente de expansão térmica, os dissipadores de calor também precisam possuir baixo coeficiente de expansão térmica, além de alta condutividade térmica. Desse modo, são utilizados materiais compósitos formados por materiais de alta condutividade térmica e materiais de baixo coeficiente de expansão térmica (CHUNG, 2003).

Dessa forma, o crescente interesse pela aplicação de uso de meios multicamadas torna importante o conhecimento dos fenômenos que ocorrem na interface dessas camadas. No entanto, pode ocorrer nesses materiais a presença de falhas de contato entre as camadas, caracterizadas pela presença de uma bolha de ar na região do adesivo ou pelo descolamento das mesmas. A qualidade de adesão entre as camadas de meios compostos pode ser avaliada por meio de uma análise de condução de calor, em que é realizado um estudo do comportamento da temperatura nesses materiais. Um jeito prático de efetuar esse estudo é aquecendo uma amostra e monitorando o decaimento da temperatura. Dessa forma, é possível detectar possíveis falhas nesses materiais (GROSSO et al., 2013; GROSSO et al., 2016; ABREU et al., 2014a; ABREU et al., 2014b; MASCOUTO et al., 2020).

Assim, a formulação e a solução de problemas que permitem avaliar a aderência entre dois ou mais materiais é de grande importância em diversos campos, como eletrônicos, telecomunicações, aviação, defesa e petróleo, entre outros. Em vista disso, em muitas dessas aplicações a existência de falhas pode levar a acidentes, alguns casos, inclusive, podendo ser catastróficos. Dada a importância da detecção não destrutiva de falhas de adesão em compósitos laminados e do uso de imagens termográficas infravermelhas para esse fim, esforços têm sido feitos para garantir que o conhecimento da transferência de calor seja aplicado para que análises

quantitativas sejam possíveis. Nem sempre é possível identificar aderência ou falhas de aderência usando apenas testes qualitativos, uma vez que os gradientes de temperatura entre regiões saudáveis e aquelas com falha de contato são geralmente pequenos (ABREU et al., 2011; ABREU et al., 2014b). Em algumas situações, a espessura do material e suas temperaturas de transição vítrea evitam a ocorrência de grandes gradientes e fazem com que as falhas sejam identificadas apenas por imagem térmica (MEOLA; CARLOMAGNO, 2004; KNUPP et al., 2013; ABREU et al., 2014a; ABREU et al., 2018). Assim, em Abreu et al. (2014a) uma formulação via problemas inversos foi proposta a fim de permitir a análise quantitativa de falhas por meio da termografia infravermelha.

Grosso et al. (2013) também analisaram problemas envolvendo detecção de falhas por termografia de contato em tubos feitos de um material compósito amplamente utilizados na indústria petrolífera. Nessa mesma linha, em Mascouto et al. (2020), foi elaborada uma abordagem para detectar falhas de contato em materiais compósitos. O problema físico envolveu um material compósito de duas camadas unidas por adesivo, onde continha uma falha de contato caracterizada por uma bolha de ar. Apesar de a técnica empregada ter sido capaz de detectar a falha, foi observado um alto custo computacional na solução do problema inverso, o que inviabilizou sua execução envolvendo uma grande quantidade de medições temporais e a análise de problemas tridimensionais.

Nesse contexto, o propósito deste trabalho é apresentar um método de identificação de falhas de contato em materiais compósitos envolvendo modelos reduzidos, que representam uma aproximação do modelo completo, que possibilitem diminuir o custo computacional e ainda assim identificar, ao menos de forma qualitativa, possíveis regiões de falha. Portanto neste trabalho, a partir do problema físico proposto por Mascouto et al. (2020), propõem-se dois modelos reduzidos com menor custo computacional com o intuito de detectar as falhas de contato.

O primeiro modelo proposto neste trabalho representa uma aproximação do problema completo original proposto por Mascouto et al. (2020). A formulação desse modelo reduzido é baseada numa abordagem com o uso do *Improved Lumped*, que permite adotar aproximações da temperatura no espaço, obtendo-se uma modelagem mais simples de menor custo computacional. No problema inverso espera-se estimar a função com variação espacial da condutividade térmica utilizando o modelo reduzido com medidas experimentais sintéticas obtidas por meio da solução do problema direto do modelo completo. A identificação da falha será caracterizada por uma variação considerável dessa propriedade ao longo do espaço, visto que a condutividade térmica do ar é significativamente menor do que a do adesivo. Já no problema inverso do segundo modelo proposto, a solução obtida será uma estimativa da função do fluxo de calor. Da mesma forma, a identificação da falha será caracterizada por uma variação considerável dessa propriedade ao longo do espaço. Tanto a função da condutividade térmica quanto a do fluxo de calor estimadas no problema inverso utilizando os modelos reduzidos apenas indicarão as regiões de falha. Portanto, não se trata da estimativa dos parâmetros físicos envolvidos, a menos que uma abordagem de

correção de erro de modelo seja associada à solução do problema inverso.

O problema completo, ou seja, aquele que representa melhor o problema físico estudado, será modelado com uma abordagem em domínio único, que permite trabalhar com problemas multicamadas e/ou com geometrias complexas sem a necessidade de um tratamento específico nas condições de contorno entre cada camada. Desse modo, as propriedades térmicas envolvidas no problema físico são escritas como funções com variações no espaço, obtendo-se, portanto, um único sistema de equações para todo o problema (KNUPP et al., 2012; MASCOUTO et al., 2020). A solução do problema direto utilizado no problema inverso é obtida implementando-se a função *NDSolve* do *software* Mathematica. No entanto, fim de verificar a convergência da solução, o problema também foi solucionado utilizando a Técnica da Transformada Clássica Integral (CITT) e o *software* COMSOL (MIKHAILOV; OZISIK, 1994; COTTA, 1993; MASCOUTO et al., 2020). O problema inverso será resolvido utilizando o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) dentro de uma abordagem Bayesiana, que foi implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings com priori *Total Variation* (KAIPIO; SOMERSALO, 2005; CHRISTEN; FOX, 2005; ABREU et al., 2014b; ORLANDE, 2012; ORLANDE, 2015; ORLANDE; FUDYM, 2018).

O principal objetivo deste trabalho visa detectar falhas de contato em materiais compósitos por meio da solução de problemas inversos utilizando dois modelos reduzidos diferentes. O segundo objetivo consiste em elaborar abordagens que envolvem a formulação de modelos reduzidos que representam uma aproximação do modelo completo com o intuito de diminuir o custo computacional. A detecção das falhas se dará por meio do grau de variação espacial dos parâmetros estimados no problema inverso, causada pela presença de falha de contato na interface das camadas.

## 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão da literatura relacionada aos principais assuntos deste trabalho: i) identificação de falhas de contato; ii) formulação *Lumped*; e iii) problemas inversos via inferência Bayesiana.

### 1.1 Identificação de falhas de contato

A detecção de falhas em materiais é um tema de grande importância na engenharia e sua identificação prévia pode evitar falhas mecânicas e acidentes. Neste trabalho, o material de estudo é um compósito laminado, que é um material formado pela união de duas ou mais camadas, permitindo, assim, a combinação de propriedades mecânicas diferentes para aplicações específicas. Uma das técnicas mais comuns na produção de compósitos laminados é a configuração sanduíche, que consiste em utilizar duas ou mais lâminas como camadas unidas por uma camada de adesivo (CHAWLA, 2012; PEREIRA, 2002). Nesses materiais, as falhas podem ocorrer por adesão ou por aderência. A falha por aderência é caracterizada pelo descolamento dos materiais; e a falha por adesão, pela ausência de material (adesivo) entre as camadas com presença de bolhas de ar, que pode ocorrer durante o processo de fabricação desses materiais (CHAWLA, 2012; ALBERTAZZI; MENICONI; WILLEMANN, 2006; CALLISTER JR; RETHWISCH, 2014).

A termografia por infravermelho é um importante recurso utilizado para detectar falhas de contato dada a sua aplicação não intrusiva capaz de identificar pequenas variações de temperatura. Meola e Carlomagno (2004) mostraram os avanços na termografia por infravermelho até aquele ano. No contexto de identificação de falhas, os autores destacam seu uso para manutenção de equipamentos e para ensaios não destrutivos. Na manutenção, a termografia pode ser utilizada para monitorar equipamentos para auxiliar nos custos de manutenção e analisar padrões térmicos em bombas, motores, polias, ventiladores, etc, o que possibilita prever possíveis falhas nesses equipamentos e tomar as medidas necessárias. Nos ensaios não destrutivos, a termografia permite a aquisição de dados sem a necessidade de destruir o material, ou ainda, em lugares de difícil acesso, em materiais com geometrias complexas ou como um meio de aquisição de dados para identificação de propriedades térmicas (KNUPP; NAVEIRA-COTTA; COTTA, 2012; ABREU et al., 2016; ABREU et al., 2018; WATANABE; ABREU; KNUPP, 2018). Em 2012, Meola (MEOLA, 2012) publicou um livro com capítulos elaborados por diversos autores que mostram as mais diversas aplicações de termografia por infravermelho, que vão desde o uso medicinal e veterinário, passando pela indústria de alimentos, até aplicações de engenharia.

Em (COSTA, 1997) os autores realizaram uma análise de trinca em materiais utilizando duas técnicas diferentes: i) microscopia eletrônica por varredura; e ii) microscopia eletrônica de



transmissão. A microscopia eletrônica de transmissão serve para analisar estruturas cortadas em fatias finas, em contrapartida, a microscopia eletrônica por varredura é um tipo de microscopia em que um feixe de elétrons focalizado varre a superfície da amostra interagindo com a matéria e gerando informações sobre a morfologia e composição química do material. Costa (2011), em sua dissertação de mestrado, realizou uma análise de falha em materiais compósitos, que foi feita por meio de critérios baseados em fenômenos físicos. O cálculo das deformações e tensões no contorno e no domínio de cada camada que forma o material compósito foi realizado utilizando o método dos elementos de contorno (MEC).

Em Abreu et al. (2011), os autores propuseram uma abordagem, até então inovadora, para detecção de falhas em materiais compósitos por meio da estimativa da condutância de contato na interface das camadas do material. O problema físico analisado considerou um fenômeno de transferência de calor tridimensional em uma placa multicamada com fluxo de calor e convecção na superfície superior e apenas convecção na superfície inferior. Nas interfaces das camadas, foi modelada uma resistência de contato com variação espacial definindo uma condutância de contato, caracterizando a falha. O problema inverso foi resolvido utilizando o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, dentro de uma inferência Bayesiana, e sua solução é a estimativa da condutância de contato, que está diretamente relacionada à qualidade de adesão entre as camadas. Dessa forma, com a estimativa da condutância de contato, foi possível detectar a presença da falha. Este trabalho se destaca por ter sido um dos pioneiros em utilizar a condutância térmica de contato para identificar falhas de contato.

Grosso et al. (2013), em uma parceria da Petrobras com a Universidade Federal do Rio de Janeiro, analisaram a qualidade de adesão em tubos compósitos plásticos reforçados com fibra de vidro utilizando testes não destrutivos. Esses tubos são amplamente utilizados nas plataformas da Petrobras para o transporte de água ou óleo sob temperaturas moderadas, portanto a detecção de defeitos é de suma importância sob o ponto de vista tanto ambiental quanto econômico. Um dos ensaios não destrutivos empregados envolve a técnica de termografia ativa, termografia por pulsação e termografia por pulsação em fase. Na termografia por pulsação é feita um aquecimento breve e analisado o decaimento da temperatura, na termografia por pulsação em fase é feita uma análise de frequência das medidas obtidas com a termografia por pulsação. Nota-se que a técnica empregada possui uma limitação quando à espessura da camada externa do tubo.

Colaço e Alves (2013) apresentaram um método para resolver um problema inverso e estimar uma função com variação espacial da condutância térmica de contato em problemas no regime estacionário sem a necessidade de medições intrusivas de temperatura. A metodologia apresentada é baseada numa abordagem do funcional de reciprocidade com o método de soluções fundamentais. Em 2015 (COLAÇO; ALVES; ORLANDE, 2015), foi publicada uma continuação do trabalho, que permitiu a aplicação do método também no regime transiente. Nesses trabalhos os autores concluíram que houve boa estimativa da função da condutância térmica obtida por meio da solução do problema inverso.

No trabalho de Abreu et al. (2014a), os autores desenvolveram um método com o objetivo de estimar a condutância térmica de contato entre as camadas de um material compósito composto por dois materiais usando um método não intrusivo. A importância da condutância térmica se dá nas várias áreas de aplicação de transferência de calor, como na área aeroespacial, nos reatores nucleares, na biomedicina e na eletrônica. Nos equipamentos sujeitos a altos fluxos de calor é desejável que haja uma condutância térmica baixa entre eles e o sistema de resfriamento, por exemplo. A solução do problema foi baseada no funcional de reciprocidade, que consiste em duas etapas: na primeira é obtida a diferença de temperatura na interface das camadas; na segunda é obtido o fluxo de calor na mesma interface. Combinando essas duas etapas, é possível estimar a condutância térmica de contato. Os autores concluíram que o método requer baixo custo computacional e foi possível estimar a condutância térmica de contato. Naquele trabalho, os autores ressaltaram que, para melhorar a qualidade dos resultados obtidos, seria necessário investigar diferentes funções ortonormais.

Em Abreu et al. (2014b), os autores tinham como objetivo identificar falhas de contato por meio da análise da estimativa da condutância térmica de contato entre as camadas de um material compósito de multicamadas, que está diretamente associada a qualidade de adesão entre as camadas. O problema direto foi resolvido utilizando uma abordagem híbrida, a Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT) com o Método das Diferenças Finitas. No problema inverso foi utilizado o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings e com uma priori não informativa, a *Total Variation*. Os resultados obtidos com diferentes temperaturas experimentais simuladas e diferentes geometrias das falhas de contato mostraram a capacidade do método proposto em identificar as falhas com precisão. A abordagem se mostrou robusta, sendo capaz de detectar as falhas mesmo com altos erros de medição relativos à máxima diferença de temperatura observada nas regiões com e sem falha.

Abreu et al. (2016) desenvolveram um método para identificar falhas de adesão em materiais compósitos de duas camadas por meio da estimativa da diferença de temperatura, do fluxo de calor e da condutância térmica de contato na interface das camadas. Esses parâmetros são estimados a partir da resolução de um problema inverso com aplicação do método do funcional de reciprocidade. Além disso, houve a elaboração de um aparato experimental com o intuito de validar a metodologia proposta e adquirir dados experimentais reais, com o uso de termografia por infravermelho, para utilizar no problema inverso. Os autores concluíram que a metodologia adotada foi capaz de detectar a falha com boa concordância com os corpos de prova.

Em Mascouto et al. (2020), os autores elaboraram uma abordagem de detecção de falhas em compósitos laminados empregando uma combinação de técnicas de transformada integral clássica com diferenças finitas para resolver o problema direto e uma inferência Bayesiana para solucionar o problema inverso. O problema físico proposto envolve a análise térmica de um tubo feito de material compósito com uma falha de contato (caracterizada pela presença de ar na

região do adesivo) entre as camadas sujeito a um fluxo de calor na superfície inferior; troca de calor com o ambiente por convecção na superfície superior; e bordas isoladas termicamente. A solução do problema direto obtida com diferentes ordens de truncamento da CITT foi comparada com a solução obtida com o COMSOL com boa aproximação, segundo os autores. No problema inverso foram utilizadas medidas experimentais simuladas obtidas na superfície superior do material para estimar a função da condutividade térmica na camada do adesivo com uma variação significativa em torno da região do adesivo, visto que a falha é caracterizada pela presença de ar e sua condutividade térmica é consideravelmente menor do que a do adesivo. Apesar de o método ter logrado seu objetivo, foi constatado um alto custo computacional na solução do problema inverso.

Nesta dissertação, a abordagem adotada para identificar falhas de contato em materiais compósitos é por meio da formulação de modelos reduzidos de baixo custo computacional que reproduzem um comportamento similar ao do modelo completo proposto por Mascouto et al. (2020), que, por ser mais complexo, requer maior custo computacional. Por meio da solução do problema inverso, utilizando os modelos reduzidos, são estimadas funções com variação espacial que possibilitam a detecção de falhas de acordo com seu comportamento, como as funções com variação espacial da condutividade térmica e do fluxo de calor. Espera-se que a variação dessas funções estimadas permita detectar a região de falha na interface das camadas.

## 1.2 *Improved Lumped Formulation*

Em muitos problemas práticos de engenharia é comum encontrar problemas físicos cujas soluções das equações diferenciais que modelam estes problemas possuem custo computacional alto. No entanto, há também problemas que podem ter solução via modelos mais simples, mas que ainda assim representem razoavelmente bem o problema real tratado. Uma dessas técnicas comumente aplicada em problemas que envolvem corpos termicamente finos é o *Classical Lumped*, que a partir de uma integração na direção do eixo de menor espessura do material, estima-se uma temperatura média aproximada que é adotada para todo o corpo, desprezando-se assim o gradiente de temperatura na direção integrada. No entanto, sua aplicação é limitada de acordo com o número de *Biot*, que deve ser menor do que 0,1. Esse número é um adimensional utilizado em transferência de calor e verifica se é possível desprezar o gradiente de temperatura no espaço, caso seja maior do que 0,1, não é possível realizar a aproximação da temperatura sem a perda de informação, especialmente nos contornos. Quando  $Biot > 0,1$ , pode-se optar por utilizar uma outra formulação, o *Improved Lumped*. Diferentemente do que acontece no *Classical Lumped*, com essa formulação, obtém-se também uma aproximação da temperatura para cada contorno a partir da temperatura média obtida anteriormente buscando minimizar a perda de informação por conta da aproximação. Obtém-se, então, uma estimativa da temperatura para cada contorno e para o interior do material na direção do eixo em que foi realizada o

*Lumped* (OZISIK, 1993; COTTA; MIKHAILOV, 1997; INCROPERA et al., 2014; SPHAIER; SU; COTTA, 2018)

No trabalho de Regis, Cotta e Su (2000), os autores analisaram um problema de condução de calor transiente em uma barra de combustível nuclear envolvendo reatores de água pressurizada e simuladores de usinas nucleares em tempo real, utilizando uma abordagem *Lumped*. Em muitas aplicações nucleares, o número de *Biot* é maior do que 0,1, o que torna indevida a aplicação do *Classical Lumped*, portanto foi proposta uma abordagem utilizando o *Improved Lumped*. Para isso, foram utilizadas as aproximações de Hermite das integrais para estimar a temperatura média e o fluxo de calor no sentido radial da barra. Foi observado nos resultados que houve uma melhora significativa da solução obtida com *Improved Lumped* em relação ao *Classical Lumped*.

Su e Cotta (2001) demonstraram uma abordagem por *Lumped* de um problema de transferência de calor transiente em uma barra de combustível nuclear, em que foi analisado o comportamento termohidráulico de um reator de água pressurizada (PWR) durante seu funcionamento utilizando um modelo matemático simplificado com uma formulação *Lumped* do núcleo do reator e do fluido refrigerante primário. Nos resultados foi mostrada uma comparação das soluções obtidas com o *Classical Lumped* e com o *Improved Lumped*.

Em Su (2001), foi analisado um problema de resfriamento assimétrico por convecção em uma placa longa com uma abordagem com *Lumped*. A aplicação do *Classical Lumped* é limitado pelo número de *Biot*  $< 0,1075$ . Portanto, foi proposta uma modelagem utilizando o *Improved Lumped*, que pode ser aplicado em casos com número de Biot maior. A formulação foi obtida realizando-se uma aproximação de Hermite  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . O mesmo autor, em 2004 (SU, 2004), analisou um problema transiente de resfriamento de um corpo esférico utilizando, igualmente, uma abordagem *Lumped*. O *Classical Lumped* não poderia ser aplicado nesse problema, devido à sua limitação em relação ao valor do parâmetro de radiação-convecção,  $N_{rc}$ , que deve ser menor do que 0,7. Assim, foi utilizado o *Improved Lumped Formulation*, obtido com a aproximação de Hermite  $H_{2,0}/H_{0,0}$  e  $H_{2,1}/H_{0,0}$ , que elevou o limite do parâmetro  $N_{rc}$  para 3,4 e 8,0, respectivamente. Isso possibilitou elevar a abrangência do método, podendo ser aplicado a mais casos diferentes. Nos dois trabalhos, foi feita uma comparação do *Improved Lumped* com o *Classical Lumped* e foi constatada uma melhora significativa dos resultados.

No trabalho de Su, Tan e Su (2009), foi estudado um problema transiente de condução de calor com condutividade térmica variando com a temperatura utilizando *Improved Lumped Formulation*. Essa técnica permite escrever um modelo simplificado do problema completo e, portanto, precisa-se resolver menos equações em comparação a outros métodos, como diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos. Os autores compararam as soluções obtidas para diferentes números de Biot e com diferentes métodos: diferenças finitas, *Classical Lumped* e *Improved Lumped*. Foi observado que os erros relativos, naturalmente, foram predominantemente influenciados pelo número de Biot e que houve uma melhora significativa na predição da temperatura média utilizando o *Improved Lumped* em comparação ao *Classical Lumped*.

Em Tan, Su e Su (2009), foi desenvolvido um modelo seguindo uma formulação *Improved*

*Lumped* de um problema transiente de condução de calor de uma parede sujeita a um resfriamento combinado por convecção e radiação. A formulação foi obtida realizando-se uma aproximação de Hermite  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . Os autores mostraram nos resultados uma comparação do *Improved Lumped* com o *Classical Lumped* e constataram uma melhora significativa na aproximação da temperatura média do corpo usando como critério a solução obtida por diferenças finitas.

C. An e J. Su publicaram, dentre outros, três trabalhos envolvendo problemas de transferência de calor com formulação *Lumped* (AN; SU, 2011; AN; SU, 2013; AN; SU, 2015). Em 2011 (AN; SU, 2011), os autores desenvolveram um modelo com *Improved Lumped* para resolver um problema de condução de calor transiente em placas multicamadas sujeitas a resfriamento combinado convecção-radiação. Foram analisados casos utilizando diferentes valores do número de *Biot*, do parâmetro radiação-convecção, das resistências térmicas de contato adimensionais, da espessura adimensional e da condutividade térmica de contato adimensional. Os resultados foram obtidos utilizando a formulação *Classical Lumped* e *Improved Lumped*. Utilizando a solução via diferenças finitas como parâmetro, em todos os casos testados o *Improved Lumped* foi capaz de oferecer uma solução significativamente melhor em relação ao *Classical Lumped*.

Em 2013 (AN; SU, 2013), o problema analisado foi um caso de transferência de calor unidimensional envolvendo fusão em placa de mudança de fase com geração de calor volumétrico com duas condições de contorno diferentes: *a*) condição adiabática no lado esquerdo e temperatura prescrita no direito; *b*) temperatura prescrita no lado esquerdo e convecção no lado direito. O modelo *Lumped* foi obtido utilizando a aproximação de Hermite  $H_{1,1}/H_{0,0}$ . A aproximação  $H_{1,1}$  foi empregada na integral da temperatura média tanto para a fase líquida quanto para a fase sólida durante o processo de fusão da placa e a aproximação  $H_{0,0}$  foi utilizada para estimar o fluxo de calor. Nos dois casos de condição de contorno a solução via *Lumped* foi comparada com a solução analítica de fusão em meio-plano sem fonte de calor interno, para a condição de contorno *a*; e com a solução obtida com o método de entalpia, para a condição de contorno *b*. As soluções foram obtidas com diferentes parâmetros envolvidos no problema com excelente concordância entre as soluções, segundo os autores.

Em Knupp, Naveira-Cotta e Cotta (2012), foi feita uma análise teórico-experimental de transferência de calor em sólidos não homogêneos utilizando a *Improved Lumped Formulation*, transformadas integrais e termografia por infravermelho. O objetivo era identificar propriedades termofísicas com variação espacial e simular uma transferência de calor em uma placa com nanopartículas de alumínio dispersas em uma matriz polimérica. O problema inverso foi resolvido utilizando inferência Bayesiana com o uso do método de Monte Carlo com Cadeias de Markov utilizando medidas obtidas experimentalmente. A vantagem de se realizar um experimento é a possibilidade de comparar o modelo físico-matemático adotado com as medidas reais e de validar o modelo proposto.

Em 2015 (AN; SU, 2015), a análise foi feita em um problema de transferência de calor transiente em um tubo feito com material compósito com aquecimento ativo. Foi utilizada uma formulação *Improved Lumped* obtida com a aproximação de Hermite  $H_{0,0}/H_{1,1}$  e  $H_{1,1}/H_{1,1}$ . A

solução do modelo *Lumped* foi obtida via diferenças finitas com diferentes graus de refinamento da malha e comparada com a solução obtida com um *solver* de equações diferenciais ordinárias com boa convergência dos resultados.

Orlande et al. (2014), estudaram um problema tridimensional com fluxo de calor com variação espacial. Para resolver o problema inverso, que era a estimativa do fluxo de calor, foi elaborado um problema reduzido que representa uma aproximação do problema completo utilizando o *Improved Lumped Formulation*. Nessa etapa foi utilizado o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings com priori gaussiana e *Total Variation*. Além disso, foi implementado o algoritmo *Delayed Acceptance Metropolis-Hastings* (DAMH) e o *Approximation Error Model* (AEM) a fim de diminuir as incertezas provenientes do modelo reduzido. Segundo os autores, a implementação do DAMH reduziu o custo computacional em 50%.

### 1.3 Problemas Inversos via Inferência Bayesiana

O termo "Bayesiano" é comumente utilizado para se referir a técnicas de solução de problemas inversos que se enquadram na abordagem estatística desenvolvida por Bayes (1763), no entanto, o teorema de Bayes ficou conhecido somente após Laplace publicar um trabalho que consolidou o teorema (LAPLACE, 1774; LAPLACE, 1812). Na abordagem estatística Bayesiana busca-se utilizar informações *a priori* disponíveis com o intuito de se reduzir a incerteza em um problema. O mecanismo formal utilizado pra combinar uma nova informação com aquela previamente disponível a fim de formar a base dos processos estatísticos é o teorema de Bayes (ALIFANOV, 1977; BECK; ARNOLD, 1977; BECK; BLACKWELL; ST. CLAIR, 1985; OZISIK; ORLANDE, 2000; WANG; ZABARAS, 2004; WANG; ZABARAS, 2005; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; KAIPIO; FOX, 2011; ORLANDE, 2015).

Um dos métodos estocásticos mais robustos e conhecidos no contexto de problemas inversos é o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), que é um método baseado na Inferência Bayesiana. A cadeia de Markov apresenta a propriedade Markoviana, que define que a geração de um novo candidato depende exclusivamente do estado atual da cadeia de Markov, sendo irrelevantes todos os outros estados anteriores (ORLANDE; DULIKRAVICH; COLAÇO, 2008). Neste trabalho, as cadeias de Markov são geradas pelo algoritmo de Metropolis-Hastings, que é um dos métodos de MCMC, que foi originalmente proposto por Metropolis et al. (1953) e generalizado por Hastings (1970).

A medição das propriedades térmicas é, usualmente, um método indireto, que requer a estimativa de parâmetros a partir da comparação de dados experimentais com a modelagem matemática do problema (ABREU et al., 2016; WATANABE; ABREU; KNUPP, 2018). Em poucas palavras, a solução de um problema inverso consiste na determinação de causas desconhecidas a partir da observação dos seus efeitos. Especificamente na área de transferência de calor,

por exemplo, muitas vezes deseja-se estimar propriedades térmicas ou condições de contorno a partir de medidas de temperatura obtidas na superfície de um material (ALIFANOV, 1977; BECK; ARNOLD, 1977; BECK; BLACKWELL; ST. CLAIR, 1985; ORLANDE; OZISIK, 1993; KAPIO; FOX, 2011; ORLANDE, 2012; COLIN; HEIKKI; ANDRÉS, 2013; ORLANDE; OZISIK, 2021).

Oliveira e Orlande (2004) apresentaram um problema de estimativa de fluxo de calor gerado pelo atrito na superfície de veículos espaciais reentrando na atmosfera terrestre. Evidentemente, as medidas intrusivas são muito difíceis de se obter em uma situação como essa, portanto o fluxo de calor é estimado através da solução de problemas inversos com técnicas estatísticas Bayesianas, tendo informações de medidas de temperaturas adquiridas com o auxílio do escudo térmico, que são feitos com materiais ablativos.

Em Mota et al. (2010) a técnica Bayesiana foi empregada para estimar simultaneamente a capacidade térmica volumétrica, a condutividade térmica e o fluxo de calor de contorno em um problema de condução de calor unidimensional não linear. O problema físico envolve o aquecimento de uma placa por meio de um fluxo de calor em um de seus contornos com propriedades térmicas que variam com a temperatura, por isso a não-linearidade do problema. Foi empregado o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov com o algoritmo de Metropolis-Hastings. Os resultados apresentados mostraram a capacidade e a robustez do método com solução estável e com pequenos resíduos.

No trabalho de (KNUPP et al., 2013) foi analisado um problema de condução de calor transiente unidimensional com propriedades térmicas variando com a temperatura em um meio heterogêneo. O problema inverso foi formulado com uma abordagem Bayesiana com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov e medidas experimentais reais obtidas com uma câmera termográfica. Por meio da solução do problema inverso, foi possível estimar a condutividade térmica e a difusividade térmica para o material estudado a partir de medidas experimentais reais.

Magalhães (2014) e Pereira (2012), em suas dissertações de mestrado apresentaram um problema de estimativa do fluxo de calor gerado devido ao alto atrito em uma ferramenta de brunimento. A medição direta nesse caso é impossibilitada devido a uma estreita faixa de cisalhamento, obstáculos fragmentados e ao movimento contínuo das peças durante o processo de corte. A estimativa do fluxo de calor foi feita por meio de um problema inverso com o uso da Inferência Bayesiana via Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov tendo o campo de temperatura conhecido. A obtenção desses resultados possibilita pesquisas de desenvolvimento na área industrial a fim de aumentar a qualidade das ferramentas utilizadas em máquinas de corte e dos produtos finais; prolongar a vida útil das peças e, portanto, possivelmente reduzir custos; e aumentar a eficiência de produção.

Orlande et al. (2014) apresentaram um problema físico envolvendo variação espacial de fluxo de calor, que são impostos em pequenas áreas de um corpo (pontuais) e de alta intensidade, como por exemplo lasers de alta intensidade utilizados para aquecer corpos e, portanto, o fluxo de calor imposto precisa ser bem controlado. Com o campo de temperatura conhecido, o fluxo

de calor é estimado através de um problema inverso utilizando a Inferência Bayesiana via Monte Carlo com Cadeias de Markov implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings e com o *Delayed Acceptance* Metropolis-Hastings, como uma forma de acelerar o problema inverso.

No trabalho de Abreu et al. (2018), os autores elaboraram uma técnica para detectar falhas de contato a partir da estimativa da condutância térmica por meio de um problema inverso utilizando tanto medidas experimentais simuladas como reais. As medidas de temperatura obtidas com uma câmera térmica foram espacialmente compactadas utilizando transformadas integrais com autofunções relacionadas ao problema físico verdadeiro. A compactação empregada, além de diminuir o custo computacional, serviu como uma regularização para o problema inverso, que foi solucionada com uma abordagem Bayesiana com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov e com o filtro de Kalman.

Watanabe, Abreu e Knupp (2018) fizeram uma análise teórica-experimental de fluxo térmico com variação espacial empregando inferência Bayesiana. O problema físico analisado foi um caso de condução de calor em uma placa termicamente fina sujeita a um fluxo de calor em uma superfície e à convecção na outra. A formulação do problema direto envolveu uma modelagem utilizando *Lumped* com diferenças finitas. Além disso, os autores apresentaram um aparato experimental que consistia em monitorar, com uma câmera térmica, o aquecimento de duas placas de alumínio com uma resistência elétrica entre elas em uma configuração sanduíche. Além de validar a modelagem proposta, as medidas experimentais adquiridas foram utilizadas no problema inverso, que foi resolvido com uma abordagem em inferência Bayesiana com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov, cuja solução é a estimativa da função do fluxo de calor com variação espacial.

Em algumas aplicações envolvendo uma grande quantidade de dados e pela complexidade de alguns cálculos os algoritmos de MCMC, como Metropolis-Hastings, podem requerer um alto custo computacional para gerar a solução. No entanto, existem técnicas que aceleram esse processo. No problema inverso do trabalho de Faria, Stutz e Castello (2020) os autores utilizaram o *Delayed rejection adaptive metropolis* (DRAM) com o intuito de melhorar a eficiência do algoritmo de Metropolis-Hastings para estimar a viscoelasticidade em modelos de vigas de Euler-Bernoulli. Nesse mesmo contexto de redução do custo computacional, Banterle apresentou outra técnica com o mesmo intuito (BANTERLE et al., 2019). Nesse trabalho, os autores apresentaram um método capaz de acelerar o Metropolis-Hastings utilizando *Delayed Acceptance* (DA). A ideia por trás dessa técnica consiste em dividir a aceitação de um candidato em duas ou mais etapas. Assim, caso haja rejeição de algum candidato em alguma dessas etapas, não é necessário prosseguir para as etapas seguintes.

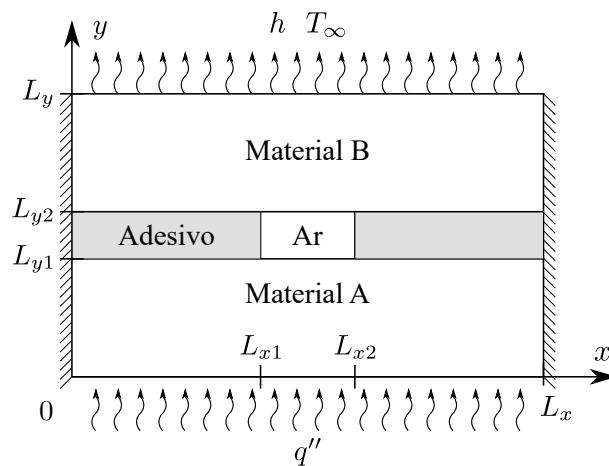


## 2 CONDUÇÃO DE CALOR EM COMPÓSITO LAMINADO COM FALHA DE ADESÃO

O problema físico envolve condução de calor bidimensional em um compósito laminado com três diferentes camadas e materiais, de acordo com a Figura 1, com largura igual a  $L_x$  na direção  $x$  e altura  $L_y$  na direção  $y$ . O material é composto por uma camada de um material A e uma camada de um material B, que são unidas por adesivo. A falha de contato é caracterizada pela presença de ar na região onde deveria haver somente adesivo.

Supõe-se que na análise de falha neste material, um fluxo de calor seja aplicado na superfície inferior, onde  $y = 0$ , enquanto a superfície superior está sujeita a uma troca de calor por convecção natural com o meio ambiente, com coeficiente de convecção  $h$  e com temperatura ambiente  $T_\infty$ . As bordas laterais ( $x = 0$  e  $x = L_x$ ) são consideradas isoladas termicamente.

Figura 1 - Problema físico.



Fonte: O autor, 2021.

A equação do calor, formulada em domínio único, considerando continuidade de fluxo e de temperatura, pode ser escrita como (OZISIK, 1987; INCROPERA et al., 2014; COTTA; KNUPP; NAVEIRA COTTA, 2016):

$$\rho(x, y) c_p(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (1)$$

em que  $\rho$  é a massa específica,  $c_p$  é o calor específico e  $k$  é a condutividade térmica.

As condições de contorno e inicial são dadas por

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad \text{para } x = L_x \text{ e } t > 0 \quad (3)$$

$$-k(x, y) \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = q'', \quad \text{para } y = 0 \text{ e } t > 0 \quad (4)$$

$$k(x, y) \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L_y} + h T(x, y, t) \Big|_{y=L_y} = h T_\infty, \quad \text{para } y = L_y \text{ e } t > 0 \quad (5)$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \forall x, y \text{ e } t = 0 \quad (6)$$

em que  $q''$  é o fluxo de calor,  $h$  é o coeficiente de convecção e  $T_0$  é a temperatura inicial.

Nota-se que ao adotar uma formulação em domínio único, as propriedades dos materiais ( $\rho$ ,  $c_p$  e  $k$ ) aparecem nas Eqs. (1), (4) e (5) como funções dependentes do espaço.

As equações que modelam o problema foram escritas seguindo uma formulação em domínio único, dessa forma, as Eqs. (1) a (6) valem para diferentes dimensões. Isso possibilita adotar diferentes configurações e geometrias complexas sem a necessidade de diferentes equações para cada região do domínio, bastando apenas escrever as propriedades térmicas em função do espaço.

As funções com variação espacial da condutividade térmica e do produto entre a massa específica e o calor específico são escritas como:

$$k(x, y) = \begin{cases} k_a, & \text{se } y \leq L_{y1} \\ k_b, & \text{se } y > L_{y2} \\ k_{ar}, & \text{se } L_{y1} < y \leq L_{y2} \text{ e } L_{x1} \leq x \leq L_{x2} \\ k_{ad}, & \text{se } L_{y1} < y \leq L_{y2} \text{ e } (x < L_{x1} \text{ ou } x > L_{x2}) \end{cases} \quad (7)$$

e

$$w(x, y) = \begin{cases} w_a, & \text{se } y \leq L_{y1} \\ w_b, & \text{se } y > L_{y2} \\ w_{ar}, & \text{se } L_{y1} < y \leq L_{y2} \text{ e } L_{x1} \leq x \leq L_{x2} \\ w_{ad}, & \text{se } L_{y1} < y \leq L_{y2} \text{ e } (x < L_{x1} \text{ ou } x > L_{x2}) \end{cases} \quad (8)$$

onde  $w(x, y) = \rho(x, y) c_p(x, y)$ .

## 2.1 Formulação da Técnica da Transformada Integral Clássica

Soluções analíticas, sejam elas exatas ou aproximadas, são sempre úteis nas aplicações de engenharia porque fornecem uma visão melhor sobre a relevância física dos vários parâmetros envolvidos no problema. Entretanto, em muitas aplicações práticas, o sistema de equações diferenciais que modela um problema não possui solução analítica ou é custoso de se obter. Assim, técnicas de transformadas integrais, como a CITT, são uma boa ferramenta para lidar com tais problemas (KOSHLYAKOV, 1936; MIKHAILOV; OZISIK, 1994; COTTA, 1993; COTTA; MIKHAILOV, 1997; ABREU et al., 2014b; KNUPP et al., 2012; KNUPP; NAVEIRA-COTTA; COTTA, 2012).

Nesse âmbito, o método de separação de variáveis é amplamente utilizado para encontrar a solução de problemas homogêneos de condução de calor. Contudo, esse método possui uma limitação quanto ao tipo de problema que ela é capaz de resolver, bastando a presença de um termo não homogêneo na equação de difusão ou nas condições de contorno para impossibilitar a sua aplicação (COTTA; KNUPP; QUARESMA, 2018; OZISIK, 1993). Para contornar isso, procedimentos com filtros analíticos podem ser aplicados para eliminar as não-homogeneidades com dependência espacial. No entanto, se houver dependência temporal, os filtros não são muito eficazes. Essa técnica apresentou grande avanço na solução de sistemas de equações diferenciais parciais que não podiam ser resolvidos pelo método de separação de variáveis e se tornou uma das abordagens mais gerais para certas classes de problemas de difusão lineares. Apesar disso, a CITT ainda possuía uma limitação quanto ao seu uso, sendo indevida a sua aplicação na impossibilidade de transformação de algum termo da formulação (COTTA, 1993; COTTA, 1994). Para aumentar a capacidade de problemas, inclusive não-lineares, que podem ser resolvidos via CITT foi formulada a técnica da transformada integral generalizada (GITT) (COTTA, 1993; COTTA, 1994; COTTA; MIKHAILOV, 1997).

A CITT é uma generalização do método de separação de variáveis e pode ser aplicada diretamente para resolver diversos problemas de transferência de calor, construindo um problema de autovalores em um único domínio, que reúne todas as diferentes sub-regiões em um

único conjunto de autovalores, o que em geral envolve um processo computacional intenso no caso de problemas multidimensionais. Por outro lado, neste último caso, ao aplicar a propriedade de ortogonalidade, obtém-se um único sistema transformado e um único conjunto de potenciais transformados, o que resulta em uma simplificação significativa do procedimento em problemas mais complexos (OZISIK, 1993; COTTA; MIKHAILOV, 1997; COTTA et al., 2013; COTTA; KNUPP; NAVEIRA COTTA, 2016; COTTA; KNUPP; QUARESMA, 2017; COTTA; KNUPP; QUARESMA, 2018; KNUPP et al., 2012; KNUPP; NAVEIRA-COTTA; COTTA, 2012; MASCOUTO et al., 2020).

Com a formulação em domínio único, a técnica da transformada integral clássica pode ser diretamente aplicada para resolver o problema sem precisar construir autofunções individuais para cada potencial em cada sub-região do domínio.

Considere a formulação de um problema geral de difusão escrita pelas equações

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + L\{T(\mathbf{x}, t)\} = P(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V, t > 0 \quad (9)$$

$$B\{T(\mathbf{x}, t)\} = \phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S, t > 0 \quad (10)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (11)$$

onde o operador  $L$  é definido por

$$L \equiv -\nabla(K(\mathbf{x}) \nabla(\cdot)) + d(\mathbf{x})(\cdot) \quad (12)$$

e  $B$ , por

$$B \equiv \alpha(\mathbf{x})(\cdot) + \beta(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{n}} \quad (13)$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor de direções.

Os parâmetros  $w(\mathbf{x})$ ,  $P(\mathbf{x}, t)$ ,  $K(\mathbf{x})$ ,  $d(\mathbf{x})$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\alpha(\mathbf{x})$  e  $\beta(\mathbf{x})$  são encontrados fazendo a assimilação da equação geral do problema de difusão (Eqs. (9) a (13)) com a formulação do problema deste trabalho (Eqs. (1) a (6)).

A fim de resolver o sistema de equações das Eqs. (9) a (11) os seguintes passos devem ser empregados (COTTA; KNUPP; QUARESMA, 2018; OZISIK, 1993)

- a) Aplicar o método de Separação de variáveis na versão homogênea da equação diferencial parcial (EDP) para obter o problema de autovalor;
- b) Desenvolver o par de transformação integral (transformada integral e fórmula

inversa);

- c) Transformar a EDP em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) por meio da transformada integral da EDP original;
- d) Resolver analiticamente o sistema de EDO's obtido;
- e) Utilizar a fórmula inversa para encontrar a solução final  $T(\mathbf{x}, t)$ .

### Passo 1

Considera-se a versão homogênea do problema original (Eqs. (9) a (11))

$$w(\mathbf{x}) \frac{\partial T_h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + L\{T_h(\mathbf{x}, t)\} = 0, \quad \mathbf{x} \in V, t > 0 \quad (14)$$

$$B\{T_h(\mathbf{x}, t)\} = 0, \quad \mathbf{x} \in S, t > 0 \quad (15)$$

$$T_h(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (16)$$

em que  $T_h(\mathbf{x}, t)$  é a função da temperatura do problema homogêneo.

Aplica-se o método de separação de variáveis, em que  $\psi(\mathbf{x})$  é a autofunção com variação espacial; e  $\Gamma(t)$  é a função com variação temporal

$$T_h(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) \Gamma(t) \quad (17)$$

que resulta no problema de autovalor

$$L\{\psi(\mathbf{x})\} = \mu^2 w(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V \quad (18)$$

$$B\{\psi(\mathbf{x})\} = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (19)$$

que é um problema de autovalor de Sturm-Liouville, onde  $\mu$  são os autovalores, de modo que as autofunções  $\psi(\mathbf{x})$  satisfaçam a propriedade de ortogonalidade (OZISIK, 1987; PLETCHER; TANNEHILL; ANDERSON, 2013)

$$\int_V w(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) dV = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j \\ N_i, & \text{if } i = j \end{cases} \quad (20)$$

com

$$N_i = \int_V w(\mathbf{x}) \psi_i^2(\mathbf{x}) dV \quad (21)$$

## Passo 2

Considere que o potencial de interesse  $T(\mathbf{x}, t)$  possa ser escrito como uma expansão em termos da base de autofunções  $\psi_i(\mathbf{x})$

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \psi_i(\mathbf{x}) \quad (22)$$

Aplicando o operador  $\int_V w(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x})(\cdot) dV$  na Eq. (22) e usando a propriedade da ortogonalidade, obtém-se uma expressão para  $A_i(t)$

$$A_i(t) = \frac{1}{N_i} \int_V w(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{N_i} \bar{T}_i(t) \quad (23)$$

define-se, assim, o par de transformação integral

$$\text{Transformada: } \bar{T}_i(t) = \int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dV \quad (24)$$

$$\text{Inversa: } T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{T}_i(t) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \quad (25)$$

com as autofunções normalizadas

$$\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) = \frac{\psi_i(\mathbf{x})}{N_i^{1/2}} \quad (26)$$

$$N_i = \int_V w(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x})^2 dV \quad (27)$$

Os coeficientes  $\bar{T}_i(t)$ , denominados potenciais transformados, não são conhecidos e, por isso, a fórmula inversa, Eq. (25), ainda não pode ser usada. A determinação dos potenciais transformados será realizada a partir da transformação integral do problema original utilizando a

definição da transformada, Eq. (24).

### Passo 3

O objetivo nesta etapa é transformar a EDP (Eqs. (9) to (11)) em um sistema de EDO's. Isso é feito com a aplicação do operador  $\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) (\cdot) dV$  na Eq. (9)

$$\underbrace{\int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV}_A + \underbrace{\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) L\{T(\mathbf{x}, t)\} dV}_B = \underbrace{\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) dV}_C \quad (28)$$

Observa-se cada termo da Eq. (28) separadamente. O termo A pode ser escrito como

$$\int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} \quad (29)$$

Para o termo B, expande-se o operador  $L$

$$\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) L\{T(\mathbf{x}, t)\} dV = - \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t)] dV + \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) d(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dV \quad (30)$$

Escreve-se o problema de autovalor (Eqs. (18) e (19)) em termos das autofunções normalizadas, que resulta em

$$\mu_i^2 w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})] + d(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \quad (31)$$

então

$$d(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) = \mu_i^2 w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) + \nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})] \quad (32)$$

Agora substitui-se, a Eq. (32) no último termo da Eq. (30), então pode-se escrever

$$\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) L\{T(\mathbf{x}, t)\} dV = \mu_i^2 \overbrace{\int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) dV}^{\bar{T}_i(t)} + \int_V \left\{ T(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})] - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t)] \right\} dV \quad (33)$$

e

$$\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) L\{T(\mathbf{x}, t)\} dV = \mu_i^2 \bar{T}_i(t) + \int_V \left\{ T(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})] - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \nabla \cdot [K(\mathbf{x}) \nabla T(\mathbf{x}, t)] \right\} dV \quad (34)$$

Observa-se que o último termo da Eq. (34) pode ser transformado de uma integral de volume em uma integral de superfície a partir da aplicação da segunda fórmula de Green, sendo  $f$  e  $g$  contínuos e diferenciáveis em  $V$

$$\int_V [f \nabla \cdot (\kappa \nabla g) - g \nabla \cdot (\kappa \nabla f)] dV = \int_S \kappa \left( f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (35)$$

Assim, a Eq. (34) pode ser reescrita por

$$\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) L\{T(\mathbf{x}, t)\} dV = \mu_i^2 \bar{T}_i(t) + \int_S K(\mathbf{x}) \left( T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (36)$$

As condições de contorno do problema original (Eq. (10)) e do problema de autovalor (Eq. (19)) pode serem utilizadas para reescrever o segundo termo do lado direito da Eq. (36)

$$\alpha(\mathbf{x}) T(\mathbf{x}, t) + K(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = \phi(\mathbf{x}, t) \quad (37)$$

e

$$\alpha(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}) \beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (38)$$

Multiplica-se a Eq. (37) por  $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x})$  e a Eq. (38) por  $T(\mathbf{x}, t)$  e, em seguida, subtrai-se a



primeira da segunda

$$K(\mathbf{x}) \left( T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right) = - \frac{\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, t)}{\beta(\mathbf{x})} \quad (39)$$

Substitui-se a Eq. (39) na Eq. (36) e, ainda, considera-se a multiplicação da Eq. (37) por  $(K(\mathbf{x}) \partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{n})$  e da Eq. (38) por  $(K(\mathbf{x}) \partial T(\mathbf{x}, t) / \partial \mathbf{n})$ . Subtraindo-se a primeira da segunda, obtém-se

$$K(\mathbf{x}) \left( T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right) = \frac{K(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \phi(\mathbf{x}, t)}{\alpha(\mathbf{x})} \quad (40)$$

Para evitar uma possível situação em que haja divisão por zero caso  $\beta(\mathbf{x}) = 0$  na Eq. (39) ou caso  $\alpha(\mathbf{x}) = 0$  na Eq. (40), usam-se ambas equações para escrever a Eq. (41), uma vez que  $\beta(\mathbf{x})$  e  $\alpha(\mathbf{x})$  não podem ser iguais a zero simultaneamente.

A partir das Eqs. (39) e (40), tem-se que

$$K(\mathbf{x}) \left( T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} \right) = \frac{\phi(\mathbf{x}, t) \left( K(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \right)}{\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})} \quad (41)$$

Sostituindo-se a Eq. (41) na Eq. (36), obtém-se

$$\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) L\{T(\mathbf{x}, t)\} dV = \mu_i^2 \bar{T}_i(t) + \bar{g}_i^*(t) \quad (42)$$

em que

$$\bar{g}_i^*(t) = \int_S \frac{\phi(\mathbf{x}, t) \left( K(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \right)}{\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})} dS \quad (43)$$

Por fim, analisando o termo C da Eq. (28), escreve-se

$$\bar{g}_i^{**}(t) = \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t) dV \quad (44)$$

Agora, substituem-se as Eqs. (29), (43) e (44) na Eq. (28) e obtém-se o problema transformado para o potencial  $\bar{T}_i(t)$

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

em que

$$\bar{g}_i(t) = \bar{g}_i^{**}(t) - \bar{g}_i^*(t) \quad (47)$$

e

$$\bar{f}_i = \int_V w(\mathbf{x}) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dV \quad (48)$$

#### Passo 4

O sistema de EDO's desacoplados dado pelas Eqs. (46) a (48) pode ser resolvido analiticamente para o potencial transformado  $\bar{T}_i(t)$

$$\bar{T}_i(t) = e^{-\mu_i^2 t} \left[ \bar{f}_i + \int_0^t e^{\mu_i^2 t'} \bar{g}_i(t') dt' \right] \quad (49)$$

#### Passo 5

Uma vez conhecidos os potenciais  $\bar{T}_i(t)$  (Eq. (49)) e as autofunções  $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x})$  (Eqs. (18) e (19)), a fórmula inversa (Eq. (25)) pode ser utilizada, resultando na formulação para o potencial desejado  $T(\mathbf{x}, t)$

$$T(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) e^{-\mu_i^2 t} \left[ \bar{f}_i + \int_0^t e^{\mu_i^2 t'} \bar{g}_i(t') dt' \right] \quad (50)$$

## 2.2 Aplicação da CITT no problema físico

A fim de homogeneizar a condição de contorno em  $y = L_y$  com o objetivo de obter uma menor ordem de truncamento, foi utilizado o filtro analítico

$$T(x, y, t) = T_\infty + T^*(x, y, t) \quad (51)$$

Assim, obtém-se o problema

$$\rho(x, y) c_p(x, y) \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (52)$$

com as condições de contorno e inicial

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (53)$$

$$\left. \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad \text{para } x = L_x \text{ e } t > 0 \quad (54)$$

$$-k(x, y) \left. \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = q'', \quad \text{para } y = 0 \text{ e } t > 0 \quad (55)$$

$$k(x, y) \left. \frac{\partial T^*(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L_y} + h T^*(x, y, t) \Big|_{y=L_y} = 0 \quad \text{para } y = L_y \text{ e } t > 0 \quad (56)$$

$$T^*(x, y, 0) = T_0 - T_\infty, \quad \forall x, y \text{ e } t = 0 \quad (57)$$

Fazendo a analogia das equações que modelam o problema físico (Eqs. (52) a (57)) com as equações da CITT (Eqs. (9) a (11)), pode-se escrever

$$\begin{array}{lll} w(\mathbf{x}) = \rho(x, y) c_p(x, y) & \beta(0, y) = 1 & \beta(x, 0) = 1 \\ K(\mathbf{x}) = k(x, y) & \alpha(0, y) = 0 & \alpha(x, 0) = 0 \\ P(\mathbf{x}, t) = 0 & \phi(0, y) = 0 & \phi(x, 0) = q'' \\ d(\mathbf{x}) = 0 & \beta(L_x, y) = 1 & \beta(x, L_y) = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\alpha(L_x, y) &= 0 & \alpha(x, L_y) &= h \\ \phi(L_x, y) &= 0 & \phi(x, L_y) &= 0\end{aligned}$$

Substituindo esses valores nas Eqs (24) e (25), o par de transformada integral pode ser reescrito como

$$\bar{T}_i(t) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(x, y) c_p(x, y) \tilde{\psi}_i(x, y) T^*(x, y, t) dx dy \quad (58)$$

$$T^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{T}_i(t) \tilde{\psi}_i(x, y) \quad (59)$$

cujas autofunções são obtidas pela solução do problema de autovalor diferencial (Eqs. (18) e (19))

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k(x, y) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k(x, y) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right] + \mu^2 \rho(x, y) c_p(x, y) \psi(x, y) = 0 \quad (60)$$

com as condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (61)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad \text{para } x = L_x \text{ e } t > 0 \quad (62)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \text{para } y = 0 \text{ e } t > 0 \quad (63)$$

$$k(x, y) \left. \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right|_{y=L_y} + h \psi(x, y) \Big|_{y=L_y} = 0 \quad \text{para } y = L_y \text{ e } t > 0 \quad (64)$$

Aplicando a Eq. (58) nas Eqs. (53) a (57)

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{T}_i(t) = \bar{g}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (65)$$

em que a Eq. (43) é reescrita como

$$\bar{g}_i^*(t) = \int_S \frac{\phi(x, y, t) \left( k(x, y) \frac{\partial \tilde{\psi}_i(x, y)}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(x, y) \right)}{\alpha(x, y) + \beta(x, y)} dS \quad (66)$$

e a Eq. (44) se anula

$$\bar{g}_i^{**}(t) = 0 \quad (67)$$

A solução do sistema de EDOs, dado pela Eq. (65) representada por

$$\bar{T}_i(t) = e^{-\mu_i^2 t} \left[ \bar{f}_i + \int_0^t e^{\mu_i^2 t'} \bar{g}_i(t') dt' \right] \quad (68)$$

onde

$$\bar{f}_i = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \rho(x, y) c_p(x, y) \tilde{\psi}_i(x, y) (T_0 - T_\infty) dV \quad (69)$$

A solução final do problema é encontrada substituindo  $T^*(x, y, t)$  na Eq. (51).

Além da formulação via CITT, o problema também foi solucionado utilizando o *software* COMSOL Multiphysics, que é um programa de análise de elementos finitos para problemas físicos, apresentado no Apêndice A.

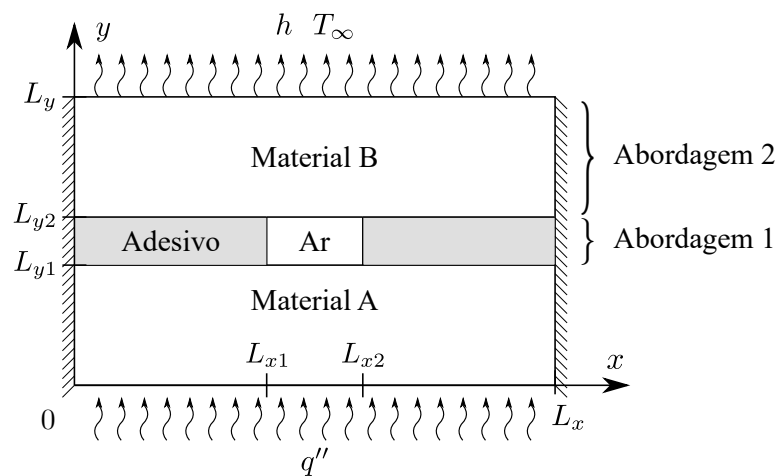
### 3 MODELO REDUZIDO

Nesta seção, serão apresentadas duas abordagens diferentes com objetivo de estimar as falhas de contato, ambas estão identificadas na Figura 2. O intuito dessas abordagens é obter modelos reduzidos que possam substituir o problema completo, apresentado no Capítulo 2, na função de verossimilhança na solução do problema inverso, que será detalhado no Capítulo 4. Por se tratar de modelos fisicamente simplificados, espera-se que o custo computacional da solução do problema inverso utilizando os modelos reduzidos seja menor do que se utilizasse o modelo completo.

A primeira abordagem envolve a formulação de um modelo reduzido que representa uma aproximação do problema direto. Sua dedução é desenvolvida com a aplicação do *Improved Lumped Formulation* na direção  $y$  e engloba apenas a parte da região do adesivo, conforme mostra a Figura 2. A detecção da falha com esta abordagem se dará pelo comportamento da função da condutividade térmica  $k(x)$  estimada por meio do problema inverso. Espera-se que haja uma variação dessa propriedade ao longo da região do adesivo, uma vez que a falha é caracterizada pela presença de uma bolha de ar. Assim, de acordo com a variação da condutividade será possível estimar a região da falha de contato.

A segunda abordagem envolve um problema físico que modela apenas a camada superior do material com troca de calor por convecção natural na superfície superior, fluxo de calor na superfície inferior e com bordas isoladas. A identificação da falha está relacionada com a variação do fluxo de calor estimado no problema inverso. Dado que, devido a presença de uma falha na região do adesivo, o fluxo de calor equivalente não é constante.

Figura 2 - Identificação das abordagens propostas.



Fonte: O autor, 2021.

### 3.1 Abordagem 1

Vários problemas de difusão multidimensional, que envolvem sistemas de equações diferenciais parciais, e/ou com geometrias complexas implicam soluções não analíticas e custosas, podendo requerer um alto custo computacional. Sendo assim, são de extremo interesse à engenharia propostas de formulações simplificadas do sistema de equações por meio da redução do número de variáveis independentes em casos de problemas com mais de uma variável. Isso é feito realizando-se uma integração das equações diferenciais parciais em uma ou mais variável espacial, porém preservando alguma informação em relação à direção integrada por meio das condições de contorno. Diferentes níveis de aproximação podem ser obtidos, indo desde o *Classical Lumped* a formulações melhoradas, como a aproximação de Hermite, que consiste em aproximar uma integral baseado nos valores do integrando e suas derivadas nos limites de integração, da forma (HERMITE, 1878; MENNIG; AUERBACH; HÄLG, 1983; COTTA; MIKHAILOV, 1997)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cong \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu} f_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} D_{\nu} f_i^{(\nu)} \quad (70)$$

em que  $f(x)$  e suas derivadas  $f^{(\nu)}(x)$  são definidas para todo  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ . Além disso, assume-se que os valores de  $f^{(\nu)}(x_{i-1}) \equiv f_{i-1}^{(\nu)}$ , para  $\nu = 0, 1, 2, \dots, \alpha$ , e de  $f^{(\nu)}(x_i) \equiv f_i^{(\nu)}$ , para  $\nu = 0, 1, 2, \dots, \beta$ , sejam conhecidos nos limites do intervalo de integração. Dessa forma, a integral de  $f(x)$  é escrita como uma combinação linear de  $f(x_{i-1})$ ,  $f(x_i)$  e suas derivadas,  $f^{(\nu)}(x_{i-1})$ , até  $\nu = \alpha$ , e  $f^{(\nu)}(x_i)$ , até  $\nu = \beta$ . Essa abordagem é chamada de aproximação  $H_{\alpha, \beta}$ , cuja expressão é escrita como

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{\nu=0}^{\alpha} C_{\nu}(\alpha, \beta) h_i^{\nu+1} f_{i-1}^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{\beta} C_{\nu}(\alpha, \beta) (-1)^{\nu} h_i^{\nu+1} f_i^{(\nu)} + O(h_i^{\alpha+\beta+3}) \quad (71)$$

onde

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad (72)$$

e

$$C_{\nu}(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha + 1)! (\alpha + \beta - \nu)!}{(\nu + 1)! (\alpha - \nu)! (\alpha + \beta + 2)!} \quad (73)$$

Neste trabalho serão consideradas as aproximações  $H_{0,0}$  e  $H_{1,1}$ , dadas por

$$H_{0,0} \rightarrow \int_0^h f(x) dx \cong \frac{h}{2} (f(0) + f(h)) \quad (74)$$

$$H_{1,1} \rightarrow \int_0^h f(x) dx \cong \frac{h}{2} (f(0) + f(h)) + \frac{h^2}{12} (f'(0) - f'(h)) \quad (75)$$

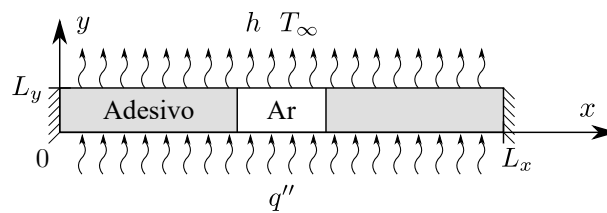
A formulação *Lumped* será aplicado para solucionar o modelo reduzido 1.

### 3.1.1 Modelo Reduzido 1

O problema reduzido 1 proposto neste trabalho consiste em modelar apenas a camada do adesivo, considerando o fluxo de calor diretamente imposto na sua superfície inferior e com troca de calor com o ambiente por convecção natural na superfície superior, como mostra a Figura 3.

Com esta abordagem, no problema inverso, estima-se a função da condutividade térmica ao longo da região do adesivo e serão utilizadas medidas experimentais sintéticas obtidas a partir da solução do problema direto do modelo completo na superfície inferior, porém a função de verossimilhança será calculada utilizando o modelo reduzido. A detecção da falha se dará de acordo com o comportamento da função da condutividade térmica estimada. Espera-se que, em torno da região da falha, essa propriedade sofra uma variação, uma vez que a condutividade térmica do ar é significativamente menor do que a do adesivo.

Figura 3 - Representação esquemática do modelo reduzido 1.



Fonte: O autor, 2021.

A equação do calor, formulada em domínio único, que modela o problema é escrita como (OZISIK, 1987; INCROPERA et al., 2014)

$$\rho(x) c_p(x) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (76)$$



com as condições de contorno e inicial

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (77)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad \text{para } x = L_x \text{ e } t > 0 \quad (78)$$

$$-k(x) \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = q''(x), \quad \text{para } y = 0 \text{ e } t > 0 \quad (79)$$

$$k(x) \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L_y} + h T(x, y, t) \Big|_{y=L_y} = h T_\infty, \quad \text{para } y = L_y \text{ e } t > 0 \quad (80)$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \forall x, y \text{ e } t = 0 \quad (81)$$

Nota-se que agora a condutividade térmica  $k(x)$ , a massa específica  $\rho(x)$  e o calor específico  $c_p(x)$  variam apenas na direção  $x$ , uma vez que essas propriedades não variam na direção  $y$ .

### 3.1.1.1 Classical Lumped Formulation

O *Classical Lumped Formulation* é um método que permite adotar uma simplificação da temperatura no espaço. Em materiais suficientemente finos o gradiente de temperatura pode ser desprezado de acordo com o número de *Biot*  $= Lh/k$ , que deve ser menor do que 0,1. Então considera-se uma temperatura uniforme no espaço. No entanto, em muitas aplicações de engenharia o número de Biot é maior, o que não permite aplicar esse método sem perda de informação. Nesses casos, é utilizado o *Improved Lumped Formulation*, que leva em consideração o gradiente de temperatura presente no fenômeno físico (SU; TAN; SU, 2009; KNUPP; NAIVEIRA-COTTA; COTTA, 2012; ORLANDE et al., 2014).

Considera-se a temperatura média

$$\bar{T}(x, t) = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} T(x, y, t) dy \quad (82)$$

e aplica-se o operador  $\frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} (\cdot) dy$  na EDP, Eq. (76)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{L_y} \left[ -k_y \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \left( -k_y \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right) \right] = \rho_x c_{px} \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial t} \quad (83)$$

Substituindo as condições de contorno

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{L_y} [-h(\bar{T}(x, t) - T_\infty) + q''(x)] = \rho_x c_{px} \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial t} \quad (84)$$

Agora, sistema de equações que rege o modelo reduzido é reescrito como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{-h \bar{T}(x, t)}{L_y} + \frac{h T_\infty + q''(x)}{L_y} = \rho_x c_{px} \frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial t} \quad (85)$$

com as condições de contorno e inicial reescritas

$$\frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (86)$$

$$\frac{\partial \bar{T}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = 0, \quad \text{para } x = L_x \text{ e } t > 0 \quad (87)$$

$$\bar{T}(x, 0) = T_0, \quad \forall x, y \text{ e } t = 0 \quad (88)$$

Nota-se que agora o problema é dependente apenas de uma variável no espaço.

### 3.1.1.2 Improved Lumped Formulation

No *Classical Lumped Formulation* despreza-se o gradiente de temperatura ao longo da espessura. Portanto, considera-se apenas uma temperatura média para todo o corpo e, por conseguinte, as temperaturas nas superfícies superior e inferior são iguais à temperatura média (SU; TAN; SU, 2009; KNUPP; NAVEIRA-COTTA; COTTA, 2012; ORLANDE et al., 2014).

No entanto, no *Improved Lumped Formulation*, baseado na abordagem do par de equações integrais  $H_{0,0}/H_{1,1}$ , o gradiente de temperatura ao longo da espessura não é desprezado, mas levado em consideração com uma aproximação. O intuito dessa formulação é encontrar uma

aproximação melhorada para os contornos a partir da temperatura média obtida no *Classical Lumped Formulation*. Então, passa-se a ter uma aproximação para cada contorno e uma para temperatura média.

A abordagem considerada neste trabalho foi a aproximação  $H_{1,1}/H_{0,0}$ , em que as fórmulas de Hermite  $H_{1,1}$  e  $H_{0,0}$  são usadas para aproximar a temperatura média  $\bar{T}(x, y, t)$  e a integral do gradiente de temperatura na direção  $y$ .

Escreve-se a temperatura na superfície superior como

$$T(x, L_y, t) = T_s \quad (89)$$

e na superfície inferior

$$T(x, 0, t) = T_i \quad (90)$$

A fórmula  $H_{1,1}$  (Eq. (75)) é aplicada na definição da aproximação da temperatura média, Eq. (82)

$$\bar{T}(x, t) \approx \frac{1}{2} [T_i + T_s] + \frac{L_y}{12} \left[ \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right] \quad (91)$$

e a fórmula  $H_{0,0}$  (Eq. (74)) é aplicada na integral do gradiente de temperatura

$$\int_0^{L_y} \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} dy = [T_s - T_i] \approx \frac{L_y}{2} \left[ \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right] \quad (92)$$

Então, chega-se ao seguinte sistema de equações

$$T_s - T_i \approx \frac{L_y}{2} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right] \quad (93)$$

$$\bar{T} \approx \frac{1}{2} [T_i + T_s] + \frac{L_y}{12} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right] \quad (94)$$

Isolando o termo  $T_s$  da Eq. (93) e substituindo-o na Eq. (94)

$$T_s \approx \frac{L_y}{2} \left[ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right] + T_i \quad (95)$$

$$\bar{T} \approx \frac{1}{2} \left[ T_i + \frac{L_y}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right) + T_i \right] + \frac{L_y}{12} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \right) \quad (96)$$

Isolando  $T_i$  e substituindo-o na Eq. (93), encontram-se as seguintes equações para as temperaturas nas superfícies superior e inferior ( $T(x, L_y, t) = T_s$  e  $T(x, 0, t) = T_i$ ), respectivamente

$$T_s \approx \bar{T} + \frac{L_y}{6} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \frac{L_y}{3} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \quad (97)$$

$$T_i \approx \bar{T} - \frac{L_y}{3} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{L_y}{6} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} \quad (98)$$

Substituindo as condições de contorno, Equações (79) e (80), têm-se

$$T_s \approx \bar{T} - \frac{L_y q''(x)}{6k_x} + \frac{L_y h(T_\infty - T_s)}{3k_x} \quad (99)$$

$$T_i \approx \bar{T} + \frac{L_y q'(x)}{3k_x} - \frac{L_y h(T_\infty - T_s)}{6k_x} \quad (100)$$

Reorganizando os termos e substituindo  $T_s$  na Eq. (100), encontram-se as seguintes equações para as superfícies superior e inferior, respectivamente

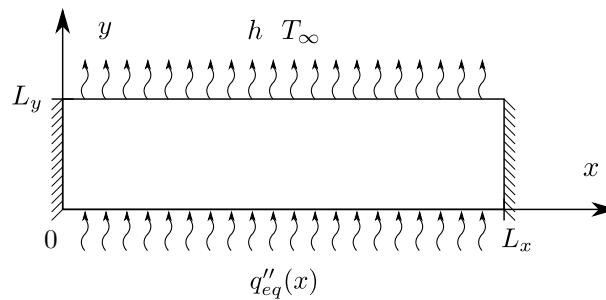
$$T_s \approx \frac{2hL_y T_\infty + 6k_x \bar{T}(x, t) - L_y q''(x)}{2hL_y + 6k_x} \quad (101)$$

$$T_i \approx \frac{6hkL_y \bar{T}(x, t) - 2hk_x L_y T_\infty + hL_y^2 q''(x) + 12k_x^2 \bar{T}(x, t) + 4k_x L_y q''(x)}{4hk_x L_y + 12k_x^2} \quad (102)$$

### 3.2 Abordagem 2

Nesta abordagem, adota-se outro modelo para identificar a falha. Considera-se apenas a camada superior do material, como mostra a Figura 4, com troca de calor por convecção natural na superfície superior e um fluxo de calor na superfície inferior. Como no problema completo há um fluxo na camada inferior, pode-se inferir que existe um fluxo de calor equivalente que chega até as camadas internas do material, no entanto, devido à presença de uma possível falha na região do adesivo, esse fluxo sofre variação espacial. No problema inverso, a função de verossimilhança será calculada utilizando este modelo reduzido, mas com medidas experimentais sintéticas obtidas a partir do modelo completo. A propriedade a ser estimada é a função com dependência espacial do fluxo de calor equivalente  $q''_{eq}(x)$ . Espera-se que em torno da região da falha, o fluxo de calor estimado sofra uma variação, devido à presença de uma falha de adesão.

Figura 4 - Representação esquemática do modelo reduzido 2.



Fonte: O autor, 2021.

A equação do calor que modela esse problema físico é dada por (OZISIK, 1987; INCROPERA et al., 2014)

$$\rho c_p \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (103)$$

com as condições de contorno e inicial.

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \text{para } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (104)$$

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad \text{para } x = L_x \text{ e } t > 0 \quad (105)$$

$$-k \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = q''_{eq}(x), \quad \text{para } y = 0 \text{ e } t > 0 \quad (106)$$

$$k \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L_y} + h T(x, y, t)|_{y=L_y} = h T_\infty, \quad \text{para } y = L_y \text{ e } t > 0 \quad (107)$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad \forall x, y \text{ e } t = 0 \quad (108)$$

## 4 PROBLEMA INVERSO

No âmbito de problemas de transferência de calor, a determinação de condições de contorno e de propriedades térmicas são de extrema importância para o dimensionamento preciso de sistemas que envolvem troca de calor (ABREU et al., 2014a; ABREU et al., 2014b; WATANABE; ABREU; KNUPP, 2018; MASCOUTO et al., 2020). No problema direto desses casos, tendo-se conhecimento da modelagem do problema, incluindo suas condições de contorno e propriedades térmicas dos materiais envolvidos, determina-se o perfil de temperatura. Contudo, em muitos problemas práticos de engenharia, nem sempre é possível ter conhecimento prévio de todas as propriedades e/ou condições de contorno do modelo analisado. Para solucionar essa adversidade, por meio de problemas inversos é possível estimar parâmetros desconhecidos a partir de medidas de temperatura em um ou mais pontos da amostra (KAPIO; SOMERSALO, 2005; ORLANDE et al., 2010; ORLANDE; FUDYM, 2018).

Técnicas clássicas de medições de propriedades térmicas geralmente envolvem experimentos complexos com condições específicas que possibilitam a aplicação de formulações matemáticas simples para os processos de transferência de calor. Dessa forma, as propriedades físicas podem ser facilmente encontradas com os dados experimentais e operações matemáticas simples. No entanto, muitas aplicações de engenharia envolvem situações e condições que não podem ser reproduzidas por formulações matemáticas simples. Em tais situações, em que não é possível aplicar métodos clássicos para estimativa de parâmetros, as técnicas de solução de problema inverso são utilizadas. Como exemplo para essas situações é possível citar um caso envolvendo altas temperaturas em que não é viável fazer a medição do fluxo de calor, como naves espaciais reentrando na atmosfera; locais de difícil acesso; ou alto fluxo de calor pontual, como lasers (OLIVEIRA; ORLANDE, 2004; MAGALHÃES, 2014; PEREIRA, 2012; ORLANDE et al., 2014). Nesses casos especificamente no campo de transferência de calor utilizam-se dados medidos experimentalmente, como temperatura, fluxo de calor, intensidade de radiação, etc, para estimar algum termo desconhecido presente na formulação matemática do problema físico (OZISIK; ORLANDE, 2000; ORLANDE, 2015; ORLANDE; FUDYM, 2018; CAMPOS VELHO, 2001).

Os problemas inversos são matematicamente denominados como mal-postos, enquanto os problemas diretos são classificados como bem-postos (HADAMARD, 1923; ALIFANOV, 1977; BECK; ARNOLD, 1977; TIKHONOV; ARSENN, 1977; BECK; BLACKWELL; ST. CLAIR, 1985; ALIFANOV, 1994; OZISIK; ORLANDE, 2000). Em um problema bem posto, sua solução satisfaz as condições de existência, unicidade e estabilidade com respeito aos dados de entrada. Nesses casos, a existência da solução é assegurada em argumentos físicos. Por outro lado, para se provar a unicidade da solução matematicamente é necessário atender a condições especiais, que podem ser muito complexas. Ainda, de modo geral, as técnicas convencionais são extremamente instáveis com relação aos dados de entrada. Desse modo, técnicas especiais

são requeridas para sua solução de modo que atenda à condição de estabilidade (CAMPOS VELHO, 2001; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; CHRISTEN; FOX, 2005; ORLANDE et al., 2010). Dentre essas técnicas, podem-se citar os métodos inversos baseados em inferência Bayesiana. Nesse contexto, os métodos baseados em inferência Bayesiana têm ganhado grande relevância como uma ferramenta importante no estudo de problemas inversos em várias áreas da engenharia (OLIVEIRA; ORLANDE, 2004; WANG; ZABARAS, 2005; ORLANDE; COLAÇO; DULIKRAVICH, 2008; MOTA et al., 2010; KAIPIO; FOX, 2011; ABREU et al., 2014a; ABREU et al., 2014b; WATANABE; ABREU; KNUPP, 2018; MASCOUTO et al., 2020).

#### 4.1 Inferência Bayesiana

A Inferência Bayesiana é um método de inferência estatística que consiste essencialmente em utilizar-se informações disponíveis a priori com o intuito de se reduzir a incerteza em problemas de tomada de decisão a partir de uma densidade de probabilidade a posteriori, que é o modelo para a distribuição de probabilidade condicional dos parâmetros desconhecidos dadas as medidas (GAMERMAN; LOPES, 2006). O modelo de medição que integra as incertezas relacionadas é chamado de verossimilhança, em outras palavras, a probabilidade condicional das medições dados os parâmetros desconhecidos. O modelo para as incógnitas que reflete toda a incerteza dos parâmetros sem as informações veiculadas pelas medições é chamado de modelo a posteriori. O teorema de Bayes, cuja equação é dada por (109), pode ser utilizado para combinar uma nova informação com a informação prévia a fim de formar a base dos processos estatísticos. O termo "Bayesiano" é usualmente utilizado para descrever as chamadas "Técnicas Estatísticas de Solução de Problemas Inversos" (KAIPIO; SOMERSALO, 2005; CHRISTEN; FOX, 2005; ORLANDE et al., 2010; ORLANDE, 2015; ORLANDE; FUDYM, 2018).

Então, a solução do problema inverso não é dada por um conjunto de valores pontuais estimados para os parâmetros, mas como uma distribuição estatística para os mesmos.

O teorema de Bayes pode ser escrito como (BECK; ARNOLD, 1977; KAIPIO; SOMERSALO, 2005; GAMERMAN; LOPES, 2006; KAIPIO; FOX, 2011; ORLANDE, 2012; SILVER, 2012)

$$\pi_{post}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi_{pri}(\mathbf{P})\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (109)$$

onde  $\pi_{post}(\mathbf{P})$  é a densidade de probabilidade a posteriori, ou seja a probabilidade condicional dos parâmetros  $\mathbf{P}$  dadas as medidas  $\mathbf{Y}$ ;  $\pi_{pri}(\mathbf{P})$  é a densidade de probabilidade a priori, isto é, informação codificada para os parâmetros disponível antes das medidas;  $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$  é a função de verossimilhança que expressa a densidade de probabilidade das medidas  $\mathbf{Y}$  dados os parâmetros  $\mathbf{P}$ ; e, por fim,  $\pi(\mathbf{Y})$  é a densidade marginal de probabilidade das medidas e desempenha o papel



de uma constante de normalização. No modelo reduzido 1, o vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$  é o vetor da condutividade térmica discretizada no espaço; e no modelo reduzido 2, é o vetor do fluxo de calor discretizado no espaço.

As medições  $\mathbf{Y}$  são as temperaturas experimentais sintéticas ao longo do tempo discretizadas no espaço obtidas a partir da solução do problema direto do modelo completo com adição de um ruído, que são valores aleatórios obtidos a partir de uma distribuição gaussiana. As medidas são, supostamente, tomadas na superfície inferior do modelo completo quando utiliza-se o modelo reduzido 1 no problema inverso; e na superfície superior quando utiliza-se o modelo reduzido 2 no problema inverso. Tratando-se, portanto, de medidas experimentais não intrusivas.

Considerando-se os erros de medição como variáveis aleatórias Gaussianas, com média zero e matriz de covariância  $\mathbf{W}$  conhecida, e também aditivos e independentes dos parâmetros  $\mathbf{P}$ , a função de verossimilhança pode ser representada por

$$\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{-I/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})) \right] \quad (110)$$

onde  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  é a solução do problema direto considerando os parâmetros  $\mathbf{P}$ ;  $\mathbf{W}^{-1}$  é a inversa da matriz de covariância dos erros de medição; e  $I$  é o número de observações. Na abordagem 1,  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  é a solução do problema direto do modelo reduzido 1 em sua superfície inferior e as medidas de temperatura  $\mathbf{Y}$  são tomadas na superfície inferior do modelo completo. Por sua vez, na abordagem 2,  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  é a solução do problema direto do modelo reduzido 2 em sua superfície superior e as medidas de temperatura  $\mathbf{Y}$  são tomadas na superfície superior do modelo completo.

O algoritmo do MCMC utilizado foi o Metropolis-Hastings cuja implementação se inicia com a seleção de uma distribuição de proposta  $q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$  que é usada para gerar um novo candidato  $\mathbf{P}^*$  dado o estado atual  $\mathbf{P}^{(t-1)}$  da cadeia de Markov. Uma vez que a distribuição é selecionada, implementa-se o algoritmo de Metropolis-Hastings a partir da repetição dos passos:

- a) Selecione um ponto candidato  $\mathbf{P}^*$  da distribuição de proposta  $q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$ ;
- b) Calcule

$$\beta = \min \left[ 1, \frac{\pi(\mathbf{P}^*|\mathbf{Y}) q(\mathbf{P}^{(t-1)}, \mathbf{P}^*)}{\pi(\mathbf{P}^{(t-1)}|\mathbf{Y}) q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})} \right]; \quad (111)$$

- c) Gere um número aleatório  $U$  com distribuição uniforme em  $(0, 1)$ ;
- d) Se  $U \leq \beta$ , defina  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^*$ ; Caso contrário, defina  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{(t-1)}$
- e) Retorne ao primeiro passo a fim de gerar a sequência  $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots, \mathbf{P}^n]$ .

#### 4.1.1 Delayed Acceptance Metropolis-Hastings (DAMH)

No método *Delayed Acceptance Metropolis-Hastings* a aceitação dos candidatos é realizada em duas etapas. Na primeira, é executada o algoritmo básico de Metropolis-Hastings, ou seja, é calculada a função de verossimilhança utilizando a solução do problema direto do modelo reduzido, caso o candidato seja aceito, realiza-se o segundo teste. Neste, a função de verossimilhança é calculada novamente, porém utilizando a solução do problema direto do modelo completo, e é realizado outro teste de Hastings. Portanto, um candidato só será efetivamente aceito se for aceito nas duas etapas. O algoritmo do *Delayed Acceptance Metropolis-Hastings* é dado por (HASTINGS, 1970; ORLANDE et al., 2014; QUIROZ et al., 2018; BANTERLE et al., 2019)

- a) Selecione um ponto candidato  $\mathbf{P}^*$  da distribuição de proposta  $q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})$ ;
- b) Calcule o fator de aceitação utilizando o modelo reduzido

$$\beta = \min \left[ 1, \frac{\pi(\mathbf{P}^*|\mathbf{Y}) q(\mathbf{P}^{(t-1)}, \mathbf{P}^*)}{\pi(\mathbf{P}^{(t-1)}|\mathbf{Y}) q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})} \right]; \quad (112)$$

- c) Gere um número aleatório  $U$  com distribuição uniforme em  $(0, 1)$ ;
- d) Se  $U \leq \beta$ , prossiga para o passo seguinte; Caso contrário, defina  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{(t-1)}$  e retorne ao primeiro passo;
- e) Calcule o novo fator de aceitação utilizando o modelo completo

$$\beta_c = \min \left[ 1, \frac{\pi_c(\mathbf{P}^*|\mathbf{Y}) q(\mathbf{P}^{(t-1)}, \mathbf{P}^*)}{\pi_c(\mathbf{P}^{(t-1)}|\mathbf{Y}) q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)})} \right]; \quad (113)$$

- f) Gere um número aleatório  $U_c$  com distribuição uniforme em  $(0, 1)$ ;
- g) Se  $U_c \leq \beta_c$ , defina  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^*$ ; Caso contrário, defina  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{(t-1)}$
- h) Retorne ao primeiro passo a fim de gerar a sequência  $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \dots, \mathbf{P}^n]$ .

Dessa forma, o modelo completo, que possui um custo computacional maior em relação ao modelo reduzido, não precisa ser calculado para cada estado novo da cadeia de Markov, apenas para os estados que forem aceitos utilizando o modelo reduzido (ORLANDE et al., 2014).

Optou-se por utilizar a seguinte densidade de probabilidade de proposta

$$q(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{(t-1)}) : \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^{(t-1)} + w(1 - 2rd) \quad (114)$$

onde  $rd$  é número aleatório que vai de 0 a 1; e  $w$  é o tamanho percentual do passo que se deseja na geração de um novo candidato em relação ao anterior. Para casos em que se deseja estimar parâmetros numericamente baixos com ou pouca variação, é desejável adotar valores baixos de  $w$  para garantir um menor nível de oscilação em torno do valor de convergência, pois assim as cadeias de Markov caminham a pequenos passos. Em contrapartida, em casos que envolvem parâmetros que não requerem grande precisão, pode-se adotar valores maiores de  $w$ , assim as cadeias caminham a passos maiores, porém com maior nível de oscilação em torno do valor de convergência.

Para verificar a funcionalidade dos códigos computacionais elaborados neste trabalho, será solucionado um problema inverso adotando a priori Gaussiana, que é uma priori informativa, utilizando medidas experimentais simuladas a partir da solução do problema direto dos próprios modelos reduzidos. A priori Gaussiana é dada por (KAPIO; SOMERSALO, 2005; ORLANDE et al., 2010)

$$\pi_{pri}(\mathbf{P}) = (2\pi)^{-N/2} |\mathbf{V}|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}_{pri})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{P} - \boldsymbol{\mu}_{pri}) \right] \quad (115)$$

Nos casos dos problemas inversos utilizando medidas experimentais simuladas a partir da solução do problema direto do modelo completo, será utilizada uma priori não informativa, a *Total Variation*, que é do tipo Markov *Random Field* capaz de estimar funções com variação espacial. Uma priori não informativa é aquela que não fornece informações específicas sobre os parâmetros ou sobre o experimento, sendo uma ferramenta matemática (SYVERSVEEN, 1998).

A forma da priori *Total Variation* é dada por (KAPIO; SOMERSALO, 2005; ORLANDE; COLAÇO; DULIKRAVICH, 2008)

$$\pi_{pri}(\mathbf{P}) \propto \exp[-\gamma TV(\mathbf{P})] \quad (116)$$

onde, para o presente caso

$$TV(\mathbf{P}) = \sum_{i=2}^{N-1} \Delta x [|P_i - P_{i+1}| + |P_i - P_{i-1}|] \quad (117)$$

sendo  $TV(\mathbf{P})$  a função *Total Variation* e  $\gamma$  o parâmetro de regularização.

## 4.2 Problemas Reduzidos

Como é possível observar no algoritmo de Metropolis-Hastings, para cada novo candidato, é necessário calcular a função de verossimilhança uma vez, dada pela Eq. (110). Dessa forma, para evitar o cálculo do problema direto do modelo completo inúmeras vezes, elaboraram-se modelos reduzidos de baixo custo computacional para substituir o modelo completo, diminuindo consideravelmente o custo computacional no problema inverso, como será visto no Capítulo 5. No entanto, as medidas experimentais sintéticas  $\mathbf{Y}$  serão obtidas a partir da solução do problema direto do modelo completo.

Na abordagem 1, apresentada no capítulo 3, as medidas experimentais sintéticas  $\mathbf{Y}$  são obtidas na superfície inferior do modelo completo e comparadas, na função de verossimilhança, com as temperaturas na superfície inferior do modelo reduzido 1, obtidas por meio da solução do seu problema direto  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ . Já na abordagem 2, a comparação é feita na superfície superior.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos neste trabalho, cujo objetivo é desenvolver modelos reduzidos capazes de detectar falhas de contato em meios compostos com baixo custo computacional. Vale reforçar que na abordagem do modelo reduzido 1, a solução do problema inverso é a estimativa da função com variação espacial da condutividade térmica na camada do adesivo. Já na do modelo reduzido 2, sua solução é a estimativa da função com variação espacial do fluxo de calor.

Inicialmente, será apresentada uma comparação das soluções dos problemas diretos obtidos do modelo completo e dos modelos reduzidos 1 e 2. A seguir, a verificação dos códigos computacionais para os modelos reduzidos propostos. Por fim, as estimativas das funções da condutividade térmica e do fluxo de calor com análise da detecção das falhas de contato serão apresentadas e discutidas.

A Tabela 1 mostra as propriedades do adesivo e do ar e de outros parâmetros envolvidos no problema. Para gerar os resultados foram utilizados diferentes materiais para os materiais A e B, conforme ilustra a Figura 1, como aço inoxidável AISI 316, epóxi, plástico reforçado com fibra de vidro (GRP, do inglês *Glassfiber Reinforced Plastics*), alumínio e isolante térmico, cujas propriedades térmicas estão descritas na Tabela 2 (GROSSO et al., 2013; INCROPERA et al., 2014).

Tabela 1 - Propriedades dos materiais utilizados.

| Parâmetro               | Valor                      |
|-------------------------|----------------------------|
| $k_{ar}$                | $0,0263 W/(mK)$            |
| $(\rho \cdot c_p)_{ar}$ | $1,17 \cdot 10^6 J/(m^3K)$ |
| $k_{ad}$                | $0,7 W/(mK)$               |
| $(\rho \cdot c_p)_{ad}$ | $1,75 \cdot 10^6 J/(m^3K)$ |
| $L_x$                   | $0,1 m$                    |
| $T_0$                   | $20^\circ C$               |
| $T_\infty$              | $20^\circ C$               |
| $h$                     | $15 W/(m^2K)$              |

Fonte: O autor, 2021.

De acordo com a descrição dos dois modelos reduzidos propostos no Capítulo 4, observa-

se que no modelo reduzido 1 os únicos materiais envolvidos são o adesivo e o ar, que caracteriza a falha. Sendo assim, a influência da escolha de diferentes materiais recai na geração das medidas experimentais simuladas a partir da solução do problema direto do modelo completo, já que para cada combinação de material há um comportamento diferente do campo de temperatura. O mesmo vale para o modelo reduzido 2, que envolve apenas o material B.

Tabela 2 - Propriedades dos materiais utilizados.

|                                   | Aço Inox | Epóxi | GPR  | Alumínio | Isolante térmico |
|-----------------------------------|----------|-------|------|----------|------------------|
| $k$<br>$W/(mK)$                   | 13,4     | 0,87  | 0,33 | 237      | 1,171            |
| $(\rho \cdot c_p)$<br>$MJ/(m^3K)$ | 3,86     | 1,31  | 2,54 | 2,44     | 2,65             |

Fonte: O autor, 2021.

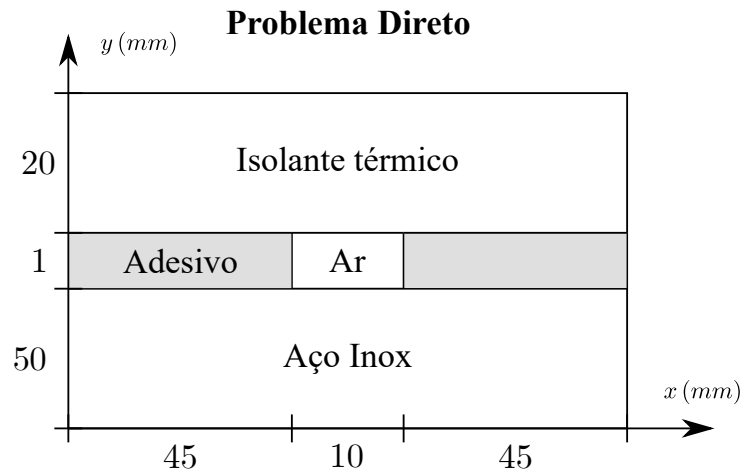
Os códigos computacionais foram executados no *software* Wolfram Mathematica em um computador com processador Intel Core i7-7500U de 7ª geração, com 8GB de memória RAM DDR4 2400 MHz no sistema operacional Windows 10.

## 5.1 Problema Direto

### 5.1.1 Modelo Completo

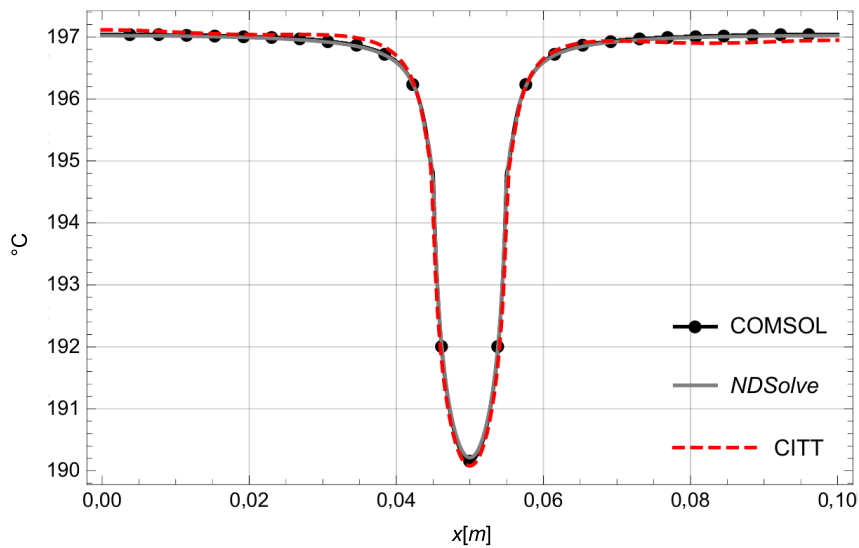
A solução do problema direto do modelo completo foi obtida utilizando a função *NDSolve* do *software* Mathematica implementada com o método de elementos finitos e foi comparada com as soluções obtidas pela técnica da transformada integral clássica e pelo COMSOL. Optou-se para o material A o aço inoxidável AISI 316 e para o material B, um isolante térmico, cujas propriedades podem ser consultadas na Tabela 2, e foi considerada a presença de uma falha de dimensões  $10 \times 1 \text{ mm}$ , conforme mostra a Figura 5. O fluxo de calor adotado foi de  $q'' = 10.000 \text{ W/m}^2$ . As soluções do problema direto obtidas via *NDSolve* e via CITT, com ordem de truncamento  $N = 10$ , foram executadas dentro de um *looping* 100 vezes e foi contabilizado o tempo total despendido. Em média, a solução via *NDSolve* levou 0,92 s para ser computada contra 0,97 s da CITT.

Figura 5 - Materiais e dimensões utilizados no problema direto do modelo completo.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 6 - Perfil da temperatura ao longo da direção  $x$  em  $y = 0,0505 m$  e  $t = 5000 s$  - Modelo Completo.

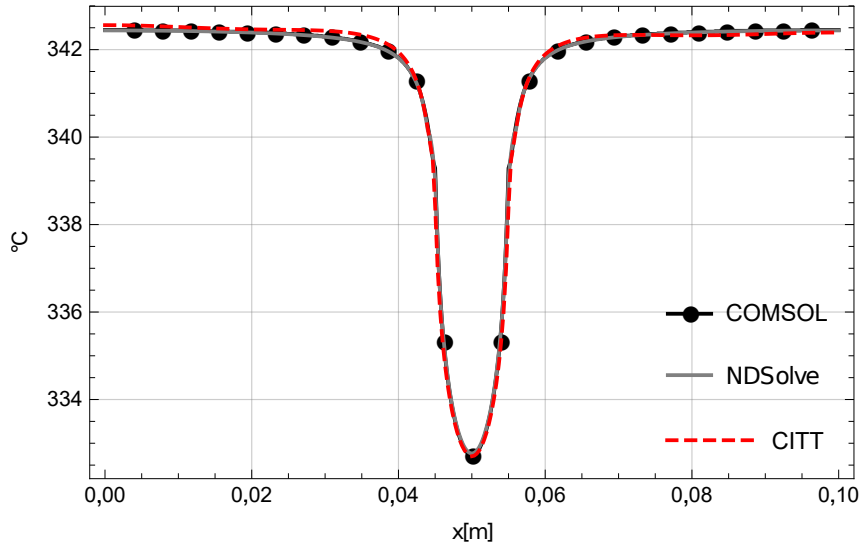


Fonte: O autor, 2021.

As Figuras 6 e 7 ilustram o comportamento da temperatura em dois instantes de tempo diferentes ( $t = 5000 s$  e  $t = 10.000 s$ ) ao longo do eixo  $x$  e em  $y = 0,0505 m$ , que se localiza na região do adesivo. Para mostrar a convergência das soluções obtidas via *NDSolve* e *COMSOL*, na Tabela 3 é feita uma análise de convergência variando-se o parâmetro  $mc$ , que indica o tamanho máximo de um elemento finito da malha gerada, nos instantes de tempo  $t = 5000 s$  e  $t = 10.000 s$  e em  $y = 0,071 m$ , na superfície superior em três posições diferentes em  $x$ , na borda ( $x = 0$ ), na região do adesivo ( $x = 0,025 m$ ) e na região de falha ( $x = 0,05 m$ ). Foi

observado um erro percentual máximo de 0,68% no instante  $t = 5000 s$ , enquanto os erros foram menores do que 0,5% no instante  $t = 10.000 s$ .

Figura 7 - Perfil da temperatura ao longo da direção  $x$  em  $y = 0,0505 m$  e  $t = 10.000 s$  - Modelo Completo.



Fonte: O autor, 2021.

Tabela 3 - Análise da solução do problema direto do modelo completo obtida via *NDSolve* com variação do parâmetro  $mc$  em  $y = 0,071 m$ .

| $mc$   | $t = 5000 s$ |               |              | $t = 10.000 s$ |               |              |
|--------|--------------|---------------|--------------|----------------|---------------|--------------|
|        | $x = 0$      | $x = 0,025 m$ | $x = 0,05 m$ | $x = 0$        | $x = 0,025 m$ | $x = 0,05 m$ |
| 0,1    | 171,31       | 171,31        | 171,31       | 295,08         | 295,08        | 295,08       |
| 0,01   | 150,97       | 150,97        | 150,97       | 270,51         | 270,51        | 270,51       |
| 0,005  | 151,77       | 151,77        | 151,77       | 269,03         | 269,03        | 269,03       |
| 0,001  | 149,35       | 148,68        | 146,47       | 266,69         | 265,72        | 262,57       |
| 0,0005 | 149,35       | 148,67        | 146,46       | 266,69         | 265,72        | 262,56       |
| 0,0002 | 149,35       | 148,67        | 146,46       | 266,69         | 265,72        | 262,56       |
| COMSOL | 148,36       | 147,69        | 145,48       | 265,43         | 264,46        | 261,32       |
| Erro % | 0,67         | 0,68          | 0,67         | 0,47           | 0,48          | 0,47         |

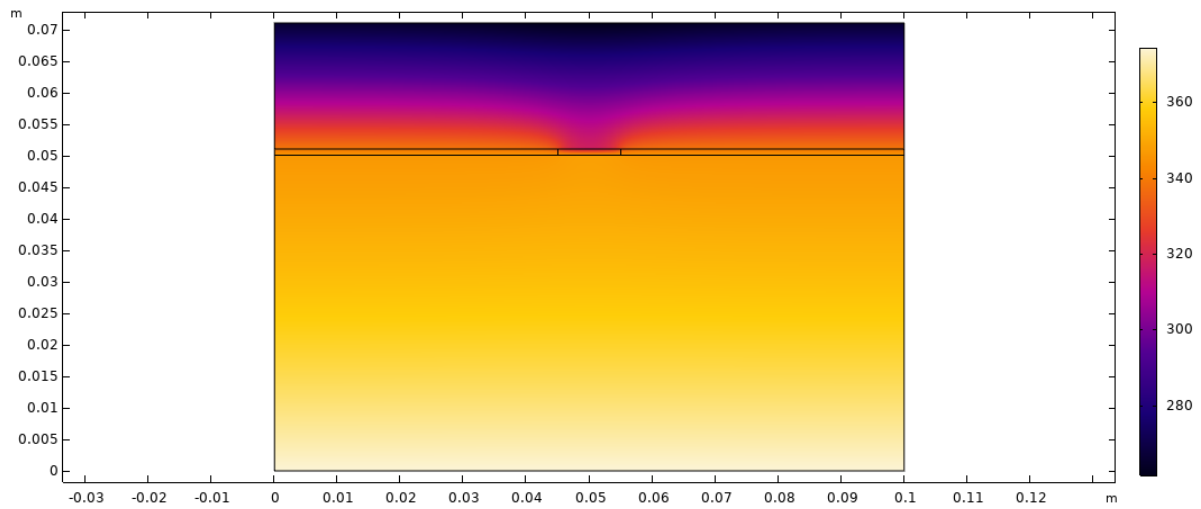
Fonte: O autor, 2021.

A Figura 8 mostra o gradiente de temperatura ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  obtido com o COMSOL no instante  $t = 20.000 s$ . A solução obtida apresentou convergência na ordem de grandeza de  $10^{-3} °C$ , conforme ilustra a Figura 9. Observa-se que na região logo acima da falha a temperatura é menor em relação aos seus vizinhos na direção  $y$ . Isso ocorre devido à baixa condutividade térmica do ar em relação ao adesivo. Infere-se a partir disso que ao analisar isoladamente apenas a camada superior, pode-se considerar que existe um fluxo de calor com variação espacial na sua superfície inferior. A partir desse raciocínio, propôs-se o modelo



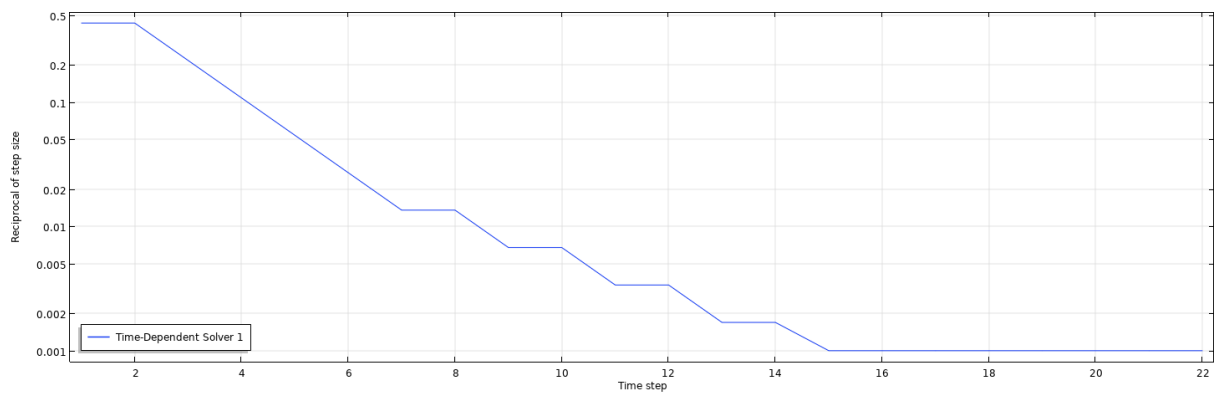
reduzido 2.

Figura 8 - Gradiente de temperatura no instante  $t = 10.000 \text{ s}$  - Modelo completo.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 9 - Gráfico da convergência da solução obtida com o COMSOL - Modelo completo.



Fonte: O autor, 2021.

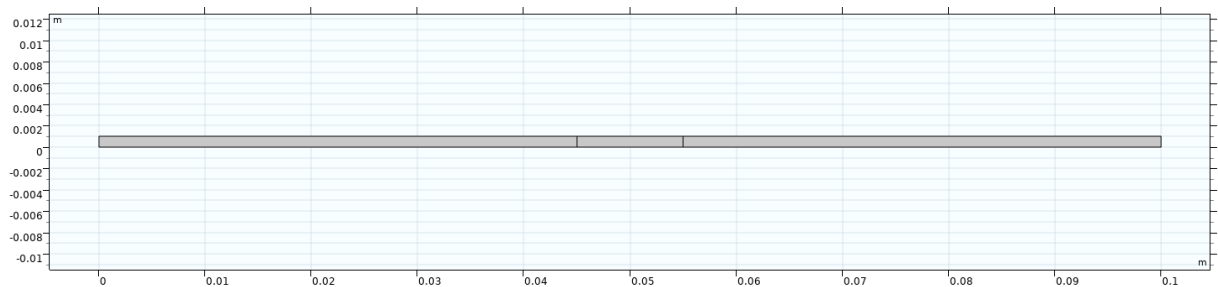
## 5.1.2 Modelos Reduzidos

### 5.1.2.1 Modelo Reduzido 1

No problema direto deste modelo reduzido foi proposta uma geometria de acordo com a Figura 10, sendo a região destacada no centro a falha de contato caracterizada pela presença de uma bolha de ar; e as outras duas restantes, o adesivo. Foi considerado um fluxo de calor na superfície inferior  $q'' = 5000 \text{ W/m}^2$  com convecção natural na superfície superior com

$h = 15 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  até um tempo final de simulação igual a  $t = 20.000 \text{ s}$ . Este problema foi computado 100 vezes dentro de um *looping* utilizando o *Improved Lumped* e foi contabilizado o tempo total despendido. Em média, a solução levou  $0,032 \text{ s}$  para ser computada contra  $0,97 \text{ s}$  da CITT do modelo completo, uma redução significativa de  $96,7\%$ .

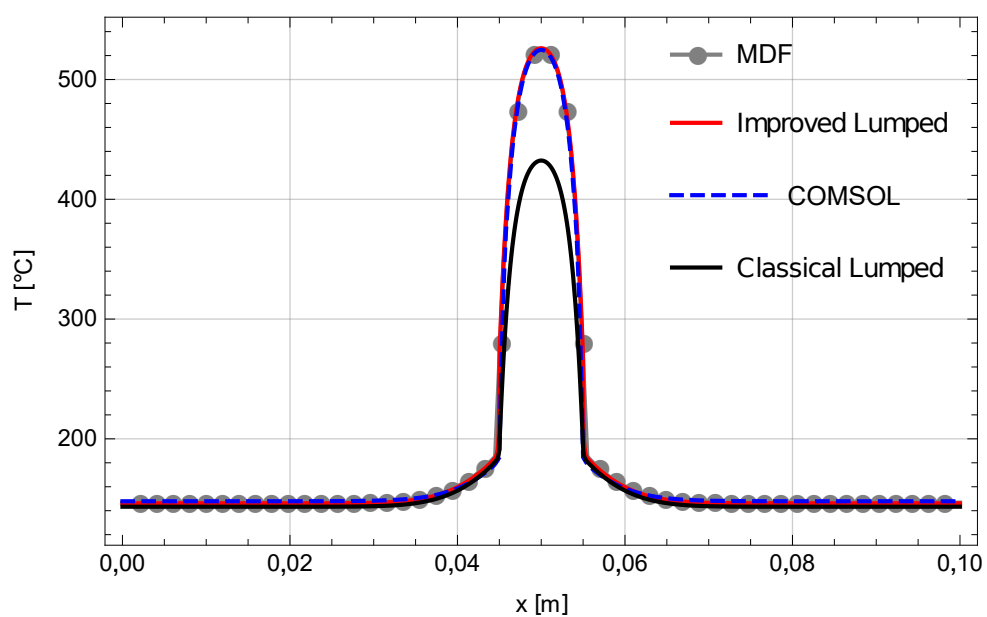
Figura 10 - Geometria proposta para o modelo reduzido 1.



Fonte: O autor, 2021.

Este problema foi solucionado utilizando *Improved Lumped*, *Classical Lumped*, método das diferenças finitas e o *software* COMSOL. As Figuras 11 e 12 mostram os gráficos do perfil da temperatura para dois instantes de tempo,  $t = 60 \text{ s}$  e  $t = 20.000 \text{ s}$ , respectivamente, em  $y = 0 \text{ m}$ , na superfície superior. De acordo com a análise dessas curvas, observa-se a clara vantagem da aplicação do *Improved Lumped* em relação ao *Classical Lumped*. Com exceção da solução obtida com o *Classical Lumped*, nota-se que as outras três foram consistentes entre si.

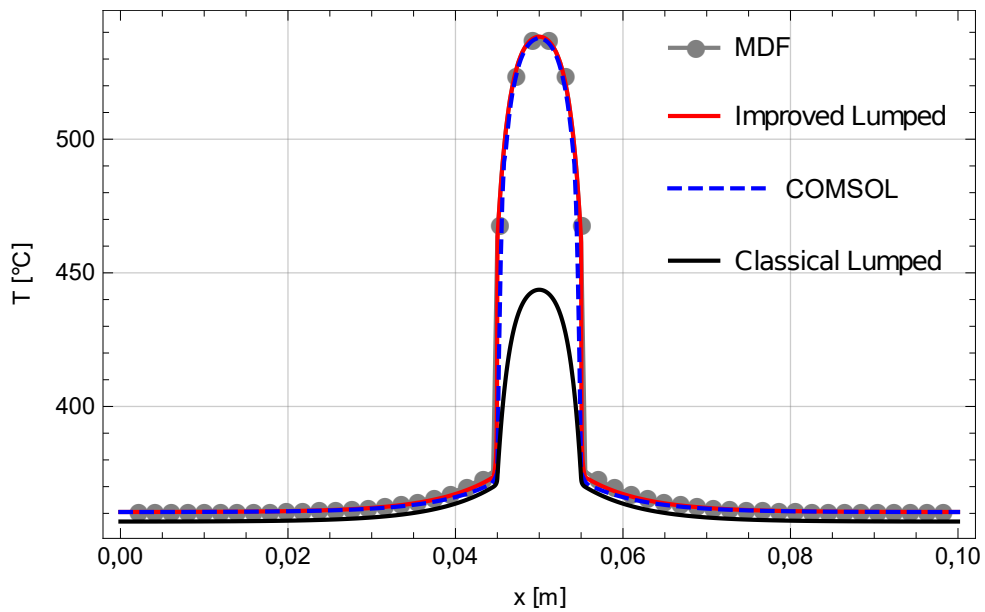
Figura 11 - Comportamento da temperatura no tempo  $t = 60 \text{ s}$  ao longo do eixo  $x$  em  $y = 0$  - Modelo reduzido 1.



Fonte: O autor, 2021.

A Tabela 4 mostra uma análise de convergência da solução com *Improved Lumped* variando-se o parâmetro  $mc$  nos instantes de tempo  $t = 60 s$  e  $t = 20.000 s$  e em  $y = 0$ , na superfície inferior em três posições diferentes em  $x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 0,025 m$  e  $x = 0,05 m$ . Os maiores erros apresentados foram observados no regime transiente,  $t = 60 s$ . Enquanto que no estacionário os erros foram menores, nota-se que em  $x = 0$  não houve diferença de temperatura para a precisão de duas casas decimais apresentada.

Figura 12 - Comportamento da temperatura no tempo  $t = 20.000 s$  ao longo do eixo  $x$  em  $y = 0$  - Modelo reduzido 1.



Fonte: O autor, 2021.

Tabela 4 - Análise da solução com *Improved Lumped* com variação do parâmetro  $mc$  em  $y = 0$  - Modelo reduzido 1.

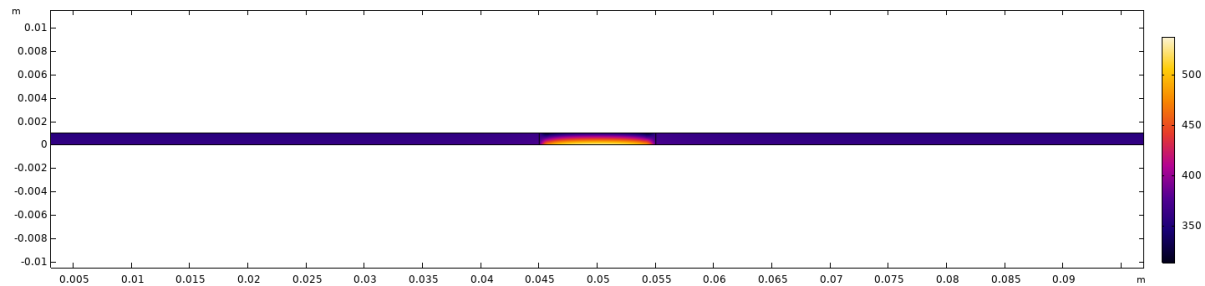
| $mc$   | $t = 60 s$ |               |              | $t = 20.000 s$ |               |              |
|--------|------------|---------------|--------------|----------------|---------------|--------------|
|        | $x = 0$    | $x = 0,025 m$ | $x = 0,05 m$ | $x = 0$        | $x = 0,025 m$ | $x = 0,05 m$ |
| 0,1    | -4,87      | 303,70        | 372,47       | 322,55         | 410,12        | 529,49       |
| 0,01   | 146,15     | 146,41        | 619,50       | 360,56         | 362,13        | 566,65       |
| 0,008  | 146,15     | 146,30        | 535,75       | 360,53         | 361,60        | 540,86       |
| 0,005  | 146,15     | 146,32        | 525,13       | 360,51         | 361,28        | 536,59       |
| 0,001  | 146,15     | 146,31        | 528,50       | 360,51         | 361,26        | 539,45       |
| 0,0005 | 146,15     | 146,31        | 528,51       | 360,51         | 361,26        | 539,45       |
| COMSOL | 147,87     | 147,95        | 524,77       | 360,51         | 361,11        | 537,74       |
| Erro % | 1,15       | 1,10          | 0,71         | 0              | 0,04          | 0,32         |

Fonte: O autor, 2021.

A Figura 13 mostra um gráfico da temperatura obtida com o COMSOL ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  no instante  $t = 20.000 s$ , onde é possível observar, de acordo com a escala apresentada,

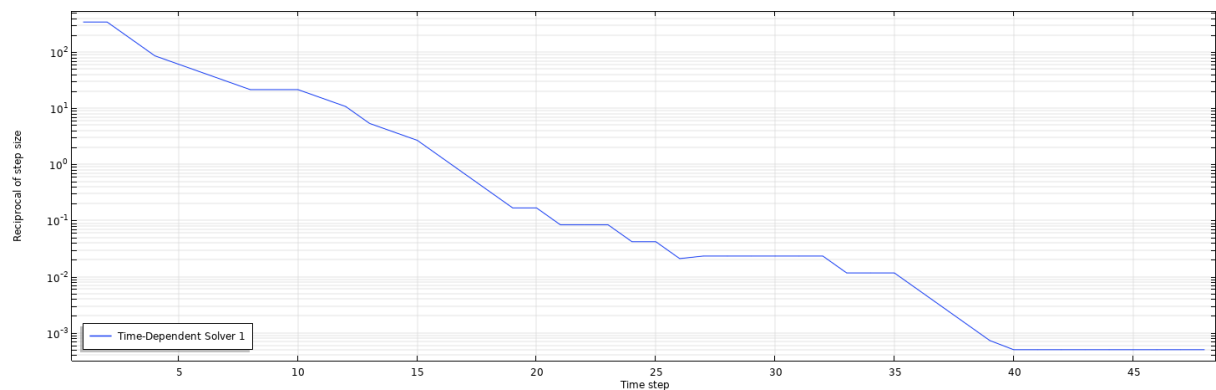
uma variação significativa da temperatura na região da falha. A solução obtida com o COMSOL deste modelo apresentou convergência na ordem de  $10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$ , conforme mostra a Figura 14.

Figura 13 - Gradiente da temperatura no tempo  $t = 20.000 \text{ s}$  - Modelo reduzido 1.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 14 - Gráfico da convergência da solução obtida com o COMSOL - Modelo reduzido 1.



Fonte: O autor, 2021.

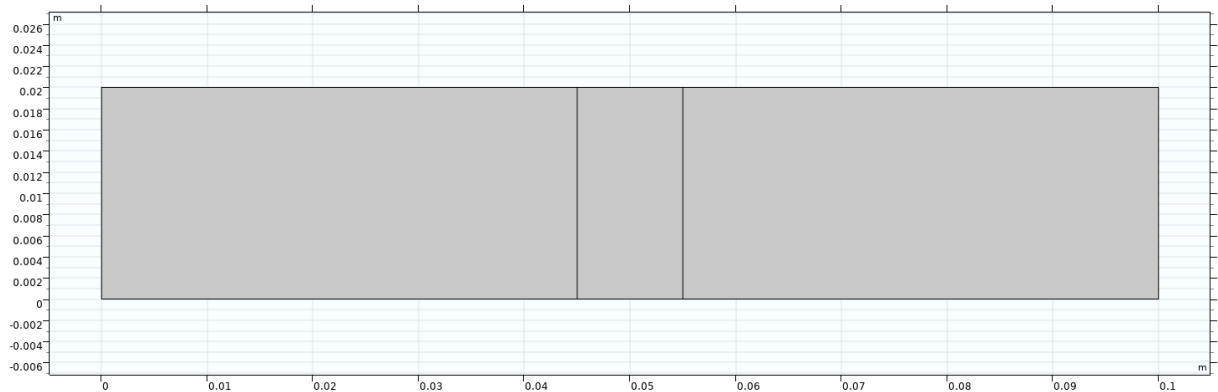
### 5.1.2.2 Modelo reduzido 2

No problema direto deste modelo reduzido foi proposta uma dimensão de acordo com a Figura 15 e o material utilizado foi o isolante térmico, cujas propriedades podem ser verificadas na Tabela 2. Foi considerado um fluxo de calor na superfície inferior (em  $y = 0$ ) que varia de acordo com a Eq. (118); e troca de calor com o ambiente por convecção natural na superfície superior com  $h = 15 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$  até um tempo final de simulação igual a  $t = 20.000 \text{ s}$ . Este problema foi computado 100 vezes dentro de um *looping* e foi contabilizado o tempo total despendido. Em média, a solução levou  $0,073 \text{ s}$  para ser computada contra  $0,97 \text{ s}$  da CITT do

modelo completo, uma redução significativa de 92,6%.

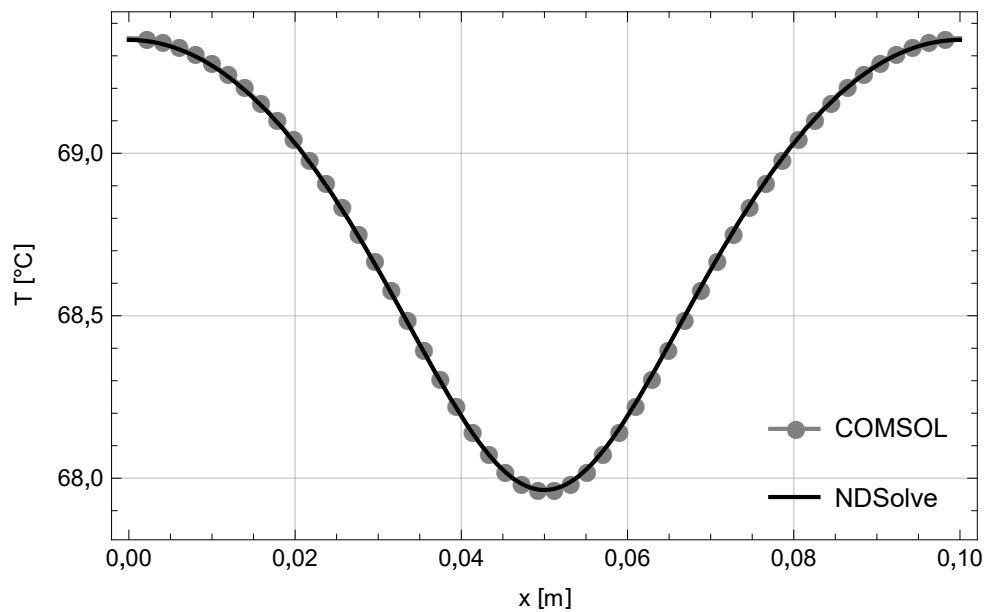
$$q''(x) = \begin{cases} 600 \text{ W}/(m^2), & \text{para } 0,045 \text{ m} \leq x \leq 0,055 \text{ m} \\ 1000 \text{ W}/(m^2), & \text{para } x < 0,046 \text{ m e } x > 0,055 \text{ m} \end{cases} \quad (118)$$

Figura 15 - Geometria proposta para o modelo reduzido 2.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 16 - Comportamento da temperatura no tempo  $t = 2900 \text{ s}$  ao longo do eixo  $x$  em  $y = 0,02 \text{ m}$  - Modelo reduzido 2.



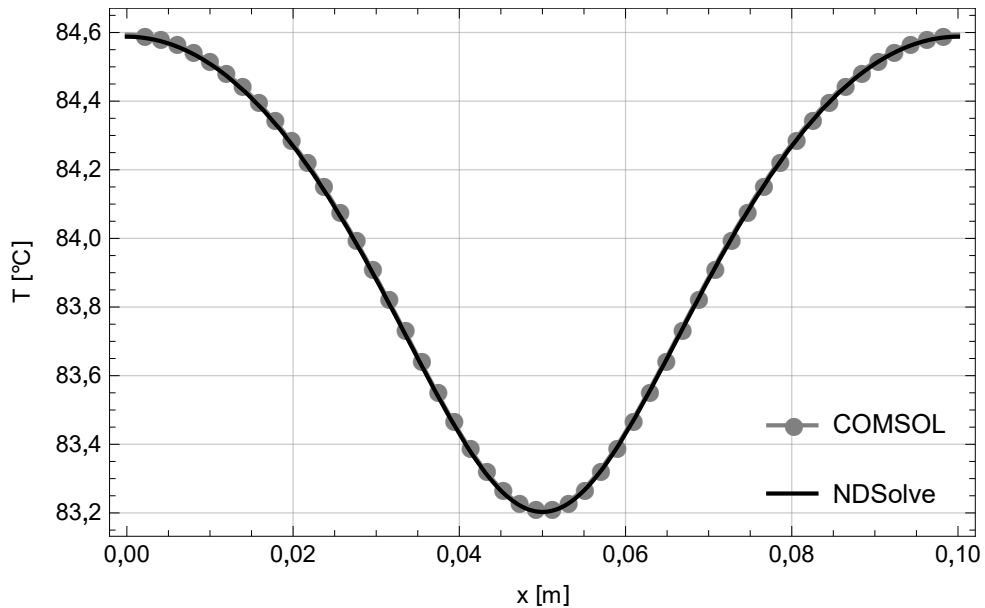
Fonte: O autor, 2021.

As Figuras 16 e 17 apresentam o perfil da temperatura para dois instantes de tempo,  $t = 2900 \text{ s}$  e  $t = 20.000 \text{ s}$ , respectivamente, em  $y = 0,02 \text{ m}$ , na superfície superior. As soluções,

de acordo com as curvas, mostraram-se consistentes entre si.

A Tabela 5 mostra uma análise de convergência da solução variando-se o parâmetro  $mc$  nos instantes de tempo  $t = 2900 s$  e  $t = 20.000 s$  e em  $y = 0$ , na superfície inferior em três posições diferentes em  $x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 0,025 m$  e  $x = 0,05 m$ . O maior erro percentual observado foi de  $0,05\%$ .

Figura 17 - Comportamento da temperatura no tempo  $t = 20000 s$  ao longo do eixo  $x$  em  $y = 0,02 m$  - Modelo reduzido 2.



Fonte: O autor, 2021.

Tabela 5 - Análise da solução com variação do parâmetro  $mc$  em  $y = 0,02 m$  - Modelo reduzido 2.

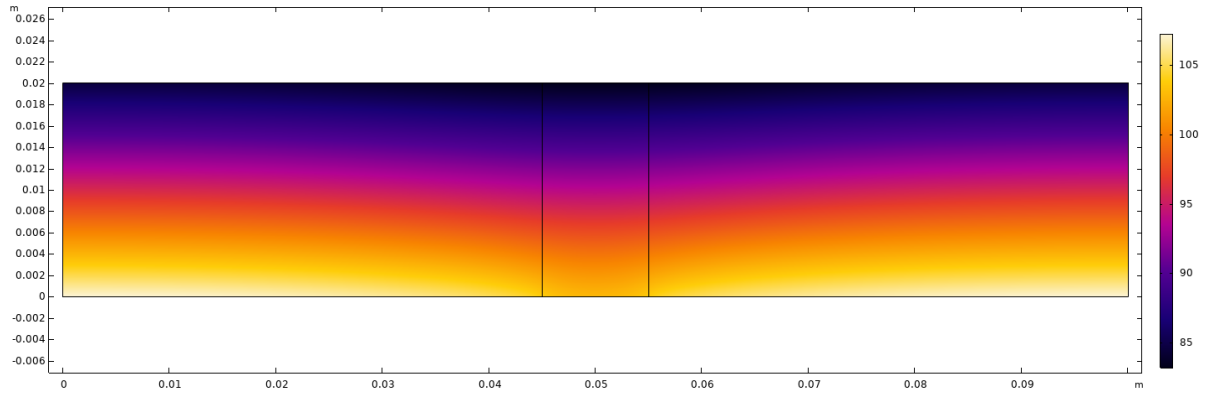
| $mc$   | $t = 2900 s$ |               |              | $t = 20.000 s$ |               |              |
|--------|--------------|---------------|--------------|----------------|---------------|--------------|
|        | $x = 0$      | $x = 0,025 m$ | $x = 0,05 m$ | $x = 0$        | $x = 0,025 m$ | $x = 0,05 m$ |
| 0,1    | 63,50        | 61,53         | 60,88        | 76,56          | 74,59         | 73,93        |
| 0,01   | 68,69        | 67,98         | 66,74        | 83,65          | 82,94         | 81,70        |
| 0,008  | 69,06        | 68,47         | 67,42        | 84,17          | 83,58         | 82,53        |
| 0,005  | 69,35        | 68,47         | 67,42        | 84,58          | 84,09         | 83,20        |
| 0,001  | 69,33        | 68,82         | 67,92        | 84,56          | 84,09         | 83,16        |
| 0,0005 | 69,33        | 68,82         | 67,92        | 84,56          | 84,06         | 83,16        |
| COMSOL | 69,35        | 68,84         | 67,96        | 84,59          | 84,09         | 83,20        |
| Erro % | 0,02         | 0,02          | 0,05         | 0,03           | 0,03          | 0,02         |

Fonte: O autor, 2021.

A Figura 18 mostra um gráfico da temperatura obtida com o COMSOL ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  no instante  $t = 20.000 s$ . Pela análise do gráfico, com a escala apresentada, não é possível observar nitidamente uma variação da temperatura em  $y = 0,02 m$  (superfície superior do modelo), no entanto, ela existe e é de aproximadamente  $1,4^{\circ}C$ , conforme mostra o gráfico da

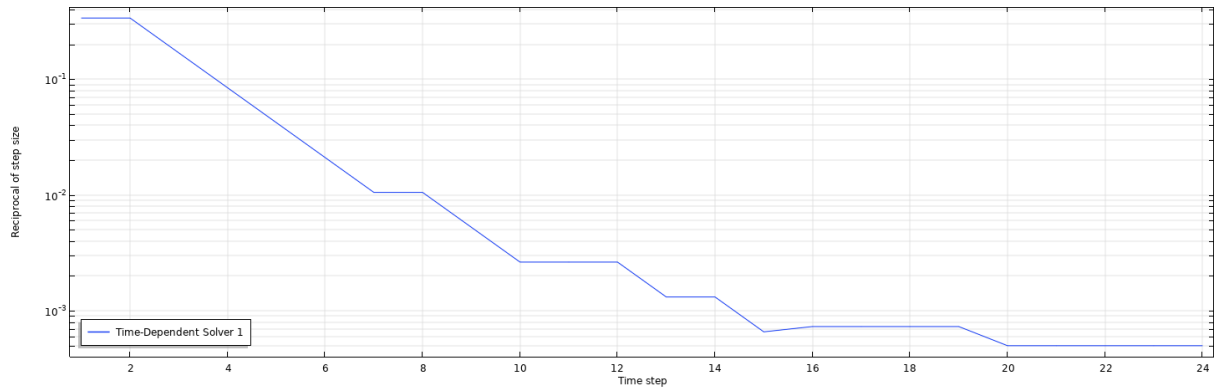
Figura 17. A solução obtida com o COMSOL deste modelo apresentou convergência na ordem de  $10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$ , de acordo com a Figura 19.

Figura 18 - Perfil da temperatura no tempo  $t = 20.000 \text{ s}$  - Modelo reduzido 2.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 19 - Gráfico da convergência da solução obtida com o COMSOL na Modelo reduzido 2.



Fonte: O autor, 2021.

### 5.1.3 Custo Computacional

Tabela 6 - Tempo despendido por cada método para computar o problema direto.

| Formulação | Modelo completo<br>$N = 10$ | Modelo reduzido 1<br>$mc = 0,005$ | Modelo reduzido 2<br>$mc = 0,005$ |
|------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Tempo [s]  | 0,97                        | 0,032                             | 0,073                             |
| Redução %  | —                           | 96,7                              | 92,6                              |

Fonte: O autor, 2021.

Neste trabalho, um dos objetivos era formular modelos reduzidos de baixo custo computacional, mas que ainda fossem capazes de detectar possíveis falhas de contato em materiais compósitos, como será visto na seção dos resultados do problema inverso. A Tabela 6 mostra uma comparação do tempo de CPU despendido por cada método abordado no trabalho com a redução percentual do tempo dos modelos reduzidos em relação ao modelo completo via CITT. Como o problema direto precisa ser computado para cada novo candidato gerado para calcular-se a função de verossimilhança (Eq. (110) no problema inverso, ao adotar os modelos reduzidos observa-se uma redução significativa do custo computacional.

## 5.2 Problema Inverso

Os resultados do problema inverso serão divididos por casos, nos quais variaram-se os materiais, suas espessuras, a dimensão da bolha de ar e a quantidade de falhas. Em todos eles foram considerados: tempo final de simulação  $t = 20.000s$  com 40 passos no tempo iniciando em  $500s$  e 21 pontos no espaço, discretizados com  $dx = 0,005m$ . Além disso as medidas experimentais simuladas foram geradas a partir da solução do modelo completo adicionando um ruído de distribuição gaussiana com média 0 e desvio padrão  $0,05^{\circ}C$ . Na abordagem 1, as medidas experimentais são obtidas na superfície inferior do modelo completo e comparadas com o campo de temperatura na superfície inferior do modelo reduzido 1. Na abordagem 2, a comparação é feita na superfície superior de cada modelo.

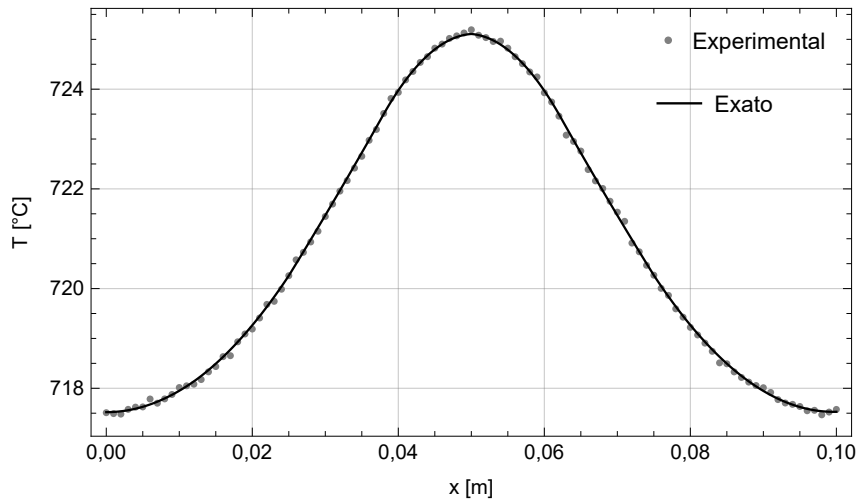
Os gráficos da Figura 20 mostram a solução do problema direto do Caso 0A, apresentado na próxima seção, e a simulação dos dados experimentais ao longo do eixo  $x$ , em  $y = 0$  e  $t = 20.000s$ . Na Figura 20a, tem-se o espaço discretizado em 101 pontos e na Figura 20b, em 21 pontos.

Em todos os casos houve a necessidade de se ajustar empiricamente o valor do parâmetro  $\gamma$  envolvido na priori *Total Variation*. Sendo assim, não há um valor fixo para essa variável. Para cada caso, adota-se um valor diferente para esse parâmetro.

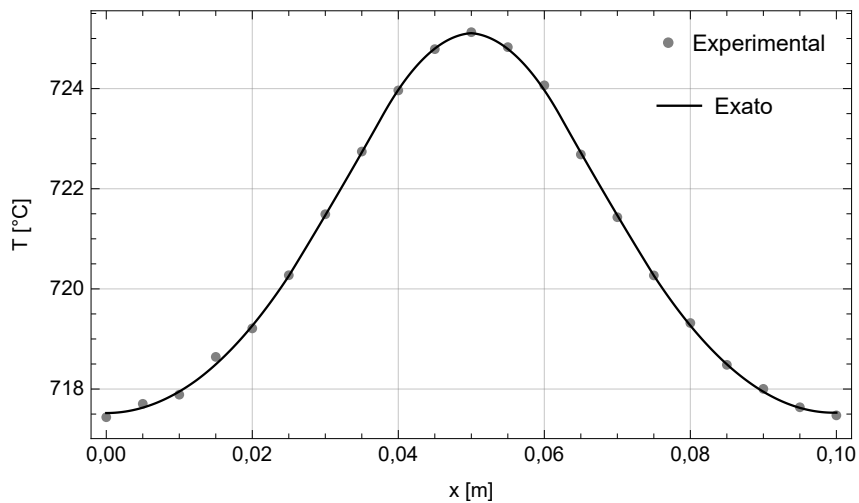
Vale ressaltar que o objetivo deste trabalho não engloba estimativas de propriedades térmicas e de parâmetros físicos, como a condutividade térmica e o fluxo de calor, mas sim a detecção de possíveis falhas de contato a partir da análise da solução do problema inverso. Por conta disso, foi possível elaborar modelos simplificados de baixo custo computacional cujos comportamentos se aproximam do modelo completo, o que possibilitou uma redução considerável do custo computacional no problema inverso. Dessa forma, as soluções dos problemas inversos não representam uma estimativa real dos parâmetros físicos, mas servem para analisar o comportamento dos mesmos e inferir sobre a presença de falha.



Figura 20 - Gráficos das medidas experimentais sintéticas



(a) 101 pontos no espaço.



(b) 21 pontos no espaço.

Fonte: O autor, 2021.

## 5.2.1 Verificação do código computacional

### 5.2.1.1 Caso 0

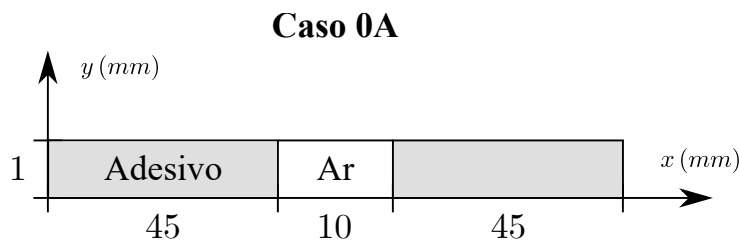
Neste caso será realizada a verificação dos códigos computacionais dos modelos reduzidos 1 e 2. No problema inverso, considerando o chamado crime inverso, em vez de usar as medidas experimentais simuladas obtidas com o modelo completo, utilizaram-se medidas experimentais simuladas obtidas com os próprios modelos reduzidos, que foram geradas adicionando-se um ruído gerado a partir de uma distribuição gaussiana com média igual a 0 e desvio padrão igual a

$0,05\text{ }^{\circ}\text{C}$  (KAIPIO; SOMERSALO, 2005; ORLANDE et al., 2014).

### Caso 0A

Neste caso será verificado o código computacional do modelo reduzido 1, em que a propriedade de interesse estimada no problema inverso é a condutividade térmica com variação espacial. Uma priori gaussiana foi utilizada com desvio padrão igual a  $0,05\text{ W}/(\text{mK})$  e média nos valores exatos da condutividade térmica,  $k_{ad} = 0,7\text{ W}/(\text{mK})$  e  $k_{ar} = 0,0263\text{ W}/(\text{mK})$ . Os materiais e a geometria adotados para este caso estão apresentados na Figura 21. O estado inicial da cadeia de Markov foi considerado com apenas a presença do adesivo. Foi considerado um fluxo de calor  $q'' = 5000\text{ W}/\text{m}^2$ .

Figura 21 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 0A.

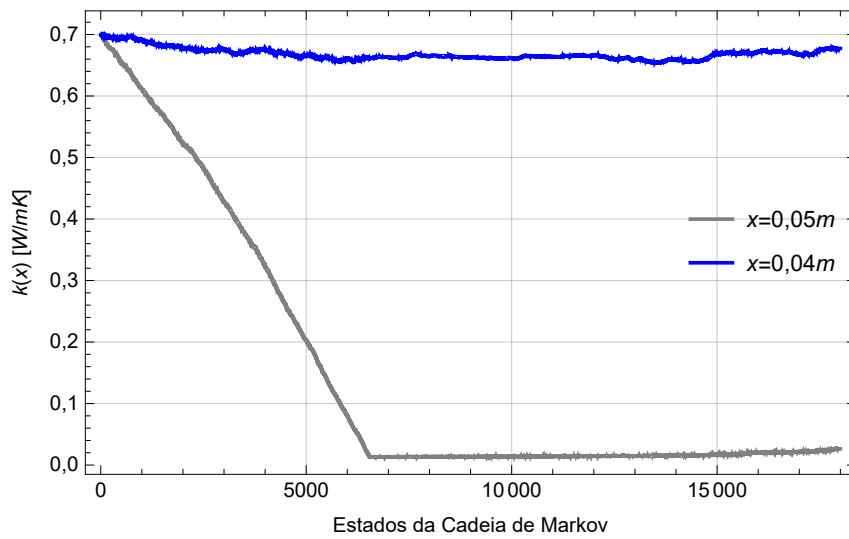


Fonte: O autor, 2021.

Neste caso foram gerados 18.000 estados da cadeia de Markov que começaram a convergir a partir de 7.000 cadeias aproximadamente na região da falha. Para calcular a estimativa da função da condutividade térmica foram utilizadas as 10.000 últimas cadeias. A Figura 22 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, uma na região de falha e outra fora dela. Como foi considerado apenas a presença adesivo no estado inicial da cadeia, ou seja, todos os pontos iguais ao valor da condutividade térmica do adesivo, era esperado que pontos na região de falha começassem a decair até convergirem para o valor da condutividade térmica do ar, enquanto que os pontos na região de adesivo oscilassem em torno do valor inicial.

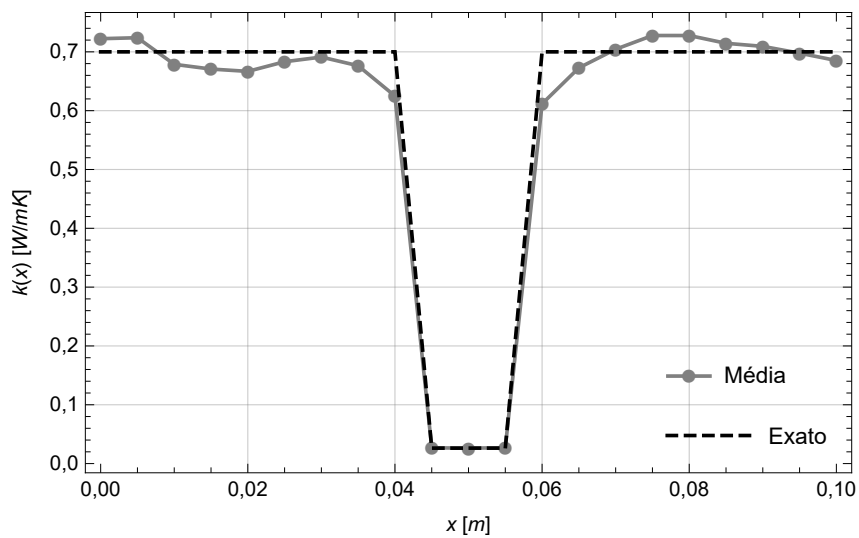
Na Figura 23 estão plotadas a função exata da condutividade térmica com variação espacial e a função estimada pelo problema inverso com priori gaussiana. Nota-se visualmente que a maior diferença dos parâmetros ocorre logo antes e após a região de falha devido à descontinuidade da função da condutividade térmica, que pode ser verificado no gráfico do erro percentual, apresentado na Figura 24.

Figura 22 - Evolução das cadeias de Markov do Caso 0A.



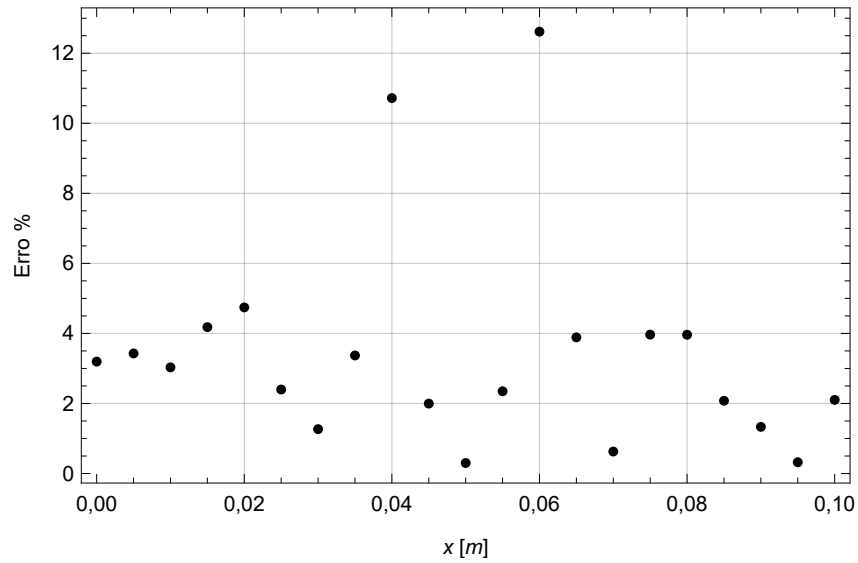
Fonte: O autor, 2021.

Figura 23 - Comparação da função exata com a média da condutividade térmica estimada no Caso 0A.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 24 - Erro percentual dos parâmetros estimados no Caso 0A.



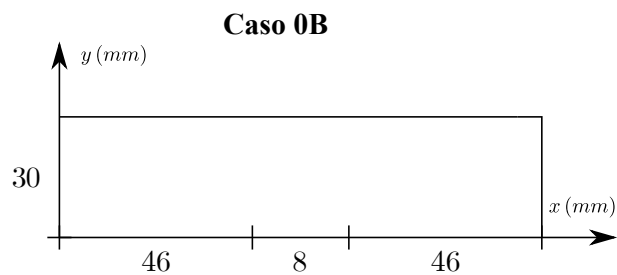
Fonte: O autor, 2021.

### Caso 0B

Neste caso será verificado o código computacional do modelo reduzido 2, em que a propriedade de interesse estimada no problema inverso é o fluxo de calor com variação espacial. Adotou-se a seguinte função para o fluxo de calor

$$q''(x) = \begin{cases} 600 \text{ W}/(\text{m}^2), & \text{para } 0,046 \text{ m} \leq x \leq 0,054 \text{ m} \\ 1000 \text{ W}/(\text{m}^2), & \text{para } x < 0,046 \text{ m e } x > 0,054 \text{ m} \end{cases} \quad (119)$$

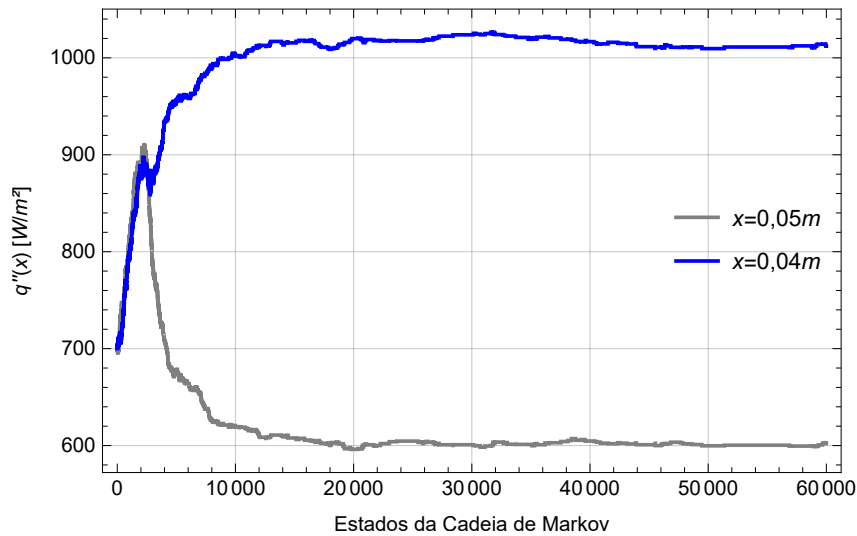
Figura 25 - Materiais e dimensões utilizados Caso 0B.



Fonte: O autor, 2021.

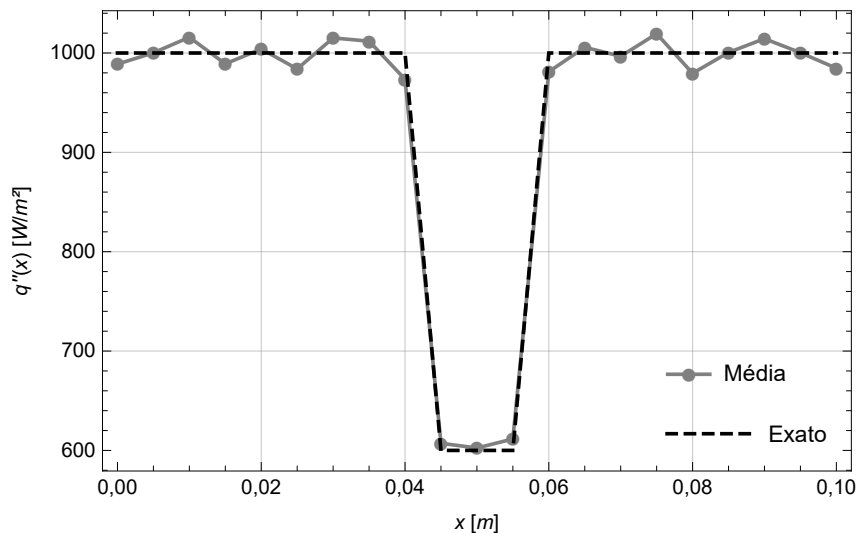
A priori gaussiana foi utilizada com desvio padrão igual a  $20 W/(m^2)$  e média nos valores exatos,  $600 W/(m^2)$  na região de falha e  $1000 W/(m^2)$  fora dela. Os materiais e a geometria adotados para este caso estão apresentados na Figura 25. No estado inicial da cadeia foi considerado um fluxo de calor igual a  $700 W/m^2$  em todos os pontos.

Figura 26 - Evolução das cadeias de Markov do Caso 0B.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 27 - Comparação da função exata com a média do fluxo de calor estimado no Caso 0B.



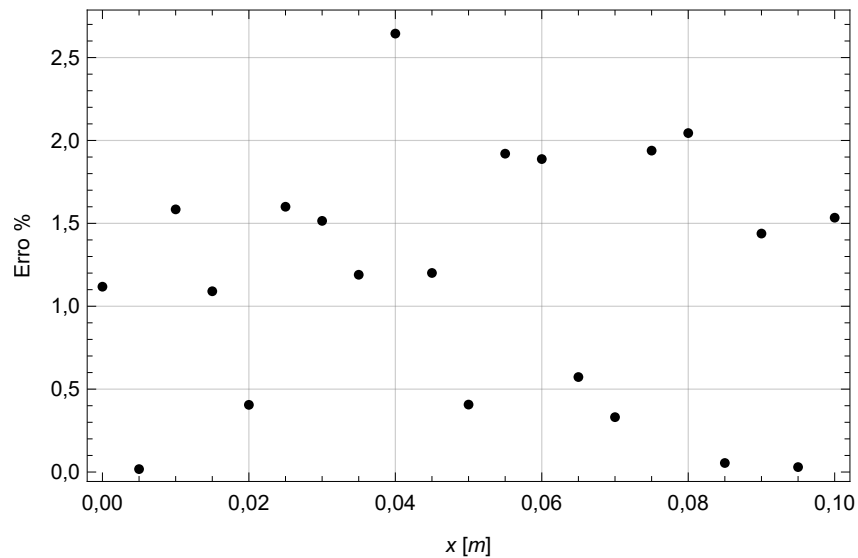
Fonte: O autor, 2021.

Neste caso foram gerados 60.000 estados da cadeia de Markov considerando estados de aquecimento as 30.000 primeiras cadeias para calcular a média da estimativa da função do fluxo

de calor. A Figura 26 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, uma região de falha e outra fora dela.

A função estimada do fluxo de calor com variação espacial está apresentada na Figura 27. Nota-se no gráfico da Figura 28 que o maior erro percentual foi aproximadamente 2,65%.

Figura 28 - Erro percentual dos parâmetros estimados no Caso 0B.

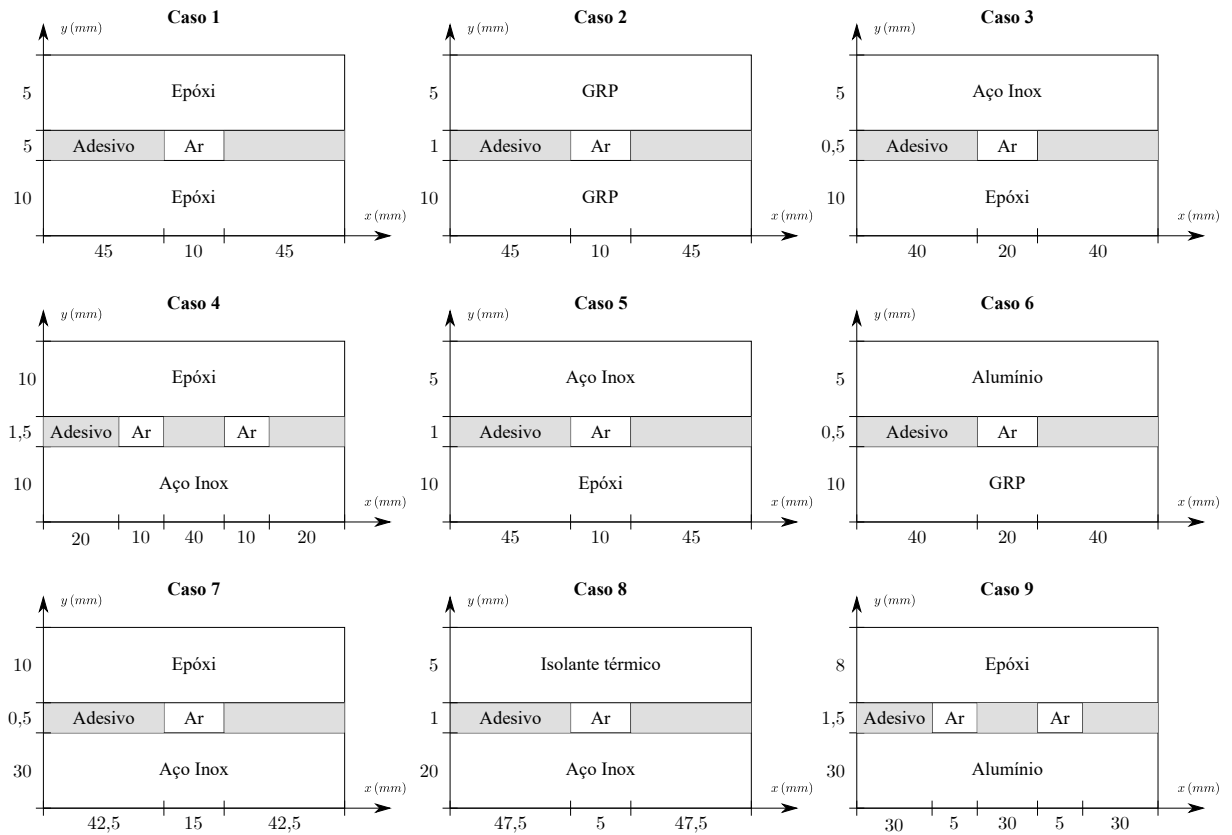


Fonte: O autor, 2021.

### 5.2.2 Casos considerados

Neste trabalho consideraram-se 9 casos distintos variando-se os materiais envolvidos e as dimensões da falha, como ilustra a Figura 29. Os Casos 1-6 foram resolvidos utilizando o modelo reduzido 1; e os Casos 7-9, o modelo reduzido 2. Todos os casos foram resolvidos utilizando o algoritmo básico de Metropolis-Hastings, com exceção do caso 5, que foi resolvido utilizando o DAMH. O caso 3 foi resolvido com ambos os algoritmos. Nos casos 4 e 9, foi simulada a presença de duas falhas simultâneas no material.

Figura 29 - Casos.



Fonte: O autor, 2021.

### 5.2.3 Identificação de falhas utilizando o modelo reduzido 1

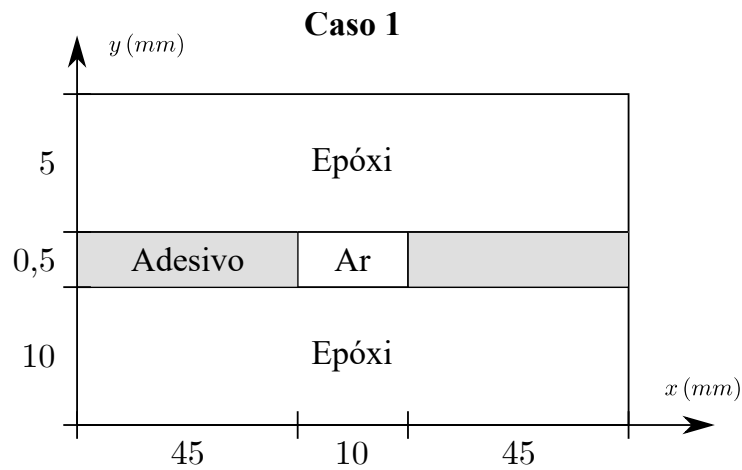
A seguir serão apresentados os casos que foram resolvidos utilizando o modelo reduzido 1. Nessa abordagem a identificação da falha é feita de acordo com a variação da função da condutividade térmica estimada no problema inverso. Em caso de presença de falha caracterizada por uma bolha de ar, espera-se que em torno da sua região haja uma variação significativa da condutividade térmica, visto que essa propriedade é significativamente menor para o ar em relação ao adesivo. Reforçando novamente, o intuito é detectar a possível presença de falha de acordo com a variação do comportamento da solução do problema inverso. Sendo assim, sua solução não representa, efetivamente, as condutividades reais térmicas do ar e do adesivo.

As medidas experimentais simuladas utilizadas nesta abordagem foram obtidas na superfície inferior do problema completo e foi utilizado, na função de verossimilhança (Eq. (110)), a solução do problema direto  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  na superfície inferior do modelo reduzido 1.

### 5.2.3.1 Modelo reduzido 1 - Caso 1

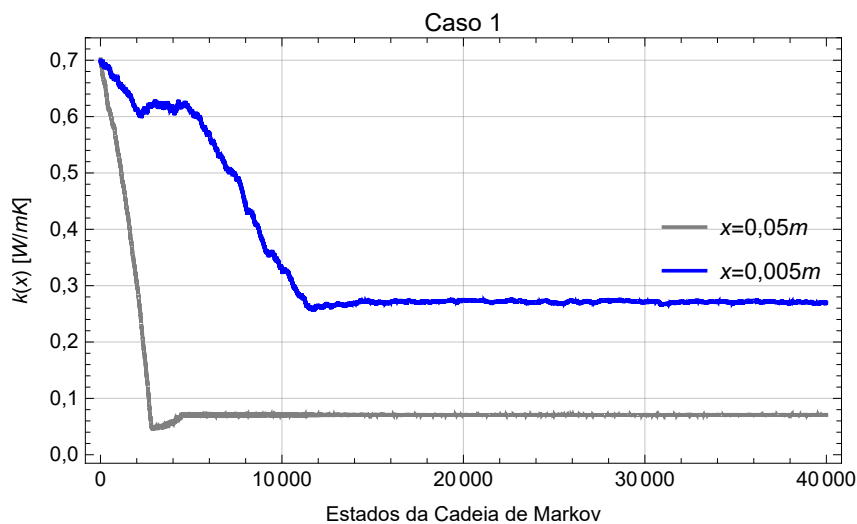
Neste primeiro caso, foi considerado um material compósito com duas camadas de uma resina epóxi e uma falha com dimensões  $10 \times 0,5 \text{ mm}$  localizada no centro da placa na direção  $x$ , como pode ser observado na Figura 30. Para a geração dos dados experimentais sintéticos foi considerado um fluxo de calor  $q'' = 5000 \text{ W/m}^2$  no problema completo. O problema inverso deste caso foi solucionado com o algoritmo básico de Metropolis-Hastings.

Figura 30 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 1.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 31 - Cadeias de Markov do Caso 1.



Fonte: O autor, 2021.

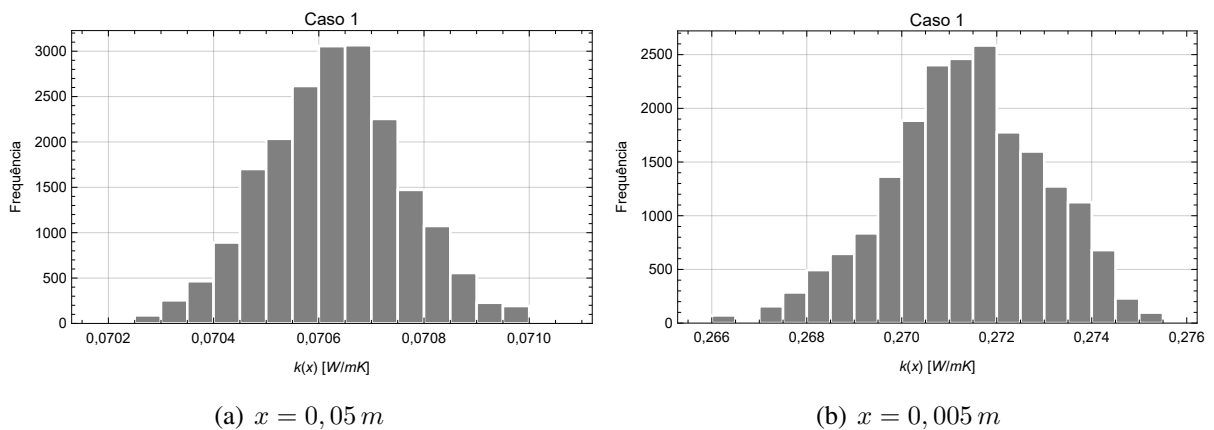
No estado inicial da cadeia de Markov foi considerado apenas a presença de adesivo e neste caso foram gerados 40.000 estados da cadeia de Markov e considerados apenas os últimos



20.000 para calcular a média da condutividade térmica. Foi adotado o parâmetro arbitrário da *Total Variation*  $\gamma = 200.000$ . A Figura 31 apresenta a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, uma na região de falha e a outra fora dela.

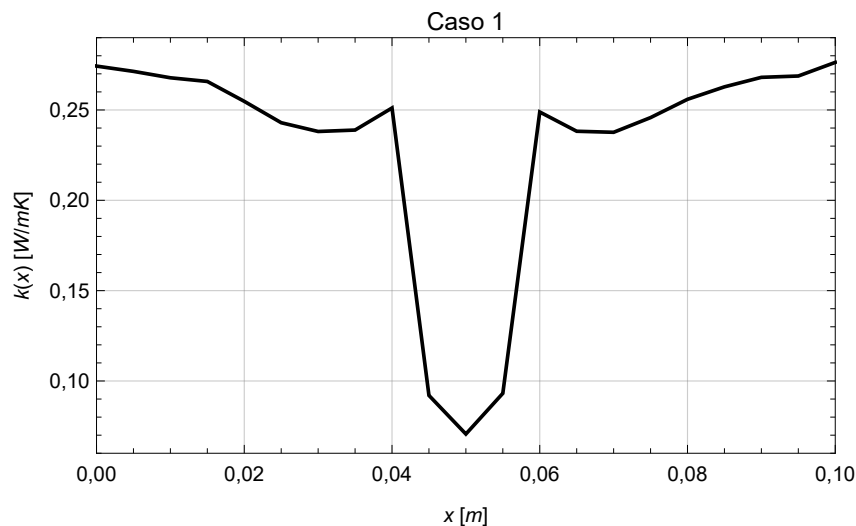
A Figura 32 apresenta os histogramas das Cadeias de Markov para duas posições diferentes, uma na região da falha (a) e outra na região do adesivo (b). É possível notar o comportamento característico de uma distribuição gaussiana.

Figura 32 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 1.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 33 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 1.



Fonte: O autor, 2021.

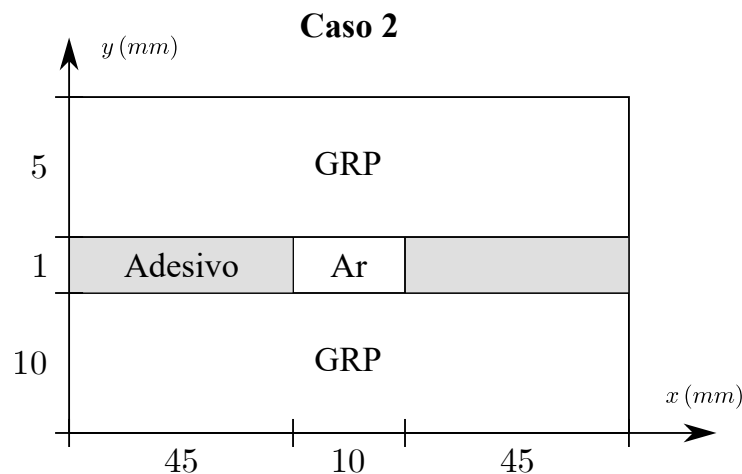
A Figura 33 apresenta a função estimada da condutividade térmica com variação espacial. É possível observar uma variação significativa do comportamento da função em torno da região da falha, caracterizando sua presença. No entanto, nota-se que os valores da condutividade térmica recuperados não representam, efetivamente, os valores das condutividades térmicas do

ar ou do adesivo. Isso ocorre devido ao fato de estar sendo utilizado um modelo reduzido de baixo custo computacional que apresenta comportamento similar ao do modelo completo, mas que não o representa como um todo. Apesar disso, o método aplicado foi capaz de detectar a presença da falha no material, justificado pela variação da condutividade térmica em torno dela.

### 5.2.3.2 Modelo reduzido 1 - Caso 2

Neste caso, foi considerada a mesma geometria do caso anterior, porém com uma espessura maior na região do adesivo e material diferente, o plástico reforçado com fibra de vidro (GRP), conforme ilustra a Figura 34. O problema inverso foi resolvido utilizando o algoritmo básico de Metropolis-Hastings. Para a geração dos dados experimentais sintéticos foi considerado um fluxo de calor  $q'' = 5000 \text{ W/m}^2$  no problema completo.

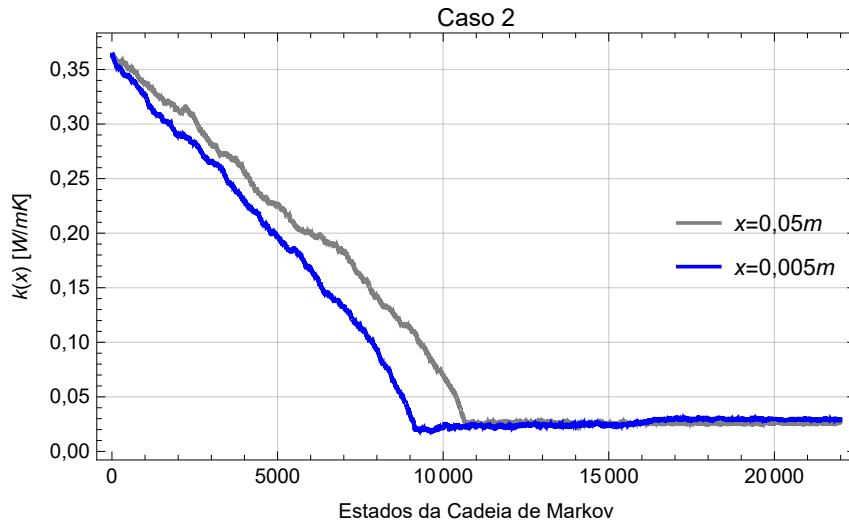
Figura 34 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 2.



Fonte: O autor, 2021.

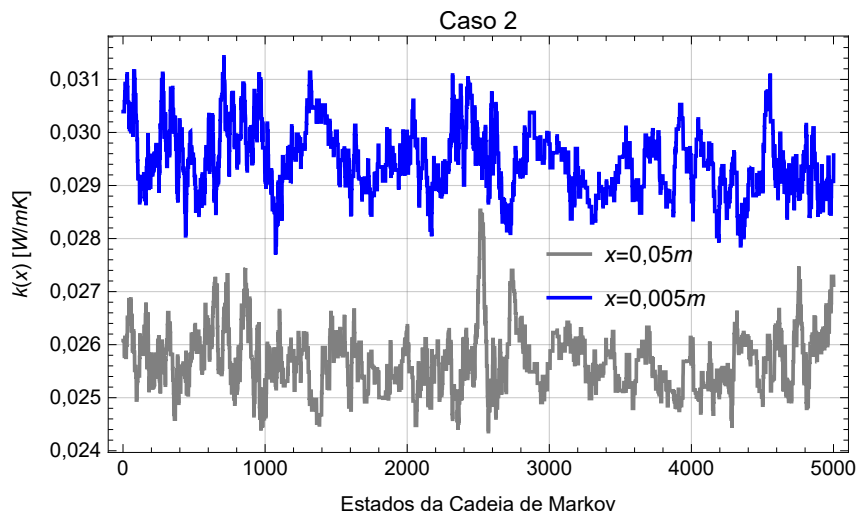
Neste caso adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 0,001$  e optou-se por considerar como o estado inicial a média aritmética da condutividade térmica da cola e do ar e neste caso foram gerados 22.000 estados da cadeia de Markov e considerados 17.000 estados de aquecimento. A Figura 35 apresenta a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa. Observa-se que as cadeias convergiram em torno de valores próximos, porém, conforme ilustra o gráfico da Figura 38, mesmo com uma variação pequena da condutividade térmica, o comportamento da função estimada indicada a região de falha. A Figura 36 mostra uma aproximação do gráfico das cadeias de Markov na região de convergência.

Figura 35 - Cadeias de Markov do Caso 2.



Fonte: O autor, 2021.

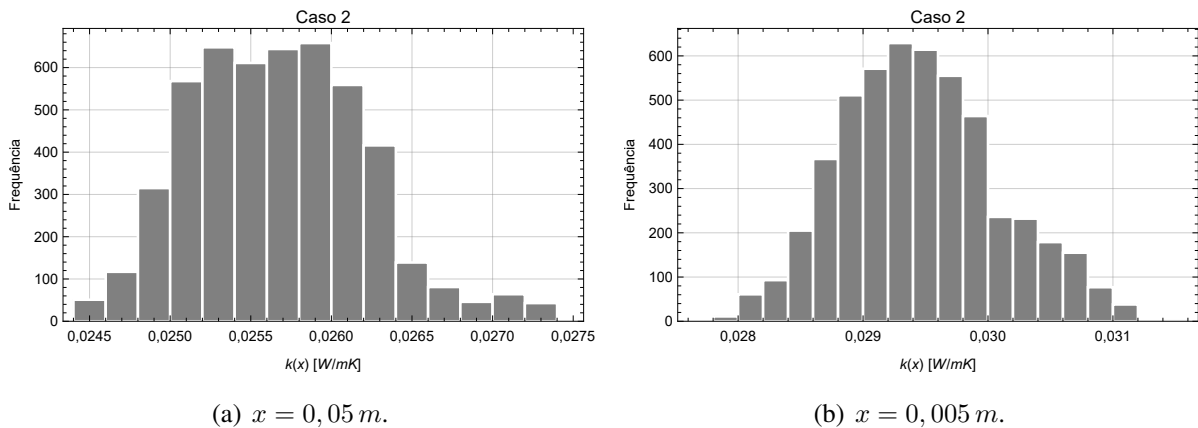
Figura 36 - Aproximação do gráfico das Cadeias de Markov do Caso 2.



Fonte: O autor, 2021.

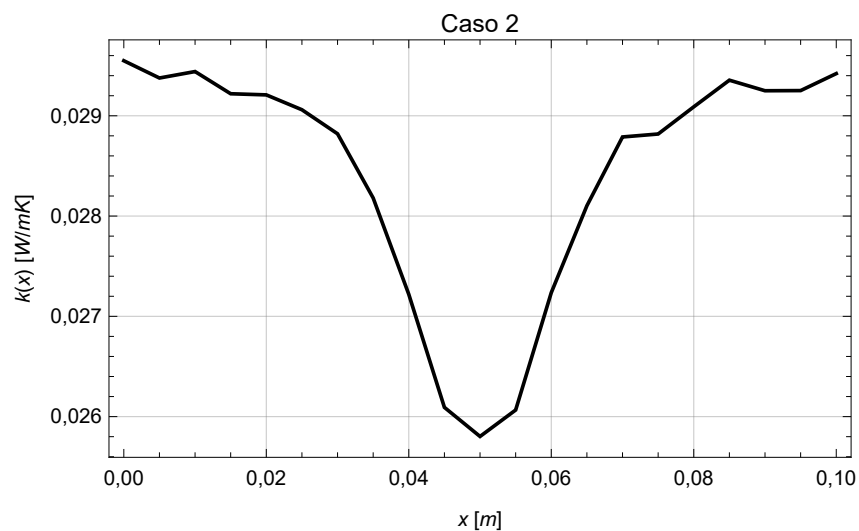
A Figura 37 apresenta os histogramas das Cadeias de Markov para duas posições diferentes, uma na região da falha (a) e outra na região do adesivo (b). O gráfico da função estimada da condutividade térmica está apresentado na Figura 38. Apesar da convergência das cadeias em torno de valores próximos ainda é possível notar a variação da propriedade em torno da região de falha.

Figura 37 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 2.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 38 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 2.

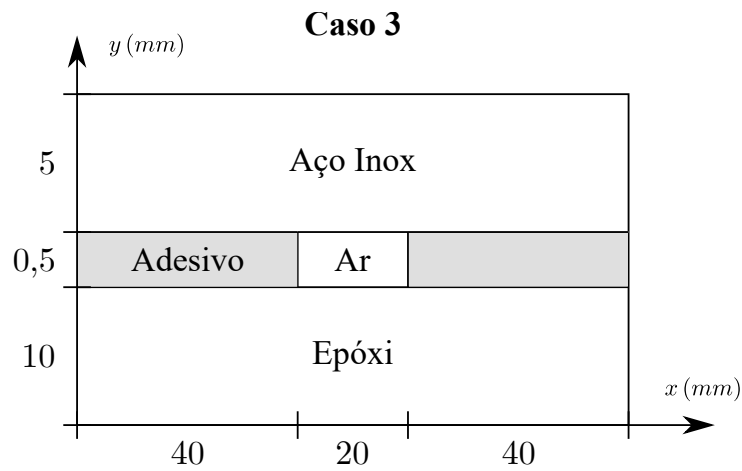


Fonte: O autor, 2021.

### 5.2.3.3 Modelo reduzido 1 - Caso 3

Os materiais utilizados neste caso são o epóxi e o aço inox AISI 316 com uma falha mais larga do que nos casos anteriores, conforme ilustra a Figura 39. O fluxo de calor adotado no problema completo foi  $q''(x) = 5000 W/m^2$ . Este caso foi solucionado utilizando o algoritmo básico de Metropolis-Hastings e depois o DAMH.

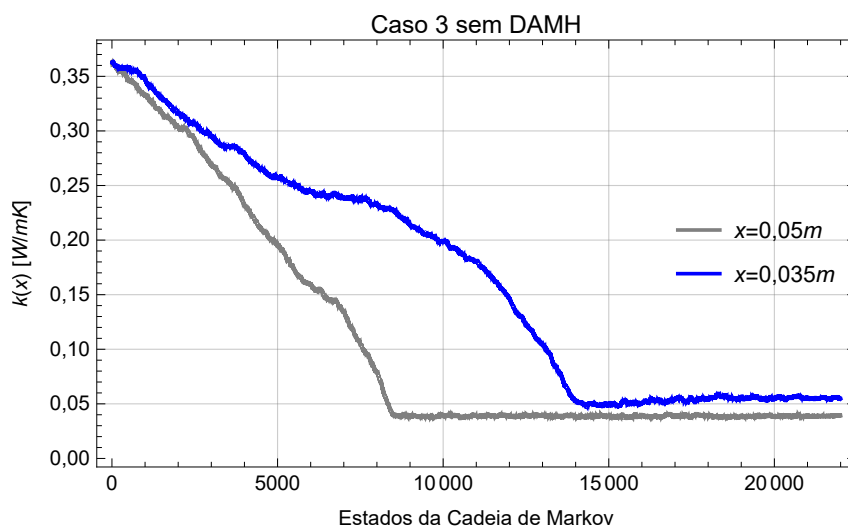
Figura 39 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 3.



Fonte: O autor, 2021.

### Problema inverso com o algoritmo básico de Metropolis-Hastings

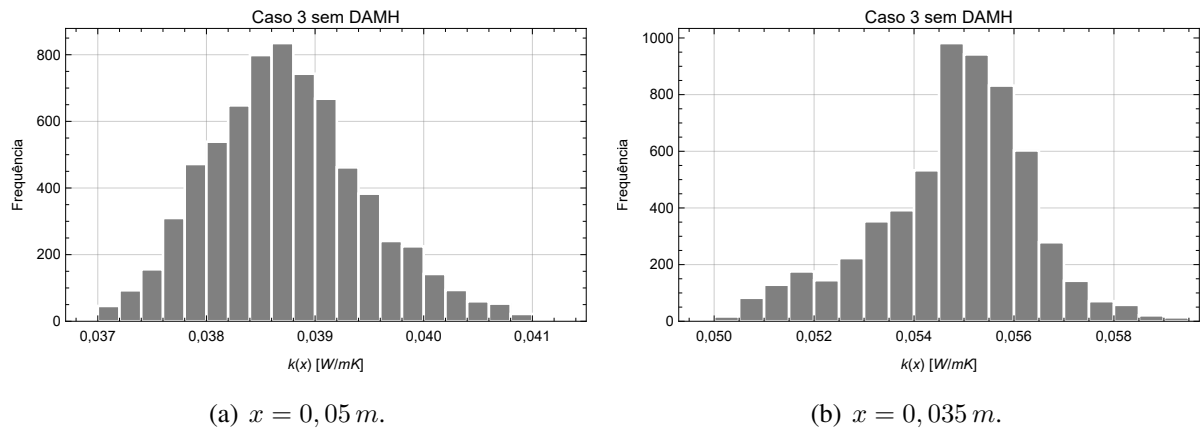
Figura 40 - Cadeias de Markov do Caso 3.



Fonte: O autor, 2021.

Neste caso adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 0,0005$  com estado inicial da cadeia igual à média aritmética dos valores de  $k_{ar}$  e de  $k_{ad}$ . Foram gerados 22.000 estados da cadeia de Markov e considerados apenas as últimas 5000 para calcular a média da condutividade térmica. A Figura 40 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, uma na região de falha e a outra fora dela.

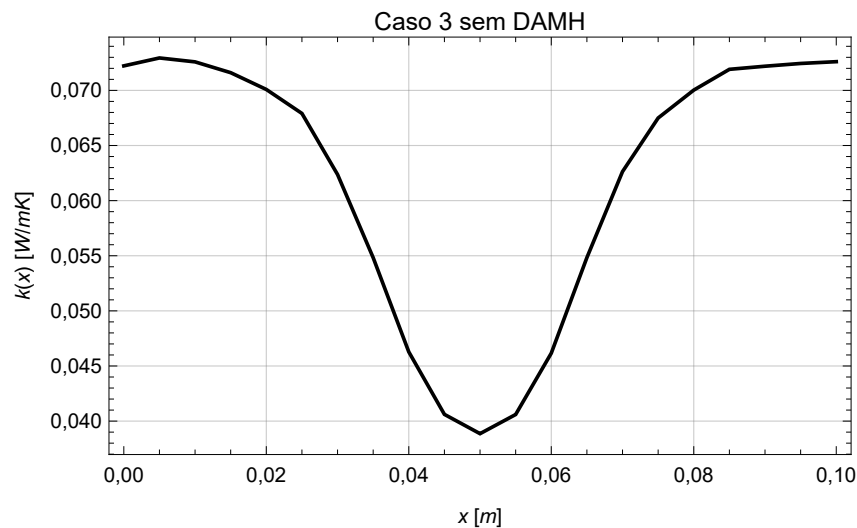
Figura 41 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 3 sem DAMH.



Fonte: O autor, 2021.

Os histogramas obtidos neste caso estão ilustrados na Figura 41. A função estimada da condutividade térmica está apresentada no gráfico da Figura 42. Repara-se neste caso o comportamento suave da função recuperada no problema inverso, com uma variação da condutividade térmica evidente na região de falha, como era esperado.

Figura 42 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 3.



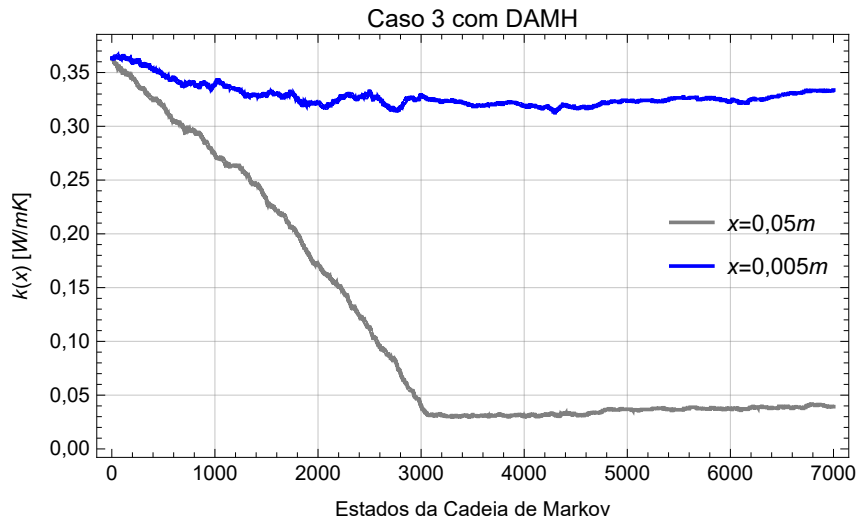
Fonte: O autor, 2021.

### Problema inverso com DAMH

O problema foi resolvido novamente com DAMH. Como foi apresentado no capítulo 4, esse método se baseia numa aceitação atrasada em duas etapas; na primeira é utilizado a solução do problema direto do modelo reduzido; na segunda é levada em consideração a

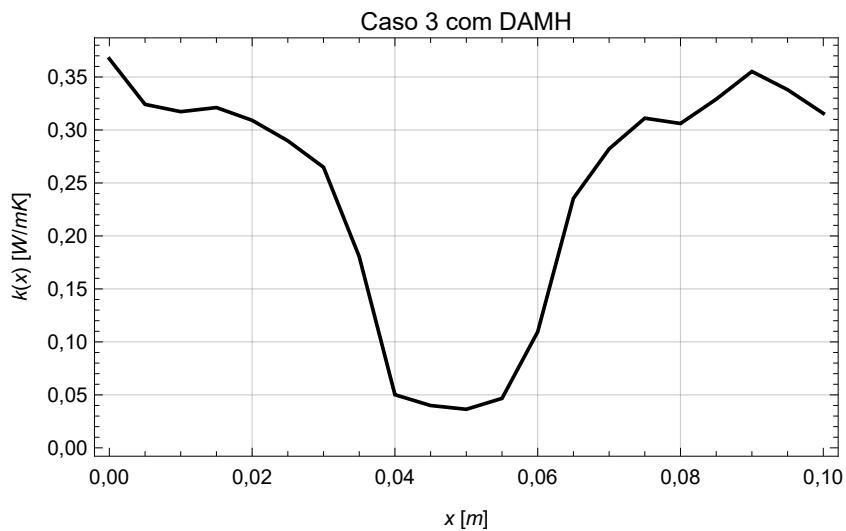
solução do problema direto do modelo completo. Adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 100.000.000$  com cadeia inicial igual à média aritmética dos valores de  $k_{ar}$  e de  $k_{ad}$ . Desta vez, foram gerados 7000 estados da cadeia de Markov e consideradas as primeiras 4000 como estados de aquecimento. Na Figura 43 nota-se a convergência mais rápida das cadeias em duas posições diferentes da placa, uma na região de falha e a outra fora dela.

Figura 43 - Cadeias de Markov do Caso 3 com DAMH.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 44 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 3 com DAMH.

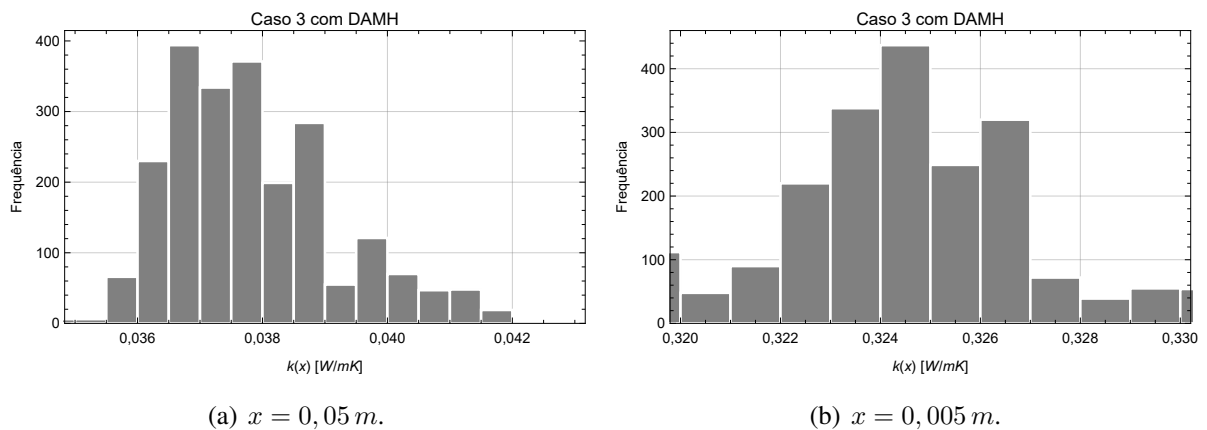


Fonte: O autor, 2021.

O gráfico da Figura 44 mostra o perfil da função estimada da condutividade térmica no problema inverso. A região da falha foi igualmente detectada com valores mais próximo da

condutividade térmica do ar  $k_{ar} = 0,0263 W/(mK)$ . Apesar de o DAMH levar em consideração também a solução do problema direto do modelo reduzido, também não foi possível estimar com maior precisão as condutividades térmicas do adesivo ( $k_{ad}$ ) e do ar ( $k_{ar}$ ). A Figura 45 mostra os histogramas das cadeias em duas posições diferentes.

Figura 45 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 3 com DAMH.



Fonte: O autor, 2021.

Neste caso, nota-se que as soluções obtidas com o algoritmo básico de Metropolis-Hastings e com o DAMH são consideravelmente distintas entre si. Isso se justifica pelo fato de que no algoritmo básico de Metropolis-Hastings leva-se em consideração apenas o modelo reduzido 1, enquanto que no DAMH considera-se tanto o modelo reduzido 1 quando o modelo completo, reduzindo, portanto, o erro de modelo proveniente da aproximação dos modelos reduzidos. Apesar disso, a aplicação do DAMH por si só não foi o suficiente para estimar com precisão os valores das condutividades térmicas do adesivo e do ar, embora tenha sido capaz de detectar a presença da falha de contato.

#### 5.2.3.4 Modelo reduzido 1 - Caso 4

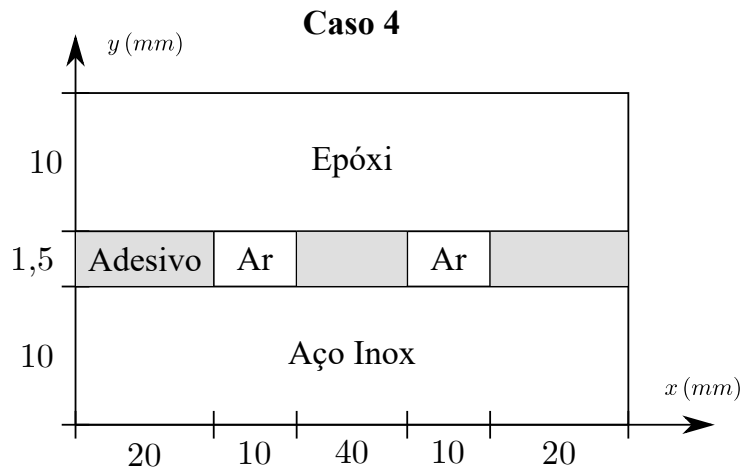
Para elevar o nível de complexidade do problema, neste caso serão consideradas duas falhas caracterizadas pela presença de ar na região do adesivo de dimensões  $10 \times 1,5 mm$  espaçadas em  $4 cm$  em um material compósito de aço inoxidável com epóxi, conforme ilustra a Figura 46. Apesar da mudança física no problema, a modelagem utilizada nos casos anteriores também pode ser empregada neste caso, graças à formulação em domínio único, bastando ajustar as funções com variação espacial das propriedades térmicas.

Neste caso adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 1000$  com valor da cadeia inicial igual  $0,2 W/(mK)$  e com fluxo de calor  $q'' = 10.000 W/m^2$ . Foram gerados 50.000 estados da cadeia de Markov e consideradas as primeiras 35.000 como estados de aquecimento. A Figura 47 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa,



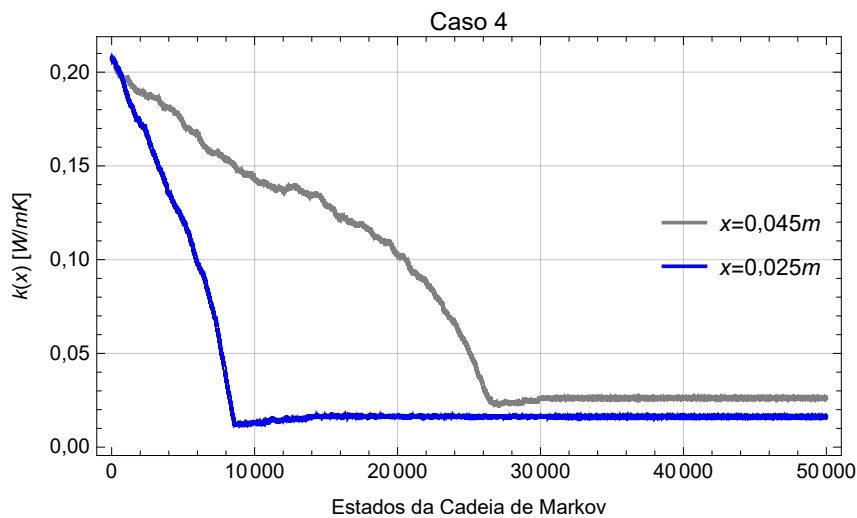
uma na região de falha e a outra fora dela. Devido à maior complexidade envolvida neste caso, é possível observar que as cadeias demoraram mais para começar a convergir em relação aos casos anteriores, o que aconteceu a partir de 30.000 estados aproximadamente.

Figura 46 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 4.



Fonte: O autor, 2021.

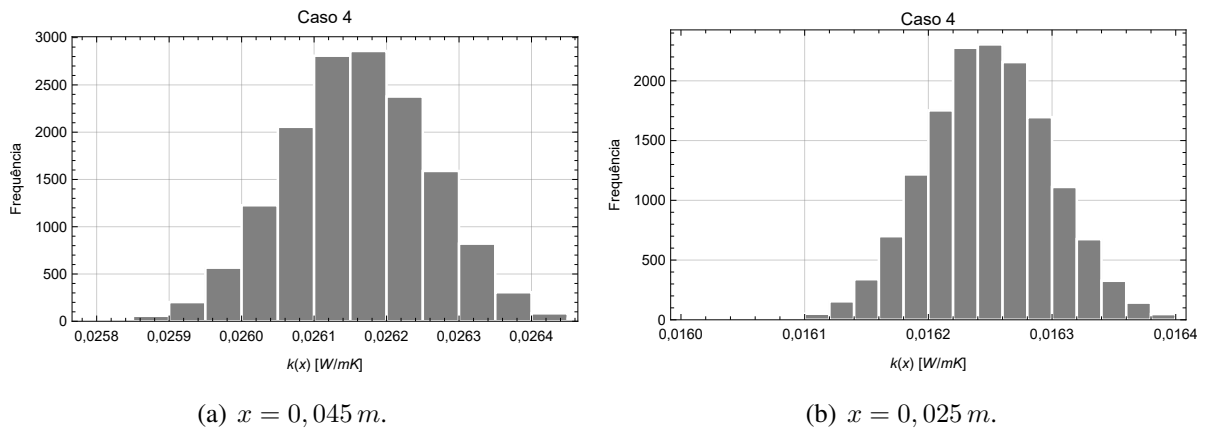
Figura 47 - Cadeias de Markov do Caso 4.



Fonte: O autor, 2021.

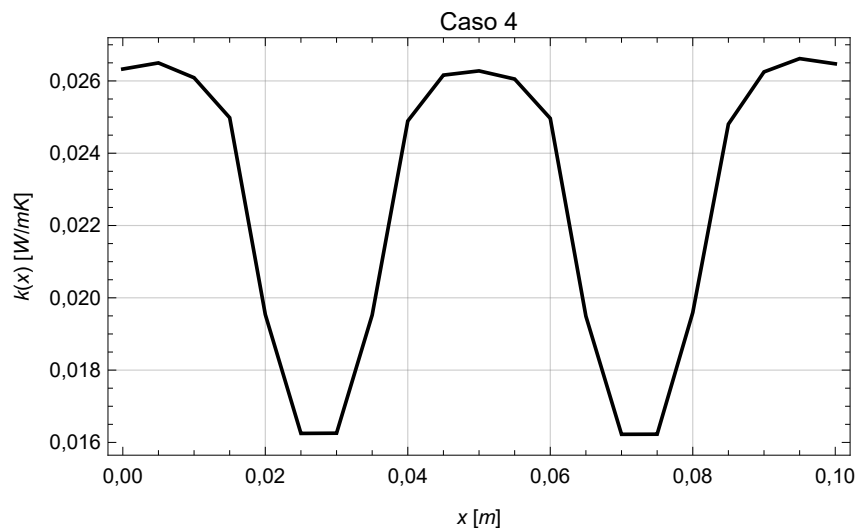
Na Figura 48 estão ilustrados os histogramas das cadeias em duas posições diferentes, uma na região de cola (a) e outra na região de falha (b). No gráfico da função estimada da condutividade térmica ilustrado na Figura 49 é possível notar a região das duas falhas, mostrando variações abruptas da condutividade em torno delas. Além disso, observa-se também que nas duas regiões de falha os valores da condutividade convergiram para valores semelhantes, o que também ocorreu para as regiões de adesivo.

Figura 48 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 4.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 49 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 4 com DAMH.

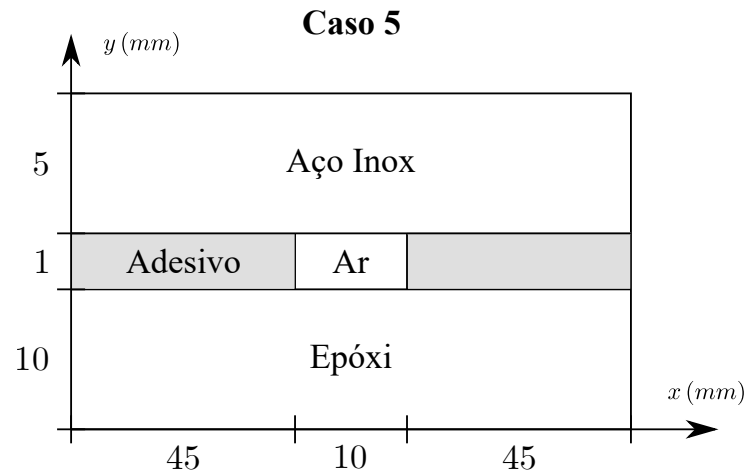


Fonte: O autor, 2021.

### 5.2.3.5 Modelo reduzido 1 - Caso 5

No Caso 5, foi considerado um material compósito de aço inoxidável AISI 316 com um epóxi e uma falha com dimensões  $10 \times 1$  mm localizada no centro da placa na direção  $x$ , como pode ser observado na Figura 50. O fluxo de calor adotado foi  $q'' = 5000$  W/m<sup>2</sup> e problema inverso foi com o DAMH.

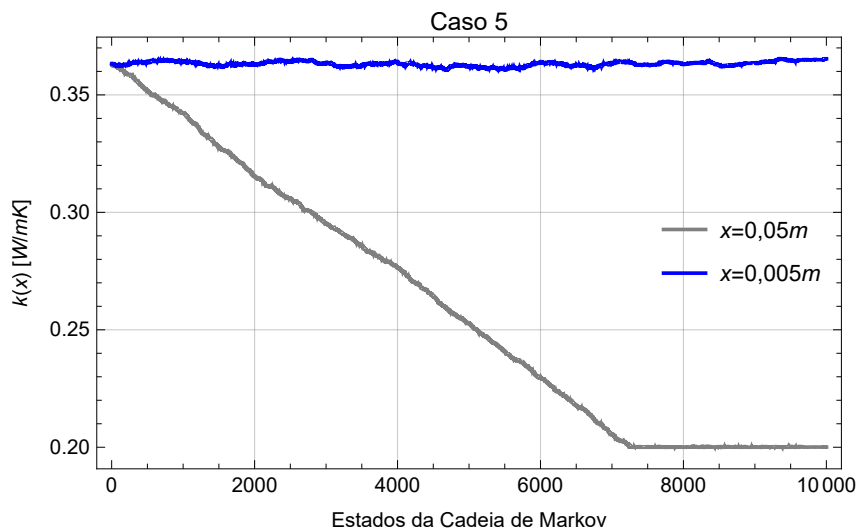
Figura 50 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 5.



Fonte: O autor, 2021.

No problema inverso deste caso foi resolvido utilizando o DAMH. Foram gerados 10.000 estados da cadeia de Markov e considerado como estados de aquecimento as 8000 cadeias iniciais com o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 1000$ . A Figura 51 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, uma na região de falha e a outra fora dela.

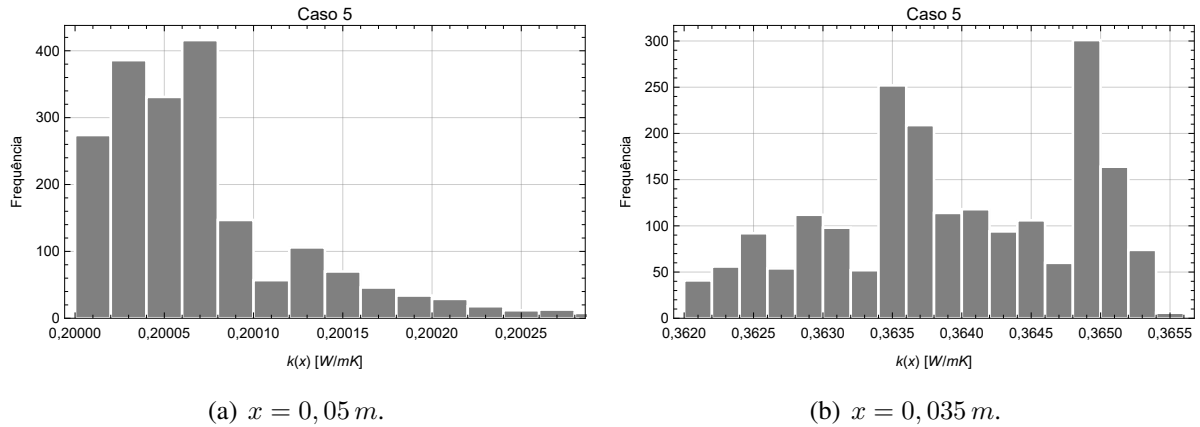
Figura 51 - Cadeias de Markov do Caso 5.



Fonte: O autor, 2021.

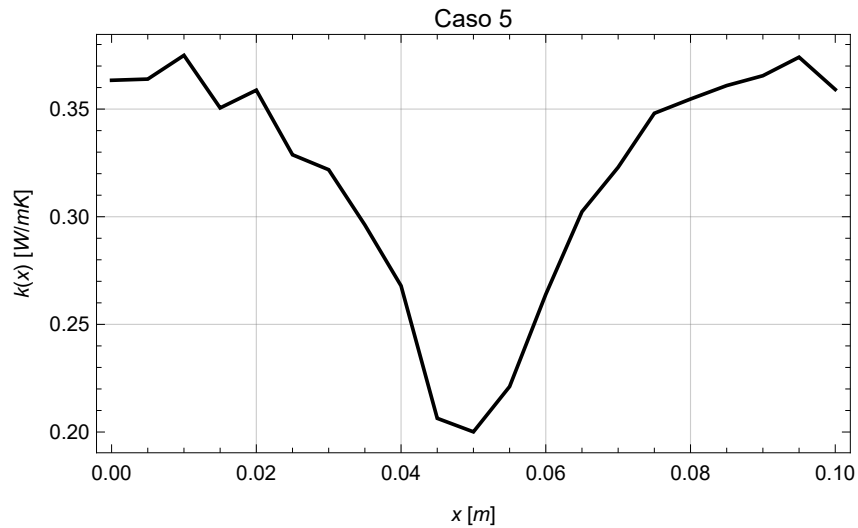
Os histogramas das cadeias está apresentado na Figura 52. Nota-se que neste caso o comportamento do histograma se distanciou do comportamento de uma gaussiana. O gráfico da média dos parâmetros pode ser observada na Figura 53. Como ocorreu no Caso 3 com DAMH, neste caso também não foi possível estimar os valores reais das condutividades térmicas do ar ou do adesivo.

Figura 52 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 5.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 53 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 5.

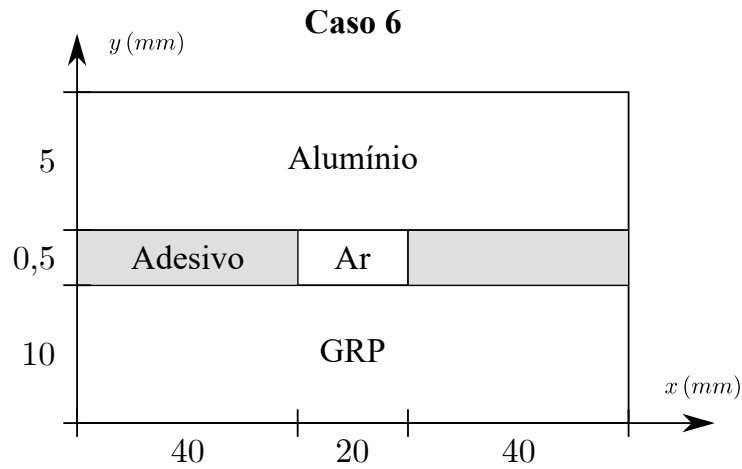


Fonte: O autor, 2021.

### 5.2.3.6 Modelo reduzido 1 - Caso 6

Este é o último caso resolvido com o modelo reduzido 1. Para este caso foram escolhidos o alumínio e o GRP para compor o material compósito. A falha possui dimensões  $20 \times 0,5$  mm, como representa a Figura 54. O parâmetro da *Total Variation* utilizado foi  $\gamma = 100$  e o fluxo de calor foi igual a  $q'' = 5000$  W/m<sup>2</sup>.

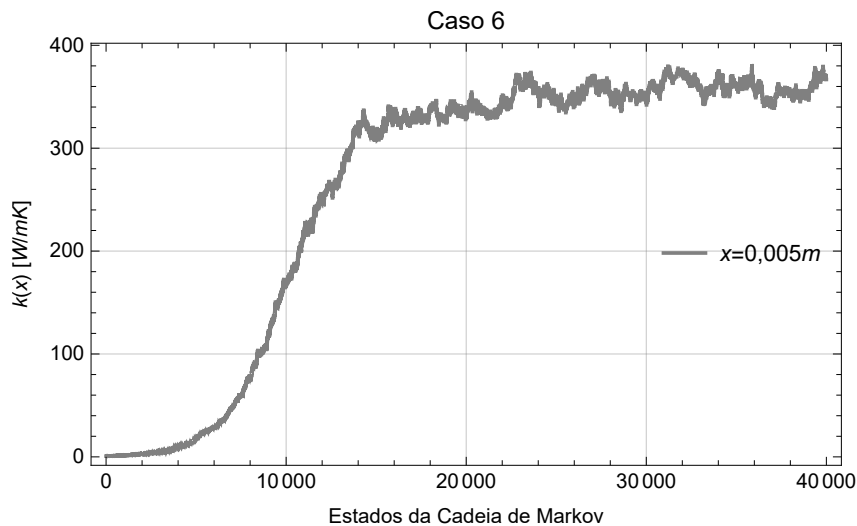
Figura 54 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 6.



Fonte: O autor, 2021.

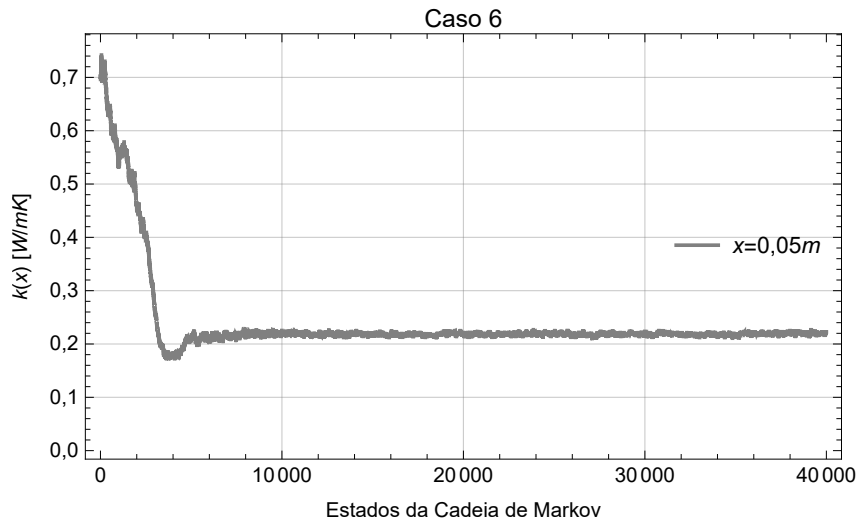
No estado inicial da cadeia de Markov considerou-se a presença apenas do adesivo. Foram geradas 40.000 cadeias com 20.000 cadeias de aquecimento. Neste caso, houve um grande aumento dos parâmetros referentes à condutividade térmica do adesivo, como pode ser observado na evolução da cadeia do gráfico da Figura 55 numa posição na região de cola. A cadeia nessa posição saiu de seu estado inicial de  $0,7 W/(mK)$  e convergiu em torno de  $355 W/(mK)$ . A Figura 56 ilustra a evolução da cadeia em uma posição na região de falha.

Figura 55 - Cadeias de Markov do Caso 6.



Fonte: O autor, 2021.

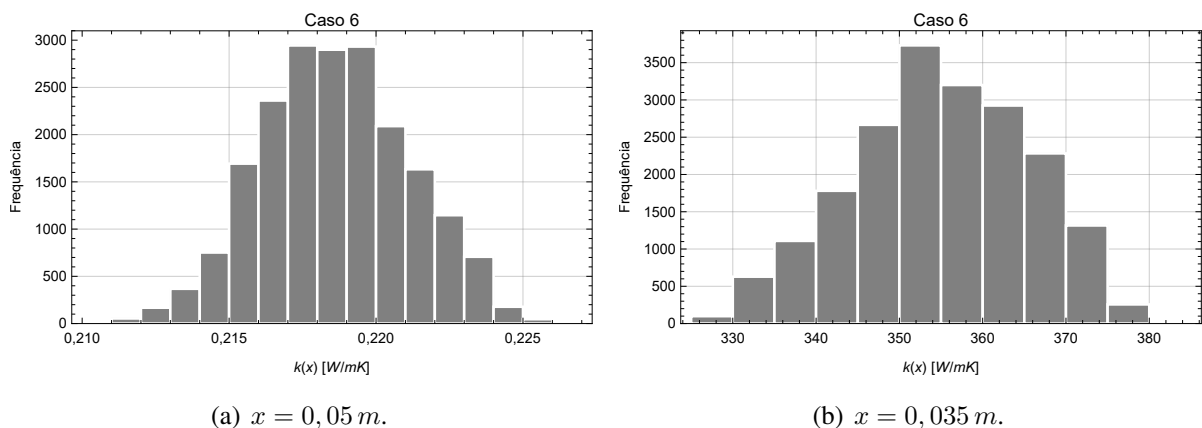
Figura 56 - Cadeias de Markov do Caso 6.



Fonte: O autor, 2021.

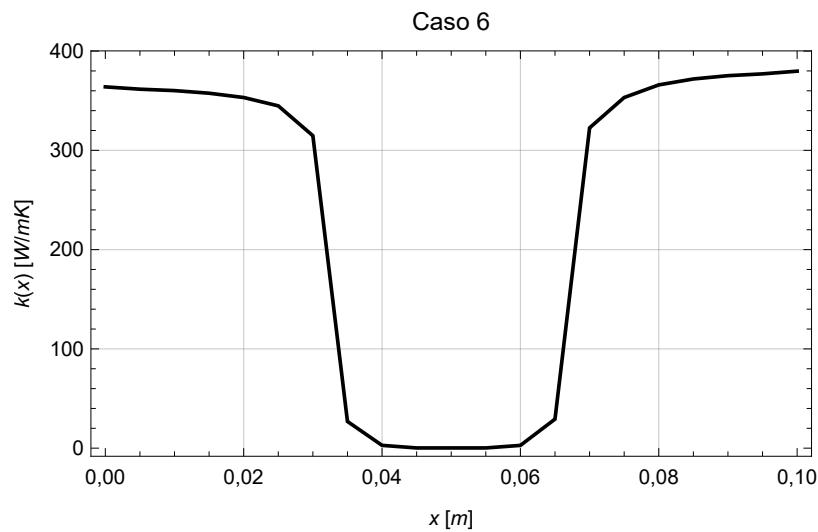
A Figura 57 representa os histogramas nas posições  $x = 0,05$  e  $x = 0,035$  m e é possível observar o comportamento típico de uma gaussiana. A média da função estimada da condutividade térmica com variação espacial está ilustrada na Figura 58, onde é possível observar a variação considerável dessa propriedade em torno da região de falha. Faz-se necessário afirmar novamente, que com a aplicação do problema reduzido, há erros de modelo decorrentes dessa simplificação. Portanto, a solução do problema inverso é apenas qualitativo e não indica os reais valores das condutividades térmicas do ar ou do adesivo, mas fornece informações valiosas acerca de seus comportamentos e permite detectar as possíveis regiões de falha.

Figura 57 - Histograma das Cadeias de Markov em duas posições diferentes do Caso 6.

(a)  $x = 0,05$  m.(b)  $x = 0,035$  m.

Fonte: O autor, 2021.

Figura 58 - Média da condutividade térmica estimada do Caso 6.



Fonte: O autor, 2021.

#### 5.2.4 Identificação de falhas utilizando o modelo reduzido 2

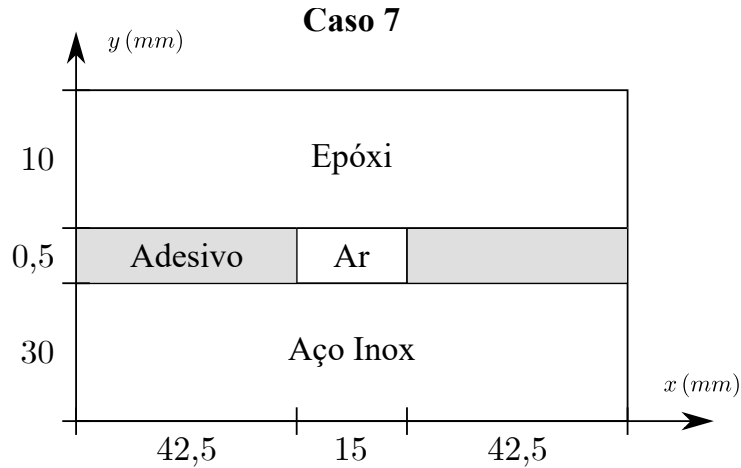
A seguir serão apresentados os casos que foram resolvidos utilizando o modelo reduzido 2. Nessa abordagem a identificação da falha é feita de acordo com a variação da função do fluxo de calor estimada no problema inverso. Em caso de presença de falha de contato, espera-se que nessa região haja uma variação significativa do fluxo de calor, visto que a presença da bolha de ar, devido à sua baixa condutividade térmica, diminui o valor do fluxo equivalente que alcança as camadas superiores do material. As medidas experimentais simuladas utilizadas nesta abordagem foram obtidas na superfície superior do problema completo.

Vale ressaltar que nos resultados com a abordagem 2, cujo modelo engloba a camada superior do problema completo, as bordas ( $x = 0\text{ m}$  e  $x = 0,1\text{ m}$ ) não serão mostradas nos gráficos, apesar de serem levadas em consideração nos cálculos das soluções. Sabe-se que as bordas do problema são isoladas termicamente ( $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ), portanto nas bordas para  $y > 0$ , o fluxo é nulo. Como nesta abordagem a solução do problema inverso é a função do fluxo de calor, do ponto de vista físico, é ilógico estimar um fluxo de calor nas bordas no interior da placa. Além disso, a priori utilizada, a *Total Variation*, não regulariza as bordas da geometria, como pode ser observado na Eq. (117).

Nas soluções do problema inverso utilizando o modelo reduzido 2 foi observada uma grande dificuldade em manter uma aceitação adequada dos candidatos. Apesar disso, nos três casos apresentados também foi possível estimar a região de falha.

## 5.2.4.1 Modelo reduzido 2 - Caso 7

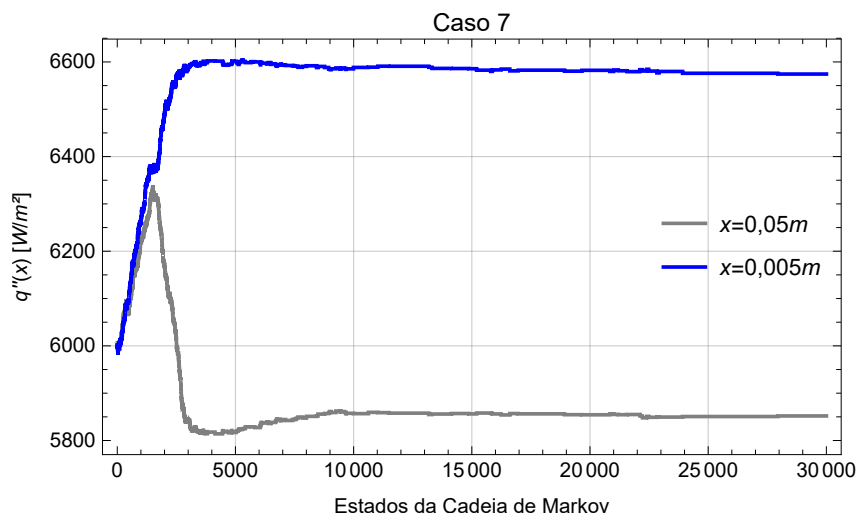
Figura 59 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 7.



Fonte: O autor, 2021.

Neste caso foi considerado um material compósito de aço inoxidável AISI 316 e epóxi, com uma falha mais fina do que no caso anterior, porém mais larga, como está ilustrado na Figura 59. Adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 10.000$  com estado cadeia inicial igual a  $6000 \text{ W/m}^2$  com fluxo de calor  $q = 10.000 \text{ W/m}^2$  adota para o modelo completo. Foram gerados 30.000 estados da cadeia de Markov e consideradas as primeiras 20.000 como estados de aquecimento. A Figura 60 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, em que é possível observar a convergência das cadeias a partir de 10.000 estados.

Figura 60 - Cadeias de Markov do Caso 7.

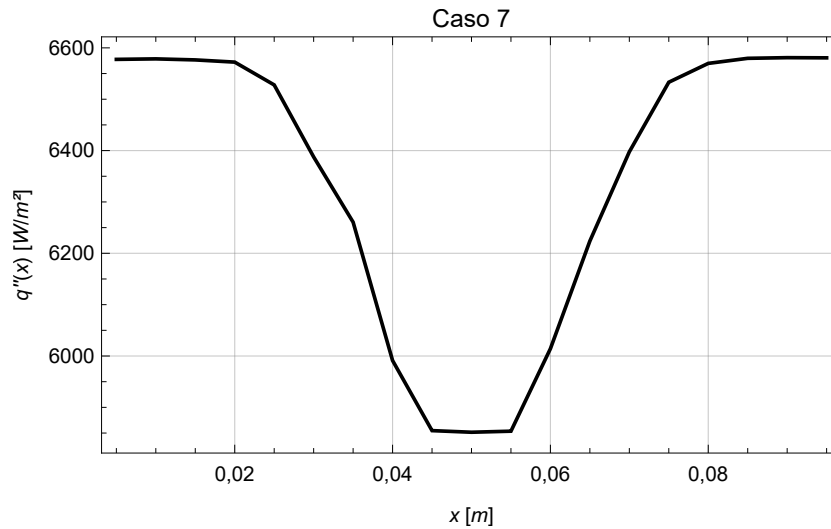


Fonte: O autor, 2021.



A Figura 61 mostra o gráfico do fluxo de calor com variação temporal estimado no problema inverso. É possível notar a variação relevante desse parâmetro em torno da região da falha.

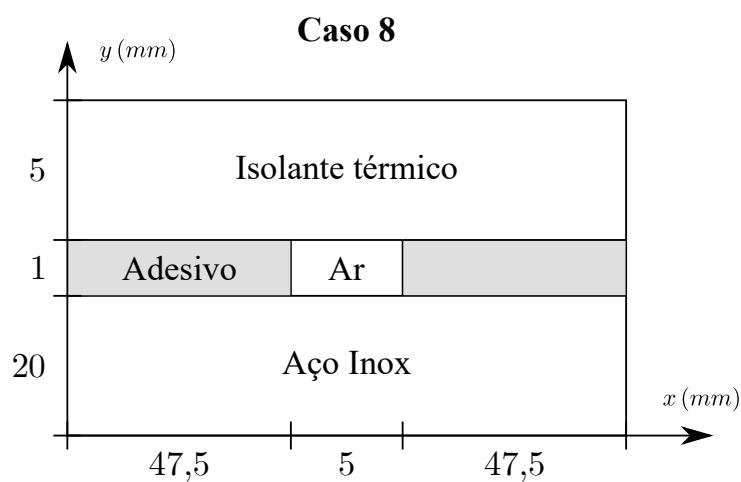
Figura 61 - Média do fluxo de calor estimado do Caso 7.



Fonte: O autor, 2021.

#### 5.2.4.2 Modelo reduzido 2 - Caso 8

Figura 62 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 8.

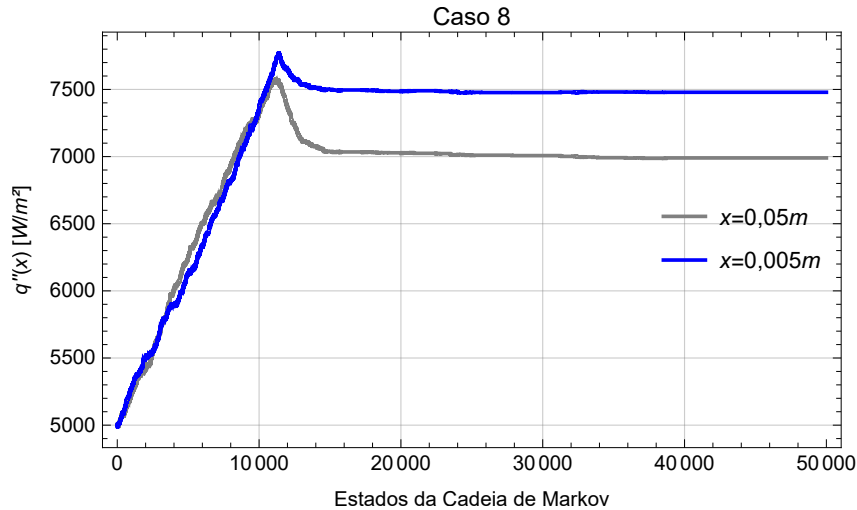


Fonte: O autor, 2021.

Neste caso foi adotada uma falha de menor largura em relação ao caso anterior e com uma espessura maior os materiais considerados foram o isolante térmico e o aço inox, como

ilustra a Figura 62. O fluxo de calor considerado foi de  $q'' = 10.000 \text{ W/m}^2$  utilizado no modelo completo. Desta vez adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 10.000$  com valor inicial da cadeia igual  $5000 \text{ W/m}^2$  adotado para o modelo completo.

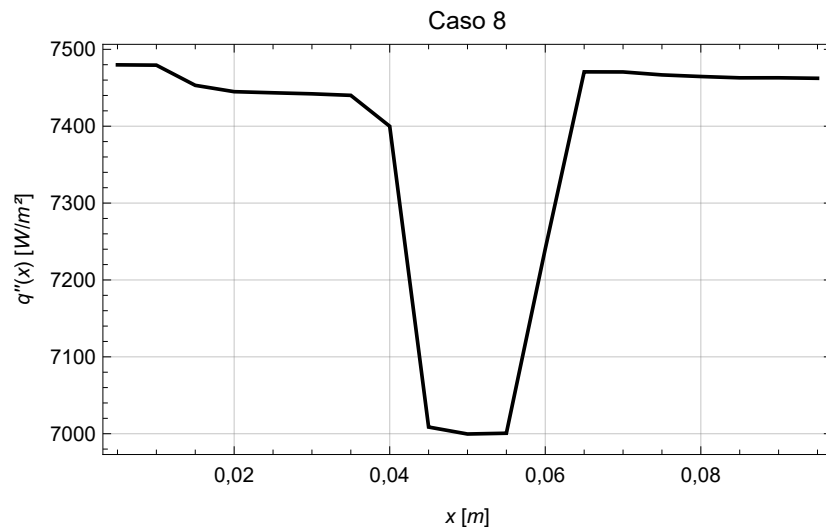
Figura 63 - Cadeias de Markov do Caso 8.



Fonte: O autor, 2021.

Foram gerados 50.000 estados da cadeia de Markov e considerados as últimas 20.000 para calcular a média da condutividade térmica. A Figura 63 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa, uma na região de falha e a outra fora dela. Na Figura 64 é possível verificar o comportamento do fluxo de calor estimado com uma variação evidente na região da falha de contato.

Figura 64 - Média do fluxo de calor estimado do Caso 8.

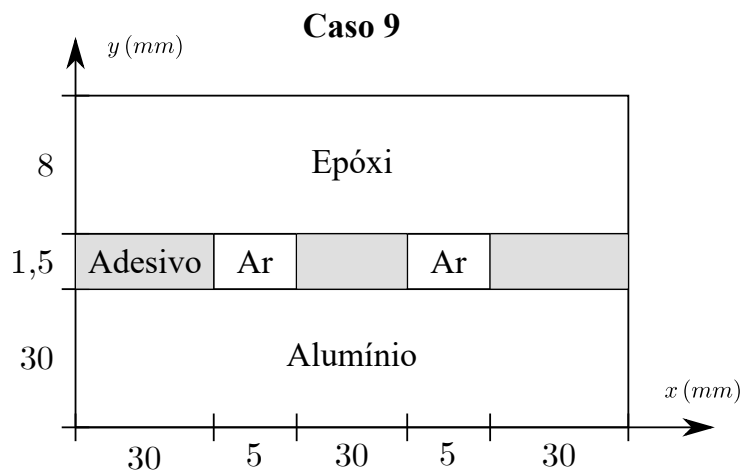


Fonte: O autor, 2021.

### 5.2.4.3 Modelo reduzido 2: Estimativa da função do fluxo de calor - Caso 9

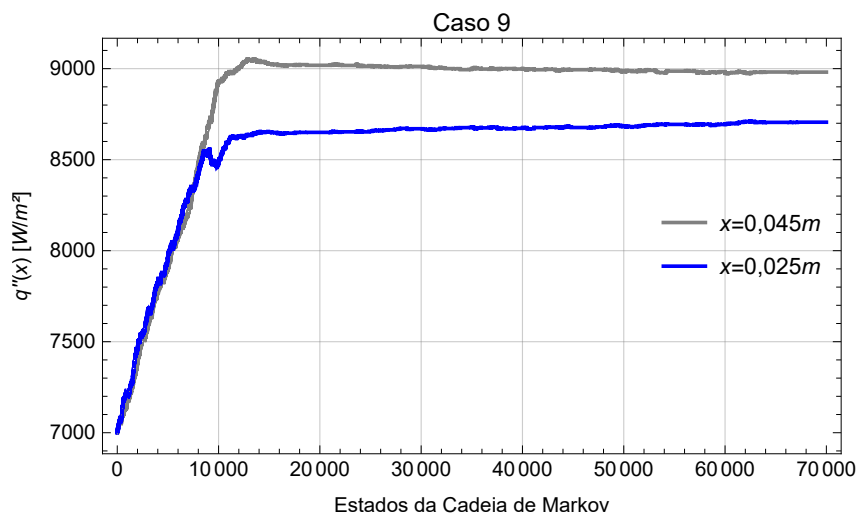
Para elevar o nível de complexidade do problema novamente e testar a eficiência da modelo reduzido, neste caso serão consideradas duas falhas caracterizadas pela presença de ar na região do adesivo de dimensões  $5 \times 1,5 \text{ mm}$  espaçadas em  $3 \text{ cm}$  em um material composto por alumínio e epóxi, conforme ilustra a Figura 65. Salienta-se, mais uma vez, que apesar da mudança física no problema, a modelagem utilizada nos casos anteriores também pode ser empregada neste caso, graças à formulação em domínio único, bastando ajustar as funções com variação espacial das propriedades térmicas.

Figura 65 - Materiais e dimensões utilizados no Caso 9.



Fonte: O autor, 2021.

Figura 66 - Cadeias de Markov do Caso 9.

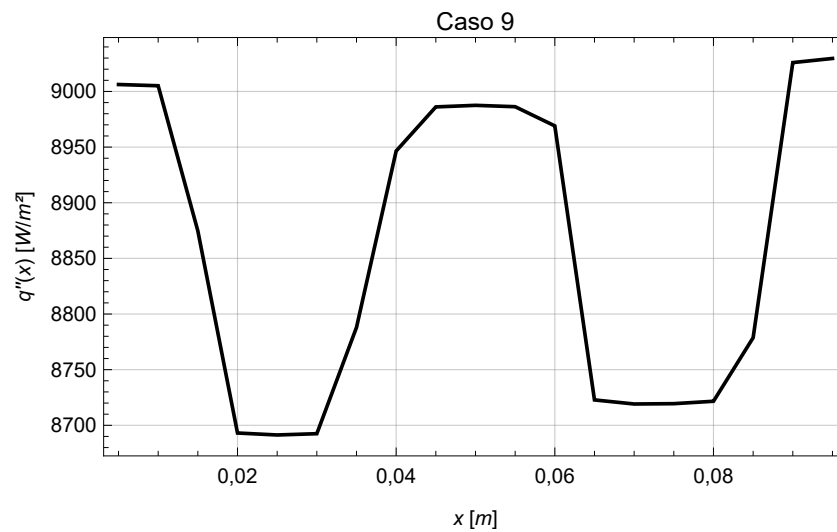


Fonte: O autor, 2021.

Neste caso, adotou-se o parâmetro da *Total Variation*  $\gamma = 50.000$  com estado da cadeia inicial igual a  $7000 \text{ W/m}^2$  com fluxo de calor  $q'' = 10.000 \text{ W/m}^2$  utilizado no modelo completo. Foram gerados 70.000 estados da cadeia de Markov e consideradas as últimas 30.000 para estimar a média da função do fluxo de calor. A Figura 66 mostra a evolução das cadeias de Markov em duas posições diferentes da placa.

Na Figura 67 o gráfico do comportamento da função estimada do fluxo de calor mostra com variações consideráveis as regiões de falha adotadas para o caso.

Figura 67 - Média do fluxo de calor estimado do do Caso 9.



Fonte: O autor, 2021.

## CONCLUSÕES

O principal objetivo deste trabalho consistia em identificar falhas de contato em materiais compósitos por meio da estimativa de propriedades térmicas a partir da solução do problema inverso. Para isso foram desenvolvidas duas abordagens diferentes com o intuito de reduzir o custo computacional requerido pelo problema completo na solução do problema inverso. Nessa abordagem, foram elaborados dois modelos reduzidos: 1) um com formulação *Lumped*; e 2) considerando apenas parte do problema completo.

A solução do problema direto do modelo completo foi obtida com a técnica da transformada integral clássica, CITT; com a função *NDSolve* do Mathematica; com o método de diferenças finitas (MDF) para fins de comparação; e com o COMSOL, que foi utilizada como solução de referência. Conforme ilustram as Figuras 6 e 7, as soluções mostraram-se consistentes entre si. Pela análise da Tabela 3 nota-se um erro percentual máximo de 0,68% para as posições e para os tempos apresentados. Nos gráficos das Figuras 11 e 12 foram apresentadas as soluções do problema direto do modelo reduzido 1 obtidas com o *Improved Lumped*, *Classical Lumped*, método de diferenças finitas e com o COMSOL. Pela análise das curvas, constatou a melhora significativa da solução obtida com o *Improved Lumped* em relação ao *Classical Lumped*. Por fim, os gráficos das Figuras 16 e 17, mostraram as soluções do problema direto do modelo reduzido 2 obtidas com a função *NDSolve* e com COMSOL, que se mostraram consistentes entre si, com erro máximo, de acordo com as posições e tempos apresentados na Tabela 5, de 0,05%.

Um dos objetivos deste trabalho era formular modelos reduzidos de baixo custo computacional que representassem uma aproximação do modelo completo. Então foram elaborados dois modelos reduzidos descritos no Capítulo 4. Na Tabela 6 foram apresentados os tempos de CPU para computar as soluções dos problemas diretos do modelo completo e dos modelos reduzidos 1 e 2. O tempo despendido pela CITT para calcular o problema direto do modelo completo foi de 0,9 s; no modelo reduzido 1, o tempo de execução foi de 0,032 s usando o *Improved Lumped*; e no modelo reduzido 2, o tempo foi de 0,073 s. Em comparação ao modelo completo, o modelo reduzido 1 teve uma redução de 96,7% no tempo de CPU e o modelo reduzido 2, 92,6%.

A fim de verificar os códigos computacionais formulados, foi resolvido um crime inverso para cada modelo reduzido proposto utilizando medidas experimentais dos próprios modelos reduzidos empregando uma priori informativa, a priori Gaussiana. Para obter a solução dos casos propostos (Casos 1 a 9), no problema inverso foram utilizados os modelos reduzidos com medidas experimentais simuladas obtidas a partir do modelo completo. A técnica empregada para obter a solução do problema inverso foi elaborada dentro uma abordagem Bayesiana com o método de Monte Carlo via Cadeias de Markov implementado com o algoritmo de Metropolis-Hastings e com o *Delayed Acceptance Metropolis-Hastings* (DAMH); e com uma priori não informativa capaz de estimar funções com variação espacial. No DAMH, além do modelo reduzido, o problema direto de modelo completo é calculado e levado em consideração nos

cálculos do algoritmo, por conta disso, diminuem-se os erros decorrentes da aproximação de modelo, porém o custo computacional fica mais elevado.

Na abordagem 1, foi elaborado um modelo reduzido de baixo custo computacional que representasse o comportamento do modelo completo para ser usado no problema inverso, cuja solução, nessa abordagem, é a função da condutividade térmica na região do adesivo. Dessa forma, a presença de uma falha de contato, caracterizada pela ausência de adesivo e no seu lugar, uma bolha de ar, faz com que a função apresente uma variação relevante nas regiões de falha. Nos Casos de 1 a 6 foi possível observar essa variação e, portanto, detectar as falhas nos problemas elaborados com diferentes materiais, espessuras das camadas e largura das falhas. No Caso 2, solucionado sem DAMH, as cadeias nas regiões de adesivo e na região de falha apresentaram convergência em valores próximos (Figura 35), porém ao analisar o perfil do comportamento da condutividade térmica (Figura 38), é possível observar que há uma variação relevante da propriedade em torno da região de falha. No Caso 4, houve a presença de duas falhas simultâneas, que eleva a complexidade do problema físico. Apesar disso, a formulação em domínio único possibilitou usar a mesma modelagem utilizada em outros casos, bastando fazer o ajuste das funções com variação espacial das propriedades dos materiais, como a condutividade térmica, o calor específico e a massa específica. Apesar da elevada complexidade, a abordagem foi capaz de reproduzir as regiões de falha. Nos Casos 3 e 5, da mesma forma, foi possível detectar as regiões de falha, porém também não foi possível estimar as condutividades térmicas do ar ou do adesivo, apesar da implementação do DAMH. O foco deste trabalho, por meio da solução do problema inverso, é detectar possíveis falhas de contato em meios compostos utilizando modelo reduzido de baixo custo computacional. Como o modelo simplificado não reproduz fielmente os fenômenos que ocorrem no problema completo, não foi possível estimar com precisão as condutividades térmicas do ar e do adesivo por meio da solução do problema inverso. No entanto, foi possível prever o comportamento da função dessa propriedade, denunciando as regiões de falha onde há variações consideráveis da função.

Na abordagem 2 foi elaborado um modelo também de baixo custo computacional que reproduzisse apenas a camada superior do problema completo para ser empregado no problema inverso, cuja solução, por sua vez, é a estimativa da função com variação espacial do fluxo de calor imposto na superfície inferior do modelo reduzido. Nos gráficos apresentados nos Casos 7 a 9, as bordas foram desprezadas, uma vez que a estimativa de fluxo de calor em um ponto isolado termicamente não faz sentido do ponto de vista físico e além disso, priori utilizada, a *Total Variation* não regulariza os contornos. Nos 3 casos propostos com o modelo reduzido 2 com diferentes materiais, espessuras das camadas e largura das falhas, a abordagem empregada foi capaz de detectar as regiões de falha, inclusive no caso com duas falhas simultâneas (Caso 9). Apesar de a metodologia proposta ter sido capaz de detectar as regiões de falha com baixo custo computacional, nos Casos 7, 8 e 9 (Figuras 60, 63 e 66), foi observado uma baixa taxa de aceitação das cadeias após alcançar a convergência. Para contornar isso, em problemas futuros propõem-se implementações de técnicas que permitem ajustar a aceitação das cadeias (HAARIO;

SAKSMAN; TAMMINEN, 2001; CUI; O’SULLIVAN, 2011; CUI; MARZOUK; WILLCOX, 2015; CUI; O’SULLIVAN, 2019; FARIA; STUTZ; CASTELLO, 2020; BANTERLE et al., 2019; BANTERLE; GRAZIAN; ROBERT, 2014; LYKKEGAARD et al., 2020).

Além disso, nos resultados (Figuras 33, 38, 42, 44, 49, 53 e 58) nota-se que, embora as falhas estejam evidenciadas, não foi possível estimar com precisão as condutividades térmicas do ar ou do adesivo. Para trabalhos futuros propõe-se o emprego de técnicas como o *Approximation Error Model* (ARRIDGE et al., 2006; TARVAINEN et al., 2012; VARÓN; ORLANDE; ELICABE, 2017; CUI; FOX; O’SULLIVAN, 2018). Esse método consiste em utilizar dados estatísticos obtidos com a solução do problema inverso utilizando modelos reduzidos para formar uma base de dados e estimar erros de modelo com variação espacial e/ou temporal em relação ao problema completo fazendo uma correção dos modelos reduzidos.

## REFERÊNCIAS

- ABREU, L. A. et al. Detection of contact failures with the markov chain monte carlo method by using integral transformed measurements. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 132, p. 486–497, 2018.
- ABREU, L. A. et al. Identification of contact failures in multi-layered composites. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, v. 2, p. 479–487, 2011.
- ABREU, L. A. S. et al. A non-intrusive inverse problem technique for the identification of contact failures in double-layered composites. *The 15th International Heat Transfer Conference*, Begell House, 2014a.
- ABREU, L. A. S. et al. Thermography detection of contact failures in double layered materials using the reciprocity functional approach. *Applied Thermal Engineering*, v. 100, p. 1173–1178, 2016.
- ABREU, L. A. S. et al. Identification of contact failures in multilayered composites with the markov chain monte carlo method. *Journal of Heat Transfer*, v. 136, n. 10, p. 101302–101302, 2014b.
- ALBERTAZZI, A. G.; MENICONI, L. C.; WILLEMANN, D. P. Detecção de falhas de adesão entre mantas poliméricas e dutos usando interferometria de deslocamento lateral. *XXIV CONAEND*, v. 24, 2006.
- ALIFANOV, O. M. Determination of heat loads form a solution of the nonlinear inverse problem. *High Temperature*, v. 15, n. 3, p. 498–504, 1977.
- ALIFANOV, O. M. *Inverse Heat Transfer Problems*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1994.
- AN, C.; SU, J. Improved lumped models for transient combined convective and radiative cooling of multi-layer composite slabs. *Applied Thermal Engineering*, v. 31, n. 14, p. 2508–2517, 2011.
- AN, C.; SU, J. Lumped parameter model for one-dimensional melting in a slab with volumetric heat generation. *Applied Thermal Engineering*, v. 60, n. 1, p. 387–396, 2013.
- AN, C.; SU, J. Lumped models for transient thermal analysis of multilayered composite pipeline with active heating. *Applied Thermal Engineering*, v. 87, p. 749–759, 2015.
- ARRIDGE, S. R. et al. Approximation errors and model reduction with an application in optical diffusion tomography. v. 22, n. 175, 2006.
- BANTERLE, M. et al. Accelerating metropolis-hastings algorithms by delayed acceptance. *Foundations of Data Science*, v. 1, n. 2, p. 103–128, 2019.
- BANTERLE, M.; GRAZIAN, C.; ROBERT, C. P. Accelerating metropolis-hastings algorithms: Delayed acceptance with prefetching. 2014.
- BAYES, T. *An essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances*. [S.l.: s.n.], 1763.



- BECK, J. V.; ARNOLD, K. J. *Parameter Estimation in Engineering and Science*. [S.l.]: Wiley, 1977.
- BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; ST. CLAIR, C. R. *Inverse Heat Conduction: Ill Posed Problems*. [S.l.]: Wiley, 1985.
- CALLISTER JR, W. D.; RETHWISCH, D. G. *Materials Science and Engineering, an Introduction*. 9. ed. [S.l.]: Wiley, 2014.
- CAMPOS VELHO, H. F. Problemas inversos: Conceitos básicos e aplicações. *IV Encontro Nacional de Modelagem Computacional*, Instituto Politécnico, UERJ, Nova Friburgo, RJ, v. 4, 2001.
- CHAWLA, K. K. *Composite Materials, Science and Engineering*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2012.
- CHRISTEN, J. A.; FOX, C. Markov chain monte carlo using an approximation. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 14, n. 4, p. 795–810, 2005.
- CHUNG, D. D. L. *Composite materials for thermal applications*. In: *Composite Materials. Engineering Materials and Processes*. [S.l.]: Springer, 2003.
- COLAÇO, M. J.; ALVES, C. J. S. A fast non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 60, p. 653–663, 2013.
- COLAÇO, M. J.; ALVES, C. J. S.; ORLANDE, H. R. Transient non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 23, n. 4, p. 688–717, 2015.
- COLIN, F.; HEIKKI, H.; ANDRÉS, J. C. Inverse problems in: Damien et al. (e.d.). *Bayesian Theory and Applications [S.I]*. Oxford University Press, p. 619–643, 2013.
- COSTA, D. I. G. *Análise numérica de falhas em materiais compósitos laminados usando um critério baseado em fenômenos físicos*. [S.l.: s.n.], 1997.
- COSTA, D. I. G. *Análise numérica de falhas em materiais compósitos laminados usando um critério baseado em fenômenos físicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2011.
- COTTA, M. R. et al. Unified integral transform algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 63, n. 11, p. 840–866, 2013.
- COTTA, R. M. *Integral transforms in computational heat and fluid flow*. 1st edition. ed. [S.l.]: CRC Press, 1993.
- COTTA, R. M. Benchmark results in computational head and fluid flow: the integral transform method. *Int. J. Heat & Mass Transfer*, v. 37, p. 381–394, 1994.
- COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; NAVEIRA COTTA, C. P. *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. [S.l.]: Springer, 2016.

- COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; QUARESMA, J. N. N. *Analytical Methods in Heat Transfer: Handbook of thermal science and engineering*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017.
- COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; QUARESMA, J. N. N. Analytical methods in heat transfer. *Handbook of Thermal Science and Engineering*, p. 61–126, 2018.
- COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. *Heat Conduction*. 1st edition. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1997.
- CUI, T.; FOX, C.; O’SULLIVAN, M. Adaptive approximation error models for efficient uncertainty quantification with application to multiphase subsurface fluid flow. 2018.
- CUI, T.; MARZOUK, Y.; WILLCOX, K. Data-driven model reduction for the bayesian solution of inverse problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 102, 2015.
- CUI, T.; O’SULLIVAN, M. J. Bayesian calibration of a large-scale geothermal reservoir model by a new adaptive delayed acceptance metropolis hastings algorithm. *Water Resou. Res.*, v. 47, 2011.
- CUI, T.; O’SULLIVAN, M. J. A posteriori stochastic correction of reduced models in delayed acceptance mcmc, with application to multiphase subsurface inverse problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 118, 2019.
- FARIA, D. S.; STUTZ, L. T.; CASTELLO, D. A. Nonlocal viscoelastic euler-bernoulli beam model: a bayesian approach for parameter estimation using the delayed rejection adaptive metropolis algorithm. *Inverse Problems in Science and Engineering*, p. 1–30, 2020.
- GAMERMAN, D.; LOPES, H. F. *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. 2. ed. [S.l.]: Chapman & Hall / CRC, 2006.
- GROSSO, M. et al. Pulsed thermography inspection of adhesive composite joints: computational simulation model and experimental validation. *Composites Part B: Engineering*, v. 106, p. 1–9, 2016.
- GROSSO, M. et al. Evaluating quality of adhesive joints in glass-fiber plastic piping by using active thermal ndt. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, v. 8705, p. 87050T, 2013.
- HAARIO, H.; SAKSMAN, E.; TAMMINEN, J. An adaptive metropolis algorithm. *Bernoulli*, v. 7, n. 2, p. 223 – 242, 2001.
- HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations*. [S.l.]: New Haven, CT: Yale University Press, 1923.
- HASTINGS, W. K. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, Oxford University Press, Biometrika Trust, v. 57, n. 1, p. 97–109, 1970.
- HERMITE, M. C. Sur la formule d’interpolation de lagrange. *J. Crelle*, v. 84, 1878.
- INCROPERA, F. P. et al. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 7. ed. [S.l.]: LTC, 2014.
- KAIPIO, J.; SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems*. 1st edition. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2005.

- KAIPIO, J. P.; FOX, C. The bayesian framework for inverse problems in heat transfer. *Heat Transfer Engineering*, Taylor & Francis, v. 32, n. 9, p. 718–753, 2011.
- KNUPP, D. C. et al. Theoretical–experimental analysis of heat transfer in nonhomogeneous solids via improved lumped formulation, integral transforms and infrared thermography. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 62, p. 71–84, 2012.
- KNUPP, D. C.; NAVEIRA-COTTA, C. P.; COTTA, R. M. Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 39, n. 3, p. 355–362, 2012.
- KNUPP, D. C. et al. Experimental identification of thermophysical properties in heterogeneous materials with integral transformation of temperature measurements from infrared thermography. *Experimental Heat Transfer*, v. 26, n. 1, p. 1–25, 2013.
- KOSHLyakOV, N. S. Fundamental differential equations of mathematical physics. *ONTI*, 1936.
- LAPLACE, P. S. *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements*. [S.l.: s.n.], 1774.
- LAPLACE, P. S. *Théorie analytique des probabilités*. [S.l.: s.n.], 1812.
- LYKKEGAARD, M. B. et al. *Multilevel Delayed Acceptance MCMC with an Adaptive Error Model in PyMC3*. 2020.
- MAGALHãES, M. C. F. *Uso do modelo do erro de aproximação para estimativa de fluxo de calor na usinagem por brunimento*. Dissertação (Mestrado) — COPPE - UFRJ, 2014.
- MASCOUTO, F. S. et al. Detection of contact failures employing combination of integral transforms with single- domain formulation, finite differences, and bayesian inference. *Numerical Heat Transfer, Parte A: Applications*, v. 77, p. 599–618, 2020.
- MENNIG, J.; AUERBACH, T.; HãLG, W. Two point hermite approximation for the solution of linear initial value and boundary value problems. *Com. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v. 36, p. 199–224, 1983.
- MEOLA, C. *Infrared Thermography Recent Advances and Future Trends*. [S.l.]: Bentham Books, 2012.
- MEOLA, C.; CARLOMAGNO, G. M. Recent advances in the use of infrared thermography. *Measurement Science and Technology*, v. 15, n. 9, 2004.
- METROPOLIS, N. et al. Equations of state calculations by fast computing machine. *J. Chem. Phys.*, College Park, v. 21, p. 1087–1091, 1953.
- MIKHAILOV, M. D.; OZISIK, M. N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. 1st edition. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1994.
- MOTA, C. A. A. et al. Bayesian estimation of temperature-dependent thermophysical properties and transient boundary heat flux. *Heat Transfer Engineering*, v. 31, n. 7, p. 570–580, 2010.
- OLIVEIRA, A. P.; ORLANDE, H. R. B. Estimation of the heat flux at the surface of ablating materials by using temperature and surface position measurements. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 12, n. 5, p. 563–577, 2004.

ORLANDE, H. R. B. Inverse problems in heat transfer: New trends on solution methodologies and applications. *Journal of Heat Transfer*, v. 134, n. 3, p. 31011–31011, 2012.

ORLANDE, H. R. B. T7: The use of techniques within the bayesian framework of statistics for the solution of inverse problems. *Advanced School: Thermal Measurements & Inverse Techniques*, v. 6, 2015.

ORLANDE, H. R. B. et al. Problemas inversos em transferência de calor. *SBMAC. Notas em Matemática Aplicada*, v. 51, 2010.

ORLANDE, H. R. B.; COLAÇO, M. J.; DULIKRAVICH, G. S. Approximation of the likelihood function in the bayesian technique for the solution of inverse problems. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 16, n. 6, p. 677–692, 2008.

ORLANDE, H. R. B.; DULIKRAVICH, G. S.; COLAÇO, M. J. Application of bayesian filters to heat conduction problems. *International Conference on Engineering Optimization*, 01 2008.

ORLANDE, H. R. B. et al. Accelerated bayesian inference for the estimation of spatially varying heat flux in a heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 65, n. 1, p. 1–25, 2014.

ORLANDE, H. R. B.; FUDYM, O. Thermophysical properties measurement and identification. *Handbook of Thermal Science and Engineering*, Springer International Publishing, p. 179–218, 2018.

ORLANDE, H. R. B.; OZISIK, M. N. Inverse problem of estimating interface conductance between periodically contacting surfaces. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 7, n. 2, p. 319–325, 1993.

ORLANDE, H. R. B.; OZISIK, M. N. *Inverse Heat Transfer : Fundamentals and Applications*. 2. ed. [S.l.]: Taylor & Frances, 2021.

OZISIK, M. N. *Basic Heat Transfer: A basic approach*. 9. ed. [S.l.]: R. E. Krieger Pub. Co., 1987.

OZISIK, M. N. *Heat Conduction*. 2nd edition. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.

OZISIK, M. N.; ORLANDE, H. R. B. *Inverse Heat Transfer*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2000.

PEREIRA, J. C. Curso de projeto estrutural com materiais compostos. Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, 2002.

PEREIRA, N. d. S. *Estimativa do fluxo de calor em ferramentas de brunimento: método de Monte Carlo com Cadeia de Markov*. Dissertação (Mestrado) — COPPE - UFRJ, 2012.

PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. 3. ed. [S.l.]: CRC Press, 2013.

QUIROZ, M. et al. Speeding up mcmc by delayed acceptance and data subsampling. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, v. 27, n. 1, p. 12–22, 2018.

REGIS, C. R.; COTTA, R. M.; SU, J. Improved lumped analysis of transient heat conduction in a nuclear fuel rod. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 27, n. 3, p. 357–366, 2000.

SILVER, N. *The Signal and The Noise*. [S.l.]: Penguin Press, 2012.

SPHAIER, L. A.; SU, J.; COTTA, E. M. Macroscopic heat conduction formulation. *Handbook of Thermal Science and Engineering*, Springer International Publishing, p. 3–59, 2018.

SU, G.; TAN, Z.; SU, J. Improved lumped models for transient heat conduction in a slab with temperature-dependent thermal conductivity. *Applied Mathematical Modelling*, v. 33, n. 1, p. 274–283, 2009.

SU, J. Improved lumped models for asymmetric cooling of a long slab by heat convection. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 28, n. 7, p. 973–983, 2001.

SU, J. Improved lumped models for transient radiative cooling of a spherical body. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 31, n. 1, p. 85–94, 2004.

SU, J.; COTTA, R. M. Improved lumped parameter formulation for simplified 1wr thermohydraulic analysis. *Annals of Nuclear Energy*, v. 28, n. 10, p. 1019–1031, 2001.

SYVERSVEEN, A. R. Noninformative bayesian priors. interpretation and problems with construction and applications. 1998.

TAN, Z.; SU, G.; SU, J. Improved lumped models for combined convective and radiative cooling of a wall. *Applied Thermal Engineering*, v. 29, p. 2439–2443, 2009.

TARVAINEN, T. et al. Utilising approximation error modelling in linear reconstruction in diffuse optical tomography. 2012.

TIKHONOV, A. N.; ARSENN, V. I. *Solutions of Ill-Posed Problems*. [S.l.]: Winston, distributed solely by Halsted Press, 1977.

VARÓN, L. B.; ORLANDE, H.; ELICABE, G. Approximation error model for state estimation in the radiofrequency hyperthermia treatment of cancer. p. 3075–3086, 2017.

WANG, J.; ZABARAS, N. A bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 47, n. 17, p. 3927–3941, 2004.

WANG, J.; ZABARAS, N. Hierarchical bayesian models for inverse problems in heat conduction. *Inverse Problems*, v. 21, p. 183–206, 2005.

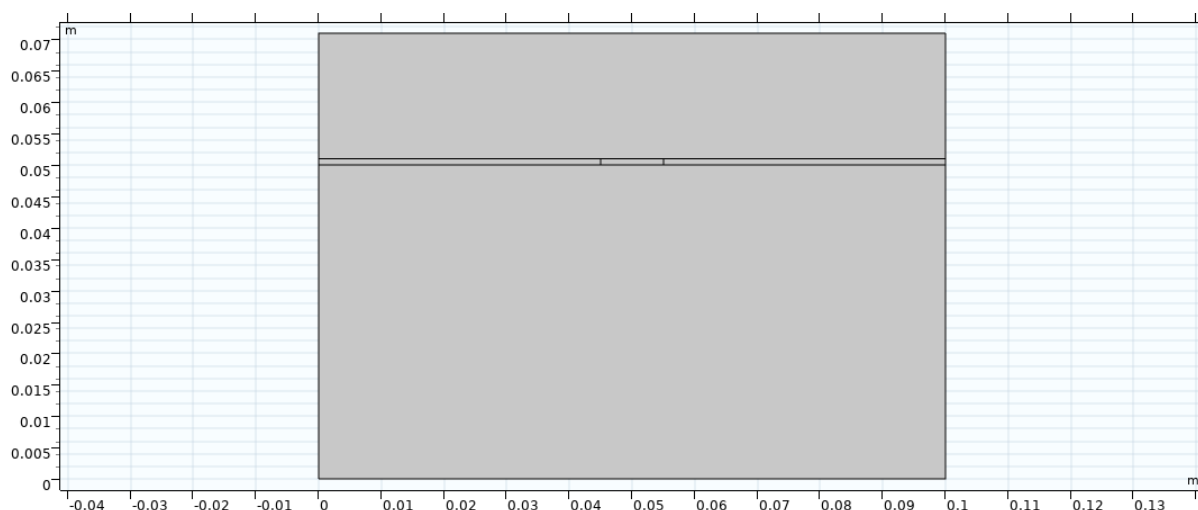
WATANABE, E.; ABREU, L. A. S.; KNUPP, D. C. Análise teÓrico experimental de fluxo térmico com variaÇão espacial empregando inferÊncia bayesiana e imagens termogrÁficas. *Encontro Nacional de Modelagem Computacional*, v. 21, 2018.

## APÊNDICE A

### Modelo Completo via COMSOL

A Figura 68 mostra a geometria criada no COMSOL. No início do programa foi selecionada a opção de estudo de transferência de calor em sólidos (*Heat Transfer in Solids*) com dependência temporal (*Time Dependent*). Optou-se por espessuras das camadas do material A e B, de acordo com a Figura 1, iguais a, respectivamente, 5 cm e 2 cm, com largura de 10 cm. A espessura da região do adesivo é igual a 1 mm e a falha se localiza no centro dessa camada e possui uma largura de 1 cm.

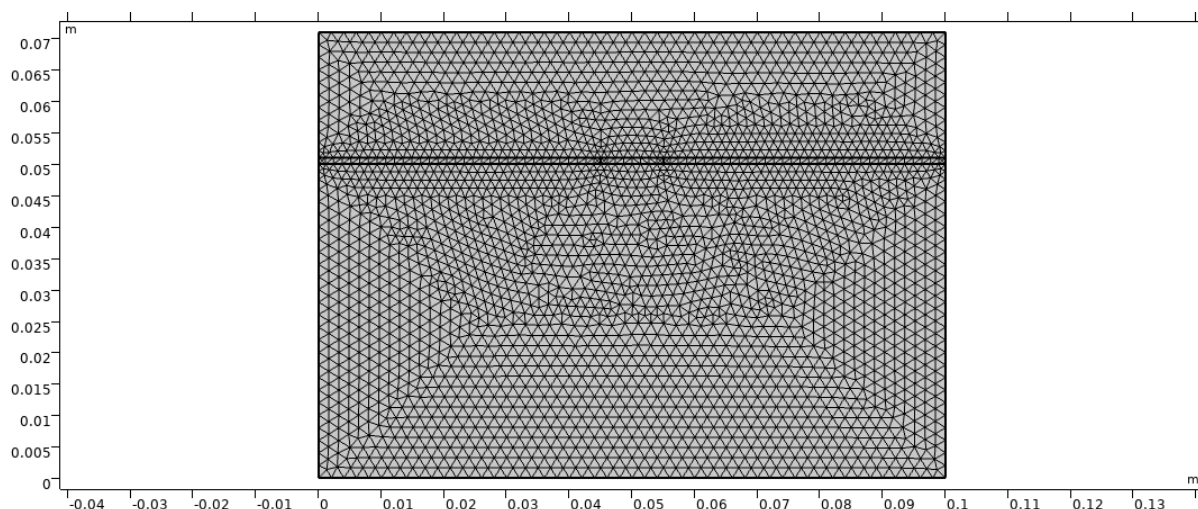
Figura 68 - Representação da geometria criada no COMSOL.



Fonte: O autor, 2021.

Na criação da malha foi escolhida a opção *Extra fine*, que gerou 5470 elementos de domínio e 326 elementos de contorno. A malha gerada está apresentada na Figura 69. Observe a maior quantidade de elementos em torno da camada do adesivo.

Figura 69 - Representação da malha gerada no COMSOL.



Fonte: O autor, 2021.

### Formulação via *NDSolve*

A função `NDSolve` do Mathematica é uma ferramenta que permite resolver equações diferenciais parciais utilizando o método de elementos finitos. Com o pacote "FEM", carregado com o comando `Needs["NDSolve`FEM`"]`, é possível controlar algumas partes do processo de solução, como o método de discretização espacial e tamanho das células da malha.

Primeiro, definem-se as funções com variação espacial da condutividade térmica ( $k(x, y)$ ) e do produto entre a massa específica e o calor específico ( $w(x, y) = \rho(x, y) \cdot c_p(x, y)$ ) expressas pelas Eqs. (7) e (8):

```
k[x_, y_] = Piecewise[ka, y <= ly1, kad, ly1 < y <= ly2 && (x < lx1
||
x > lx2), kar, ly1 < y <= ly2 && lx1 <= x <= lx2, kb, ly2 < y <=
Ly];
```

```
w[x_, y_] = Piecewise[wa, y <= ly1, wad, ly1 < y <= ly2 && (x < lx1
||
x > lx2), war, ly1 < y <= ly2 && lx1 <= x <= lx2, wb, ly2 < y <=
Ly];
```

A seguir, monta-se a equação do problema com as condições de contorno:

```
eq = w[x, y] D[T[x, y, t], t] == D[kint[x, y] D[T[x, y, t], x], x]
+
D[kint[x, y] D[T[x, y, t], y], y] + NeumannValue[0., x == Lx] +
NeumannValue[0., x == 0] + NeumannValue[q, y == 0] -
NeumannValue[h (T[x, y, t] - Tinf), y == Ly];
```

Em seguida, cria-se a malha com a região do domínio:

```
R = ImplicitRegion[0 <= x <= Lx && 0 <= y <= Ly, x, y];
```

Por fim, chama-se a função `NDSolve`:

```
Tn[x_, y_, t_] = NDSolveValue[{eq, T[x, y, 0] == Tini}, T[x, y, t],
{t, 0, tf},
{x, y} ∈ R, Method -> {"MethodOfLines", "SpatialDiscretization" ->
{"FiniteElement", "MeshOptions" -> {"MaxCellMeasure" -> mc }}}];
```

O valor de `mc` da opção `MaxCellMeasure` indica o valor máximo de um elemento finito da malha gerada. A solução obtida é a função  $T_n[x, y, t]$  que vale para o domínio da delimitado pela região  $R$  e para o intervalo de tempo  $[0, t_f]$ , definido pela expressão  $\{t, 0, t_f\}$  no código.

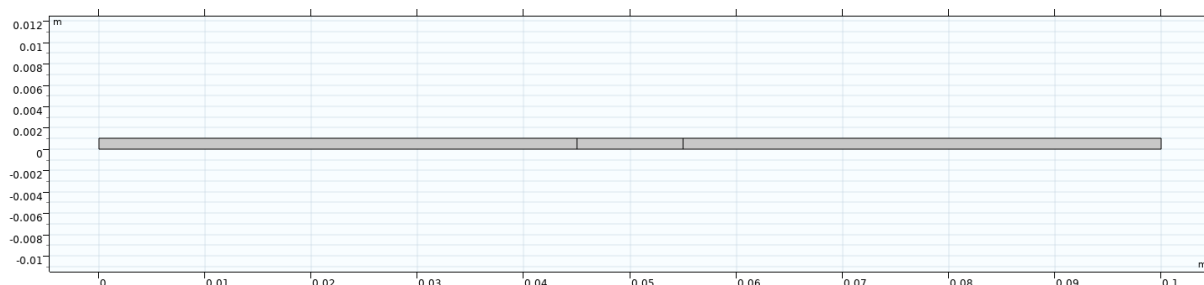


## APÊNDICE B

### Modelo Reduzido 1 via COMSOL

A Figura 70 mostra a geometria do modelo reduzido 1 criada no COMSOL. No início do programa foi selecionada a opção de estudo de transferência de calor em sólidos (*Heat Transfer in Solids*) com dependência temporal (*Time Dependent*). A espessura da região do adesivo é igual a  $1\text{ mm}$  com uma falha localizada no centro dessa camada com largura igual a  $1\text{ cm}$ .

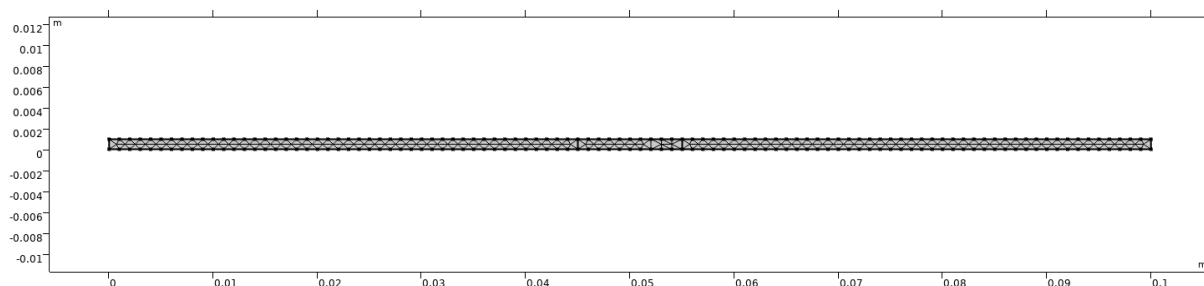
Figura 70 - Representação da geometria do modelo reduzido 1 criada no COMSOL.



Fonte: O autor, 2021.

Na criação da malha foi escolhida a opção *Extremely fine*, que gerou 398 elementos de domínio e 204 elementos de contorno. A malha gerada está apresentada na Figura 71.

Figura 71 - Representação da malha do modelo reduzido 1 gerada no COMSOL.



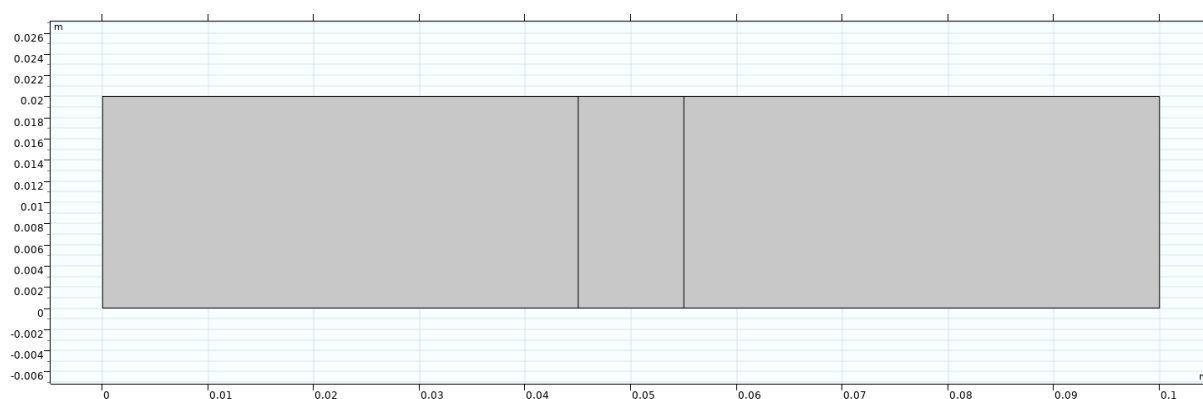
Fonte: O autor, 2021.

A formulação via *NDSolve* é a mesma apresentada no Apêndice A para o modelo completo, bastando adaptar as dimensões da geometria para este modelo, graças à formulação em domínio único, e as condições de contorno.

## Modelo Reduzido 2 via COMSOL

A Figura 72 mostra a geometria do modelo reduzido 2 criada no COMSOL. No início do programa foi selecionada a opção de estudo de transferência de calor em sólidos (*Heat Transfer in Solids*) com dependência temporal (*Time Dependent*). A espessura é igual a 2 cm. A região destacada no centro da geometria serve para indicar que ali o fluxo de calor sofre uma variação devido à falha de contato.

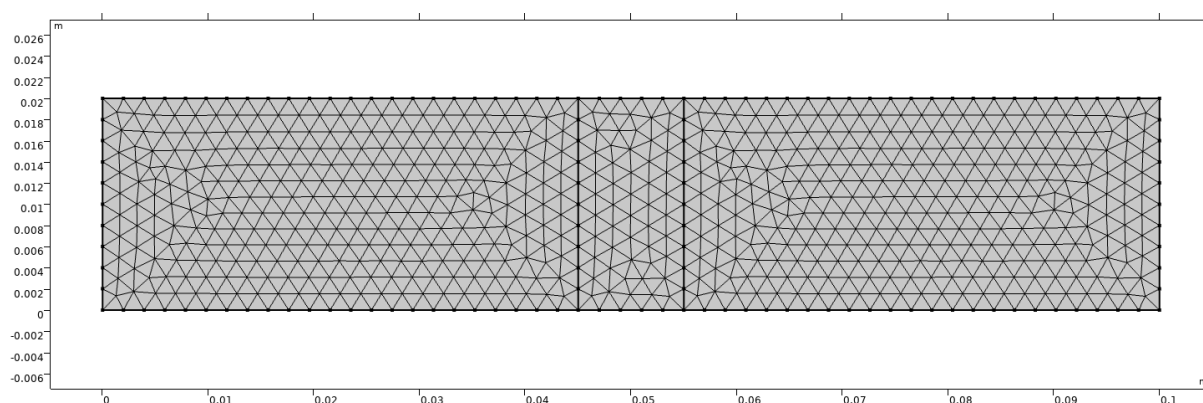
Figura 72 - Representação da geometria do modelo reduzido 2 criada no COMSOL.



Fonte: O autor, 2021.

Na criação da malha foi escolhida a opção *Extra fine*, que gerou 1324 elementos de domínio e 142 elementos de contorno. A malha gerada está apresentada na Figura 73.

Figura 73 - Representação da malha do modelo reduzido 2 gerada no COMSOL.



Fonte: O autor, 2021.

A formulação via *NDSolve* é a mesma apresentada no Apêndice A para o modelo completo, bastando adaptar as dimensões da geometria para este modelo, graças à formulação em domínio único, e as condições de contorno.