Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro Lima

Técnicas de Contagem: do Princípio Fundamental da Contagem às Funções Geradoras

Rio de Janeiro

2021

Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro Lima

Técnicas de Contagem: do Princípio Fundamental da Contagem às Funções Geradoras

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Afonso Olivares Jara

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

L732 Lima, Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro

Técnicas de contagem: do princípio fundamental da contagem às funções geradoras / Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro Lima. – 2021.

112 f. : il.

Orientador: Roberto Afonso Olivares Jara.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Análise combinatória – Teses. 2. Funções geradoras – Teses. I. Jara, Roberto Afonso Olivares. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 519.1

Patrícia Bello Meijinhos – CRB7- 5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro Lima

Técnicas de Contagem: do Princípio Fundamental da Contagem às Funções Geradoras

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 09 de abril de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Roberto Afonso Olivares Jara (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Patrícia Nunes da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Fábio Xavier Penna
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro
2021

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, que mesmo sem terem tido oportunidades, souberam da importância da educação na vida dos filhos e foram meus maiores incentivadores.
Em especial à minha mãe, elo ser humano que é.

AGRADECIMENTOS

Agradeço,

à minha família, por ter me dado condições de chegar até aqui;

aos meus professores, que foram fundamentais nesse processo, por meio de seus conhecimentos e orientações;

ao meu orientador, Roberto Afonso Olivares Jara, por aceitar me orientar, tendo feito contribuições fundamentais para o texto além de partilhar comigo seus conhecimentos e o prazer pela descoberta matemática, tão importante e que nos norteia;

aos meus colegas de trabalho, por compartilharem o amor pela educação e tornarem a jornada de sala de aula mais gratificante;

aos meus alunos, que de alguma forma sempre me ensinam que a minha profissão vai muito além da sala de aula e de levar informações, mas trata-se de conhecer da história de cada ser humano, de respeitar as suas particularidades e necessidades, além de descobrir o quão importante e marcante um professor pode ser na vida e no futuro de seus alunos;

e, em especial, à minha mãe, Eveline Vilma Gonçalves Lima, que tanto me apoiou e me incentivou durante esse período de dedicação em que me ausentei por diversas vezes.

Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.
Fernando Pessoa – Ricardo Reis

RESUMO

LIMA, Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro. *Técnicas de Contagem:* do Princípio Fundamental da Contagem às Funções Geradoras. 2021. 112f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

No primeiro capítulo é feito um relato histórico do assunto estudado, para que seja possível localizar-se no tempo e ter conhecimento dos principais personagens envolvidos, para então, ao final, as técnicas de contagem mais básicas comecem a ser trabalhadas, dando os fundamentos para todo o restante do texto. Já no segundo capítulo, técnicas de contagem decorrentes das iniciais começam a ser demonstradas e desenvolvidas, de forma gradual, como numa sequência de raciocínios dedutivos, sendo todas elas motivadas por meio de exemplos e situações práticas, partindo desde o Princípio Fundamental de Contagem até técnicas mais complexas que envolvem o Princípio da Reflexão, os Números de Catalan, caminhos de Dyck e o teorema de Chung-Feller. Dando continuidade, o terceiro capítulo explora o Triângulo de Pascal com todos os seus principais teoremas associados. Os números binomiais são definidos e estendidos para valores negativos e até racionais, o que terá grandes consequências no restante do texto e inclusive para os cálculos de somatórios, que começam a ser desenvolvidos ainda no mesmo capítulo. No capítulo de número quatro, os conceitos de desenvolvimento de um binômio são trabalhados e expandidos, como em um polinômio de Leibniz. E, indo além, são introduzidas as Funções Geradoras e a técnica de caçar coeficientes, passando a ter agora uma posição de maior destaque no texto por se tratar de poderosa ferramenta nas resoluções de problemas até então não comportados pelos métodos anteriores. Na sequência, não poderiam faltar as recorrências, assunto amplamente desenvolvido no quinto capítulo, em que não apenas as técnicas de resolução são formalmente demonstradas como também uma gama de aplicações e casos da história da Análise Combinatória são contextualizados e resolvidos por meio dos métodos mostrados. Por fim, no capítulo seis culminam todas as técnicas de contagem e métodos de resolução de problemas de contagem anteriores. Permeando as relações de recorrência, somadas às técnicas demonstradas anteriormente, as Funções Geradoras mostram-se capazes de solucionar problemas de contagem avançados e complexos, como partições e triangulações.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Técnicas de Contagem. Números de Catalan. Relações de Recorrências. Funções Geradoras.

ABSTRACT

LIMA, Claudio Gustavo Gonçalves Loureiro. *Counting Techniques: From the Fundamental Principle of Counting to Generating Functions*. 2021. 112f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

In the first chapter, a historical report of the studied subject is made, so that it is possible to locate yourself in time and have knowledge of the main characters involved, and then, at the end, the most basic counting techniques begin to be worked on, giving the foundations for all the rest of the text. In the second chapter, counting techniques resulting from the initials begin to be demonstrated and developed, gradually, as in a sequence of deductive reasoning, all of which are motivated through examples and practical situations, starting from the Fundamental Counting Principle to techniques more complex ones involving the Principle of Reflection, the Catalan Numbers, Dyck paths and the Chung-Feller theorem. Continuing, the third chapter explores the Pascal Triangle with all its main associated theorems. Binomial numbers are defined and extended to negative and even rational values, which will have great consequences in the rest of the text and even for the sum calculations, which are beginning to be developed in the same chapter. In chapter number four, the concepts of developing a binomial are worked out and expanded, as in a Leibniz polynomial. And, going further, the Generating Functions and the technique of hunting coefficients are introduced, now having a more prominent position in the text because it is a powerful tool in the resolution of problems hitherto not supported by the previous methods. In the sequence, there could be no lack of recurrences, a subject widely developed in the fifth chapter, in which not only the resolution techniques are formally demonstrated, but also a range of applications and cases in the history of Combinatorial Analysis are contextualized and resolved through the methods shown. Finally, in chapter six, all the counting techniques and methods of solving previous counting problems culminate. Permeating the recurrence relations, added to the techniques previously demonstrated, the Generating Functions are able to solve advanced and complex counting problems, such as partitions and triangulations.

Keywords: Combinatorial Analysis. Counting Techniques. Catalan Numbers. Recurrence Relations. Generating Functions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Manuscrito dos *Elementos*, escrivo por volta de 300 a.C., a obra contém 13 livros e trata de diversos ramos da Matemática, como Álgebra, Geometria e Aritmética.. 13
Figura 2 – Girolamo Cardano, nascido em 24 de setembro de 1501 em Paiva e falecido em 21 de setembro com 74 anos de idade.. 14
Figura 3 – O triângulo de Yang Hui foi publicado na China, em 1303... 15
Figura 4 – Gottfried Leibniz (1646 – 1716), à esquerda, e, ao lado direito da imagem, está seu caderno de anotações, onde é possível identificar alguns símbolos desenvolvidos por ele para o Cálculo Diferencial... 16
Figura 5 – Permutação circular de 5 pessoas ao redor da mesa.................................. 24
Figura 6 – Princípio da Reflexão: exemplo de trajetória.. 36
Figura 7 – Princípio da Reflexão 2: exemplo de trajetória.. 39
Figura 8 – Caminhos de Dyck.. 40
Figura 9 – Exemplo da 2ª forma dos caminhos de Dyck.. 41
Figura 10 – Caminho $D = BuAdC$.. 42
Figura 11 – Caminho $D' = AdBuC$.. 42
Figura 12 – Exemplo de equivalência entre $D_{3,0}$ e $D_{3,3}$.. 43
Figura 13 – Representação do jogo Torre de Hanói... 78
Figura 14 – Teorema das diagonais invertidas do Triângulo de pascal........................ 86
Figura 15 – Número de triangulações para $n = 3$... 101
Figura 16 – Número de triangulações para $n = 4$... 101
Figura 17 – Número de triangulações para $n = 5$... 102
Figura 18 – Número de triangulações para $n = 6$... 102
Figura 19 – Número de triangulações para $n = 7$... 102
Figura 20 – Triangulações de um hexágono a partir de um de seus lados..................... 103
Figura 21 – Exemplo de relação entre P_8 e T_9.. 108
Figura 22 – Exemplo de relação entre P_7 e T_8.. 108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Árvore de possiblidades para o lançamento de 3 moedas.......... 17
Tabela 2 – Princípio Fundamental de Contagem: demonstração.......... 18
Tabela 3 – O Triângulo de Pascal.......... 45
Tabela 4 – Triângulo de Pascal com os resultados das combinações.......... 46
Tabela 5 – A Relação de Stifel.......... 47
Tabela 6 – Teorema das linhas.......... 47
Tabela 7 – Teorema das colunas.......... 49
Tabela 8 – Teorema das diagonais.......... 50
Tabela 9 – Triângulo de Pascal estendido 1.......... 55
Tabela 10 – Triângulo de Pascal estendido 2.......... 55
Tabela 11 – Relação entre os números de Catalan e de triangulações.......... 102
Tabela 12 – Relação entre os números de Catalan e o número de modos de se colocar parênteses.......... 106

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	**FUNDAMENTOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA**	13
1.1	**Introdução histórica**	13
1.2	**Conceitos iniciais**	17
1.3	**Princípio Fundamental de Contagem (Princípio Multiplicativo)**	18
1.4	**Fatorial de um número natural**	21
1.5	**Permutação**	22
1.6	**Arranjo**	24
1.7	**Combinação**	25
2	**MÉTODOS AVANÇADOS DE CONTAGEM**	28
2.1	**Lemas de Kaplansky**	28
2.2	**O Princípio de Dirichlet**	30
2.3	**O Princípio da Inclusão – Exclusão**	31
2.4	**O Princípio da Reflexão**	35
2.5	**Os Números de Catalan**	37
2.6	**Caminhos de Dyck**	39
3	**CÁLCULO DE SOMATÓRIOS E OS NÚMEROS BINOMIAIS**	44
3.1	**Cálculo de somatórios – Notação Sigma**	44
3.2	**O Triângulo de Pascal**	45
3.3	**Binômio de Newton**	51
3.4	**Definição geral de coeficientes binomiais**	53
3.5	**Somatórios de expressões polinomiais**	57
4	**POLINÔMIO DE LEIBNIZ E FUNÇÕES GERADORAS**	59
4.1	**Polinômio de Leibniz**	59
4.2	**Introdução às funções geradoras**	61
4.3	**Definição de função geradora**	63
4.4	**Determinação de coeficientes de funções geradoras**	64
4.5	**Função geradora exponencial**	69
5	**TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE RECORRÊNCIAS LINEARES**	74
5.1	**Introdução às relações de recorrências**	74

5.2 **Recorrências lineares de 1ª ordem**.. 75
5.3 **Recorrências lineares de 2ª ordem**.. 81
5.4 **Recorrências lineares de ordem k**... 88
6 **TÉCNICAS AVANÇADAS EM SOMATÓRIOS, FUNÇÕES GERADORAS E RECORRÊNCIAS LINEARES**... 92
6.1 **Princípio da somação por partes**.. 92
6.2 **Usando funções geradoras para resolução de relações de recorrência lineares**. 94
6.3 **Partições**.. 97
6.4 **Triangulações de um polígono convexo**.. 101
6.5 **Número de maneiras de colocar parênteses num produto ordenado com n fatores**.. 105
CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 109
REFERÊNCIAS... 111

INTRODUÇÃO

Desde crianças, de acordo com nossas experiências e vivências, adquirimos espontaneamente a noção de contagem, ou seja, a ideia ou abstração de relacionar quantidades. Ainda que a princípio apenas por meio de uma noção de ordem, de que algo é maior ou menor, até que então, aos poucos, se torne uma ideia de quantidade e a partir dela passamos a usar os dedinhos para relacionar quantidades de objetos.

Se a Análise Combinatória surge assim, naturalmente, na infância, em meio a brincadeiras e concomitante ao processo de descoberta do mundo e aquisição da linguagem, por que motivo não se desenvolve ao longo da vida escolar do futuro aluno? Segundo Vigotsky (1984, p. 97):

> A brincadeira cria para as crianças uma "zona de desenvolvimento proximal" que não é outra coisa senão a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela capacidade de resolver independentemente um problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de um problema sob a orientação de um adulto ou com a colaboração de um companheiro mais capaz.

Portanto, a noção de número e a ideia de contagem surge para a criança em seus jogos, como uma brincadeira, mas que precisa ser estimulada e desenvolvida, para ganhar, gradativamente, mais profundidade, desenvolvendo assim seu raciocínio lógico-quantitativo. No entanto, se a resposta para tal pergunta é assim tão simples, até mesmo previsível, e continuamos a nos deparar com uma realidade em geral insistentemente adversa, outros motivos e diversos fatores e circunstâncias precisam ser analisados para dar uma solução mais consistente, mais efetiva.

O presente texto não tem a pretensão de dar a solução final para tal problema, mas apenas a de colaborar com a resolução de um dos seus aspectos. Ao longo de alguns anos lecionando para diversas faixas etárias em turmas de Ensino Fundamental e de Ensino Médio, além de preparatórios para vestibular e militar, pude notar nos alunos dos mais diversos segmentos a mesma dificuldade de resolver problemas de contagem, o que desde o início soou contraditório para mim, uma vez que a ideia de contagem, como foi levantado, surge desde muito cedo. Em muitos casos as técnicas de contagem se resumem a fórmulas, em que os alunos se preocupam mais em memorizá-las a entendê-las e, dessa forma, ao invés de dar uma explicação reducionista para esse fato simplesmente culpando aos próprios alunos pelo desinteresse, passei a investigar e observar as suas origens.

Diante de uma atitude paradigmática, foi possível constatar que a postura dos alunos é uma consequência de vários anos de abordagens errôneas, falhas no processo educacional e despreparo de boa parte dos professores. Longe de querer abordar a estrutura por detrás não apenas de alunos, mas também presente no Ensino Superior e na formação de professores, o presente ensaio visa a oferecer aos professores, educadores e demais interessados um conjunto de informações, de conhecimentos e de técnicas de contagem, desde as mais simples até algumas mais avançadas, expostas de modo claro, didático e além de matematicamente formalmente apresentadas junto às respectivas demonstrações, em que as fontes bibliográficas são consagrados textos da área de Análise Combinatória e Matemática Discreta. Sendo assim, o professor interessado em se aprofundar e adquirir conhecimentos mais avançados em seu objeto de estudos, possuindo tempo escasso, irá encontrar no presente texto rica fonte de conhecimentos, fruto de grande pesquisa e seleção de livros-texto, repleto de exemplos, de modo a tornar suas aulas ainda melhores e a fornecer, além de tudo, um passeio pela História da Análise Combinatória, seus principais personagens e algumas curiosidades.

Em artigo publicado na *Revista do Professor de Matemática*, edição de número 10, intitulado *"Dez Mandamentos para Professores"*, o matemático Elon Lages Lima faz a seguinte apresentação de George Pólya:

> George Pólya (1887 + 98 = 1985) nasceu em Budapest, Hungria, foi professor em Zurich de 1914 a 1940 e depois em Stanford, Estados Unidos, onde se aposentou em 1953 mas continuou ativo até praticamente sua morte, quase centenário. Pólya foi coautor de um notável livro, escrito juntamente com seu compatriota Gabor Szegõ, intitulado "Aufgaben und Lehrsãtze aus der Analysis" (Berlim, 1924) depois traduzido para o inglês com o título "Problems and Theorems in Analysis" (Berlim, 1972). Neste texto, em dois alentados volumes, os autores mostram como o ensino da Análise Matemática pode ser gradativamente desenvolvido, dos fundamentos até algumas fronteiras do conhecimento, através de uma judiciosa sequência de exercícios e problemas, alguns dotados de suprema elegância.
>
> Pólya escreveu outros livros e inúmeros artigos originais, que lhe deram sólida reputação em Análise Clássica, Combinatória e Probabilidades. Suas obras completas, em 4 volumes, foram publicadas em 1984 pela MIT Press. Nos últimos quarenta anos de sua longa carreira, passou a interessar-se pelo ensino da Matemática, dedicando-se quase inteiramente ao estudo das questões referentes à transmissão do conhecimento matemático. A esse respeito escreveu muitos artigos e alguns livros extraordinários, como "How to Solve It" (traduzido para o português como "A Arte de Resolver Problemas"), "Mathematics and Plausible Reasoning" (Princeton Univ. Press, 1954) e "Mathematical Discovery" (2 vols., Wiley, 1962 e 1965).
>
> O trabalho de Pólya sobre o ensino da Matemática é maravilhoso simplesmente porque não propõe truques, fórmulas miraculosas, ou muito menos pomposas teorias pseudo-psicológicas. O artigo que reproduzimos a seguir, de uma espontaneidade e de uma franqueza quase rudes, resume suas idéias de modo bastante claro.
>
> Após anos de experiência como matemático de grande destaque e professor universalmente reconhecido por seus dotes de mestre, Pólya sintetiza suas conclusões em dez mandamentos e uma regra muito simples para treinar professores que saibam seguir esses mandamentos.
>
> Para ser um bom professor de Matemática, você tem que vibrar com a sua matéria, conhecer bem o que vai ensinar, ter um bom relacionamento com os alunos para entender os problemas deles e dar a esses alunos a oportunidade de (pelo menos algumas vezes) descobrir as coisas por si mesmos. Deve ainda entender que "know-how" é mais importante do que informação. (Pólya lhe dirá no texto o que entende por "know-how".) E, para treinar professores a fim de que possam cumprir sua tarefa, o melhor a fazer é praticar com ele a arte de resolver problemas. Estou certo de que a leitura do artigo que se segue e, mais ainda, a releitura seguidas vezes, a meditação sobre o mesmo e a adoção dos princípios nele expostos, muito contribuirão para melhorar a qualidade das nossas aulas de Matemática.

O matemático Pólya, além de pesquisador renomado e com reconhecidos conhecimentos na área de Matemática Discreta, dentre outras áreas, também se dedicou com afinco à importante tarefa de preparar professores, pois por meio de educadores melhor preparados toda a estrutura e processo educacionais podem ser potencialmente incrementados e melhorados. Por ver na Matemática a posição central que possui a resolução de problemas e as suas técnicas, desenvolvendo, portanto, a heurística, foi autor de diversos livros discorrendo sobre o assunto e, entre eles, talvez o mais famoso seja *"A Arte de Resolver Problemas"*.

Como resultado de suas experiências na preparação de professores, consequência de suas aulas e observações, desenvolveu o que chamou de *mandamentos* para os professores de Matemática, dando o nome do artigo supracitado:

> 1. Tenha interesse por sua matéria.
> 2. Conheça sua matéria.
> 3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.
> 4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
> 5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
> 6. Faça-os aprender a dar palpites.
> 7. Faça-os aprender a demonstrar.
> 8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
> 9. Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
> 10. Sugira; não os faça engolir à força.

Norteado pelos mandamentos e os princípios de Pólya, o texto busca, em seus seis capítulos, conciliar formalismo e intuição, demonstrações e exemplificações, teoria e prática, além de procurar dar ao assunto tratado a abordagem que lhe é própria, levando em consideração suas particularidades e pretendendo, como objetivo complementar, apresentar de forma acessível assuntos que servem de introdução aos que buscam conhecimentos ainda mais avançados.

1 **FUNDAMENTOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA**

Antes de começarmos com as técnicas de combinatória propriamente ditas, um breve relato histórico é feito e, sem a pretensão de esgotar o assunto, um pouco da vida e da história de seus principais personagens é contada.

Então, em seguida, são dadas as definições iniciais para que os métodos básicos de contagem sejam introduzidos, formando os fundamentos que darão suporte para os tópicos que virão em frente.

1.1 **Introdução histórica**

A História do desenvolvimento da Análise Combinatória está associada ao próprio progresso da Matemática e aos principais matemáticos ao longo dos tempos, sendo assunto demasiado extenso. Para se ter uma ideia, desde o século III já há relatos de que conheciam a relação $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Um dos primeiros matemáticos a se preocupar em compilar, organizar e dar um formalismo maior a todo conhecimento da Matemática até a sua época foi Euclides. Pouco se sabe a respeito de sua origem e de sua própria trajetória, mas é muito provável que tenha tido formação na Academia de Platão (fundada por volta de 387 a.C.), na Grécia, a primeira universidade a qual se tem relatos, aonde era possível obter uma educação formal. Foi professor no famoso Museu de Alexandria, tendo ensinado a nobres e imperadores, e, por volta de 300 a.C., escreveu os 13 volumes de *Elementos*, organizando todo o conhecimento de Álgebra, Geometria e Aritmética por meio de quatrocentos e sessenta e cinco proposições ou axiomas.

Figura 1 - Manuscrito dos *Elementos*, escrivo por volta de 300 a.C., a obra contém 13 livros e trata de diversos ramos da Matemática, como Álgebra, Geometria e Aritmética

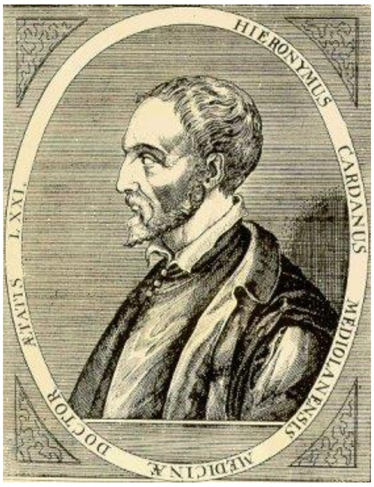
Fonte: https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/GH/H_2.htm

Pela relevância dada à Geometria ao longo do tratado e por conta de seus postulados e axiomas, a Geometria Plana é também chamada de Geometria Euclidiana. Porém, um dos problemas de contagem mais antigos, que é o de desenvolver a expressão $(1+x)^n$, tem o caso $n=2$ presente nos *Elementos*. (MORGADO, 2016).

Bháskara Akari, ou simplesmente Bháskara, foi um notável matemático hindu a se dedicar ao estudo dos métodos de contagem. Viveu no século XII, de 1114 a 1185 e foi tido como um gênio desde cedo, dedicando-se ao estudo da Matemática e da Astronomia, assumiu um dos mais importantes centros de pesquisa da época, o Observatório de Ujjain, na Índia. O fato de ter sido reconhecido como importante matemático em sua época e até os dias atuais se deu por ter escrito dois livros, *Lilavati* e *Siddhantasiromani*, sendo o primeiro deles que continha problemas e soluções de Aritmética, Geometria Plana e de Análise Combinatória, aonde demonstrava já conhecer o resultado $\binom{n}{p}$ e algumas de suas aplicações. Além disso, estudou problemas que envolvem a raiz quadrada de números e fez algumas demonstrações geométricas, no entanto a famosa fórmula que leva o seu nome não foi descoberta por ele.

Outro matemático famoso, o italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576), foi um prolífero pesquisador, tendo se dedicado, além da Matemática, também à Física, Medicina, Filosofia, Religião e Música.

Figura 2 - Girolamo Cardano, nascido em 24 de setembro de 1501 em Paiva e falecido em 21 de setembro com 74 anos de idade.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano

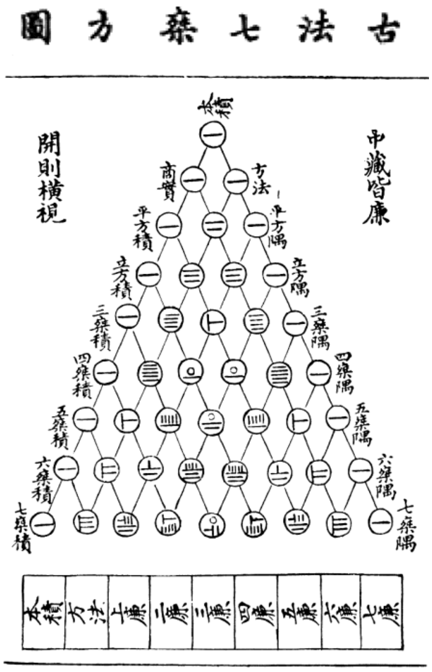
Entre seus feitos estão as pesquisas, em Física, a respeito da Energia Elétrica e Magnetismo e, na Medicina, ter sido pioneiro ao descrever clinicamente a febre tifoide. No ramo da Matemática, dedicou-se às Equações Algébricas, aonde as soluções da equação de 3° grau levam, de modo polêmico, o seu nome, mas foi o seu hábito de jogar que o levou a estudar Análise Combinatória e Probabilidade. Viciado em jogos de todas as naturezas, desde jogar xadrez a jogar dados, teve uma vida bastante atribulada, chegando a ter sido julgado por ter tirado o horóscopo de Jesus Cristo, e, dentre os seus estudos em Combinatória, chegou a deduzir que o número de elementos do conjunto das partes de um dado conjunto finito com n elementos é igual a 2^n.

Sem se prolongar muito no aspecto geral da História da Análise Combinatória, uma vez que seria impossível cobrir todo o assunto de modo completo ou sem cometer alguma injustiça ao esquecer de alguma figura relevante, voltaremos nossa atenção à parte da História relacionada ao foco deste texto, que são os números binomiais, Triângulo de Pascal, recorrências, funções geradoras e números de Fibonacci e de Catalan, apenas para citar alguns dos pontos principais.

Michael Stifel, matemático alemão que viveu de 1487 a 1567, obteve sua formação na universidade de Wittenberg. Sendo muito religioso, chegou a frequentar um monastério, mas foi expulso ao demonstrar sua insatisfação com certas práticas da Igreja. Presenciou a ascensão do protestantismo e, após sua desilusão com a Igreja católica, tornou-se próximo de Lutero, tendo convivido com o mesmo, em sua casa, durante um certo período de tempo. Entre os seus feitos, está o fato de ter descoberto os logaritmos anteriormente a John Napier e ter demonstrado a relação que viria a ser a lei formadora do Triângulo de Pascal e que leva o seu nome, a Relação de Stifel: $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Já o chamado Triângulo de Pascal tem uma história longa e que interliga matemáticos e curiosos de diferentes períodos históricos e locais diversos. Há relatos de que muito antes de Pascal ou até mesmo de Stifel, já conheciam o famoso triângulo. Na China e na Pérsia, no século XII, já havia indícios de que conheciam de modo intuitivo sua formação e propriedades básicas.

Figura.3 - O triângulo de Yang Hui foi publicado na China, em 1303.

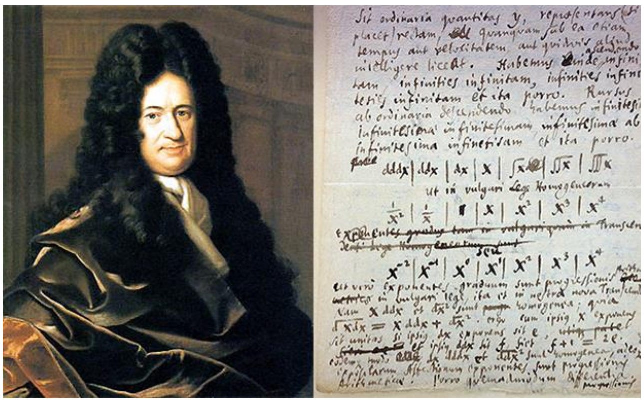


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal#/media/Ficheiro:Yanghui_triangle.gif

Até mesmo antes do século XII, já no final do século X, o matemático árabe Al-Karaji tinha conhecimento da lei de formação do triângulo. O autoditada italiano Niccolò Fontano (1500 – 1557), que quase foi morto aos 12 anos de idade por conta de ferimentos na face, nunca mais foi o mesmo desde então e teve a sua fala prejudicada, ficando gago e daí obtendo o seu apelido, Tartaglia, que significa gago, em italiano. Tartaglia teve origem humilde e sempre demonstrou incrível habilidade com a Matemática, lecionando para retirar seu sustento, entre seus feitos notáveis estão a tradução de *Elementos*, de Euclides, e a descoberta da solução das equações cúbicas, feito que acabou sendo, injustamente, creditado a Cardano. Em 1535, ao ser desafiado por outro matemático italiano, Del Fiore, a resolver equações cúbicas, Tartaglia consegue solucionar todas as questões propostas por Fiore e este obteve pouco sucesso naquelas propostas por Tartaglia. Ficando impressionado por tal feito, Cardano entra em contato com Tartaglia e o indaga a respeito do método de resolução que teria utilizado, mas não obteve a resposta que desejava. Apesar de ser um desejo de Niccolò publicar o seu método e obter o crédito que merecia, após ameaças de Cardano, ele cede e relata seu segredo, sendo que Cardano o publica e leva durante bom período todo o mérito pela descoberta. Em Análise Combinatória, Tartaglia relacionou os resultados de $\binom{n}{p}$ com os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$, tratando-se de outro feito de grande genialidade, mas foi o multitalentoso francês Blaise Pascal que estudou e demonstrou como utilizar os números binomiais para desenvolver potências de um binômio, deixando novamente Tartaglia sem o reconhecimento de que merecia.

Nascido em 1646 e tendo vivido até 1727, Sir Isaac Newton chama atenção pela sua genialidade e pelo seu temperamento. Tratava-se de uma pessoa introvertida e de difícil trato, para se ter uma ideia, não gostava de publicar suas descobertas por não querer interagir e debater com os outros cientistas de sua época, atitude que quase lhe custou a primazia no reconhecimento da descoberta do Cálculo Diferencial e gerou grande polêmica com outro grande matemático, Leibniz. O que se sabe, atualmente, é que ambos pesquisaram e descobriram de modo independente o Cálculo, sendo que Newton de fato conseguiu tal feito pouco antes de Leibniz. Dentre todas as suas descobertas, no campo da Física, da Matemática e chegando a ter sido presidente da casa da moeda na Inglaterra, estipulando unidades padrão e controlando a pirataria e falsificações, foi Newton quem estendeu o desenvolvimento binomial para coeficientes racionais, da forma $(x+y)^r$ para r racional, no entanto o desenvolvimento multinomial de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ foi descoberto por Leibniz.

Figura 4 - Gottfried Leibniz (1646 – 1716), à esquerda, e, ao lado direito da imagem, está seu caderno de anotações, onde é possível identificar alguns símbolos desenvolvidos por ele para o Cálculo Diferencial. O triângulo de Yang Hui foi publicado na China, em 1303.



Fonte: https://blog.wolfram.com/2016/11/14/celebrating-gottfried-leibniz-on-the-300th-anniversary-of-his-death/

Como pôde ser observado, a História da Matemática e, em particular, da Análise Combinatória e Probabilidade, é muito rica, cheia de peculiaridades e fatos inusitados. No entanto, evitando correr o risco de fugir ao foco do presente texto, na sequência, voltaremos nossa atenção para os conceitos e definições apenas da Análise Combinatória, sendo o estudo das probabilidades, apesar de intimamente ligado, tanto historicamente quanto teoricamente, à Análise Combinatória, deixado à parte.

Nessa breve apresentação histórica, pudemos nos localizar, ainda que de modo superficial, numa linha do tempo dos acontecimentos, onde foram relatados os primórdios dos números binomiais, locais e figuras mais relevantes, passamos pela polêmica de quem de fato descobriu o chamado Triângulo de Pascal, o estudo dos coeficientes multinomiais por Leibniz e posteriormente, com maior rigor, por De Moivre. Aliás, ao longo do texto, daremos maior atenção a De Moivre e retornaremos às suas descobertas, assim como à Leonhard Euler, que também se dedicou ao estudo de recorrências e de funções geradoras. Por fim, especial atenção será empregada a Leonardo de Pisa (Fibonacci) e o problema dos coelhos, além do matemático belga Eugene C. Catalan e os números de Catalan. Uma lista com diversas aplicações dos números de Fibonacci e de Catalan será indicada, algumas muito interessantes e outras deveras inesperadas, todas incríveis e motivadoras, dando uma pequena amostra de como realmente a Matemática pode ser a linguagem da natureza.

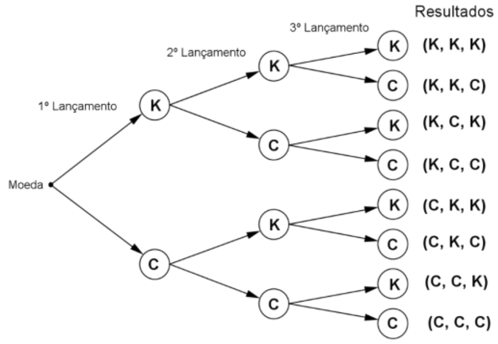
1.2 **Conceitos iniciais**

A Análise Combinatória, de modo bem simplista, consiste na arte ou ciência de contar. Apesar de ser uma conceituação ultrapassada e que não abrange modernos problemas combinatórios, como a Teoria dos Grafos, por exemplo, trata-se de uma visão intuitiva e de um bom ponto de partida para o estudo deste rico ramo da Matemática.

EXEMPLO 1.a
Três moedas iguais e homogênea são lançadas simultaneamente. Qual o número total de configurações distintas das faces superiores das três moedas.

Para contar o total de possibilidades, seja o esquema abaixo, em que K representa cara e C representa coroa:

Tabela 1 - Árvore de possiblidades para o lançamento de 3 moedas.



Essa maneira de representação chama-se *árvore de possibilidades*, aonde é possível contar de modo organizado o total de resultados para os três lançamentos, gerando 8 configurações possíveis. O conjunto formado pelo total de possibilidades ou resultados do experimento determina o *espaço amostral* e qualquer subconjunto do experimento é definido como um *evento*. Como, por exemplo, se quiséssemos determinar de quantas formas, nos três lançamentos, obteríamos 2 caras e 1 coroa, por meio da árvore de possibilidades contamos 3 modos distintos de ocorrência para tal evento.

No entanto, nem sempre será viável descrever todas as possibilidades de determinado experimento, uma a uma, para então contarmos. Para isso, a Análise Combinatória se encarrega de desenvolver métodos de contagem que visem a determinar o número de maneiras de ocorrência do dado evento sem precisar descrever caso a caso.

1.3 **Princípio Fundamental de Contagem (Princípio Multiplicativo)**

O Princípio Fundamental de Contagem pode ser enunciado da seguinte forma:

> Suponha que dois experimentos sejam realizados. Então, se o experimento 1 pode resultar em qualquer um dos *m* resultados possíveis e se, para cada resultado do experimento 1, existirem *n* resultados possíveis do experimento 2, então juntos, existem *mn* resultados possíveis dos dois experimentos (ROSS, 2010, p. 2).

A verificação desse poderoso princípio pode ser mais facilmente comprovada ao se enumerar cada possibilidade de acordo com a tabela:

Tabela 2 - Princípio Fundamental de Contagem: demonstração.

$$
\begin{array}{llll}
(1,1), & (1,2), & \ldots, & (1,n) \\
(2,1), & (2,2), & \ldots, & (2,n) \\
\vdots & & & \\
(m,1), & (m,2), & \ldots, & (m,n)
\end{array}
$$

Portanto, por se tratar de uma disposição retangular, é fácil verificar que o total de possibilidades de ocorrência de dois eventos sucessivos, em que o primeiro possui *m* possibilidades e o segundo *n* possibilidades, é dado pelo produto *mn*.

A generalização do Princípio Fundamental de Contagem, de forma análoga, pode ser enunciada por:

> Se *r* experimentos a serem realizados forem tais que o primeiro possa resultar em qualquer um dos n_1 possíveis resultados; e se, para cada um desses n_1 possíveis resultados, houver n_2 resultados possíveis do segundo experimento; e se, para cada um dos possíveis resultados dos dois primeiros experimentos, existirem n_3 resultados

> possíveis do terceiro experimento; e se . . . , então há um total de $n_1 n_2 \ldots n_r$ possíveis resultados dos *r* experimentos. (ROSS, 2010, p. 2)

Ou ainda, utilizando uma notação mais coesa:

> Se r experimentos são realizados com n_i possibilidades para cada experimento $i = 1,2,\ldots,r$, então há um total de $\prod_{i=1}^{r} n_i$ possíveis resultados. (Weisstein, Eric W. "Counting Generalized Principle." From *MathWorld*)

EXEMPLO 1.b
Quantos números de 3 algarismos existem? E se os 3 algarismos forem distintos?

Para contar o total de números formados por três algarimos escolhidos de 0 a 9, devemos decompor o problema em experimentos ou escolhas sucessivas, no caso há 3 escolhas a serem feitas, a escolha do primeiro algarismo, que pode ser do 1 ao 9, a do segundo algarismo, que pode variar de 0 a 9, e a do terceiro algarismo, análoga ao segundo:

$$\underbrace{\qquad}_{9\,possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{10\,possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{10\,possibilidades}$$

Dessa forma, resultam em $9.10.10 = 900$ possibilidades, lembrando que para que haja 3 algarismos, o número não deve começar por zero.
Para o caso de 3 algarismos distintos, ainda seriam três escolhas sucessivas cada uma feita dentre os dígitos que vão de 0 ao 9, no entanto a ordem em que as escolhas são feitas pode ou não gerar complicações. A orientação sempre será a de que escolhas que envolvam maiores restrições sejam feitas inicialmente. Com efeito:

$$\underbrace{\qquad}_{9\,possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{9\,possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{8\,possibilidades}$$

1° algarismo: 9 possibilidades, do 1 ao 9.
2° algarismo: 9 possbilidades, qualquer um dos números do 0 ao 9 exceto o já escolhido anteriormente.
3° algarismo: 8 possibilidades, qualquer um do 0 ao 9 exceto os dois já escolhidos.
Totalizando: $9.9.8 = 648$ opssibilidades.
Note que nada impediria que a escolha inicial fosse a do útimo algarismo, porém, agindo assim, ao escolher o primeiro algarismo nos restaria a dúvidada se o algarismo zero teria ou não sido escolhido, obrigando-nos a ter de abrir o problema em dois casos e tornando a sua resolução mais complicada.

Diante do problema anterior, a seguinte orientação geral pode ser seguida de modo a resolver da melhor maneira os problemas de Análise Combinatória em geral:

> Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada e primeiro lugar. (MORGADO, 2016, p. 20)

EXEMPLO 1.c
Quantos são os números naturais, pares, de três algarismos distintos?

Seguindo a orientação de começar o problema pelas decisões mais difíeis ou que envolvem mais restrições:

$$\underbrace{\qquad}_{?} \quad \underbrace{\qquad} \quad \underbrace{\qquad}_{5\ possibilidades}$$

3° algarismo: 5 possibilidades, sendo o 0, 2, 4, 6 ou 8.
1° algarismo: depende da escolha incial, uma vez que não sabemos se o zero já foi ou não escolhido.
Sendo assim, devemos abrir em dois casos:

1° CASO: O zero na última casa.

$$\underbrace{\qquad}_{9\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{8\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{1\ possibilidade}$$

Portanto:
3° algarismo: 1 possibilidade, o zero.
1° algarismo: 9 possibilidades, excluindo apenas o zero.
2° algarismo, 8 possbilidades.
Logo: $1.9.8 = 72$ possibilidades.

2° CASO: A última casa é um par distinto de zero.

$$\underbrace{\qquad}_{8\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{8\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{4\ possibilidades}$$

Portanto:
3° algarismo: 4 possibilidade, sendo 2, 4, 6 ou 8.
1° algarismo: 8 possibilidades, excluindo o zero e o algarismo já utilizado anteriormente.
2° algarismo, 8 possbilidades, qualquer algarismo excetuando os dois já escolhisdos anteriormente.
Logo: $4.8.8 = 256$ possibilidades.

Ao todo, há: $72 + 256 = 328$ números pares de três algarismos distintos.

EXEMPLO 1.d
Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem *n* elementos?

Sabe-se que um subconjunto deve possuir apenas elementos que pertençam ao conjunto dado, dessa forma seus elementos devem ser escolhidos dentre os elementos do conjunto maior. Como cada elemento pode ou não pertencer a um subconjunto, teremos sempre duas possibilidades para cada escolha. Seja X um subconjunto, esquematicamente temos que:

$$X = \{\underbrace{\qquad}_{2\ possibilidades}, \underbrace{\qquad}_{2\ possibilidades}, \ \cdots\ , \underbrace{\qquad}_{2\ possibilidades}\}$$

Sendo um total de *n* escolhas sucessivas, obtemos: $\underbrace{2.2 \ldots 2}_{n\ vezes} = 2^n$ possíveis subconjuntos.

1.4 **Fatorial de um número natural**

O *fatorial* de um número natural n, representado por $n!$, é definido recursivamente por:

(i) $0! = 1$

(ii) $n! = n.(n-1)!$, para $n > 0$

Dessa forma, obtemos:

$1! = 1.0! = 1.1 = 1$

$2! = 2.1! = 2.1$

$3! = 3.2! = 3.2.1 = 6$

Portanto, por meio de um raciocínio indutivo, obtemos:

$$\boxed{n! = n.(n-1).(n-2) \ldots 3.2.1}$$

Utilizando o resultado anterior, obtemos a sequência dos números fatoriais:

$$(0!, 1!\ ,2!\ ,3!\ ,4!\ ,5!\ ,6!, 7!, 8!, 9!, 10!, \ldots) = (1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \ldots)$$

EXEMPLO 1.e

Simplifique $\frac{2020!}{2018!}$.

Ao invés de calcular o resultado acima calculando os números fatoriais para depois simplificar, utilizamos de modo mais simples que:

$$\frac{2020!}{2018!} = \frac{2020.2019.2018!}{2018!} = 2020.2019 = 4078380$$

EXEMPLO 1.f

Simplificar: $\frac{n!-(n-1)!}{(n-2)!}$.

Desenvolvendo em função do menor número fatorial: $\frac{n!-(n-1)!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!-(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)![n(n-1)-(n-1)]}{(n-2)!} = n(n-1) - (n-1) = (n-1)(n-1) = (n-1)^2$

O *duplo fatorial* de um número natural n, representado por $n!!$, é definido por:

$$\boxed{n!! = \begin{cases} n.(n-2) \ldots 5.3.1, n > 0\ ímpar \\ n.(n-2) \ldots 6.4.2, n > 0\ par \\ 1, n = -1\ ou\ n = 0 \end{cases}}$$

A sequências $(n!!)_{n\in\mathbb{N}}$ dos duplos fatoriais é dada por: $(1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, \ldots)$.

EXEMPLO 1.g
Calcule 9!! e 10!!.

De acordo com a definição acima:
$9!! = 9.7.5.3.1 = 945$
$10!! = 10.8.6.4.2 = 3840$

EXEMPLO 1.h
Compare 4!! com (4!)!.

De acordo com as definições, notamos que tratam-se de resultados distintos:
$4!! = 4.2 = 8$
$(4!)! = (4.3.2.1)! = 24!$
Logo: $(4!)! > 4!!$

EXEMPLO 1.h
Para um número natural n, demonstre que: $n! = n!!\,(n-1)!!$.

Reescrevendo a expressão dada: $n! = n!!\,(n-1)!! \to \frac{n!}{n!!} = (n-1)!!$
Dessa forma, abriremos em dois casos.
Para n par: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1}{n(n-2)\ldots 4.2} = (n-1)(n-3)\ldots 3.1 = (n-1)!!$
Para n ímpar: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1}{n(n-2)\ldots 3.1} = (n-1)(n-3)\ldots 4.2 = (n-1)!!$
Portanto, para ambos os casos, obtemos o resultado desejado.

1.5 **Permutação**

Definimos a *permutação simples* de *n* objetos distintos como o total de modos distintos de ordená-los.
Para calcular a permutação simples P_n de n objetos distintos, utilizaremos o Princípio Multiplicativo:

$$\underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades}\quad \underbrace{\qquad}_{n-1\ possibilidades}\quad \cdots \quad \underbrace{\qquad}_{2\ possibilidades}\quad \underbrace{\qquad}_{1\ possibilidade}$$

Portanto:

$$P_n = n(n-1)\ldots 2.1 \to \boxed{P_n = n!}$$

EXEMPLO 1.i
De quantos modos distintos 5 pessoas podem formar uma fila?

Trata-se de aplicação clássica da permutação simples, aonde os objetos são dados e não há escolha, mas apenas as diferentes ordenações dos mesmos é que importa. Portanto, há $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$ modos distintos de se formar a fila.

EXEMPLO 1.j
Quantos são os anagramas da palavra HOJE?

Uma vez que um anagrama é qualquer permutação de suas letras, podendo ou não formar uma palavra que já exista, o total de anagramas pedido é dado por: $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$.

EXEMPLO 1.k
Quantos são os anagramas da palavra CARRO?

Aqui é preciso tomar cuidado, pois as permutações entre as letras iguais não gera um novo anagrama. Dessa forma, ao permutar as 5 letras, é possível notar que cada anagrana repetido é contado tantas vezes quantas forem as permutações das letras iguais. Sendo assim, o total pedido pode ser calculado por meio de: $\frac{P_5}{P_2} = \frac{5!}{2!} = 5.4.3 = 60$ anagramas.

Portanto, o total de *permutações com repetição* de n objetos, nem todos distintos, nos quais cada objeto aparece com respectiva frequência de α_1, α_2, ..., α_k vezes, é dado por:

$$\boxed{P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}}, \text{ com } \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n.$$

EXEMPLO 1.l
Qual a quantidade de anagramas da palavra MATEMÁTICA?

Lembrando que, para todos os efeitos, letras acentuadas são indistinguíveis com relação às não acentuadas, contabilizamos as quantidades de vezes que cada letra aparece na palavra: 2 M's, 3 A's, 2 T's, 1 E, 1 I e 1 C.
Logo: $P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200$ anagramas.

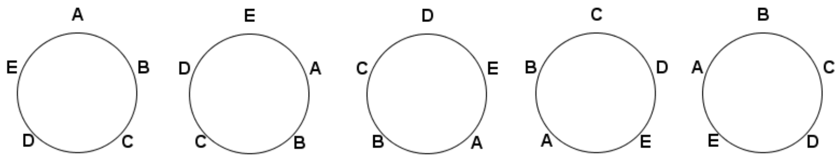
EXEMPLO 1.m
De quantas formas é possível dividir 6 pessoas em dois grupos de 3 pessoas cada?

O problema pode ser interpretado por meio de permutações. Inicialmente são colocadas as 6 pessoas em fila de modo que as 3 primeiras comporão um grupo e as 3 seguintes, o outro grupo. Como a ordem das pessoas dentro de um mesmo grupo não importa, escrevemos: $\frac{6!}{3!3!}$. Além disso, a ordem dos grupos também não importa, pois abc/def e def/abc são equivalentes. Logo: $\frac{\frac{6!}{3!3!}}{2!} = \frac{6!}{3!3!2!} = 10$ formas distintas.

EXEMPLO 1.n
De quantas formas 5 pessoas podem se sentar ao redor de uma mesa redonda?

A princípio parece um problema de permutação simples, no entanto é preciso notar que, para cada giro das cinco pessoas ao redor da mesa, os respectivos vizinhos, tanto no sentido horário quanto no antihorário, serão os mesmos e não pode ser contado como uma permutação distinta. Sejam as cinco pessoas representadas pelas letras A, B, C, D e E, observe que para cada configuração haverá 5 possíveis giros:

Figura 5 - Permutação circular de 5 pessoas ao redor da mesa.



Fonte: autor.

Logo, o total de permutações pedidas é dado por: $\frac{P_5}{5} = \frac{5!}{5} = 4! = 4.3.2.1 = 24$ formas.

Portanto, de modo geral, o total de *permutações circulares* de n objetos distintos é dado por:

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} \rightarrow \boxed{PC_n = (n-1)!}$$

EXEMPLO 1.o
De quantos modos 5 casais podem se sentar ao redor de uma mesa redonda com 10 lugares de modo que cada casal permaneça junto?

Uma vez que cada casal deve ficar junto, podemos considerar cada par como um único objeto. Dessa forma, haverá: $PC_5 = 4! = 24$ modos distintos de alocar os casais. Além disso, como cada casal é formado por duas pessoas, é possível permutar essas pessoas dentro de cada casal considerado. Portanto: $24.(2!)^5 = 24.32 = 768$ possibilidades.

1.6 **Arranjo**

Seja um conjunto com n elementos distintos, o total de subconjuntos ordenados com p elementos distintos é chamado de *arranjo simples* de n para p, representado por $A_{n,p}$.
Para calcularmos o total de p-subconjuntos ordenados, utilizaremos o Princípio Multiplicativo:

$$\underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{n-1\ possibilidades} \quad \cdots \quad \underbrace{\qquad}_{n-(p-2)\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{n-(p-1)\ possibilidades}$$

Portanto:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(p-1)\big) = \frac{n!}{(n-p)\big(n-(p+1)\big)\ldots 2.1} \rightarrow \boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

EXEMPLO 1.p
Numa corrida com 10 atletas, de quantas formas o pódio com os 3 primeiros pode ser composto?

Pela interpretação do problema, notamos que trata-se de um problema que envolve uma escolha e que a ordem dessa escolha é relevante, portanto é um arranjo simples.
Logo: $A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10.9.8 = 720$ formas de compor o pódio.

No *arranjo com repetição*, dados n objetos distintos, estamos interessados em calcular o total de escolhas ordenadas de p desses objetos, em que as escolhas podem ser de objetos distintos ou não.
Sendo o arranjo com repetição de n para p representado por $AR_{n,p}$, seu total é dado por meio de p escolhas sucessivas com n possibilidades para cada escolha:

$$\underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades} \quad \cdots \quad \underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades}$$

Logo:

$$AR_{n,p} = \underbrace{n.n\dots n}_{p\ vezes} \rightarrow \boxed{AR_{n,p} = n^p}$$

EXEMPLO 1.q
Sabendo que no código Morse as letras são pontos e traços, quantas palavras de 4 letras existem?

Como numa palavra pode haver letras repetidas, teremos: $AR_{2,4} = 2^4 = 16$ palavras distintas formadas por 4 letras.

1.7 **Combinação**

Dado um conjunto de n elementos distintos, o total de subconjuntos com p desses objetos, distintos, que pode ser formado chama-se *combinação simples* de n para p, representada por $C_{n,p}$.

Para calcular o total de p-subconjuntos, procedemos da seguinte forma:

$$\underbrace{\qquad}_{n\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{n-1\ possibilidades} \quad \cdots \quad \underbrace{\qquad}_{n-(p-2)\ possibilidades} \quad \underbrace{\qquad}_{n-(p-1)\ possibilidades}$$

No entanto, ao utlizar o Princípio Multiplicativo, devemos ter em mente que as diferentes ordens em que as escolhas são feitas não deve ser contabilizada, uma vez que um subconjunto é definido apenas pelos seus elementos e não pela ordem dos mesmos. Portanto:

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(p-1)\big)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)\big(n-(p+1)\big)\dots 2.1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Ou ainda:

$$\boxed{C_{n,p} = \binom{n}{p}}$$

Dessa forma, podemos relacionar a permutação simples, o arranjo simples e a combinação simples por:

$$A_{n,p} = C_{n,p}.P_p$$

Interpretando tais resultados, temos que, em problemas de permutação simples, estamos interessados apenas nas diferentes ordenações dos objetos, não há escolha de objetos. Por outro lado, problemas de combinação simples envolvem apenas escolha, não é contabilizada a ordem dos objetos escolhidos. E, complementando, em problemas de arranjo simples, fazemos escolhas ordenadas, ou seja, são problemas que envolvem escolha e a ordem dos objetos escolhidos também é relevante e, portanto, é contabilizada.

EXEMPLO 1.r
De uma lista de 10 amigos, de quantas formas podemos escolher 3 deles para ir ao cinema?

O problema claramente envolve escolha e, uma vez que a ordem dos amigos escolhidos não é relevante, trata-se de um problema de combinação simples: $C_{10,3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ formas de escolha dos três amigos.

EXEMPLO 1.s
Se numa sorveteria há 5 sabores disponíveis, de quantas formas é possível formar um sorvete com 3 bolas?

Apesar de o problema envolver escolha, não há menção ao fato de as escolhas serem feitas de objetos distintos, ou seja, uma bola de sorvete de um mesmo sabor pode ser escolhida mais de uma vez. Como a ordem dos sabores das bolas não importa, trata-se de uma combinação, mas em que os objetos podem ou não ser escolhidos mais de uma vez.
Para resolver tal problema, modelaremos uma equação em que estamos interessados nas soluções inteiras e positivas. Se x_k representa o número de vezes em que o k-ésimo sabor foi escolhido, o número de soluções da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

será a resposta para nosso problema. Observe que uma possível solução seria $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ e $x_5 = 0$. Tal solução particular pode ser representada por três pontinhos e quatro tracinhos verticais como a seguir:

$$\underbrace{..}_{x_1} | \underbrace{\ }_{x_2} | \underbrace{\ }_{x_3} | \underbrace{.}_{x_4} | \underbrace{\ }_{x_5}$$

Por meio da representação acima, notamos que o total de soluções inteiras e não negativas é dado pelo total de permutações de 3 pontinhos e 4 tracinhos: $P_7^{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = 35$ formas de montar o sorvete.

Generalizando o argumento acima, dados n objetos distintos, o número de modos de escolhas de p desses objetos, em que as escolhas podem ser distintas ou não, chama-se *combinação com repetição* de n para p, representada por $CR_{n,p}$.

Para determinar o total de combinações com repetição de n para p, devemos encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

em que x_k representa o número de vezes que o k-ésimo objeto foi escolhido. Para achar dito número devemos permutar p pontinhos e $n-1$ tracinhos, resultando em:

$$CR_{n,p} = P_{n-1+p}^{n-1,p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)!\,p!} \rightarrow \boxed{CR_{n,p} = \binom{n-1+p}{p}}$$

EXEMPLO 1.t
Seja o problema anterior, mas ao escolher as três bolas, sabe-se que o sabor 1 deve ser escolhido.

A equação que modela o problema é a mesma, no entanto devemos fixar um pontinho no espaço correspondente ao x_1, dessa forma garantimos que esse sabor será selecionado ao menos uma vez. Como esse pontinho está preso, não permutará, restando 4 tracinhos e mais 2 pontinhos a serem permutados: $\binom{5-1+2}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ formas de montar o sorvete.
O problema também poderia ser resolvido algebricamente ao fazer a substituição $x_1 = y_1 + 1$, pois se $x_1 \geq 1 \rightarrow \ y_1 \geq 0$:

$$y_1 + 1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \rightarrow \ y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$$

Logo, existem $P_{5-1+2}^{5-1,2} = \frac{(4+2)!}{4!2!} = 15$ formas de montar o sorvete.

2 **MÉTODOS AVANÇADOS DE CONTAGEM**

Nesse capítulo procuraremos utilizar os métodos e técnicas de contagem já demonstradas anteriormente para deduzir novas técnicas de contagem. Uma vez que, para concluir esses novos métodos, os anteriores serão necessários e raciocínios mais elaborados serão requisitados, denominaremos, portanto, de métodos avançados de contagem.

2.1 **Lemas de Kaplansky**

O matemático canadense Irving Kaplansky, que viveu de 1917 a 2006, para resolver um problema combinatório proposto por outro matemático, o francês Édouard Lucas (1842 – 1891), desenvolveu duas técnicas de contagem denominadas *Lemas de Kaplansky*.

O problema proposto por Lucas pode ser enunciado da seguinte forma:

> Tem-se n $(n > 1)$ casais que devem se sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas de mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique no lado de sua mulher. De quantos modos isso pode ser feito? (MORGADO, 2016, p.175)

Para resolver o problema, são necessários dois Lemas:

1° Lema de Kaplansky: O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é:

$$\boxed{f(n,p) = \binom{n-p+1}{p}}.$$

Demonstração: Sejam os p elementos escolhidos representados por a_k, com $a_k \epsilon \{1, 2, \dots, n\}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ e $1 \leq k \leq p$:

$$\underbrace{\qquad}_{NÃO\ ESCOLHIDOS} \quad \underbrace{a_1}_{ESCOLHIDO} \quad \underbrace{\qquad}_{NÃO\ ESCOLHIDOS} \; \cdots \; \underbrace{\qquad}_{NÃO\ ESCOLHIDOS} \quad \underbrace{a_p}_{ESCOLHIDO} \quad \underbrace{\qquad}_{NÃO\ ESCOLHIDOS}$$

Notamos que sobram $p + 1$ espaços entre os elementos escolhidos que devem ser preenchidos com ao menos um dos $n - p$ elementos restantes do conjunto, excetuando as extremidades que podem ficar vazias caso $a_1 = 1$ ou $a_p = n$. Dessa forma, formamos a equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{p+1} = n - p$$

Em que cada incógnita representa a quantidade de elementos não escolhidos entre os escolhidos. Como x_1 e x_{p+1} devem ser maiores ou iguais a zero e $x_2, \dots, x_p$ maiores ou iguais a 1, podemos substituir $x_i = y_i + 1$, com $2 \leq i \leq p$:

$$x_1 + y_2 + \cdots + y_p + x_{p+1} = n - p - (p - 1)$$
$$x_1 + y_2 + \cdots + y_p + x_{p+1} = n - 2p + 1$$

Logo, o número de soluções inteiras positivas é dado por:

$$CR_{n-2p+1+p,p} = \binom{n-2p+1+p}{p} = \binom{n-p+1}{p}$$

CQD

EXEMPLO 2.a
Um atleta fará um treinamento diferenciado de apenas uma semana para uma competição. Se ele deve treinar em 3 dias não consecutivos, de quantas formas ele pode selecionar os dias de treino?

Como, do conjunto de 7 dias da semana, devemos selecionar 3 deles que não sejam consecutivos, trata-se do 1° Lema de Kaplansky: $f(7,3) = \binom{7-3+1}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ formas de selecionar os 3 dias.

2° Lema de Kaplansky: O número de p-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n como consecutivos, igual a:

$$\boxed{g(n,p) = \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}}.$$

Demonstração: Para demonstrar o resultado acima, abriremos em dois casos a analisar, os p-subconjuntos que possuem o número 1 e os que não possuem.

1° CASO: Subconjuntos em que o número 1 foi selecionado.
Nesse caso, restam $n-1$ elementos em $\{2, 3, \ldots, n\}$ nos quais devemos escolher $p-1$ deles, excetuando o 2 e o n. Com efeito:

$$f(n-3, p-1) = \binom{n-3-(p-1)+1}{p-1} = \binom{n-p-1}{p-1}$$

2° CASO: Subconjuntos em que o número 1 não foi selecionado.
Ainda restam $n-1$ elementos em $\{2, 3, \ldots, n\}$, nos quais devemos escolher p deles:

$$f(n-1, p) = \binom{n-1-p+1}{p} = \binom{n-p}{p}$$

Por se tratar de eventos complementares, somamos os dois casos:

$$f(n-3, p-1) + f(n-1, p) = \binom{n-p-1}{p-1} + \binom{n-p}{p} = \frac{p}{n-p}\binom{n-p}{p} + \binom{n-p}{p}$$

Logo:

$$g(n,p) = \frac{p}{n-p}\binom{n-p}{p} + \binom{n-p}{p} = \left(\frac{p}{n-p} + 1\right).\binom{n-p}{p}$$

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}$$

CQD

EXEMPLO 2.b

Um atleta deseja montar uma rotina de treinos semanal, com 3 treinos por semana, de modo que nunca haja dois dias consecutivos de treino. De quantas formas ele pode selecionar os dias de treino por semana?

Diferentemente do primeiro exemplo, aqui o último dia da semana é consecutivo ao primeiro dia da semana seguinte, tratando-se do 2° Lema de Kaplansky: $g(7,3) = \frac{7}{7-3}\binom{7-3}{3} = \frac{7}{4}.\frac{4!}{3!1!} = \frac{7}{4}.4 = 7$ formas de montar a rotina de treinos semanal nas condições pedidas.

2.2 **O Princípio de Dirichlet**

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi um matemático alemão, nascido em Duren, que viveu de 1805 a 1859. Sua formação se dividiu entre a Alemanha e a França, chegando a ser aluno de ilustres cientistas, como Poisson e Fourier. Entre as suas principais contribuições à Matemática estão a moderna concepção de funções e estudos em Teoria dos Números, aonde chegou a demonstrar a impossibilidade de soluções inteiras para o caso $n = 5$ e para $n = 14$ no Último Teorema de Fermat, que afirmava que a equação $x^n + y^n = z^n$, com $n > 2$, não possui soluções inteiras não triviais.

Voltando nosso foco para a Análise Combinatória, o chamado *Princípio de Dirichlet*, apelidado de *Princípio das Gavetas* ou ainda *Princípio da Casa dos Pombos*, tendo suas primeiras versões formais datadas de 1834, de modo bem simples diz que:

> Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos. (MORGADO, 2016, p.81)

A verificação de tal Princípio pode ser feita por redução ao absurdo, uma vez que, se em cada gaveta for colocado no máximo um objeto, o total de objetos alocados nas gavetas seria, no máximo, de $n-1$.

Uma versão um pouco mais geral deste princípio é dada por:

> Dadas n caixas e $m > n$ objetos, pelo menos uma caixa deve conter mais de um objeto. (Weisstein, Eric W. “Dirichlet’s Box Principle.” From *MathWorld*)

Ou ainda:

> Se k objetos forem colocados em n caixas, pelo menos uma caixa deverá conter pelo menos $\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil$ objetos. Aqui $\lceil\ \rceil$ indica a função do teto. (https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Pigeonhole_Principle)

EXEMPLO 2.c

Num grupo de 25 pessoas, demonstre que ao menos três delas fazem aniversário no mesmo mês.

Trata-se de uma aplicação direta do Princípio de Dirichlet, uma vez que há 25 pessoas e 12 meses no ano, distribuindo as pessoas entre os meses, haverá pelo menos $\left\lceil\frac{25}{12}\right\rceil = 3$ delas que estarão aniversariando no mesmo mês.

EXEMPLO 2.d
Seja um conjunto de $n + 1$ números inteiros distintos, verifique que existem dois elementos distintos no conjunto tais que sua diferença seja divisível por n.

Analisando os possíveis restos da divisão de um inteiro por n, tem-se n possibilidades, que vão de 0 a $n - 1$. Como há n possíveis restos na divisão por n e $n + 1$ inteiros pertencentes ao conjunto, pelo Princípio de Dirichlet, ao menos dois inteiros do conjunto deixam restos iguais na divisão por n. Portanto, a diferença entre esses dois inteiros será um número múltiplo de n.

2.3 O Princípio da Inclusão – Exclusão

Num dado espaço amostral U finito, seja $|X|$ o cardinal de um subconjunto X. Portanto, o total de maneiras de ocorrência do evento A ou do evento B, ou seja, da união dos dois eventos, é expresso por:

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

EXEMPLO 2.e
No lançamento de um dado numerado de 1 a 6, de quantas formas é possível obter na face superior um número par ou um número primo?

Considerando A o evento em que a face superior é par e B o evento em que a face superior é um número primo, no exemplo dado conseguimos facilmente descrever o espaço amostral e os eventos:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{2, 3, 5\}$
Note que o número 2 é tanto par quanto primo, dessa forma, para que não haja contagem dupla uma vez que tal elemento aparece nos dois conjuntos, devemos subtrair uma vez a interseção de A e B. Portanto: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 3 - 1 = 5$ formas.

Por meio de um raciocínio análogo, para o caso de 3 eventos A, B e C num dado espaço amostral, o total de modos de ocorrência de A ou B ou C pode ser calculado por meio de:

$$\boxed{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|}$$

Generalizando, para p eventos, representados por $A_1, A_2, \dots, A_p$, num dado espaço amostral, o número de possibilidades de ocorrência de A_1 ou A_2 ou ... ou A_p é dado por:

$$\boxed{\left|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p\right| = \sum_{1\le i\le p}|A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le p}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le p}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right| - \dots + (-1)^{p-1}\left|A_1\cap A_2\cap \dots \cap A_p\right|.}$$

EXEMPLO 2.f

Quantos são os anagramas da palavra CAPÍTULO que começam por C ou que possuem A em 2° lugar ou P em 3° lugar ou I em 4° lugar?

Pela leitura do enunciado, é imediato notar que se trata da união de 4 eventos. Sejam eles:

$A_1 \rightarrow$ conjunto dos anagramas com C em 1° lugar

$A_2 \rightarrow$ conjunto dos anagramas com A em 2° lugar

$A_3 \rightarrow$ conjunto dos anagramas com P em 3° lugar

$A_4 \rightarrow$ conjunto dos anagramas com I em 4° lugar

Portanto:

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 7! = 5040$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 6! = 720$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 5! = 120$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4! = 24$

Pela fórmula: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4.5040 - 6.720 + 4.120 - 24 = 16296$

Na sequência, veremos duas aplicações importantes do Princípio da Inclusão – Exclusão: O número de permutações caóticas e o número de funções sobrejetoras.

Permutações Caóticas: O total de permutações de n objetos distintos nas quais cada um deles não ocupa a sua posição original é dado por:

$$\boxed{D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]},$$

sendo D_n o total de *Permutações Caóticas* ou *Desarranjos* dos n objetos.

Demonstração: Seja o conjunto de n objetos distintos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, o total de permutações simples dos n objetos é dado por $P_n = n!$. Desse total de permutações simples, serão retiradas as permutações em que ao menos um dos a_i ocupa a $i - ésima$ posição.

Definindo o conjunto A_i como o conjunto das permutações de A nas quais a_i ocupa a $i - ésima$ posição, o total de permutações nas quais ao menos um dos elementos ocupa a sua posição original é dado pela união dos conjuntos $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |\bigcup_{k=1}^{n} A_k|$.

Dessa forma:

$$|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Sendo que:

$|A_1| = (n-1)! \rightarrow \ \sum_{1 \le i \le n} |A_i| = \binom{n}{1}.(n-1)! = \frac{n!}{1!(n-1)!}.(n-1)! = \frac{n!}{1!}$
$|A_1 \cap A_2| = (n-2)! \rightarrow \ \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \binom{n}{2}.(n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!}.(n-2)! = \frac{n!}{2!}$

Generalizando:

$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p| = (n-p)! \rightarrow \ \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}| = \binom{n}{p}.(n-p)! = \frac{n!}{p!}$

Obtemos, portanto:

$|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{n!}{n!}$

Logo, o total de desarranjos é dado por:

$D_n = P_n - |\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = n! - \left[\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{n!}{n!}\right] = \frac{n!}{0!} - \left[\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{n!}{n!}\right]$
$D_n = n!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$

CQD

EXEMPLO 2.g
Quantos são os anagramas da palavra HOJE nas quais nenhuma letra ocupa a sua posição original?

Trata-se de aplicação imediata da Permutação Caótica de 4 objetos distintos.
Portanto: $D_4 = 4!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 4!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 4.3 - 4 + 1 = 9$ anagramas.

EXEMPLO 2.h
Dois médicos devem atender os mesmos 4 pacientes, um de cada vez, sendo que cada médico leva o mesmo tempo para cada atendimento. Se cada paciente deve ser atendido uma vez por cada um dos dois médicos, de quantas formas distintas poderá ser montada a agenda de atendimentos dos médicos?

É imediato que o primeiro médico pode montar sua agenda de atendimentos de $P_4 = 4! = 24$ modos distintos.
Já o segundo médico, que também irá atender os 4 pacientes, ao montar a sequência de atendimentos, não poderá atender o paciente que já estiver sendo atendido pelo primeiro médico, portanto terá $D_4 = 4!\left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] = 9$ modos de montar a sua agenda de atendimentos.
Logo, o total de modos distintos em que os dois médicos poderão atender os 4 pacientes nas condições do problema é dado por: $P_4.D_4 = 24.9 = 216$.

Número de funções sobrejetoras: Dados dois conjuntos A e B finitos tais que $|A| = n$ e $|B| = k$, com $n \ge k$, o número de funções sobrejetoras $f: A \rightarrow B$ é dado por:

$$\boxed{T(n,k) = \sum_{0\leq j\leq k}(-1)^j.\binom{k}{j}.(k-j)^n}.$$

Demonstração: É imediato que o total de funções $f: A \to B$ é dado por k^n. Desse total de funções, iremos retirar aquelas em que ao menos um dos elementos de B não é imagem de algum elemento de A.

Considerando o conjunto B como $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, definimos C_i como o conjunto das funções $f: A \to B$ tais que $b_i \notin f(A)$. Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão, o número de funções de A em B em que ao menos um dos elementos do contradomínio não pertence ao conjunto imagem é dado por $|C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right|$.

Dessa forma:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right| = \sum_{1\leq j\leq k}\left|C_j\right| - \sum_{1\leq j_1<j_2\leq k}\left|C_{j_1} \cap C_{j_2}\right| + \cdots + (-1)^{k-1}|C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k|$$

Sendo que:

$$|C_1| = (k-1)^n \to \ \sum_{1\leq j\leq k}\left|C_j\right| = \binom{k}{1}.(k-1)^n$$

$$|C_1 \cap C_2| = (k-2)^n \to \ \sum_{1\leq j_1<j_2\leq k}\left|C_{j_1} \cap C_{j_2}\right| = \binom{k}{2}.(k-2)^n$$

Generalizando:

$$\left|C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_p\right| = (k-p)^n \to \ \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_p\leq k}\left|C_{j_1} \cap \dots \cap C_{j_p}\right| = \binom{k}{p}.(k-p)^n$$

Logo:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right| = \binom{k}{1}.(k-1)^n - \binom{k}{2}.(k-2)^n + \cdots + (-1)^{p-1}.\binom{k}{p}.(k-p)^n + \cdots + (-1)^{k-1}.\binom{k}{k}.(k-k)^n = \sum_{1\leq j\leq k}(-1)^{j-1}.\binom{k}{j}.(k-j)^n$$

Obtemos, portanto:

$$T(n,k) = k^n - \left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right| = k^n - \sum_{1\leq j\leq k}(-1)^{j-1}.\binom{k}{j}.(k-j)^n$$

$$T(n,k) = k^n + \sum_{1\leq j\leq k}(-1)^{j}.\binom{k}{j}.(k-j)^n$$

$$T(n,k) = (-1)^0.\binom{k}{0}.(k-0)^n + \sum_{1\leq j\leq k}(-1)^{j}.\binom{k}{j}.(k-j)^n$$

$$T(n,k) = \sum_{0\leq j\leq k}(-1)^{j}.\binom{k}{j}.(k-j)^n$$

CQD

A relação obtida também pode ser lida como o total de modos de se colocar n bolas distintas em k caixas distintas de modo que em cada caixa haja ao menos uma bola.

EXEMPLO 2.i
Se 9 pessoas entram, simultaneamente, em um elevador, de quantas formas essas 9 pessoas podem descer do elevador ao longo dos 4 andares do prédio se em cada andar deve descer ao menos uma pessoa?

Como para cada andar deve descer ao menos uma pessoa, o problema pode ser interpretado como o número de funções sobrejetivas de A em B, sendo $|A| = n = 9$ e $|B| = k = 4$. Ou ainda, é análogo a pensar no total de modos de se distribuir 9 bolas distintas em 4 caixas distintas se cada caixa não deve ficar vazia.
De acordo com o resultado demonstrado acima:

$T(9,4) = \sum_{0 \leq j \leq 4} (-1)^j . \binom{4}{j} . (4-j)^9$
$T(9,4) = \binom{4}{0} . (4-0)^9 - \binom{4}{1} . (4-1)^9 + \binom{4}{2} . (4-2)^9 - \binom{4}{3} . (4-3)^9 + \binom{4}{4} . (4-4)^9$
$T(9,4) = 186480$

Logo, há 186480 formas de as 9 pessoas descerem nos 4 andares do prédio de modo que para cada andar, pelo menos uma pessoa desça do elevador.

2.4 **O Princípio da Reflexão**

Considere o Plano Cartesiano e uma partícula num ponto qualquer de coordenadas (x, y), adotemos que ela se move, na direção horizontal, sempre para a direita e, simultaneamente na direção vertical, para cima ou para baixo. Dessa forma, do ponto (x, y), ela pode se mover para $(x+1, y-1)$ ou para $(x+1, y+1)$.

Estabelecidas as condições iniciais, de quantas formas a partícula pode se deslocar do ponto inicial (x, y) para o ponto de coordenadas $(x+a, y+b)$, com $a, b \in \mathbb{Z}$?

Incialmente, observamos que o problema é equivalente a considerar um deslocamento da origem até (a, b). Seja S o total de subidas e D o total de descidas do ponto, como o número a de deslocamentos horizontais é igual ao total de subidas e de descidas, podemos equacionar:

$$\begin{cases} S + D = a \\ S - D = b \end{cases}, \text{ com } a > 0.$$

Logo, adotando, sem perda de generalidade, que $S \geq D$ e $b \geq 0$, obtemos: $S = \frac{a+b}{2}$ e $D = \frac{a-b}{2}$. Como S e D são inteiros e positivos, tem-se a e b como mesmas paridades e $a \geq b$. Portanto, o total de movimentos é dado pelo total de permutações:

$$\boxed{P_{S+D}^{S,D} = P_a^{\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}} = \binom{a}{\frac{a+b}{2}}}.$$

Observe que, se $b < 0$, teríamos $D - S = -b > 0$ e a expressão para o total de movimentos seria a mesma.

EXEMPLO 2.j

De quantas formas é possível de deslocar do ponto $(1, 2)$ para o ponto $(11, 6)$ de acordo com as condições impostas acima?

A princípio, consideremos o problema equivalente, transladando os pontos, de calcular o total de deslocamentos nas condições impostas de $(0, 0)$ a $(10, 4)$.

Portanto, sendo $a = 10$ e $b = 4$: $\binom{10}{\frac{10+4}{2}} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ formas.

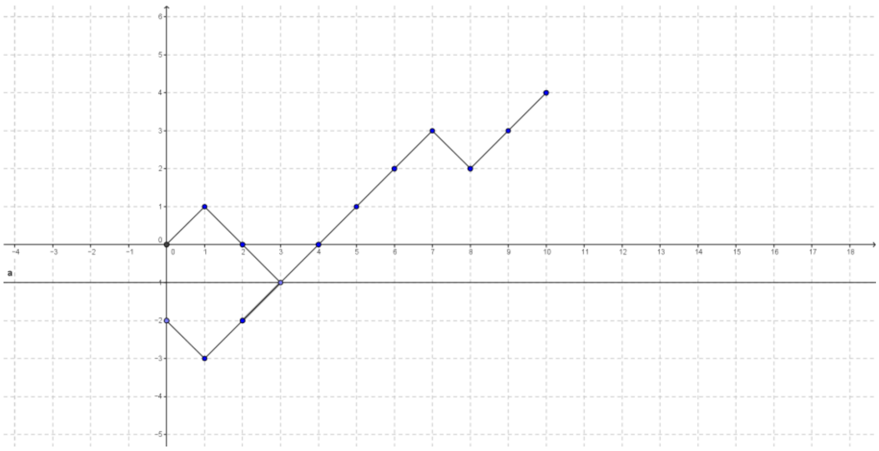
EXEMPLO 2.k

Quantos são os possíveis trajetos, nas condições consideradas, do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(10, 4)$ de modo a tocar na reta $y = -1$?

A maior dificuldade encontra-se em calcular de quantos modos é possível se deslocar até tocar a reta $y = -1$ para então se deslocar para o ponto desejado $(10, 4)$.

A técnica para esse tipo de problemas consiste em transformá-lo num problema na forma do exemplo anterior e, para isso, nota-se que ao refletir o ponto inicial em torno de reta $y = -1$, obtendo o ponto $(0, -2)$, o número de modos de ir de $(0, 0)$ até a reta $y = -1$ é o mesmo que o número de modos de ir de seu refletido $(0, -2)$ até a mesma reta $y = -1$, uma vez que para isso, na fórmula já deduzida, equivaleria a trocar uma subida por uma descida e vice-versa, gerando a mesma contagem final de permutações com repetições.

Figura 6 - Princípio da Reflexão: exemplo de trajetória.



Fonte: autor.

Dessa forma, transladando os pontos, o problema é equivalente a calcular o total de trajetórias de $(0, -2)$ a $(10, 4)$, ou seja, de $(0, 0)$ a $(10, 6)$: $\binom{10}{\frac{10+6}{2}} = \binom{10}{8} = 45$ possíveis trajetos.

Tal técnica de resolução para problemas dessa natureza é chamada de *Princípio da Reflexão*, em que o método de contagem corresponde a refletir o ponto inicial em torno da reta a qual se deseja tocar para então, por meio de uma translação, efetuar o cálculo do total de trajetos nas condições colocadas para o ponto desejado.

2.5 **Os Números de Catalan**

Eugène Charles Catalan foi um matemático belga, nascido em Bruges, que obteve a sua formação em Matemática na École Polytechnique e viveu de 1814 a 1894. Apesar de tais números levarem seu nome, foram descobertos anteriormente por Leonhard Euler, no século XVIII, quando pesquisava o número de triangulações de um determinado polígono. Pesquisas posteriores concluíram que na China, em 1730, o matemático mongol Mingantu já utilizava esses mesmos números para expressar séries de expansões senoidais. A homenagem a Eugène Catalan veio depois por conta de seus estudos na relação do número de maneiras de se colocar parêntesis numa expressão e o jogo Torre de Hanói.

Os *números de Catalan* aparecem em diversos problemas de contagem e inclusive podem ser obtidos recursivamente, como faremos mais a frente no presente texto. Sendo $n \in \mathbb{N}$, os números de Catalan C_n podem ser obtidos por meio de:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}.$$

A obtenção de tal resultado pode ser motivada pelo seguinte problema: de quantas formas, no plano cartesiano, pode-se ir da origem até o ponto (n, n) se, para todo $0 \leq x, y \leq n$, os únicos movimentos permitidos são $(x, y) \to (x + 1, y)$ ou $(x, y) \to (x, y + 1)$, com $x \geq y$ (análogo para $y \geq x$)?

Observamos que a condição $x \geq y$ implica em que os únicos pontos permitidos para as trajetórias de $(0, 0)$ a (n, n) devem ficar abaixo ou sobre a reta $y = x$. Se os únicos movimentos permitidos são para direita ou para cima, seja D o total de deslocamentos para direita e C o número de deslocamentos para cima. Dessa forma, o total de trajetos desconsiderando a condição é dado por:

$$\boxed{P_{D+C}^{D,C} = \frac{(D+C)!}{D!C!}}.$$

Como, no problema proposto, $D = C = n$ e $D + C = 2n$, temos que:

$$P_{2n}^{n,n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

Desse total, temos que retirar a quantidade de trajetos que não desejamos, que são os que cruzam a reta $y = x$. Notamos que, ao cruzar a reta $y = x$, o trajeto acaba tocando ou cruzando também a reta $y = x + 1$ e, portanto, o total de trajetos que cruzam $y = x$ é equivalente ao total de trajetos que tocam ou cruzam $y = x + 1$. Como cada trajeto indesejado toca inicialmente a reta $y = x + 1$ em algum ponto, podemos usar o Princípio da Reflexão e refletir ao redor da reta

$y = x + 1$ a parte do trajeto que vai da origem até o ponto de contato com a reta, obtendo assim um outro trajeto, com contagem equivalente, que parte do ponto $(-1, 1)$ e deve alcançar (n, n). Note que tal procedimento de reflexão pode ser repetido para qualquer trecho do trajeto que cruze $y = x$ de modo a tocar em $y = x + 1$, gerando um trajeto equivalente inteiramente acima de $y = x$, ou seja, pontos (x, y) tais que $y > x$. Seja o número de trajetos de $(-1, 1)$ a (n, n) equivalente ao número de trajetos de $(0, 2)$ a $(n + 1, n + 1)$ dado por:

$$P_{2n}^{n+1,n-1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n+1}.$$

Logo, o número de trajetos nas condições dadas que vão de $(0, 0)$ a (n, n) tais que $x \geq y$ é:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n+1)n!\frac{n!}{n}} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}.\binom{2n}{n} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}.\binom{2n}{n}.$$

CQD

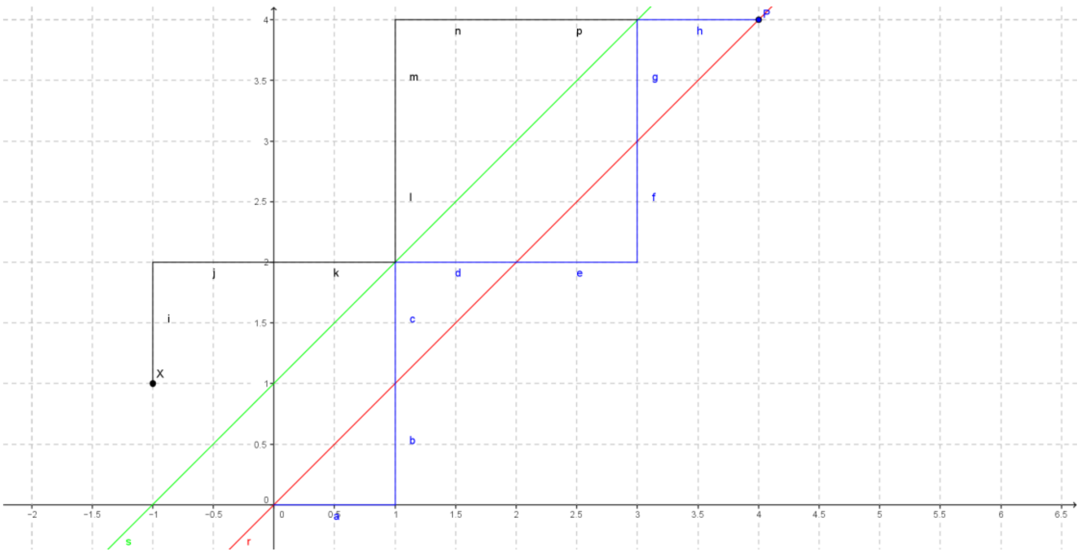
EXEMPLO 2.l

Qual a quantidade de trajetos distintos que vão da origem ao ponto $(4, 4)$ se cada movimento consiste em se deslocar de uma unidade para a direita ou para cima de modo que a ordenada de cada ponto deve ser maior que a abscissa?

De acordo com as condições do problema, queremos apenas os pontos acima da reta $y = x$. Podemos, portanto, utilizar o Princípio da Reflexão.

Seja um trajeto qualquer da origem ao ponto $(4, 4)$ representado pela trilha de azul $abcdefgh$ no plano cartesiano abaixo:

Figura 7 - Princípio da Reflexão 2: exemplo de trajetória.



Fonte: autor.

Observe que os trechos abc e $defg$ não respeitam a condição desejada, que é a de possuírem todos os pontos acima de $y = x$. Dessa forma, pelo Princípio da Reflexão, o trajeto abc é refletido em torno da reta $y = x + 1$, gerando o novo trajeto ijk equivalente, e o trajeto $defg$ ao ser refletido gera o trajeto equivalente $lmnp$. Portanto, o número de trajetórias da origem ao ponto $(4, 4)$ que possuem pontos acima da reta $y = x$ é equivalente ao total de trajetórias de $(-1, 1)$ ao ponto $(4, 4)$, ou ainda, transladando, de $(0, 2)$ a $(5, 5)$:

$$P_8^{5,3} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8.7.6}{3.2} = 56 \text{ trajetos distintos de acordo com as condições desejadas.}$$

O problema também poderia ser resolvido utilizando os números de Catalan, uma vez que o que desejamos calcular é o total de trajetórias da origem a $(4, 4)$ subtraído do total de trajetos que possuem pontos tais que $x \geq y$, ou seja:

$$\binom{8}{4} - \frac{1}{4+1}\binom{8}{4} = \frac{4}{5}\binom{8}{4} = \frac{4}{5}.\frac{8.7.6.5}{4.3.2} = \frac{4}{5}.70 = 56 \text{ trajetos desejados.}$$

EXEMPLO 2.m

Tem-se 6 pessoas numa fila de cinema em que o ingresso custa 10 reais. Se 3 pessoas irão pagar com uma nota de 10 reais cada e as outras 3 pessoas pagarão com notas de 20 reais, de quantas formas a fila pode ser organizada de modo que o caixa tenha sempre troco? Considere que o caixa começa sem qualquer troco.

A cada pessoa atendida na fila, seja o total de pessoas que pagou com notas de 10 reais igual a x e o total de pessoas que pagou com nota de 20 reais igual a y. Para que o caixa sempre tenha troco para dar os que pagarem com notas de 20 reais, deve-se ter que $x \geq y$. O problema, portanto, é análogo ao de calcular o total de trajetórias de $(0, 0)$ a $(3, 3)$ sendo permitido apenas ir para direita ou para cima de modo que a coordenada x seja sempre maior ou igual à coordenada y. Como vimos, trata-se de uma aplicação do Número de Catalan para o caso $n = 3$:

$$C_3 = \frac{1}{3+1}.\binom{6}{3} = \frac{1}{4}.20 = 5.$$

Para finalizar, basta permutar as pessoas que possuem notas de 10 reais entre elas e as que possuem notas de 20 reais entre elas:

$$5.3!.3! = 5.6.6 = 180 \text{ formas de organizar a fila nas condições do problema.}$$

2.6 **Caminhos de Dyck**

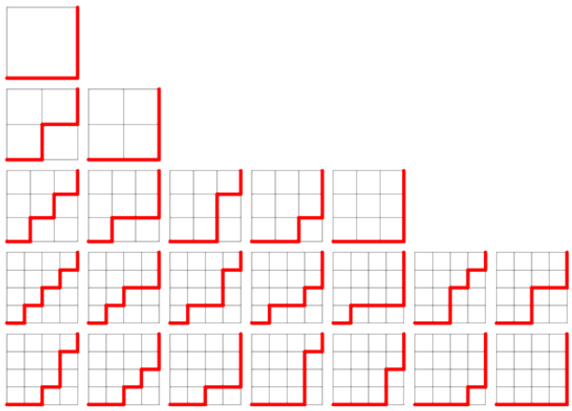
O matemático alemão Walther Franz Anton von Dyck, que viveu de 1856 a 1934, foi o primeiro a dar uma definição matematicamente moderna de Grupo e estabeleceu os fundamentos da Teoria Combinatória de Grupos. Os chamados *caminhos de Dyck* são nomeados em sua homenagem e possuem implicações mais avançadas em Teoria dos Grafos.

Antes de definir os caminhos de Dyck, definiremos um *caminho de escada* como um percurso de um ponto a outro no plano cartesiano por meio de segmentos unitários para a direita ou para cima, exatamente como já fizemos anteriormente.
Sendo assim:

> Um caminho de Dyck é um caminho de escada de $(0,0)$ a (n,n) que fica estritamente abaixo (mas pode tocar) a diagonal $y = x$. O número de caminhos Dyck de ordem n é dado pelo número de Catan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. (https://mathworld.wolfram.com/DyckPath.html)

Tomemos como exemplos as ilustrações dos caminhos de Dyck para os casos $n = 1, 2, 3$ e 4:

Figura 8 - Caminhos de Dyck.



Fonte: https://mathworld.wolfram.com/DyckPath.html.

Conforme pudemos verificar pela figura 2.3:

(i) para $n = 1$ existe apenas $C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2}{1} = 1$ caminho de Dyck;

(ii) para $n = 2$ há $C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{4}{2} = 2$ caminhos de Dyck;

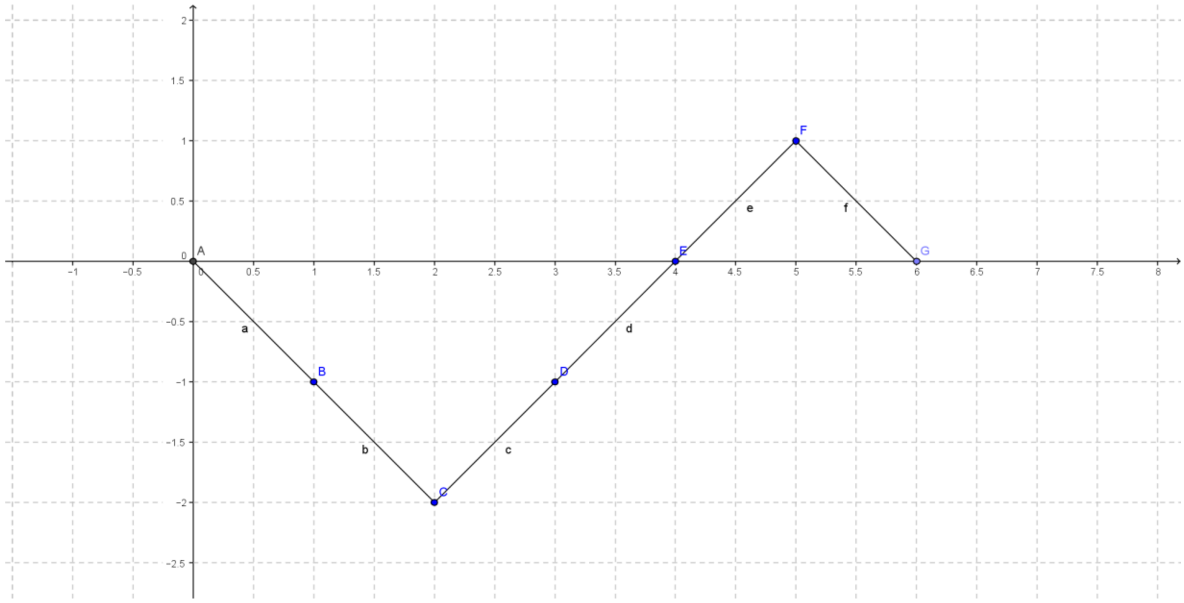
(iii) para $n = 3$ há $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = 5$ caminhos de Dyck;

(iv) para $n = 4$ há $C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{8}{4} = 14$ caminhos de Dyck.

Um caminho de Dyck também pode ser descrito de um modo distinto, por meio de deslocamentos em diagonal, ou seja, com subidas ou descidas, conforme descrito anteriormente, de $(0,0)$ subindo a $(1,1)$ ou descendo a $(1,-1)$ a cada etapa e assim por diante. Sendo assim, dizemos que um caminho de Dyck de $(0,0)$ a $(2n,0)$ com k falhas é aquele que possui k descidas abaixo do eixo x, denotado por $D_{n,k}$.

Seja, por exemplo, a representação abaixo de um dos possíveis caminhos de Dyck para $n = 3$ e com $k = 2$:

Figura 9 - Exemplo da 2ª forma dos caminhos de Dyck.



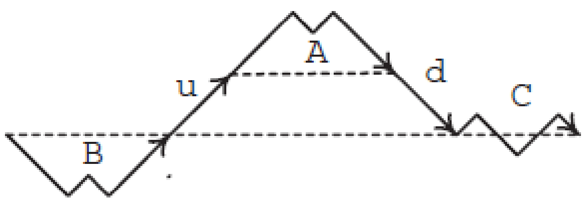
Fonte: autor.

No entanto, nós já sabemos que o número de caminhos de Dyck para o caso $n = 3$ é dado por $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{6}{3} = 5$. Dessa forma, somos levamos a concluir que o número de caminhos de Dyck independe de k, ou seja, para o exemplo dado: $D_{3,0} = D_{3,1} = D_{3,2} = D_{3,3} = C_3$.

Teorema de Chung – Feller: O número de caminhos de Dyck $D_{n,k}$ de $(0,0)$ a $(2n, 0)$, com k falhas, sendo $0 \leq k \leq n$, independe de k e é equivalente ao número de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Demonstração: Inicialmente, demonstraremos que o número de caminhos de Dyck independe de k concluindo que $D_{n,k} = D_{n,k+1}$, sendo $0 \leq k < n$.
Seja um caminho de Dyck genérico D, decomposto pelas etapas $BuAdC$, segundo a figura abaixo.

Figura 10 - Caminho $D = BuAdC$.

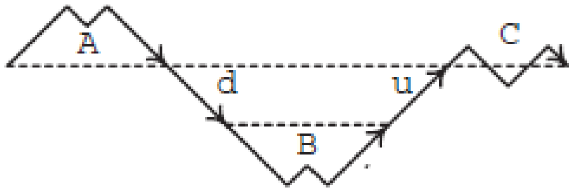


Fonte: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X07001811.

Em que u é a primeira subida acima do eixo x e d é a primeira descida que toca o eixo x após u. O caminho representado por B, como é anterior à primeira subida acima do eixo x, está inteiramente abaixo do eixo x e tem k_1 falhas, com k_1 inteiro positivo tal que $k_1 \leq k$. O caminho representado por A está inteiramente acima do eixo x, uma vez que está após a primeira

subida acima do eixo x e é anterior à primeira descida d, depois de u, que toca o eixo x, portando A não possui falhas. O restante do caminho é representado por C e possui $k - k_1$ falhas.
Trocando Bu por Ad obtém-se o caminho $D' = AdBuC$, com d sendo a primeira descida abaixo do eixo x e u a primeira subida abaixo do eixo x que o toca.

Figura 11 - Caminho $D' = AdBuC$.

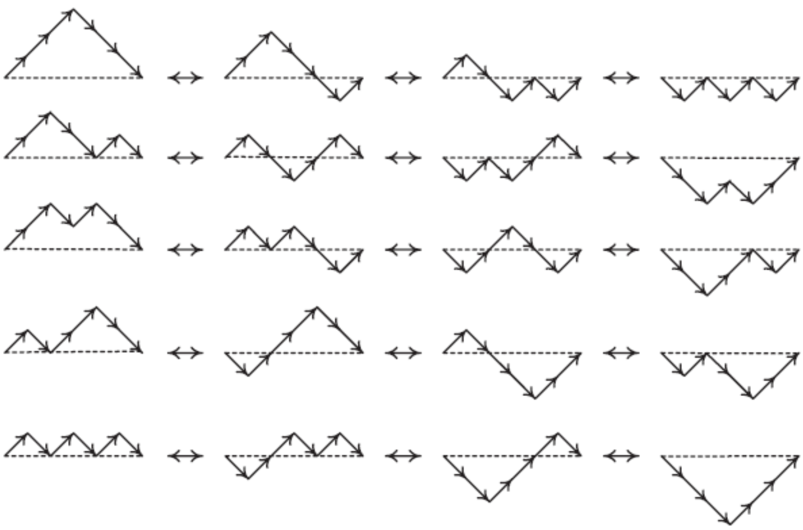


Fonte: idem.

Ao fazer a troca, notamos que o caminho D' não possui falhas em A, possui $1 + k_1$ falhas no trajeto dBu e as mesmas $k - k_1$ falhas no caminho restante C, totalizando $0 + 1 + k_1 + k - k_1 = k + 1$ falhas. Como os caminhos D e D' são caminhos equivalentes, ou seja, possuem a mesma contagem, concluímos que o número de caminhos de Dyck, da origem ao ponto $(2n, 0)$, com k falhas ou com $k + 1$ falhas é o mesmo. Portanto: $D_{n,k} = D_{n,k+1}$.

O real significado desse resultado é o de que, por meio de trocas sucessivas, podemos ir de $D_{n,0}$ a $D_{n,n}$. Seja a representação abaixo para o caso $n = 3$:

Figura 12 - Exemplo de equivalência entre $D_{3,0}$ e $D_{3,3}$.



Fonte: idem.

Uma vez que o número de caminhos de Dyck $D_{n,k}$ independe de k, para determinar o seu total basta calcular para algum valor qualquer de k. Seja o caso $k = 0$, dessa forma desejamos apenas os trajetos acima do eixo x, ou seja, do total de possibilidades de se ir de $(0, 0)$ a $(2n, 0)$ por

meio de subidas ou descidas, dado por $\binom{2n}{n}$, iremos retirar aquelas em que $y < 0$. Como um trajeto qualquer que fica abaixo do eixo x toca ou cruza a reta $y = -1$, pelo Princípio da Reflexão, conforme já feito anteriormente, o número de trajetos indesejados é dado pelo total de modos de se ir do refletido da origem com relação a $y = -1$ até o ponto final $(2n, 0)$.
Ao refletir a origem em torno de $y = -1$ obtém-se $(0, -2)$ e, o total de deslocamentos desse ponto ao ponto $(2n, 0)$ equivale ao total de deslocamentos de $(0, 0)$ a $(2n, 2)$:

$$\begin{cases} S + D = 2n \\ S - D = 2 \end{cases} \rightarrow \; S = n + 1 \text{ e } D = n - 1.$$

Logo: $P_{S+D}^{S,D} = \frac{(S+D)!}{S!D!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \binom{2n}{n+1}$.

E o total de caminhos de Dyck é dado por:

$$D_{n,k} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

CQD

3 CÁLCULO DE SOMATÓRIOS E OS NÚMEROS BINOMIAIS

Inicialmente definiremos uma notação mais coesa para cálculo de somatórios e suas propriedades para então entrarmos no foco do capítulo, que é o Triângulo de Pascal e os números binomiais.

Diversas propriedades serão demonstradas, versões não convencionais do Triângulo de Pascal serão obtidas, de modo a alcançarmos uma versão geral dos números binomiais que serão, entre outras coisas, ferramentas muito úteis para calcular somatórios mais complexos.

3.1 Cálculo de somatórios – Notação Sigma

Uma série ou somatório é representado, de modo genérico, por:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Tendo com propriedades básicas:

(i) $\sum_{k=1}^{n} c.a_k = c.\sum_{k=1}^{n} a_k$, com $c\epsilon\Re$;
(ii) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Para efetuar o cálculo de somatórios, em geral utilizaremos o *Princípio Fundamental da Somação,* mas antes de introduzir tal princípio, definiremos o *operador diferença*.
Seja a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definimos o *operador diferença* por:

$$\boxed{\Delta a_k = a_{k+1} - a_k}.$$

Dessa forma, conseguimos enunciar o *Princípio Fundamental da Somação* ou *Soma Telescópica* por:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1}.$$

Demonstração: Desenvolvendo o somatório:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n).$$

Dessa forma, fazendo as simplificações, é fácil notar que obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1.$$

CQD

EXEMPLO 3.a
Calcule o somatório: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

A técnica consiste em reescrever o somatório por meio do operador diferença para então aplicar a soma telescópica. Seja a sequência definida por: $a_k = \frac{1}{k}$.
Observamos que:

$$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = -\frac{1}{k(k+1)}.$$

Portanto, aplicando a soma telescópica:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = -\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = -(a_{n+1} - a_1) = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{1}\right) = -\left(\frac{1-n-1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}.$$

EXEMPLO 3.b
Calcule o somatório: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$.

Ao multiplicar o denominador e o numerador pelo conjugado do denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} . \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}.$$

Portanto:

$$a_k = \sqrt{k} \rightarrow \ \Delta a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1 = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1.$$

3.2 **O Triângulo de Pascal**

Ao listar os resultados das combinações de n para p numa tabela de modo que n seja sua posição na linha e p seja a posição coluna, ambos a partir do zero, formamos o chamado *Triângulo de Pascal*.

Tabela 3 - O Triângulo de Pascal.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0:	$\binom{0}{0}$					
Linha 1:	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
Linha 2:	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
Linha 3:	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
Linha 4:	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
Linha 5:	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Ao efetuar os cálculos das respectivas combinações, também podemos escrever o Triângulo de Pascal da forma:

Tabela 4 - Triângulo de Pascal com os resultados das combinações.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
...	...	...	...	...	...

A seguir demonstraremos algumas propriedades relativas ao Triângulo de Pascal e às combinações.

Relação de Stifel: Também conhecida como a recorrência ou lei formadora do Triângulo de Pascal, é enunciada por:

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Reescrevendo, no lado esquerdo da relação, as combinações:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{p+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1).\,n!}{(p+1).\,p!\,((n+1)-(p+1))!} = \frac{p+1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$$

$$\binom{n}{p+1} = \frac{n!}{(p+1)!\,(n-(p+1))!} = \frac{n-p}{n+1} \cdot \frac{(n+1).\,n!}{(p+1)!.\,(n-p).\,(n-(p+1))!}$$
$$= \frac{n-p}{n+1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$$

Somando os resultados obtidos:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{p+1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{p+1} + \frac{n-p}{n+1} \cdot \binom{n+1}{p+1}$$
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \left(\frac{p+1}{n+1} + \frac{n-p}{n+1}\right) \cdot \binom{n+1}{p+1} = \left(\frac{n+1}{n+1}\right) \cdot \binom{n+1}{p+1}$$
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

CQD

Demonstração combinatória: Seja um conjunto de $n+1$ objetos distintos dos quais desejamos formar subconjuntos com $p+1$ objetos distintos, o total de modos de formar tais subconjuntos, como já foi visto antes, é dado por $\binom{n+1}{p+1}$. Por outro lado, desses $n+1$ objetos distintos, seja um deles qualquer, o k −ésimo objeto (com $1 \leq k \leq n+1$). O total de subconjuntos de $p+1$ objetos pode ser dividido naqueles que possuem o k −ésimo objeto e os que não possuem. Com efeito: $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$.

De acordo com a Relação de Stifel, notamos que cada elemento do Triângulo de Pascal é dado pela soma do elemento que se encontra imediatamente acima dele com o seu respectivo anterior:

Tabela 5 - A Relação de Stifel.

1					
1	1				
1	2	1			
		‖			
1	3	3	1		
1	4	6 + 4		1	
			‖		
1	5	10	10	5	1

Combinações complementares: Numa mesma $n-$ ésima linha do Triângulo de Pascal, os termos equidistantes das extremidades são iguais:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Tal resultado segue diretamente da aplicação da fórmula da combinação. Desenvolvendo a combinação do lado direito da igualdade acima:

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,\big(n-(n-p)\big)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

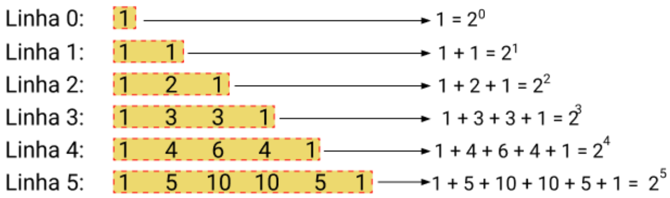
CQD

Demonstração combinatória: Considere um grupo de n pessoas, o total de modos de se escolher p delas é equivalente ao total de modos de não se escolher $n-p$ delas. Com efeito: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Daí o fato de essas combinações serem chamadas de complementares.

Além disso, vale a pena observar que por conta da propriedade das combinações complementares, toda linha do Triângulo de Pascal é simétrica.

Teorema das Linhas: A soma de todos os elementos da $n-$ ésima linha do Triângulo de Pascal é igual a 2^n:

Tabela 6 - Teorema das linhas.



$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Aplicando o primeiro Princípio da Indução Finita, temos que:

$$P(k): \binom{k}{0}+\cdots+\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}=2^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Logo:

$$k=0 \rightarrow P(0): \binom{0}{0}=1=2^0$$
$$k=1 \rightarrow P(1): \binom{1}{0}+\binom{1}{1}=1+1=2=2^1$$

Seja, por hipótese, verdade que:

$$k=n \rightarrow\ P(n): \binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dado o somatório de combinações abaixo, aplicamos a Relação de Stifel para cada parcela:

$$\begin{aligned}&\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}\ldots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}\\ &\quad=\binom{n+1}{0}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)\ldots+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)+\binom{n+1}{n+1}\end{aligned}$$

Como $\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}$ e $\binom{n+1}{n+1}=\binom{n}{n}$, observamos que o somatório equivale a:

$$\begin{aligned}&\binom{n}{0}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)\ldots+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)+\binom{n}{n}\\ &\quad=2.\left(\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)\end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese de indução:

$$\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}\ldots+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}=2.(2^n)=2^{n+1}$$

CQD

Demonstração combinatória: Seja um conjunto com n objetos distintos, o total de possíveis subconjuntos que podemos formar com elementos desse conjunto é dado por:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Por outro lado, como cada um dos n elementos tem duas possibilidades, estar ou não estar num subconjunto, o total de possíveis subconjuntos é dado por: $\underbrace{2.2.2 \ldots 2}_{n\ vezes} = 2^n$.

Logo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

CQD

Teorema das Colunas: A soma dos $n+1$ elementos da $p-$ ésima coluna do Triângulo de Pascal, a partir de seu primeiro termo, resulta no termo que está na diagonal do último termo adicionado:

Tabela 7 - Teorema das colunas.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$\boxed{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}}, \text{ com } n, p \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Aplicando a Relação de Stifel para cada elemento da coluna $p+1$ e depois somando as equações, obtemos:

$$\begin{cases} \binom{p+1}{p+1} = \binom{p}{p} \\ \binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} \\ \binom{p+3}{p+1} = \binom{p+2}{p+1} + \binom{p+2}{p} \\ \binom{p+4}{p+1} = \binom{p+3}{p+1} + \binom{p+3}{p} \\ \\ \dots \\ \\ \binom{p+n}{p+1} = \binom{p+n-1}{p+1} + \binom{p+n-1}{p} \\ \binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p+n}{p+1} + \binom{p+n}{p} \end{cases}$$

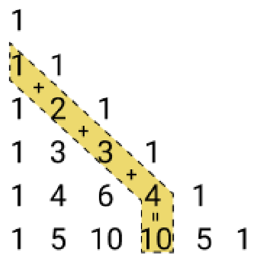
Notamos que se trata de uma soma telescópica e, do lado esquerdo da igualdade, restará apenas o termo $\binom{p+n+1}{p+1}$ enquanto, do lado direito, aparecerá a soma da $p-$ ésima coluna:

$$\binom{p+n+1}{p+1} = \binom{p+n}{p} + \binom{p+n-1}{p} + \cdots + \binom{p+3}{p} + \binom{p+2}{p} + \binom{p+1}{p}$$

CQD

Teorema das Diagonais: Partindo da $n-$ ésima linha e coluna zero do Triângulo de Pascal, a soma dos $p+1$ elementos em diagonal resulta no elemento imediatamente abaixo do último somado:

Tabela 8 - Teorema das diagonais.



$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}}$, para $n, p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Utilizando as combinações complementares de cada uma das combinações da soma, obtemos a soma dos $p+1$ elementos da $n-$ ésima coluna do Triângulo de Pascal:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Sendo que, aplicando a combinação complementar do resultado, obtemos:

$$\binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}$$

CQD

Teorema: Sejam n e p números naturais, temos que:

$$\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}, \text{ se } p < \tfrac{n-1}{2} \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{p} > \binom{n}{p+1}, \text{ se } p > \tfrac{n-1}{2}.$$

Demonstração: Analisando a diferença:

$$\binom{n}{p+1} - \binom{n}{p} = \frac{n!}{(p+1)!\,(n-p-1)!} - \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{(n-p)n! - (p+1)n!}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

Obtemos:

$$\binom{n}{p+1} - \binom{n}{p} = \frac{(n-2p-1)n!}{(p+1)!\,(n-p)!}$$

Como os resultados de $n!$, $(p+1)!$ e $(n-p)!$ são números positivos, o sinal da diferença analisada dependerá do sinal do fator $(n-2p-1)$.
Com efeito:

$$n-2p-1 > 0 \rightarrow p < \tfrac{n-1}{2} \qquad \text{ou} \qquad n-2p-1 < 0 \rightarrow p > \tfrac{n-1}{2}.$$

Ou seja, o real significado desse teorema é o de que, além de os elementos de uma mesma linha serem simétricos ou complementares, conforme foi verificado por meio das combinações complementares, eles também crescem até a metade da linha e, após a metade, decrescem. Dessa forma, o maior termo (os maiores termos) de uma mesma linha encontra-se (encontram-se) no seu centro, sendo que, para linhas de número par, há uma quantidade ímpar de termos e de fato há um termo central que é o maior. Mas, para linhas de número ímpar, havendo uma quantidade par de termos, não há um único termo central, mas são dois termos que ocupam as posições centrais e, consequentemente, são os maiores termos da respectiva linha.

3.3 **Binômio de Newton**

Considere o cálculo do desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, com n natural e $x, y \in \mathbb{R}$, para os seguintes casos particulares:

$n = 0 \rightarrow\ (x+y)^0 = 1;$
$n = 1 \rightarrow\ (x+y)^1 = x + y;$
$n = 2 \rightarrow\ (x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2;$

$n = 3 \rightarrow\ (x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) = x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

De um modo mais geral, utilizando a definição, considere o desenvolvimento da potência do binômio $(x+y)^n$, para $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\ldots(x+y)}_{n\ vezes},$$

ao invés de nos preocuparmos em calcular o resultado final desse desenvolvimento, nos perguntamos o seguinte: qual será o coeficiente do termo que contém y^k, com $0 \leq k \leq n$? O raciocínio consiste em analisar a distributiva dos n fatores iguais a $(x+y)$, pois para que apareça a potência y^k, dos n fatores acima, devemos escolher em k deles o y para fazer a distributiva e, consequentemente, nos outros $n-k$ restantes, o x foi o selecionado para a distributiva. Sabendo que, dados n fatores, o total de modos de se escolher k deles é $\binom{n}{k}$, este será o coeficiente procurado.
Portanto, o termo genérico do desenvolvimento do binômio acima é expresso por:

$$T = \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

Considere os casos particulares:

$k = 0 \rightarrow \binom{n}{0} x^{n-0}y^0 = x^n \rightarrow$ 1° termo do desenvolvimento;
$k = 1 \rightarrow \binom{n}{1} x^{n-1}y^1 = nx^{n-1}y \rightarrow$ 2° termo do desenvolvimento;
$k = 2 \rightarrow \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 \rightarrow$ 3° termo do desenvolvimento.

Generalizando, o *termo geral* do desenvolvimento do binômio é expresso por:

$$\boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k}y^k},$$

em que $0 \leq k \leq n$ e $k+1$ é a posição do termo no desenvolvimento de $(x+y)^n$, com $n \in \mathbb{N}$, organizado segundo potências crescentes de y (ou decrescentes de x).

Logo, o binômio pode ser reescrito na forma do somatório:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k}.$$

EXEMPLO 3.c
Determinar o sexto termo no desenvolvimento de $\left(3x^2y - \frac{1}{3}\right)^9$, organizado segundo potências decrescentes de x e y.

Seu termo geral é dado por: $T_{k+1} = \binom{9}{k}(3x^2y)^{9-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$.

Logo, sendo $k+1=6$, devemos ter que $k=5$ e: $T_6 = \binom{9}{5}(3x^2y)^{9-5}\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{9!}{5!4!}3^4x^8y^4\left(-\frac{1}{3^5}\right) = -\frac{9.8.7.6}{4.3.2}.\frac{1}{3}.x^8y^4 = -42x^8y^4$.

EXEMPLO 3.d

Qual o termo independente de x em: $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$?

Seu termo geral é dado por: $T_{k+1} = \binom{6}{k}(x^2)^{6-k}(x^{-1})^k = \binom{6}{k}x^{12-2k-k} = \binom{6}{k}x^{12-3k}$.

Portanto, para obter o termo independente de x: $12-3k=0 \rightarrow k=4$.

Logo: $T_{4+1} = \binom{6}{4}x^{12-12} \rightarrow T_5 = \frac{6!}{4!2!} = 15$.

EXEMPLO 3.e

Qual a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$?

Como estamos interessados apenas nos coeficientes, basta impor que $x=y=1$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k \rightarrow 2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$.

Portanto, a soma dos coeficientes é dada pela soma dos termos da $n-$ ésima linha do Triângulo de Pascal, que vale 2^n.

Para interpretar o resultado obtido para $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$, sejam os casos particulares:

$n=0 \rightarrow (x+y)^0 = 1$

$n=1 \rightarrow (x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1+\binom{1}{1}y^1$

$n=2 \rightarrow (x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}xy+\binom{2}{2}y^2$

$n=3 \rightarrow (x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2y+\binom{3}{2}xy^2+\binom{3}{3}y^3$

$n=4 \rightarrow (x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3y+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}xy^3+\binom{4}{4}y^4$

Ou seja, os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$ são os resultados das combinações $\binom{n}{p}$, com $p \in \{0,1,2,\dots,n\}$, que formam a $n-$ ésima linha do Triângulo de Pascal. Por conta desse fato, os resultados das combinações são também chamados de *números binomiais* ou *coeficientes binomiais*.

3.4 **Definição geral de coeficientes binomiais**

A versão estendida dos números binomiais é dada por:

$$\boxed{\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)(u-2)\dots(u-r+1)}{r!}, & se\ r > 0 \\ 1, & se\ r = 0 \\ 0, & se\ r < 0 \end{cases} \quad , sendo\ u \in \Re \text{ e } r \in \mathbb{Z}}.$$

Note que agora as combinações podem ser calculadas não apenas de um número natural para outro natural, mas foram estendidas de um real para um inteiro. Antes de analisar as consequências dessa versão mais geral nos teoremas anteriormente demonstrados, vamos calcular alguns resultados básicos.

EXEMPLO 3.f
Calcule: $\binom{-1}{3}$.

De acordo com a definição apresentada: $\binom{-1}{3} = \frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{3!} = -1$.

EXEMPLO 3.g
Calcule: $\binom{1}{2}$.

Aplicando a definição: $\binom{1}{2} = \frac{(1)(1-1)}{2!} = 0$.

EXEMPLO 3.h
Calcule: $\binom{\frac{1}{2}}{3}$.

Pela definição: $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} \frac{3}{2.2.2.3.2.1} = \frac{1}{16}$.

Dessa forma, como pudemos observar no exemplo 3.g, para u e r naturais, temos que:

$$\boxed{\binom{u}{r} = 0, r > u}.$$

De acordo com essa nova definição de números binomiais, observe que não faz sentido atribuirmos um significado combinatório para os resultados das combinações e nem aplicarmos demonstrações combinatórias para os teoremas. Sejam os resultados de $\binom{n}{k}$, com $n, k \in \mathbb{Z}$, observe que agora não faz sentido considerarmos válido o teorema das combinações complementares. Como contraexemplo, sejam $\binom{-1}{k}$ e $\binom{-1}{-1-k}$:

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-1-(k-1))}{k!} = \frac{(-1)^k.1.2.3\dots k}{k!} = (-1)^k.$$

E, por meio da definição, temos que:

$$\binom{-1}{-1-k} = \begin{cases} 0, k > -1; \\ (-1)^{-1-k}, k \leq -1. \end{cases}$$

Portanto, $\binom{-1}{k} \neq \binom{-1}{-1-k}$.

Dessa forma, para $r \in \mathbb{R}$, os principais teoremas e identidades que permanecem válidos e as respectivas condições de validade são:

(i) Soma de números binomiais: $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$, para $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Absorção: $\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$, para k inteiro não nulo.

(iii) Negação superior: $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$, para $k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Reversão trinomial: $\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$, para m, k inteiros.

(v) Teorema das diagonais: $\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$, para $k, n \in \mathbb{N}$.

Utilizando a definição apresentada e aplicando sucessivamente a soma de números binomiais, iremos analisar os resultados de $\binom{n}{m}$ para montar algumas versões mais estendidas do Triângulo de Pascal:

(i) Com m e n naturais quaisquer:

Tabela 9 - Triângulo de Pascal estendido 1.

m ***n***	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	...

(ii) Com m e n inteiros quaisquer:

Tabela 10: Triângulo de Pascal estendido 2.

m ***n***	**−4**	**−3**	**−2**	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**
−4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
−3	−3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
−2	3	−2	1	0	0	0	0	0	0	0	...

−1	−1	1	−1	1	0	0	0	0	0	0	..
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	...
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	...
2	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	...
3	0	0	0	0	1	3	3	1	0	0	...
4	0	0	0	0	1	4	6	4	1	0	...

Para dar sequência, iremos antes demonstrar um Teorema importante e que será necessário futuramente:

Teorema: Seja r um número real e k um inteiro, temos que:

$$\boxed{\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}},$$

também chamada de *negação superior*.

Demonstração: Desenvolvendo o número binomial: $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-(k-1))}{k!}$.
Por outro lado:

$$\frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-(k-1))}{k!} = \frac{(-1)^k.(k-1-r)\ldots(2-r)(1-r)(-r)}{k!} = (-1)^k \binom{k-1-r}{k}.$$

CQD

Desenvolvimento do binômio de Newton: De acordo com a definição estendida dos números binomiais, podemos escrever o desenvolvimento de um binômio $(x+y)^u$, para $u \in \Re$, da forma:

$$\boxed{(x+y)^u = \binom{u}{0} x^u + \binom{u}{1} x^{u-1} y + \cdots + \binom{u}{r} x^{u-r} y^r + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^{u-r} y^r}.$$

EXEMPLO 3.i
Encontrar o coeficiente de x^3 em: $(1+4x)^{1/2}$.

Temos que: $(1+4x)^{1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{1/2}{r} (4x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} 4^r \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!} x^r$.
Portanto, o coeficiente de x^3 é dado por $r = 3$: $4^3 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = 2^6 \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = 4$.

EXEMPLO 3.j
Prove que: $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$.

Temos que: $(1-4x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} (-4x)^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2k-3)}{k!} (2x)^k$.

Logo: $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.3\ldots(2k-3)}{k!} (2x)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \frac{x^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{x^k}{k+1}$.

Observe que o termo geral do desenvolvimento acima é o *número de Catalan*: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

3.5 **Somatórios de expressões polinomiais**

Seja um polinômio genérico P, de grau n, representado por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Tem-se que P pode ser reescrito da forma:

$$P(x) = A_n x(x-1)\ldots\big(x-(n-1)\big) + A_{n-1}x(x-1)\ldots\big(x-(n-2)\big) + \cdots + A_1 x + A_0,$$

onde cada A_k pode ser escrito em termos de $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, para $0 \le k \le n$.

Como a identidade é sempre válida, o polinômio P pode ser representado por:

$P(x) = n!\, A_n \frac{x(x-1)\ldots\big(x-(n-1)\big)(x-n)!}{n!(x-n)!} + (n-1)!\, A_{n-1} \frac{x(x-1)\ldots\big(x-(n-2)\big)\big(x-(n-1)\big)!}{(n-1)!\big(x-(n-1)\big)!} + \cdots + A_1 x + A_0$.

Logo:

$$P(x) = b_n \binom{x}{n} + b_{n-1}\binom{x}{n-1} + \cdots + b_1\binom{x}{1} + b_0\binom{x}{0}, \text{ com } b_k = k!\, A_k \text{ e } 0 \le k \le n.$$

Dessa forma, dado o polinômio P de grau n, sempre será possível reescrevê-lo de acordo com a identidade:

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv b_n \binom{x}{n} + b_{n-1}\binom{x}{n-1} + \cdots + b_1\binom{x}{1} + b_0\binom{x}{0}}.$$

Uma aplicação muito útil de tal resultado é para o cálculo de somatórios da forma $S = \sum_{x=k_1}^{k_2} P(x)$, em que, ao reescrever o polinômio em termos de números binomiais, podemos utilizar suas propriedades, respeitadas as respectivas condições para o domínio de P.

EXEMPLO 3.k

Calcule: $\sum_{k=1}^{n} k$.

Seja $P(k) = k$, reescrevendo o polinômio P na forma demonstrada: $P(k) = k = \binom{k}{1}$.

Portanto, utilizando o Teorema das Colunas: $\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$.

EXEMPLO 3.l

Calcule: $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Seja: $P(k) = k^2 = A\binom{k}{2} + B\binom{k}{1} + C = A\frac{k(k-1)}{2} + Bk + C \rightarrow A = 2, B = 1$ e $C = 0$.

Logo: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left[2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right] = 2.\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$.

Simplificando o resultado, obtemos: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2.\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n}{2!} = \frac{(n+1)n}{6}.[2(n-1) + 3] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXEMPLO 3.m

Calcule: $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$.

Inicialmente, observamos que: $P(i) = i(i+1) = i^2 + i = A\binom{i}{2} + B\binom{i}{1} \rightarrow A = 2$ e $B = 2$.

Logo, pela relação de Stifel: $P(i) = 2\binom{i}{2} + 2\binom{i}{1} = 2.\left[\binom{i}{2} + \binom{i}{1}\right] = 2.\binom{i+1}{2}$.

Calculando o somatório pedido: $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} 2\binom{i+1}{2} = 2.\sum_{i=1}^{n}\binom{i+1}{2} = 2.\binom{n+2}{3}$.

4 POLINÔMIO DE LEIBNIZ E FUNÇÕES GERADORAS

Dando continuidade ao capítulo anterior, o desenvolvimento de um binômio será generalizado para o desenvolvimento de polinômios e a técnica de determinação de coeficientes será bastante explorada.

Por meio das mais diversas ferramentas matemáticas, o ápice do capítulo consiste em utilizar a expansão de funções em séries de potências para a determinação de seu termo geral na resolução de problemas de contagem, obtendo poderosas técnicas de resolução de problemas de análise combinatória por meio de funções geradoras.

4.1 Polinômio de Leibniz

No capítulo anterior, vimos como determinar um termo geral no desenvolvimento de um binômio. No entanto, agora, por meio de raciocínio semelhante, iremos generalizar tal argumento para determinar um termo genérico do desenvolvimento de uma potência de um polinômio.

Seja o desenvolvimento de:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_p) \ldots (x_1 + x_2 + \cdots + x_p)}_{n\ vezes}.$$

Estamos interessados em determinar o coeficiente de um termo genérico $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}$, de modo que a soma dos expoentes naturais deve ser $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$. Para isso, por meio de um raciocínio semelhante ao já empregado anteriormente, para se obter $x_1^{\alpha_1}$, deve-se escolher, nos n parênteses da distributiva, o x_1 por α_1 vezes; assim como nos $n - \alpha_1$ parênteses restantes, o x_2 deve ser escolhido em α_2 vezes; nos outros $n - \alpha_1 - \alpha_2$ parênteses, o x_3 deve ser escolhido por α_3 vezes e assim sucessivamente, até que nos $n - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{p-1} = \alpha_p$ parênteses restantes da distributiva o x_p seja escolhido. Com efeito, o total de escolhas pode ser calculado por meio de:

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\ldots\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{p-1}}{\alpha_p} =$$
$$\frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!}\frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!(n-\alpha_1-\alpha_2)!}\frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!}\cdots\frac{(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{p-1})!}{\alpha_p!(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{p-1}-\alpha_p)!},$$

ao efetuar as simplificações no produto acima e sabendo que $n - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{p-1} - \alpha_p = 0$, obtemos:

$$\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots\alpha_p!0!} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots\alpha_p!}.$$

Logo, o *termo geral do polinômio de Leibniz* é expresso por:

$$\boxed{\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots\alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}}, \text{ com } \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n.$$

E o desenvolvimento do *polinômio de Leibniz* pode ser calculado por meio do somatório:

$$\boxed{\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_p\right)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots\alpha_p!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}},$$

sendo a soma dos inteiros não negativos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = n$.

EXEMPLO 4.a
Determine o desenvolvimento de: $(x^2 + 2x - 1)^4$.

Sendo o termo geral representado por: $\frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(x^2)^{\alpha_1}(2x)^{\alpha_2}(-1)^{\alpha_3} = \frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(-1)^{\alpha_3}2^{\alpha_2}x^{2\alpha_1+\alpha_2}$, de modo que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4$.
Agora teremos que abrir em diversos casos, mas, para isso, analisaremos segundo valores decrescentes para α_1:

(i) Para $\alpha_1 = 4$:

Então temos apenas que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$: $\frac{4!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(-1)^{\alpha_3}2^{\alpha_2}x^{2\alpha_1+\alpha_2} = \frac{4!}{4!0!0!}(-1)^0 2^0 x^{2(4)+0} = x^8$.

(ii) Para $\alpha_1 = 3$:

Então $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 0$: $\frac{4!}{3!1!0!}(-1)^0 2^1 x^{6+1} = 8x^7$;
ou $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$: $\frac{4!}{3!0!1!}(-1)^1 2^0 x^{6+0} = -4x^6$.

(iii) Para $\alpha_1 = 2$:

Então $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 0$: $\frac{4!}{2!2!0!}(-1)^0 2^2 x^{4+2} = 24x^6$;
ou $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 1$: $\frac{4!}{2!1!1!}(-1)^1 2^1 x^{4+1} = -24x^5$;
ou $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 2$: $\frac{4!}{2!0!2!}(-1)^2 2^0 x^{4+0} = 6x^4$.

(iv) Para $\alpha_1 = 1$:

Então $\alpha_2 = 3$ e $\alpha_3 = 0$: $\frac{4!}{1!3!0!}(-1)^0 2^3 x^{2+3} = 32x^5$;
ou $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 1$: $\frac{4!}{1!2!1!}(-1)^1 2^2 x^{2+2} = -48x^4$;
ou $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 2$: $\frac{4!}{1!1!2!}(-1)^2 2^1 x^{2+1} = 24x^3$;
ou $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 3$: $\frac{4!}{1!0!3!}(-1)^3 2^0 x^{2+0} = -4x^2$.

(v) Para $\alpha_1 = 0$:

Então $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 0$: $\frac{4!}{0!4!0!}(-1)^0 2^4 x^{0+4} = 16x^4$;
ou $\alpha_2 = 3$ e $\alpha_3 = 1$: $\frac{4!}{0!3!1!}(-1)^1 2^3 x^{0+3} = -32x^3$;
ou $\alpha_2 = 2$ e $\alpha_3 = 2$: $\frac{4!}{0!2!2!}(-1)^2 2^2 x^{0+2} = 24x^2$;
ou $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 3$: $\frac{4!}{0!1!3!}(-1)^3 2^1 x^{0+1} = -8x$;
ou $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 4$: $\frac{4!}{0!0!4!}(-1)^4 2^0 x^{0+0} = 1$.

Ao somar cada um dos resultados acima e reduzir os termos semelhantes, obtemos:

$$(x^2 + 2x - 1)^4 = x^8 + 8x^7 + 20x^6 + 8x^5 - 26x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 8x + 1.$$

EXEMPLO 4.b
Qual o coeficiente de x^{19} no desenvolvimento de: $(2 - x^5 + x^7)^{20}$?

Inicialmente devemos escrever a representação do termo geral: $\frac{20!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(2)^{\alpha_1}(-x^5)^{\alpha_2}(x^7)^{\alpha_3} = \frac{20!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(2)^{\alpha_1}(-1)^{\alpha_2}x^{5\alpha_2+7\alpha_3}$.
Na expressão obtida para o termo geral, iremos impor a condição do enunciado: $5\alpha_2 + 7\alpha_3 = 19$, lembrando que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 20$.
Notamos que a única maneira de se obter $5\alpha_2 + 7\alpha_3 = 19$ é para $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = 2$, portanto $\alpha_1 + 1 + 2 = 20 \to \alpha_1 = 17$.
Substituindo na expressão do termo geral:

$$\frac{20!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}(2)^{\alpha_1}(-1)^{\alpha_2}x^{5\alpha_2+7\alpha_3} = \frac{20!}{17!1!2!}(2)^{17}(-1)^1x^{5+14} = -\frac{20.19.18}{2}.2^{17}.x^{19} = -3420.131072.x^{19} = -448266240x^{19}.$$

4.2 **Introdução às funções geradoras**

Estamos acostumados a calcular o número de soluções inteiras não-negativas de uma equação por meio das combinações completas (ou com repetição) ou ainda o famoso permutar "pontinhos" e "tracinhos".
Seja, por exemplo, a equação: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Sabemos que o total de soluções inteiras é dado por $CR_{3,4} = \binom{3-1+4}{4} = \binom{6}{4} = 15$. Caso seja acrescida alguma restrição do tipo $x_k \geq n$, com k sendo 1, 2 ou 3 e $n \in \{1,2,3,4\}$, também sabemos resolver por meio de uma substituição de variáveis do tipo $y_k = x_k + n$.

Um outro método para resolver o mesmo problema é considerar um polinômio para cada incógnita em que todos os possíveis valores de cada incógnita são representados pelas respectivas potências da variável no polinômio.
Seja a equação inicial: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Como não há restrições adicionais, cada incógnita pode assumir valores que vão de 0 a 4. Com efeito:

$$p_1 = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$
$$p_2 = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$
$$p_3 = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4$$

O método consiste em procurarmos o coeficiente da potência de x^4 no produto dos três polinômios. É possível verificar que cada coeficiente de x^k representa o total de modos de se obter a soma k na equação dada.
Portanto, para obtermos o expoente 4 em $(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^3$:

$$(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^3 = (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4),$$

basta encontrar o total de modos de se obter x^4 na distributiva acima. O que pode ser obtido ao analisarmos, na distributiva, todos os possíveis modos de se obter o coeficiente desejado:

$$[1,1,x^4] = \binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$$
$$[1,x,x^3] = \binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 6$$

$$[1, x^2, x^2] = \binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$$
$$[x, x, x^2] = \binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$$

Portanto: $3 + 6 + 3 + 3 = 15$.

Pode não parecer o melhor método para resolver um problema já conhecido, mas caso alguma outra restrição diferente seja colocada, por meio deste método somos capazes de calcular o total de soluções inteiras sem grandes dificuldades.

EXEMPLO 4.c
Quantas são as soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ em que $x_1 \in \{1,2\}$, $x_2 \in \{4,5,6\}$ e $x_3 \in \{0,1,5,6\}$?

Formamos os polinômios:

$$p_1 = x^1 + x^2$$
$$p_2 = x^4 + x^5 + x^6$$
$$p_3 = x^0 + x^1 + x^5 + x^6$$

Portanto: $(x^1 + x^2)(x^4 + x^5 + x^6)(1 + x^1 + x^5 + x^6) = x^5(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^5 + x^6)$.
Observamos que a menor potência é de x^5 e que para obter x^6 devemos calcular o total de modos de se obter x na distributiva: $[1,1,x] = \binom{3}{2}\binom{1}{1} = 3$.

EXEMPLO 4.d
Numa urna há 4 bolas, sendo duas amarelas, uma branca e uma cinza. Qual o total de modos de retirarmos três bolas da urna? Discrimine os casos.

De modo análogo às construções feitas anteriormente, teríamos os polinômios: $p_1 = 1 + x + x^2$, $p_2 = 1 + x$ e $p_3 = 1 + x$. No entanto, para melhor discriminar os casos, tomemos o produto dos seguintes polinômios:

$$\begin{aligned}&(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx)\\ &= 1 + (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 + (a^2b + a^2c + abc)x^3\\ &+ a^2bcx^4\end{aligned}$$

Portanto, existem 3 modos de se retirar três bolas da urna: duas amarelas e uma branca, duas amarelas e uma cinza e uma amarela, uma branca e uma cinza.

EXEMPLO 4.e
Num jogo, pontos são ganhos somando-se os valores obtidos ao se jogarem dois dados em forma de tetraedro regular, cujas faces são numeradas 1, 2, 3 e 4. O valor obtido é aquele que está na face voltada para baixo. Porém, por defeito de fabricação, um jogo veio com um dado numerado 1, 2, 2 e 3 e o outro, 1, 3, 3 e 5. Ao receber o jogo para substituição, o dono da fábrica, que era matemático, argumentou que o jogo não mudaria mesmo utilizando os dados

defeituosos, isto e, que o número de maneiras de se obter n pontos, $2 \leq n \leq 8$, com os dados defeituosos e com os dados normais era o mesmo. Ele tinha razão? Explique.

Para analisar se ele tinha razão ou não, o jogo não mudaria se independente do par de dados a contagem de possibilidades para cada pontuação fosse a mesma. Inicialmente, para os dados corretos, teríamos:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4)^2 = 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8.$$

Por outro lado, para os dados defeituosos:

$$(x + 2x^2 + x^3)(x + 2x^3 + x^5) = 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8.$$

Portanto independente do par de dados, as contagens são equivalentes e o dono da fábrica estava correto.

4.3 **Definição de função geradora**

Uma *série de potências* é uma soma infinita que pode ser representada por:

$$\boxed{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k},$$

em que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é a *sequência de coeficientes*.

Observe que qualquer polinômio em x pode ser escrito dessa forma, pois, por exemplo:

$$p(x) = 3x - x^3 + 2x^4 = 0 + 3x + 0x^2 - x^3 + 2x^4 + 0x^5 + 0x^6 + \cdots$$

Como consequências da definição e de acordo com as propriedades dos somatórios vistas anteriormente, temos que:

(i) Duas sérias de potências $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$são iguais se, e somente se, $a_k = b_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(ii) A soma das séries de potências $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ é a série de potências $A(x) + B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)x^k$.

(iii) O produto das séries de potências $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ é a série de potências $A(x).B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right)x^k$.

Definimos, portanto, a *função geradora ordinária* da sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ como a séria de potências:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}.$$

Em outras palavras, uma função geradora ordinária é uma série de potências na qual seu coeficiente a_k, para todo $k \in \mathbb{N}$, representa o número de soluções para algum problema combinatório. Dessa forma, a estratégia para resolver problemas de análise combinatória usando funções geradoras consiste em encontrar a função geradora em que seu coeficiente se adequa às condições do problema.

EXEMPLO 4.f
Qual a função geradora ordinária $f(x)$ na qual o coeficiente a_k de x^k representa o número de $k-$ subconjuntos de um conjunto de n elementos?

Sabemos que um conjunto de n elementos possui $\binom{n}{k}$ subconjuntos distintos com k elementos cada.
Portanto, a função geradora pedida é dada por: $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$.

EXEMPLO 4.g
Quantos são os pares ordenados (a, b), com a e b inteiros não-negativos, que satisfazem a equação: $2a+5b=27$?

Se considerarmos $2a=x_1$ e $5b=x_2$, reescrevemos a equação da forma: $x_1+x_2=27$.
Seja, de modo geral, a equação $x_1+x_2=n$, com $n\in\mathbb{N}$. Os valores assumidos por x_1 e por x_2, respectivamente, são: $\{0,2,4,6,8,...\}$ e $\{0,5,10,15,...\}$.
Logo, modelamos as funções geradoras para os valores de x_1 e de x_2 respectivamente por: $A_1(x)=1+x^2+x^4+x^6+x^8+\cdots$ e $A_2(x)=1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots$.
A função geradora para o caso geral $x_1+x_2=n$ é dada pelo produto $f(x)=A_1(x)A_2(x)$ e, considerando $n=27$, estamos interessados no coeficiente de x^{27}:

$$[x^5, x^{22}]=1$$
$$[x^{15}, x^{12}]=1$$
$$[x^{25}, x^2]=1$$

Portanto, existem 3 pares ordenados que satisfazem a equação.

4.4 **Determinação de coeficientes de funções geradoras**

Pudemos observar que a modelagem de funções geradoras é uma poderosa ferramenta para resolver problemas de combinatória, bastando determinar o coeficiente adequado ao problema. Portanto, vamos agora desenvolver alguns métodos para determinar o coeficiente desejado utilizando algumas propriedades algébricas das séries e até mesmo algumas ferramentas do Cálculo e da Análise. Nesse sentido, é importante salientar que não estaremos preocupados nas condições às quais as séries convergem ou divergem, assunto este que pode ser melhor abordado num estudo de critérios de convergência de séries. Como o nosso foco é unicamente o de determinar o coeficiente adequado da função geradora, vamos buscar representar as séries do modo mais simples possível, de modo a facilitar a determinação do coeficiente desejado.

EXEMPLO 4.h
Determinar a função geradora para a sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $a_k=1$.

De modo imediato, a função geradora para tal sequência de coeficientes é dada por: $f(x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$.

No entanto, estamos agora interessados em escrever tal função geradora de modo mais simples. Para isso, seja o raciocínio que segue:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \to xf(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots$$

Logo:

$$f(x) - xf(x) = 1 \to f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Dessa forma:

(i) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

(ii) $x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots = x.f(x) = \frac{x}{1-x}$

(iii) $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots = x^2.f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

(iv) $x^k + x^{k+1} + x^{k+2} \ldots = x^k.f(x) = \frac{x^k}{1-x}$

Além disso:

(i) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

(ii) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$

(iii) $1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots = \frac{1}{1-x^3}$

(iv) $1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots = \frac{1}{1-x^k}$

Também temos que:

(i) $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$

(ii) $f'(x) = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \to 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$

(iii) $\int f(x)dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \int \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = -\ln(1-x) \to x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln \frac{1}{1-x}$

EXEMPLO 4.i
Determine a função geradora $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ tal que $a_k = 2k + k^2$.

De acordo com as propriedades, podemos decompor tal função geradora como soma de outras duas tais que $b_k = 2k$ e $c_k = k^2$, com $a_k = b_k + c_k$.
Logo: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (b_k + c_k) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \to f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k$.
Sendo que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \to \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} kx^k.$$

E:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \to \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

Logo:

$$x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k.$$

Obtemos, dessa forma:

$$f(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Demonstraremos, agora, um teorema auxiliar para a determinação de certo tipo de funções geradoras.

Teorema: Seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a sequência de coeficientes cuja função geradora é dada por $f(x)$, então a função geradora da sequência de coeficientes dada por $c_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ é dada por: $\left(\frac{1}{1-x}\right)f(x)$.

Demonstração: Sejam as sérias de potências $f(x) = A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ e $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k$, conforme já definido anteriormente.
Sabemos que: $A(x).B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0)x^k$.
Ou seja:

$$f(x).B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$$

Tomando $b_k = 1$, para todo k natural, temos que $B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ e que:

$$f(x).\left(\frac{1}{1-x}\right) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots$$

Ou seja, obtemos a função geratriz da série de coeficientes dada por: $(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

CQD

Tal resultado será muito útil para problemas quem envolvam cálculos de somatórios.

EXEMPLO 4.j
Calcule o somatório: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Trata-se da soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos, resultado já obtido anteriormente por meio de outra técnica.

Utilizando funções geradoras, sendo $c_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, temos que a função geradora para essa série de coeficientes é dada por $C(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right) f(x)$, com $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ e $a_k = k^2$, para todo k natural.
Como já foi determinado no exemplo anterior: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.
Logo:

$$C(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right) \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = (x + x^2)(1-x)^{-4} = (x + x^2).\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-4}{k} (-x)^k$$
$$C(x) = (x + x^2).\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+4-1}{k} (-x)^k = (x + x^2).\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k$$
$$C(x) = x.\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k + x^2.\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k$$

Portanto, para obter o coeficiente de x^n, basta somar os coeficientes de $x.x^{n-1}$ e de $x^2.x^{n-2}$:

$$c_n = \binom{n-1+3}{n-1} + \binom{n-2+3}{n-2} = \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2}$$
$$c_n = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!\left(n+2-(n-1)\right)!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\left(n+1-(n-2)\right)!}$$
$$c_n = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} = \frac{(n+1)n}{3!}[n+2+n-1]$$

Logo:

$$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXEMPLO 4.k
Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$?

Como cada incógnita pode assumir valores naturais, temos que a função geradora do problema é dada por: $f(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \ldots (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)}_{n\ vezes} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n \rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$.
De acordo com as condições do problema, buscamos o coeficiente de x^p:

$$f(x) = (1-x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{p} (-1)^p (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+n-1}{p} x^p.$$

Portanto, a solução do problema é dada pelo coeficiente: $\binom{p+n-1}{p}$.
Note que tal solução representa o total de combinações com repetição de n para p: $CR_{n,p} = \binom{p+n-1}{p}$.

EXEMPLO 4.l

De quantas formas podemos selecionar $3n$ letras de um conjunto de $2n$ a's, $2n$ b's e $2n$ c's?

Como cada uma das letras pode ser retirada de 0 a $2n$ vezes, a função geradora para as retiradas de cada uma delas é dada por:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = (1 + x + x^2 + \cdots) - (x^{2n+1} + x^{2n+2} + \cdots)$$
$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{2n+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{2n+1}}{1-x}$$

A função geradora f do problema proposto é expressa por:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n})^3 = \left(\frac{1 - x^{2n+1}}{1-x}\right)^3 = (1 - x^{2n+1})^3(1-x)^{-3}$$
$$= (1 - 3x^{2n+1} + 3x^{4n+2} - x^{6n+3})(1-x)^{-3}$$
$$= (1 - 3x^{2n+1} + 3x^{4n+2} - x^{6n+3}).\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k$$

Portanto, a solução do problema é dada pelo coeficiente de x^{3n} em:

$$f(x) = (1 - 3x^{2n+1} + 3x^{4n+2} - x^{6n+3}).\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{k+3-1}{k} (-x)^k$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k - 3x^{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k + 3x^{4n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k - x^{6n+3} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k$$

Sendo o coeficiente procurado dado por:

$$\binom{3n+2}{3n} - 3\binom{n+1}{n-1} = \frac{(3n+2)(3n+1)(3n)!}{(3n)!\,2!} - 3\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!\,2!}$$
$$= \frac{9n^2 + 9n + 2 - 3n^2 - 3n}{2} = 3n^2 + 3n + 1$$

Outras ferramentas poderosas para se determinar séries de potências são o *polinômio de Taylor* e a *série de Maclaurin*.

Polinômio ou série de Taylor: O polinômio p de Taylor, de grau n, de uma função f em $x = a$ é tal que:

$$f(a) = p(a), f'(a) = p'(a), f''(a) = p''(a), ..., f^{(n)}(a) = p^{(n)}(a).$$

De acordo com essas condições, a série de Taylor pode ser representada por meio de:

$$\boxed{p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}, \text{ com } f^{(0)}(a) = f(a).$$

Em que, dessa forma, teremos a série de potências p como uma aproximação da função f de erro tendendo a zero. Em outras palavras: $p(x) = f(x)$.

No nosso caso, em particular, estaremos mais interessados nas situações em que $a = 0$, gerando a chamada *série de Maclaurin*:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}, \text{ com } f^{(0)}(0) = f(0).$$

EXEMPLO 4.m
Seja D_n o desarranjo, ou permutação caótica, de n objetos distintos. Demonstre que, para $n \to \infty$, temos que: $D_n \approx \frac{n!}{e}$.

Já foi demonstrado anteriormente que: $D_n = n! \left[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right] = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n!}$.
Por outro lado, seja a expansão de $f(x) = e^x$ na série de Maclaurin:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

Uma vez que $f(x) = e^x \to f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \cdots = e^x$, então $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$, para todo n natural.
Logo:

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$f(-1) = e^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Dessa forma, para $n \to \infty$, temos que:

$$D_n = n!\, e^{-1} \to D_n = \frac{n!}{e}.$$

CQD

4.5 **Função geradora exponencial**

Para introduzir o conceito de funções geradoras exponenciais, seja o exemplo 4.d resolvido anteriormente acrescido da condição de que a ordem de retirada das bolas de cores distintas deve ser contabilizada.

EXEMPLO 4.n
Numa urna há 4 bolas, sendo duas amarelas, uma branca e uma cinza. Qual o total de modos de retirarmos três bolas da urna se as diferentes ordens de retirada de bolas de cores distintas geram diferença? Discrimine os casos.

Conforme já feito anteriormente, temos que:

$$(1 + ax + a^2x^2)(1 + bx)(1 + cx)$$
$$= 1 + (a + b + c)x + (a^2 + ab + ac + bc)x^2 + (a^2b + a^2c + abc)x^3 + a^2bcx^4$$

Como estamos interessados no coeficiente de x^3: $a^2b + a^2c + abc$.
Porém, para contar as diferentes ordens de retiradas, devemos efetuar as permutações da seguinte maneira: $\frac{3!}{2!1!}a^2b + \frac{3!}{2!1!}a^2c + \frac{3!}{1!1!1!}abc = 3!\left(\frac{a^2b}{2!1!} + \frac{a^2c}{2!1!} + \frac{abc}{1!1!1!}\right)$.
Para que essas permutações sejam contabilizadas e apareçam nos coeficientes da função geradora da situação, podemos escrever os polinômios da forma:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{0!} + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!}\right)\left(\frac{1}{0!} + \frac{bx}{1!}\right)\left(\frac{1}{0!} + \frac{cx}{1!}\right)\\
&= \frac{1}{0!\,0!\,0!} + \left(\frac{a}{1!\,0!\,0!} + \frac{b}{0!\,1!\,0!} + \frac{c}{0!\,0!\,1!}\right)x\\
&+ \left(\frac{a^2}{2!\,0!\,0!} + \frac{ab}{1!\,1!\,0!} + \frac{ac}{1!\,0!\,1!} + \frac{bc}{0!\,1!\,1!}\right)x^2\\
&+ \left(\frac{a^2b}{2!\,1!\,0!} + \frac{a^2c}{2!\,0!\,1!} + \frac{abc}{1!\,1!\,1!}\right)x^3 + \frac{a^2bc}{2!\,1!\,1!}x^4\\
&= \frac{1}{0!\,0!\,0!} + 1!\left(\frac{a}{1!\,0!\,0!} + \frac{b}{0!\,1!\,0!} + \frac{c}{0!\,0!\,1!}\right)\frac{x}{1!}\\
&+ 2!\left(\frac{a^2}{2!\,0!\,0!} + \frac{ab}{1!\,1!\,0!} + \frac{ac}{1!\,0!\,1!} + \frac{bc}{0!\,1!\,1!}\right)\frac{x^2}{2!}\\
&+ 3!\left(\frac{a^2b}{2!\,1!\,0!} + \frac{a^2c}{2!\,0!\,1!} + \frac{abc}{1!\,1!\,1!}\right)\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{a^2bc}{2!\,1!\,1!}\frac{x^4}{4!}
\end{aligned}$$

Observe que, dessa forma, o coeficiente procurado é o do termo $\frac{x^3}{3!}$: $3!\left(\frac{a^2b}{2!1!0!} + \frac{a^2c}{2!0!1!} + \frac{abc}{1!1!1!}\right)$.
E o total de modos de retirar as três bolas é dado para $a = b = c = 1$: $\frac{3!}{2!1!0!} + \frac{3!}{2!0!1!} + \frac{3!}{1!1!1!} = 3 + 3 + 6 = 12$.

Portanto, a *função geradora exponencial* da sequência de coeficientes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é dada pela série de potências:

$$\boxed{a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \cdots + a_k\frac{x^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\frac{x^k}{k!}}.$$

A função geradora exponencial tem essa denominação pela relação com o desenvolvimento de $f(x) = e^x$ na série de Maclaurin e é aplicada quando a ordem de retirada dos objetos deve ser considerada.

Tomando como referência a expansão em série de potências de $f(x) = e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, temos que:

(i) $\frac{1}{0!} + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \cdots = \frac{1}{0!} + 2\frac{x}{1!} + 2^2\frac{x^2}{2!} + 2^3\frac{x^3}{3!} + \cdots = e^{2x}$

(ii) $\frac{1}{0!} + \frac{kx}{1!} + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \cdots = \frac{1}{0!} + k\frac{x}{1!} + k^2\frac{x^2}{2!} + k^3\frac{x^3}{3!} + \cdots = e^{kx}$

(iii) $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x - 1$

(iv) $\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=e^x-\frac{x^3}{3!}$

Assim como outras variações são possíveis de acordo com o problema.

EXEMPLO 4.o
Sabendo que uma $r-$ sequência é uma $r-$ upla de termos, determine o número de $r-$ sequências formadas somente pelos dígitos $0, 1, 2,$ e 3 de modo que exista um número par de $0'$s e de $1'$s.

Uma vez que estamos formando uma $r-$ upla, a ordem dos dígitos importa e devemos utilizar funções geradores exponenciais.
A quantidade de $2'$s e de $3's$ pode ser expressa de modo simples pela função geradora exponencial: $\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x$.
No entanto, como a quantidade de $0'$s e de $1'$s deve ser par, suas funções geradoras exponenciais ficam da forma: $\frac{1}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$.
Logo, temos que a função geradora f para o problema é dada por:

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2(e^x)^2=\frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})e^{2x}}{4}=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{4}.$$

E o coeficiente procurado é o de $\frac{x^r}{r!}$: $\frac{1}{4}[4^r+2.2^r]=\frac{4^r+2^{r+1}}{4}=4^{r-1}+2^{r-1}$.

Iremos, agora, analisar o exemplo 2.i já resolvido anteriormente sob uma nova abordagem.

EXEMPLO 4.p
Se 9 pessoas entram, simultaneamente, em um elevador, de quantas formas essas 9 pessoas podem descer do elevador ao longo dos 4 andares do prédio se em cada andar deve descer ao menos uma pessoa?

Como em cada um dos andares deve descer ao menos uma pessoa, a função geradora para a quantidade de pessoas que descem do elevador por andar é dada por: $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x-1$.
E a solução do problema é o coeficiente de $\frac{x^9}{9!}$ em $f(x)=(e^x-1)^4=e^{4x}-4e^{3x}+6e^{2x}-4e^x+1$, dado por: $4^9-4.3^9+6.2^9-4=262144-78732+3072-4=186480$.

Tal raciocínio pode ser generalizado para se obter o número de *funções sobrejetoras* $f: A\to B$ tais que $|A|=n$ e $|B|=k$, com $n\geq k$.
Como cada um dos k elementos de B deve estar relacionado com ao menos um dos n elementos de A, o número de elementos de A que se relacionam com cada elemento de B pode ser expresso pela função geradora exponencial: $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x-1$, e a função geradora exponencial que descreve a situação é dada por: $f(x)=(e^x-1)^k$.
A solução do problema é dada pelo coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ em:

$$f(x) = (e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (e^x)^{k-i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x}.$$

Sabendo que:

$$e^{(k-i)x} = \frac{1}{0!} + \frac{(k-i)x}{1!} + \frac{((k-i)x)^2}{2!} + \frac{((k-i)x)^3}{3!} + \cdots = \frac{1}{0!} + (k-i)\frac{x}{1!} + (k-i)^2\frac{x^2}{2!} + (k-i)^3\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(k-i)^n\frac{x^n}{n!},$$

obtemos:

$$f(x) = (e^x - 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i e^{(k-i)x} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty}(k-i)^n\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n\frac{x^n}{n!}.$$

Logo: $T_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n$.

Número de Stirling de segunda espécie: O número de partições de um conjunto de n elementos distintos em k subconjuntos não vazios é dado por:

$$\boxed{S_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n}.$$

Demonstração: Inicialmente, vamos analisar alguns casos particulares. Para $n = 3$, seja o conjunto $\{1, 2, 3\}$:

(i) para $k = 3$, temos apenas uma maneira de particionar: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
(ii) para $k = 2$, as possíveis partições são: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ e $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$;
(iii) para $k = 1$, há somente um caso: $\{\{1, 2, 3\}\}$.

Note a semelhança de tal problema com o problema de determinar o total de modos de se colocar n bolas distintas em k caixas distintas de modo que em cada caixa haja ao menos uma bola, ou seja, o problema de determinar o número de funções sobrejetoras de A em B, com $|A| = n$, $|B| = k$ e $n \geq k$, pois se houvesse mais caixas do que bolas, certamente ao menos uma caixa ficaria vazia. No entanto, agora, as caixas são idênticas e devemos desconsiderar as permutações entre elas.
Dessa forma, como são k caixas idênticas, temos que:

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!}T_{n,k} \to S_{n,k} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (k-i)^n.$$

CQD

EXEMPLO 4.q
De quantas formas podemos distribuir 4 bolas em duas caixas idênticas de modo que nenhuma caixa fique vazia?

Observe que neste problema as caixas são idênticas, temos, portanto, um caso do número de Stirling de segunda espécie para $n = 4$ e $k = 2$:

$$S_{4,2} = \frac{1}{2!}.\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \binom{2}{i}(2-i)^4 = \frac{1}{2}\left[\binom{2}{0}2^4 - \binom{2}{1}1^4 + \binom{2}{2}0^4\right] = \frac{16-2}{2} = 7 \text{ formas.}$$

5 **TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE RECORRÊNCIAS LINEARES**

Um estudo detalhado sobre as relações de recorrência será feito no presente capítulo, em que as principais técnicas de resolução, seus Teoremas e respectivas demonstrações serão apresentados.

Munidos das ferramentas de resolução para as recorrências de 1ª e 2ª ordens, estenderemos seus resultados para uma recorrência linear de ordem k. E, complementando, igual importância será dada às aplicações em problemas de contagem, em que a modelagem se dará por meio de relações de recorrência.

5.1 **Introdução às relações de recorrências**

Seja a sequência de números $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a relação que envolve um termo a_n qualquer da sequência com o termo a_{n-1}, ou ainda a relação entre a_n e qualquer(quaisquer) termo(s) a_k da sequência, com $0 \leq k < n$, chama-se *relação de recorrência*.
Trata-se de poderosa ferramenta para modelagem de problemas de análise combinatória, em que a resolução de tais problemas vai envolver resolver a relação de recorrência que descreve a situação proposta. Dessa forma, iremos introduzir os métodos de resolução de relações de recorrência, mas para isso fazem-se necessárias algumas definições e conceitos prévios.

A *ordem* da recorrência é dada pela diferença entre o maior e o menor índice dos termos da sequência. Por exemplo, $u_{n+2} - u_{n+1} = 2$ é de 1ª ordem, e $u_{n+4} + 9u_n^2 = n^5$ é de 4ª ordem.
A recorrência é dita *linear* se os termos da sequência estão elevados apenas à 1ª potência. Por exemplo, $u_{n+2} - u_{n+1} = 2$ e $t_{n+1} - n^3 t_n + t_{n-1} = n + 1$ são lineares, mas $x_n^2 + n x_{n-1} = 1$ e $x_n + 2^{x_{n-1}} = 3$ não são recorrências lineares.
A recorrência é dita *homogênea* se a relação envolve apenas termos da sequência, ou seja, sem expressões independentes dos termos da sequência. Portanto a recorrência dada por $x_{m+3} + 8x_{m+2} - 9x_m = 0$ é homogênea com *coeficientes constantes*, assim como $(n^2 - 1)x_n - 3x_{n+2} = 0$ também é homogênea, porém não possui coeficientes constantes. Já as recorrências dadas por $y_{k+1} - 5y_{k-1} = 2$ e $a_{n+3} - a_{n-1} + 2a_{n-2} = n^3 + 1$ não são homogêneas (apesar de apresentarem coeficientes constantes), pois apresentam expressões além daquelas que envolvem os termos da sequência.
E a *forma fechada* de uma recorrência é a fórmula que permite encontrar o $n -$ ésimo termo da recorrência sem que seja necessário conhecer algum(ns) termo(s) precedente(s). As técnicas de resolução de recorrências basicamente consistem em métodos para se determinar suas respectivas formas fechadas.

EXEMPLO 5.a
Qual a forma fechada para a relação de recorrência: $x_n = x_{n-1} + r$, com $r \in \mathbb{R}$?

Trata-se de uma recorrência linear de 1ª ordem com coeficientes constantes. Para a resolução dessa recorrência, utilizaremos o Princípio Fundamental da Somação em: $x_n = x_{n-1} + r \rightarrow x_n - x_{n-1} = r$.
Logo: $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} r \rightarrow x_n - x_0 = nr \rightarrow x_n = x_0 + nr$.
Observe que a forma fechada encontrada representa o *termo geral de uma progressão aritmética*, compondo uma sequência numérica em que a diferença r entre os termos consecutivos é constante.

No entanto, apensar de termos descoberto sua forma fechada, tal sequência ainda não está bem definida, pois não conhecemos o termo x_0. Portanto, seja $x_0 = k$, com $k \in \mathbb{R}$, temos que: $x_n = k + nr$.

Dessa forma, para que a sequência descrita pela relação de recorrência fique bem definida, é importante conhecermos um ou mais termos iniciais, dependendo da ordem da recorrência que relaciona seus termos.

EXEMPLO 5.b
Determine a forma fechada para a relação de recorrência nos reais dada por: $a_n = q.a_{n-1}$, com $a_0 = k$.

Trata-se de mais uma recorrência linear de 1ª ordem com coeficientes constantes, que está bem definida pois foi dado que $a_0 = k$. Para a resolução dessa recorrência, seja o produtório:

$$a_n = q.a_{n-1} \rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \rightarrow \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} q.$$

Logo:

$$\frac{a_1}{a_0}.\frac{a_2}{a_1}.\frac{a_3}{a_2}\dots\frac{a_n}{a_{n-1}} = \underbrace{q.q.q\dots q}_{n\ vezes} \rightarrow \frac{a_n}{a_0} = q^n \rightarrow a_n = a_0 q^n \rightarrow a_n = kq^n.$$

Observe que a forma fechada encontrada representa o *termo geral de uma progressão geométrica*, sendo uma sequência numérica em que o quociente q entre os termos consecutivos é constante.

5.2 **Recorrências lineares de 1ª ordem**

Para darmos início ao estudo das técnicas de resoluções de relações de recorrências, analisaremos o caso mais simples, mas que servirá de suporte para os outros mais avançados.

Lema: A forma fechada da relação de recorrência expressa por $x_{n+1} = x_n + f(n)$ é dada por:

$$\boxed{x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)}.$$

Demonstração: Podemos aplicar de imediato a soma telescópica para encontrar a solução da recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + f(n) \rightarrow x_{n+1} - x_n = f(n) \rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Logo:

$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \rightarrow x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

CQD

EXEMPLO 5.c
Qual a forma fechada de: $x_{n+1} = x_n + n$, para $x_1 = 0$?

Trata-se de aplicação direta do resultado demonstrado, sendo $f(n) = n$ e $x_1 = 0$:

$$x_n = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k \rightarrow x_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

De um modo geral, podemos representar uma recorrência linear de 1ª ordem por:

$$\boxed{x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)}.$$

Em que sua solução geral pode ser encontrada por meio dos seguintes lemas.

Lema: A solução a_n não nula da relação de recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$ é dada por:

$$\boxed{a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} g(k)}.$$

Demonstração: De acordo com a relação de recorrência dada: $x_{n+1} = g(n)x_n \rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = g(n)$. Logo, sendo a_n a solução procurada:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = g(n) \rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} g(k) \rightarrow \frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=1}^{n-1} g(k) \rightarrow a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} g(k).$$

CQD

Lema: Seja a_n uma solução não nula da relação de recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n$, a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ em:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n}}.$$

Demonstração: Fazendo a substituição de $x_n = a_n y_n$ na recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, obtemos:

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Além disso, como a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, portanto $a_{n+1} = g(n)a_n$:

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n) \rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n}, \text{ sendo } g(n), a_n \neq 0.$$

CQD

Teorema: A solução geral da relação de recorrência de 1ª ordem expressa da forma $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ é dada por:

$$\boxed{x_n = a_n \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k}\right)},$$

sendo a_n uma solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$ tal que $a_1 = x_1$.

Demonstração: Fazendo uso dos resultados anteriores e efetuando a substituição $x_n = a_n y_n$, com a_n sendo uma solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, obtemos:

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k} \to \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k} \to \; x_n = a_n \left(\frac{x_1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k}\right).$$

Como a_n é uma solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$, seja $a_1 = x_1$: $x_n = a_n \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k}\right)$.

CQD

Observe que:

$$x_{n+1} = a_{n+1} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{h(k)}{g(k)a_k}\right) = g(n)a_n \left(1 + \frac{h(n)}{g(n)a_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k}\right),$$

Logo:

$$x_{n+1} = h(n) + g(n) \underbrace{a_n \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{g(k)a_k}\right)}_{=x_n} = h(n) + g(n)x_n.$$

EXEMPLO 5.d
Resolva a relação de recorrência: $x_{n+1} - nx_n = (n+1)!$, para $x_1 = 1$.

A relação de recorrência dada pode ser escrita da forma $x_{n+1} = nx_n + (n+1)!$, sendo $g(n) = n$ e $h(n) = (n+1)!$. Inicialmente, temos de procurar a solução a_n para $x_{n+1} = nx_n$:

$$a_{n+1} = na_n \to \frac{a_{n+1}}{a_n} = n \to \; \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \prod_{k=1}^{n-1} k \to \; \frac{a_n}{a_1} = (n-1)! \to \; a_n = a_1(n-1)!,$$

com $a_1 = x_1 = 1$. Dessa forma, $a_n = (n-1)!$ e a solução será dada por:

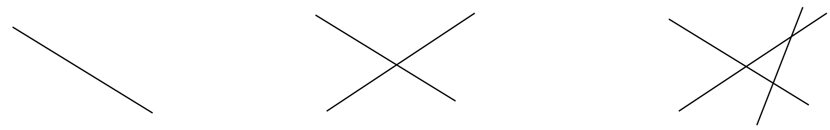
$$x_n = (n-1)!\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)!}{k(k-1)!}\right) \to \; x_n = (n-1)!\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\right)$$
$$x_n = (n-1)!\left(1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2}\right) = (n-1)!\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \to \; x_n = \frac{(n+1)!}{2}$$

A pizza de Steiner: O matemático suíço, Jacob Steiner, que viveu de 1796 e 1863 e destacou-se especialmente na área de Geometria, em 1826 propôs o seguinte problema:
"Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?"

O apelido para o famoso problema vem do fato de imaginarmos o plano como uma grande pizza. O próprio Steiner resolveu o problema e, para isso, observou o seguinte:

1) As retas traçadas devem ser duas a duas concorrentes.
2) O número de pontos distintos de concorrência deve ser o maior possível.

De acordo com essas condições, para que o número de regiões em que o plano fica dividido seja máximo, cada reta acrescida na nossa construção deve ser concorrente com as anteriores e deve cortá-las em pontos de concorrência novos, ou seja, distintos dos anteriores. Seja p_n o número máximo de regiões em que o plano fica dividido por n retas.



$p_1 = 2$ $\quad$ $p_2 = 4$ $\quad$ $p_3 = 7$

Para modelar a relação de recorrência, imaginamos o plano com $n-1$ retas e dividido em p_{n-1} regiões. Ao traçar a $n-$ ésima reta, esta formará $n-1$ interseções com as retas anteriores, gerando $n-1+1=n$ regiões a mais. Com efeito:

$$p_n = p_{n-1} + n.$$

Logo, trata-se de uma relação de recorrência de 1ª ordem. Aplicando os resultados anteriores, sua forma fechada será:

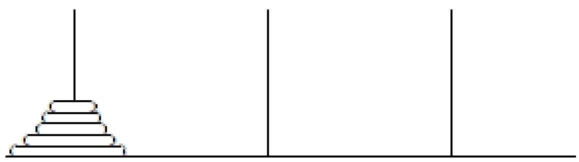
$$p_n - p_{n-1} = n \rightarrow \sum_{k=1}^{n}(p_k - p_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} k \rightarrow p_n - p_0 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Além disso, notamos que $p_0 = 1$. Portanto: $\boxed{p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1}$.

A Torre de Hanói: O matemático francês Édouard Lucas, em 1883, inspirado numa lenda, propôs o seguinte jogo: n discos, todos de raios distintos e com um furo nos seus respectivos centros, estão dispostos numa haste de modo que um disco de raio menor nunca fique abaixo de outro disco com raio maior. O jogo consiste em transferir os n discos para uma haste distinta, usando como auxílio uma terceira haste, de modo que em cada movimento seja respeitada a condição de que discos de menor raio devem ficar sobre discos de maior raio.
Sabendo que é possível fazer a transferência dos discos de uma haste para outra de acordo com a condição, a questão é:

"Qual é o menor número possível de movimentos?"

Figura 13 - Representação do jogo Torre de Hanói.



Fonte: Autor.

O nome do jogo é devido à torre na cidade de Hanói, no Vietnã, pelo formato da pilha de discos. Sendo t_n o número mínimo de movimentos para se transferir n discos da haste em que estão para uma outra haste distinta, é fácil notar que $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$. Para transferir os n discos para a última haste, por exemplo, inicialmente transferimos os $n-1$ discos de cima para a haste central, depois passamos o último disco para a terceira haste para então transferir os $n-1$ discos da haste central para a última haste, sobre o maior disco. Com efeito:

$$t_n = t_{n-1} + 1 + t_{n-1} \rightarrow \ t_n = 2t_{n-1} + 1.$$

Trata-se, novamente, de uma recorrência linear de 1ª ordem. Inicialmente, seja a solução a_n para $t_n = 2t_{n-1}$:

$$a_n = 2a_{n-1} \rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \rightarrow \ \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} 2 \rightarrow \ \frac{a_n}{a_1} = 2^{n-1},$$

Sendo $a_1 = t_1 = 1$, então $a_n = 2^{n-1}$ e substituímos $t_n = 2^{n-1}y_n$:

$$2^{n-1}y_n = 2.2^{n-2}y_{n-1} + 1 \rightarrow \ 2^{n-1}y_n = 2^{n-1}y_{n-1} + 1 \rightarrow \ y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Logo:

$$y_n - y_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow \ y_n - y_1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow \ y_n = 1 + \frac{\frac{1}{2}.\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Finalmente:

$$\frac{t_n}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow \boxed{t_n = 2^n - 1}.$$

EXEMPLO 5.e
Determine o total de sequências com n termos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ que possuem uma quantidade ímpar de 0's.

Seja o total de sequências de $n + 1$ termos com número ímpar de 0's representado por x_{n+1}. Uma vez que uma sequência arbitrária ou tem uma quantidade ímpar de 0's ou uma quantidade par, ao escolher os $n + 1$ termos que a compõem, note que se o primeiro for o 1 ou o 2, há um total de x_n modos de se escolher os termos seguintes na condição pedida. Por outro lado, se o primeiro escolhido for um 0, para a escolha dos n termos seguintes deverá haver um número par de 0's, ou seja, haverá $3^n - x_n$ escolhas. Portanto:

$$x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n) \rightarrow \ x_{n+1} = x_n + 3^n.$$

Logo:

$$x_{n+1} - x_n = 3^n \rightarrow \ \sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n} 3^k \rightarrow \ x_{n+1} - x_1 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1}$$
$$x_{n+1} = x_1 + \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

Sendo $x_1 = 1$, obtemos: $x_{n+1} = 1 + \frac{3(3^n - 1)}{2} \rightarrow \ x_{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \rightarrow \ x_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

Desarranjos: Como já visto no capítulo 2, dados n objetos distintos, definimos desarranjo ou permutação caótica dos objetos pelo total de modos de permutá-los sem que nenhum deles ocupe sua respectiva posição original.
Dados os casos triviais em que $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$, seja, portanto, D_n o total de desarranjos dos n objetos distintos. Dentre os n objetos, sem perda de generalidade, considere o $i -$ ésimo objeto, como ele possui $n - 1$ possibilidades de lugares para ocupar, analisaremos o caso em que ele ocupa a $j -$ ésima posição. Sendo assim, haverá duas possibilidades para o $j -$ ésimo objeto: trocar de lugar e ocupar a $i -$ ésima posição ou não ocupar a $i -$ ésima posição. Sendo o total de desarranjos, para o primeiro caso, dado por D_{n-2} e, para o segundo caso, D_{n-1} possibilidades, temos que:

$$\boxed{D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})}, \text{ com } n \geq 3.$$

Na relação de recorrência obtida, observe que:

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}),$$

e que:

$$D_{n-1} - (n-1)D_{n-2} = -(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}),$$

portanto, substituindo:

$$D_n - nD_{n-1} = -\big(-(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3})\big) = (-1)^2(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}).$$

Analogamente:

$$\begin{gathered} D_n - nD_{n-1} = (-1)^2(D_{n-2} - (n-2)D_{n-3}) \\ D_n - nD_{n-1} = (-1)^3(D_{n-3} - (n-3)D_{n-4}) \\ \ldots \\ D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) = (-1)^n(1-0) = (-1)^n. \end{gathered}$$

Obtemos, assim, uma recorrência linear de primeira ordem, não homogênea, em que um de seus coeficientes não é constante:

$$\boxed{D_n = nD_{n-1} + (-1)^n}, \text{ para } n \geq 2.$$

Procurando a solução a_n para $D_n = nD_{n-1}$:

$$a_n = na_{n-1} \to \frac{a_n}{a_{n-1}} = n \to \prod_{k=3}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=3}^{n} k \to \frac{a_n}{a_2} = \frac{n!}{2} \to a_n = \frac{a_2 n!}{2},$$

com $a_2 = D_2 = 1$. Dessa forma, $a_n = \frac{n!}{2}$ e a solução será dada por:

$$D_n = \frac{n!}{2}\left(\frac{D_2}{a_2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,\frac{(k-1)!}{2}}\right) = \frac{n!}{2}\left(1 + 2\sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = n!\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \sum\nolimits_{k=3}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = n!\sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

5.3 **Recorrências lineares de 2ª ordem**

Inicialmente, analisaremos as *relações de recorrência lineares de 2ª ordem homogêneas e de coeficientes constantes*. De modo geral, tais relações podem ser representadas por:

$$\boxed{a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}},$$

sendo n um número natural maior ou igual a 3 e as constantes A e B tais que $B \neq 0$.
Para determinar as soluções das relações de recorrência assim representadas, inspecionamos expressões da forma $a_n = \alpha^n$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$\alpha^n = A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2}.$$

Uma vez que $\alpha \neq 0$, dividimos a equação por α^{n-2}:

$$\alpha^2 = A\alpha + B \rightarrow \ \alpha^2 - A\alpha - B = 0.$$

A equação obtida é também chamada de *equação característica* ou *equação auxiliar* da relação de recorrência. De acordo com o discriminante da equação do 2º grau obtida, teremos as seguintes possibilidades:

$$\alpha^2 - A\alpha - B = 0 \rightarrow \Delta = A^2 + 4B \rightarrow \begin{cases} \Delta > 0: \textit{há dois valores reais e distintos para } "\alpha" \\ \Delta = 0: \textit{há apenas um valor real para } "\alpha" \\ \Delta < 0: "\alpha" \textit{ assume valores complexos} \end{cases}.$$

Dessa forma, podemos determinar a solução geral da relação de recorrência por meio de dois teoremas.

Teorema: Suponha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo a relação de recorrência $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$, com a_1 e a_2 dados. Sejam α e β as soluções da equação característica, então:

(i) Se $\alpha \neq \beta$, então existem constantes C_1 e C_2 tais que a forma fechada da relação de recorrência é expressa por:

$$\boxed{a_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n},$$

para todo $n \geq 1$.

(ii) Se $\alpha = \beta$, então existem constantes C_1 e C_2 tais que a forma fechada da relação de recorrência é expressa por:

$$\boxed{a_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n},$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Analisando cada caso de modo independente:

(i) Uma vez que são dadas as condições iniciais a_1 e a_2, temos que $a_1 = C_1\alpha + C_2\beta$ e que $a_2 = C_1\alpha^2 + C_2\beta^2$. Resolvendo o sistema com as duas equações, obtemos os valores para as duas constantes:

$$C_1 = \frac{a_1\beta - a_2}{\alpha(\beta-\alpha)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{a_1\alpha - a_2}{\beta(\alpha-\beta)}.$$

Portanto, $a_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$ é válida para $n = 1$ e para $n = 2$. Aplicando o 2º Princípio da Indução Finita, seja a relação válida para $n \leq k$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo:

$$a_{k+1} = Aa_k + Ba_{k-1} = A(C_1\alpha^k + C_2\beta^k) + B(C_1\alpha^{k-1} + C_2\beta^{k-1})$$
$$a_{k+1} = C_1(A\alpha^k + B\alpha^{k-1}) + C_2(A\beta^k + B\beta^{k-1})$$
$$a_{k+1} = C_1\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + C_2\beta^{k-1}(A\beta + B)$$

Como α e β são raízes distintas da equação característica, então $\alpha^2 = A\alpha + B$ e $\beta^2 = A\beta + B$:

$$a_{k+1} = C_1\alpha^{k-1}\alpha^2 + C_2\beta^{k-1}\beta^2 = C_1\alpha^{k+1} + C_2\beta^{k+1}.$$

CQD

(ii) De modo semelhando à demonstração anterior, dados a_1 e a_2, temos que $a_1 = (C_1 + C_2)\alpha$ e que $a_2 = (C_1 + 2C_2)\alpha^2$, logo:

$$C_1 = \frac{2a_1\alpha - a_2}{\alpha^2} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{a_2 - a_1\alpha}{\alpha^2}.$$

Sendo $a_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n$ solução para a recorrência para $n = 1$ e para $n = 2$, por indução, seja $a_n = (C_1 + C_2 n)\alpha^n$, para $n \leq k \in \mathbb{N}$, solução de $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$. Logo:

$$a_{k+1} = Aa_k + Ba_{k-1} = A(C_1 + C_2 k)\alpha^k + B\big(C_1 + C_2(k-1)\big)\alpha^{k-1}$$
$$a_{k+1} = C_1(A\alpha^k + B\alpha^{k-1}) + C_2(Ak\alpha^k + B(k-1)\alpha^{k-1})$$
$$a_{k+1} = C_1\alpha^{k-1}(A\alpha + B) + C_2\alpha^{k-1}\big(Ak\alpha + B(k-1)\big)$$

Além disso, sabemos que α é a raiz dupla da equação característica, ou seja:

$$\alpha^2 - A\alpha - B = 0 \text{ e } \Delta = 0 \rightarrow \ \alpha = \frac{A \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{A}{2} \rightarrow A = 2\alpha \rightarrow B = \alpha^2 - 2\alpha.\alpha = -\alpha^2.$$

Substituindo:

$$a_{k+1} = C_1\alpha^{k-1}(2\alpha^2 - \alpha^2) + C_2\alpha^{k-1}\big(2\alpha^2 k - \alpha^2(k-1)\big)$$
$$a_{k+1} = C_1\alpha^{k+1} + C_2\alpha^{k+1}(k+1).$$

CQD

EXEMPLO 5.f
Resolva a relação de recorrência: $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, com $a_1 = 0$ e $a_2 = 6$.

Trata-se de uma relação de recorrência de 2ª ordem, homogênea e de coeficientes constantes. Inicialmente, resolvemos a equação característica: $a^2 = a + 2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0$. Como seu discriminante é dado por $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$, teremos duas raízes reais e distintas:

$$\alpha = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Portanto, sua solução é da forma $a_n = C_1.2^n + C_2.(-1)^n$, onde as constantes C_1 e C_2 são determinadas de acordo com as condições iniciais:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 2C_1 - C_2 = 0 \\ a_2 = 4C_1 + C_2 = 6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \ C_1 = 1 \quad \text{e} \quad C_2 = 2.$$

Portanto: $a_n = 2^n + 2(-1)^n$.

Corolário: Seja a relação de recorrência $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ cuja equação característica $\alpha^2 - A\alpha - B = 0$ possui discriminante $\Delta = A^2 + 4B < 0$. Dadas as condições iniciais, sua solução também será da forma $a_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, uma vez que $\alpha, \beta = \frac{A \pm \sqrt{-\Delta} i}{2}$, ou seja, recaímos no caso em que $\alpha \neq \beta$.
No entanto, sendo seus coeficientes reais, também podemos escrever que $\alpha = \rho(cos\theta + i.sen\theta)$ e $\beta = \rho(cos\theta - i.sen\theta)$, portanto:

$$a_n = C_1\big(\rho(cos\theta + i.sen\theta)\big)^n + C_2\big(\rho(cos\theta - i.sen\theta)\big)^n$$
$$a_n = \rho^n\Big(C_1\big(\cos(n\theta) + i.sen(n\theta)\big) + C_2\big(\cos(n\theta) - i.sen(n\theta)\big)\Big)$$
$$a_n = \rho^n(C_1 + C_2)\cos(n\theta) + \rho^n(C_1 - C_2).i.sen(n\theta)$$

Substituindo $\rho^n(C_1 + C_2) = C_1{}'$ e $\rho^n(C_1 - C_2).i = C_2{}'$, obtemos:

$$\boxed{a_n = C_1'.\cos(n\theta) + C_2'.sen(n\theta)}.$$

EXEMPLO 5.g
Dê a solução geral para a relação de recorrência: $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0$.

Uma vez que não temos as condições iniciais, não teremos como determinar os valores das constantes, dessa forma encontraremos uma solução genérica para tal relação de recorrência.
Seja a equação característica: $x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.
Como o discriminante é negativo e seus coeficientes são reais, teremos soluções complexas da forma $x_n = C_1'.\cos(n\theta) + C_2'.sen(n\theta)$, bastando determinar o ângulo θ:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow \ \rho = 1 \ \text{ e } \ \theta = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Portanto: $x_n = C_1'.\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + C_2'.sen\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

A sequência de Fibonacci: Os números de Fibonacci são obtidos por meio da sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida pela relação de recorrência:

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}},$$

tal que $F_1 = F_2 = 1$ e $n \geq 3$.

Uma vez definida a sequência de Fibonacci, podemos determinar a forma fechada para os seus termos.
Seja a resolução da equação característica:

$$F^2 = F + 1 \rightarrow F^2 - F - 1 = 0 \rightarrow F = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como obtemos duas raízes reais e distintas, temos que a solução geral pode ser escrita da forma: $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. De acordo com as condições iniciais:

$$\left.\begin{array}{r} F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ F_2 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } B = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

obtemos:

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}.$$

Esta fórmula é conhecida como Fórmula de Binet.

EXEMPLO 5.h
Seja um casal de coelhos recém-nascidos que não se reproduzem até que completem 2 meses de idade. A partir desta idade, a cada mês, o casal de coelhos gerará exatamente outro casal de coelhos e o mesmo se sucederá com cada novo casal gerado. Supondo que nenhum coelho morrerá nesse intervalo de tempo, qual o total de casais de coelhos após 10 meses?

Incialmente, designaremos x_n como o total de casais de coelhos após n meses, em que $x_1 = x_2 = 1$ pois os coelhos apenas começarão a se reproduzir após o 2° mês de vida. Observe que o total de casais de coelhos após o $n-$ ésimo mês é dado pelo total existente no mês anterior somado ao total de casais de coelhos recém-nascidos. Como apenas os coelhos que já tinham ao menos 2 meses de vida gerarão recém-nascidos no $n-$ ésimo mês, temos que:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

Portanto, trata-se da sequência de Fibonacci, onde: $x_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

Uma *sequência geral de Fibonacci* pode ser obtida por meio da recorrência:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}}, \text{ com } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq 3.$$

Sendo que a sua forma fechada, conforme já demonstrado, é da forma:

$$\boxed{x_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n},$$

onde A e B são constantes a serem determinadas de acordo com as condições iniciais.

Números de Lucas: Os números de Lucas são definidos pela sequência $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que respeita a relação de recorrência:

$$\boxed{L_n = L_{n-1} + L_{n-2}},$$

tal que $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$, com $n \geq 3$.

Notamos que tal relação de recorrência compõe uma sequência geral de Fibonacci, dadas as suas condições iniciais. Portanto, sua forma fechada é da forma:

$$L_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

com:

$$\left.\begin{array}{r} L_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ L_2 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow A = B = 1.$$

Logo:

$$\boxed{L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

EXEMPLO 5.i
De quantas formas é possível subir uma escada de n degraus com passos de 1 ou 2 degraus?

Seja E_n o número de maneiras de subir uma escada com n degraus nas condições colocadas. Inicialmente, temos que $E_1 = 1$ e $E_2 = 2$.
Imaginemos, agora, a escada com n degraus em que o primeiro passo pode corresponder a subir apenas 1 degrau ou então a subir 2 degraus. No primeiro caso, ao subir 1 degrau no primeiro

passo, haverá E_{n-1} modos de subir os degraus restantes. Já no segundo caso, sendo o primeiro passo de 2 degraus, haverá E_{n-2} modos de se subir os $n-2$ degraus restantes.
Dessa forma:

$$E_n = E_{n-1} + E_{n-2}, \text{ com } n \geq 3.$$

Trata-se, portanto, de uma sequência geral de Fibonacci com $E_1 = 1$ e $E_2 = 2$. Por outro lado, notamos que $E_3 = 2 + 1 = 3$, que $E_4 = 3 + 2 = 5$, ..., ou seja, que:

$$E_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

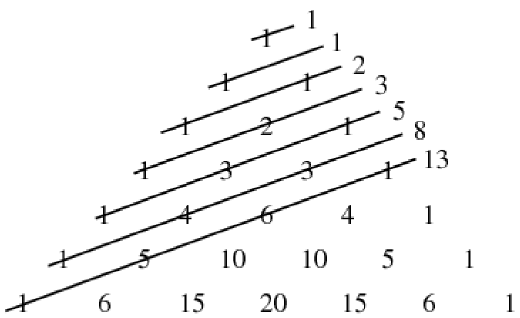
Deste exemplo podemos dizer que F_{n+1} é o número de maneiras de subir uma escada de n degraus com passos de 1 ou 2 degraus. Na continuação usaremos este exemplo para estabelecer uma interessante relação entre os números de Fibonacci e os coeficientes binomiais.

Teorema das diagonais invertidas: Partindo da $n-$ ésima linha e coluna zero do Triângulo de Pascal, a soma de todos os elementos da respectiva diagonal invertida é dada pelo número F_{n+1}. Isto é:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}}$$

onde F_{n+1} é o (n+1) – ésimo termo da sequência de Fibonacci e $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ é a parte inteira do número racional $\frac{n}{2}$. Veja a figura 5.2.

Figura 14 - Teorema das diagonais invertidas do Triângulo de pascal.



Fonte: https://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html.

Demonstração: Utilizando um argumento combinatório, adaptaremos a demonstração para utilizar o exemplo anterior: de quantas formas é possível subir uma escada de n degraus com passos de 1 ou 2 degraus?
Seja uma das maneiras de subir a escada com k passos de 2 degraus, totalizando $2k$ degraus subidos. Sendo assim, os outros $n-2k$ degraus corresponderão a passos de apenas 1 degrau e

o total de modos de se subir a escada será dado pelo total de permutações com repetição de k passos de 2 degraus com o $n-2k$ passos de 1 degrau: $\binom{n-2k+k}{k}=\binom{n-k}{k}$.
Além disso, temos que o total de passos de 2 degraus não pode ser superior a $\frac{n}{2}$, caso n seja par, ou a $\frac{n-1}{2}$, para o caso de n ímpar, ou seja, o total de passos de 2 degraus pode ser, no máximo, dado por $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$. Logo, o total de modos de subir a escada nas condições enunciadas é dado por:

$$E_n=\binom{n-0}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\cdots+\binom{n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}.$$

Portanto:

$$E_n=F_{n+1}\ \text{ e }\ E_n=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}\rightarrow\ F_{n+1}=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k},$$

correspondendo à soma da diagonal invertida do Triângulo de Pascal.

CQD

Seguindo a sequência lógica, iremos agora desenvolver métodos de resoluções para as *recorrências lineares de 2ª ordem não-homogêneas*, que podem ser representadas por:

$$\boxed{a_n+Aa_{n-1}+Ba_{n-2}=f(n)},$$

sendo n um número natural maior ou igual a 3, A e B constantes tais que $B\neq 0$ e $f(n)$ alguma função de n.

Teorema: Seja x_n a solução de $a_n+Aa_{n-1}+Ba_{n-2}=f(n)$, então a substituição $a_n=x_n+y_n$ transforma a equação em:

$$y_n+Ay_{n-1}+By_{n-2}=0.$$

Demonstração: Ao efetuar a substituição sugerida:

$$(x_n+y_n)+A(x_{n-1}+y_{n-1})+B(x_{n-2}+y_{n-2})=f(n)$$
$$\underbrace{(x_n+Ax_{n-1}+Bx_{n-2})}_{=f(n)}+(y_n+Ay_{n-1}+By_{n-2})=f(n)$$
$$y_n+Ay_{n-1}+By_{n-2}=0$$

uma vez que x_n é solução da relação de recorrência dada, conforme queríamos demonstrar.

Observe, portanto, que y_n é a solução da relação de recorrência homogêneo associada à recorrência original, o que nos leva a concluir o corolário abaixo.

Corolário: Dada a relação de recorrência linear, não homogênea, de 2ª ordem $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = f(n)$, sua solução x_n é dada por:

$$\boxed{x_n = y_n + p_n},$$

onde y_n é solução de $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$ e p_n é uma solução particular a ser determinada da recorrência original.

Demonstração: Tal resultado segue quase que de imediato do Teorema anterior. Sendo $x_n = y_n + p_n$ a solução geral da recorrência original, em que y_n é a solução da relação de recorrência homogênea associada e p_n uma solução particular qualquer da relação dada, temos que:

$$(y_n + p_n) + A(y_{n-1} + p_{n-1}) + B(y_{n-2} + p_{n-2}) = f(n)$$
$$\underbrace{(y_n + Ay_{n-1} + By_{n-2})}_{=0} + \underbrace{(p_n + Ap_{n-1} + Bp_{n-2})}_{=f(n)} = f(n)$$
$$0 + f(n) = f(n)$$

CQD

Note que a solução particular p_n a ser determinada é tal que:

$$p_n + Ap_{n-1} + Bp_{n-2} = f(n),$$

ou seja, p_n tem a mesma natureza de $f(n)$. Dessa forma, se $f(n)$ é polinomial, por exemplo, então p_n também será, ou se $f(n)$ for trigonométrica, assim será com p_n e assim por diante.

EXEMPLO 5.j
Encontre a solução geral para a relação de recorrência: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$.

Inicialmente, determinaremos a solução y_n da recorrência homogênea associada: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$. Sem grandes dificuldades, encontramos as raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$ de sua equação característica, obtendo: $y_n = C_1 2^n + C_2 4^n$. Como as condições iniciais não foram dadas, não podemos determinar os valores das constantes C_1 e C_2.
Notamos que, na recorrência dada, $f(n) = n + 3^n$, dessa forma a solução particular p_n deve ser a soma de uma função polinomial de grau 1 com outra função exponencial de base 3: $p_n = An + B + C3^n$.
Substituindo na relação inicial:

$$(A(n+2) + B + C3^{n+2}) - 6(A(n+1) + B + C3^{n+1}) + 8(An + B + C3^n) = n + 3^n$$
$$n(A - 6A + 8A) + (2A - 6A + B - 6B + 8B) + (9C - 18C + 8C)3^n = n + 3^n$$
$$3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n$$

Igualando os respectivos coeficientes: $\begin{cases} 3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3} \\ 3B - 4A = 0 \rightarrow B = \frac{4A}{3} = \frac{4}{9} \\ -C = 1 \rightarrow C = -1 \end{cases}$.

Logo: $p_n = \frac{n}{3} + \frac{4}{9} - 3^n$.
Finalmente, a solução geral será dada por:

$$x_n = y_n + p_n \rightarrow\ x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{n}{3} + \frac{4}{9} - 3^n.$$

5.4 **Recorrências lineares de ordem k**

Uma recorrência linear de ordem k pode ser representada da forma:

$$\boxed{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n)},$$

em que $f(n)$ é uma função de n e $c_1, \ldots, c_k$ são constantes, com $c_k \neq 0$.
O tratamento feito para as relações de recorrência de ordem k será análogo ao das relações de recorrência de 2ª ordem e, por meio de raciocínios indutivos, todos os resultados obtidos anteriormente poderão ser estendidos para o caso geral.

Quando $f(n) = 0$, a recorrência linear de $k -$ ésima ordem será homogênea e, de modo semelhante ao que foi feito para as recorrências lineares de 2ª ordem, ao inspecionar as soluções da forma $a_n = \alpha^n$, com $\alpha \neq 0$ e já adotando a versão geral para $\alpha \in \mathbb{C}$, obtemos a equação característica da relação de recorrência dada:

$$\alpha^k = c_1 \alpha^{k-1} + c_2 \alpha^{k-2} + \cdots + c_k,$$

tradando-se de uma equação algébrica de $k -$ ésimo grau em que devemos calcular as suas raízes.
Dessa forma, de acordo com as raízes obtidas da equação característica, a solução da relação de recorrência de ordem k é dada por meio do seguinte Teorema.

Teorema: Suponha $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo a relação de recorrência $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$, com $a_1, \ldots, a_k$ dados. De acordo com a equação característica $\alpha^k = c_1 \alpha^{k-1} + c_2 \alpha^{k-2} + \cdots + c_k$, então:

(i) Se suas k raízes complexas representadas por $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ forem todas distintas, existem constantes $C_1, \ldots, C_k$ tais que a forma fechada da relação de recorrência é expressa por:

$$\boxed{a_n = C_1 {\alpha_1}^n + \cdots + C_k {\alpha_k}^n},$$

para todo $n \geq 1$.

(ii) Se suas raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ possuem respectivas multiplicidades $m_1, \ldots, m_t$, sendo $m_1 + \cdots + m_t = k$, existem polinômios $P_1, \ldots, P_t$ em n tais que a forma fechada da relação de recorrência é expressa por:

$$\boxed{a_n = P_1(n) {\alpha_1}^n + \cdots + P_t(n) {\alpha_t}^n},$$

para todo $n \geq 1$ e cada $P_i(n)$ de grau menor que m_i.

Demonstração: As demonstrações dos resultados acima são análogas às feitas para as recorrências lineares homogêneas de 2ª ordem, tratando-se de aplicações do *princípio da superposição*, podem ser obtidas por meio do 2º Princípio da Indução Finita.

E, para o caso de $f(n) \neq 0$, a solução da relação de recorrência não-linear com ordem k poderá ser obtida de modo análogo ao feito para as recorrências não-lineares de 2ª ordem.

Teorema: Dada a relação de recorrência linear, não homogênea, de $k-$ésima ordem

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n),$

sua solução x_n é dada por:

$$\boxed{x_n = y_n + p_n},$$

onde y_n é solução da recorrência homogênea associada $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ e p_n é uma solução particular a ser determinada da recorrência original.

Demonstração: A verificação de tal resultado se faz de forma análoga ao feito para as recorrências de 2ª ordem. Sabendo que $y_n = c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k}$ e que $p_n - f(n) = c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + \cdots + c_k p_{n-k}$, ao substituir $a_n = y_n + p_n$ na relação de recorrência dada, obtemos:

$$y_n + p_n = c_1(y_{n-1} + p_{n-1}) + c_2(y_{n-2} + p_{n-2}) + \cdots + c_k(y_{n-k} + p_{n-k}) + f(n)$$
$$y_n + p_n = \underbrace{(c_1 y_{n-1} + c_2 y_{n-2} + \cdots + c_k y_{n-k})}_{=y_n} + \underbrace{(c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + \cdots + c_k p_{n-k})}_{=p_n - f(n)} + f(n)$$
$$y_n + p_n = y_n + p_n - f(n) + f(n)$$
$$0 = 0$$

Ou seja, concluímos que a solução geral da relação de recorrência é dada pela soma da solução da recorrência linear homogênea associada y_n com uma solução particular p_n da recorrência inicial, de acordo com o princípio da superposição, conforme queríamos demonstrar.

EXEMPLO 5.k
Conhecidas as condições iniciais $x_0 = 4,\ x_1 = 0,\ x_2 = 8$ e $x_3 = 0$ da recorrência $x_n + 6x_{n-2} + 9x_{n-4} = 0$, onde $n \in \mathbb{N}$, determine a sua solução.

A equação característica da recorrência dada é: $\alpha^4 + 6\alpha^2 + 9 = 0$, com $\alpha \neq 0$. Portanto, suas raízes são: $(\alpha^2 + 3)^2 = 0 \rightarrow\ \alpha^2 = -3 \rightarrow\ \alpha = \pm\sqrt{3}i$, em que tanto a raiz $\sqrt{3}i$ quanto a raiz $-\sqrt{3}i$ possuem multiplicidades iguais a 2.
De acordo com os Teoremas anteriores, sua solução será da forma: $x_n = (An + B)\left(\sqrt{3}i\right)^n + (Cn + D)\left(-\sqrt{3}i\right)^n$, aonde os coeficientes A, B, C e D podem ser determinados de acordo com

as condições iniciais: $\left.\begin{array}{c} x_0 = B + D = 4 \\ x_1 = (A + B - C - D)\left(\sqrt{3}i\right) = 0 \\ x_2 = (2A + B + 2C + D)(-3) = 8 \\ x_3 = (3A + B - 3C - D)\left(-3\sqrt{3}i\right) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow A = -\frac{5}{3}, B = 2, C = -\frac{5}{3}$ e $D = 2$.

Logo: $x_n = \left(-\frac{5}{3}n + 2\right)\left(\left(\sqrt{3}i\right)^n + \left(-\sqrt{3}i\right)^n\right)$.

6 TÉCNICAS AVANÇADAS EM SOMATÓRIOS, FUNÇÕES GERADORAS E RECORRÊNCIAS LINEARES

Ainda desenvolvendo técnicas para o cálculo de somatórios, logo de início o Princípio da somação por partes é demonstrado e devidamente exemplificado, o que irá permitir o cálculo de diversos somatórios que não estavam contemplados com as técnicas anteriormente desenvolvidas.

E o momento culminante do todo o texto consiste em aplicar todos os conhecimentos demonstrados previamente, em conjunto, de modo a utilizar as funções geradoras na resolução de recorrências. Tal ferramenta irá ampliar o leque de técnicas de contagem para que possamos analisar problemas ainda mais avançados, como partições, triangulações e colocação de parênteses.

6.1 Princípio da somação por partes

Em algumas situações, precisaremos calcular somatórios do produto de funções, sendo que nem sempre essas funções estarão relacionadas de um modo simples, o que inviabiliza o cálculo do respectivo somatório por meio das técnicas desenvolvidas anteriormente. Dessa forma, para calcular somatórios que envolvam produtos de funções distintas, usaremos o *princípio da somação por partes*.

Teorema: Sejam as sequências de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k\Delta\, a_k}.$$

Demonstração: Inicialmente, vamos analisar o seguinte resultado:

$$\Delta a_k b_k = a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k$$
$$\Delta a_k b_k = a_{k+1}b_{k+1} - a_{k+1}b_k + a_{k+1}b_k - a_k b_k$$

Portanto, podemos escrever que:

$$\Delta a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}\Delta b_k + b_k\Delta a_k.$$

Aplicando o somatório e utilizando as propriedades já verificadas:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\Delta a_k$$
$$a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\Delta a_k$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k\Delta a_k$$

CQD

EXEMPLO 6.a

Calcule: $\sum_{k=1}^{n} k.3^k$.

A técnica para aplicar a somação por partes consiste em escolher adequadamente quem será o "a_{k+1}" e o "Δb_k".

Observando que: $3^{k+1} - 3^k = 3.3^k - 3^k = 2.3^k$.

Portanto: $\Delta 3^k = \frac{3^{k+1}-3^k}{2} = \frac{3^{k+1}}{2} - \frac{3^k}{2}$ e $a_{k+1} = k$.

Substituindo na relação da somação por partes:

$$\sum_{k=1}^{n} k.3^k = n.\frac{3^{n+1}}{2} - 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2}.1 = \frac{n.3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} 3^k.$$

Observe que a escolha do "a_{k+1}" e do "Δb_k" iniciais foi bem feita quando o outro somatório que aparece ao lado direito é mais simples que o somatório inicial.
Com efeito:

$$\sum_{k=1}^{n} k.3^k = \frac{n.3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{n.3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3(3^n-1)}{3-1}\right) = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}.$$

EXEMPLO 6.b
Calcule: $\sum_{k=1}^{n} k^2.3^k$.

Escolhendo de modo semelhante o "a_{k+1}" e o "Δb_k": $\Delta 3^k = \frac{3^{k+1}}{2} - \frac{3^k}{2}$ e $a_{k+1} = k^2$.
Logo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.3^k = n^2.\frac{3^{n+1}}{2} - 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2}.[k^2 - (k-1)^2]$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2.3^k = \frac{n^2.3^{n+1}}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2}.[2k-1] = \frac{n^2.3^{n+1}}{2} - \sum_{k=1}^{n} 3^k.k + \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n} 3^k$$

Sendo que os resultados dos dois somatórios obtidos são conhecidos: $\sum_{k=1}^{n} k.3^k = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}$ e $\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-3}{2}$.
Substituindo:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.3^k = \frac{n^2.3^{n+1}}{2} - \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4} + \frac{3^{n+1}-3}{4}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2.3^k = \frac{(2n^2-2n+1+1).3^{n+1}-3-3}{4} = \frac{(n^2-n+1).3^{n+1}-3}{2}$$

Corolário: A relação da somação por partes também pode ser escrita na forma:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \Delta b_k},$$

com: $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

Demonstração: De acordo com a definição para $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, notamos que $A_1 = a_1$ e que $A_k - A_{k-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) = a_k$.
Com efeito:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_1 b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + \cdots + (A_n - A_{n-1})b_n = A_n b_n - A_1(b_2 - b_1) - \cdots - A_{n-1}(b_n - b_{n-1}).$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \Delta b_k.$$

CQD

Desigualdade de Abel: Seja $m \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \leq M$, para $k = 1,2,\dots,n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, então:

$$b_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq b_1 M.$$

Demonstração: De acordo com o corolário acima, podemos escrever que $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \Delta b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$, sendo $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$.
Dessa forma, temos que:

$$A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \leq M b_n + \sum_{k=1}^{n-1} M (b_k - b_{k+1})$$
$$A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \leq M b_n + M \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})}_{=-(b_n - b_1)} = M b_1$$

E, de modo análogo, que:

$$A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \geq m b_n + \sum_{k=1}^{n-1} m (b_k - b_{k+1}) = m b_1$$

Portanto:

$$m b_1 \leq A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \leq M b_1$$
$$m b_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1$$

CQD

EXEMPLO 6.c
Sejam n um número inteiro positivo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma sequência de inteiros positivos distintos. Prove que: $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Sendo cada a_i um inteiro positivo distinto, então: $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{(1+k).k}{2}$. Aplicando o resultado do corolário, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k . \frac{1}{k^2} = A_n . \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^{n-1} A_k . \left(\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{A_n}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k . \left(\frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} \right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k . \frac{1}{k^2} = \frac{A_n}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k . \left(\frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} \right) \geq \frac{(1+n).n}{2n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1+k).k}{2} . \left(\frac{2k+1}{k^2 (k+1)^2} \right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k . \frac{1}{k^2} \geq \frac{n+1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)} \right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} a_k . \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right)$$

Sendo $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

como queríamos demonstrar.

6.2 **Usando funções geradoras para resolução de relações de recorrência lineares**

Uma das mais importantes aplicações das funções geradoras é para solucionarmos recorrências. Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que satisfaz uma relação de recorrência conhecida, a técnica para determinar a sua forma fechada, tomando como referência adaptação do texto de Graham, Knuth e Patashnik (1994, p. 337), pode ser resumida na seguinte sequência de etapas ou passos:

1° PASSO: Inicialmente, adapta-se a recorrência de modo que seu termo de maior ordem seja a_n e então multiplica-se ambos os lados da equação por z^n. Se preferir, é possível isolar antes o termo de maior ordem a_n da recorrência.

2° PASSO: Em seguida, aplica-se o somatório em n na expressão obtida, respeitando-se as restrições para n de acordo com alguma condição inicial. Dessa forma, o termo $\sum_{n\geq n_0} a_n z^n$ representará a função geradora $G(z)$, sendo que os demais termos devem ser escritos em função de $G(z)$.

3° PASSO: Resolve-se a equação obtida e determina-se a forma fechada para $G(z)$.

4° PASSO: Ao expandir em séries de potências a forma fechada de $G(z)$ obtida anteriormente, o coeficiente de z^n será a forma fechada procurada para a_n, sendo a solução da recorrência.

EXEMPLO 6.d
Resolva a recorrência: $x_{n+1} - 3x_n = 3^n$, com $x_1 = 2$ e $n > 0$.

Seguindo a sequência sugerida, inicialmente reescrevemos a recorrência dada e isolamos "x_n" para, em seguida, multiplicar cada termo da igualdade por z^n, obtendo: $x_n z^n = 3x_{n-1}z^n + 3^{n-1}z^n$.
Aplicando o somatório em n:

$$\sum_{n>1} x_n z^n = \sum_{n>1}(3x_{n-1}z^n + 3^{n-1}z^n)$$
$$\sum_{n>0} x_n z^n - x_1 z = 3z\sum_{n>1} x_{n-1}z^{n-1} + \sum_{n>1} 3^{n-1}z^n$$

Substituindo $x_1 = 2$, $G(z) = \sum_{n>0} x_n z^n$, $\sum_{n>1} x_{n-1}z^{n-1} = \sum_{n>0} x_n z^n = G(z)$ e a soma da PG infinita $\sum_{n>1} 3^{n-1}z^n = \frac{3z^2}{1-3z}$:

$$G(z) - 2z = 3zG(z) + \frac{3z^2}{1-3z} \to G(z)(1-3z) = \frac{3z^2}{1-3z} + 2z$$
$$G(z) = \frac{3z^2+2z-6z^2}{(1-3z)^2} = 2\frac{z}{(1-3z)^2} - 3\frac{z^2}{(1-3z)^2}.$$

Uma vez obtiva a função geradora para $G(z)$, basta desenvolvê-la em uma série de potências e determinar seu coeficiente genérico para z^n. Para tal, pode-se utilizar quaisquer das ferramentas já sugeridas anteriormente, como as séries de Maclaurin ou algum outro resultado conhecido. Como pode ser verificado por meio dos resultados demonstrados no capítulo 4, temos que:

$$\frac{z}{(1-3z)^2} = \sum_{n>0} n.3^{n-1}z^n \text{ e } \frac{z^2}{(1-3z)^2} = \sum_{n>0}(n-1).3^{n-2}z^n,$$

resultando em:

$$G(z) = \sum_{n>0}(2n.3^{n-1} - (n-1)3^{n-1})z^n = \sum_{n>0}(n+1)3^{n-1}z^n \rightarrow \ x_n = (n+1)3^{n-1}.$$

A sequência de Fibonacci: Conforme já definido no capítulo anterior, os números de Fibonacci são obtidos por meio da sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\boxed{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}},$$

onde $F_1 = F_2 = 1$ e $n \geq 3$.

No entanto, para obter a respectiva forma fechada da sequência, agora faremos uso das funções geradoras e das técnicas apresentadas.
Ao multiplicar cada termo da igualdade por z^n, obtemos: $F_n z^n = F_{n-1}z^n + F_{n-2}z^n$. Aplicando o somatório em n:

$$\sum_{n\geq 3} F_n z^n = \sum_{n\geq 3}(F_{n-1}z^n + F_{n-2}z^n)$$
$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n - F_1 z - F_2 z^2 = z\sum_{n\geq 3} F_{n-1}z^{n-1} + z^2\sum_{n\geq 3} F_{n-2}z^{n-2}$$
$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n - F_1 z - F_2 z^2 = z\sum_{n\geq 2} F_n z^n + z^2\sum_{n\geq 1} F_n z^n$$
$$\sum_{n\geq 0} F_n z^n - F_1 z - F_2 z^2 = z(\sum_{n\geq 0} F_n z^n - F_1 z) + z^2\sum_{n\geq 0} F_n z^n$$

Substituindo $\sum_{n\geq 0} F_n z^n = G(z)$ e $F_1 = F_2 = 1$:

$$G(z) - z - z^2 = z(G(z) - z) + z^2 G(z)$$
$$G(z)(1 - z - z^2) = z$$
$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

Novamente, dada a função geradora para $G(z)$, iremos desenvolvê-la em uma série de potências e determinar seu coeficiente genérico para z^n.
Sejam as raízes da equação $1 - z - z^2 = 0$ representadas por $r_1 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dessa forma:

$$G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = z\frac{1}{-(z-r_1)(z-r_2)} = \frac{-z}{r_1-r_2}\left(\frac{1}{z-r_1} - \frac{1}{z-r_2}\right)$$
$$G(z) = \frac{z}{(r_2-r_1)}[(z-r_1)^{-1} - (z-r_2)^{-1}]$$
$$G(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{-1}{n}\frac{1}{\sqrt{5}}[(-r_2)^{-1-n} - (-r_1)^{-1-n}]z^{n+1}$$
$$G(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{n}{n}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{5}}[(-r_2)^{-1-n} - (-r_1)^{-1-n}]z^{n+1}$$
$$G(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{5}}[(r_1)^{-1-n} - (r_2)^{-1-n}]z^{n+1} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{5}}[(r_1)^{-n} - (r_2)^{-n}]z^n$$

Sabendo que $\frac{1}{r_1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e que $\frac{1}{r_2} = \frac{-2}{\sqrt{5}+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, logo, tomando o coeficiente de z^n:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(r_1)^{-n} - (r_2)^{-n}] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{(r_1)^n} - \frac{1}{(r_2)^n}\right]$$
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

CQD

Na sequência, duas importantes técnicas de contagem podem ser adaptadas para serem utilizadas em conjunto às funções geradoras.

O Princípio Multiplicativo para funções geradoras: Considere um problema de contagem que pode ser dividido em n etapas distintas e sucessivas, onde a função geradora da $j-$ésima etapa é representada por $A_j(z)$. Se a ordem não deve ser contabilizada, o total de saídas de tamanho i será dado pelo coeficiente de z^i, representado por $\left[z^i\right]$, no produto $A_1(z)A_2(z) \dots A_n(z)$.

O Princípio Aditivo para funções geradoras: Considere um problema de contagem dividido em n etapas distintas e complementares, onde a função geradora da $j-$ésima etapa é representada por $B_j(z)$. O total de saídas de tamanho i será dado pelo coeficiente de z^i, representado por $\left[z^i\right]$, na soma $B_1(z) + B_2(z) + \cdots + B_n(z)$.

EXEMPLO 6.e
Quantos são os pares de inteiros não-negativos que satisfazem a equação: $2x + 5y = 100$?

Ao invés de olharmos para os valores de x e de y de modo que a soma resulte em 100, analisaremos os resultados de $2x$ e de $5y$.
Como os valores para $2x$ são da forma $0, 2, 4, 6, \dots$ e para $5y$ são $0, 5, 10, 15, \dots$, podemos modelar as respectivas funções geradoras:

$$F_2(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots \text{ e } F_5(z) = 1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \cdots$$

Além disso, como dividimos o problema em etapas distintas, que consistem nas respectivas escolhas das parcelas que somadas resultam em 100, sendo que a ordem das mesmas não deve ser contata, temos que o total de modos de se determinar o resultado pedido será dado pelo coeficiente $[x^{100}]$ em:

$$F_1(z)F_5(z) = (1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots)(1 + z^5 + z^{10} + z^{15} + \cdots).$$

Portanto:

$$\begin{gathered}[1, z^{100}] = 1 \\ [z^{10}, z^{90}] = 1 \\ [z^{20}, z^{80}] = 1 \\ \dots \\ [z^{90}, z^{10}] = 1 \\ [z^{100}, 1] = 1\end{gathered}$$

Totalizando 11 possíveis pares de acordo com as condições.

6.3 **Partições**

Uma *partição* de um número inteiro positivo n é uma soma cujas parcelas são números inteiros e positivos que resulta em n. Como a ordem das parcelas não gera uma partição distinta, seguindo uma boa ordenação, iremos representá-las em ordem crescente ou não decrescente.

O total de partições de um inteiro positivo n é representado por $p(n)$.

EXEMPLO 6.f
Quantas são as partições de $n = 4$?

Escrevendo as parcelas segundo uma boa ordenação, sempre colocando as menores possibilidades primeiro, temos que:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$$

Portanto, obtemos: $p(4) = 5$.

Número de Partições de um inteiro positivo n: O número de partições $p(n)$ do inteiro positivo n é dado pelo coeficiente de z^n em $P(z)$:

$$\boxed{P(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3} \dots \frac{1}{1-z^k}}, \text{ com } k \leq n.$$

Ou ainda, podemos concluir que $p(n)$ é dado por $[z^n]$ em:

$$\boxed{P(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1-z^k}}.$$

Demonstração: Para formar uma partição de n, devemos selecionar um conjunto de parcelas, distintas ou não, que somadas resultam em n e, dessa forma, o total de partições $p(n)$ será dado ao se esgotar todas as possíveis escolhas de parcelas. Sendo assim, para cada possível partição, iremos escolher um determinado número de vezes α_1 o 1 como parcela, assim como α_2 vezes o 2, α_3 vezes o 3, etc até que tenhamos apenas uma única parcela igual ao próprio n.
Dessa forma, é possível notar que o total de partições $p(n)$ é dado pelo total de soluções inteiras não-negativas de:

$$\boxed{1\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + n\alpha_n = n}.$$

Procedendo conforme o exemplo 6.e, para resolver tal problema de contagem, não iremos analisar os possíveis valores para um α_k, com $1 \leq k \leq n$, mas sim a natureza dos resultados do termo $k\alpha_k$ presente na soma da equação acima. Uma vez que, para cada natural α_k, os resultados de $k\alpha_k$ são os múltiplos de k, então se o número k for escolhido um número α_k de vezes para formar uma partição de n, basta analisar o coeficiente $[z^{k\alpha_k}]$ em:

$$P_k(z) = 1 + z^k + z^{2k} + z^{3k} + \cdots + z^{k\alpha_k} + \cdots$$

Ou ainda:

$$P_k(z) = \frac{1}{1-z^k}.$$

Dessa forma, aplicando o Princípio Multiplicativo para funções geradoras, o total de partições $p(n)$ será dado pelo coeficiente $[z^n]$ em $P(z)$ tal que:

$$P(z) = P_1(z)P_2(z) \dots P_k(z) \dots$$

$$P(z) = \frac{1}{1-z} . \frac{1}{1-z^2} \dots \frac{1}{1-z^k} \dots$$

Ou ainda:

$$P(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1-z^k} .$$

CQD

EXEMPLO 6.g

Mostre que, para todo inteiro positivo n, o total de partições cujas parcelas são distintas é o mesmo que o total de partições cujas parcelas são formadas apenas por números ímpares.

Uma boa estratégia inicial costuma ser, antes de analisar o caso geral, inspecionar algum caso em particular de modo a visualizar melhor o que deve ser demonstrado. Seja o caso para $n = 6$, o total de partições cujas parcelas são números naturais distintos é dado por:

$$6 = 1 + 2 + 3 = 1 + 5 = 2 + 4 = 6$$

E o total de partições cujas parcelas são números ímpares é:

$$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 3 = 1 + 5 = 3 + 3$$

Portanto, em ambos os casos obtemos 4 partições.

Já para o caso geral, faremos uso das funções geradoras. Considerando todas as parcelas distintas, cada número inteiro positivo poderá ser escolhido 0 ou 1 vez para formar uma partição de n, dessa forma obtemos a função geradora $D(z)$ cuja solução é dada por $[z^n]$:

$$D(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^3)(1 + z^4) \dots$$

Por outro lado, seja a partição de n cujas parcelas são compostas apenas por números ímpares. A solução para esse caso será dada pelo coeficiente $[z^n]$ da função geradora $I(Z)$ tal que:

$$I(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots)(1 + z^3 + z^6 + \cdots)(1 + z^5 + z^{10} + \cdots) \dots$$
$$I(z) = \frac{1}{1-z} . \frac{1}{1-z^3} . \frac{1}{1-z^5} \dots$$

Para concluir a igualdade solicitada, iremos reescrever a expressão $D(z)$:

$$D(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^3)(1 + z^4) \dots$$
$$D(z) = \frac{1-z^2}{1-z} . \frac{1-z^4}{1-z^2} . \frac{1-z^6}{1-z^3} . \frac{1-z^8}{1-z^4} \dots$$

Por se tratar de um produto infinito, notamos que os numeradores, que são formados por potências pares de z, sempre irão ser simplificados com alguns denominadores, restando apenas os denominadores com potências ímpares de z:

$$D(z) = \frac{1}{1-z} . \frac{1}{1-z^3} . \frac{1}{1-z^5} \dots$$

Logo: $D(z) = I(z)$.

CQD

EXEMPLO 6.h

Sendo $n \in \mathbb{N}$, encontre o número de polinômios P, com coeficientes pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, tais que $P(2) = n$.

De um modo geral, o polinômio pedido pode ser representado por $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k$, com $k \in \mathbb{N}$ e cada $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $0 \leq i \leq k$.
Uma vez que devemos ter $P(2) = n$:

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \cdots + 2^k a_k = n.$$

Portanto, notamos tratar-se um problema de partições, em que cada termo $2^i a_i$, $0 \leq i \leq k$, sempre pertencerá ao conjunto de valores $\{0, 2^i, 1.2^i, 2.2^i, 3.2^i\}$. O resultado pedido será dado pelo coeficiente $[z^n]$ em:

$$f(z) = (1 + z + z^2 + z^3)(1 + z^2 + z^4 + z^6)(1 + z^4 + z^8 + z^{12}) \ldots \left(1 + z^{2^i} + z^{2.2^i} + z^{3.2^i}\right) \ldots$$

$$f(z) = \frac{1 - z^4}{1 - z} . \frac{1 - z^8}{1 - z^2} . \frac{1 - z^{16}}{1 - z^4} \ldots \frac{1 - z^{4.2^i}}{1 - z^{2^i}} \ldots$$

Por se tratar de um produto infinito em que os numeradores são dados pelas potências de z que são múltiplas de 4 e os denominadores, com potências múltiplas de 2, todos os numeradores serão cancelados, restando apenas os dois primeiros denominadores, que são os únicos que não possuem potências de z múltiplas de 4:

$$f(z) = \frac{1}{1 - z} . \frac{1}{1 - z^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z)^2 (1 + z)}$$

Decompondo a expressão obtida em frações parciais:

$$\frac{1}{(1 - z)^2 (1 + z)} = \frac{A}{1 - z} + \frac{B}{(1 - z)^2} + \frac{C}{1 + z}$$

$$\frac{1}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{(C-A)z^2 + (B-2C)z + A + B + C}{(1-z)^2(1+z)} \to \begin{cases} C - A = 0 \to A = C \\ B - 2C = 0 \to B = 2C \\ A + B + C = 1 \to 4C = 1 \to C = \frac{1}{4} \\ A = C = \frac{1}{4} \ \ e \ \ B = 2C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dessa forma:

$$f(z) = \frac{1}{4}.\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{4}.\frac{1}{1+z}$$
$$f(z) = \frac{1}{4}[(z+1)^{-1} - (z-1)^{-1} + 2(z-1)^{-2}]$$

Ao desenvolver em séries de potências cada um dos termos e aplicar o Princípio Aditivo para funções geradoras, obtemos:

$$f(z) = \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{k\geq 0}\left[\binom{-1}{k} - \binom{-1}{k}(-1)^{-1-k} + 2\binom{-2}{k}(-1)^{-2-k}\right]z^k$$
$$f(z) = \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{k\geq 0}\left[\binom{k}{k}(-1)^k + \binom{k}{k}(-1)^k(-1)^{-k} + 2\binom{k+1}{k}(-1)^k(-1)^{-2-k}\right]z^k$$
$$f(z) = \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{k\geq 0}[(-1)^k + 1 + 2(k+1)]z^k$$

Sendo a solução dada pelo coeficiente de z^n:

$$[z^n] = \frac{(-1)^n + 1 + 2(n+1)}{4}$$

Ou ainda, podemos escrever a solução da forma: $\begin{cases} \frac{n+2}{2};\ n \text{ é } par \\ \frac{n+1}{2};\ n \text{ é } ímpar \end{cases}$.

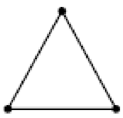
6.4 **Triangulações de um polígono convexo**

Em 1751, Euler propôs a Christian Goldbach o problema que consistia em determinar a quantidade de possíveis divisões de um polígono convexo de n lados por meio de diagonais, formando assim triângulos, o que ficou conhecido como o *Problema da divisão de um polígono de Euler*.

Dessa forma, definimos uma *triangulação* de um polígono convexo como uma divisão do mesmo em triângulos por meio de diagonais. Definindo T_n como o total de triangulações distintas de um polígono convexo de n lados, observe alguns casos particulares:

(i) Para $n = 3 \rightarrow T_3 = 1$:

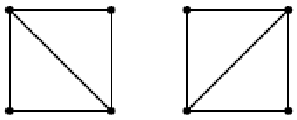
Figura 15 - Número de triangulações para $n = 3$.



Fonte: autor.

(ii) Para $n = 4 \rightarrow T_4 = 2$:

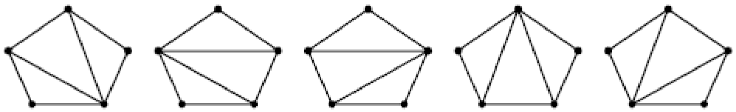
Figura 16 - Número de triangulações para $n = 4$.



Fonte: autor.

(iii) Para $n = 5 \rightarrow T_5 = 5$:

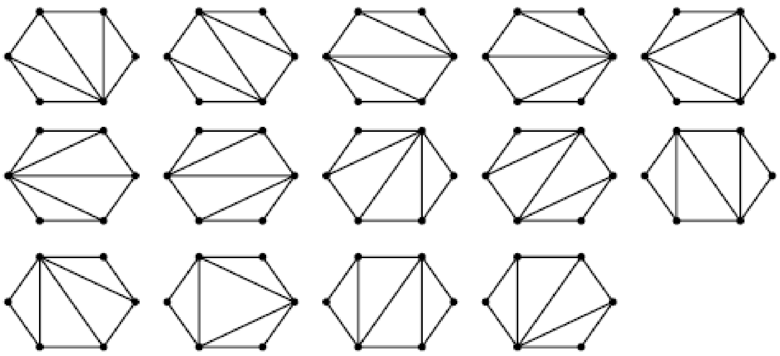
Figura 17 - Número de triangulações para $n = 5$.



Fonte: autor.

(iv) Para $n = 6 \rightarrow T_6 = 14$:

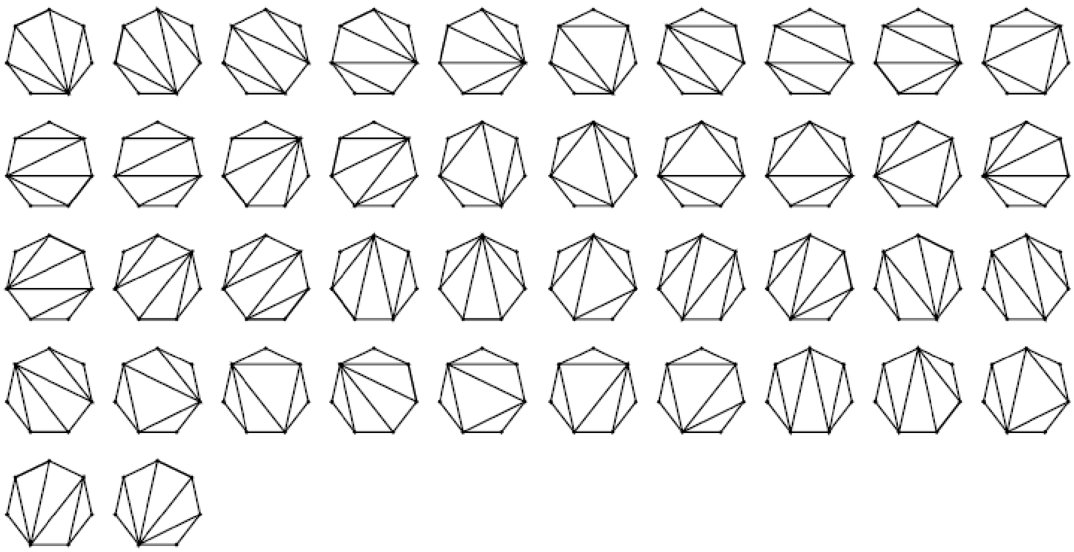
Figura 18 - Número de triangulações para $n = 6$.



Fonte: autor.

(v) Para $n = 7 \rightarrow T_7 = 42$:

Figura 19 - Número de triangulações para $n = 7$.



Fonte: autor.

A essa altura, é natural a associação entre o número de triangulações de um polígono convexo e os números de Catalan:

Tabela 11 - Relação entre os números de Catalan e de triangulações.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
C_n	*1*	*1*	*2*	*5*	*14*	*42*	*132*	*429*
T_n				*1*	*2*	*5*	*14*	*42*

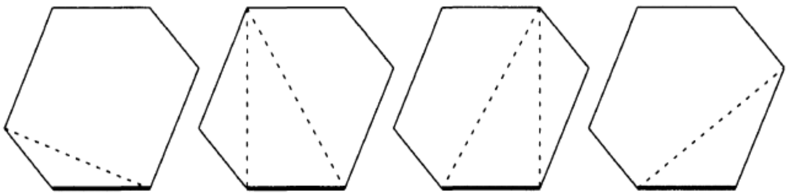
Teorema: O número de triangulações T_n de um polígono convexo de n lados é dado por:

$$\boxed{T_n = C_{n-2}},$$

sendo $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ o número de Catalan, $n \geq 2$ e definindo para o caso degenerado $T_2 = 1$.

Demonstração: Para desenvolver um raciocínio que nos leve ao caso geral, seja o caso $n = 6$ correspondente às triangulações de um hexágono. Ao escolher um de seus lados para fixarmos como base, iremos determinar o total de triangulações a partir dele.

Figura 20 - Triangulações de um hexágono a partir de um de seus lados.



Fonte: autor.

Observe que, fixada a base e formando os diferentes triângulos a partir dela com os demais 4 vértices do hexágono, cada figura ficará dividida em outros dois polígonos além do próprio triângulo formado, com exceção dos dois casos extremos dos triângulos formados com os dois vértices vizinhos à base, onde haverá apenas mais um polígono resultante da decomposição.
Para os dois casos extremos, o total de triangulações será T_5 e, para os demais casos, o total de triangulações será dado pelo produto do total de triangulações dos dois polígonos formados, de acordo com o Princípio Multiplicativo.
Portanto:

$$T_6 = T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5.$$

Considerando que são conhecidas as triangulações para os casos menores, temos que $T_3 = 1$, $T_4 = 2$, e $T_5 = 5$, além do caso degenerado $T_2 = 1$. Dessa forma:

$$T_6 = T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5 = T_2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5T_2$$
$$T_6 = 1.5 + 1.2 + 2.1 + 5.1 = 14$$

Notando que tal resultado está de acordo com o esperado pela análise feita anteriormente, iremos generalizar tal raciocínio para o caso de um polígono convexo de n lados. Uma vez fixado um lado de base para o $n -$ ágono, seu total de triangulações T_n será dado por:

$$T_n = T_2T_{n-1} + T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \cdots + T_{n-1}T_2, \text{ para } n \geq 3.$$

Ou ainda:

$$\boxed{T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n+1-k}}$$

Uma vez conhecida a relação de recorrência obtida acima, para a obtenção da respectiva forma fechada, seja a função geradora:

$$G(z) = T_2 + T_3z + T_4z^2 + T_5z^3 + \cdots + T_{n+2}z^n + \cdots$$
$$\boxed{G(z) = \sum_{k\geq 0} T_{k+2}z^k}$$

Ao quadradar tal expressão, obtemos:

$$G^2(z) = T_2T_2 + (T_2T_3 + T_3T_2)z + (T_2T_4 + T_3T_3 + T_4T_2)z^2 + \cdots$$
$$G^2(z) = T_3 + T_4z + T_5z^2 + \cdots$$

Logo:

$$G(z) = zG^2(z) + T_2 \to G(z) = zG^2(z) + 1$$
$$zG^2(z) - G(z) + 1 = 0$$
$$G(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Para saber qual dos dois sinais é o correto, analisaremos o comportamento da função geradora nas proximidades da origem. Sabendo que $G(0) = T_2 = 1$, sejam os limites:

(1) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{0+\frac{1}{2\sqrt{1-4z}}(0-4)}{2} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-4z}} = -1$

(2) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{0-\frac{1}{2\sqrt{1-4z}}(0-4)}{2} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = 1$

Portanto, temos que:

$$\boxed{G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}}.$$

Sendo o desenvolvimento do binômio:

$$\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4z)^k$$
$$(1-4z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k\geq 0} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} (-4z)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k-1}1.3.5\ldots(2k-3)}{2^k k!} (-4z)^k$$

$$(1-4z)^{\frac{1}{2}} = -\sum_{k\geq 0} 2^k \frac{1.3.5\ldots(2k-3)}{k!} z^k$$

Finalmente:

$$\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{k\geq 1} 2^{k-1} \frac{1.3.5\ldots(2k-3)}{k!} z^{k-1}$$
$$\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{k\geq 0} 2^k \frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{(k+1)!} z^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} z^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{z^k}{k+1}$$
$$\boxed{\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} z^k}$$

Igualando o coeficiente $[z^k]$ da função geradora original com o respectivo coeficiente da expressão obtida:

$$T_{k+2} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$
$$T_{k+2} = C_k$$

Portanto, concluímos que:

$$T_n = C_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

CQD

Corolário: Os números de Catalan podem ser obtidos por meio da relação de recorrência $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\boxed{C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \cdots + C_{n-1}C_0}, \text{ para } n \geq 1.$$

Ou ainda:

$$\boxed{C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-1-k}}.$$

6.5 **Número de maneiras de colocar parênteses num produto ordenado com n fatores**

Consideremos o produto ordenado de n números representado por:

$$x_0x_1x_2 \ldots x_{n-1},$$

em que não estamos interessados nos valores assumidos por cada x_k, $0 \leq k < n$, mas sim no total de maneiras de colocar parênteses em tal produto. Denominaremos o parêntese (como aberto pela direita e o seu par), aberto pela esquerda. Uma colocação de parênteses correta é aquela em que:

1) Analisando o produto da esquerda para a direita, o total de parênteses abertos pela direita sempre é maior ou igual ao total de parênteses abertos pela esquerda.

2) No produto, sempre deve haver uma mesma quantidade de parênteses abertos à direita e de parênteses abertos à esquerda.

3) Dentro de cada par conjugado de parênteses ( ) sempre deve haver dois fatores, sejam eles dois números, um número e outro par conjugado de parênteses e vice-versa ou dois pares conjugados de parênteses.

4) Dois fatores sempre deverão estar dentro de um par conjugado de parênteses.

Portanto, para $n = 3$, a colocação de parênteses:

$$\left(x_0(x_1x_2)\right)$$

é correta, enquanto as colocações:

$$x_0)x_1)(x_2(\quad \text{e} \quad (x_0)(x_1x_2)$$

estão erradas.

Denotando P_n como o total de modos de se colocar parênteses num produto ordenado de n fatores, sejam os casos particulares a seguir para cada valor de n:

(i) Para $n = 2 \rightarrow P_2 = 1$: (x_0x_1).

(ii) Para $n = 3 \rightarrow P_3 = 2$: $\left((x_0x_1)x_2\right)$, $\left(x_0(x_1x_2)\right)$.

(iii) Para $n = 4 \rightarrow P_4 = 5$: $\left(((x_0x_1)x_2)x_3\right)$, $\left((x_0(x_1x_2))x_3\right)$, $\left(x_0((x_1x_2)x_3)\right)$, $\left(x_0\left(x_1(x_2x_3)\right)\right)$, $\left((x_0x_1)(x_2x_3)\right)$.

Novamente, é natural a associação entre o número de modos de se colocar parênteses num produto ordenado com n fatores e os números de Catalan:

Tabela 12 - Relação entre os números de Catalan e o número de modos de se colocar parênteses.

n	0	1	2	3	4
C_n	1	1	2	5	14
P_n			1	2	5

Teorema: O número de maneiras P_n de se colocar parênteses num produto ordenado com n fatores é dado por:

$$\boxed{P_n = C_{n-1}},$$

para $n \geq 1$ e assumindo que $P_1 = 1$.

Demonstração: Para colocarmos os parênteses ao longo do produto dos n fatores de acordo com as regras listadas, note que podemos dividir tal produto em dois blocos, contabilizar o total de modos de se colocar os parênteses em cada um dos blocos e depois aplicar o Princípio Multiplicativo.

Ao dividir o produto dos n fatores em dois blocos, seja o primeiro com k fatores e o segundo com os demais $n-k$ fatores, dessa forma, o total de modos de colocar parênteses nessa configuração será dado por: $P_k P_{n-k}$.
Com efeito, o valor de P_n pode ser obtido por meio do Princípio Aditivo ao considerar todas as possíveis divisões dos n fatores em dois blocos:

$$\boxed{P_n = P_1 P_{n-1} + P_2 P_{n-2} + P_3 P_{n-3} + \cdots + P_{n-1} P_1},$$

Para $n \geq 2$ e assumindo que $P_1 = 1$.
Portanto, de acordo com a relação de recorrência obtida para os números de Catalan, é imediato que:

$$P_n = C_{n-1}.$$

CQD

Outra maneira de interpretar o problema do número de modos de se colocar parênteses no produto de n fatores é observando os seguintes fatos:

(I) Ao todo são colocados $2(n-1)$ parênteses no produto dos n fatores.

(II) Ao ler o produto dos n fatores da esquerda para a direita, sendo o número de parênteses abertos pela direita igual a x e o número de parênteses abertos pela esquerda igual a y, devemos ter que $x \geq y$.

Portanto, o problema é equivalente ao de se deslocar da origem $(0,0)$ ao ponto $(n-1, n-1)$ permanecendo sempre abaixo da reta $y = x$ ou no máximo a tocando. Tal problema pode ser resolvido pelo Princípio da Reflexão, conforme feito no capítulo 2, e tem contagem equivalente a C_{n-1}.

Corolário: O número de maneiras P_n de se colocar parênteses num produto ordenado com n fatores é equivalente ao número de triangulações T_{n+1} de um $(n+1)-$ ágono:

$$\boxed{P_n = T_{n+1}},$$

com $n \geq 1$.

Demonstração: O resultado segue de imediato a partir das relações já demonstradas. Dessa forma:

$$P_n = C_{n-1} \text{ e } T_n = C_{n-2}$$

Portanto:

$$P_n = T_{n+1}.$$

CQD

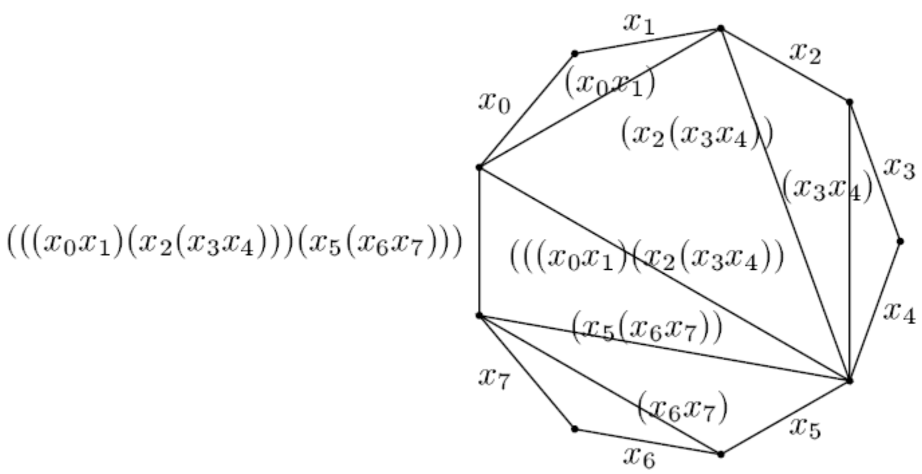
No entanto, é interessante observar tal resultado a partir da construção das triangulações e verificar a equivalência das duas contagens.

(i) Para o caso $n = 8$, seja a seguinte colocação de parênteses:

$$\Big(\big((x_0x_1)(x_2(x_3x_4))\big)\,(x_5(x_6x_7))\Big),$$

e a correspondente triangulação num eneágono:

Figura 21 - Exemplo de relação entre P_8 e T_9.



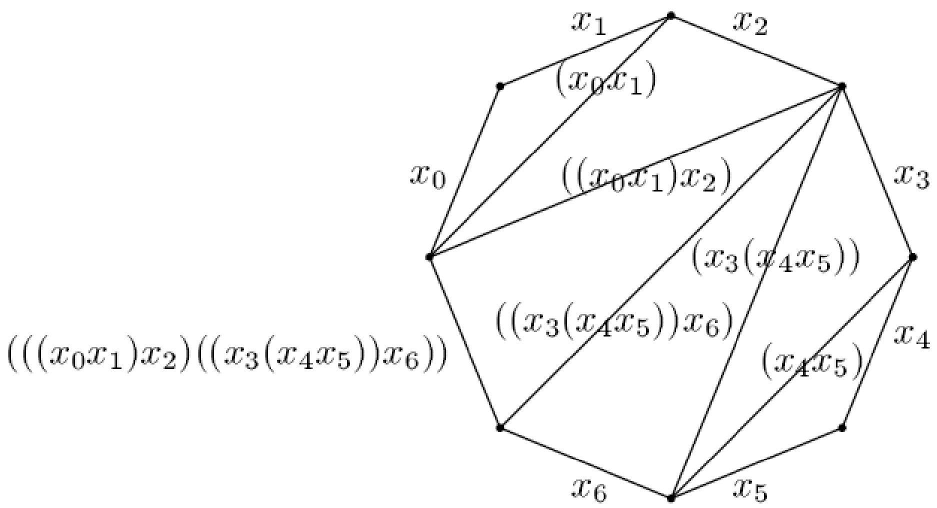
Fonte: autor.

(ii) Para o caso $n = 7$, seja a seguinte colocação de parênteses:

$$\Big(\big((x_0x_1)x_2\big)\,\big((x_3(x_4x_5))x_6\big)\Big),$$

e a correspondente triangulação num octógono:

Figura 22 - Exemplo de relação entre P_7 e T_8.



Fonte: autor.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho aqui desenvolvido e apresentado foi fruto não apenas de dois anos de disciplinas de mestrado cursadas, seguidos por uma intensa pesquisa, materializados no presente texto, mas vai além disso, passa por todas as dificuldades enfrentadas ao longo de todo o trajeto. Diz a lenda que, ao terminar um quadro encomendado por um mecenas, Picasso foi questionado por cobrar um alto valor sendo que vez em tão pouco tempo, então a sua resposta foi “Não, na verdade levei a minha vida inteira para pintá-lo.” De acordo com o espírito da resposta dada por Picasso, o texto é fruto de uma vida inteira de aprendizados constantes, desde antes da própria graduação até os vários anos em sala de aula, vivenciando as mais diversas realidades e observando as particularidades de cada situação, dos alunos e de professores, pode-se dizer que esta dissertação começou a ser preparada muito antes, há vários anos, por meio das experiências que pude adquirir e das informações que, mesmo sem intencionar, fui reunindo mentalmente.

Como objetivo principal, buscou-se apresentar de forma compilada em um único texto os principais resultados das principais bibliografias existentes a respeito da Análise Combinatória. Além disso, acrescidos da interpretação do autor e da abordagem que lhe é própria, cada resultado foi demonstrado não apenas algebricamente, como também de maneira combinatória, procurando dar ao assunto uma abordagem diferenciada e levando em consideração as suas particularidades. Portanto, aplicando técnicas de duplas contagens, foi possível obter resultados até então complexos de modo mais simples e até mesmo mais natural.

Ao tratar a Análise Combinatória em sala de aula como um conjunto de receitas em que para cada situação deve ser utilizada esta ou aquela fórmula, tira-se do aluno a capacidade de raciocinar, de pensar e, consequentemente, de aprender. Antes de dar as respostas aos alunos, o professor deve trazer as perguntas e ensiná-los a questionar, despertando, assim, a curiosidade, força motriz do conhecimento e do aprendizado.

Entre as décadas de 50 e de 60, o renomado físico, Richard Feynman, ganhador do prêmio Nobel de Física em 1965, veio à convite para o Brasil aonde ministrou alguns cursos ao longo desse período e ao final fez uma palestra a respeito do ensino de Física no Brasil que pode nos dar lições que vão muito além da Física. O relatado foi feito pelo próprio Feynman no capítulo "O americano, outra vez!" de seu livro “O senhor está brincando, Sr. Feynman!” e dele podem-se destacar alguns trechos que vão de encontro ao que se observa no ensino de Análise Combinatória e, certamente, de muitas outras disciplinas também. Após fazer algumas perguntas a um grupo de destacados estudantes e obter suas respostas, Feynman fez a seguinte observação:

> Depois de muita investigação, finalmente descobri que os estudantes tinham decorado tudo, mas não sabiam o que queria dizer. Quando eles ouviram “luz que é refletida de um meio com um índice”, eles não sabiam que isso significava um material como a água. Eles não sabiam que a “direção da luz” é a direção na qual você vê alguma coisa quando está olhando, e assim por diante. Tudo estava totalmente decorado, mas nada havia sido traduzido em palavras que fizessem sentido. Assim, se eu perguntasse: “O que é o Ângulo de Brewster?”, eu estava entrando no computador com a senha correta.

> Mas se eu digo: “Observe a água”, nada acontece – eles não têm nada sob o comando “Observe a água”.

Após o término de período o qual lecionou para os estudantes brasileiros e ministrou aqui seus cursos, Feynman deu uma palestra para as autoridades brasileiras relatando a sua experiência e dando orientações quanto ao ensino no país. Ao começar, uma de suas primeiras observações foi:

> Então eu digo que uma das primeiras coisas a me chocar quando cheguei ao Brasil foi ver garotos da escola elementar em livrarias, comprando livros de física. Havia tantas crianças aprendendo física no Brasil, começando muito mais cedo do que as crianças nos Estados Unidos, que era estranho que não houvesse muitos físicos no Brasil – por que isso acontece? Há tantas crianças dando duro e não há resultado.

E, sem querer prolongar demais a sequência de relatos feitos por Feynman, mas tomando ainda da fonte de suas observações e de suas palavras:

> Por fim, eu disse que não conseguia entender como alguém podia ser educado neste sistema de autopropagação, no qual as pessoas passam nas provas e ensinam os outros a passar nas provas, mas ninguém sabe nada.

Tomando uso das duras constatações feitas por Feynman com relação ao ensino de Física, o mesmo tipo de atitude pode ser constatada no ensino de Análise Combinatória e, de modo semelhante, é de causar grande estranhamento o fato de desde tão cedo aprenderem a contar e, no entanto, quando mais velhos, a Análise Combinatória soar como algo completamente distópico para os alunos.

Nesse sentido, a dissertação também tem como meta apresentar a disciplina de modo a tornar a sucessão de técnicas de contagem como algo natural, como a colocação de um tijolo após o outro para que então se construa uma parede, um cômodo e então a casa, cada teorema e cada assunto são apresentados por meio de um processo natural, muitas vezes motivados por algum problema ou exemplo já tratados anteriormente. Somado a isso, vale acrescentar um outro aspecto, não apenas a cadeia de deduções de técnicas de contagem segue uma ordem, como também certos resultados anteriormente obtidos são eventualmente revisitados com uma abordagem diferenciada, fazendo uso de uma técnica mais avançada, mas que pode dar uma leitura mais simples de um problema antes complexo.

A escolha dos assuntos e da abordagem feitas pelo autor são frutos não apenas do conjunto de experiências pessoais e preferências particulares, que tanto instigaram a curiosidade e foram os principais combustíveis para a busca pelo conhecimento, mas somam-se a isso a própria dificuldade em encontrar fontes bibliográficas e textos de origem nacional que tratassem de determinadas técnicas de contagem aqui apresentadas. Tendo isso em vista, aliado a um gosto pela Análise Combinatória e à possibilidade de poder apresentar tal assunto a outros professores, alunos e demais interessados e curiosos, tem-se como resultado esta dissertação, fruto de muitas horas a menos de sono e de grande prazer intelectual em sua elaboração.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, Ian. **A First Course in Discrete Mathematics**. 2ª edição. Switzerland: Springer Undergraduate Mathematics Series, 2002.

CHEN, Young-Ming. **The Chung-Feller theorem revisited.** Department of Mathematical Sciences, National Chengchi University, Mucha, Taipei 11623, Taiwan, Discrete Mathematics, Volume 308, Issue 7, Pages 1328-1329, 6 April 2008. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X07001811. Acesso em: 06 de maio de 2020.

FEYNMAN, Richard P. **O senhor está brincando, Sr. Feynman?: As estranhas aventuras de um físico excêntrico.** São Paulo, SP: Elsevier, 2006.

GRAHAM, Ronald; KNUTH, Ervin; PATASHNIK, Oren. **Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.** 2ª edição. MIT: Addison-Wesley Professional, 1994.

JACKSON, Bradley; THORO, Dmitri. **Applied Combinatorics With Problem Solving.** MIT: Addison-Wesley, 1989.

KOSHY, Thomas. **Catalan Numbers with Applications.** Oxônia, UK: Oxford University Press, 2009.

KOSHY, Thomas. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.** New York, US: John Wiley & Sons, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Dez mandamentos para professores.** Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n° 10. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/10/2.htm. Acesso em: 10 de jan. de 2021.

MORGADO, Augusto César de Oliveira. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 1978.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** São Paulo, SP: Editora Zahar, 2012.

ROSS, Sheldon M. **A First Course in Probability**. 8ª edição. California, US: Pearson, 2010.

SAID, José Heber Nieto. **Teoría Combinatoria.** Maracaibo, VE: Departamento de Matematica y Computacion, Facultad Experimental de Ciencias, La Universidad del Zulia, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** São Paulo, SP: Martins Fontes, 1984.

ZEITZ, Paul. **The Art and Craft of Problem Solving.** Second Edition. Danvers, MA, US: John Wiley & Sons, 2006.

<https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/GH/H_2.htm>. Acesso em: 02 de fev. de 2020.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Girolamo_Cardano>. Acesso em: 05 de março de 2020.

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal#/media/Ficheiro:Yanghui_triangle.gif>. Acesso em: 05 de março de 2020.

<https://blog.wolfram.com/2016/11/14/celebrating-gottfried-leibniz-on-the-300th-anniversary-of-his-death/>. Acesso em: 05 de março de 2020.

<https://mathworld.wolfram.com/CountingGeneralizedPrinciple.html>. Acesso em: 02 de abril de 2020.

<https://mathworld.wolfram.com/DirichletsBoxPrinciple.html>. Acesso em: 08 de abril de 2020.

<https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Pigeonhole_Principle>. Acesso em: 10 de abril de 2020.

<https://mathworld.wolfram.com/DyckPath.html>. Acesso em: 01 de maio de 2020.

<https://mathworld.wolfram.com/PascalsTriangle.html>. Acesso em: 03 de junho de 2020.