



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Leone Santana de Melo Veneroni

**Estudo de objetos compactos em um universo com constante
cosmológica**

Rio de Janeiro

2021

Leone Santana de Melo Veneroni

Estudo de objetos compactos em um universo com constante cosmológica



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Profa. Dra. Maria de Fátima Alves da Silva

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

V456e

Veneroni, Leone Santana de Melo.
Estudo de objetos compactos em um universo com
constante cosmológica / Leone Santana de Melo
Veneroni.- 2021.
125 f.: il.

Orientadora: Maria de Fátima Alves da Silva.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio
de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Colapso gravitacional (Astronomia) - Teses. 2. Anisotropia - Fluidos -Teses. 3. Einstein, Equações de - Teses. 4. Relatividade geral (Física) - Teses. I. Silva, Maria de Fátima Alves da. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.12

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Leone Santana de Melo Veneroni

Estudo de objetos compactos em um universo com constante cosmológica

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de janeiro de 2021.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Maria de Fátima Alves da Silva (Orientadora)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Nilton Oscar Santos
Observatoire de Paris-Meudon

Prof. Dr. Satheeshkumar Veerahanumakkanapalya Honnappa
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Willians Oswaldo Barreto Acevedo
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2021

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família, em especial à minha mãe Sueli, aos meus amigos e colegas, aos funcionários da pós-graduação Ranna e Samir, aos meus professores, em especial, à minha orientadora Maria de Fátima.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (Faperj).

As convicções são cárceres. Mais inimigas da verdade do que as próprias mentiras.

Friedrich Nietzsche

O LaTeX é indomável!

Gustavo Pinheiro

RESUMO

VENERONI, L. S .M. *Estudo de objetos compactos em um universo com constante cosmológica*. 2021. 125 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Esta tese visa a modelagem de objetos compactos, seja numa configuração estática, simulando idealmente estrelas de nêutrons, ou colapsante, podendo resultar num buraco negro. Para isso, consideramos um fluido radiante em colapso gravitacional com fluxo de calor radial, viscosidade volumar, viscosidade de cisalhamento e pressões anisotrópicas num espaço-tempo com constante cosmológica. Embora não tenhamos conseguido integrar a equação que nos permitiria estudar analiticamente todas as quantidades físicas relevantes, durante o processo de colapso, estas grandezas são apresentadas em termos de uma função do tempo, que determina tal evolução. Como uma alternativa, analisamos os casos particulares onde a pressão radial é nula e, em outra linha, investigamos a influência da constante cosmológica em uma aproximação linear. Foi apresentada uma solução das equações de campo de Einstein com dependência temporal, sendo estudadas quantidades físicas relevantes, tais como a função massa-energia e a luminosidade para um observador no infinito. Também foi analisado o caso estático com constante cosmológica, sendo estudados dois perfis de densidade (STEWART, 1982) (DURGAPAL; BANNERJI, 1983), propostos na literatura para modelar estrelas de nêutrons. Para eles, uma equação de estado não local com constante cosmológica é obtida como consequência da métrica escolhida. Nesses casos, as condições de energia foram analisadas de modo a assegurar a razoabilidade física dos modelos. O perfil de Stewart admite a presença de energia escura no interior do objeto nas camadas mais externas para certos valores da razão massa-raio γ . Também há valores de γ em que todas as condições de energia são satisfeitas. O perfil de Durgapal-Bannerji não admite energia escura, e para que garantir que todas as condições de energia sejam satisfeitas para um intervalo específico de γ , só permite soluções para $\Lambda < 0$. Por outro lado, investigamos o caso em que pressão radial é nula, revelando que a constante cosmológica negativa pode compensar a ausência de pressão radial.

Palavras-chave: colapso gravitacional. objeto compacto. fluido anisotrópico. constante cosmológica.

ABSTRACT

VENERONI, L. S .M. *Collapse study of compact objects with cosmological constant*. 2021. 125 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

This thesis aims at modeling compact objects, either in a static configuration, ideally simulating neutron stars, or collapsing, which may result in a black hole. For this, we consider a radiant fluid in gravitational collapse with radial heat flow, bulk viscosity, and anisotropic pressures in a space-time with cosmological constant. Although we were unable to integrate the equation that would allow us to study analytically all the relevant physical quantities, during the collapse process, these quantities are presented in terms of a function of time, which determines such evolution. As an alternative, we analyze the particular cases where the radial pressure is zero and, in another approach, we investigate the influence of the cosmological constant in a linear approximation. A solution of Einstein's field equations with temporal dependence was presented, with relevant physical quantities being studied, such as the mass-energy function and luminosity for an observer at infinity. We also analyzed the static case with cosmological constant, where two density profiles (STEWART, 1982) (DURGAPAL; BANNERJI, 1983) proposed in the literature to model neutron stars were considered. For them, a non-local equation of state with a cosmological constant is obtained as a consequence of the chosen metric. In these cases, the energy conditions were analyzed in order to ensure the physical reasonableness of the models. Stewart's profile admits the presence of dark energy inside the object in the outermost layers for certain ranges of the mass-radius ratio γ . There are also values of γ where all energy conditions are satisfied. The Durgapal-Bannerji profile does not allow dark energy, and in order to ensure that all energy conditions are fulfilled for a specific range of γ , it only allows solutions for $\Lambda < 0$. In another direction, we also investigate the case in which radial pressure is zero. It reveals that the negative cosmological constant can compensate for the absence of radial pressure.

Keywords: gravitational collapse. compact object. anisotropic fluid. cosmological constant.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- ρR^2	69
Figura 2	- $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$	70
Figura 3	- $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$	70
Figura 4	- $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$	71
Figura 5	- ρR^2	72
Figura 6	- $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$	72
Figura 7	- $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$	73
Figura 8	- $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$	73
Figura 9	- ρR^2	74
Figura 10	- $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$	75
Figura 11	- $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$	75
Figura 12	- $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$	76
Figura 13	- ΛR^2	80
Figura 14	- h e ρR^2	81
Figura 15	- $P_r R^2$ e $P_\perp R^2$	82
Figura 16	- $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$	82
Figura 17	- $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$	83
Figura 18	- $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$	83
Figura 19	- p para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$	96
Figura 20	- p para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$	96
Figura 21	- ω_1 para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$	97
Figura 22	- ω_1 para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$	97
Figura 23	- ω_2 para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$	97
Figura 24	- ω_2 para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$	98
Figura 25	- Gráfico de \bar{m} com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-1}$	99
Figura 26	- Gráfico de \bar{m} com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-2}$	99
Figura 27	- Gráfico de \bar{m} com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-4}$	100
Figura 28	- Gráfico de $\bar{\Theta}_\Sigma$ com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-1}$	100
Figura 29	- Gráfico de $\bar{\Theta}_\Sigma$ com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-2}$	101
Figura 30	- Gráfico de $\bar{\Theta}_\Sigma$ com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-4}$	101

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	densidade de energia do fluido
ϱ	densidade de energia do campo de radiação
P_r	pressão radial
P_{\perp}	pressão tangencial
k_{α}	quadrivetor tipo-nulo
u^{α}	quadrivelocidade do fluido
q^{α}	fluxo de calor radial
X_{α}	quadrivetor unitário ao longo da direção radial
$g_{\alpha\beta}$	tensor métrico
$\sigma_{\alpha\beta}$	tensor de cisalhamento
σ	escalar de cisalhamento
Θ	escalar de expansão
η	coeficiente de viscosidade de cisalhamento
ζ	coeficiente de viscosidade volumar
κ	constante de acoplamento
$G_{\mu\nu}$	tensor de Einstein
$T_{\mu\nu}$	tensor momento-energia
$R_{\mu\nu}$	tensor de Ricci
R	escalar de Curvatura
c	velocidade da luz no vácuo
G	constante gravitacional universal
M_{\odot}	massa do Sol

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	COLAPSO GRAVITACIONAL NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	15
1.1	Equações de Einstein	15
1.2	Condições de junção	19
1.3	Função de massa	28
1.4	Luminosidade	34
2	COLAPSO GRAVITACIONAL PARA UMA MÉTRICA PARTICULAR	37
2.1	Curvatura extrínseca	41
2.2	Condição de fronteira	42
2.3	Formação do buraco negro	43
3	MODELOS DE OBJETOS COMPACTOS COM CONSTANTE COSMOLÓGICA	46
3.1	Equação de equilíbrio hidrostático	47
3.2	Equação de estado não local	49
3.3	Condições de junção	54
3.4	Condições de energia	58
4	CASOS PARTICULARES PARA O CASO ESTÁTICO	61
4.1	Pressão radial nula	61
4.2	Perfil de densidade proposto por Stewart	65
4.2.1	<u>Análise para $\Lambda R^2 = -0,1$</u>	68
4.2.2	<u>Análise para $\Lambda R^2 = 0,1$</u>	71
4.2.3	<u>Análise para $\Lambda R^2 = 0$</u>	74
4.3	Perfil de densidade proposto por Durgapal e Bannerji	78
5	APLICAÇÕES PARA O CASO DINÂMICO	84
5.1	Pressão radial nula	84
5.2	Caso perturbativo com constante cosmológica	87
5.2.1	<u>Modelo com a configuração inicial obtida a partir da densidade de Stewart</u>	95
	CONCLUSÃO	102
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICE A – SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL	109
	APÊNDICE B – CONDIÇÕES DE JUNÇÃO	117

INTRODUÇÃO

Em 1915, após formular suas hoje famosas equações de campo, Albert Einstein buscou uma solução para elas no intuito de encontrar um modelo que abrangesse todo o universo. Partindo da premissa de que toda a matéria e energia estavam distribuídas uniformemente, ele encontrou resultados que indicavam que o universo não seria estático, havendo a possibilidade de que o universo colapsasse. Na época, não havia muito entendimento do que existia fora da Via Láctea, de tal modo que as previsões do comportamento do universo eram baseadas no que se observava das estrelas da nossa galáxia, por isso Einstein conjecturou que o universo seria estático. Então, em 1917, ele inseriu um termo nas equações de campo que impediria que o universo colapsasse, garantindo que o modelo fosse estático. Esse termo era a constante cosmológica (EINSTEIN, 1917).

Em seguida, o matemático holandês Willem de Sitter propôs um modelo cosmológico com constante cosmológica sem matéria e energia, ou em quantidades ínfimas que não exerceriam influência no espaço-tempo (DE SITTER, 1917). Nesse modelo, o universo também seria estático, mas qualquer objeto dotado de massa se distanciaria do seu centro (FERREIRA, 2014). Logo, a luz emitida por corpos massivos teriam um desvio para o vermelho, isto é, o comprimento de onda da luz emitida por objetos distantes seriam maiores do que aqueles objetos similares emitidos mais próximos do observador (SOARES, 2012).

Em 1922, o físico e matemático russo Alexander Friedmann introduziu a ideia de um universo dinâmico, em que os modelos estáticos de Einstein e o de De Sitter seriam casos particulares de um mais amplo, no qual o universo poderia expandir-se e, em seguida, contrair-se novamente, permitindo um ciclo infinito (FRIEDMANN, 1922). Desse modo, a constante arbitrada postulada por Einstein tornava-se um remendo desnecessário. No ano de 1924, o belga Georges Lemaître percebeu que no modelo de De Sitter o universo possuía um centro, o que ia de encontro com as suposições de Einstein de que não haveria um local privilegiado no universo. Ele modificou o modelo de de Sitter ao considerar que não haveria uma região privilegiada do espaço, e que os pontos no universo se deslocavam para longe com o decorrer do tempo (FERREIRA, 2014).

A concepção de que a Via Láctea era uma galáxia como diversas outras surgiu quando Edwin Hubble conseguiu estimar a distância entre a Via Láctea e galáxia de Andrômeda. A medição, realizada em 1925, foi feita a partir de observações de estrelas cefeidas existentes em Andrômeda (HUBBLE, 1926). Hubble concluiu que essa galáxia era muito maior do que o tamanho estimado da Via Láctea à época. Em 1927, usando os dados de Hubble, Lemaître publicou em uma revista belga pouco conhecida que o universo era homogêneo e se expandia, havendo uma relação linear entre o *redshift* e a distância das nebulosas (LEMAÎTRE, 1927). Em 1929, com o auxílio de Milton Humason,

astrônomo do Observatório Monte Wilson, Hubble calculou a distância de 24 nebulosas dos 46 *redshifts* computados por Humason. No trabalho publicado, Hubble obteve um relação linear entre a velocidade aparente das galáxias e a distância (HUMASON, 1929) (HUBBLE, 1929).

No ano seguinte, Eddington publicou um artigo sobre o efeito de Sitter em que discutia os resultados de Hubble. Lemaître, que fora aluno de Eddington, ao perceber que não tinha sido citado, enviou cópias de seu artigo a seu ex-professor. Após ler o trabalho, Eddington tornou-se um defensor do modelo de Lemaître, tornando o trabalho publicado em 1927 conhecido no meio científico. Por fim, Einstein e de Sitter acabaram por desconsiderar a constante cosmológica das equações de campo (FERREIRA, 2014).

A constante cosmológica voltaria aos holofotes em 1998, quando dois grupos independentes, o High-z Supernova Search Team e Supernova Cosmology Project, chegaram à conclusão de que o universo estaria em expansão acelerada. O estudo foi realizado a partir da análise do espectro de supernovas do tipo Ia, que são oriundas da explosão de anãs brancas que excedem seu limite superior de massa, conhecido como limite de Chandrasekhar. Essas supernovas possuem magnitude absoluta conhecida, o que nos permite estimar a distância por meio do seu brilho observado (magnitude aparente) (RIESS et al., 1998) (PERLMUTTER et al., 1999). Os líderes desses grupos: Saul Perlmutter (Supernova Cosmology Project), Adam Riess e Brian Schmidt (High-z Supernova Search Team), acabaram compartilhando o Prêmio Nobel de Física de 2011.

Baseados nos dados da radiação cósmica de fundo do universo obtidos pelas sondas espaciais WMAP e Planck, estima-se que cerca de 70% da massa-energia total do universo seja constituída por uma energia hipotética de pressão negativa, que seria responsável pela fase atual de expansão acelerada do universo, denominada de energia escura (NETO, 2018). E dentre as hipóteses levantadas, a mais promissora é que a constante cosmológica Λ deveria ser reinserida nas equações de campo, fazendo o papel de energia escura. Ironicamente, o que Einstein afirmara que teria sido seu maior erro, a inserção da constante cosmológica nas equações de campo, pode ser a chave para explicar uma das questões mais intrigantes da física.

No entanto, existe um grande problema a ser resolvido: a conexão entre os dados cosmológicos e a interpretação da física de partículas. No último caso, a constante Λ representaria uma energia de vácuo, na qual sua escala de energia seria 120 ordens de magnitude maior do que a energia escura calculada pela cosmologia (modelo Λ CDM) (WEINBERG, 1989). Assim, não podemos ignorar que podem existir outras possibilidades de interpretação para a constante Λ , vendo-a como um termo extra ligado à geometria do espaço-tempo, que modifica sua relação com o conteúdo de matéria-energia, sem que esta seja necessariamente a explicação para a expansão acelerada do universo.

Embora a constante cosmológica venha sendo considerada a principal candidata à energia escura, com importância predominantemente em grandes distâncias, ela não é a

única. Há ainda outros modelos baseados em formas específicas de matéria-energia, tais como quintessência (TSUJIKAWA, 2013), k-essência (ARMENDARIZ-PICON; MUKHANOV; STEINHARDT, 2000) e gás de Tchapygin (KAMENSHCHIK; MOSCHELLA; PASQUIER, 2001), que podem exercer um papel importante, este último principalmente, na evolução de estruturas locais (BERTOLAMI; PÁRAMOS, 2005) (BHAR; GOVENDER; SHARMA, 2018). Como o gás de Tchapygin, fluidos com outras equações de estado também podem agir como energia escura, descrevendo fluidos exóticos com pressão suficientemente negativa de modo a violar a condição de energia forte, responsável por assegurar a atratividade da gravitação.

Os efeitos da constante cosmológica na cosmologia vêm sendo amplamente estudados, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional, porém ainda não há uma conclusão definitiva quanto à sua associação com a expansão acelerada do universo. Ainda que não seja confirmada, continua sendo interessante o estudo de suas consequências tanto para a cosmologia quanto para o estudo de objetos compactos, uma classe composta por anãs brancas, estrelas de nêutrons e magnetares, além dos buracos negros. Esses objetos de grandes densidades são as remanescentes de estrelas que consumiram todo seu combustível nuclear, isto é, que cessaram o processo de fusão nuclear que contrabalançava com a gravidade (equilíbrio hidrostático). Inicialmente, os modelos sobre esse tema consideravam um fluido perfeito isotrópico (SCHWARZSCHILD, 1916), mas trabalhos teóricos da década de 70 indicavam a possibilidade de haver anisotropia (componente radial da pressão diferente das componentes angulares, na simetria esférica) em matéria superdensa, pelo menos em certos intervalos de densidade (RUDERMAN, 1972).

Os primeiros estudos voltados para esferas anisotrópicas, seja abordando configurações estáticas (BOWERS; LIANG, 1974) (COSENZA et al., 1981), seja considerando lentas contrações (HERRERA; RUGGERI; WITTEN, 1979), indicavam que a presença de anisotropia alterava a estabilidade, o *redshift* máximo e a massa crítica (valor da massa em que a pressão radial tende ao infinito) (STEWART, 1982). Um trabalho posterior indicou que a massa crítica e o *redshift* superficial era maior em modelos anisotrópicos do que aqueles com isotropia (DEV; GLEISER, 2002). Outras pesquisas apontaram que a anisotropia leva à configurações mais estáveis (CHAN, 1993) (DEV; GLEISER, 2003). Mais uma particularidade da anisotropia foi apontada por Herrera, revelando um relação da não homogeneidade da densidade de energia com a anisotropia local da pressão (HERRERA, 2011). Saindo do regime estável, Malafarina e Joshi estudaram o colapso de poeira (sem pressão) e mostraram que o destino final, como um buraco negro, poderia ser modificado para uma singularidade nua, se fosse introduzida uma pressão tangencial arbitrariamente pequena (MALAFARINA; JOSHI, 2011). Para modelos de *gravastars* em que se considera a equação TOV para soluções estáticas com pressões negativas no centro, notou-se que as pressões devem ser anisotrópicas (CATTOEN; FABER; VISSER, 2005).

O cenário descrito por esses modelos ainda era muito idealizado, tanto no que

concerne a objetos compactos quanto ao colapso gravitacional. Para que fosse mais realístico, muitos autores contribuíram com a introdução de outras grandezas físicas. Primeiramente, foi considerado um modelo de colapso não adiabático (com fluxo de calor) para um fluido isotrópico (SANTOS, 1985), o que foi possível a partir da solução obtida por Vaidya (VAIDYA, 1951) para um fluido de poeira nula. Naquele trabalho, Santos obteve a forma correta para a condição de junção, corrigindo a que havia sido proposta por Glass (GLASS, 1981). Depois as viscosidades foram inseridas e as condições de energia para um fluido imperfeito analisadas (KOLASSIS; SANTOS; TSOUBELIS, 1988). Em uma primeira abordagem, a anisotropia na pressão foi considerada em uma estrela radiante sem viscosidades (CHAN, 1993), mas posteriormente foi adicionada a viscosidade de cisalhamento (CHAN, 2000) e a viscosidade volumar (CHAN, 2001), que não resultaram em nenhuma diferença para o cálculo da massa total perdida sob a forma de radiação e nem da luminosidade da estrela. Utilizando um esquema perturbativo utilizado por outros autores (HERRERA; DENMAT; SANTOS, 1989), em que se considera tanto as funções métricas quanto as grandezas físicas, citadas nesse parágrafo, expressas por um termo ligado a uma configuração em equilíbrio hidrostático e outro relacionado à perturbação, Reddy, M. Govender e Maharaj mostraram que o aumento da anisotropia reforça o aumento da perturbação (REDDY; GOVENDER; MAHARAJ, 2015). Por fim, campo eletromagnético foi também considerado (DI PRISCO et al., 2007) (PINHEIRO; CHAN, 2013).

Voltando à constante cosmológica, no intuito de investigar se a sua presença poderia afetar de algum modo a configuração de um objeto estável ou colapsante, muitos autores a introduziram nas equações de Einstein, analisando, por exemplo, o colapso de uma nuvem de poeira com uma constante positiva (MARKOVIC; SHAPIRO, 2000) (GONÇALVES, 2001). No trabalho de Markovic e Shapiro, eles observaram que inicialmente Λ , quando positivo, freava o colapso, mas posteriormente a gravidade dominava e puxava a esfera em direção da singularidade final (MARKOVIC; SHAPIRO, 2000). Pouco tempo depois, esse trabalho foi estendido para analisar casos degenerados e inhomogêneos (LAKE, 2000). Em seguida, soluções com constante cosmológica negativa também foram consideradas para examinar como ela afeta a evolução dinâmica do colapso (DESHINGKAR et al., 2001). Uma abordagem mais realística, em que um colapso dissipativo com constante cosmológica foi considerado, mostrou que a influência desta, principalmente nos estágios finais do colapso, leva ao aumento do gradiente de temperatura no núcleo estelar (GOVENDER; THIRUKKANESH, 2009). Mais recentemente, Bordbar et al relacionaram objetos compactos com a constante cosmológica, investigando o papel de Λ no limite superior de massa de uma estrela de nêutrons, e mostraram que a constante cosmológica só desempenha um papel considerável para valores maiores de $10^{-14}m^{-2}$ (BORDBAR; HENDI; PANAHAH, 2016).

Aqui, nesta tese, nossa principal motivação é a investigação de como a constante

cosmológica poderia afetar estruturas estáveis e colapsantes, a exemplo do que fizeram Bordbar et al (BORDBAR; HENDI; PANAHA, 2016), agora para modelos e abordagens diferentes. Ainda que para o valor da constante cosmológica, estimado pela cosmologia, esse efeito seja muito pequeno (e isso pode ser inferido a partir de análises dimensionais, quando comparamos o termo com Λ com o termo de Schwarzschild, na métrica que descreve o espaço-tempo externo à fonte), vemos dois aspectos relevantes nesse estudo: *i)* a compreensão por si só da influência de uma teoria da gravitação modificada pela constante cosmológica, através de efeitos locais, na estrutura de objetos compactos, independentemente do seu valor observacional, uma vez que este ainda não está bem estabelecido; *ii)* embora a constante cosmológica aceita pela cosmologia seja muito pequena, há ainda o problema do valor dessa constante, que no universo remoto seria muito maior. Na tentativa de ajustar as duas interpretações, alguns autores consideram Λ como uma função do tempo, abrindo mão da teoria da relatividade geral na sua forma completa, uma vez que essa função $\Lambda(t)$ levaria a uma divergência não nula do termo adicional na equação de Einstein (BLANCO-PÉREZ; FERNÁNDEZ-GUERRERO, 2015) (XU; LU; LI, 2010) (AZRI; BOUNAMES, 2017). Com esse nosso estudo, podemos estimar quais os limites mínimos de valores para a constante cosmológica se quisermos utilizar a teoria da relatividade geral como uma forma de teoria efetiva, e estudar o comportamento de objetos compactos numa época compatível com esses limites para Λ , o que não foi explorado neste trabalho.

No capítulo 2, é apresentado um modelo dinâmico com constante cosmológica e pressões anisotrópicas de um objeto compacto sob a luz da relatividade geral. Usando as equações de Einstein e condições de junção, são obtidos grandezas físicas relevantes. Uma métrica para a região interior ao objeto é proposta, de modo que as grandezas obtidas no capítulo anterior são reescritas baseadas nessa escolha. Além disso, investigamos a possibilidade de formação de buracos negros nesse caso. No capítulo 4, um modelo estático com constante cosmológica e pressões anisotrópicas é considerado. Uma equação de equilíbrio hidrostática é deduzida, condições de junção são utilizadas e as condições de energia são apresentadas. Casos particulares do caso estático são mostrados no capítulo 5. São obtidos intervalos da compacticidade γ em que todas as condições de energia são respeitadas, assim como aqueles no qual só a condição de energia forte é violada. Na seção 5.1, um solução com pressão radial nula é analisada. Em seguida, na seção 5.2, um perfil de densidade proposto por Stewart é utilizado. Outro perfil de densidade, desta vez proposto por Durgapal e Bannerji, é estudado. Finalmente, no capítulo 6, retomamos ao caso dinâmico propondo aplicações. Na seção 6.1, um modelo sem pressão radial é considerado. Na seção 6.2, uma solução perturbativa é proposta e grandezas físicas relevantes são obtidas. Por fim, no último capítulo as conclusões são apresentadas, resumindo os resultados encontrados ao longo de todo o trabalho.

1 COLAPSO GRAVITACIONAL NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A estabilidade de uma estrela é garantida pelo equilíbrio hidrostático. Esse equilíbrio ocorre quando a força gravitacional, oriunda da massa da própria estrela (orientada para o centro da estrela), e pressões, originadas da fusão termonuclear dos átomos e moléculas da estrela (pra fora), são balanceadas. Quando o processo de fusão nuclear é insuficiente para sustentar a gravidade da estrela, ocorre uma contração abrupta, conhecida como colapso gravitacional. Contudo, nem todas as estrelas passam por esse processo.

A evolução de uma estrela que não faz parte de um sistema binário ou múltiplo depende, basicamente, de sua massa. Estrelas que iniciam seu processo de evolução estelar com massa entre $0,8$ e $10 M_{\odot}$, na qual as anãs brancas são seu destino final, não passam por um colapso gravitacional.¹ Como não ocorre fusão de núcleos atômicos dentro das anãs brancas, a estabilidade das anãs é garantida pela pressão de degenerescência dos elétrons. Já estrelas que iniciam sua vida com de massa entre 10 e $25 M_{\odot}$ colapsam em uma supernova no final de sua evolução estelar, e o caroço residual desse evento são as estrelas de nêutrons. Estas, por sua vez, não colapsam por causa da pressão de degenerescência dos nêutrons. Por fim, quando uma estrela com massa maior do que $25 M_{\odot}$ colapsa, sob a luz da relatividade geral, não há mecanismo que sustente a contração de tanta massa, resultando em um buraco negro estelar (KEPLER; SARAIVA, 2004).

A maioria dos trabalhos de colapso gravitacional na relatividade geral não costuma considerar a constante cosmológica. Nesta tese, generalizamos grandezas e procedimentos usados na relatividade com a inclusão desta, de modo a investigarmos seu papel nos processos de colapso e na constituição de configurações estáticas.

1.1 Equações de Einstein

Na teoria da relatividade geral, o conteúdo de matéria-energia está acoplado à geometria do espaço-tempo através das equações de campo de Einstein. Desse modo, uma vez que o espaço-tempo interior, que descreve a fonte, apresenta elementos de matéria distintos do seu exterior, representados na relatividade geral pelo tensor energia-momento, decorre que a geometria do espaço-tempo completo deve ser descrita por métricas dife-

¹ Quanto menor a massa da estrela, maior será seu tempo de vida. Assim, quando comparadas com a idade do universo, estrelas com menos de $0,8 M_{\odot}$ não são antigas o suficiente para que elas tenham evoluído para além da sequência principal.

rentes, ajustadas na fronteira por um conjunto de condições de junção.

No modelo estudado neste trabalho, consideramos que há fluxo de calor e viscosidades no interior do objeto compacto, que representa aqui uma estrela densa idealizada, sendo natural supor que esta emita radiação, ou seja, o espaço externo não deve ser constituído de vácuo.

A melhor representação que temos na relatividade geral para um espaço-tempo externo a uma fonte de radiação, com simetria esférica, é dada pela métrica de Vaidya, que descreve o espaço-tempo preenchido por radiação nula. Como estamos considerando a presença da constante cosmológica, esta deve estar presente em ambas as métricas. A interior será obtida aqui neste trabalho a partir de considerações sobre a geometria e conteúdo físico. Já o espaço-tempo exterior é dado pela métrica de Vaidya-de Sitter (GRIFFITHS; PODOLSKÝ, 2009), que descreve o espaço-tempo externo a uma fonte que perde energia durante seu processo de colapso em um espaço-tempo de de Sitter, isto é, a métrica de Vaidya com constante cosmológica, que quando apresentada com coordenadas nulas é dada por (VAIDYA; SHAH, 1957)

$$\begin{aligned} ds_+^2 &= g_{\alpha\beta}^+ d\chi_+^\alpha d\chi_+^\beta \\ &= - \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}} - \frac{\Lambda \mathbf{r}^2}{3} \right) dv^2 - 2dv d\mathbf{r} + \mathbf{r}^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2), \end{aligned} \quad (1)$$

onde $\chi_+^\alpha = (\chi_+^0, \chi_+^1, \chi_+^2, \chi_+^3) = (v, \mathbf{r}, \theta, \phi)$ e v é uma coordenada nula.

Por outro lado, a métrica mais geral para a descrição do espaço-tempo preenchido por matéria, em coordenada comóveis, é dada por

$$\begin{aligned} ds_-^2 &= g_{\alpha\beta}^- d\chi_-^\alpha d\chi_-^\beta \\ &= -A^2(r,t) dt^2 + B^2(r,t) dr^2 + C^2(r,t) (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2), \end{aligned} \quad (2)$$

onde $\chi_-^\alpha = (\chi_-^0, \chi_-^1, \chi_-^2, \chi_-^3) = (t, r, \theta, \phi)$.

Entre essas duas variedades quadrimensionais, consideramos que exista uma hipersuperfície tridimensional Σ . A métrica desta região pode ser expressa como

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 &= g_{ij} d\zeta^i d\zeta^j \\ &= -d\tau^2 + R^2(\tau) (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2), \end{aligned} \quad (3)$$

em que $\varsigma^i = (\varsigma^1, \varsigma^2, \varsigma^3) = (\tau, \theta, \phi)$, sendo τ o tempo próprio.

Para a região interna, considerando um fluido geral com viscosidade volumar, viscosidade de cisalhamento, fluxo de calor e anisotropia na pressão, adotamos o seguinte tensor momento-energia (CHAN, 2001):

$$T_{\alpha\beta}^- = (\rho + P_{\perp})u_{\alpha}u_{\beta} + P_{\perp}g_{\alpha\beta} + (P_r - P_{\perp})X_{\alpha}X_{\beta} + q_{\alpha}u_{\beta} + q_{\beta}u_{\alpha} - 2\eta\sigma_{\alpha\beta} - \zeta\Theta(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}), \quad (4)$$

em que u_{α} é o quadrivetor velocidade do fluido e, portanto, um vetor tipo-tempo, X_{α} é um quadrivetor tipo espaço, P_r e P_{\perp} são as pressões nas direções principais, radial e tangencial, respectivamente, q_{α} é o quadrivetor fluxo de calor tipo-espaço, $\eta > 0$ é o coeficiente de viscosidade de cisalhamento, $\sigma_{\alpha\beta}$ é o tensor de cisalhamento, $\zeta > 0$ é o coeficiente de viscosidade volumar e Θ é o escalar de expansão.

Considerando as definições dadas acima, as seguintes relações devem ser respeitadas:

$$u^{\alpha}u_{\alpha} = -1, \quad (5)$$

$$u^{\alpha}q_{\alpha} = 0, \quad (6)$$

$$X_{\alpha}X^{\alpha} = 1, \quad (7)$$

$$X_{\alpha}u^{\alpha} = 0. \quad (8)$$

Como estamos tomando o fluido em coordenadas comóveis, sua quadrivelocidade é dada por

$$u^{\alpha} = \frac{\delta_0^{\alpha}}{A}. \quad (9)$$

Além disso, como o fluxo de calor é radial, temos

$$q^{\alpha} = q\delta_1^{\alpha}. \quad (10)$$

Já o vetor unitário tipo-espaço X^α é definido como

$$X^\alpha = \frac{\delta_1^\alpha}{B}, \quad (11)$$

enquanto que o escalar de expansão e de cisalhamento, por sua vez são dados, respectivamente, por

$$\Theta = \frac{1}{A} \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{2\dot{C}}{C} \right), \quad (12)$$

$$\sigma = -\frac{1}{3A} \left(\frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{C}}{C} \right). \quad (13)$$

A região externa, que consideramos aqui preenchida por um fluido de radiação nula, tem seu conteúdo descrito pelo tensor momento-energia

$$T_{\alpha\beta}^+ = \varrho k_\alpha k_\beta, \quad (14)$$

onde ϱ representa a densidade de energia da radiação nula e k_α é um quadrivetor tipo-nulo.

As equações de campo de Einstein, modificadas pela inclusão da constante cosmológica, passam a ser escritas como

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{Rg_{\alpha\beta}}{2} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (15)$$

com $\kappa = 8\pi$ no sistema de coordenadas geométricas ($c = G = 1$). Uma grandeza física relevante neste trabalho, que permite comparação com o esperado astrofisicamente, é a razão massa/raio ou compacticidade da “estrela”, que chamamos aqui de γ . A conversão desta, em unidades geométricas, para aquela dada em unidades físicas, se dá através da relação $\gamma_{física} = \gamma (1,35 \times 10^{27} kg/m)$.

As componentes não nulas das equações de campo (15) relativas ao espaço-tempo

interno são

$$\begin{aligned} G_{00}^- - \Lambda A^2 &= -\frac{2A^2 C''}{B^2 C} - \frac{A^2 C'^2}{B^2 C^2} + \frac{2A^2 B' C'}{B^3 C} + \frac{A^2}{C^2} + \frac{\dot{C}^2}{C^2} + \frac{2\dot{B}\dot{C}}{BC} - \Lambda A^2 \\ &= \kappa A^2 \rho, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} G_{11}^- + \Lambda B^2 &= \frac{C'^2}{C^2} + \frac{2A'C'}{AC} - \frac{B^2}{C^2} - \frac{2B^2\ddot{C}}{A^2 C} - \frac{B^2\dot{C}^2}{A^2 C^2} + \frac{2\dot{A}B^2\dot{C}}{A^3 C} + \Lambda B^2 \\ &= \kappa B^2 (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_{22}^- + \Lambda C^2 &= \frac{C^2}{B^2} \left(\frac{A''}{A} + \frac{C''}{C} - \frac{A'B'}{AB} + \frac{A'C'}{AC} - \frac{B'C'}{BC} \right) \\ &\quad + \frac{C^2}{A^2} \left(-\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{C}}{C} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{AC} - \frac{\dot{B}\dot{C}}{BC} \right) + \Lambda C^2 \\ &= \kappa C^2 (P_\perp - 2\eta\sigma - \zeta\Theta), \end{aligned} \quad (18)$$

$$G_{33}^- = G_{22}^- \text{sen}^2 \theta, \quad (19)$$

$$G_{01}^- = \frac{2A'\dot{C}}{AC} + \frac{2\dot{B}C'}{BC} - \frac{2\dot{C}'}{C} = -\kappa AB^2 q, \quad (20)$$

na qual a linha superposta representa $\partial/\partial r$ e o ponto, $\partial/\partial t$.

1.2 Condições de junção

Para que o espaço-tempo seja contínuo, as métricas devem “casar” na região que separa os espaços-tempos, que aqui é a hipersuperfície Σ . Esta é a primeira condição de junção que consideramos nesta tese, também conhecida como condição de continuidade da primeira forma fundamental (DARMOIS, 1927). Assim, devemos obter as métricas externa e interna em Σ , e depois igualá-las para que possamos obter relações úteis na nossa análise.

Primeiramente, tomando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\Sigma$, a métrica (1) pode ser reescrita como

$$(ds_+^2)_\Sigma = - \left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3} \right) dv^2 - 2dv d\mathbf{r}_\Sigma + \mathbf{r}_\Sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \quad (21)$$

sendo

$$d\mathbf{r}_\Sigma = \frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} dv. \quad (22)$$

Desta maneira, substituindo (22) em (21), chegamos na métrica externa quando tomada na hipersuperfície Σ , ou seja,

$$(ds_+^2)_\Sigma = - \left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3} + \frac{2d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} \right) dv^2 + \mathbf{r}_\Sigma^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2). \quad (23)$$

Analogamente, para a métrica interna, encontramos

$$\begin{aligned} (ds_-^2)_\Sigma &= -A^2(r_\Sigma, t) dt^2 + B^2(r_\Sigma, t) dr_\Sigma^2 + C^2(r_\Sigma, t) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \\ &= -A^2(r_\Sigma, t) dt^2 + C^2(r_\Sigma, t) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \end{aligned} \quad (24)$$

onde $dr_\Sigma^2 = 0$.

Sabendo que na hipersuperfície Σ as métricas coincidem, baseados em (3) e (23), podemos concluir que

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3} + \frac{2d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} \right) dv^2, \quad (25)$$

$$d\tau^2 = A^2(r_\Sigma, t) dt^2. \quad (26)$$

Deste modo, manipulando (25), encontramos

$$\check{v}_{\Sigma}^{-2} = \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}} - \frac{\Lambda \mathbf{r}^2}{3} + 2\check{\mathbf{r}}\check{v}^{-1} \right)_{\Sigma}, \quad (27)$$

onde $\check{}$ representa $d/d\tau$, e sendo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dv} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dv} = \check{\mathbf{r}}\check{v}^{-1}. \quad (28)$$

Do mesmo modo, de (26), podemos encontrar

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)_{\Sigma} = \frac{1}{A(r_{\Sigma}, t)}. \quad (29)$$

A continuidade da métrica fornece ainda as relações

$$R(\tau) = \mathbf{r}_{\Sigma}(v), \quad (30)$$

$$C(r_{\Sigma}, t) = \mathbf{r}_{\Sigma}(v). \quad (31)$$

Para estabelecermos a segunda condição de junção, ou continuidade da segunda forma fundamental, também conhecida como curvatura extrínseca de uma hipersuperfície, precisamos antes definir esta última. Sejam K_{ij}^{+} e K_{ij}^{-} as curvaturas extrínsecas de Σ , associadas, respectivamente, ao espaço-tempo externo e interno. Se $K_{ij}^{+} \neq K_{ij}^{-}$, nós chamamos Σ de hipersuperfície de ordem um. Nesse caso, existe uma camada de superfície que separa as duas regiões. Caso $K_{ij}^{+} = K_{ij}^{-}$ em todos os lugares, chamamos Σ de hipersuperfície de ordem superior, que é caracterizada por saltos no tensor energia-momento (ISRAEL, 1966) (ISRAEL, 1967). E será esse último tipo de hipersuperfície que vamos abordar aqui, fazendo um procedimento similar ao feito com as métricas. Assim, podemos escrever a curvatura extrínseca como (SANTOS, 1985)

$$K_{ij}^{\pm} = -\eta_{\alpha}^{\pm} \frac{\partial^2 \chi_{\pm}^{\alpha}}{\partial \zeta^i \partial \zeta^j} - \eta_{\alpha}^{\pm} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \chi_{\pm}^{\beta}}{\partial \zeta^i} \frac{\partial \chi_{\pm}^{\gamma}}{\partial \zeta^j}. \quad (32)$$

Inicialmente, analisando os termos ligados ao espaço-tempo externo, podemos ver que a equação de hipersuperfície é um vínculo e é dada por

$$g^+(\mathbf{r},v) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\Sigma(v) = 0. \quad (33)$$

O vetor unitário neste caso é dado por

$$\eta_\alpha^+ = \frac{\partial g^+}{\partial \chi_\alpha^+} = b \left(-\frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dv}, 1, 0, 0 \right), \quad (34)$$

sendo b uma constante de normalização, que pode ser determinada do seguinte modo

$$\eta_\alpha^+ \eta_+^\alpha = g_+^{\alpha\beta} \eta_\alpha^+ \eta_\beta^+ = g_+^{01} \eta_0^+ \eta_1^+ + g_+^{10} \eta_1^+ \eta_0^+ + g_+^{11} \eta_1^+ \eta_1^+ = 1. \quad (35)$$

onde

$$g_+^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \frac{2m(v)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Assim, usando (34) e (36) em (35), obtemos

$$b^2 \frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} + b^2 \frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} + b^2 \left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3} \right) = 1. \quad (37)$$

Logo,

$$b = \left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3} + \frac{2d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (38)$$

Substituindo (38) em (34), temos

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha^+ &= \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} + \frac{2d\mathbf{r}_\Sigma}{dv} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dv}, 1, 0, 0 \right) \\
&= \frac{dv}{d\tau} \left(-\frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dv}, 1, 0, 0 \right) \\
&= \left(-\frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{d\tau}, \frac{dv}{d\tau}, 0, 0 \right) \\
&= (-\check{\mathbf{r}}_\Sigma, \check{v}, 0, 0) .
\end{aligned} \tag{39}$$

A componente $i, j = 1$ da curvatura extrínseca da métrica externa é dada por

$$\begin{aligned}
K_{11}^+ &= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \varsigma^1 \partial \varsigma^1} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \varsigma^1} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \varsigma^1} \\
&= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \tau^2} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \tau} \\
&= \underbrace{-\eta_0^+ \frac{\partial^2 \chi_+^0}{\partial \tau^2}}_{(i)} - \underbrace{\eta_0^+ \Gamma_{00}^0 \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau}}_{(ii)} - \underbrace{\eta_1^+ \frac{\partial^2 \chi_+^1}{\partial \tau^2}}_{(iii)} \\
&\quad - \underbrace{\eta_1^+ \left(\Gamma_{00}^1 \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} + \Gamma_{10}^1 \frac{\partial \chi_+^1}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} + \Gamma_{01}^1 \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^1}{\partial \tau} \right)}_{(iv)},
\end{aligned} \tag{40}$$

onde $\frac{\partial \chi_+^2}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0$ e $\frac{\partial \chi_+^3}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$.

Separando em partes, encontramos

$$(i) = -\eta_0^+ \frac{\partial^2 \chi_+^0}{\partial \tau^2} = -\eta_0^+ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = -\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v},$$

$$(ii) = \check{\mathbf{r}}_\Sigma \left(\frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} - \frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} \right) \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2 \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right),$$

$$(iii) = \check{v} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\Sigma}{\partial \tau^2} = -\check{v} \check{\mathbf{r}}_\Sigma,$$

$$\begin{aligned}
(iv) &= -\eta_1^+ \left(\Gamma_{00}^1 \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} + 2\Gamma_{10}^1 \frac{\partial \chi_+^1}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \right) \\
&= \frac{\check{v}^3}{\mathbf{r}_\Sigma} \frac{dm(v)}{dv} - \check{v}^3 \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right) \\
&\quad - 2 \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2.
\end{aligned}$$

Derivando (27) em relação a τ , obtemos

$$-\frac{2\check{v}}{\check{v}^3} = -\frac{2dm(v)}{dv} \frac{\check{v}}{\mathbf{r}_\Sigma} + \frac{2m(v)\check{\mathbf{r}}_\Sigma}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{2\Lambda \mathbf{r}_\Sigma \check{\mathbf{r}}_\Sigma}{3} + \frac{2\check{\mathbf{r}}_\Sigma}{\check{v}} - \frac{2\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}}{\check{v}^2}, \quad (41)$$

que, rearranjando, nos dá

$$\frac{dm(v)}{dv} \frac{\check{v}}{\mathbf{r}_\Sigma} = \frac{\check{v}}{\check{v}^3} + \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \check{\mathbf{r}}_\Sigma + \frac{\check{\mathbf{r}}_\Sigma}{\check{v}} - \frac{\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}}{\check{v}^2}. \quad (42)$$

Agora, multiplicando (42) por \check{v}^2 , achamos

$$\frac{dm(v)}{dv} \frac{\check{v}^3}{\mathbf{r}_\Sigma} = \frac{\check{v}}{\check{v}} + \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2 + \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v} - \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}. \quad (43)$$

Em seguida, substituindo (43) na parte (iv) de (40), encontramos

$$(iv) = \frac{\check{v}}{\check{v}} - \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2 + \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v} - \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v} - \check{v}^3 \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right). \quad (44)$$

Enfim, somando (44) com as partes (i), (ii) e (iii) de (40), temos

$$\begin{aligned}
K_{11}^+ &= \frac{\check{v}}{\check{v}} - 2 \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2 - \check{v}^3 \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} \right) \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right) \\
&= \frac{\check{v}}{\check{v}} + \left(\frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma}{3} - \frac{m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma^2} \right) \left[2\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2 + \check{v}^3 \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right) \right].
\end{aligned} \tag{45}$$

Rearranjando (27), podemos escrevê-la como

$$1 = 2\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v} + \check{v}^2 \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \check{\mathbf{r}}_\Sigma}{3} \right). \tag{46}$$

Posteriormente, multiplicando por \check{v} , vamos obter

$$\check{v} = 2\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v}^2 + \check{v}^3 \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \check{\mathbf{r}}_\Sigma}{3} \right). \tag{47}$$

Portanto, substituindo (47) em (45), encontramos

$$\begin{aligned}
K_{11}^+ &= \left[\frac{\check{v}}{\check{v}} + \left(\frac{\Lambda \mathbf{r}}{3} - \frac{m(v)}{\mathbf{r}^2} \right) \check{v} \right]_\Sigma \\
&= \left[\frac{d^2 v}{d\tau^2} \left(\frac{dv}{d\tau} \right)^{-1} + \left(\frac{\Lambda \mathbf{r}}{3} - \frac{m(v)}{\mathbf{r}^2} \right) \frac{dv}{d\tau} \right]_\Sigma.
\end{aligned} \tag{48}$$

Em seguida, para $i, j = 2$, nós teremos

$$\begin{aligned}
K_{22}^+ &= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \varsigma^2 \partial \varsigma^2} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \varsigma^2} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \varsigma^2} \\
&= \underbrace{-\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \theta^2}}_0 - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \theta} \\
&= \underbrace{-\eta_0^+ \Gamma_{22}^0 \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta}}_{(v)} - \underbrace{\eta_1^+ \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta}}_{(vi)},
\end{aligned} \tag{49}$$

onde $\frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1$.

Separando novamente, vemos que

$$(i) = -(-\check{\mathbf{r}}_\Sigma) \mathbf{r}_\Sigma = \check{\mathbf{r}}_\Sigma \mathbf{r}_\Sigma, \quad (50)$$

$$(ii) = -\check{v} \left(2m(v) - \mathbf{r}_\Sigma + \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^3}{3} \right) = \check{v} \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right) \mathbf{r}_\Sigma. \quad (51)$$

Logo, substituindo (50) e (51) em (49), obtemos

$$\begin{aligned} K_{22}^+ &= \check{v} \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right) \mathbf{r}_\Sigma + \check{\mathbf{r}}_\Sigma \mathbf{r}_\Sigma \\ &= \frac{dv}{d\tau} \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} \right) \mathbf{r}_\Sigma + \frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{d\tau} \mathbf{r}_\Sigma. \end{aligned} \quad (52)$$

Já no espaço-tempo interno, começamos com a equação da hipersuperfície, isto é,

$$g^-(r,t) = r - r_\Sigma = 0. \quad (53)$$

O vetor unitário neste caso é dado por

$$\eta_\alpha^- = \frac{\partial g^-}{\partial \chi_-^\alpha} = a(0,1,0,0), \quad (54)$$

sendo a uma constante de normalização, que pode ser determinada do seguinte modo

$$\eta_\alpha^- \eta_-^\alpha = g_-^{\alpha\beta} \eta_\alpha^- \eta_\beta^- = g_-^{11} \eta_1^- \eta_1^- = 1, \quad (55)$$

com

$$g_-^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{A^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Assim, usando (54) e (56) em (55), obtemos

$$\frac{a^2}{B^2} = 1. \quad (57)$$

Logo,

$$a = B(r_\Sigma, t). \quad (58)$$

Substituindo (58) em (54), temos

$$\eta_\alpha^- = B(r_\Sigma, t) (0, 1, 0, 0). \quad (59)$$

A componente $i, j = 1$ da curvatura extrínseca da métrica interna é dada por

$$\begin{aligned} K_{11}^- &= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \varsigma^1 \partial \varsigma^1} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \varsigma^1} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \varsigma^1} \\ &= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \tau^2} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \tau} \\ &= \underbrace{-\eta_1^+ \frac{\partial^2 \chi_+^1}{\partial \tau^2}}_0 - \eta_1^+ \Gamma_{00}^1 \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \chi_-^1}{\partial \tau} = \frac{\partial r}{\partial \tau} = 0, \frac{\partial \chi_-^2}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0 \text{ e } \frac{\partial \chi_-^3}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0.$$

Portanto, obtemos

$$K_{11}^- = \left\{ -B \left[\frac{AA'}{B^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 \right] \right\}_\Sigma = - \left(\frac{A'}{AB} \right)_\Sigma, \quad (61)$$

sendo $\frac{\partial \chi_-^0}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{A(r_\Sigma, t)}$.

Em seguida, fazendo $i, j = 2$ na expressão da curvatura extrínseca da métrica interna, vamos encontrar

$$\begin{aligned} K_{22}^- &= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \varsigma^2 \partial \varsigma^2} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \varsigma^2} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \varsigma^2} \\ &= -\eta_\alpha^+ \frac{\partial^2 \chi_+^\alpha}{\partial \theta^2} - \eta_\alpha^+ \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \chi_+^\beta}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_+^\gamma}{\partial \theta} \\ &= \underbrace{-\eta_1^+ \frac{\partial^2 \chi_+^1}{\partial \theta^2}}_0 - \eta_1^+ \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (62)$$

onde $\frac{\partial \chi_-^0}{\partial \theta} = \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \chi_-^1}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial \chi_-^3}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$.

Segue que

$$K_{22}^- = \left[-B \left(-\frac{CC'}{B^2} \right) \right]_\Sigma = \left(\frac{C'C}{B} \right)_\Sigma, \quad (63)$$

onde $\frac{\partial \chi_-^2}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1$.

1.3 Função de massa

Rearranjando (27), podemos reescrevê-la como

$$\left(1 - \frac{2m(v)}{r_\Sigma} - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3} \right) \check{v}^2 + 2\check{\mathbf{r}}_\Sigma \check{v} - 1 = 0. \quad (64)$$

Determinando as raízes da equação (64), obtemos

$$\check{v} = \frac{-\check{\mathbf{r}}_\Sigma \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} + \check{\mathbf{r}}_\Sigma^2\right)}}{\left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3}\right)}. \quad (65)$$

Manipulando (65), obtemos

$$\check{v} \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3}\right) + \check{\mathbf{r}}_\Sigma = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} + \check{\mathbf{r}}_\Sigma^2\right)}. \quad (66)$$

Agora, multiplicando ambos os lados por \mathbf{r}_Σ , temos

$$\check{v} \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3}\right) \mathbf{r}_\Sigma + \check{\mathbf{r}}_\Sigma \mathbf{r}_\Sigma = \pm \mathbf{r}_\Sigma \sqrt{\left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} + \check{\mathbf{r}}_\Sigma^2\right)}, \quad (67)$$

que é exatamente igual à equação (52) (componente K_{22}^+ da curvatura extrínseca).

Partindo do pressuposto que $K_{22}^+ = K_{22}^-$, as equações (63) e (67) nos fornecem

$$\pm \mathbf{r}_\Sigma \sqrt{\left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_\Sigma} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_\Sigma^2}{3} + \check{\mathbf{r}}_\Sigma^2\right)} = \left(\frac{C'C}{B}\right)_\Sigma. \quad (68)$$

Considerando (31), vamos obter

$$\left(1 - \frac{2m(v)}{C} - \frac{\Lambda C^2}{3} + \check{\mathbf{r}}^2\right)_\Sigma = \left(\frac{C'}{B}\right)_\Sigma^2. \quad (69)$$

Desta vez, considerando as equações (29) e (31), encontramos

$$\check{\mathbf{r}}_\Sigma = \frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{d\tau} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}_\Sigma}{dt}}_{\dot{C}} \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{1/A} = \left(\frac{\dot{C}}{A}\right)_\Sigma. \quad (70)$$

Logo depois, substituindo (70) em (69), temos

$$\left[1 - \frac{2m(v)}{C} - \frac{\Lambda C^2}{3} + \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 \right]_{\Sigma} = \left(\frac{C'}{B} \right)_{\Sigma}^2. \quad (71)$$

Portanto, podemos rearranjar (71) de tal modo que nos forneça a massa, ou seja,

$$m(v) = \left\{ \frac{C}{2} \left[1 + \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 - \left(\frac{C'}{B} \right)^2 - \frac{\Lambda C^2}{3} \right] \right\}_{\Sigma}. \quad (72)$$

Podemos ainda obter a função de massa usando uma componente do tensor de Riemann (CAHILL; MCVITTIE, 1970) da métrica interna. Ao introduzir uma constante cosmológica, um termo é inserido, isto é,

$$\begin{aligned} m(v) &= \left\{ \frac{C}{2} \left(R_{232}^3 - \frac{\Lambda C^2}{3} \right) \right\}_{\Sigma} \\ &= \left\{ \frac{C}{2} \left[1 + \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 - \left(\frac{C'}{B} \right)^2 - \frac{\Lambda C^2}{3} \right] \right\}_{\Sigma}, \end{aligned} \quad (73)$$

onde

$$R_{232}^3 = 1 + \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 - \left(\frac{C'}{B} \right)^2. \quad (74)$$

Para obtermos outra relação, temos que nos valer de $K_{11}^+ = K_{11}^-$. Assim, usando (48) e (61), temos

$$\left[\frac{\check{\check{v}}}{\check{v}} + \left(\frac{\Lambda \mathbf{r}}{3} - \frac{m(v)}{\mathbf{r}^2} \right) \check{v} \right]_{\Sigma} = - \left(\frac{A'}{AB} \right)_{\Sigma}. \quad (75)$$

Mas antes é necessário obtermos $\check{\check{v}}_{\Sigma}$ e \check{v}_{Σ} . Para conseguirmos isso, devemos considerar que $K_{22}^+ = K_{22}^-$, comparando desta vez o lado esquerdo de (67) com (63), isto é,

$$\check{v}_{\Sigma} \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}_{\Sigma}} - \frac{\Lambda \mathbf{r}_{\Sigma}^2}{3} \right) \mathbf{r}_{\Sigma} + \check{\check{\mathbf{r}}}_{\Sigma} \mathbf{r}_{\Sigma} = \left(\frac{C'C}{B} \right)_{\Sigma}. \quad (76)$$

Usando (31) e (70) em (76), teremos

$$\left[\check{v} \left(1 - \frac{2m(v)}{C} - \frac{\Lambda C^2}{3} \right) C + \frac{\dot{C}C}{A} \right]_{\Sigma} = \left(\frac{C'C}{B} \right)_{\Sigma}. \quad (77)$$

Posteriormente, substituindo (72) em (77), vamos obter

$$\left\{ \check{v} \left[1 - 1 + \frac{\Lambda C^2}{3} - \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 + \left(\frac{C'}{B} \right)^2 - \frac{\Lambda C^2}{3} \right] C + \frac{\dot{C}C}{A} \right\}_{\Sigma} = \left(\frac{C'C}{B} \right)_{\Sigma}, \quad (78)$$

que resulta em

$$\left\{ \check{v} \left[\left(\frac{C'}{B} \right)^2 - \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 \right] + \frac{\dot{C}}{A} \right\}_{\Sigma} = \left(\frac{C'}{B} \right)_{\Sigma}. \quad (79)$$

No intuito de obtermos \check{v}_{Σ} , temos que manipular (79) de tal modo que

$$\left\{ \check{v} \left[\left(\frac{C'}{B} \right)^2 - \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 \right] \right\}_{\Sigma} = \left(\frac{C'}{B} - \frac{\dot{C}}{A} \right)_{\Sigma}, \quad (80)$$

$$\left[\check{v} \left(\frac{AC' + B\dot{C}}{AB} \right) \right]_{\Sigma} = 1. \quad (81)$$

De (81), podemos escrever

$$\check{v}_{\Sigma} = \left(\frac{AB}{AC' + B\dot{C}} \right)_{\Sigma}. \quad (82)$$

Dividindo (82) por AB , enfim encontramos

$$\check{v}_{\Sigma} = \left(\frac{1}{\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A}} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)_{\Sigma}^{-1}. \quad (83)$$

Derivando (83) em termos do tempo próprio τ , obtemos

$$\check{\check{v}}_{\Sigma} = - \left[\left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)^{-2} \left(\frac{\dot{C}'}{AB} - \frac{\dot{B}C'}{AB^2} + \frac{\ddot{C}}{A^3} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{A^3} \right) \right]_{\Sigma}, \quad (84)$$

$$\text{onde } \check{\check{v}}_{\Sigma} = \frac{d\check{v}_{\Sigma}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\check{v}_{\Sigma}}{dt} = \frac{1}{A} \frac{d\check{v}_{\Sigma}}{dt}.$$

Assim, podemos determinar o termo mais à esquerda de (75), isto é,

$$\left(\frac{\check{\check{v}}}{\check{v}} \right)_{\Sigma} = - \left[\left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)^{-1} \left(\frac{\dot{C}'}{AB} - \frac{\dot{B}C'}{AB^2} + \frac{\ddot{C}}{A^3} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{A^3} \right) \right]_{\Sigma}. \quad (85)$$

Nos valendo de (31), podemos trocar r por C na equação (75), ou seja,

$$\left[\left(\frac{\Lambda \mathbf{r}}{3} - \frac{m(v)}{\mathbf{r}^2} \right) \check{v} \right]_{\Sigma} = \left[\left(\frac{\Lambda C}{3} - \frac{m(v)}{C^2} \right) \check{v} \right]_{\Sigma}. \quad (86)$$

Em seguida, separando (86) em duas partes e usando (83), podemos reescrever o termo da esquerda como

$$\left(\frac{\Lambda C \check{v}}{3} \right)_{\Sigma} = \left[\frac{\Lambda C}{3} \left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)^{-1} \right]_{\Sigma}. \quad (87)$$

Por outro lado, usando (72) e (83), reescrevemos o termo da direita como

$$\begin{aligned} \left(\frac{m\check{v}}{C^2} \right)_{\Sigma} &= \left\{ \frac{\frac{C}{2} \left[1 - \frac{\Lambda C^2}{3} + \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 - \left(\frac{C'}{B} \right)^2 \right]}{C^2} \left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)^{-1} \right\}_{\Sigma} \\ &= \left\{ \left[\frac{1}{2C} - \frac{\Lambda C}{6} + \frac{\dot{C}^2}{2A^2C} - \frac{C'^2}{2B^2C} \right] \left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)^{-1} \right\}_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (88)$$

Multiplicando os resultados encontrados (85), (87) e (88) por menos o inverso de (83), ou seja, $-\check{v}_{\Sigma}^{-1}$, a equação (75) pode ser reescrita como

$$\left[\frac{\dot{C}'}{AB} - \frac{\dot{B}C'}{AB^2} + \frac{\ddot{C}}{A^3} - \frac{\dot{A}\dot{C}}{A^3} - \frac{\Lambda C}{3} + \frac{1}{2C} - \frac{\Lambda C}{6} + \frac{\dot{C}^2}{2A^2C} - \frac{C'^2}{2B^2C} \right]_{\Sigma} = \left[\frac{A'}{AB} \left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right) \right]_{\Sigma}. \quad (89)$$

Rearranjando (89), podemos encontrar

$$\left[\frac{\dot{C}'}{AB} - \frac{\dot{B}C'}{AB^2} - \frac{A'\dot{C}}{A^2B} \right]_{\Sigma} = \left[\frac{A'C'}{AB^2} - \frac{\ddot{C}}{A^3} + \frac{\dot{A}\dot{C}}{A^3} - \frac{1}{2C} - \frac{\dot{C}^2}{2A^2C} + \frac{C'^2}{2B^2C} + \frac{\Lambda C}{2} \right]_{\Sigma}, \quad (90)$$

ou ainda

$$\left[-\frac{C}{2AB} \overbrace{\left(-\frac{2\dot{C}'}{C} + \frac{2C'\dot{B}}{BC} + \frac{A'\dot{C}}{A^2B} \right)}^{G_{01}^-} \right]_{\Sigma} = \left[\frac{C}{2B^2} \overbrace{\left(\frac{2A'C'}{AC} - \frac{2B^2\ddot{C}}{A^3C} + \frac{2\dot{A}B^2\dot{C}}{A^3C} - \frac{B^2}{C^2} - \frac{B^2\dot{C}^2}{A^2C^2} + \frac{C'^2}{C^2} \right)}^{G_{11}^-} + \frac{\Lambda C}{2} \right]_{\Sigma}. \quad (91)$$

Logo,

$$\left[-\frac{C}{2AB} G_{01}^- \right]_{\Sigma} = \left[\frac{C}{2B^2} G_{11}^- + \frac{\Lambda C}{2} \right]_{\Sigma}. \quad (92)$$

De (20), temos

$$-\frac{C}{2AB} G_{01}^- = \frac{\kappa BCq}{2}. \quad (93)$$

Já de (17), vamos encontrar

$$\begin{aligned}
G_{11}^- + \Lambda B^2 &= \kappa B^2 (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta), \\
\frac{C}{2B^2} G_{11}^- &= \frac{\kappa C}{2} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) - \frac{\Lambda C}{2}.
\end{aligned} \tag{94}$$

Substituindo (93) e (94) em (92), obtemos

$$\left(\frac{\kappa BCq}{2} \right)_\Sigma = \left[\frac{\kappa C}{2} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) \right]_\Sigma, \tag{95}$$

que enfim nos dá

$$(Bq)_\Sigma = (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta)_\Sigma. \tag{96}$$

1.4 Luminosidade

Para um observador em repouso no infinito, a luminosidade total da estrela é dada por

$$L_\infty = - \left(\frac{dm}{dv} \right)_\Sigma = - \left[\frac{dm}{dt} \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{dv}{d\tau} \right)^{-1} \right]_\Sigma = - \left(\frac{\dot{m}\check{t}}{\check{v}} \right)_\Sigma. \tag{97}$$

Podemos determinar a derivada temporal da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \left(\frac{dm}{dt} \right)_\Sigma \\
&= \left\{ \frac{\dot{C}}{2} \left[1 + \left(\frac{\dot{C}}{A} \right)^2 - \left(\frac{C'}{B} \right)^2 - \frac{\Lambda C^2}{3} \right] + \frac{C}{2} \left(\frac{2\dot{C}\ddot{C}}{A^2} - \frac{2\dot{A}\dot{C}^2}{A^3} - \frac{2C'\dot{C}'}{B^2} + \frac{2\dot{B}C'^2}{B^3} - \frac{2\Lambda C\dot{C}}{3} \right) \right\}_\Sigma \\
&= \left\{ \frac{C^2}{2} \left[\frac{\dot{C}}{C^2} + \frac{\dot{C}^3}{A^2 C^2} - \frac{C'^2 \dot{C}}{B^2 C^2} + \left(\frac{2\ddot{C}}{A^2 C} \right) \dot{C} - \frac{2\dot{A}\dot{C}^2}{A^3 C} - \left(\frac{2\dot{C}'}{C} \right) \frac{C'}{B^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2\dot{B}C'^2}{B^3 C} - \Lambda \dot{C} \right] \right\}_\Sigma.
\end{aligned} \tag{98}$$

Nos valendo de (20), obtemos a seguinte relação

$$\frac{2\dot{C}'}{C} = \frac{2A'\dot{C}}{AC} + \frac{2\dot{B}C'}{BC} + \kappa AB^2 q, \quad (99)$$

que multiplicando por $-C'/B^2$, nos dá

$$-\left(\frac{2\dot{C}'}{C}\right) \frac{C'}{B^2} = -\frac{2A'C'\dot{C}}{AB^2C} - \frac{2\dot{B}C'^2}{B^3C} - \kappa AC'q. \quad (100)$$

Já de (17), podemos obter

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\ddot{C}}{A^2C}\right) \dot{C} &= \frac{C'^2\dot{C}}{B^2C^2} + \frac{2A'C'\dot{C}}{AB^2C} - \frac{\dot{C}}{C^2} - \frac{\dot{C}^3}{A^2C^2} + \frac{2\dot{A}\dot{C}^2}{A^3C} + \Lambda\dot{C} \\ &\quad - \kappa\dot{C}(P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta). \end{aligned} \quad (101)$$

Assim, substituindo (100) e (101) em (98), vamos encontrar

$$\dot{m} = \left\{ -\frac{C^2}{2} \left[\kappa\dot{C}(P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) + \kappa AC'q \right] \right\}_{\Sigma}. \quad (102)$$

Posteriormente, multiplicando a equação (96) por $\kappa AC'/B$, temos

$$(\kappa AC'q)_{\Sigma} = \left[\frac{\kappa AC'}{B} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) \right]_{\Sigma}. \quad (103)$$

Deste modo, usando o resultado encontrado em (103) em (102), chegamos a

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \left\{ -\frac{C^2}{2} \left[\kappa\dot{C}(P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) + \frac{\kappa AC'}{B} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) \right] \right\}_{\Sigma} \\ &= \left\{ -\frac{\kappa C^2}{2} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) \left(\dot{C} + \frac{AC'}{B} \right) \right\}_{\Sigma}. \end{aligned} \quad (104)$$

Portanto, substituindo (29), (83), (104) em (97), encontramos a luminosidade para

um observador no infinito, isto é,

$$L_\infty = \left\{ \frac{\kappa C^2}{2} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) \left(\frac{\dot{C}}{A} + \frac{C'}{B} \right)^2 \right\}_\Sigma. \quad (105)$$

2 COLAPSO GRAVITACIONAL PARA UMA MÉTRICA PARTICULAR

Para construir um modelo de colapso que permita uma análise completamente analítica, consideramos uma métrica que admite separação de variáveis e livre de cisalhamento. Como ponto de partida, consideramos uma métrica estática (HERNÁNDEZ; NÚÑEZ, 2004), modificada por uma função temporal (VENERONI; SILVA, 2019), isto é,

$$ds_-^2 = -\frac{\xi^2}{h(r)}dt^2 + \frac{f(t)}{h(r)}dr^2 + r^2 f(t)d\Omega^2, \quad (106)$$

de modo que

$$A^2(r,t) = \frac{\xi^2}{h(r)}, \quad (107)$$

$$B^2(r,t) = \frac{f(t)}{h(r)}, \quad (108)$$

$$C^2(r,t) = r^2 f(t). \quad (109)$$

Logo, as componentes do tensor de Einstein para este modelo ficam dadas por

$$G_{00}^- = \frac{\xi^2(1-h-rh')}{r^2 h f} + \frac{3\dot{f}^2}{4f^2}, \quad (110)$$

$$G_{11}^- = \frac{h-rh'-1}{r^2 h} + \frac{1}{4\xi^2} \frac{\dot{f}^2}{f} - \frac{\ddot{f}}{\xi^2}, \quad (111)$$

$$G_{22}^- = r^2 \left(\frac{h'^2 - hh''}{2h} + \frac{h}{4\xi^2} \frac{\dot{f}^2}{f} - \frac{h}{\xi^2} \ddot{f} \right), \quad (112)$$

$$G_{33}^- = G_{22}^- \sin^2(\theta), \quad (113)$$

$$G_{01}^- = G_{10}^- = -\frac{h' \dot{f}}{2h f}. \quad (114)$$

Por outro lado, para os componentes do tensor energia-momento, temos

$$T_{00}^- = A^2 \rho = \frac{\xi^2 \rho}{h}, \quad (115)$$

$$T_{11}^- = B^2 (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta) = \frac{f}{h} (P_r + 4\eta\sigma - \zeta\Theta), \quad (116)$$

$$T_{22}^- = C^2 (P_\perp - 2\eta\sigma - \zeta\Theta) = r^2 f (P_\perp - 2\eta\sigma - \zeta\Theta), \quad (117)$$

$$T_{33}^- = \text{sen}^2(\theta) T_{22}^-, \quad (118)$$

$$T_{01}^- = T_{10}^- = -AB^2 q = -\frac{\xi f q}{\sqrt{h^3}}. \quad (119)$$

Nos valendo das equações (107), (108) e (109), obtemos de (13) a seguinte conclusão

$$\sigma = -\frac{\sqrt{h}}{3\xi} \left(\frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{f}}{f} \right) = 0. \quad (120)$$

Analogamente, o escalar de expansão expresso em (12) pode ser reescrito como

$$\Theta = \frac{3\sqrt{h}\dot{f}}{2\xi}. \quad (121)$$

Para as componentes de (15), isto é, as componentes das equações de Einstein com

a constante cosmológica, temos então

$$G_{00}^- - \Lambda A^2 = \kappa T_{00}^- \quad \Rightarrow \quad G_{00}^- - \frac{\Lambda \xi^2}{h} = 8\pi T_{00}^-, \quad (122)$$

onde $g_{00}^- = -A^2$.

$$G_{11}^- + \Lambda B^2 = \kappa T_{11}^- \quad \Rightarrow \quad G_{11}^- + \frac{\Lambda f}{h} = 8\pi T_{11}^-, \quad (123)$$

onde $g_{11}^- = B^2$.

$$G_{22}^- + \Lambda g_{22}^- = \kappa T_{22}^- \quad \Rightarrow \quad G_{22}^- + \Lambda r^2 f = 8\pi T_{22}^-, \quad (124)$$

onde $g_{22}^- = C^2$.

Levando em consideração (113) e (118), podemos concluir que

$$G_{33}^- + \Lambda g_{33}^- = \kappa T_{33}^- \quad \Rightarrow \quad G_{22}^- + \Lambda r^2 f = 8\pi T_{22}^-, \quad (125)$$

onde $g_{33}^- = C^2 \sin^2(\theta)$.

Como $G_{01}^- = G_{10}^-$ e $T_{01}^- = T_{10}^-$, temos apenas

$$G_{01}^- = \kappa T_{01}^- \quad \Rightarrow \quad G_{01}^- = 8\pi T_{01}^-, \quad (126)$$

onde $g_{01}^- = g_{10}^- = 0$.

Nos valendo de (110) e (115) em (110), vamos obter

$$\underbrace{\frac{1 - rh' - h}{r^2 f} + \frac{3h \dot{f}^2}{4\xi^2 f^2}}_{-G_0^0} - \Lambda = \underbrace{8\pi\rho}_{-8\pi T_0^0} . \quad (127)$$

Usando as equações (111), (116) e (120) em (123), encontramos

$$\underbrace{\frac{h - rh' - 1}{r^2 f} + \frac{h \dot{f}^2}{4\xi^2 f^2} - \frac{h \ddot{f}}{\xi^2 f}}_{G_1^1} + \Lambda = \underbrace{8\pi(P_r - \zeta\Theta)}_{8\pi T_1^1} . \quad (128)$$

Em seguida, substituindo (112), (117) e (120) em (124), chegamos em

$$\underbrace{\frac{h'^2 - hh''}{2hf} + \frac{h \dot{f}^2}{4\xi^2 f^2} - \frac{h \ddot{f}}{\xi^2 f}}_{G_2^2, G_3^3} + \Lambda = \underbrace{8\pi(P_\perp - \zeta\Theta)}_{8\pi T_2^2, 8\pi T_3^3} . \quad (129)$$

Por fim, utilizando (114) e (119) em (126), determinamos

$$\underbrace{\frac{\sqrt{h} h' \dot{f}}{2\xi f^2}}_{G_1^0, G_0^1} = \underbrace{8\pi q}_{8\pi T_1^0, 8\pi T_0^1} . \quad (130)$$

Substituindo (107), (108) e (109) em (72) vamos obter

$$m(v) = \left\{ \frac{r\sqrt{f}}{2} \left[1 - \frac{\Lambda r^2 f}{3} + \frac{r^2 \dot{f}^2}{4\xi f} - \xi \right] \right\}_\Sigma . \quad (131)$$

Já a luminosidade para um observador no infinito pode ser obtida usando (107), (108), (109) e (128) em (105), ou seja,

$$L_\infty = \left[4\pi r^2 f \left(\frac{\xi - rh' - 1}{r^2 f} + \frac{\dot{f}^2}{4\xi f^2} - \frac{\ddot{f}}{\xi f} + \Lambda \right) \left(\frac{r\dot{f}}{2\sqrt{\xi f}} + \sqrt{\xi} \right)^2 \right]_\Sigma . \quad (132)$$

2.1 Curvatura extrínseca

Substituindo (108) em (59), obtemos o quadrivetor normal à hipersuperfície Σ , para o espaço-tempo interior, isto é,

$$\eta_{\alpha}^{-} = \sqrt{\frac{f(t)}{h(r_{\Sigma})}} (0,1,0,0) = \sqrt{\frac{f(t)}{\xi}} (0,1,0,0). \quad (133)$$

Primeiramente, consideremos $i,j = 1$ na expressão da curvatura extrínseca, dada pela equação (32), ou seja,

$$K_{11}^{-} = \underbrace{-\eta_1^{+} \frac{\partial^2 \chi_+^1}{\partial \tau^2}}_0 - \eta_1^{+} \Gamma_{00}^1 \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau} \frac{\partial \chi_+^0}{\partial \tau}, \quad (134)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \chi_-^1}{\partial \tau} = \frac{\partial r}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \chi_-^2}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0 \text{ e } \frac{\partial \chi_-^3}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0.$$

Assim, encontramos

$$K_{11}^{-} = \left\{ -\sqrt{\frac{f}{\xi}} \left[-\frac{\xi^2 h'}{2hf} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 \right] \right\}_{\Sigma} = \frac{\sqrt{f} \xi^2 h'(r_{\Sigma}) \xi}{\sqrt{\xi} 2\xi f \xi^2}, \quad (135)$$

$$\text{onde } h(r_{\Sigma}) = \xi \text{ e } \frac{\partial \chi_-^1}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{h(r_{\Sigma})}}{\xi} = \frac{\sqrt{\xi}}{\xi}.$$

Desta forma,

$$K_{11}^{-} = \frac{h'(r_{\Sigma})}{2\sqrt{\xi}f}. \quad (136)$$

Em seguida, fazendo $i,j = 2$, vamos ter

$$K_{22}^{-} = \underbrace{-\eta_1^{+} \frac{\partial^2 \chi_+^1}{\partial \theta^2}}_0 - \eta_1^{+} \Gamma_{22}^1 \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta} \frac{\partial \chi_+^2}{\partial \theta}, \quad (137)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \chi_-^0}{\partial \theta} = \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \chi_-^1}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0 \text{ e } \frac{\partial \chi_-^3}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0.$$

Segue que

$$K_{22}^- = \left[-\sqrt{\frac{f}{\xi}} (-rh) \right]_{\Sigma} = \frac{r_{\Sigma} \xi \sqrt{f}}{\sqrt{\xi}}, \quad (138)$$

onde $h(r_{\Sigma}) = \xi$ e $\frac{\partial \chi_{-}^2}{\partial \theta} = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1$.

Portanto,

$$K_{22}^- = \frac{r_{\Sigma} \sqrt{f}}{\sqrt{\xi}}. \quad (139)$$

2.2 Condição de fronteira

Primeiramente, considerando (120), a equação (96) pode ser reescrita como

$$(qB)_{\Sigma} = (P_r - \zeta \Theta)_{\Sigma}. \quad (140)$$

Agora, usando (108), (128) e (130) em (140), obtemos

$$\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\sqrt{h} h' \dot{f} \sqrt{f}}{2\xi f^2 \sqrt{h}} \right)_{\Sigma} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{h - rh' - 1}{r^2 f} + \frac{h}{4\xi^2} \frac{\dot{f}^2}{f^2} - \frac{h}{\xi^2} \frac{\ddot{f}}{f} + \Lambda \right)_{\Sigma}. \quad (141)$$

Multiplicando ambos os lados por $f\xi^2/h$, e sabendo que $h(r_{\Sigma}) = \xi$, temos

$$\left(\frac{h' \dot{f}}{2\sqrt{f}} \right)_{\Sigma} = \left[\frac{\xi(h - rh' - 1)}{r^2} + \frac{\dot{f}^2}{4f} - \ddot{f} + \Lambda \xi f \right]_{\Sigma}. \quad (142)$$

Considerando o caso estático em que $\dot{f}(t \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ e $\ddot{f}(t \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$, tomado no instante inicial, ou seja, $f(t \rightarrow -\infty) \rightarrow 1$, encontramos

$$\left[\frac{\xi(h - rh' - 1)}{r^2} \right]_{\Sigma} = -\Lambda \xi. \quad (143)$$

Substituindo (143) em (142), achamos

$$\left[\ddot{f} - \frac{\dot{f}^2}{4f} + \frac{h'\dot{f}}{2\sqrt{f}} + \Lambda\xi(1-f) \right]_{\Sigma} = 0. \quad (144)$$

Esta é a equação diferencial que precisamos solucionar para obtermos a função $f(t)$ que descreve a evolução temporal do nosso modelo.

Para tentarmos resolver a equação (144), uma opção seria tentarmos uma redução de ordem, isto é,

$$\dot{f} = y, \quad (145)$$

$$\ddot{f} = \tilde{y}y, \quad (146)$$

onde $\tilde{y} = \frac{dy}{df}$.

Usando (145) e (146) em (144), obtemos

$$\left[\tilde{y} - \frac{y}{4f} + \frac{h'}{2\sqrt{f}} + \frac{\Lambda\xi(1-f)}{y} \right]_{\Sigma} = 0. \quad (147)$$

No entanto, mesmo com esse procedimento não é possível obter uma solução para a equação (147).

Na próxima seção, vamos obter a função $f(t)$ no instante em que o horizonte de eventos é formado.

2.3 Formação do buraco negro

Dizemos que um objeto se torna um buraco negro no instante em que o horizonte de eventos é formado. Para determinar esse instante, podemos nos valer do *redshift* gravitacional z_{Σ} , isto é,

$$\check{v}_{\Sigma} = 1 + z_{\Sigma}. \quad (148)$$

Na formação do horizonte de eventos, o *redshift* gravitacional diverge. Logo, considerando (83) e (148), encontramos

$$\left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A}\right)_{\Sigma} = 0. \quad (149)$$

Desta forma, voltando às equações (107)-(109), vamos obter

$$\left(\frac{\sqrt{f_H}\sqrt{h}}{\sqrt{f_H}} + \frac{r\dot{f}_H\sqrt{h}}{2\sqrt{f_H}\xi}\right)_{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{r\dot{f}_H}{2\xi\sqrt{f_H}}\right)_{\Sigma} = 0, \quad (150)$$

em que f_H é a função f no instante de formação do horizonte de eventos.

Assim, de (150) extraímos

$$\dot{f}_H = -\frac{2\xi\sqrt{f_H}}{r_{\Sigma}}. \quad (151)$$

Em seguida, reescrevemos a equação (144) no instante de formação do horizonte, isto é,

$$\ddot{f}_H - \frac{\dot{f}_H^2}{4f_H} + \frac{h'(r_{\Sigma})\dot{f}_H}{2\sqrt{f_H}} + \Lambda\xi(1 - f_H) = 0. \quad (152)$$

Substituindo (151) em (152), temos

$$\ddot{f}_H = \frac{\xi^2}{r_{\Sigma}^2} + \frac{\xi h'(r_{\Sigma})}{r_{\Sigma}} - \Lambda\xi(1 - f_H). \quad (153)$$

Com isso, nos valendo de (131) e lembrando que $h(r_{\Sigma}) = \xi$, podemos determinar a massa no instante de formação do horizonte em função de f_H , ou seja,

$$\begin{aligned}
m_H &= \frac{r_\Sigma \sqrt{f_H}}{2} \left(1 + \frac{r_\Sigma^2}{4\xi f_H} \frac{4\xi^2 f_H}{r_\Sigma^2} - \xi - \frac{\Lambda r_\Sigma^2 f_H}{3} \right) \\
&= \frac{r_\Sigma \sqrt{f_H}}{2} \left(1 - \frac{\Lambda r_\Sigma^2 f_H}{3} \right).
\end{aligned} \tag{154}$$

Vemos, portanto, que o termo onde a constante cosmológica aparece explicitamente age de modo a diminuir/aumentar a massa final do buraco negro se esta for positiva/negativa, respectivamente. No entanto, como não encontramos uma solução para a função $f(t)$, não sabemos como a constante cosmológica a afetaria, reforçando ou atenuando esse efeito.

Se fizermos o mesmo procedimento para a luminosidade para um observador no infinito, encontraremos o resultado já esperado, isto é,

$$L_H = 0. \tag{155}$$

Infelizmente não conseguimos uma solução geral para a equação (144). Tentamos considerar algumas situações um pouco mais particulares mas não tivemos muito sucesso. Algumas das tentativas que não foram bem sucedidas são:

i) a imposição de uma equação de estado não local, que é satisfeita no caso estático discutido no capítulo 4, ao caso dinâmico;

ii) a consideração de alguns *ansatze* que estabelecem relações entre as pressões radial e tangencial (COSENZA et al., 1981), (HERRERA; BARRETO, 2013) e (HORVAT; ILIJIC; MARUNOVIC, 2010);

iii) modelos com $P_\perp = 0$ ou $P_r = 0$, sendo que o primeiro também não nos permitiu integrar a equação diferencial para $f(t)$. Conseguimos, no entanto, explorar a hipótese de solução com pressão radial nula, que apresentamos na seção 6.1. Na seção 6.2, exploramos uma solução aproximada, a partir de uma abordagem perturbativa, de modo a termos uma indicação da influência da constante cosmológica no processo dinâmico.

No próximo capítulo, propomos e analisamos alguns modelos de objetos compactos, soluções estáticas para a métrica (106) com $f(t) = 1$ e constante cosmológica. Estas soluções são necessárias como configurações iniciais para o processo de colapso, além do interesse intrínseco que tais objetos vêm despertando desde as detecções de ondas gravitacionais geradas por sistemas binários envolvendo estrelas de nêutrons ou combinação destas com buracos negros. Chamamos a atenção para uma dessas soluções, por admitir energia escura na sua composição.

3 MODELOS DE OBJETOS COMPACTOS COM CONSTANTE COSMOLÓGICA

Desde a observação de ondas gravitacionais com contrapartida eletromagnética, geradas pela fusão de um par de estrelas de nêutrons (GW170817), realizada pela colaboração dos observatórios LIGO e Virgo em agosto de 2017, além do interesse em si de mais essa confirmação de uma previsão da teoria da relatividade geral, o estudo desses objetos ganhou um impulso adicional (ABBOTT et al., 2017b) (ABBOTT et al., 2017a). Em 2020, foi observado um novo sinal (GW190814), supostamente decorrente da coalescência de um sistema binário envolvendo um buraco negro estelar e um objeto compacto com aproximadamente $2,50\text{--}2,67 M_{\odot}$, sendo este último ou o menos massivo buraco negro ou a estrela de nêutrons mais massiva já detectada (ABBOTT et al., 2020).

Na relatividade geral, se nos restringimos a soluções analíticas, ficamos limitados a modelos não muito realistas que, no entanto, podem ainda nos indicar alguns comportamentos genéricos de objetos com tais densidades.

A seguir propomos alguns modelos de objetos compactos, não exatamente uma estrela de nêutrons, considerando um fluido com pressões anisotrópicas e a presença da constante cosmológica. Os resultados apresentados neste capítulo foram aceitos para publicação na IJMPD (VENERONI; BRAZ; SILVA, 2021).

A métrica mais geral que descreve um espaço-tempo esféricamente simétrico para um fluido descrito em coordenadas comoveis é dada pela equação (2). No entanto, no caso estático, ela pode ser colocada, sem perda de generalidade, na forma

$$ds_-^2 = -e^{2\nu(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2] . \quad (156)$$

Para uma distribuição esférica de matéria, que constitui aqui o objeto compacto, circundado por vácuo, o tensor energia-momento é dado por

$$(T_{\beta}^{\alpha})^- = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\perp} \end{pmatrix} . \quad (157)$$

Sabendo que as equações de Einstein relacionam matéria-energia com a geometria

do espaço-tempo, com a inclusão de uma constante cosmológica essas são dadas por

$$G_{\beta}^{\alpha} + \Lambda \delta_{\beta}^{\alpha} = R_{\beta}^{\alpha} - \frac{R \delta_{\beta}^{\alpha}}{2} + \Lambda \delta_{\beta}^{\alpha} = 8\pi T_{\beta}^{\alpha}, \quad (158)$$

onde $G = c = 1$.

Deste modo, as componentes não nulas do tensor de Einstein podem ser escritas como

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left(\frac{1}{r} - 2\lambda' \right) + \Lambda = -8\pi\rho, \quad (159)$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left(\frac{1}{r} + 2\nu' \right) + \Lambda = 8\pi P_r, \quad (160)$$

$$e^{-2\lambda} \left[\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda'}{r} + \nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 \right] + \Lambda = 8\pi P_{\perp}, \quad (161)$$

sendo a linha uma derivação em relação à coordenada r .

De (159), obtemos

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (162)$$

em que $m(r)$ é dado por

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (163)$$

3.1 Equação de equilíbrio hidrostático

A fim de descobrir uma equação de equilíbrio hidrostático para fluidos anisotrópicos com constante de cosmológica, primeiramente derivamos a equação (160), isto é,

$$\begin{aligned}
8\pi P'_r(r) &= \frac{2}{r^3} + \left[\left(\frac{-2\lambda' e^{-2\lambda}}{r} - \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} \right) \left(2\nu' + \frac{1}{r} \right) + \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left(2\nu'' - \frac{1}{r^2} \right) \right] \\
&= \frac{2}{r^3} + \frac{2e^{-2\lambda}}{r} \left(-\frac{\lambda'}{r} - \lambda'\nu' + \nu'' - \lambda'\nu' - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right).
\end{aligned} \tag{164}$$

Rearranjando (161), obtemos

$$-\frac{\lambda'}{r} - \lambda'\nu' + \nu'' = e^{2\lambda}(8\pi P_\perp - \Lambda) - \frac{\nu'}{r} - (\nu')^2. \tag{165}$$

Em seguida, usando (165) em (164), encontramos

$$8\pi P'_r = \frac{2}{r^3} + \frac{2}{r} \left[8\pi P_\perp - \Lambda - e^{-2\lambda} (\lambda'\nu' + (\nu')^2) - \frac{e^{-2\lambda}}{r} \left(2\nu' + \frac{1}{r} \right) \right]. \tag{166}$$

Levando agora (160) em (166), obtemos

$$8\pi P'_r = \frac{2}{r} [8\pi(P_\perp - P_r)] - \frac{2e^{-2\lambda}}{r} [\lambda'\nu' + (\nu')^2]. \tag{167}$$

Por outro lado, subtraindo (160) por (159), e multiplicando por ν' , encontramos

$$8\pi(P_r + \rho)\nu' = \frac{2e^{-2\lambda}}{r} [\lambda'\nu' + (\nu')^2]. \tag{168}$$

Por fim, substituindo (168) em (167), chegamos à equação de equilíbrio hidrostático para fluidos anisotrópicos, isto é,

$$P'_r = -(\rho + P_r)\nu' + \frac{2}{r}(P_\perp - P_r). \tag{169}$$

Podemos então obter a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) explicitamente em termos de $m(r)$ e Λ para fluidos anisotrópicos com constante cosmológica. Primeiramente, multiplicando a equação (160) por $e^{2\lambda}$, podemos rearranjá-la da seguinte

maneira

$$\nu' = \frac{e^{2\lambda}}{2} \left(\frac{1}{r} + 8\pi r P_r - \Lambda r \right) - \frac{1}{2r}. \quad (170)$$

Considerando (162) em (170), encontramos

$$\nu' = \frac{12\pi r^3 P_r + 3m - \Lambda r^3}{r(3r - 6m - \Lambda r^3)}. \quad (171)$$

Finalmente, substituindo (171) em (169), vamos obter a equação de equilíbrio hidrostático, análoga à TOV, para fluidos anisotrópicos com constante cosmológica

$$P'_r = -(\rho + P_r) \left[\frac{12\pi r^3 P_r + 3m - \Lambda r^3}{r(3r - 6m - \Lambda r^3)} \right] + \frac{2}{r}(P_\perp - P_r). \quad (172)$$

Quando $P_r = P_\perp = P$ e $\Lambda = 0$, a equação (172) recai em TOV para fluidos isotrópicos, ou seja,

$$P' = -(\rho + P) \left[\frac{4\pi r^3 P + m}{r(r - 2m)} \right]. \quad (173)$$

3.2 Equação de estado não local

Partindo da métrica dada em (106), consideramos a seguir a sua forma estática, ou seja, tomamos $f(t) = 1$, que descreve a configuração inicial do nosso modelo,

$$\begin{aligned} ds_-^2 &= g_{\alpha\beta}^- d\chi_-^\alpha d\chi_-^\beta \\ &= -\frac{\xi^2}{h(r)} dt^2 + \frac{1}{h(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \end{aligned} \quad (174)$$

em que

$$h(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (175)$$

As componentes do tensor de Einstein oriundas de (174) podem ser expressas do seguinte modo

$$\underbrace{\frac{h + h'r - 1}{r^2}}_{G_0^0} + \Lambda = -8\pi\rho, \quad (176)$$

$$\underbrace{\frac{h - h'r - 1}{r^2}}_{G_1^1} + \Lambda = 8\pi P_r, \quad (177)$$

$$\underbrace{\frac{h'^2 - hh''}{2h}}_{G_2^2, G_3^3} + \Lambda = 8\pi P_\perp. \quad (178)$$

As equações (176) e (177) nos fornecem a seguinte relação

$$G_0^0 + 3G_1^1 + r \frac{d}{dr} (G_0^0 + G_1^1) = 0. \quad (179)$$

Rearranjando (179), obtemos

$$3G_1^1 + r \frac{dG_1^1}{dr} = -G_0^0 - r \frac{dG_0^0}{dr}. \quad (180)$$

O lado esquerdo e direito de (180) podem ser expressos, respectivamente, do seguinte modo

$$3G_1^1 + r \frac{dG_1^1}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 G_1^1), \quad (181)$$

$$-G_0^0 - r \frac{dG_0^0}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 G_0^0) + 2G_0^0. \quad (182)$$

A partir de (181) e (182), a equação (180) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dr}(r^3 G_1^1) = -\frac{d}{dr}(r^3 G_0^0) + 2r^2 G_0^0. \quad (183)$$

Assim, determinamos uma expressão para a componente G_1^1 em função de G_0^0 , ou seja,

$$G_1^1 = \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 G_0^0 d\bar{r} - G_0^0 + \frac{C_A}{r^3}, \quad (184)$$

sendo C_A uma constante arbitrária de integração.

Como $G_0^0 = -8\pi\rho(r) - \Lambda$ e $G_1^1 = 8\pi P_r(r) - \Lambda$, e substituindo $C_A = 4C$, obtemos

$$8\pi P_r(r) - \Lambda = \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 (-8\pi\rho(\bar{r}) - \Lambda) d\bar{r} + 8\pi\rho(r) + \Lambda + \frac{4C}{r^3}, \quad (185)$$

que nos fornece

$$\begin{aligned} 8\pi P_r(r) &= -\frac{16\pi}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} - \frac{2\Lambda}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 d\bar{r} + 8\pi\rho(r) + 2\Lambda + \frac{4C}{r^3} \\ &= 8\pi\rho(r) - \frac{16\pi}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{4\Lambda}{3} + \frac{4C}{r^3}. \end{aligned} \quad (186)$$

Logo, vamos obter uma equação de estado não local para esferas estáticas relativísticas, isto é,

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} + \frac{\Lambda}{6\pi} + \frac{C}{2\pi r^3}, \quad (187)$$

onde C é uma constante arbitrária. A não localidade se dá pela existência de um termo integral, de modo que a pressão num dado raio r depende da configuração desde o centro do objeto até a camada com raio r , e não apenas de informações locais, como aquelas carregadas pelos demais termos do lado direito de (187).

Derivando (187), obtemos

$$P'_r = \rho' + \frac{6}{r^4} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} - \frac{2\rho}{r} - \frac{3C}{2\pi r^4}. \quad (188)$$

Da equação (187), temos ainda

$$\frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} = \rho - P_r + \frac{C}{2\pi r^3} + \frac{\Lambda}{6\pi}. \quad (189)$$

Multiplicando ambos os lados de (189) por $3/r$, e, em seguida, substituindo em (188), vamos obter

$$\begin{aligned} P'_r &= \rho' + \frac{3\rho}{r} - \frac{3P_r}{r} + \frac{3C}{2\pi r^4} + \frac{\Lambda}{2\pi r} - \frac{2\rho}{r} - \frac{3C}{2\pi r^4} \\ &= \rho' + \frac{\rho}{r} - \frac{3P_r}{r} + \frac{\Lambda}{2\pi r}, \end{aligned} \quad (190)$$

que rearranjando nos fornece

$$\rho - 3P_r + r(\rho' - P'_r) = -\frac{\Lambda}{2\pi}. \quad (191)$$

Podemos agora obter a função de massa. Para isso, primeiramente, usando (175) em (176), vamos obter

$$8\pi\rho = \frac{2m'}{r^2}. \quad (192)$$

Em seguida, inserindo (175) em (177), temos

$$8\pi P_r = \frac{2m'}{r^2} + \frac{4\Lambda}{3} - \frac{4m}{r^3}. \quad (193)$$

Desse modo, substituindo (192) em (193), encontramos

$$m(r) = 2\pi r^3 \left(\rho - P_r + \frac{\Lambda}{3} \right). \quad (194)$$

No caso estático não há fluxo de calor e nem há perda de massa sob a forma de radiação nula, como no caso dinâmico. Desta forma, no espaço-tempo externo à estrela só há vácuo dotado de uma constante cosmológica. Sabendo que a fonte do campo gravitacional é esférica, de massa constante e sem rotação, podemos descrever o espaço-tempo pela métrica de Schwarzschild-de Sitter ($\Lambda > 0$) ou Schwarzschild-anti de Sitter ($\Lambda < 0$), isto é,

$$\begin{aligned} ds_+^2 &= g_{\alpha\beta}^+ d\chi_+^\alpha d\chi_+^\beta \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (195)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. Para preservar a assinatura da métrica, devemos assegurar que

$$\Lambda r^2 < 3 \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (196)$$

Essa métrica, diferentemente da métrica de Schwarzschild, pode apresentar até dois horizontes, dependendo do valor de ΛM^2 . Isso porque no intervalo $0 < 9\Lambda M^2 < 1$ temos duas raízes reais positivas para $1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} = 0$, que guardam entre si e com o raio de Schwarzschild a seguinte relação: $0 < 2M < r_1 < 3M < r_2$ (PODOLSKÝ, 1999).

A raiz r_1 descreve um horizonte de eventos de um buraco negro, e é dada por

$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} \right), \quad (197)$$

com $\cos \alpha = -3M\sqrt{\Lambda}$. Enquanto a raiz r_2 representa um horizonte de eventos cosmológico, e pode ser representada como

$$r_2 = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} \right). \quad (198)$$

As duas regiões são separadas por uma hipersuperfície, aqui chamada de Σ . A métrica dessa região pode escrita como

$$\begin{aligned} ds_{\Sigma}^2 &= g_{ij}d\zeta^i d\zeta^j \\ &= -d\tau^2 + R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2), \end{aligned} \quad (199)$$

onde $\zeta^i = (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (\tau, \theta, \phi)$.

3.3 Condições de junção

Realizando o mesmo procedimento do caso dinâmico, na hipersuperfície Σ as métricas devem coincidir, isto é,

$$(ds_-^2)_{\Sigma} = (ds^2)_{\Sigma} = (ds_+^2)_{\Sigma}. \quad (200)$$

Baseado em (200), as equações (174), (195) e (199) nos fornecem

$$\frac{\xi^2}{h(R)} dt^2 = d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}\right) dt^2. \quad (201)$$

onde $r = R$ na hipersuperfície Σ .

Assim, de (202) e (201), e impondo que

$$\xi = 1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}, \quad (202)$$

sendo $r_{\Sigma} = R$, obtemos

$$h(R) = 1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}, \quad (203)$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{\Sigma}^2 = \left(1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}\right)^{-1}. \quad (204)$$

A curvatura extrínseca à hipersuperfície, como já visto, é dada por

$$K_{ij}^{\pm} = -\eta_{\alpha}^{\pm} \frac{\partial^2 \chi_{\pm}^{\alpha}}{\partial \zeta^i \partial \zeta^j} - \eta_{\alpha}^{\pm} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \chi_{\pm}^{\beta}}{\partial \zeta^i} \frac{\partial \chi_{\pm}^{\gamma}}{\partial \zeta^j}, \quad (205)$$

que, para a região interior, nos fornece

$$K_{11}^{-} = \frac{h'(R)}{2\sqrt{h(R)}} = \frac{h'(R)}{2\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}}}, \quad (206)$$

$$K_{22}^{-} = R\sqrt{h(R)} = R\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}}, \quad (207)$$

e para a região exterior

$$K_{11}^{+} = \frac{\frac{\Lambda R}{3} - \frac{M}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}}}, \quad (208)$$

$$K_{22}^{+} = R\sqrt{1 - \frac{2M}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}}. \quad (209)$$

Os vetores unitários normais à hipersuperfície são dados, respectivamente, por

$$\eta_{\alpha}^{-} = \frac{\partial g^{-}}{\partial \chi_{\alpha}^{-}} = a(0,1,0,0), \quad (210)$$

$$\eta_{\alpha}^{+} = \frac{\partial g^{+}}{\partial \chi_{\alpha}^{+}} = b(0,1,0,0). \quad (211)$$

onde a e b são constantes de normalização, e g^{-} e g^{+} equações da superfície, dadas por

$$g^-(r) = r - R = 0, \quad (212)$$

$$g^+(r) = r - R = 0. \quad (213)$$

As constantes a e b podem ser normalizadas como

$$\eta_{\alpha}^{-} \eta_{\alpha}^{\alpha} = g_{-}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha}^{-} \eta_{\beta}^{-} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{h(r)}}, \quad (214)$$

$$\eta_{\alpha}^{+} \eta_{\alpha}^{\alpha} = g_{+}^{\alpha\beta} \eta_{\alpha}^{+} \eta_{\beta}^{+} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}}. \quad (215)$$

Utilizando (214) em (210), e (215) em (211), encontramos

$$\eta_{\alpha}^{-} = \frac{1}{\sqrt{h(r)}} (0, 1, 0, 0), \quad (216)$$

$$\eta_{\alpha}^{+} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} (0, 1, 0, 0). \quad (217)$$

A imposição da continuidade da curvatura extrínseca na hipersuperfície de junção Σ , nos fornece a relação

$$h'(R) = 2 \left(\frac{\Lambda R}{3} - \frac{M}{R^2} \right). \quad (218)$$

A equação acima vem exclusivamente da continuidade dos componentes K_{11} , uma vez que as componentes K_{22} são naturalmente contínuas nessa região.

Nos valendo da métrica (174), a parte geométrica de (158) nos fornece

$$(G_0^0)_{-} = \frac{h + rh' - 1}{r^2}, \quad (219)$$

$$(G_1^1)_{-} = \frac{h - rh' - 1}{r^2}, \quad (220)$$

$$(G_2^2)_- = (G_3^3)_- = \frac{(h')^2 - hh''}{2h}. \quad (221)$$

Considerando (157), (158), (219), (220) e (221), obtemos respectivamente

$$8\pi\rho(r) = \frac{1 - h - rh'}{r^2} - \Lambda, \quad (222)$$

$$8\pi P_r(r) = \frac{h - rh' - 1}{r^2} + \Lambda, \quad (223)$$

$$8\pi P_\perp(r) = \frac{(h')^2 - hh''}{2h} + \Lambda. \quad (224)$$

Em $r = R$, a equação (223) pode ser reescrita como

$$8\pi P_r(R) = \frac{h(R) - R h'(R) - 1}{R^2} + \Lambda. \quad (225)$$

Desta forma, substituindo (203) e (218) em (225), encontramos

$$P_r(R) = 0, \quad (226)$$

como esperado.

Agora fazendo $r = R$ na equação (222), e também utilizando (203) e (218), vamos encontrar

$$\rho(R) = \frac{\Lambda R^2 + 6\gamma}{12\pi}, \quad (227)$$

onde $\gamma = M/R$.

É importante observar que o procedimento realizado para encontrar $P_r(R)$ e $\rho(R)$ não é suficiente para determinar $P_\perp(R)$, pois não conhecemos $h''(R)$.

3.4 Condições de energia

Nas equações de Einstein, as propriedades da matéria estão ligadas ao tensor energia-momento. Contudo, não há especificações nessas equações de como a matéria deve se comportar. Para contornar essa arbitrariedade, convencionam-se certas restrições de como uma “matéria normal” deveria se comportar. Estas são conhecidas como condições de energia e são classificadas em quatro grupos principais: condições de energia nula, fraca, dominante e forte. Abaixo apresentamos sucintamente as restrições que tais condições impõem a um fluido definido por sua densidade de energia e pressão anisotrópica.

A condição de energia fraca afirma que qualquer vetor W^a tipo-tempo, direcionado para o futuro, deve obedecer à seguinte restrição

$$T_{ab}W^aW^b \geq 0. \quad (228)$$

Essa condição estipula que a densidade de energia medida por qualquer observador deve ser não negativa, isto é,

$$\rho \geq 0. \quad (229)$$

Além disso, as pressões não podem ser negativas ao ponto de superarem em módulo a densidade de energia, ou seja,

$$\rho + P_r \geq 0, \quad (230)$$

$$\rho + P_\perp \geq 0. \quad (231)$$

Por sua vez, para que a condição de energia dominante seja respeitada, a condição de energia fraca deve ser respeitada também. Adicionalmente, $T^{ab}W_a$ deve ser um vetor tipo-tempo ou tipo-nulo. Essa condição é frequentemente interpretada como indicação de que a velocidade do som não pode exceder a velocidade da luz no vácuo. Assim, além de (229), (230) e (231), as seguintes restrições devem ser também respeitadas

Tabela 1 - Condições de energia consideradas. Aqui W^α e Z^α são vetores tipo-tempo com mesma direção e mesmo sentido, já k^α é um vetor tipo-nulo (CURIÉL, 2017).

Tabela generalizada para o caso anisotrópico e com constante cosmológica.

Condição	Forma física	Forma geométrica	Fluido anisotrópico
Nula	$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$	$R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$	$\rho + P_r \geq 0$ $\rho + P_\perp \geq 0$
Fraca	$T_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0$	$G_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0$	$\rho \geq 0$ $\rho + P_r \geq 0$ $\rho + P_\perp \geq 0$
Dominante	$T_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0$ $T_{\alpha\beta}W^\alpha$ é não tipo-espaço	$G_{\alpha\beta}W^\alpha Z^\beta \geq 0$	$\rho \geq P_r $ $\rho \geq P_\perp $
Forte	$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{Tg_{\alpha\beta}}{2} - \frac{\Lambda g_{\alpha\beta}}{8\pi}\right) W^\alpha W^\beta \geq 0$	$R_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0$	$\rho + P_r \geq 0$ $\rho + P_\perp \geq 0$ $\rho + P_r + 2P_\perp - \frac{\Lambda}{4\pi} \geq 0$

Fonte: O autor, 2021.

$$\rho - P_r \geq 0, \quad (232)$$

$$\rho - P_\perp \geq 0. \quad (233)$$

Uma condição mais restritiva, que contribui com a convergência de uma congruência de geodésicas tipo-tempo, ou escrita de outro modo, a atratividade da gravitação, é a condição de energia forte. Tomando como ponto de partida a validade da forma geométrica², isto é,

$$R_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0, \quad (234)$$

e considerando as equações de Einstein, essa condição será respeitada quando a desigualdade contida na tabela ou essa abaixo for satisfeita, ou seja,

$$T_{ab}W^a W^b \geq W^a W_a \left(\frac{T}{2} - \frac{\Lambda}{8\pi} \right), \quad (235)$$

² Sabendo que a convergência de uma congruência de geodésicas tipo-tempo é regida pela equação Raychaudhuri, dada por $\frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\Theta^2}{3} - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}W^\alpha W^\beta \geq 0$, podemos ver que validade do termo geométrico da condição de energia forte não garante a convergência delas ($\frac{d\Theta}{dt} < 0$).

sendo W^a um vetor tipo-tempo e T o traço do tensor energia-momento.

Isso resulta em

$$\rho + P_r + 2P_\perp - \frac{\Lambda}{4\pi} \geq 0, \quad (236)$$

na qual para $\Lambda = 0$, o conjunto das inequações (230), (231) e (236) é usualmente chamado de condição de energia forte (HAWKING; ELLIS, 1973), referindo-se unicamente ao fluido. Entretanto, a equação (236) revela a influência da constante cosmológica no caráter convergente (atratividade da gravitação), para $\Lambda < 0$, ou divergente (repulsividade da gravitação), para $\Lambda > 0$. Quando a desigualdade apresentada em (236) é violada, adotamos neste trabalho a denominação “energia escura efetiva”, no sentido de que tanto a contribuição do fluido quanto a da constante cosmológica é levada em conta para análise do efeito de convergência/divergência de uma congruência de geodésicas tipo-tempo ou tipo-nula.

4 CASOS PARTICULARES PARA O CASO ESTÁTICO

4.1 Pressão radial nula

Nesta seção analisamos um caso extremo de anisotropia para o qual somente as pressões tangenciais exercem influência sobre o fluido. Fazendo então $P_r = 0$, reescrevemos (223) como

$$rh' - h + 1 - \Lambda r^2 = 0. \quad (237)$$

Resolvendo a equação diferencial (237), obtemos

$$h(r) = 1 + C_1 r + \Lambda r^2. \quad (238)$$

Em seguida, substituindo (238) em (222) e (224), vamos encontrar, respectivamente,

$$\rho(r) = -\frac{2\Lambda r + C_1}{4\pi r}, \quad (239)$$

$$P_{\perp}(r) = \frac{4\Lambda^2 r^2 + 4\Lambda C_1 r + C_1^2}{16\pi(\Lambda r^2 + C_1 r + 1)}. \quad (240)$$

Analisando a pressão tangencial no centro ($r = 0$), temos

$$P_{\perp}(0) = \frac{C_1^2}{16\pi}. \quad (241)$$

Para garantir a isotropia das pressões no centro, isto é, $P_r(0) = P_{\perp}(0)$, é necessário impor que $C_1 = 0$. Deste modo, as equações (238), (239) e (240) podem ser reescritas,

respectivamente, como

$$h(r) = 1 + \Lambda r^2, \quad (242)$$

$$\rho(r) = -\frac{\Lambda}{2\pi}, \quad (243)$$

$$P_{\perp}(r) = \frac{\Lambda^2 r^2}{4\pi(\Lambda r^2 + 1)}. \quad (244)$$

Consequentemente, na superfície ($r = R$) encontramos

$$h(R) = 1 + \Lambda R^2, \quad (245)$$

$$P_{\perp}(R) = \frac{\Lambda^2 R^2}{4\pi(\Lambda R^2 + 1)}. \quad (246)$$

Considerando (203) e (245), obtemos

$$1 + \Lambda R^2 = 1 - 2\gamma - \frac{\Lambda R^2}{3}, \quad (247)$$

onde $\gamma = M/R$.

Deste modo, podemos determinar Λ a partir de (247), ou seja,

$$\Lambda = -\frac{3\gamma}{2R^2}, \quad (248)$$

revelando que Λ deve ser negativo.

Por fim, substituindo (248) em (242), (243) e (241), vamos obter

$$h(\delta) = 1 - \frac{3\gamma\delta^2}{2R^2}, \quad (249)$$

$$\rho = \frac{3\gamma}{4\pi R^2}, \quad (250)$$

$$P_{\perp} = \frac{9\gamma^2\delta^2}{8\pi R^2(2 - 3\gamma\delta^2)}, \quad (251)$$

onde $\delta = r/R$.

Podemos facilmente ver que as condições de regularidade na origem são respeitadas, isto é, $h(0) = 1$ e $P_{\perp}(0) = P_r(0) = 0$. Como ρ é constante, sua convergência na origem também está assegurada. Analisemos a seguir as condições de energia.

Primeiramente, podemos ver que a inequação (229) é sempre respeitada, pois $\gamma \geq 0$. Posteriormente, podemos reescrever (231), (233) e (236), respectivamente, como

$$8\pi R^2(\rho + P_{\perp}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3\gamma \left(\frac{4 - 3\gamma\delta^2}{2 - 3\gamma\delta^2} \right) \geq 0, \quad (252)$$

$$8\pi R^2(\rho - P_{\perp}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3\gamma \left(\frac{4 - 9\gamma\delta^2}{2 - 3\gamma\delta^2} \right) \geq 0, \quad (253)$$

$$8\pi R^2 \left(\rho + 2P_{\perp} - \frac{\Lambda}{4\pi} \right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 9\gamma \left(\frac{2 - \gamma\delta^2}{2 - 3\gamma\delta^2} \right) \geq 0. \quad (254)$$

Para que todas sejam respeitadas, é necessário que

$$2 - 3\gamma\delta^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq \frac{2}{3\delta^2}. \quad (255)$$

Como $\delta \leq 1$ e queremos o valor que nos forneça o menor intervalo para γ , devemos

fazer $\delta = 1$ nestas análises, isto é,

$$\gamma \leq \frac{2}{3} \approx 0,67. \quad (256)$$

Por outro lado, para que (252) seja respeitada, também é preciso que

$$4 - 3\gamma\delta^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq \frac{4}{3} \approx 1,33, \quad (257)$$

enquanto que para a satisfação de (253) devemos ter

$$4 - 9\gamma\delta^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq \frac{4}{9} \approx 0,44. \quad (258)$$

Por fim, obtemos via (254) a seguinte inequação

$$2 - \gamma\delta^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \leq 2. \quad (259)$$

Logo, o intervalo de γ em que todas as condições de energia e regularidade são respeitadas é

$$0 \leq \gamma \leq \frac{4}{9}. \quad (260)$$

Por outro lado, ao considerar pressão radial sempre nula, a equação (172) poderá ser reescrita como

$$-\rho \left[\frac{3m - \Lambda r^3}{r(3r - 6m - \Lambda r^3)} \right] + \frac{2P_{\perp}}{r} = 0, \quad (261)$$

que pode ser rearranjada e fornecer a pressão tangencial em função da densidade de

energia, ou seja,

$$P_{\perp}(r) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{3m - \Lambda r^3}{3r - 6m - \Lambda r^3} \right). \quad (262)$$

Em seguida, substituindo (194) em (262), obtemos

$$P_{\perp}(r) = \frac{\rho r^2}{2} \left[\frac{2\pi(3\rho - \Lambda) - \Lambda}{3 - 4\pi r^2(3\rho - \Lambda) - \Lambda r^2} \right]. \quad (263)$$

A equação acima nos dá a equação de estado que rege o fluido anisotrópico com $P_r = 0$, aqui considerado, sem esquecer que a constante cosmológica deve ser negativa de modo a assegurarmos massas positivas e garantir o equilíbrio hidrostático. No caso de $\Lambda = 0$ recaímos na solução trivial de Minkowski.

4.2 Perfil de densidade proposto por Stewart

Considerando agora um fluido com pressões tangenciais e pressão radial, tomemos como ponto de partida o perfil de densidade de Stewart (STEWART, 1982), isto é,

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{8\pi} \left(1 - \frac{Kr^2}{R^2} \right), \quad (264)$$

em que α e K são constantes a serem determinadas e R é o raio do objeto compacto.

Da equação (222), obtemos

$$h(r) = 1 - \frac{(\Lambda + \alpha)r^2}{3} + \frac{\alpha Kr^4}{5R^2}, \quad (265)$$

e por conseguinte, sua derivada

$$h'(r) = -\frac{2(\Lambda + \alpha)r}{3} + \frac{4\alpha Kr^3}{5R^2}. \quad (266)$$

Desta forma, substituindo (265) e (265) em (225) e (224), encontramos, respectivamente,

$$P_r(r) = \frac{5\alpha R^2 - 9K\alpha r^2 + 20\Lambda R^2}{120\pi R^2}, \quad (267)$$

$$P_\perp(r) = \frac{A_0(r)}{120\pi R^2 (3K\alpha r^4 - 5R^2(\Lambda + \alpha)r^2 + 15R^2)}, \quad (268)$$

onde $A_0(r) = 18K^2\alpha^2 r^6 + 15KR^2\alpha(2\Lambda - \alpha)r^4 + 25R^4r^2(\alpha^2 - \Lambda\alpha - 2\Lambda^2) - 270KR^2\alpha r^2 + 75R^4(\alpha + 4\Lambda)$.

No centro na estrela é fácil verificarmos que temos isotropia nas pressões, ou seja,

$$P_r(0) = P_\perp(0) = \frac{\alpha + 4\Lambda}{24\pi}. \quad (269)$$

Na superfície ($r = R$), a equação (267) torna-se

$$P_r(R) = \frac{5\alpha - 9K\alpha + 20\Lambda}{120\pi}, \quad (270)$$

que, considerando (226), nos fornece

$$\frac{5\alpha - 9K\alpha + 20\Lambda}{120\pi} = 0. \quad (271)$$

Logo, a partir de (271), podemos determinar α , ou seja,

$$\alpha = \frac{20\Lambda}{9K - 5}, \quad (272)$$

sendo $K \neq 5/9$.

Considerando agora (265) em $r = R$, temos

$$h(R) = 1 - \frac{(\Lambda + \alpha)R^2}{3} + \frac{\alpha KR^2}{5}, \quad (273)$$

que, lançando mão de (272), nos dá

$$h(R) = \frac{K\Lambda R^2 - 5\Lambda R^2 + 9K - 5}{9K - 5}. \quad (274)$$

Assim, comparando (273) com (203), obtemos

$$K = \frac{5}{3} \left(\frac{2\Lambda R^2 + 3\gamma}{2\Lambda R^2 + 9\gamma} \right), \quad (275)$$

onde $\gamma = M/R$.

Substituindo (275) em (272), encontramos

$$\alpha = \frac{2\Lambda R^2 + 9\gamma}{R^2}. \quad (276)$$

Posteriormente, fazendo $\delta = r/R$ e usando (275) e (276) em (264), (265), (267) e (268), obtemos, respectivamente,

$$h(\delta) = 1 - 3\gamma\delta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{3} \right) - \Lambda R^2 \delta^2 \left(1 - \frac{2\delta^2}{3} \right), \quad (277)$$

$$\rho(\delta) = \frac{3\gamma(9 - 5\delta^2) + 2\Lambda R^2(3 - 5\delta^2)}{24\pi R^2}, \quad (278)$$

$$P_r(\delta) = \frac{(3\gamma + 2\Lambda R^2)(1 - \delta^2)}{8\pi R^2}, \quad (279)$$

$$P_{\perp}(\delta) = \frac{A_1(\delta)}{24\pi R^2 [3 - 3\gamma\delta^2(3 - \delta^2) - \Lambda R^2\delta^2(3 - 2\delta^2)]}, \quad (280)$$

onde $A_1(\delta) = 8\Lambda^2 R^4 \delta^6 + 3\Lambda R^2 [\gamma\delta^2(8\delta^4 - 6\delta^2 + 9) + 6(1 - 2\delta^2)] + 9\gamma^2\delta^2(2\delta^4 - 3\delta^2 + 9) + 27\gamma(1 - 2\delta^2)$.

Neste caso também podemos ver que as condições de regularidade na origem são respeitadas, isto é,

$$h(0) = 1, \quad (281)$$

$$P_{\perp}(0) = P_r(0) = \frac{2\Lambda R^2 + 3\gamma}{8\pi R^2}. \quad (282)$$

Além disso, temos

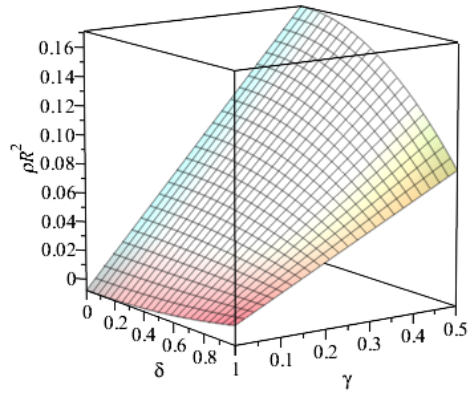
$$\rho = \frac{9\gamma + 2\Lambda R^2}{8\pi R^2}, \quad (283)$$

assumindo um valor finito positivo.

A seguir analisamos os intervalos de γ para os quais as condições de energia são ou não satisfeitas e, para isso, consideramos a variável ΛR^2 a fim de evitarmos a escolha arbitrária de um valor para o raio do objeto neste momento. Também consideramos ρR^2 , $P_r R^2$ e $P_{\perp} R^2$ pelo mesmo motivo. As mudanças de variáveis consideradas aqui não afetam nossas conclusões, uma vez que não modificam os sinais das quantidades examinadas, ou seja, pressões, densidades e desigualdades impostas pelas condições de energia.

4.2.1 Análise para $\Lambda R^2 = -0,1$

Pela figura (1), concluímos que $\gamma > 0,0222$, ao passo que, pelas figuras (2a) e (2b), vemos que $\gamma > 0,0333$. Já com a figura (3b), temos que γ fica restrita ao intervalo $0,0101 < \gamma < 0,4420$. Por fim, a figura (4) nos mostra que $\gamma > 0,0333$. Logo, podemos

Figura 1 - ρR^2 

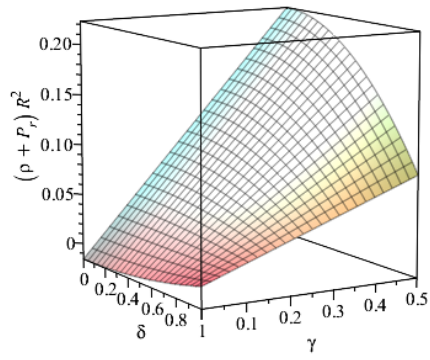
Fonte: O autor, 2020.

escrever o intervalo de γ onde todas as condições de energia são respeitadas como

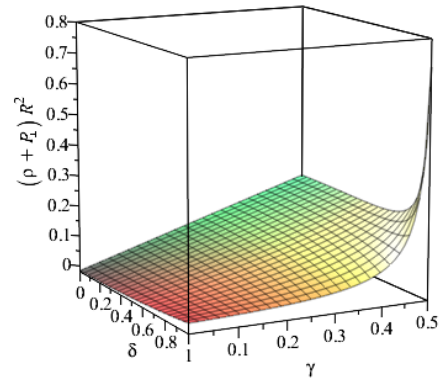
$$0,0333 < \gamma < 0,4420. \quad (284)$$

Neste caso, verificamos que o modelo não admite energia escura efetiva, uma vez que não há intervalos para os quais apenas a condição de energia forte seja violada. Essa conclusão, entretanto, não pode ser estendida para outros valores de $\Lambda < 0$.

Figura 2 - $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$



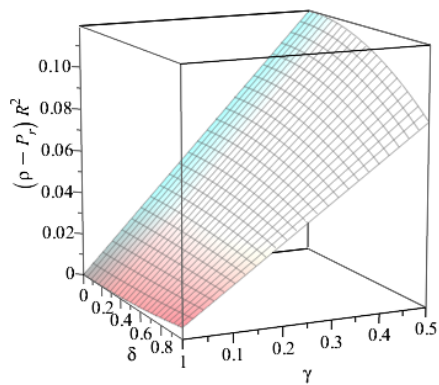
(a)



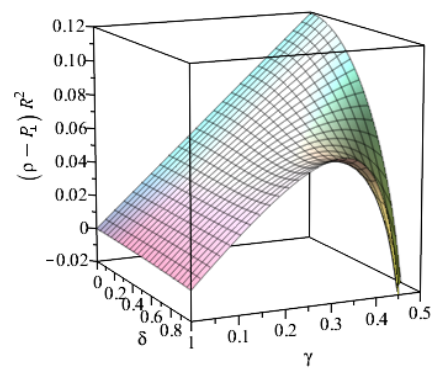
(b)

Fonte: O autor, 2020.

Figura 3 - $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$

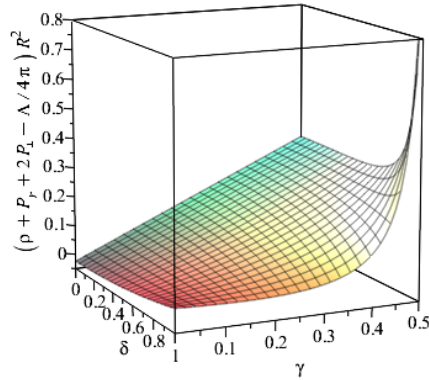


(a)



(b)

Fonte: O autor, 2020.

Figura 4 - $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$ 

Fonte: O autor, 2020.

4.2.2 Análise para $\Lambda R^2 = 0,1$

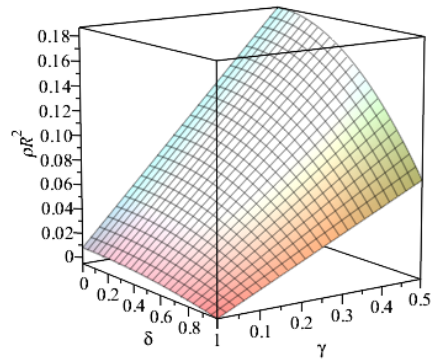
As figuras (5), (6a) e (7a) mostram que $\gamma > 0,0333$. Já a figura (6b) revela que $0,2133 < \gamma < 0,4833$, enquanto que da figura (7b), obtemos dois intervalos possíveis para γ , que são $\gamma < 0,4320$ ou $\gamma > 0,4833$. Por fim, a figura (8) fornece $0,3461 < \gamma < 0,4833$. Portanto, todas as condições de energia são respeitadas no seguinte intervalo:

$$0,3461 < \gamma < 0,4320. \quad (285)$$

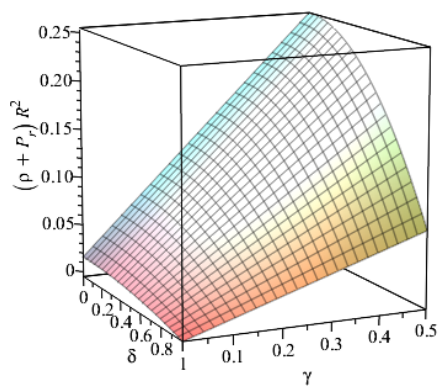
Como a figura (8) está associada à condição de energia forte efetiva, podemos expressar o intervalo onde apenas ela é violada como

$$0,2133 < \gamma < 0,3461. \quad (286)$$

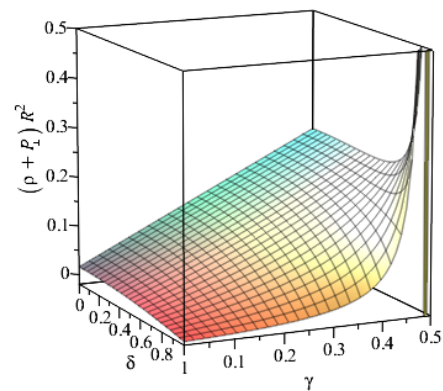
Neste caso, no intervalo acima, temos que o fluido, combinado com a constante cosmológica, exerce um efeito de repulsividade na região da borda do objeto compacto, embora mantenha-se estático.

Figura 5 - ρR^2 

Fonte: O autor, 2020.

Figura 6 - $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$ 

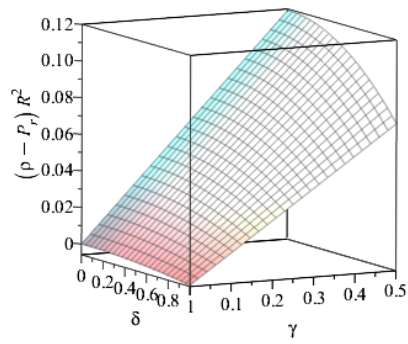
(a)



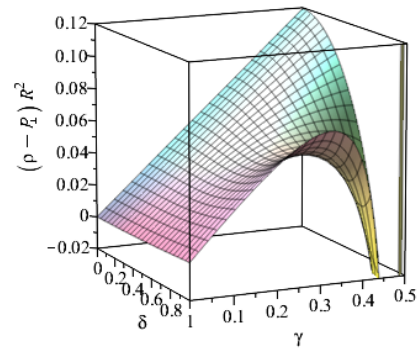
(b)

Fonte: O autor, 2020.

Figura 7 - $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$



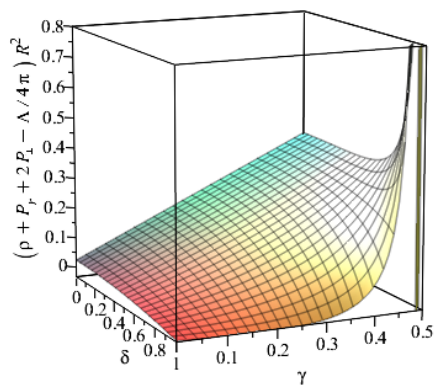
(a)



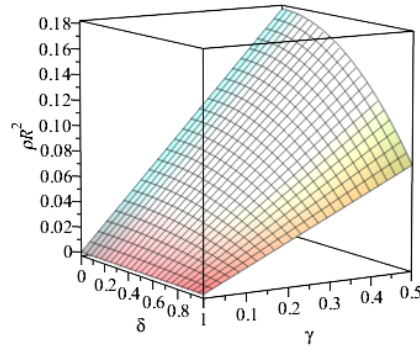
(b)

Fonte: O autor, 2020.

Figura 8 - $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$



Fonte: O autor, 2020.

Figura 9 - ρR^2 

Fonte: O autor, 2020.

4.2.3 Análise para $\Lambda R^2 = 0$

Determinamos pela figura (11b) que $\gamma < 0,4375$. Por outro lado, da figura (12), obtemos que $\gamma > 0,2500$. Logo, podemos expressar o intervalo onde todas as condições de energia são satisfeitas como

$$0,2500 < \gamma < 0,4375. \quad (287)$$

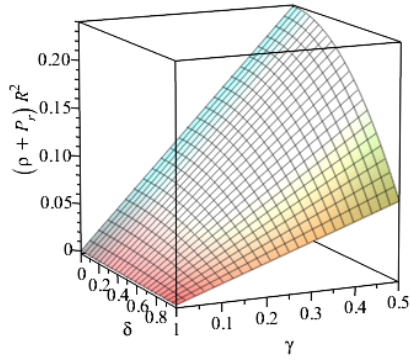
Também é possível determinar o intervalo de γ em que só a condição de energia forte é violada, isto é,

$$0 < \gamma < 0,2500. \quad (288)$$

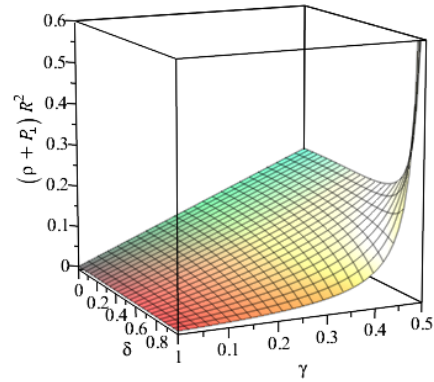
Chamamos a atenção para o fato que, neste caso, como $\Lambda = 0$, temos violação da condição de energia forte em decorrência exclusivamente do fluido. Portanto, modelos dentro do intervalo de γ indicado acima representam objetos compactos constituídos por energia escura na sua camada mais externa. Isso significa que, nessa região, o fluido gera uma gravidade repulsiva, embora se mantenha estático.

Nas subseções anteriores, mostramos uma análise detalhada apenas para os casos com $\Lambda R^2 = -0,1$, $\Lambda R^2 = 0,1$ e $\Lambda R^2 = 0$. Já na tabela 1, um conjunto maior de valores de Λ é mostrado. Lá, separamos o intervalo para γ em que todas as condições de energia

Figura 10 - $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$



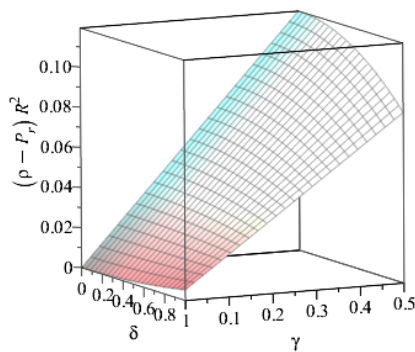
(a)



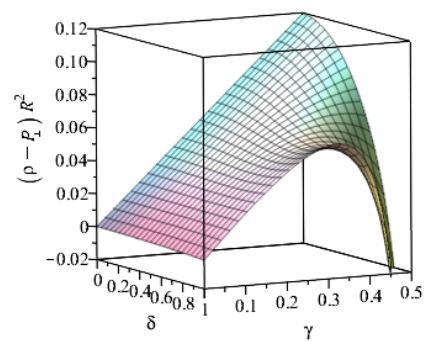
(b)

Fonte: O autor, 2020.

Figura 11 - $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$

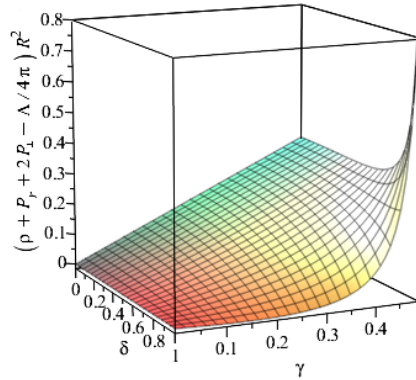


(a)



(b)

Fonte: O autor, 2020.

Figura 12 - $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$ 

Fonte: O autor, 2020.

são satisfeitas e também aquele para o qual apenas a condição de energia forte ($\Lambda = 0$) ou forte efetiva ($\Lambda \neq 0$) é violada. Nestes casos, temos energia escura confinada nas camadas mais externas do objeto compacto estudado.

Na tabela acima, podemos ver que estrelas com energia escura são favorecidas por compacticidades menores do que aquelas para as quais todas as condições de energia são satisfeitas, independentemente de Λ . Para $\Lambda \geq 0$, quanto maior Λ , menor será o intervalo de γ , e maior será o seu limite inferior no qual encontramos modelos que satisfazem todas as condições de energia. Isso pode ser interpretado como se a repulsão em virtude do valor positivo de Λ demandasse uma compacticidade maior para balancear sua configuração. Vemos também que quanto maior Λ , menor será o intervalo de γ para o qual apenas a condição de energia forte efetiva é violada, uma vez que as outras condições deixam de ser satisfeitas. Podemos dizer, então, que a constante cosmológica positiva impõe restrições adicionais aos modelos fisicamente aceitáveis. Por outro lado, para $\Lambda < 0$, quanto maior for o valor absoluto de Λ , maior será o intervalo de γ que satisfaz todas as condições de energia, fazendo com que intervalos cada vez menores de γ levem a modelos que violam a condição de energia forte efetiva. Isso indica que valores negativos para Λ desfavorecem a presença dessa energia escura, minimizando o efeito repulsivo do fluido, como era de se esperar. Em todos os casos, é curioso notar que a energia escura, quando presente, aparece concentrada na borda do objeto compacto.

No modelo estudado nesta seção, se considerarmos o valor de Λ obtido de observações cosmológicas ($\Lambda \approx 10^{-52}m^{-2}$) admitindo que a constante cosmológica seja a responsável pela expansão acelerada do universo, podemos concluir que ela não interferiria significativamente na estrutura de um objeto compacto. Sabendo que o raio de uma estrela de nêutrons típica varia de 10 a 15 quilômetros, o menor valor de ΛR^2 que afetaria os intervalos de γ na tabela acima seria da ordem de $\Lambda R^2 = 10^{-8}$, o que corresponderia a

Tabela 2 - Intervalo de compacidade permitida.

ΛR^2	Todas as condições de energia satisfeitas	Modelos com energia escura efetiva
-10^{-1}	$0,33333333 \times 10^{-1} < \gamma < 0,44202868$	-----
-10^{-2}	$0,33333333 \times 10^{-2} < \gamma < 0,40916327 \times 10^{-1}$ $0,22491701 < \gamma < 0,43800070$	$0,40916327 \times 10^{-1} < \gamma < 0,22491701$
-10^{-4}	$0,33333333 \times 10^{-4} < \gamma < 0,36698740 \times 10^{-3}$ $0,24979135 < \gamma < 0,43750658$	$0,36698740 \times 10^{-3} < \gamma < 0,24979135$
0	$0,25000000 < \gamma < 0,43750000$	$0 < \gamma < 0,25000000^a$
10^{-8}	$0,25000002 < \gamma < 0,43750000$	$0,33333332 \times 10^{-7} < \gamma < 0,25000002$
10^{-6}	$0,25000208 < \gamma < 0,43749995$	$0,33333153 \times 10^{-5} < \gamma < 0,25000208$
10^{-4}	$0,25020801 < \gamma < 0,43749494$	$0,33315342 \times 10^{-3} < \gamma < 0,25020801$
10^{-2}	$0,26820932 < \gamma < 0,43698881$	$0,31619048 \times 10^{-1} < \gamma < 0,26820932$
10^{-1}	$0,34609364 < \gamma < 0,43192038$	$0,21333333 < \gamma < 0,34609364$

Fonte: O autor, 2020.

^a Aqui, como $\Lambda = 0$, temos energia escura exclusivamente decorrente do fluido, e não uma energia escura efetiva.

$\Lambda = 10^{-16}m^{-2}$. Uma conclusão semelhante foi alcançada em (BORDBAR; HENDI; PANAH, 2016), embora os autores tenham considerado um modelo completamente diferente do adotado aqui, além de terem recorrido à computação numérica. Eles encontraram que a constante cosmológica deveria assumir o valor mínimo de $10^{-14}m^{-2}$ para influenciar no limite superior de massa da estrela de nêutrons, e a massa máxima deve crescer conforme Λ aumenta.

4.3 Perfil de densidade proposto por Durgapal e Bannerji

O perfil de densidade de Durgapal e Bannerji pode ser expresso como (DURGAPAL; BANNERJI, 1983)

$$\rho(r) = \frac{3C(3 + Cr^2)}{16\pi(1 + Cr^2)^2}, \quad (289)$$

na qual C é uma constante arbitrária a ser determinada.

Realizando o mesmo procedimento feito na seção anterior, determinamos

$$h(r) = -\frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{Cr^2 - 2}{2Cr^2 + 2}, \quad (290)$$

$$P_r(r) = \frac{\Lambda}{6\pi} - \frac{3C(Cr^2 - 1)}{16\pi(Cr^2 + 1)^2}, \quad (291)$$

$$P_{\perp}(r) = \frac{B_0(r)}{48\pi(Cr^2 + 1)^3 [3(Cr^2 - 2) + 2\Lambda r^2(Cr^2 + 1)]}, \quad (292)$$

em que

$$\begin{aligned} B_0(r) = & 8\Lambda^2 r^2 (Cr^2 + 1)^4 + 6\Lambda (4C^4 r^8 - 17C^3 r^6 - 42C^2 r^4 - 29Cr^2 - 8) \\ & - 27C (3C^2 r^4 - Cr^2 + 2). \end{aligned}$$

No centro do objeto compacto, temos

$$\rho(0) = \frac{9C}{16\pi}, \quad (293)$$

$$P_r(0) = P_{\perp}(0) = \frac{9C + 8\Lambda}{48\pi}, \quad (294)$$

revelando isotropia nas pressões no centro.

Já na sua superfície ($r = R$), encontramos

$$P_r(R) = \frac{8\Lambda(CR^2 + 1)^2 - 9C(CR^2 - 1)}{48\pi(CR^2 + 1)^2}, \quad (295)$$

que, combinado com (226), nos fornece

$$\Lambda = \frac{9C(CR^2 - 1)}{8(CR^2 + 1)^2}. \quad (296)$$

Assim, substituindo (296) em (290), e analisando em $r = R$, temos

$$h^-(R) = \frac{8 - 7CR^2(CR^2 + 1)}{8(CR^2 + 1)^2}. \quad (297)$$

Por outro lado, considerando a métrica externa, substituindo (296) em (203), encontramos

$$h^+(R) = 1 - 2\gamma + \frac{3CR^2(CR^2 - 1)}{8(CR^2 + 1)^2}. \quad (298)$$

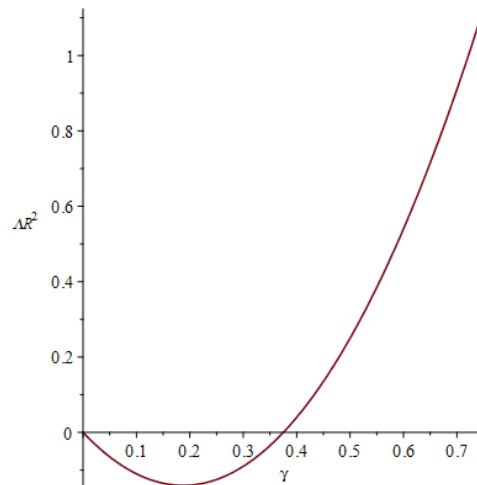
Pela continuidade da métrica na superfície de junção, $h^-(R) = h^+(R)$, podemos determinar os possíveis valores para C , isto é,

$$CR^2 = \frac{4\gamma}{(3 - 4\gamma)}. \quad (299)$$

Uma vez que ρ deve ser positivo para todo o r , devemos impor que $C > 0$, implicando em

$$0 \leq \gamma < \frac{3}{4}. \quad (300)$$

Para obter a constante cosmológica em termos da compacidade, nós temos que

Figura 13 - ΛR^2 

Fonte: O autor, 2021.

usar (299) in (296). Assim,

$$\Lambda R^2 = \frac{(8\gamma - 3)\gamma}{2}. \quad (301)$$

Da equação (301), temos $\Lambda = 0$ para $\gamma = 0$ e $\gamma = 0,375$, revelando que este modelo não admite o espaço-tempo de Sitter como um limite. Para $0 \leq \gamma < 0,375$, Λ deve ser negativo, enquanto para $0,375 < \gamma < 0,750$, Λ tem que ser positivo.

Fazendo a substituição de variável $\delta = r/R$ e usando (299), podemos reescrever (289) como

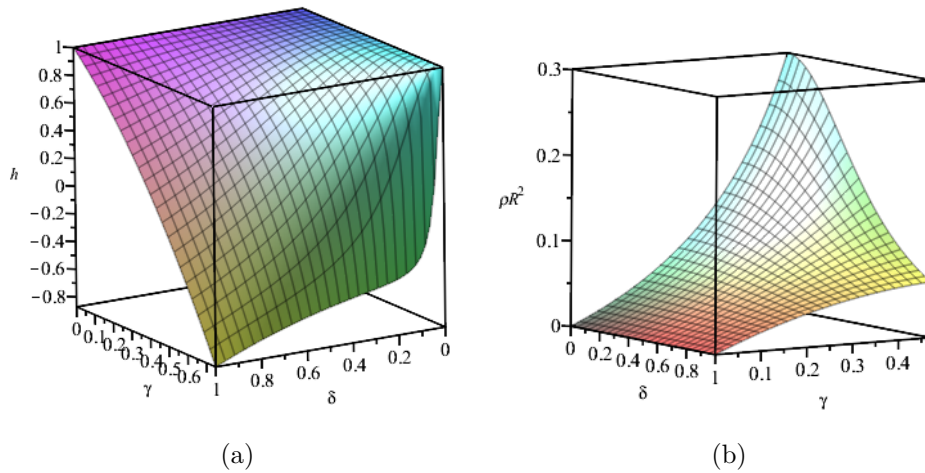
$$\rho(\delta) = \frac{3\gamma[9 - 4\gamma(3 - \delta^2)]}{4\pi R^2[3 - 4\gamma(1 - \delta^2)]^2}. \quad (302)$$

Nos valendo de (299) e (301), as equações (290) e (291) podem ser reescritas como

$$h(\delta) = \frac{18 + 32\gamma^3\delta^2(1 - \delta^2) - 12\gamma^2\delta^2(3 - \delta^2) - 3\gamma(8 + \delta^2)}{18 - 24\gamma(1 - \delta^2)}, \quad (303)$$

$$P_r(\delta) = \frac{32\gamma^2(1 - \delta^2)}{3\pi R^2[18 - 24\gamma(1 - \delta^2)]} \left[(1 - \delta^2)\gamma^2 - \frac{3\gamma(5 - \delta^2)}{8} + \frac{27}{32} \right], \quad (304)$$

O mesmo pode ser feito na equação (292), porém a expressão é demasiada grande, por isso optei por não colocá-la aqui.

Figura 14 - h e ρR^2 

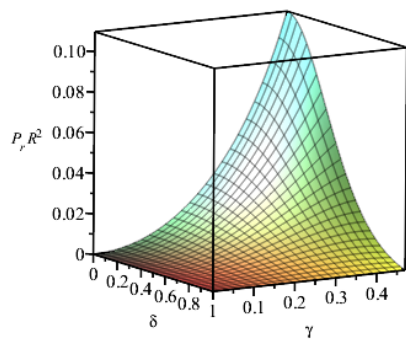
Fonte: O autor, 2021.

Impondo que $h(\delta)$ deva ser positivo em todas as regiões no espaço-tempo interior, temos

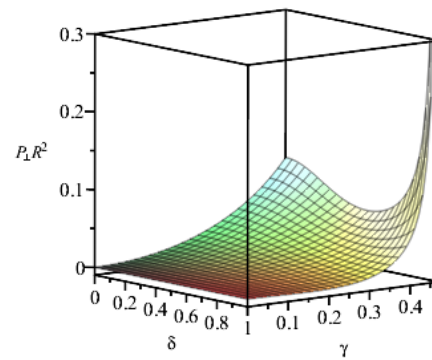
$$0 \leq \gamma \leq 0,470. \quad (305)$$

Ao analisar o comportamento do fluido em termos da pressão e das condições de energia, nós verificamos que a densidade de energia e a pressão radial são positivas em toda a fonte, mas a pressão tangencial é negativa em certas regiões para modelos com compactidade no intervalo $0 \leq \gamma < 0,223$, como mostrado na figura (15b). Note que esse intervalo de γ requer um constante cosmológica negativa. Para modelos com $\gamma < 0,411$, todas as condições de energia são satisfeitas. Esta restrição para γ é imposta pela condição de energia dominante $\rho - P_{\perp} > 0$, o que pode ser visto na figura (17b). Então, se consideramos um universo com constante cosmológica positiva, como apontado pelas observações, este modelo admite objetos com compactidade no intervalo $0,375 < \gamma < 0,411$, sem qualquer possibilidade da presença de energia escura.

Figura 15 - $P_r R^2$ e $P_\perp R^2$



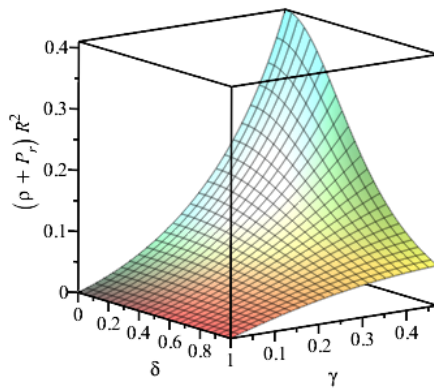
(a)



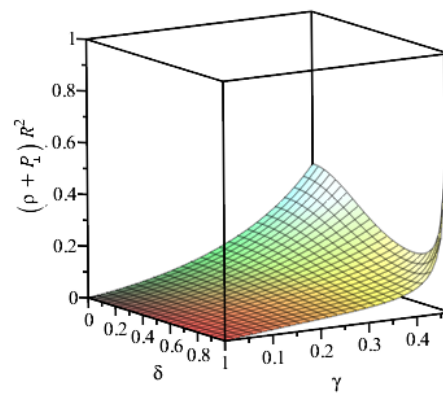
(b)

Fonte: O autor, 2021.

Figura 16 - $(\rho + P_r)R^2$ e $(\rho + P_\perp)R^2$



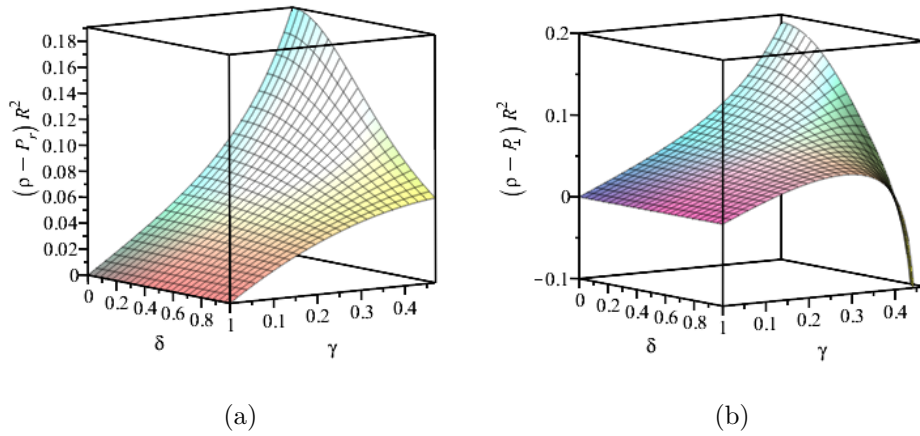
(a)



(b)

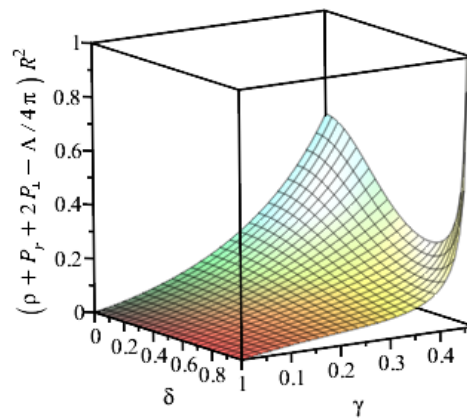
Fonte: O autor, 2021.

Figura 17 - $(\rho - P_r)R^2$ e $(\rho - P_\perp)R^2$



Fonte: O autor, 2021.

Figura 18 - $(\rho + P_r + 2P_\perp - \Lambda/4\pi)R^2$



Fonte: O autor, 2021.

5 APLICAÇÕES PARA O CASO DINÂMICO

De posse das soluções estáticas apresentadas no capítulo anterior, a ideia original deste trabalho era considerá-las como configurações iniciais para o estudo dinâmico, cujas equações foram desenvolvidas no capítulo 3. No entanto, não conseguimos integrar analiticamente, e de forma exata, a equação (144), exceção feita ao caso $P_r = 0$. Para não deixarmos de fazer alguma análise sobre a influência da constante Λ no processo de colapso para a métrica considerada aqui neste capítulo, além de investigarmos as consequências de adotarmos $P_r = 0$, também estudamos uma solução a partir de uma aproximação linear, na qual à métrica estática é acrescida uma pequena contribuição dependente do tempo.

5.1 Pressão radial nula

Ao considerar $P_r = 0$, a equação (128) pode reescrita como

$$\frac{h}{\xi^2} \frac{\ddot{f}}{f} = \frac{h - rh' - 1}{r^2 f} + \frac{h}{4\xi^2} \frac{\dot{f}^2}{f^2} + 8\pi\zeta\Theta + \Lambda, \quad (306)$$

$$\ddot{f} = \frac{\xi^2(h - rh' - 1)}{r^2 h} + \frac{\dot{f}^2}{4f} + \frac{8\pi\zeta\xi^2\Theta f}{h} + \frac{\Lambda\xi^2 f}{h}. \quad (307)$$

Por outro lado, da equação (144), temos também

$$\ddot{f} = \frac{\dot{f}^2}{4f} - \frac{h'(r_\Sigma)\dot{f}}{2\sqrt{f}} - \Lambda\xi(1 - f). \quad (308)$$

Comparando (307) com (308), segue que

$$\frac{\xi^2(h - rh' - 1)}{r^2 h} + \frac{8\pi\zeta\xi^2\Theta f}{h} + \frac{\Lambda\xi^2 f}{h} = -\frac{h'(r_\Sigma)\dot{f}}{2\sqrt{f}} - \Lambda\xi(1 - f). \quad (309)$$

Substituindo (121) em (309), vamos obter

$$\frac{\xi^2(h - rh' - 1)}{r^2h} + \frac{12\pi\zeta\xi f \dot{f}}{\sqrt{h}} + \frac{\Lambda\xi^2 f}{h} = -\frac{h'(r_\Sigma)\dot{f}}{2\sqrt{f}} - \Lambda\xi(1 - f), \quad (310)$$

$$\dot{f} \left(\frac{12\pi\zeta\xi f}{\sqrt{h}} + \frac{h'(r_\Sigma)}{2\sqrt{f}} \right) = -\frac{\xi^2(h - rh' - 1)}{r^2h} - \frac{\Lambda\xi^2 f}{h} - \Lambda\xi(1 - f), \quad (311)$$

$$\dot{f} \left(\frac{24\pi\zeta\xi\sqrt{f}f + h'(r_\Sigma)\sqrt{h}}{2\sqrt{h}\sqrt{f}} \right) = -\frac{\xi^2(h - rh' - 1)}{r^2h} - \frac{\Lambda\xi^2 f}{h} - \Lambda\xi(1 - f), \quad (312)$$

$$\dot{f} = -\frac{2\xi\sqrt{h}\sqrt{f}}{24\pi\zeta\xi\sqrt{f}f + h'(r_\Sigma)\sqrt{h}} \left[\frac{\xi(h - rh' - 1)}{r^2h} + \Lambda \left(1 + \frac{\xi f}{h} - f \right) \right]. \quad (313)$$

Tomando a equação acima em $r = r_\Sigma$, vamos ter que $h = \xi$, o que nos dá

$$\dot{f} = - \left[\frac{2h\sqrt{h}\sqrt{f}}{24\pi\zeta h\sqrt{f}f + h'\sqrt{h}} \left(\frac{h - rh' - 1}{r^2} + \Lambda \right) \right]_{\Sigma}. \quad (314)$$

Como a função h só depende de r , ela terá a mesma forma que no caso estático, ou seja,

$$h = 1 + C_1 r + \Lambda r^2, \quad (315)$$

que nos fornece também

$$h' = C_1 + 2\Lambda r, \quad (316)$$

$$h'' = 2\Lambda. \quad (317)$$

Posteriormente, subtraindo (129) por (128), temos

$$8\pi P_{\perp} = \frac{h'^2 - h''h}{2hf} - \frac{h - rh' - 1}{r^2 f}, \quad (318)$$

onde $P_r = 0$.

Assim, usando (315), (316) e (317) em (318), encontramos

$$P_{\perp} = \frac{(C_1 + 2\Lambda r)^2}{16\pi f(1 + C_1 r + \Lambda r^2)} = \frac{h'^2}{16\pi f h}. \quad (319)$$

Para que as pressões sejam iguais no centro, e como a pressão radial é sempre nula neste caso particular, temos que fazer $P_{\perp}(0) = 0$. Portanto,

$$P_{\perp}(0) = \frac{C_1}{16\pi f} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0. \quad (320)$$

Deste modo, as equações (315) e (316) podem ser reescritas como

$$h = 1 + \Lambda r^2, \quad (321)$$

$$h' = 2\Lambda r. \quad (322)$$

Por conseguinte, a equação (320) será dada por

$$P_{\perp} = \frac{\Lambda^2 r^2}{4\pi f(1 + \Lambda r^2)}. \quad (323)$$

Voltando à equação (313), se considerarmos (321) e (322), chegaremos em $\dot{f} = 0$. Desse modo, a solução estática com $P_r = 0$ não evolui para uma situação de colapso, permanecendo estática.

5.2 Caso perturbativo com constante cosmológica

Como uma tentativa de tirarmos alguma conclusão, ainda que de forma muito aproximada, acerca do efeito qualitativo da constante cosmológica sobre a evolução temporal da configuração inicial, adotamos um procedimento perturbativo à métrica dependente do tempo, dada em (106). Procedimento semelhante pode ser encontrado em outros trabalhos, tais como (HERRERA; DENMAT; SANTOS, 1989) (CHAN et al., 1989) (CHAN; HERRERA; SANTOS, 1994) (REDDY; GOVENDER; MAHARAJ, 2015) (CHAN; HERRERA; SANTOS, 1993).

Seja, portanto, uma solução perturbativa dada por

$$A(r,t) = \frac{\xi}{\sqrt{h(r)}} + \epsilon \frac{\xi f(t)}{\sqrt{h(r)}}, \quad (324)$$

$$B(r,t) = \frac{1}{\sqrt{h(r)}} + \epsilon \frac{f(t)}{\sqrt{h(r)}}, \quad (325)$$

$$C(r,t) = r + \epsilon r f(t), \quad (326)$$

onde $\epsilon \ll 1$. Devido às dificuldades matemáticas impostas pela introdução da constante cosmológica, consideramos a parte radial da contribuição em primeira ordem em ϵ como sendo a própria solução de ordem zero.

Por outro lado, para as quantidades físicas adotamos,

$$\rho(r,t) = \rho_0(r) + \epsilon \bar{\rho}(r,t), \quad (327)$$

$$P_r(r,t) = P_{r_0}(r) + \epsilon \bar{P}_r(r,t), \quad (328)$$

$$P_{\perp}(r,t) = P_{\perp_0}(r) + \epsilon \bar{P}_{\perp}(r,t), \quad (329)$$

$$q(r,t) = \epsilon \bar{q}(r,t), \quad (330)$$

$$\Theta(r,t) = \epsilon \bar{\Theta}(r,t), \quad (331)$$

$$m(r,t) = m_0(r) + \epsilon \bar{m}(r,t). \quad (332)$$

A componente 00 das equações de Einstein nos fornece

$$G_{00}^- - \Lambda A^2 = 8\pi T_{00}^-. \quad (333)$$

A componente do tensor de Einstein pode ser escrita como

$$G_{00}^- = -\frac{\xi^2(rh' + h - 1)}{r^2h}. \quad (334)$$

Por outro lado, encontramos

$$\begin{aligned} 8\pi T_{00}^- &= 8\pi A^2 \rho \\ &= 8\pi \left(\frac{\xi}{\sqrt{h}} + \epsilon \frac{\xi f}{\sqrt{h}} \right)^2 (\rho_0 + \epsilon \bar{\rho}) \\ &= 8\pi \left(\frac{\xi^2}{h} + \epsilon \frac{2\xi^2 f}{h} \right) (\rho_0 + \epsilon \bar{\rho}) \\ &= \frac{8\pi \xi^2 \rho_0}{h} + \left(\frac{16\pi \xi^2 f \rho_0}{h} + \frac{8\pi \xi^2 \bar{\rho}}{h} \right) \epsilon. \end{aligned} \quad (335)$$

Assim, substituindo (324), (334) e (335) em (333), encontramos

$$-\frac{\xi^2(rh' + h - 1)}{r^2h} - \frac{\Lambda \xi^2}{h} - \left(\frac{2\Lambda \xi^2 f}{h} \right) \epsilon = \frac{8\pi \xi^2 \rho_0}{h} + \left(\frac{16\pi \xi^2 f \rho_0}{h} + \frac{8\pi \xi^2 \bar{\rho}}{h} \right) \epsilon. \quad (336)$$

Separando as contribuições em cada ordem em ϵ , obtemos

$$-\frac{\xi^2(rh' + h - 1)}{r^2h} - \frac{\Lambda \xi^2}{h} = \frac{8\pi \xi^2 \rho_0}{h} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{1 - rh' - h}{8\pi r^2} - \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (337)$$

$$-\frac{2\Lambda \xi^2 f}{h} = \frac{16\pi \xi^2 f \rho_0}{h} + \frac{8\pi \xi^2 \bar{\rho}}{h} \quad \Rightarrow \quad \bar{\rho} = -2f \rho_0 - \frac{\Lambda f}{4\pi}. \quad (338)$$

Usando (337) em (338), vamos encontrar

$$\bar{\rho} = \frac{(rh' + h - 1)f}{4\pi r^2}. \quad (339)$$

Já na componente 01, obtemos

$$G_{01}^- = 8\pi T_{01}^-, \quad (340)$$

em que

$$G_{01}^- = -\frac{\epsilon h' \dot{f}}{h(1+2\epsilon f)} \approx -\frac{\epsilon h' \dot{f}(1-2\epsilon f)}{h} \approx -\frac{\epsilon h' \dot{f}}{h}, \quad (341)$$

onde $(1-x)^{-n} \approx 1+nx$.

Do tensor energia-momento, temos

$$\begin{aligned} 8\pi T_{01}^- &= -8\pi AB^2 q \\ &= -8\pi \left(\frac{\xi}{\sqrt{h}} + \frac{\epsilon \xi f}{\sqrt{h}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{\epsilon f}{\sqrt{h}} \right)^2 \epsilon \bar{q} \\ &\approx -8\pi \left(\frac{\xi}{\sqrt{h}} + \frac{\epsilon \xi f}{\sqrt{h}} \right) \left(\frac{1}{h} + \frac{2\epsilon f}{h} \right) \epsilon \bar{q} \\ &\approx -\frac{8\pi \xi \bar{q} \epsilon}{h\sqrt{h}}. \end{aligned} \quad (342)$$

De (330), podemos ver que essa componente não possui termo de ordem zero. Assim, o termo de primeira ordem nos fornece

$$-\frac{h' \dot{f}}{h} = -\frac{8\pi \xi \bar{q}}{h\sqrt{h}} \Rightarrow \bar{q} = \frac{h' \sqrt{h} \dot{f}}{8\pi \xi}. \quad (343)$$

Usando (12), (325), (326) e (331), vamos obter o escalar de expansão, isto é,

$$\bar{\Theta} = \frac{3\sqrt{h} \dot{f}}{\xi(1+\epsilon f)^2} \approx \frac{3\sqrt{h} \dot{f}(1-2\epsilon f)}{\xi} \approx \frac{3\sqrt{h} \dot{f}}{\xi}. \quad (344)$$

Em seguida, da componente 11 vamos encontrar

$$G_{11}^- + \Lambda B^2 = 8\pi T_{11}^-. \quad (345)$$

Daí, temos

$$G_{11}^- = \frac{h - rh' - 1}{r^2 h} - \frac{2\ddot{f}\epsilon}{\xi^2}, \quad (346)$$

$$\begin{aligned} 8\pi T_{11}^- &= 8\pi B^2(P_r - \zeta\Theta) \approx 8\pi \left(\frac{1}{h} + \frac{2\epsilon f}{h} \right) (P_{r_0} + \epsilon \bar{P}_r - \zeta \epsilon \bar{\Theta}) \\ &\approx \frac{8\pi P_{r_0}}{h} + \left(\frac{16\pi f P_{r_0}}{h} + \frac{8\pi \bar{P}_r}{h} - \frac{8\pi \zeta \bar{\Theta}}{h} \right) \epsilon. \end{aligned} \quad (347)$$

Assim, substituindo (325), (346) e (347) em (345), encontramos

$$\frac{h - rh' - 1}{r^2 h} - \left(\frac{2\ddot{f}}{\xi^2} \right) \epsilon + \frac{\Lambda}{h} + \left(\frac{2\Lambda f}{h} \right) \epsilon = \frac{8\pi P_{r_0}}{h} + \left(\frac{16\pi f P_{r_0}}{h} + \frac{8\pi \bar{P}_r}{h} - \frac{8\pi \zeta \bar{\Theta}}{h} \right) \epsilon, \quad (348)$$

ou seja,

$$\frac{h - rh' - 1}{r^2 h} + \frac{\Lambda}{h} = \frac{8\pi P_{r_0}}{h} \quad \Rightarrow \quad P_{r_0} = \frac{h - rh' - 1}{8\pi r^2} + \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (349)$$

$$-\frac{2\ddot{f}}{\xi^2} + \frac{2\Lambda f}{h} = \frac{16\pi f P_{r_0}}{h} + \frac{8\pi \bar{P}_r}{h} - \frac{8\pi \zeta \bar{\Theta}}{h} \quad \Rightarrow \quad \bar{P}_r = -2f P_{r_0} + \zeta \bar{\Theta} - \frac{h\ddot{f}}{4\pi \xi^2} + \frac{\Lambda f}{4\pi}, \quad (350)$$

para ordem zero e primeira ordem em ϵ , respectivamente.

Usando (349) e (344) em (350), encontramos

$$\bar{P}_r = \frac{(rh' - h + 1)f}{4\pi r^2} + \frac{3\zeta\sqrt{h}\dot{f}}{\xi} - \frac{hf\ddot{f}}{4\pi\xi^2}. \quad (351)$$

Posteriormente, para a componente 22, vamos ter

$$G_{22}^- + \Lambda C^2 = 8\pi T_{22}^-, \quad (352)$$

para a qual

$$\begin{aligned} G_{22}^- &= \left[r^2 \left(\frac{h'^2 - hh''}{2h} \right) - \epsilon r^2 \left(h''f - \frac{h'^2 f}{h} + \frac{2hf\ddot{f}}{\xi^2} \right) \right] \frac{1}{1 + 2\epsilon f} \\ &\approx \left[r^2 \left(\frac{h'^2 - hh''}{2h} \right) + \epsilon r^2 \left(\frac{(h'^2 - hh'')f}{h} - \frac{2hf\ddot{f}}{\xi^2} \right) \right] (1 - 2\epsilon f) \\ &\approx r^2 \left(\frac{h'^2 - hh''}{2h} \right) - \frac{2r^2 hf\ddot{f}\epsilon}{\xi^2}, \end{aligned} \quad (353)$$

$$\begin{aligned} 8\pi T_{22}^- &= 8\pi C^2 (P_\perp - \zeta\Theta) = 8\pi (r + \epsilon r f)^2 (P_{\perp 0} + \epsilon \bar{P}_\perp - \zeta \epsilon \bar{\Theta}) \\ &\approx 8\pi (r^2 + 2\epsilon r f) (P_{\perp 0} + \epsilon \bar{P}_\perp - \epsilon \zeta \bar{\Theta}) \\ &\approx 8\pi r^2 P_{\perp 0} + 8\pi r (2f P_{\perp 0} + r \bar{P}_\perp - r \zeta \bar{\Theta}) \epsilon. \end{aligned} \quad (354)$$

Usando (326), (353) e (354) em (352), obtemos

$$\frac{h'^2 - hh''}{2h} + \Lambda - \left(\frac{2hf\ddot{f}}{\xi^2} - 2\Lambda f \right) \epsilon = 8\pi P_{\perp 0} + 8\pi \left(\frac{2f P_{\perp 0}}{r} + \bar{P}_\perp - \zeta \bar{\Theta} \right) \epsilon. \quad (355)$$

Dos termos de ordem zero, temos

$$\frac{h'^2 - hh''}{2h} + \Lambda = 8\pi P_{\perp 0} \quad \Rightarrow \quad P_{\perp 0} = \frac{h'^2 - hh''}{16\pi h} + \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (356)$$

Os termos de primeira ordem nos fornecem

$$-\frac{2h\ddot{f}}{\xi^2} + 2\Lambda f = 8\pi \left(\frac{2fP_{\perp 0}}{r} + \bar{P}_{\perp} - \zeta\bar{\Theta} \right) \Rightarrow \bar{P}_{\perp} = -\frac{2fP_{\perp 0}}{r} + \zeta\bar{\Theta} - \frac{h\ddot{f}}{4\pi\xi^2} + \frac{\Lambda f}{4\pi}. \quad (357)$$

Substituindo (344) e (356) em (357), vamos obter

$$\bar{P}_{\perp} = \frac{(hh'' - h'^2)f}{8\pi rh} + \frac{3\zeta\sqrt{h}\dot{f}}{\xi} - \frac{h\ddot{f}}{4\pi\xi^2} + \frac{\Lambda f}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{r} \right). \quad (358)$$

De (326), encontramos

$$\dot{C}^2 \approx \epsilon^2 r^2 \dot{f}^2 \approx 0, \quad (359)$$

$$C'^2 \approx 1 + 2\epsilon f. \quad (360)$$

Levando essas quantidades na função de massa, dada em (72), obtemos

$$m = \left[\frac{r}{2} \left(1 - h - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) + \frac{\epsilon fr}{2} (1 - h - \Lambda r^2) \right]_{\Sigma}. \quad (361)$$

Assim, separando as ordens em ϵ encontramos

$$m_0 = \left[\frac{r}{2} \left(1 - h - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) \right]_{\Sigma}, \quad (362)$$

$$\bar{m} = \left[\frac{fr}{2} (1 - h - \Lambda r^2) \right]_{\Sigma}. \quad (363)$$

A luminosidade para um observador no infinito, por sua vez, é dada por

$$L_{\infty} = 4\pi \left[C^2 (P_r - \zeta\Theta) \left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A} \right)^2 \right]_{\Sigma}. \quad (364)$$

Usando (324), (325) e (326), obtemos

$$\left(\frac{C'}{B} + \frac{\dot{C}}{A}\right)_\Sigma^2 \approx \left(\sqrt{h} + \epsilon r \dot{f} \frac{\sqrt{h}}{\xi}\right)_\Sigma^2 \approx (h + 2\epsilon r \dot{f})_\Sigma. \quad (365)$$

Assim como usando (328), (331), (344), (349) e (351), encontramos

$$(P_r - \zeta\Theta)_\Sigma = \left(P_{r_0} + \frac{\epsilon(rh' - h + 1)f}{4\pi r^2} - \frac{\epsilon\ddot{f}}{4\pi h}\right)_\Sigma, \quad (366)$$

Desta forma, substituindo (326), (365) e (366) em (364), determinamos

$$\begin{aligned} L_\infty &= 4\pi \left[(r^2 + 2\epsilon r^2 f) \left(P_{r_0} + \frac{\epsilon(rh' - h + 1)f}{4\pi r^2} - \frac{\epsilon\ddot{f}}{4\pi h} \right) (h + 2\epsilon r \dot{f}) \right]_\Sigma \\ &\approx \left[\frac{(\Lambda r^2 + h - rh' - 1)h}{2} + \epsilon r^2 \left(\Lambda h f + \frac{(\Lambda r^2 + h - rh' - 1)\dot{f}}{r} - \ddot{f} \right) \right]_\Sigma. \end{aligned} \quad (367)$$

Segundo a condição de fronteira na hipersuperfície Σ , temos

$$(qB)_\Sigma = (P_r - \zeta\Theta)_\Sigma. \quad (368)$$

Substituindo (325), (330), (343) e (366) em (368), vamos obter

$$\frac{\epsilon h' \dot{f}}{8\pi h}|_\Sigma = P_{r_0}|_\Sigma + \epsilon \left[\frac{(rh' - h + 1)f}{4\pi r^2} - \frac{\ddot{f}}{4\pi h} \right]_\Sigma. \quad (369)$$

Da equação (369), podemos concluir que

$$P_{r_0}|_\Sigma = 0, \quad (370)$$

$$\frac{h'\dot{f}}{2h}|_{\Sigma} = \left[\frac{(rh' - h + 1)f}{r^2} - \frac{\ddot{f}}{h} \right]_{\Sigma}. \quad (371)$$

Baseado em (349) e (370), encontramos a seguinte relação:

$$\Lambda = \left[\frac{rh' - h + 1}{r^2} \right]_{\Sigma}. \quad (372)$$

Logo, substituindo (372) em (371), temos

$$\frac{h'\dot{f}}{2h}|_{\Sigma} = \Lambda f - \frac{\ddot{f}}{h}|_{\Sigma} \Rightarrow \left[\ddot{f} - \frac{h'\dot{f}}{2} + \Lambda hf \right]_{\Sigma} = 0. \quad (373)$$

Resolvendo a equação (373), determinamos $f(t)$ como

$$f(t) = \left[c_1 e^{(h' + \sqrt{-16\Lambda h + h'^2})t/4} + c_2 e^{(h' - \sqrt{-16\Lambda h + h'^2})t/4} \right]_{\Sigma}, \quad (374)$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

O próximo passo é analisarmos o comportamento desta função $f(t)$, impondo as condições adequadas à situação de interesse, ou seja, aquelas que levam à contração da fonte a partir de uma dada configuração inicial. Para isso precisamos escolher uma configuração inicial. Optamos por utilizar a solução estática baseada no perfil de densidade de Stewart, obtida na seção 5.2, que foi a que se mostrou mais rica e interessante, tanto por admitir um maior intervalo para a constante cosmológica (desde valores negativos até valores positivos, passado pelo zero inclusive), quanto por admitir parcialmente energia escura em sua composição.

5.2.1 Modelo com a configuração inicial obtida a partir da densidade de Stewart

Considerando a solução obtida na seção 5.2, obtemos

$$h(\delta) = 1 - 3\gamma\delta^2 \left(1 - \frac{\delta^2}{3}\right) - \Lambda r_\Sigma^2 \delta^2 \left(1 - \frac{2\delta^2}{3}\right), \quad (375)$$

$$h'(\delta) = -\frac{6\gamma\delta}{r_\Sigma} \left(1 - \frac{2\delta^2}{3}\right) - 2\Lambda r_\Sigma \delta \left(1 - \frac{4\delta^2}{3}\right), \quad (376)$$

$$h''(\delta) = -\frac{6\gamma}{r_\Sigma^2} (1 - 2\delta^2) - 2\Lambda (1 - 4\delta^2), \quad (377)$$

onde $\gamma = \frac{M_0}{r_\Sigma}$, $\delta = \frac{r}{r_\Sigma}$ e $\frac{d}{dr} = \frac{1}{r_\Sigma} \frac{d}{d\delta}$ e lembrando que na hipersuperfície Σ temos $\delta = 1$.

Desse modo, nos valendo das equações (375), (376) e (377), vamos encontrar

$$h(\delta_\Sigma) = 1 - 2\gamma - \frac{\Lambda r_\Sigma^2}{3}, \quad (378)$$

$$h'(\delta_\Sigma) = -\frac{2\gamma}{r_\Sigma} + \frac{2\Lambda r_\Sigma}{3}, \quad (379)$$

$$h''(\delta_\Sigma) = \frac{6\gamma}{r_\Sigma^2} + 6\Lambda. \quad (380)$$

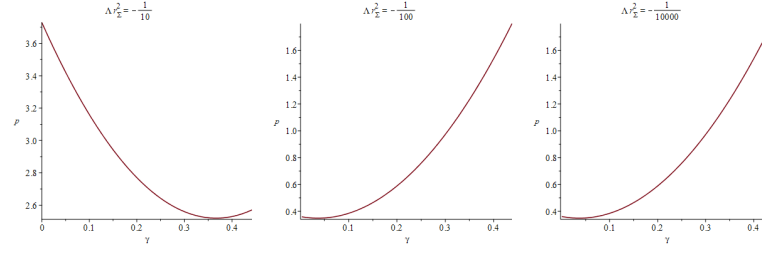
Substituindo (378) e (379) em (374), encontramos

$$f(t) = c_1 e^{\omega_1 t/6r_\Sigma} + c_2 e^{\omega_2 t/6r_\Sigma}, \quad (381)$$

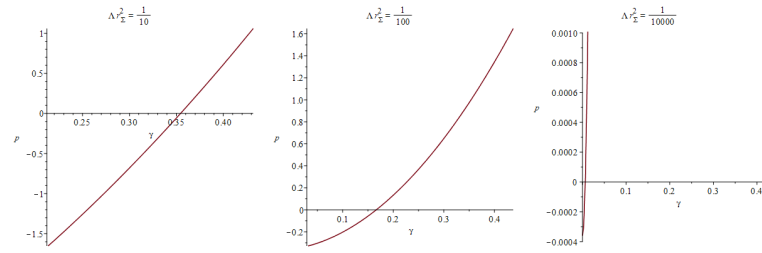
onde

$$\omega_1 = \Lambda r_\Sigma^2 + \sqrt{p} - 3\gamma, \quad (382)$$

$$\omega_2 = \Lambda r_\Sigma^2 - \sqrt{p} - 3\gamma, \quad (383)$$

Figura 19 - p para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$ 

Fonte: O autor, 2020.

Figura 20 - p para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$ 

Fonte: O autor, 2020.

sendo

$$p = 13\Lambda^2 r_\Sigma^4 + (66\gamma - 36)\Lambda r_\Sigma^2 + 9\gamma^2. \quad (384)$$

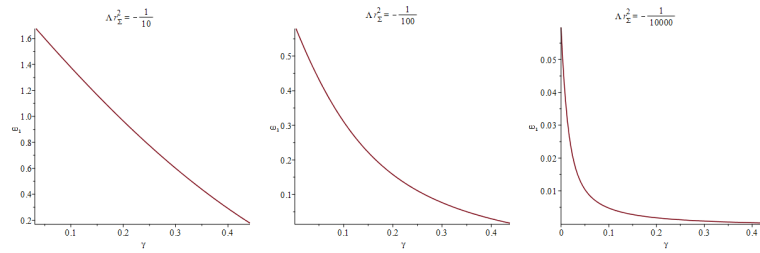
Para que ω_1 e ω_2 sejam reais, devemos ter $p \geq 0$. Assim, nas figuras (19) e (20) atribuímos a Λr_Σ^2 certos valores contidos na tabela (2), e analisamos intervalos de γ que abrangem aqueles em que todas as condições de energia são satisfeitas e os quais só a condição de energia forte efetiva é violada.

Na figura (19), podemos ver que para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$, temos $p > 0$ para os três valores atribuídos a Λr_Σ^2 . Por outro lado, na figura (20), é possível notar que há certos valores de γ em que p é negativo para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$. Desta forma, para $\Lambda r_\Sigma^2 = 10^{-1}$, $\Lambda r_\Sigma^2 = 10^{-2}$ e $\Lambda r_\Sigma^2 = 10^{-4}$, temos que $\gamma > 0,3544$, $\gamma > 0,1663$ e $\gamma > 0,6288 \times 10^{-2}$, respectivamente.

O intervalo de γ nas figuras (21) e (23) são os mesmos daquele usado em (19). Já o intervalo das figuras (22) e (24), além dos valores da tabela (2), também leva em consideração o limite inferior de γ obtido na análise do valor de p , representado pela figura (20).

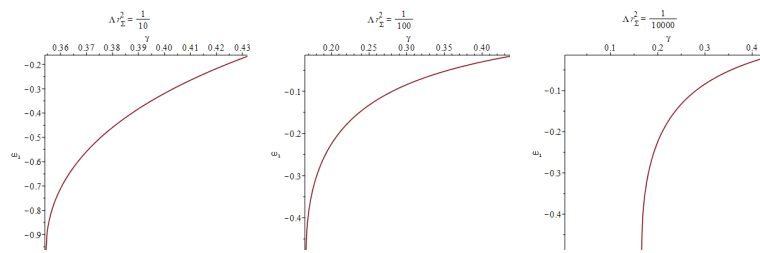
Para recuperarmos a solução estática no instante inicial, em que temos $f(t) = 0$ quando $t \rightarrow -\infty$, a partir de (381) devemos impor que tanto ω_1 quanto ω_2 sejam não negativos. Dessa maneira, das figuras (21)–(24), devemos ter $\Lambda < 0$. Além disso, também desejamos que $\dot{f}(t) < 0$, de tal modo que a evolução da configuração inicial descreva uma

Figura 21 - ω_1 para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$



Fonte: O autor, 2020.

Figura 22 - ω_1 para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$



Fonte: O autor, 2020.

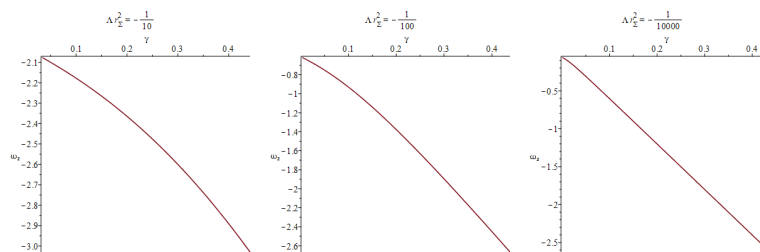
contração. Então, a equação (381) pode ser reescrita como

$$f(t) = -C_1 e^{\omega_1 t / 6r_\Sigma}, \tag{385}$$

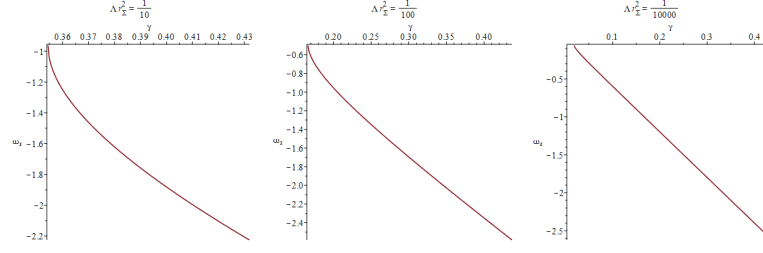
onde $C_1 = -c_1 > 0$ e fizemos $c_2 = 0$.

Desse modo, suas derivadas são dadas por

Figura 23 - ω_2 para $\Lambda r_\Sigma^2 < 0$



Fonte: O autor, 2020.

Figura 24 - ω_2 para $\Lambda r_\Sigma^2 > 0$ 

Fonte: O autor, 2020.

$$\dot{f}(t) = -\frac{C_1 \omega_1 e^{\omega_1 t/6r_\Sigma}}{6r_\Sigma}, \quad (386)$$

$$\ddot{f}(t) = -\frac{C_1 \omega_1^2 e^{\omega_1 t/6r_\Sigma}}{36r_\Sigma^2}. \quad (387)$$

Portanto, substituindo (385) em (361), obtemos

$$m = [r\gamma]_\Sigma + \epsilon \left[\frac{C_1 r e^{\omega_1 t/6r} (\Lambda r^2 - 3\gamma)}{3} \right]_\Sigma. \quad (388)$$

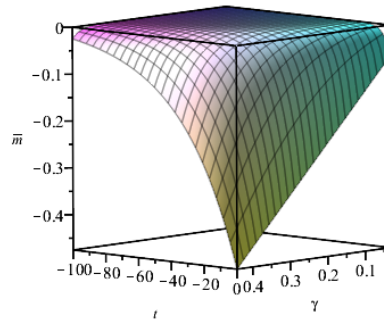
sendo

$$m_0 = [r\gamma]_\Sigma = M, \quad (389)$$

$$\bar{m} = \left[\frac{C_1 r e^{\omega_1 t/6r} (\Lambda r^2 - 3\gamma)}{3} \right]_\Sigma. \quad (390)$$

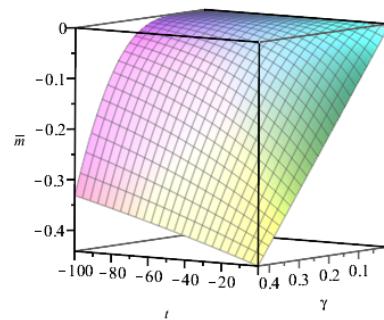
Para podermos analisar graficamente o comportamento de \bar{m} ao longo do tempo, no intervalo da compacticidade γ que compreende aquele em que todas as condições de energia são satisfeitas e aquele no qual só a condição de energia forte efetiva é violada, dados pela tabela (2), tomaremos $r_\Sigma = 1$ e $C_1 = 1$ por simplicidade. Pelas figuras (25)–(27), podemos notar que quanto maior é a compacticidade γ maior será a perda de massa. As figuras (25) e (26) indicam que a perda de massa se acentua com o decorrer do tempo, mas cada vez menos fortemente a medida que o valor absoluto de Λ decresce. Já a figura (27) mostra que essa mudança não depende do tempo.

Figura 25 - Gráfico de \bar{m} com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-1}$



Fonte: O autor, 2020.

Figura 26 - Gráfico de \bar{m} com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-2}$



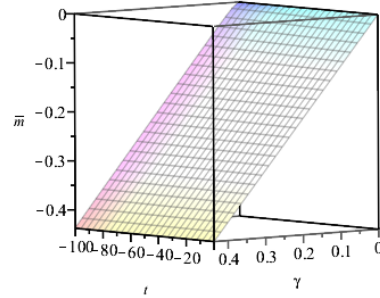
Fonte: O autor, 2020.

Usando (386), o escalar de expansão (344) pode ser reescrito como

$$\bar{\Theta} = \frac{3\sqrt{\hbar}\dot{f}}{\xi} = -\frac{C_1\omega_1\sqrt{\hbar}e^{\omega_1 t/3r_\Sigma}}{2r_\Sigma\xi}. \quad (391)$$

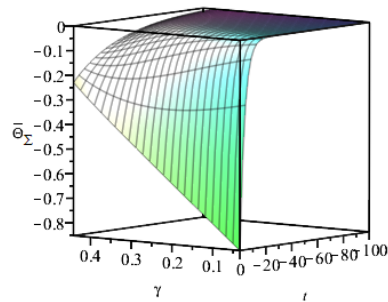
Observando as equações (382) e (391), podemos notar que quando $\Lambda = 0$, temos $\bar{\Theta} = 0$. Isso indica que o objeto compacto mantém seu volume constante nesse caso. Para determinar se o objeto compacto se expande ($\bar{\Theta} > 0$) ou se contrai ($\bar{\Theta} < 0$) em casos com

Figura 27 - Gráfico de \bar{m} com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-4}$



Fonte: O autor, 2020.

Figura 28 - Gráfico de $\bar{\Theta}_\Sigma$ com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-1}$



Fonte: O autor, 2020.

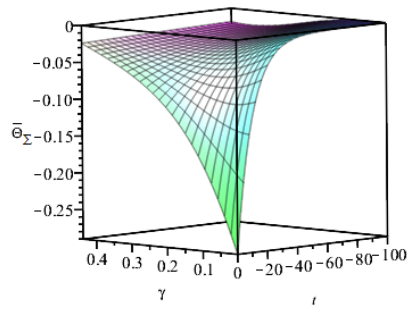
$\Lambda < 0$, podemos tomar $\bar{\Theta}$ na hipersuperfície Σ , isto é,

$$\bar{\Theta}_\Sigma = -\frac{C_1 \omega_1 e^{\omega_1 t / 3r_\Sigma}}{2r_\Sigma \sqrt{\xi}}. \quad (392)$$

sendo $h(r_\Sigma) = \xi$.

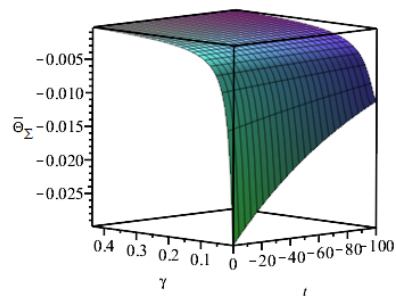
Nas figuras (28)-(30), também fizemos $r_\Sigma = 1$ e $C_1 = 1$. Vemos que, para a nossa escolha de colapso, que implicou em $\Lambda < 0$, a expansão é sempre negativa e crescente em valor absoluto.

Figura 29 - Gráfico de $\bar{\Theta}_\Sigma$ com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-2}$



Fonte: O autor, 2020.

Figura 30 - Gráfico de $\bar{\Theta}_\Sigma$ com $\Lambda r_\Sigma^2 = -10^{-4}$



Fonte: O autor, 2020.

CONCLUSÃO

Nesta tese, partindo de uma métrica que descreve um espaço-tempo esféricamente simétrico em coordenadas comóveis, analisamos modelos de objetos compactos com constante cosmológica e pressões anisotrópicas. Encontramos três soluções estáticas, uma delas com a hipótese de pressão radial nula e outras duas que consideram perfis de densidade já apresentados na literatura, como o perfil proposto por Stewart e o proposto por Durgapal e Bannerji. Nos casos estáticos, o espaço-tempo externo à estrela é descrito pela métrica de Schwarzschild-de Sitter, uma solução de vácuo com constante cosmológica. Analisamos o caso geral e, posteriormente, abordamos seus casos particulares.

No primeiro deles, em que nós fizemos uso do perfil de densidade de Stewart, mostramos que estrelas com energia escura são favorecidas por razões massa-raio, ou compactidades, pequenas. Para $\Lambda \geq 0$, quanto maior Λ , menor será o intervalo de γ no qual encontramos modelos que satisfazem todas as condições de energia e também aquele para o qual apenas a condição de energia forte efetiva é violada. Isso pode ser interpretado como se a repulsão em virtude do valor positivo de Λ demandasse uma compactidade maior para balancear sua configuração. Por outro lado, para $\Lambda < 0$, quanto maior for o valor absoluto de Λ , maior será o intervalo de γ que satisfaz todas as condições de energia, fazendo com que intervalos cada vez menores de γ levem a modelos que violam a condição de energia forte efetiva. Isso indica que valores negativos para Λ desfavorecem a presença dessa energia escura, minimizando o efeito repulsivo da gravitação, como era de se esperar. Em todos os casos, é curioso notar que a energia escura, efetiva ou apenas do fluido, quando presente, aparece concentrada na borda do objeto compacto.

No segundo caso particular analisado, em que foi usado o perfil de densidade de Durgapal e Bannerji, observamos que para que todas as condições de energia sejam satisfeitas, a constante cosmológica não deve ser positiva. Além disso, a compactidade não pode exceder de $15/64$, e nem há qualquer valor de γ que admita energia escura em qualquer região do objeto compacto.

A solução em que há a anulação da pressão da radial, o equilíbrio decorre exclusivamente da pressão tangencial e da constante cosmológica, que deve ser negativa. Nesse caso, para que todas as condições de energia sejam respeitadas, a compactidade deve ter um intervalo de $0 < \gamma < 4/9$.

No caso dinâmico, introduzimos uma dependência temporal na métrica, com a imposição de separação de variáveis e da anulação do cisalhamento, de modo a facilitar a busca por soluções analíticas exatas. Na região interna à estrela, adotamos uma métrica que permitia separação de variáveis e usamos um tensor energia-momento que incluía fluxo de calor radial, viscosidade volumar e de cisalhamento. Fora da estrela, usamos a métrica de Vaidya-de Sitter e um tensor energia-momento contendo termo ligado ao campo de

radiação. Aqui não foi possível obter uma solução exata, de modo que todas as grandezas físicas obtidas ficaram expressas em termos de $f(t)$, que por sua vez pode ou não depender de Λ . Entretanto, uma solução aproximada foi obtida, através da introdução de uma perturbação dinâmica linear na configuração estática inicial. Embora tal perturbação seja ainda muito particular, e talvez por isso mesmo, evidencia a necessidade de uma constante cosmológica negativa para que o processo dinâmico ocorra, com a perda de massa crescente com a compacticidade γ . Além disso, podemos ver também que a perda de massa evolui no tempo mais suavemente quanto maior for o valor absoluto de Λ .

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, [S.l.], v. 119, n. 16, p. 161101, 2017.
- ABBOTT, B. P. et al. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *The Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 848, n. 2, p. L12, 2017.
- ABBOTT, R. et al. GW190814: Gravitational waves from the coalescence of a 23 solar mass black hole with a 2.6 solar mass compact object. *The Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 896, n. 2, p. L44, 2020.
- ARMENDARIZ-PICON, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. *Physical Review Letters*, [S.l.], v. 85, n. 21, p. 4438–4441, 2000.
- AZRI, H.; BOUNAMES, A. Cosmological consequences of a variable cosmological constant model. *International Journal of Modern Physics D*, [S.l.], v. 26, n. 7, p. 1750060, 2017.
- BERTOLAMI, O.; PÁRAMOS, J. Chaplygin dark star. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 72, p. 123512, 2005.
- BHAR, P.; GOVENDER, M.; SHARMA, R. Anisotropic stars obeying chaplygin equation of state. *Pramana – Journal of Physics*, [S.l.], v. 90, p. 1–9, 2018.
- BLANCO-PÉREZ, C.; FERNÁNDEZ-GUERRERO, A. Expanding universe with a variable cosmological term. *Zeitschrift für Naturforschung A*, [S.l.], v. 70, n. 11, p. 905–911, 2015.
- BORDBAR, G. H.; HENDI, S. H.; PANAHA, B. E. Neutron stars in Einstein-lambda gravity: the cosmological constant effects. *Eur. Phys. J. Plus*, [S.l.], v. 131, p. 315, 2016.
- BOWERS, R. L.; LIANG, E. P. T. The gravitational field of a radiating star. *Astrophys. J.*, [S.l.], v. 188, p. 657–665, 1974.
- CAHILL, M. E.; MCVITTIE, G. C. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. i. general theory. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.], v. 11, n. 4, p. 1382–1391, 1970.
- CATTOEN, C.; FABER, T.; VISSER, M. Gravastars must have anisotropic pressures. *Class. Quantum Grav.*, [S.l.], v. 22, n. 20, p. 4189–4202, 2005.
- CHAN, R. Collapse of a radiating anisotropic star. *Astrophysics and Space Science*, [S.l.], v. 206, p. 219–234, 1993.
- CHAN, R. Radiating gravitational collapse with shear viscosity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, [S.l.], v. 316, p. 588–604, 2000.
- CHAN, R. Radiating gravitational collapse with shearing motion and bulk viscosity. *Astronomy and Astrophysics*, [S.l.], v. 368, p. 325–334, 2001.

- CHAN, R.; HERRERA, L.; SANTOS, N. O. Dynamical instability for radiating anisotropic collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.l.], v. 265, p. 533–544, 1993.
- CHAN, R.; HERRERA, L.; SANTOS, N. O. Dynamical instability for shearing viscous collapse. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, [S.l.], v. 267, p. 637–646, 1994.
- CHAN, R. et al. Heat flow and dynamical instability in spherical collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.l.], v. 239, p. 91–97, 1989.
- COSENZA, M. et al. Some models of anisotropic spheres in general relativity. *The Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 22, n. 1, p. 118–125, 1981.
- CURIEL, E. A primer on energy conditions. In: LEHMKUHL, D.; SCHIEMANN, G.; SCHOLZ, E. (Ed.). *Towards a Theory of Spacetime Theories*. Nova York: Birkhäuser, 2017. p. 43–104.
- DARMOIS, G. *Memórial des Sciences Mathematiques*. Paris: Gauthier-Villars, 1927. v. 25. 48 p.
- DE SITTER, W. On Einstein's theory of gravitation, and its astronomical consequences. Third paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.l.], v. 78, p. 3–28, 1917.
- DESHINGKAR, S. S. et al. Gravitational collapse and the cosmological constant. *Physical Review D*, [S.l.], v. 63, p. 124005, 2001.
- DEV, K.; GLEISER, M. Anisotropic stars: Exact solutions. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.], v. 34, n. 11, p. 1793–1818, 2002.
- DEV, K.; GLEISER, M. Anisotropic stars ii: Stability. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.], v. 35, n. 8, p. 1435–1457, 2003.
- DI PRISCO, A. et al. Nonadiabatic charged spherical gravitational collapse. *Physical Review D*, [S.l.], v. 76, p. 064017, 2007.
- DURGAPAL, M. C.; BANNERJI, R. New analytical stellar model in general relativity. *Physical Review D*, [S.l.], v. 27, n. 2, p. 328–331, 1983.
- EINSTEIN, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, [S.l.], p. 142–152, 1917.
- FERREIRA, P. G. *A Teoria Perfeita: Uma biografia da relatividade*. 1. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2014. 375 p.
- FRIEDMANN, A. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, [S.l.], v. 10, p. 377–386, 1922.
- GLASS, E. N. Shear-free collapse with heat flow. *Phys. Lett. A*, [S.l.], v. 86, p. 351–352, 1981.
- GONÇALVES, S. Naked singularities in Tolman–Bondi–de Sitter collapse. *Physical Review D*, [S.l.], v. 63, p. 064017, 2001.

- GOVENDER, M.; THIRUKKANESH, S. Dissipative collapse in the presence of λ . *Int. J. Theor. Phys.*, [S.l.], v. 48, p. 3558–3566, 2009.
- GRIFFITHS, J. B.; PODOLSKÝ, J. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. 1. ed. Nova York: Cambridge University Press, 2009. 525 p.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1973. 391 p.
- HERNÁNDEZ, H.; NÚÑEZ, L. A. Nonlocal equation of state in anisotropic static fluid spheres in general relativity. *Canadian Journal of Physics*, Canadá, v. 82, p. 29–51, 2004.
- HERRERA, L. Physical causes of energy density inhomogenization and stability of energy density homogeneity in relativistic self-gravitating fluids. *International Journal of Modern Physics D*, [S.l.], v. 20, n. 9, p. 1689–1703, 2011.
- HERRERA, L.; BARRETO, W. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. *Physical Review D*, [S.l.], v. 88, n. 0, p. 084022, 2013.
- HERRERA, L.; DENMAT, G. L.; SANTOS, N. O. Dynamical instability for non-adiabatic spherical collapse. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, [S.l.], v. 237, p. 257–268, 1989.
- HERRERA, L.; RUGGERI, G. J.; WITTEN, L. Adiabatic contraction of anisotropic spheres in general relativity. *The Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 234, p. 1094–1099, 1979.
- HORVAT, D.; ILIJIC, S.; MARUNOVIC, A. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, [S.l.], v. 28, n. 2, p. 025009, 2010.
- HUBBLE, E. P. Extragalactic nebulae. *Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 64, p. 321–369, 1926.
- HUBBLE, E. P. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, [S.l.], v. 15, p. 168–173, 1929.
- HUMASON, M. L. The large radial velocity of N. G. C. 7619. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, [S.l.], v. 15, p. 167–168, 1929.
- ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B*, [S.l.], v. 44, n. 1, p. 1–14, 1966.
- ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Il Nuovo Cimento B*, [S.l.], v. 48, n. 2, p. 463, 1967.
- KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, [S.l.], v. 511, p. 265–268, 2001.
- KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. F. O. *Astronomia e Astrofísica*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. 557 p.

- KOLASSIS, C. A.; SANTOS, N. O.; TSOUBELIS, D. Energy conditions for an imperfect fluid. *Classical and Quantum Gravity*, [S.l.], v. 5, n. 10, p. 1329–1338, 1988.
- LAKE, K. Gravitational collapse of dust with a cosmological constant. *Physical Review D*, [S.l.], v. 62, p. 027301, 2000.
- LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques. *Annals of the Scientific Society of Brussels*, [S.l.], v. 47A, p. 49–59, 1927.
- MALAFARINA, D.; JOSHI, P. S. Gravitational collapse with tangential pressure. *International Journal of Modern Physics D*, [S.l.], v. 20, n. 4, p. 463–495, 2011.
- MARKOVIC, D.; SHAPIRO, S. Gravitational collapse with a cosmological constant. *Physical Review D*, [S.l.], v. 61, p. 084029, 2000.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. São Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. 1278 p.
- NETO, G. P. S. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 40, n. 4, 2018.
- PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, [S.l.], v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999.
- PINHEIRO, G.; CHAN, R. Radiating shear-free gravitational collapse with charge. *Gen Relativ Gravit*, [S.l.], v. 45, p. 243–261, 2013.
- PODOLSKÝ, J. The structure of the extreme Schwarzschild-de Sitter space-time. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.], v. 31, p. 1703–1725, 1999.
- REDDY, K. P.; GOVENDER, M.; MAHARAJ, M. D. Impact of anisotropic stresses during dissipative gravitational collapse. *General Relativity and Gravitation*, [S.l.], v. 47, p. 35, 2015.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, [S.l.], v. 116, n. 3, p. 1009–1038, 1998.
- RUDERMAN, M. Pulsars: Structure and dynamics. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, [S.l.], v. 10, p. 427–476, 1972.
- SANTOS, N. O. Non-adiabatic radiating collapse. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, [S.l.], v. 216, p. 403–410, 1985.
- SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, Berlin, v. 1916, p. 424–434, 1916.
- SOARES, D. O universo estático de Einstein. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, [S.l.], v. 34, n. 1, p. 1302, 2012.
- STEWART, B. W. Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity. *J. Phys. A: Math. Gen.*, [S.l.], v. 15, p. 2419–2427, 1982.

- TSUJIKAWA, S. Quintessence: a review. *Class. Quant. Grav.*, [S.l.], v. 30, p. 214003, 2013.
- VAIDYA, P. C. The gravitational field of a radiating star. *Proc. Indian Acad. Sci.*, [S.l.], A33, p. 260–276, 1951.
- VAIDYA, P. C.; SHAH, K. B. A radiating mass particle in an expansive universe. *Proc. Nat. Inst. Sci.*, [S.l.], v. 23, p. 534–539, 1957.
- VENERONI, L. S. M.; BRAZ, A.; SILVA, M. F. A. A neutron star model with dark energy crust. *ArXiv:gr-qc*, [S.l.], p. 24, 2021.
- VENERONI, L. S. M.; SILVA, M. F. A. Gravitational collapse for a radiating anisotropic fluid. *Int. J. Mod. Phys. D*, [S.l.], v. 28, n. 2, p. 1950034, 2019.
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, Austin, v. 61, p. 1–23, 1989.
- XU, L.; LU, J.; LI, W. Time variable cosmological constants from the age of universe. *Physics Letters B*, [S.l.], v. 690, n. 4, p. 333–336, 2010.

APÊNDICE A – SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Os símbolos de Christoffel do segundo tipo são coeficientes de conexão de Levi-Civita em base coordenada que, definidos em uma variedade quadridimensional, devem satisfazer:

$$\nabla_b \mathbf{e}_a = \Gamma_{ab}^0 \mathbf{e}_0 + \Gamma_{ab}^1 \mathbf{e}_1 + \Gamma_{ab}^2 \mathbf{e}_2 + \Gamma_{ab}^3 \mathbf{e}_3 = \Gamma_{ab}^d \mathbf{e}_d, \quad (393)$$

sendo ∇_b a conexão de Levi-Civita de uma variedade diferenciável V tomada na direção da coordenada \mathbf{e}_b ($\nabla_b \equiv \nabla_{\mathbf{e}_b}$), de modo que $\mathbf{e}_b = \partial_b$ seja uma base coordenada local (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973). No contexto da relatividade geral, ao qual nos limitaremos no restante deste apêndice, a conexão de Levi-Civita é usualmente chamada de derivada covariante, que em termos da métrica, pode ser expressa como

$$\nabla_b g_{ac} = \partial_b g_{ac} - g_{mc} \Gamma_{ab}^m - g_{am} \Gamma_{cb}^m. \quad (394)$$

Nos valendo da invariância do tensor métrico em relação à derivada covariante, isto é, $\nabla_b g_{ac} = 0$, podemos obter a seguinte relação

$$\partial_b g_{ac} = g_{mc} \Gamma_{ab}^m + g_{am} \Gamma_{cb}^m. \quad (395)$$

Permutando ciclicamente uma e duas vezes ($a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$), respectivamente encontramos

$$\partial_c g_{ba} = g_{ma} \Gamma_{bc}^m + g_{bm} \Gamma_{ac}^m, \quad (396)$$

$$\partial_a g_{cb} = g_{mb} \Gamma_{ca}^m + g_{cm} \Gamma_{ba}^m. \quad (397)$$

Sabendo que tanto os símbolos de Christoffel quanto o tensor métrico são simétricos em seus índices inferiores, isto é, $\Gamma_{ab}^m = \Gamma_{ba}^m$ e $g_{ab} = g_{ba}$, usando (395), (396) e (397),

podemos obter

$$2g_{mc}\Gamma_{ab}^m = g_{ac,b} + g_{cb,a} - g_{ba,c}, \quad (398)$$

que usando g^{dc} , e nos valendo da relação $g^{dc}g_{mc} = \delta_m^d$, encontramos

$$\Gamma_{ab}^d = \frac{1}{2}g^{dc}(\partial_b g_{ac} + \partial_a g_{cb} - \partial_c g_{ba}). \quad (399)$$

.1 Caso dinâmico

O tensor métrico covariante do espaço-tempo interno é dado por

$$g_{\alpha\beta}^- = \begin{pmatrix} -\frac{\xi^2}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) f \end{pmatrix}. \quad (400)$$

Já as componentes contravariantes são representadas por

$$g_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{h}{\xi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta) f} \end{pmatrix}. \quad (401)$$

Para o espaço-tempo interno, os símbolos de Christoffel não nulos são

$$(\Gamma_{01}^0)_- = (\Gamma_{10}^0)_- = -\frac{h'}{2h}, \quad (402)$$

$$(\Gamma_{11}^0)_- = \frac{\dot{f}}{2\xi^2}, \quad (403)$$

$$(\Gamma_{22}^0)_- = \frac{r^2 h \dot{f}}{2\xi^2}, \quad (404)$$

$$(\Gamma_{33}^0)_- = \frac{r^2 h \operatorname{sen}^2(\theta) \dot{f}}{2\xi^2}, \quad (405)$$

$$(\Gamma_{00}^1)_- = -\frac{\xi^2 h'}{2hf}, \quad (406)$$

$$(\Gamma_{10}^1)_- = (\Gamma_{01}^1)_- = \frac{\dot{f}}{2f}, \quad (407)$$

$$(\Gamma_{11}^1)_- = -\frac{h'}{2h}, \quad (408)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_- = -rh, \quad (409)$$

$$(\Gamma_{33}^1)_- = -rh \operatorname{sen}^2(\theta), \quad (410)$$

$$(\Gamma_{02}^2)_- = (\Gamma_{20}^2)_- = \frac{\dot{f}}{2f}, \quad (411)$$

$$(\Gamma_{12}^2)_- = (\Gamma_{21}^2)_- = \frac{1}{r}, \quad (412)$$

$$(\Gamma_{33}^2)_- = -\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta), \quad (413)$$

$$(\Gamma_{03}^3)_- = (\Gamma_{30}^3)_- = \frac{\dot{f}}{2f}, \quad (414)$$

$$(\Gamma_{13}^3)_- = (\Gamma_{31}^3)_- = \frac{1}{r}, \quad (415)$$

$$(\Gamma_{23}^3)_- = (\Gamma_{32}^3)_- = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}. \quad (416)$$

Já para o espaço-tempo externo, os tensores covariante e contravariantes são dados, respectivamente, por

$$g_{\alpha\beta}^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\left(1 - \frac{2m(v)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (417)$$

$$g_+^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 - \frac{2m(v)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (418)$$

Para o espaço-tempo externo, os símbolos de Christoffel não nulos são

$$(\Gamma_{00}^0)_+ = \frac{\Lambda r}{3} - \frac{m(v)}{r^2}, \quad (419)$$

$$(\Gamma_{22}^0)_+ = r, \quad (420)$$

$$(\Gamma_{22}^0)_+ = r \text{sen}^2(\theta), \quad (421)$$

$$(\Gamma_{00}^1)_+ = -\frac{1}{\mathbf{r}} \frac{dm(v)}{dv} + \left(\frac{m(v)}{\mathbf{r}^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}}{3} \right) \left(1 - \frac{2m(v)}{\mathbf{r}} - \frac{\Lambda \mathbf{r}^2}{3} \right), \quad (422)$$

$$(\Gamma_{10}^1)_+ = (\Gamma_{01}^1)_+ = \frac{m(v)}{\mathbf{r}^2} - \frac{\Lambda \mathbf{r}}{3}, \quad (423)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_+ = 2m(v) - \mathbf{r} + \frac{\Lambda \mathbf{r}^3}{3}, \quad (424)$$

$$(\Gamma_{33}^1)_+ = \left(2m(v) - \mathbf{r} + \frac{\Lambda \mathbf{r}^3}{3} \right) \text{sen}^2(\theta). \quad (425)$$

.2 Caso estático

O tensor métrico covariante para o espaço-tempo interior, no caso estático é dado por

$$g_{\alpha\beta}^- = \begin{pmatrix} -\frac{\xi^2}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (426)$$

As componentes contravariantes são representadas por

$$g_{\alpha\beta}^+ = \begin{pmatrix} -\frac{h}{\xi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (427)$$

Dentre as componentes da conexão analisadas no espaço-tempo interno, as não

nulas são

$$(\Gamma_{01}^0)_- = (\Gamma_{10}^0)_- = -\frac{h'}{2h}, \quad (428)$$

$$(\Gamma_{00}^1)_- = -\frac{\xi^2 h'}{2h}, \quad (429)$$

$$(\Gamma_{11}^1)_- = -\frac{h}{2h}, \quad (430)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_- = -r h, \quad (431)$$

$$(\Gamma_{33}^1)_- = -r \operatorname{sen}^2(\theta) h, \quad (432)$$

$$(\Gamma_{12}^2)_- = (\Gamma_{21}^2)_- = \frac{1}{r}, \quad (433)$$

$$(\Gamma_{33}^2)_- = -\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta), \quad (434)$$

$$(\Gamma_{13}^3)_- = (\Gamma_{31}^3)_- = \frac{1}{r}, \quad (435)$$

$$(\Gamma_{23}^3)_- = (\Gamma_{32}^3)_- = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}. \quad (436)$$

Por outro lado, para o espaço-tempo externo, os tensores métricos covariante e

contravariantes são dados, respectivamente, por

$$g_{\alpha\beta}^+ = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (437)$$

$$g_+^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (438)$$

Assim, os símbolos de Christoffel não nulos podem ser expressos como

$$(\Gamma_{01}^0)_+ = (\Gamma_{10}^0)_+ = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{\Lambda r}{3}\right), \quad (439)$$

$$(\Gamma_{00}^1)_+ = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) \left(\frac{M}{r^2} - \frac{\Lambda r}{3}\right), \quad (440)$$

$$(\Gamma_{11}^1)_+ = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{\Lambda r}{3}\right), \quad (441)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_+ = -r \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right), \quad (442)$$

$$(\Gamma_{33}^1)_+ = -r \text{sen}^2(\theta) \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right), \quad (443)$$

$$(\Gamma_{12}^2)_+ = (\Gamma_{21}^2)_+ = \frac{1}{r}, \quad (444)$$

$$(\Gamma_{33}^2)_+ = -\text{sen}(\theta) \cos(\theta), \quad (445)$$

$$(\Gamma_{13}^3)_+ = (\Gamma_{31}^3)_+ = \frac{1}{r}, \quad (446)$$

$$(\Gamma_{23}^3)_+ = (\Gamma_{32}^3)_+ = \frac{\cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}. \quad (447)$$

APÊNDICE B – CONDIÇÕES DE JUNÇÃO

Dada uma curva parametrizada por u em uma variedade quadridimensional V de classe C^4 , a derivada absoluta de uma função vetorial \mathbf{A} definida nesta curva é dada por

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u}\right)^\alpha \equiv \frac{DA^\alpha}{Du} \equiv \frac{\partial A^\alpha}{\partial u} + A^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \frac{dx^\mu}{du}. \quad (448)$$

Seja Σ uma hipersuperfície suave em V , e $\boldsymbol{\eta}$ um vetor unitário normal à Σ , de modo que

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) = \begin{cases} +1 & (\boldsymbol{\eta} \text{ tipo-espaço}) \\ -1 & (\boldsymbol{\eta} \text{ tipo-tempo}) \end{cases}. \quad (449)$$

O deslocamento infinitesimal ds dotado de três vetores tangenciais linearmente independentes \mathbf{e}_i com coordenadas intrínsecas ζ^i pode ser expresso como

$$ds = \mathbf{e}_i d\zeta^i. \quad (450)$$

Os vetores de base estão relacionados com o vetor normal do seguinte modo

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_j = 0. \quad (451)$$

Introduzindo coordenadas χ^α na variedade V , de modo que as equações paramétricas de Σ ficam dadas por

$$\chi^\alpha = f^\alpha(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3), \quad (452)$$

onde f^α são funções C^4 , isto é, $\alpha = 0,1,2,3$.

Assim, derivando as componentes de (450) em relação à χ^α , vamos obter

$$e_i^\alpha = \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial \zeta^i}. \quad (453)$$

Aplicando o procedimento realizado em (448) para (453), temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} \right)^\alpha &= \frac{\partial e_i^\alpha}{\partial \zeta^j} + e_i^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \frac{d\chi^\mu}{d\zeta^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \left(\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial \zeta^i} \right) + \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \zeta^i} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \zeta^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \left(\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial \zeta^j} \right) + \frac{\partial \chi^\lambda}{\partial \zeta^j} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \zeta^i} \\ &= \frac{\partial e_j^\alpha}{\partial \zeta^i} + e_j^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \frac{\partial \chi^\mu}{\partial \zeta^i} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \zeta^i} \right)^\alpha. \end{aligned} \quad (454)$$

Levando em consideração (454), os símbolos de Christoffel do primeiro tipo podem ser expressos como

$$\begin{aligned} \Gamma_{kij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial \zeta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \zeta^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i)}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j)}{\partial \zeta^i} - \frac{\partial (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)}{\partial \zeta^k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \zeta^j} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \zeta^i} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \zeta^i} - \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^k} \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \zeta^k} \right) \\ &= \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j}. \end{aligned} \quad (455)$$

Chamemos de \mathbf{A} qualquer vetor pertencente à Σ definido por

$$\mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k. \quad (456)$$

Daí,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial (A^k \mathbf{e}_k)}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial A^k}{\partial \zeta^j} \mathbf{e}_k + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \zeta^j} A^k. \quad (457)$$

A projeção do vetor $\partial \mathbf{A} / \partial \zeta^j$ sobre Σ (não tangencial) é dada pela derivada covariante intrínseca de \mathbf{A} com relação à ζ^j . Usando as equações (455) e (457), encontramos

$$A_{i;j} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial A_i}{\partial \zeta^j} + A^k \Gamma_{ijk}. \quad (458)$$

Usando o símbolo de Christoffel do segundo tipo, definido por

$$\Gamma_{jk}^i = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \zeta^j}, \quad (459)$$

e também nos valendo de (457), obtemos

$$A_{;j}^i = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial A^i}{\partial \zeta^j} + A^k \Gamma_{kj}^i. \quad (460)$$

O modo como Σ “curva-se” em V é medido pela variação da direção dos vetores normais sobre Σ , dada por

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \zeta^i} = K_i^j \mathbf{e}_j. \quad (461)$$

O tensor de curvatura extrínseca K_{ij} de Σ é definido como

$$\begin{aligned} K_{ij} &= K_i^m g_{jm} = K_i^m \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_j \cdot K_i^m \mathbf{e}_m \\ &= \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \zeta^i}. \end{aligned} \quad (462)$$

Nos valendo da equação (451), podemos demonstrar que o tensor de curvatura

extrínseca é simétrico ($K_{ij} = K_{ji}$), isto é,

$$\frac{\partial(\mathbf{e}_j \cdot \boldsymbol{\eta})}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \zeta^i} \cdot \boldsymbol{\eta} + \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \zeta^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \zeta^i} = -\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \zeta^i} \cdot \boldsymbol{\eta}. \quad (463)$$

Considerando (454) e (462) em (463), temos

$$K_{ij} = -\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial \zeta^i} \cdot \boldsymbol{\eta} = -\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} \cdot \boldsymbol{\eta} = K_{ji}. \quad (464)$$

O vetor $\partial \mathbf{e}_i / \partial \zeta^j$ pode ser decomposto em componentes tangenciais e uma componente normal como

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} = X_{ij}^h \mathbf{e}_h + Y_{ij} \boldsymbol{\eta}. \quad (465)$$

Aplicando \mathbf{e}_k em (465), e considerando (451) e (455)

$$\mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} = X_{ij}^h \underbrace{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_h}_{g_{kh}} + Y_{ij} \underbrace{\mathbf{e}_k \cdot \boldsymbol{\eta}}_0 = A_{kij} = \Gamma_{kij}, \quad (466)$$

que com g^{hk} resulta em

$$X_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h. \quad (467)$$

Na seqüência, o produto de $\boldsymbol{\eta}$ com (465), utilizando (449) e (451), nos fornece

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} = X_{ij}^h \underbrace{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_h}_0 + Y_{ij} \underbrace{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}}_{\varepsilon(\boldsymbol{\eta})} = \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) Y_{ij}, \quad (468)$$

que, considerando a equação (464), nos permite obter

$$Y_{ij} = -\varepsilon(\boldsymbol{\eta}) K_{ij}. \quad (469)$$

Então, substituindo (467) e (469) em (465), vamos obter as equações de Gauss-Weigarten, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \zeta^j} = \mathbf{e}_k \Gamma_{ij}^k - \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) K_{ij} \boldsymbol{\eta}. \quad (470)$$

Usando (460) e (470) em (457), temos

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \zeta^j} = \mathbf{A}_{;j}^i \mathbf{e}_i - \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{A}^i K_{ij} \boldsymbol{\eta}. \quad (471)$$

Definindo $\mathbf{A}(u,v)$ sobre um espaço bidimensional $\chi^\mu = \chi^\mu(u,v)$, as relações de Ricci podem ser expressas como

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \right) \mathbf{A} \right]^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \mathbf{A}^\beta \frac{\partial \chi^\gamma}{\partial u} \frac{\partial \chi^\delta}{\partial v}. \quad (472)$$

Usando as relações de Ricci para \mathbf{e}_i , encontramos

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \zeta^k} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} - \frac{\partial}{\partial \zeta^j} \frac{\partial}{\partial \zeta^k} \right) \mathbf{e}_i \right]^\alpha = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \underbrace{e_i^\beta}_{e_k^\gamma} \underbrace{\frac{\partial \chi^\gamma}{\partial \zeta^k}}_{e_j^\delta}, \quad (473)$$

em que $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ é o tensor de curvatura de Riemann definido em V .

Usando as equações (461) e (470) em (473), obtemos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_i^\beta e_k^\gamma e_j^\delta = \left[(K_{ik;j} - K_{ij;k}) \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} + (K_{ik} K_j^m - K_{ij} K_k^m) \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{e}_m + R_{ikj}^h \mathbf{e}_h \right]_\alpha, \quad (474)$$

sendo $K_{ik;j}$ a derivada covariante da curvatura extrínseca, e R_{ikj}^h o tensor de Riemann definido em Σ , que podem ser expressos, respectivamente, como

$$K_{ik;j} = \frac{\partial K_{ik}}{\partial \zeta^j} - K_{hk} \Gamma_{ij}^h - K_{ih} \Gamma_{kj}^h, \quad (475)$$

$$R_{ikj}^h = \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial \zeta^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial \zeta^j} + \Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^h - \Gamma_{ik}^a \Gamma_{aj}^h. \quad (476)$$

Inserindo e_l^α em (474), que ao considerar (451), nos fornece

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_l^\alpha e_i^\beta e_k^\gamma e_j^\delta = (K_{ik} K_{lj} - K_{ij} K_{lk}) \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) + R_{likj}. \quad (477)$$

Em seguida, utilizando η^α em (474), e nos valendo de (449) e (451), vamos encontrar

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \eta^\alpha e_i^\beta e_k^\gamma e_j^\delta = (K_{ik;j} - K_{ij;k}). \quad (478)$$

As equações (477) e (478) são conhecidas como equações de Gauss-Codazzi para a hipersuperfície Σ .

Usando $g^{ik} g^{lj}$ em (477), encontramos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{ik} g^{lj} e_l^\alpha e_i^\beta e_k^\gamma e_j^\delta = g^{ik} g^{lj} (K_{ik} K_{lj} - K_{ij} K_{lk}) \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) + g^{ij} g^{lk} R_{likj}. \quad (479)$$

Definindo o escalar de curvatura de Ricci em Σ e o escalar oriundo da curvatura extrínseca, respectivamente, como

$${}^{(3)}R = g^{ik} g^{lj} R_{likj}, \quad (480)$$

$$K = g^{ij} K_{ij}, \quad (481)$$

e introduzindo a seguinte relação

$$g^{ik} e_i^\beta e_k^\gamma = g^{\beta\gamma} - \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) \eta^\beta \eta^\gamma, \quad (482)$$

podemos reescrever (479) como

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} [g^{\beta\gamma} - \varepsilon(\boldsymbol{\eta})\eta^\beta\eta^\gamma] [g^{\alpha\delta} - \varepsilon(\boldsymbol{\eta})\eta^\alpha\eta^\delta] = (K^2 - K_{ij}K^{ij}) \varepsilon(\boldsymbol{\eta}) + {}^{(3)}R. \quad (483)$$

Analogamente à (480), podemos definir um escalar de curvatura de Ricci na variedade quadrimensional V , ou seja,

$${}^{(4)}R = g^{\beta\gamma} g^{\alpha\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (484)$$

Assim, usando (484) em (483), determinamos

$${}^{(4)}R - 2\varepsilon(\boldsymbol{\eta})R_{\alpha\delta}\eta^\alpha\eta^\delta = {}^{(3)}R + (K^2 - K_{ij}K^{ij}) \varepsilon(\boldsymbol{\eta}). \quad (485)$$

Sabendo que o tensor de Einstein em V é definido como

$$G_{\alpha\delta} = R_{\alpha\delta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\delta}{}^{(4)}R, \quad (486)$$

podemos obter a seguinte relação

$$-2\varepsilon(\boldsymbol{\eta})G_{\alpha\delta}\eta^\alpha\eta^\delta = {}^{(4)}R - 2\varepsilon(\boldsymbol{\eta})R_{\alpha\delta}\eta^\alpha\eta^\delta, \quad (487)$$

na qual $g_{\alpha\delta}\eta^\alpha\eta^\delta = \eta_\delta\eta^\delta = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \varepsilon(\boldsymbol{\eta})$.

Enfim, substituindo (487) em (485), temos

$$-2\varepsilon(\boldsymbol{\eta})G_{\alpha\delta}\eta^\alpha\eta^\delta = {}^{(3)}R + (K^2 - K_{ij}K^{ij}). \quad (488)$$

Analogamente, de (486) podemos obter

$$G_{\alpha\gamma}\eta^\alpha e_k^\gamma = R_{\alpha\gamma}\eta^\alpha e_k^\gamma, \quad (489)$$

tendo sido feita a troca $\delta \rightarrow \gamma$, e considerado $g_{\alpha\gamma}\eta^\alpha e_k^\gamma = \eta_\gamma e_k^\gamma = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{e}_k = 0$.

Aplicando g^{ij} em (478), encontramos

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^\alpha g^{ij} e_i^\beta e_k^\gamma e_j^\delta = \left(K_{k;j}^j - K_{;k} \right). \quad (490)$$

Utilizando a relação (482), podemos reescrever (490) como

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}\eta^\alpha \left[g^{\beta\delta} - \varepsilon(\boldsymbol{\eta})\eta^\beta \eta^\delta \right] e_k^\gamma = \left(K_{k;j}^j - K_{;k} \right), \quad (491)$$

que resulta em

$$R_{\alpha\gamma}\eta^\alpha e_k^\gamma = \left(K_{k;j}^j - K_{;k} \right), \quad (492)$$

onde

$$R_{\alpha\gamma} = g^{\beta\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma}^\beta. \quad (493)$$

Portanto, comparando (489) e (492)

$$G_{\alpha\gamma}\eta^\alpha e_k^\gamma = \left(K_{k;j}^j - K_{;k} \right). \quad (494)$$

No caso estudado neste trabalho, em que há um espaço-tempo tempo interno (variedade V^-) e outro externo (variedade V^+), e temos $K_{ij}^- = K_{ij}^+$ em todas as regiões, das equações (488) e (494), obtemos

$$G_{\alpha\beta}^- \eta_-^\alpha \eta_-^\beta = G_{\alpha\beta}^+ \eta_+^\alpha \eta_+^\beta, \quad (495)$$

$$G_{\alpha\beta}^- \eta_-^\alpha (e_i^\beta)_- = G_{\alpha\beta}^+ \eta_+^\alpha (e_i^\beta)_+, \quad (496)$$

que são formas generalizadas das condições de junção de O'Brien-Synge (ISRAEL, 1966)(ISRAEL, 1967).