



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Matheus Costa Cerqueira

**Comparação do comportamento termodinâmico de um modelo  
confinante de quarks com outros modelos efetivos da QCD**

Rio de Janeiro

2017

Matheus Costa Cerqueira

**Comparação do comportamento termodinâmico de um modelo confinante de quarks com outros modelos efetivos da QCD**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

C416c Cerqueira, Matheus Costa.  
Comparação do comportamento termodinâmico de um modelo confinante de quarks com outros modelos efetivos da QCD / Matheus Costa Cerqueira. - 2017.  
83 f.: il.

Orientador: Bruno Werneck Mintz.  
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Cromodinâmica quântica - Teses. 2. Quarks - Teses.  
3. Teoria quântica de campos - Teses. 4. Modelos nucleares - Teses. I. Mintz, Bruno Werneck. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 539.184

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Matheus Costa Cerqueira

**Comparação do comportamento termodinâmico de um modelo confinante de quarks com outros modelos efetivos da QCD**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 19 de Julho de 2017.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Marcio Andre Lopes Capri  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Henrique Boschi Filho  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman  
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2017

## DEDICATÓRIA

Dedico a Deus todo esse trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por todo o sustento que Ele me deu. Somente Ele sabe toda dificuldade que passei nesses 2 anos de mestrado e seria incrivelmente rude da minha parte não colocá-lo em primeiro lugar.

Agradeço minha família pelo apoio e compreensão durante esses 2 anos de trabalho. Sem eles ficaria muito difícil me manter e eles foram muito importantes para mim e sempre serão.

Agradeço a minha namorada Raphaela Azeredo por estar me ajudando e sempre me encorajando para dar o meu melhor. Você sempre quis o melhor para a minha carreira e você não faz ideia como a sua ajuda e seu apoio foi importante para mim.

Agradeço ao meu orientador Bruno Mintz por me ensinar tudo que está escrito nessa dissertação e por toda paciência comigo. Eu sei que deixei a desejar em muitas oportunidades, mas agradeço a você por querer tirar o melhor de mim.

Agradeço ao Vitor Lemes, que me orientou na graduação e nos primeiros 6 meses de meu mestrado. Sua amizade e seus conselhos sobre a vida, suas ideias e sua forma de trabalhar estarão guardadas comigo para sempre. Muito obrigado por influenciar minha vida profissional e pessoal de forma positiva.

Agradeço a todos os amigos que passaram por mim nesses últimos 2 anos. Não lembrarei de todos os nomes, mas citarei os que estiveram mais próximos de mim.

Agradeço ao Rodrigo Dias por ser um grande amigo. Seu bom humor por mais que não pareça, me ajudou a ter dias muito bons na UERJ.

Agradeço ao Rodrigo Patricio por ser esse grande conselheiro que é. Um cara da paz, que sempre está quando você mais precisa dele.

Agradeço ao André Barbosa, por mais que você esteja na PUC, todas as visitas aí ou as suas a UERJ sempre são muito boas, e tenho muita tranquilidade em falar que a gente construiu uma boa amizade desde a graduação.

Agradeço ao Apollo Silva, ao Carlos Stivens e ao Rodrigo Terin, por estarem trabalhando junto comigo. Aquela viagem a Maresias fez a amizade crescer de forma exponencial e estar em um congresso com vocês foi uma experiência ímpar na minha vida.

Agradeço ao Giovani e ao Pedro Meert por virem lá do sul e trazerem consigo esse mar de conheço que passaram para mim. Conviver esse tempo com vocês foi muito bom.

Agradeço ao Edson e ao Felipe pelas conversas no corredor, aqueles momentos em que você precisa parar e refletir um pouco são muito importantes e vocês me ajudaram bastante a refletir sobre muitas questões minhas.

Agradeço ao Juan Zarate e a Katharine Ivette, por virem lá do Peru e somarem em minha vida com uma boa amizade. Foi muito bom conviver com vocês todo esse tempo.

Além disso, agradeço todos os outros que também fizeram parte mas que não

consegui citar. São muitos nomes, e todos estão guardados em meu coração.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Se você não recebe nenhuma crítica, provavelmente você não tem nenhum sucesso.

*Malcolm X*

## RESUMO

CERQUEIRA, M. C. *Comparação do comportamento termodinâmico de um modelo confinante de quarks com outros modelos efetivos da QCD*. 2017. 83 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Nesta dissertação descrevemos alguns modelos não-perturbativos para a Cromodinâmica Quântica (QCD), a fim de explorar a região infravermelha da interação nuclear forte. Em particular, nos concentramos na termodinâmica dos modelos quirais Quark-Méson (QM) e o Polyakov-Quark-Méson (PQM), além do gás de ressonâncias hadrônicas (GRH), como sendo modelos bem estabelecidos na história. Além destes, estamos utilizando um modelo de quarks não locais, onde este viola positividade e se torna um candidato para uma descrição do fenômeno do confinamento em QCD. Uma forma de investigar este modelo de quarks não-locais é através do comportamento termodinâmico que ele possui. Assim, podemos comparar as variáveis termodinâmicas deste modelo com as dos outros modelos citados no parágrafo anterior, a fim de compreendermos como um modelo com violação de positividade se comporta perante esses outros. Para que isso pudesse acontecer, fizemos uma descrição usando o formalismo da teoria quântica de campos a temperatura finita, com o propósito de escrever a função de partição desses modelos e com isso encontrar as funções termodinâmicas de interesse. Nossos resultados mostram instabilidades termodinâmicas em baixas temperaturas, que argumentamos que possam estar relacionadas à violação de positividade do propagador dos quarks do modelo (que é compatível com resultados de QCD na rede). Portanto, acreditamos que possa haver sempre instabilidades termodinâmicas em qualquer tentativa de descrição microscópica feita a partir de graus de liberdade confinados.

Palavras-chave: Cromodinâmica Quântica. Modelos efetivos para a QCD. Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita. Violação de positividade em TQC.

## ABSTRACT

CERQUEIRA, M. C. *Comparison of thermodynamic behaviour of the confining quark model with other effective models in QCD*. 2017. 83 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

In this Master thesis, we describe some nonperturbative models for Quantum Chromodynamics (QCD), in order to explore the infrared region of the strong nuclear force. In particular, we focus on the thermodynamics of the chiral Quark-Meson (QM) and Polyakov-Quark-Meson (QPM) models, besides the Hadron Resonance Gas (HRG), as these are well established models. Besides these models, we deal with a nonlocal quark model which displays positivity violation and is a candidate for a description of the phenomenon of confinement in QCD. A way to investigate this nonlocal quark model is by studying its thermodynamical behavior. Thus, one can compare the thermodynamical variables in this model with those of the other models previously mentioned, in order to understand how a model with positivity violation behaves compared to the others. We made a description using the formalism of Finite Temperature Quantum Field Theory, with the intent of describing the partition function of such models and therefore find the thermodynamical functions of interest. Our results show thermodynamical instabilities at low temperatures, which we argue that may be related to positivity violation of the quark propagator within the model (which is compatible with results from lattice QCD). Therefore, we believe that there may always be thermodynamical instabilities in any attempt of a microscopic description which has confined degrees of freedom as a starting point.

Keywords: Quantum Chromodynamics. Effective models for QCD. Finite Temperature Quantum Field Theory. Positivity Violation in QFT.

## LISTA DE FIGURAS

|           |   |    |
|-----------|---|----|
| Figura 1  | - Plano complexo para os bósons. . . . .  | 23 |
| Figura 2  | - Plano complexo para os férmions. . . . .  | 29 |
| Figura 3  | - Regras de Feynman - <i>ghosts</i> . . . . .                                     | 38 |
| Figura 4  | - Vértices para a QCD em nível de árvore. . . . .                                 | 39 |
| Figura 5  | - Crossover entre $\sigma$ e $\Phi$ . . . . .                                     | 58 |
| Figura 6  | - Propagador do Glúon . . . . .   | 62 |
| Figura 7  | - Função de massa. . . . .  | 65 |
| Figura 8  | - Densidade de número líquido de quarks normalizada, em temperatura zero. . . . . | 71 |
| Figura 9  | - Pressão rede. . . . .   | 72 |
| Figura 10 | - Pressão normalizada. . . . .  | 73 |
| Figura 11 | - Pressão normalizada com Stefan-Boltzmann. . . . .                               | 74 |
| Figura 12 | - Densidade de entropia normalizada por $T^3$ . . . . .                           | 74 |
| Figura 13 | - Densidade de energia normalizada. . . . .                                       | 75 |
| Figura 14 | - Anomalia do traço. . . . .  | 76 |
| Figura 15 | - Velocidade do som ao quadrado. . . . .  | 77 |
| Figura 16 | - Singularidade do modelo de quarks não locais - primeiro pico. . . . .           | 77 |
| Figura 17 | - Singularidade do modelo de quarks não locais - segundo pico. . . . .            | 78 |

## LISTA DE TABELAS

|          |                                      |    |
|----------|--------------------------------------|----|
| Tabela 1 | - Tabela de Bárions. . . . .         | 48 |
| Tabela 2 | - Primeira Tabela de Mésons. . . . . | 48 |
| Tabela 3 | - Segunda Tabela de Mésons. . . . .  | 49 |

## SUMÁRIO

|       |   |    |
|-------|---|----|
|       | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .   | 12 |
| 1     | <b>ALGUNS CONCEITOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA</b> . . . . .         | 16 |
| 1.1   | Breve resumo sobre integrais de caminho em TQC a temperatura finita . . . . .               | 16 |
| 1.2   | Frequências de Matsubara para bósons e férmions . . . . .                                   | 18 |
| 1.3   | Gás de bósons livres . . . . .  | 20 |
| 1.4   | Gás de férmions livres . . . . .  | 25 |
| 2     | <b>UMA BREVE DESCRIÇÃO DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA</b> . . . . .                              | 33 |
| 2.1   | Teoria clássica da QCD . . . . .  | 33 |
| 2.2   | Lagrangiana de Faddeev-Popov . . . . .  | 35 |
| 2.3   | Regras de Feynman . . . . .   | 38 |
| 2.4   | Simetria BRST . . . . .   | 39 |
| 2.5   | Simetria Quiral na QCD . . . . .  | 41 |
| 2.6   | Quebra espontânea de simetria . . . . .   | 45 |
| 3     | <b>ALGUNS MODELOS PARA A MATÉRIA FORTEMENTE INTERAGENTE EM CONDIÇÕES EXTREMAS</b> . . . . . | 47 |
| 3.1   | Gás de ressonâncias hadrônicas . . . . .  | 47 |
| 3.2   | Modelos Quirais . . . . .   | 50 |
| 3.2.1 | <u>Modelo Nambu-Jona-Lasinio</u> . . . . .  | 50 |
| 3.2.2 | <u>Modelo Quark-Méson acoplado a quarks</u> . . . . .                                       | 52 |
| 3.3   | Graus de liberdade gluônicos: loop de Polyakov . . . . .                                    | 54 |
| 3.4   | Modelo Polyakov-Quark-Méson . . . . .   | 56 |
| 4     | <b>MODELOS PARA O CONFINAMENTO COM VIOLAÇÃO DE POSITIVIDADE</b> . . . . .                   | 59 |
| 4.1   | <b>Critérios de Confinamento</b> . . . . .  | 59 |
| 4.1.1 | <u>Loop de Wilson</u> . . . . .   | 59 |
| 4.1.2 | <u>Violação de positividade</u> . . . . .   | 60 |
| 4.2   | Modelo de Quarks não-locais . . . . .   | 63 |
| 4.3   | Termodinâmica do modelo de quarks . . . . .   | 64 |
| 5     | <b>COMPARAÇÃO ENTRE OS DIVERSOS MODELOS</b> . . . . .                                       | 69 |
| 5.1   | Definições de quantidades termodinâmicas . . . . .  | 69 |
| 5.2   | Comparação entre modelos . . . . .  | 70 |
|       | <b>CONCLUSÕES</b> . . . . .   | 79 |
|       | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .  | 80 |

## INTRODUÇÃO

Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente.

*Roger Von Oech*

A natureza é descrita hoje por quatro forças fundamentais: força nuclear forte, fraca, gravitacional e eletromagnética. Este trabalho vai se concentrar no que diz respeito às interações fortes. A teoria que descreve tais interações é chamada de Cromodinâmica Quântica (QCD, na sigla em inglês para *Quantum Chromodynamics*). Esta descreve a interação entre quarks e glúons, que são partículas fundamentais. Os quarks são férmions que possuem *spin*  $1/2$ . Além disso, uma curiosidade é que a carga elétrica dessas partículas é fracionada. Os quarks podem ser divididos em 6 tipos diferentes: *up*(u), *down*(d), *strange*(s), *charm*(c), *bottom*(b), *top*(t). Nós chamamos os diferentes tipos de quark de *sabores*<sup>1</sup>.

Os quarks não são observados na natureza de forma isolada, como os elétrons, e isso acontece graças a um fenômeno da QCD chamado de confinamento (WILCZEK, 2000; PESKIN; SCHROEDER, 1995). Uma das fases da QCD prevê que os quarks estejam confinados dentro de partículas chamadas hádrons. Os hádrons podem ser divididos entre os bárions e os mésons. Os bárions são constituídos por 3 quarks e obedecem a estatística de Fermi-Dirac, enquanto os mésons são constituídos por pares quark-antiquark e obedecem a estatística de Bose-Einstein. Além da carga elétrica, os quarks possuem um outro número quântico que não vemos na teoria eletromagnética, chamada de *carga de cor*. Como os quarks possuem carga elétrica fracionada e a soma da carga elétrica de todos os quarks constituem a carga elétrica total de um determinado hádron, encontramos um problema quando observamos o bárion  $\Delta^{++}$ , que possui carga elétrica 2 (SKANDS, 2013). Como os quarks só podem ter carga elétrica  $+2/3$  e  $-1/3$ , para a conservação de carga elétrica existir nesse bárion, é preciso que utilizemos 3 quarks *up*. Porém, como os quarks são férmions, eles estão sujeitos ao princípio de exclusão de Pauli, e não seria possível que eles pudessem co-existir dessa forma sem que haja algum outro número quântico para diferenciá-los. Assim, é proposto que além da carga elétrica, os quarks também possuam carga de cor. Os quarks podem ter 3 tipos de “cores” diferentes, que chamamos de *red*, *green* e *blue*<sup>2</sup>.

Assim como na interação eletromagnética existe o fóton, que é o mediador desta

---

<sup>1</sup> Esse nome é dado aos tipos de quarks sem qualquer ligação com qualquer propriedade alimentícia.

<sup>2</sup> Na verdade os quarks não são necessariamente vermelhos, verdes ou azuis. Essa nomenclatura pode confundir mas é apenas um nome dado para uma distinção dos quarks de um mesmo sabor.

interação, a interação forte é mediada através dos glúons, responsáveis pela interação entre os quarks. Diferentemente dos fótons, os glúons interagem entre si, o que gera uma grande riqueza de fenômenos. Os glúons são bósons que possuem *spin* 1, e são divididos em oito glúons distintos. Para entender melhor o motivo de termos oito glúons, basta olharmos a simetria de grupo no qual a QCD é descrita, que é o SU(3). Este grupo tem uma peculiaridade importante, pois possui 8 geradores de grupo, equivalentes as matrizes de Gell-Mann, no qual podemos dizer que os glúons estão na representação adjunta de um grupo de cor SU(3). Assim, os glúons são definidos nessa representação como sendo 8 geradores distintos, responsáveis pelas trocas de cor entre os quarks presentes nos hádrons.

Quanto ao confinamento, podemos afirmar que este fenômeno é um tanto peculiar. Nesta fase da QCD, temos que os quarks estão confinados dentro dos hádrons segundo uma das principais interpretações do confinamento, baseada na física de quarks pesados. O curioso do que acontece aqui é que conforme os quarks são separados uns dos outros, a força entre eles em vez de diminuir, aumenta. Dessa forma, é necessária cada vez mais energia para que se consiga deixar os quarks isolados um dos outros. O problema é que a energia aumenta tanto que chega em certo ponto que os quarks que deveriam estar isolados, criam um par anti-quark, formando uma nova partícula. Esta é a famosa imagem do “tubo de fluxo” para o confinamento. Uma outra abordagem que também é usada para descrever o confinamento é a violação de positividade das funções de dois pontos dos campos elementares (quarks e gluons). Os propagadores podem ser escritos em termos de uma certa função espectral que, para campos que possuem estados assintóticos<sup>3</sup>, deve atender a um critério de positividade. Quando esta função não se torna mais positiva, dizemos que aconteceu violação da positividade, de modo que o propagador deixa de ser compatível com a existência de estados assintóticos. Assim, interpretamos que o campo para o qual isto ocorre está confinado. Seja qual for o critério que utilizemos para o confinamento, ele deve ser tal que os quarks nunca serão vistos isolados no regime infravermelho.

Um outro ponto importante é a simetria quiral. A quiralidade está relacionada com o spin de uma partícula, no qual a mesma quando “gira” no sentido horário ou anti-horário. Porém, quando trabalhamos com partículas sem massa na lagrangiana da QCD, dizemos que está acontecendo o fenômeno da quebra espontânea de simetria quiral. Este fenômeno é muito importante pois está presente em muitos modelos propostos para a descrição da QCD em sua fase confinante.

Além dos quarks serem confinados, podemos observar uma outra fase na QCD que é a liberdade assintótica (WILCZEK, 2000; PESKIN; SCHROEDER, 1995; WILCZEK, 1996). Este fenômeno acontece em energias muito altas (ultravioleta), onde a interação

---

<sup>3</sup> Estados assintóticos são, grosso modo, estados de partícula livre.

dos quarks e dos gluons se torna muito fraca, deixando de estarem confinados e criando assim um plasma de quarks e gluons.

Um método importante que é utilizado com muito sucesso na descrição da eletrodinâmica quântica (QED) é a expansão perturbativa. Poderíamos pensar que este é um passo importante também para a descrição da QCD. Entretanto, para baixas energias, esse método não é válido para a QCD por causa do confinamento. A constante de acoplamento da QCD diminui conforme a energia aumenta, diferentemente do que acontece na QED, tornando assim a abordagem perturbativa pouco confiável para a QCD em baixas energias<sup>4</sup>. Dessa forma, há necessidade de se desenvolver métodos além da expansão perturbativa. Logo, foram propostos diversos modelos não-perturbativos que pudessem apresentar uma boa descrição da QCD, tais como o modelo de Nambu e Jona-Lasinio (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961) e o modelo sigma linear acoplado a quarks (GELLMANN; LEVY, 1960). Também há diversos métodos não-perturbativos para as interações fortes, dos quais podemos mencionar o grupo de renormalização funcional (BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002; BLAIZOT; MENDEZ-GALAIN; WSCHEBOR, 2006; PAWLOWSKI, 2007) e as equações de Schwinger-Dyson (AGUILAR; BINOSI; PAPA-VASSILIOU, 2008; ROBERTS, 2012), que são formulações no espaço contínuo. Porém, uma das mais poderosas ferramentas na solução da QCD é a sua formulação em rede (*lattice QCD*), cujos resultados são, não raramente, considerados paradigmas teóricos. Para mais informações, veja, por exemplo, os artigos clássicos e de revisão (WILSON, 1974; KOGUT, 1983; BAZAVOV et al., 2010; FODOR; HOELBLING, 2012).

Devido à necessidade de modelos não perturbativos, um outro modelo foi proposto mais recentemente, onde este, por construção, viola a positividade do propagador dos quarks (BAULIEU et al., 2010; GUIMARAES; MINTZ; PALHARES, 2015). Como os modelos antigos, tais como Sigma Linear (LSM), Nambu-Jona-Lasinio (NJL) e Gás de Ressonâncias Hadrônicas (GRH) são bem estabelecidos, é válido comparar estes modelos através dos parâmetros termodinâmicos que ambos apresentam. Para que isso aconteça, precisamos da teoria quântica de campos a temperatura finita, a fim de encontrar para cada modelo a sua função de partição.

Dessa forma, no capítulo 1 vamos explicar alguns conceitos básicos de teoria quântica de campos à temperatura finita, tanto para bósons quanto para férmions, procurando encontrar a função de partição para ambos. Em seguida no capítulo 2, é feita uma apresentação sucinta da QCD junto com uma descrição de modelos efetivos para a própria. Então, no capítulo 3, vamos mostrar dois critérios de confinamento para a QCD, sendo que vamos em seguida apresentar a descrição do modelo de (BAULIEU et al., 2010). Para finalizar, no capítulo 4, vamos comparar os modelos apresentados no capítulo 2 com

---

<sup>4</sup> A abordagem perturbativa é válida para a QCD apenas para a liberdade assintótica

o modelo apresentado no capítulo 3 a partir da análise das quantidades termodinâmicas obtidas a partir de cada um.

# 1 ALGUNS CONCEITOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

## 1.1 Breve resumo sobre integrais de caminho em TQC a temperatura finita

Para descrever a teoria quântica de campos a temperatura finita, é importante analisarmos primeiro algumas definições fundamentais em mecânica estatística. Começemos pelo propagador. Temos que uma partícula com potencial independente do tempo  $V(q)$  pode ser descrita pela amplitude de probabilidade  $F(q', t'; q, t)$  da partícula ser encontrada na posição  $q'$  e no tempo  $t'$ , quando antes ela estava na posição  $q$  e no tempo  $t$  (BELLAC, 1996). Isso requer definir essa amplitude de probabilidade como sendo

$$F(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle, \quad (1)$$

onde  $H$  é o operador hamiltoniano independente do tempo que descreve o sistema. Uma transformação muito interessante para a descrição de teoria de campos a temperatura finita é fazendo a continuação analítica de  $F(q', t'; q, t)$  para tempo imaginário, tal que

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -i\tau \\ t' &\rightarrow -i\tau' \end{aligned} \quad (2)$$

e a amplitude de probabilidade é reescrita de tal forma que

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle. \quad (3)$$

Para encontrar uma representação integral para  $F(q', -i\tau'; q, -i\tau)$ , é preciso dividir o intervalo  $[\tau, \tau']$  em  $(n + 1)$  subintervalos, cada um com tamanho  $\varepsilon = (\tau - \tau')/(n + 1)$ , com  $n \rightarrow \infty$ . Aplicando estes argumentos na equação (3) e utilizando o produto de Lie, dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{A/n} e^{B/n} \right)^n = e^{A+B}, \quad (4)$$

e inserindo conjuntos completos de autoestados do operador posição  $q$  nos tempos intermediários  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , podemos escrever a equação (3) como sendo

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int \prod_{l=1}^n dq_l \left\langle q_{l+1} \left| \exp \left[ -\frac{\varepsilon}{2} V(q) \right] \exp \left[ -\varepsilon \frac{p^2}{2m} \right] \exp \left[ -\frac{\varepsilon}{2} V(q) \right] \right| q_l \right\rangle. \quad (5)$$

O termo que possui o operador *momentum* é resolvido de forma simples, pois basta

utilizar a completeza para o conjunto completo de estados de  $p_l$ , tal que o resultado final encontrado é

$$\left\langle q_{l+1} \left| \exp \left[ -\varepsilon \frac{p^2}{2m} \right] \right| q_l \right\rangle = \left( \frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-m(q_{l+1} - q_l)^2}{2\varepsilon} \right]. \quad (6)$$

Dessa forma, a equação (5) é então reescrita como

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int \prod_{l=1}^n \left( \frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{1/2} dq_l \exp \left[ -\varepsilon \left( \sum_{l=0}^n \frac{m(q_{l+1} - q_l)^2}{2\varepsilon^2} + \sum_{l=0}^n V \left( \frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right) \right) \right]. \quad (7)$$

Procedendo de uma maneira formal, nós chamamos de  $\mathcal{D}q(\tau'')$  o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  da medida de integração na equação (7) e reconhecemos no argumento da exponencial desta mesma equação uma soma de Riemann. Essa soma é escrita tal que

$$S_E(\tau' - \tau) = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left[ \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q(\tau'')) \right] \quad (8)$$

onde o ponto em  $q$  indica uma derivada com respeito a  $\tau$  e  $S_E$  chamamos de ação Euclidiana. Assim, podemos escrever o propagador  $F(q', -i\tau'; q, -i\tau)$  como sendo

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \int \mathcal{D}q(\tau'') \exp[-S_E(\tau' - \tau)], \quad (9)$$

onde as condições de contorno do caminho  $q(\tau'')$  são  $q(\tau) = q$  e  $q(\tau') = q'$ .

Após encontrarmos a representação funcional (9) para o propagador, vamos agora fazer uma conexão com a mecânica quântica estatística, pois buscamos escrever a função de partição  $Z(\beta)$  como uma integral de caminho. Vamos primeiro partir da definição de função partição dada por

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (10)$$

onde o traço pode ser calculado usando um conjunto completo de autovetores de  $H$ , tal que

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (11)$$

Entretanto, também é possível escrever o traço usando um conjunto completo de autovetores de um operador posição

$$Z(\beta) = \int dq \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle. \quad (12)$$

Comparando a equação (12) com a equação (3), fica muito simples ver que

$$Z(\beta) = \int dq F(q, -i\beta, q, 0) \quad (13)$$

sendo que agora podemos expressar a função de partição em termos de uma integral funcional,

$$Z(\beta) = \int_{q(\beta)=q(0)} \mathcal{D}q(\tau) \exp[-S_E(\beta)], \quad (14)$$

onde se integra sobre os caminhos sujeitos a condição de contorno  $q(\beta) = q(0)$ .

Assim como em teoria quântica de campos, é útil definir um funcional gerador  $Z(\beta; j)$  tal que

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp[-S_E(\beta) + \int_0^\beta j(\tau)q(\tau)d\tau], \quad (15)$$

com  $Z(\beta; j = 0) = Z(\beta)$ , onde  $j(\tau)$  é uma função dada, que chamamos de fonte externa. A diferenciação funcional da equação (15) com respeito à fonte externa leva ao propagador no tempo imaginário

$$\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \Big|_{j=0} = \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{-S_E(\beta)}. \quad (16)$$

De fato, nós agora mostramos que o lado direito da equação (16) pode ser identificado como uma média térmica do operador de tempo ordenado  $P_\tau$ , dado por

$$\langle T(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)) \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} [e^{-\beta\hat{H}} P_\tau(\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2))] \quad (17)$$

onde  $\hat{q}(-i\tau)$  é o operador posição no quadro de Heisenberg

$$\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q} e^{-i\hat{H}t} \quad (18)$$

$$\hat{q}(-i\tau) = e^{\hat{H}\tau} \hat{q} e^{-\hat{H}\tau}. \quad (19)$$

## 1.2 Frequências de Matsubara para bósons e férmions

O desenvolvimento da teoria quântica de campos a temperatura finita teve uma grande contribuição do físico Takeo Matsubara, pois este deu grandes contribuições para esse formalismo através das funções de green de dois pontos (MATSUBARA, 1955). Estas podem ser definidas para o quadro de Heisenberg (DAS, 1997) como

$$\mathcal{G}_\beta(\tau, \tau') = \frac{1}{Z(\beta)} \text{tr} (e^{-\beta H} P_\tau(\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau'))) \quad (20)$$

Aqui  $\phi_H$  pode representar tanto campos bosônicos como fermiônicos. Por conta do princípio de exclusão de Pauli, os férmions possuem uma álgebra anti-comutativa, diferente dos bósons que são descritos por uma álgebra comutativa. Essa diferença entre férmions e bósons nos permite escrever

$$P_\tau(\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau')) = \theta(\tau - \tau')\phi_H(\tau)\phi_H^\dagger(\tau') \pm \theta(\tau' - \tau)\phi_H^\dagger(\tau')\phi_H(\tau) \quad (21)$$

onde  $\pm$  está relacionado com qual tipo de campo será utilizado. Para campos bosônicos, usa-se o sinal  $+$  e para campos fermiônicos usa-se o sinal  $-$ . A função de Green de dois pontos possui algumas propriedades interessantes. A primeira é que pela equação (20), vemos que a mesma depende apenas da diferença  $\tau - \tau'$ . A segunda propriedade é que cada uma das variáveis de tempo pode estar entre  $0 \leq \tau, \tau' \leq \beta$ , por conta das condições de contorno expressas na subseção anterior. Consequentemente o argumento da função de Green de dois pontos também pode estar entre  $-\beta \leq \tau - \tau' \leq \beta$ . Utilizando agora as equações (20) e (21), para  $\tau > 0$ , é fácil ver que (DAS, 1997)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta(0, \tau) &= \pm \langle \phi_H^\dagger(\tau)\phi_H(0) \rangle_\beta \\ &= \pm \langle \phi_H(\beta)\phi_H^\dagger(\tau) \rangle_\beta \\ &= \pm \mathcal{G}_\beta(\beta, \tau), \end{aligned} \quad (22)$$

onde chamamos essa equação de relação de KMS (Kubo-Martin-Schwinger). Além disso, da mesma forma, também temos que

$$\mathcal{G}_\beta(\tau = 0) = \pm \mathcal{G}_\beta(\tau + \beta) \quad (23)$$

Como as funções de Green de dois pontos são definidas em um intervalo de tempo finito, a transformada de Fourier correspondente pode envolver somente frequências discretas. Logo, é válido escrever que

$$\mathcal{G}_\beta(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \mathcal{G}_\beta(\omega_n) \quad (24)$$

$$\mathcal{G}_\beta(\omega_n) = \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}_\beta(\tau). \quad (25)$$

Mesmo que todos os modos sejam permitidos na expansão de Fourier, por causa das condições de (anti) periodicidade satisfeitas pelas equações (22) e (23), somente os inteiros pares contribuem para a função de Green bosônica, e somente os inteiros ímpares contribuem para a função de Green fermiônica. Isso quer dizer que

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{2n\pi}{\beta}, & \text{para bósons} \\ \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, & \text{para férmions.} \end{cases}$$

Essas são as chamadas de frequências de Matsubara. Sabendo dessa diferença, é necessário entendermos como o funcional gerador encontrado na equação (15) se comporta tanto para os bósons quanto para os férmions.

### 1.3 Gás de bósons livres

Para encontrar o funcional gerador para as funções de correlação bosônicas, precisamos primeiro definir qual é a densidade de lagrangiana para este sistema. Seja a ação euclidiana

$$S_E = \int d^4x \mathcal{L}_E \quad (26)$$

com  $\mathcal{L}_E$  definida como sendo a densidade de lagrangiana no espaço euclidiano. Para os bósons, vamos utilizar a lagrangiana de Klein-Gordon (PESKIN; SCHROEDER, 1995) para campos livres, dada por

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{m^2\phi^2}{2} \quad (27)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar. Após uma integração por partes, a ação euclidiana pode então ser escrita como sendo

$$S_E = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi \left( -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi. \quad (28)$$

Admitindo uma transformada de Fourier como feita na equação (25), mas adicionando também uma transformação de espaço para *momentum*, podemos reescrever a ação encontrada na equação (28) como

$$S = -\frac{1}{2}\beta^2 \sum_n \sum_{\mathbf{p}} (\omega_n^2 + \omega^2) \phi_n(\mathbf{p}) \phi_n^*(\mathbf{p}) \quad (29)$$

com  $\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ .

Para encontrarmos  $Z(\beta, 0)$ , vamos utilizar uma ferramenta importante que são as integrais gaussianas (BELLAC, 2004). A integral gaussiana básica é escrita como

$$I_n = \int_0^\infty dx x^n \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2\right) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma((n+1)/2)}{A^{(n+1)/2}}, \quad (30)$$

onde  $A$  deve ser positivo e  $\Gamma$  é a função gama de Euler. A equação (30) é válida para qualquer valor de  $n$ , inteiro ou não, desde que  $n > -1$ . Podemos também generalizar a

equação (30) de modo que encontremos uma função geradora

$$f(u) = \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}Ax^2 + ux\right), \quad (31)$$

onde a constante de normalização  $\mathcal{N}$  é encontrada fazendo  $f(0) = 1$ . Uma forma de resolver a função geradora da equação (31) é "completando quadrado", onde é simples ver que

$$f(u) = \mathcal{N} \exp\left(\frac{u^2}{2A}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\left(-\frac{1}{2}Ax'^2\right) = \exp\left(\frac{u^2}{2A}\right) \sqrt{\frac{\pi}{A}}. \quad (32)$$

Esses resultados são facilmente generalizáveis para integrais gaussianas N-dimensionais, onde os termos quadráticos do expoente agora vão estar relacionados com uma matriz  $N \times N$ . Vamos usar aqui a notação matricial onde as  $N$  variáveis  $(x_1, \dots, x_n)$  formam um vetor coluna  $x$  e

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N x_i A_{ij} x_j &= x^T A x \\ \sum_{i=1}^N x_i u_i &= x^T u. \end{aligned} \quad (33)$$

Agora, a função geradora é escrita como

$$f(u_1, \dots, u_N) = \mathcal{N} \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp\left(-\frac{1}{2}x^T A x + u^T x\right) \quad (34)$$

onde novamente  $\mathcal{N}$  será encontrado utilizando a normalização  $f(u_i = 0) = 1$ . Observe que o funcional gerador, eq. (15), corresponde justamente a uma função como (34), porém com um número de integrais  $N \rightarrow \infty$ . A solução para a equação (34) para uma dimensão  $N$  qualquer, utilizando os argumentos que deram o resultado da equação (32), é dada por

$$f(u) = \exp\left(\frac{1}{2}u^T A^{-1}u\right) \frac{(\det A)^{-1/2}}{(2\pi)^{N/2}}, \quad (35)$$

onde  $\det A$  é justificado pois fizemos uma diagonalização da matriz  $A$ .

Esta extensão das integrais gaussianas é muito importante pois comparando a equação (29) com a equação acima, é simples ver que podemos escrever a função de partição como

$$Z = (2\pi)^{N/2} \prod_n \prod_{\mathbf{p}} [\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)]^{-1/2}. \quad (36)$$

Para que se tenha uma análise termodinâmica do que está acontecendo com o

sistema, precisamos não utilizar a função partição, mas sim o logaritmo da função partição, pois qualquer variável termodinâmica de um sistema é encontrada utilizando neste caso o potencial termodinâmico dado por

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \log Z. \quad (37)$$

O logaritmo natural da função partição da equação (36) é dada então por

$$\log Z = -\frac{1}{2} \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \log[\beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)], \quad (38)$$

onde aqui foi desconsiderado termos que não possuem dependência na temperatura ou no volume, pois apresentam dimensão diferente da esperada aqui. Utilizando a frequência de Matsubara para os bósons e utilizando a integral

$$\int_a^b \frac{dx}{x+c} = \log(b+c) - \log(a+c) \quad (39)$$

e escolhendo  $a = 1$ ,  $b = \beta^2\omega^2$ ,  $x = \theta^2$  e  $c = (2\pi n)^2$ , vamos conseguir escrever

$$\log[(2\pi n)^2 + \beta^2\omega^2] = \int_1^{\beta^2\omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \log[1 + (2\pi n)^2]. \quad (40)$$

O próximo passo agora abrir uma soma em  $n$  dentro da integral. Para resolver este problema é preciso fazer a soma de resíduos, pois a partir da Figura 1, podemos ver o contorno necessário a ser feito no plano complexo.

$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz. \quad (41)$$

A função a ser utilizada para essa integração de resíduos é uma cotangente hiperbólica  $\frac{1}{2} \coth(\frac{1}{2}\beta z)$  com polos em  $z = 2\pi n T i$ . Podemos escrever então

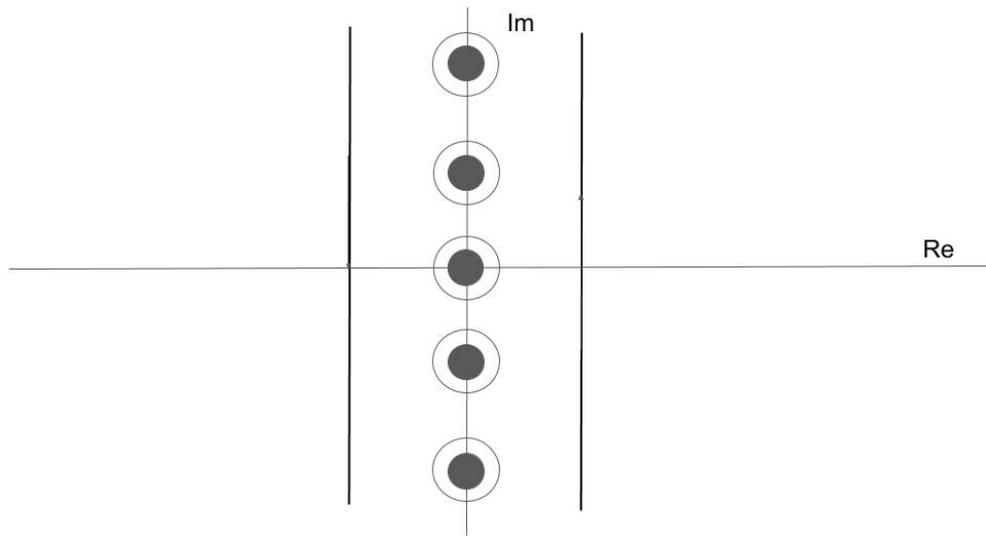
$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^2 + \theta^2} \frac{1}{2} \coth\left(\frac{iz}{2}\right) dz. \quad (42)$$

Ao escrever a cotangente hiperbólica em termo das exponenciais, podemos expressar a soma de resíduos em duas duas partes, tal que

$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\varepsilon}^{-i\infty-\varepsilon} \left(\frac{1}{z^2 + \theta^2}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - e^{-iz}}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty+\varepsilon}^{-i\infty+\varepsilon} \left(\frac{1}{z^2 + \theta^2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 - e^{iz}}\right). \quad (43)$$

Fazendo uma transformação simples no primeiro termo da equação (43) tal que

Figura 1 - Plano complexo para os bósons.



Legenda: Plano complexo onde se está aplicando uma soma de resíduos em uma função cotangente hiperbólica.

Fonte: O autor, 2017.

$z \rightarrow -z$ , fica simples escrever que

$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} 2 \int dz \left( \frac{1}{(\theta - iz)(\theta + iz)} \right) \left( -\frac{1}{1 - e^{iz}} + \frac{1}{2} \right) \quad (44)$$

com os polos sendo em  $\theta = iz$  e  $\theta = -iz$ . Fazendo o contorno, resolvemos o problema e podemos afirmar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n\pi)^2 + \theta^2} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right). \quad (45)$$

Logo, voltando a equação (40), podemos então utilizar a equação (45) e encontramos

$$\begin{aligned} \log Z = & \sum_p \left[ \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) + \sum_n \log[1 + (2n\pi)^2] \right] + \\ & + \sum_p \left[ \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) + \sum_n \log[1 + (2n\pi)^2] \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Concluindo agora, podemos desconsiderar todos os termos que não possuem a contribuição de  $\beta$  e sendo

$$\sum_p \rightarrow V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (47)$$

o resultado final para  $\log Z$  é dado por

$$\log Z = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ -\frac{1}{2} \beta \omega - \log(1 - e^{-\beta \omega}) \right], \quad (48)$$

onde o primeiro termo dentro do colchetes representa a energia de ponto zero do sistema. Como queremos que  $\log Z$  seja zero para temperatura nula, para que isso aconteça temos que normalizar a energia de ponto zero para que a mesma seja nula. Logo, com esse resultado, é possível agora calcular o grande potencial canônico e encontrar qualquer grandeza termodinâmica para os bósons.

É possível escrever um limite para  $\log Z$  quando temos  $m = 0$ . O potencial termodinâmico para um campo escalar é escrito como

$$\Omega_B = VT \int \frac{d^3 \kappa}{(2\pi)^3} \log[1 - e^{-\beta \kappa}]. \quad (49)$$

Aplicando a integração por partes na equação (49), é encontrado que

$$\Omega_B = -\frac{VT}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{\kappa^3}{e^{\beta \kappa} - 1} d\kappa, \quad (50)$$

onde uma substituição simples de  $\beta \kappa = x$  produz

$$\Omega_B = -\frac{VT^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (51)$$

A equação (51) é calculada a partir da função zeta de Riemman na sua forma integral, dada por

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (52)$$

onde  $\Gamma(s) = (s-1)!$ . Para que a equação (51) e a equação (52) sejam equivalentes, temos que ter  $s = 4$ . Logo, fica simples escrever que

$$\zeta(4) = \frac{1}{6} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{90}, \quad (53)$$

e o potencial termodinâmico como

$$\Omega_B = -\frac{\pi^2 VT^4}{90}. \quad (54)$$

É importante frisar que o resultado encontrado pela equação (54) é para o número de graus de liberdade equivalente a 1. Para um número qualquer de graus de liberdade

bosônicos  $\nu_b$ , o potencial termodinâmico é escrito como

$$\Omega_B = -\nu_b \frac{\pi^2 V T^4}{90}. \quad (55)$$

O valor de  $\nu_b$  para glúons livres é dado por  $2(N_c^2 - 1)$ , onde  $N_c$  é definido como o número de cores.

#### 1.4 Gás de férmions livres

Da mesma forma que encontramos o funcional gerador para as partículas bosônicas por meio de sua densidade de lagrangiana, devemos agora fazer o mesmo para as partículas fermiônicas. Seguiremos o procedimento padrão encontrado em diversos livros-texto (BELLAC, 1996; DAS, 1997; KAPUSTA; GALE, 2006). Essa densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \gamma^0 \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m \right) \psi, \quad (56)$$

onde  $\psi$  é um campo espinorial e  $\gamma_\mu$ , para  $\mu = 1, 2, 3, 4$ , são as matrizes de Dirac. Com este lagrangiano, podemos escrever a ação Euclidiana para os férmions, dada por

$$S_E = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi} \left( -\gamma^0 \frac{\partial}{\partial \tau} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m + \mu\gamma^0 \right) \psi. \quad (57)$$

Utilizando a transformada de Fourier, como vista na equação (25), podemos reescrever a ação como sendo

$$S = \sum_n \sum_{\mathbf{p}} i\tilde{\psi}^\dagger(-i\beta) \left[ (-i\omega_n + \mu) - \boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m\gamma^0 \right] \tilde{\psi}. \quad (58)$$

Para encontrar o funcional gerador, devemos utilizar as integrais gaussianas de forma semelhante utilizada para o gás de bósons livres. Porém, por conta do princípio de exclusão de Pauli, os férmions devem ser expressos não por variáveis quaisquer, mas pelas variáveis de Grassmann. Para uma variável de Grassmann  $\eta$ , existe unicamente um comutador que define a álgebra, no qual podemos escrever

$$\{\eta, \eta\} = 0. \quad (59)$$

Por causa disso, a função mais geral de  $\eta$  é (usando expansão em série de Taylor)

$f(\eta) = a + b\eta$ , onde  $a$  e  $b$  são números complexos. A integração é definida como sendo

$$\begin{aligned}\int d\eta &= 0 \\ \int d\eta\eta &= 1 \\ \int d\eta(a + b\eta) &= b.\end{aligned}\tag{60}$$

É muito importante perceber que o primeiro termo da equação (60) diz que a integral é invariante sob a mudança de variável  $\eta \rightarrow \eta + a$ , o segundo termo dessa mesma equação é apenas uma normalização conveniente e o terceiro uma consequência dos dois primeiros termos.

Generalizando para um conjunto de variáveis de Grassmann  $\eta_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ , e para um conjunto  $\eta_i^\dagger$ , a álgebra fica agora definida por

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \{\eta_i, \eta_j^\dagger\} = \{\eta_i^\dagger, \eta_j^\dagger\} = 0\tag{61}$$

A função mais geral para essas variáveis deve ser escrita como

$$\begin{aligned}f &= a + \sum_i a_i \eta_i + \sum_i b_i \eta_i^\dagger + \sum_{i,j} a_{ij} \eta_i \eta_j + \sum_{i,j} b_{ij} \eta_i^\dagger \eta_j^\dagger \\ &\quad + \sum_{ij} c_{ij} \eta_i^\dagger \eta_j + \dots + d \eta_1^\dagger \eta_1 \eta_2^\dagger \eta_2 \dots \eta_N^\dagger \eta_N,\end{aligned}\tag{62}$$

onde  $d$  também é uma matriz  $N$ -dimensional. A integral sobre todas as variáveis da equação (62) é definida como

$$\int d\eta_1^\dagger d\eta_1 d\eta_2^\dagger d\eta_2 \dots d\eta_N^\dagger d\eta_N f = d.\tag{63}$$

Essas integrais são muito importantes, pois utilizando a equação (58) e o formalismo da integral funcional, é possível escrever

$$\int \eta_1^\dagger \eta_1 \eta_2^\dagger \eta_2 \dots \eta_N^\dagger \eta_N \exp[\eta^\dagger D \eta] = \det D,\tag{64}$$

onde  $D$  é uma matriz  $N \times N$  e  $\eta$  e  $\eta^\dagger$  fazem o papel de espinores. O resultado encontrado pela equação (64) é muito simples de ser encontrado quando expandimos a função exponencial em série de Taylor até o termo de primeira ordem. Como temos uma soma do tipo  $\eta_k^\dagger D_{kl} \eta_l$ , expressamos o resultado não como uma simples soma, mas como um determinante da matriz  $D$ .

Olhando para a equação (58), fica fácil perceber que a matriz  $D$  para esse caso pode ser escrita como sendo

$$D = (-i\beta) \left[ (-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m\gamma^0 \right]\tag{65}$$

onde agora expressamos que  $\mathcal{Z} = \det D$  por conta da comparação do funcional gerador fermiônico com a equação (64). Da mesma forma que para os bósons nós buscamos encontrar o logaritmo da função de partição, para os férmions vamos fazer o mesmo. Porém, agora temos a contribuição das matrizes de Dirac no determinante que foi definido pela equação (64). Uma forma de trabalharmos com isso que torna o problema mais simples é escrever

$$\log \det D = \text{Tr} \log D. \quad (66)$$

Dessa forma, para resolver a equação (66), vamos utilizar o conceito de traço parcial nas matrizes de Dirac, onde o resultado encontrado é

$$\log \mathcal{Z} = 2 \sum_n \sum_{\mathbf{p}} \log \beta^2 [(\omega_n^2 + i\mu)^2 + \omega^2]. \quad (67)$$

onde  $\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ . É possível visualizar aqui que a equação (67) é muito semelhante ao  $\log Z$  para os bósons livres, vide equação (38) se necessário, onde as principais diferenças estão no fator que multiplica o logaritmo e agora a presença do potencial químico. Dessa forma, a análise do termo  $[(\omega_n^2 + i\mu)^2 + \omega^2]$  precisa ter uma atenção especial, pois estamos agora trabalhando com termos reais e complexos. Para entendermos melhor como proceder com isso, vamos abrir o termo dentro do logaritmo da equação (67) em uma parte que é real e outra imaginária, tal que

$$[(\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2]^2 = (\omega_n^2 - \mu + \omega^2)^2 - 4\mu^2\omega_n^2 + i4\mu\omega_n(\omega_n^2 - \mu + \omega^2) = a_n + ib_n, \quad (68)$$

onde os termos  $a_n$  e  $ib_n$  apenas servem para deixar de forma bem explícita que temos para a equação (68) uma parte real e uma parte imaginária. Como todo número complexo pode ser escrito como sendo

$$z = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \exp \left[ i \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \right]. \quad (69)$$

Como o nosso problema apresenta um logaritmo natural, é correto escrevermos

$$\log \mathcal{Z} = \sum_n \left[ \log \left[ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right] + i \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \right]. \quad (70)$$

Agora, utilizando o formalismo de Matsubara para os férmions, uma relação muito importante é que

$$\omega_0 = \pi T = -\omega_{-1}. \quad (71)$$

A partir desta relação, podemos fazer uma análise primeiro do termo imaginário

da equação (70). Separando o somatório

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) = \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \right) \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (72)$$

e aplicando  $n' = -n$  no primeiro somatório depois da igualdade

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) = \sum_{n'=1}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_{-n'}}{a_{-n'}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (73)$$

e em seguida aplicando agora  $n'' = n' - 1$  neste mesmo termo, fica explícito que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) = \sum_{n''=0}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_{-(n''+1)}}{a_{-(n''+1)}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right). \quad (74)$$

Porém, pelas frequências de Matsubara, podemos escrever

$$\frac{b_{-(n+1)}}{a_{-(n+1)}} = -\frac{b_n}{a_n} \quad (75)$$

e concluir que o resultado da equação da parte imaginária da soma de Matsubara é zero. Isso é muito importante pois conseguimos zerar a parte imaginária do problema. A parte real é muito mais simples, pois resolvendo  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , vamos encontrar um resultado final para o logaritmo natural do funcional gerador dada por

$$\log \mathcal{Z} = \sum_n \sum_p \left[ \log \left[ \beta^2 \left( \omega_n^2 + (\omega - \mu)^2 \right) \right] + \log \left[ \beta^2 \left( \omega_n^2 + (\omega + \mu)^2 \right) \right] \right]. \quad (76)$$

substituindo agora a frequência de Matsubara para os férmions na equação (76), temos que

$$\log \mathcal{Z} = \sum_n \sum_p \left[ \log \left[ \beta^2 (\omega - \mu)^2 + (2n + 1)^2 \pi^2 \right] + \log \left[ \beta^2 (\omega + \mu)^2 + (2n + 1)^2 \pi^2 \right] \right]. \quad (77)$$

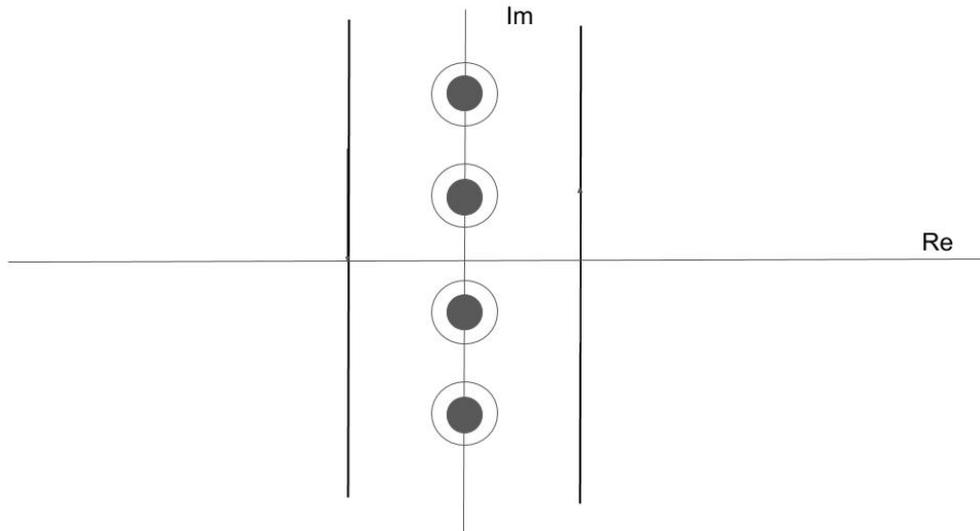
Temos agora um resultado muito parecido com o da equação (38), mas que é claramente real e possui potencial químico não nulo. Isso quer dizer que vale a relação da equação (39)<sup>5</sup> e podemos escolher  $a = 1$ ,  $b = \beta^2 (\omega \pm \mu)^2$ ,  $x = \theta^2$  e  $c = (2n + 1)^2 \pi^2$ , onde fica claro que

$$\log \left[ \beta^2 (\omega \pm \mu)^2 + (2n + 1)^2 \pi^2 \right] = \int_1^{\beta^2 (\omega \pm \mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} + \log(1 + (2n + 1)^2 \pi^2). \quad (78)$$

---

<sup>5</sup> vide página 30.

Figura 2 - Plano complexo para os férmions.



Legenda: Plano complexo onde se está aplicando uma soma de resíduos em uma função tangente hiperbólica.

Fonte: O autor, 2017.

Da mesma forma que para os bósons, podemos abrir a soma em  $n$  dentro de uma integral de resíduos como na equação (41). A Figura 2 descreve o contorno para a integral de resíduos, junto com os polos. Como estamos falando da estatística de Fermi-Dirac, temos os polos em  $i\beta\omega_n/2 = (n + 1/2)\pi$ . Agora é preciso encontrar uma função que consiga descrever todos os polos referentes a frequência de Matsubara. Uma função que possui esses polos para os férmions é a tangente hiperbólica, onde podemos escrever

$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^2 + \theta^2} \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{iz}{2}\right) dz. \quad (79)$$

Abrindo a tangente hiperbólica em termos de exponenciais, teremos duas partes de uma equação tal que

$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\varepsilon}^{-i\infty-\varepsilon} \left(\frac{1}{z^2 + \theta^2}\right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + e^{-iz}}\right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty+\varepsilon}^{-i\infty+\varepsilon} \left(\frac{1}{z^2 + \theta^2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^{iz}}\right). \quad (80)$$

Fazendo uma transformação simples no primeiro termo de (80) tal que  $z \rightarrow -z$ , fica simples escrever que

$$\sum \text{Res}[f] = \frac{1}{2\pi i} 2 \int dz \left(\frac{1}{(\theta - iz)(\theta + iz)}\right) \left(-\frac{1}{1 + e^{iz}} + \frac{1}{2}\right) \quad (81)$$

com os polos sendo em  $\theta = iz$  e  $\theta = -iz$ . Fazendo o contorno, resolvemos o problema e podemos afirmar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 + \theta^2} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right). \quad (82)$$

Logo, voltando a equação (77), podemos então utilizando a equação (82), encontramos

$$\begin{aligned} \log \mathcal{Z} = & \sum_p \left[ \int_1^{\beta^2(\omega-\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right) + \sum_n \log[1 + (2n+1)^2\pi^2] \right] + \\ & + \sum_p \left[ \int_1^{\beta^2(\omega+\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right) + \sum_n \log[1 + (2n+1)^2\pi^2] \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

Da mesma forma que para os bósons desconsideramos os termos que não possuem a dimensionalidade necessária para a grandeza física, e tomando o limite do contínuo, o resultado final para  $\log \mathcal{Z}$  é dado por

$$\log \mathcal{Z} = 2V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \beta\omega + \log \left( 1 + e^{-\beta(\omega-\mu)} \right) + \log \left( 1 + e^{-\beta(\omega+\mu)} \right) \right], \quad (84)$$

onde os dois valores de logaritmos estão associados a termos de uma partícula  $\mu$  e outro termo de uma anti-partícula  $\mu$ . Com esse resultado, é possível agora calcular o grande potencial canônico. Um limite que foi usado para os bósons também pode ser usado para os férmions, que é o limite de massa zero. Desconsiderando o primeiro termo da equação (84) por estar relacionada com a energia de ponto zero, podemos reescrever essa equação para massa nula como

$$\Omega = -VT \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \log \left[ 1 + e^{-\beta(p-\mu)} \right] \log \left[ 1 + e^{-\beta(p+\mu)} \right] \right]. \quad (85)$$

Para resolver a equação (85), basta resolvermos uma integral por partes de forma análoga ao que foi feita para os bósons, e podemos encontrar que

$$\Omega = -\frac{V}{6\pi^2} \int_0^\infty p^3 dp \left[ \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(p+\mu)} + 1} \right]. \quad (86)$$

Fazendo uma substituição de variáveis, fica simples ver que

$$\left[ \frac{1}{e^{\beta(p-\mu)} + 1} + \frac{1}{e^{\beta(p+\mu)} + 1} \right] = T^4 \left[ \int_{-\beta\mu}^\infty dx \frac{(x + \beta\mu)^3}{e^x + 1} + \int_{\beta\mu}^\infty dx \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} \right] \quad (87)$$

e também podemos abrir este resultado em outras integrais tal que

$$\int_{-\beta\mu}^{\infty} dx \frac{(x + \beta\mu)^3}{e^x + 1} + \int_{\beta\mu}^{\infty} dx \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} = \int_{-\beta\mu}^0 dx \frac{(x + \beta\mu)^3}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} dx - \frac{(x + \beta\mu)^3}{e^x + 1} - \int_0^{\beta\mu} dx \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} dx \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1}. \quad (88)$$

As integrais com limites de 0 a  $\infty$  possuem solução a partir de funções especiais. juntando apenas as integrais que possuem esses limites, encontramos

$$\int_0^{\infty} dx \frac{(x + \beta\mu)^3}{e^x + 1} + \int_0^{\infty} dx \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x + 1} + 6(\beta\mu)^2 \int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^x + 1}. \quad (89)$$

Utilizando as integrais especiais

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{\nu-1}}{e^x + 1} = (1 - 2^{1-\nu})\Gamma(\nu)\zeta(\nu), \quad (90)$$

para  $\nu > 0$  fica simples escrever que

$$2 \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{e^x + 1} = 2(1 - 2^{1-4})\Gamma(4)\zeta(4) = \frac{7\pi^4}{60}. \quad (91)$$

e

$$6(\beta\mu)^2 \int_0^{\infty} dx \frac{x}{e^x + 1} = 6(\beta\mu)^2(1 - 2^{1-2})\Gamma(2)\zeta(2) = \frac{(\beta\mu)^2\pi^2}{2}. \quad (92)$$

Agora, para as equações que possuem os limites em  $-\beta\mu$  e  $\beta\mu$  da equação (88), são escritas por

$$\int_{-\beta\mu}^0 dx \frac{(x + \beta\mu)^3}{e^x + 1} - \int_0^{\beta\mu} dx \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} = \int_{\beta\mu}^0 dx \left( -\frac{(-x + \beta\mu)^3}{e^{-x} + 1} + \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} \right). \quad (93)$$

Sabendo que

$$-\frac{(-x + \beta\mu)^3}{e^{-x} + 1} + \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} = (x - \beta\mu)^3 \quad (94)$$

e aplicando a transformação  $y = x - \beta\mu$ , encontramos que a integral da equação (93) é dada por

$$\int_{\beta\mu}^0 dx \left( -\frac{(-x + \beta\mu)^3}{e^{-x} + 1} + \frac{(x - \beta\mu)^3}{e^x + 1} \right) = \frac{(\beta\mu)^4}{4}. \quad (95)$$

Dessa forma, podemos concluir que o grande potencial termodinâmico para os

férmions sem massa  $\Omega_F$  é dado pelas equações (91), (92) e (95) e é escrito como

$$\Omega_F = -\frac{V}{6\pi^2} \left[ \frac{7\pi^4 T^4}{60} + \frac{\mu^2 \pi^2 T^2}{2} + \frac{\mu^4}{4} \right]. \quad (96)$$

Porém, esse resultado é para 1 espécie de férmions. Para férmions com grau de degenerescência  $\nu_f$ , basta escrevermos

$$\Omega_F = -\nu_f \frac{V}{6\pi^2} \left[ \frac{7\pi^4 T^4}{60} + \frac{\mu^2 \pi^2 T^2}{2} + \frac{\mu^4}{4} \right]. \quad (97)$$

Por exemplo, para  $N_f$  sabores de quarks na representação fundamental de  $SU(N_c)$ , temos  $\nu_f = 2N_c N_f$ , onde  $N_c$  é o número de cores<sup>6</sup>. Para toda a dissertação, vamos nos limites a utilizar apenas os quarks *up* e *down*, resultando em  $N_f = 2$ .

Com posse das funções de partição para os casos de bósons e de férmions livres, poderemos calcular toda a termodinâmica destes sistemas. Estas fórmulas também nos fornecem um ponto de partida para este estudo em modelos efetivos a temperatura e densidade finitas, que começaremos a discutir a partir do capítulo a seguir.

---

<sup>6</sup> Discutiremos mais adiante o significado de “cor” e “sabor” no contexto da Física das Interações Fortes.

## 2 UMA BREVE DESCRIÇÃO DA CROMODINÂMICA QUÂNTICA

O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço: quanto maior a nossa compreensão, maior o nosso contacto com o desconhecido.

*Blaise Pascal*

### 2.1 Teoria clássica da QCD

A QCD, como já dito na introdução, é uma teoria que envolve quarks e glúons. Esta teoria está associada a um caso particular da teoria de Yang-Mills  $SU(N)$ , mas sendo  $N = 3$ . Para entendermos a teoria de Yang-Mills, comecemos por analisar o próprio grupo  $SU(N)$ , no qual podemos representar as matrizes de sua álgebra como

$$U(x) = e^{-ig\theta_a(x)t_a}, \quad (98)$$

sendo  $t_a$  os geradores desse grupo e  $\theta_a(x)$  são os parâmetros da transformação, que são dependentes do ponto do espaço-tempo, por se tratar de uma transformação de calibre. Os índices  $a, b, c, \dots$  são os chamados índices de cor na QCD. Esses geradores obedecem a regra de comutação

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t^c. \quad (99)$$

Vamos agora construir uma lagrangiana que seja simétrica sob esse grupo. Esta lagrangiana clássica precisa de campos que representem separadamente os quarks e os glúons (PESKIN; SCHROEDER, 1995; WEINBERG, 1995; VANDERSICKEL, 2011). Em primeiro lugar, para os glúons, definimos a ação de Yang-Mills  $SU(N)$  como

$$S_{YM} = \int d^4x \frac{1}{2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (100)$$

onde  $F_{\mu\nu}$  é o tensor de força

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (101)$$

e  $A_\mu$  o campo dos glúons, que pertence à representação adjunta de  $SU(N)$ , onde

$$A_\mu = A_\mu^a t^a. \quad (102)$$

O campo  $F_{\mu\nu}$  também pode ser escrito como

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a t^a, \quad (103)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{kl}^a A_\mu^k A_\nu^l. \quad (104)$$

Quanto a simetria de  $SU(N)$ , nós definimos que  $A_\mu$  se transforma como

$$A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (105)$$

que é uma transformação de calibre. Essa transformação é possível por  $A_\mu$  pertencer à representação adjunta. Assim,  $F_{\mu\nu}$  transforma-se por

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger, \quad (106)$$

e assim a ação de Yang-Mills é invariante sob o grupo de simetria  $SU(N)$ . Infinitesimalmente, a transformação dada pela equação (105) se torna

$$\delta A_\mu^a = -D_\mu^{ab} \theta^b, \quad (107)$$

onde  $D_\mu^{ab}$  é a derivada covariante na representação adjunta

$$D_\mu^{ab} = \delta_\mu \delta^{ab} - g f^{abc} A_\mu^c. \quad (108)$$

Em segundo lugar, vamos incluir o campo de matéria na ação da QCD, pois estes vão estar associados aos quarks. Escrevendo a ação de Dirac para a QCD como sendo

$$S_D = \int d^4x \left[ \bar{q}^{i,i'} \left( \delta^{i'j'} \gamma^\mu D_\mu^{ij} - \delta^{ij} M^{i'j'} \right) q^{j,j'} \right], \quad (109)$$

onde os quarks são representados pelos campos  $q^{i,i'}$  e  $\bar{q}^{i,i'}$ . Os índices  $i, j = 1, \dots, N_c$  representam as cores associadas a determinado quark para a teoria, enquanto  $i', j' = 1, \dots, N_f$  correspondem aos diversos sabores de quarks. Por serem campos da representação fundamental de  $SU(N)$ , os campos de matéria se transformam sob uma transformação

de calibre como

$$q'_i = U_{ij} q_j, \quad (110)$$

$$\bar{q}'_i = \bar{q}_j U_{ji}^\dagger. \quad (111)$$

A derivada covariante da equação (109) é dada na representação fundamental por

$$D_\mu^{ij} = \delta^{ij} \partial_\mu - ig A_\mu^a (t_a)^{ij}, \quad (112)$$

e a matriz de massas  $\mathbb{M}$  para três sabores é dada por

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Logo, a ação da QCD clássica é descrita por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{cl}, \quad (114)$$

onde sua lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{cl} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{q}^{i,i'} \left( \delta^{i'j'} \gamma^\mu D_\mu^{ij} - \delta^{ij} M^{i'j'} \right) q^{j,j'}. \quad (115)$$

## 2.2 Lagrangiana de Faddeev-Popov

A descrição que foi dada pela equação (128) está incompleta, pois a transformação de calibre

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a \quad (116)$$

revela um problema. Ela possui modos problemáticos quando  $A_\mu = \frac{1}{g} D_\mu \alpha$ , ou seja, aqueles que são equivalentes de calibre para  $A_\mu(x) = 0$ . Pela integral funcional de Yang-Mills

$$\int \mathcal{D}A \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \right) \right], \quad (117)$$

podemos afirmar que ela é mal definida porque nós estamos integrando redundantemente sobre uma infinidade contínua de configurações de campos fisicamente equivalentes. Para corrigir esse problema, nós gostaríamos de isolar a parte que interessa da integral funcional, que contém as configurações físicas apenas uma vez.

Uma formulação para isso foi proposta por Faddeev e Popov (FADDEEV; POPOV,

1967). Primeiramente, seja  $G(A)$  uma função que desejamos defini-la igual a zero como uma condição de fixação de calibre. Nós podemos restringir a integral funcional para cobrir apenas as configurações com  $G(A) = 0$  ao inserir uma função delta funcionaria,  $\delta(G(A))$ . Para fazer isso, Faddeev e Popov inseriram na integral funcional

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right). \quad (118)$$

Ao aplicar a equação (118) na integral funcional de Yang-Mills, podemos escrever

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right). \quad (119)$$

Escolhemos a condição de calibre de Lorentz generalizada

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x), \quad (120)$$

onde  $\omega^a(x)$  pode ser qualquer função escalar. O determinante funcional da equação (119) é o mesmo para o calibre de Lorentz,  $\det(\delta G(A^\alpha)/\delta \alpha) = \det(\partial^\mu D_\mu/g)^7$ . Logo, podemos então dizer que a integral funcional pode ser escrita como

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu\right) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)). \quad (121)$$

A igualdade acima é verdadeira para qualquer valor de  $\omega(x)$ , de forma que podemos substituir todo o lado direito dessa equação por qualquer combinação linear devidamente normalizada envolvendo diferentes funções de  $\omega(x)$ . Logo, podemos então integrar essa equação sobre todos os  $\omega(x)$ , com uma função Gaussiana centrada em  $\omega = 0$ . Logo, podemos escrever

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = N(\xi) \int \mathcal{D}\omega \exp\left[-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}\right] \det\left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu\right) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)), \quad (122)$$

onde  $N(\xi)$  é uma constante de normalização sem importância. Usando a delta na equação

---

<sup>7</sup> Utilizamos o determinante desta forma, pois estamos trabalhando com teorias de calibre não abelianas. Em teorias abelianas, teríamos  $\det(\delta G(A^\alpha)/\delta \alpha) = \det(\partial^2/g)$ .

acima, podemos escrever

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = N(\xi) \det\left(\frac{1}{g}\partial^2\right) \left(\int \mathcal{D}\alpha\right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \exp\left[-i \int d^4x \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi}\right]. \quad (123)$$

Nós podemos escolher  $\xi$  como qualquer constante finita. Efetivamente, nós devemos agora adicionar um novo termo  $-(\partial^\mu A_\mu)^2/2\xi$  na lagrangiana da QCD. Além disso, também podemos representar o determinante funcional como uma integral funcional. Utilizando o mesmo conceito para as integrais de Grassmann, podemos expressar então este termo como uma integral funcional sobre um novo conjunto de campos anti-comutantes pertencentes a representação adjunta:

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp\left[i \int d^4x \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu) c^a\right]. \quad (124)$$

Na equação acima, acoplamos o termo  $1/g$  na normalização desses novos campos  $c$  e  $\bar{c}$ , no qual chamamos de *ghosts* de Faddeev e Popov. A lagrangiana para os *ghosts* é então dada por

$$\mathcal{L}_{ghost} = \bar{c}^a (-\partial^2 \delta^{ac} - g \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c. \quad (125)$$

Portanto, o procedimento de fixação de calibre de Faddeev e Popov leva-nos a acrescentar na lagrangiana da QCD um termo de fixação de calibre

$$S_{gf} = \int d^4x \left( \mathcal{L}_{ghost} - \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi} \right). \quad (126)$$

Dessa forma, podemos então escrever a lagrangiana final da QCD, incluindo os efeitos da fixação de calibre de Faddeev-Popov, como

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{q}^{i,i'} \left( \delta^{i'j'} \gamma^\mu D_\mu^{ij} - \delta^{ij} M^{i'j'} \right) q^{j,j'} + \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c^c. \quad (127)$$

Com esta nova ação, podemos agora reescrever o propagador dos campos gluônicos como

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} e^{-ik(x-y)}, \quad (128)$$

com o parâmetro  $\xi$  de calibre livremente ajustável. O propagador dos *ghosts*, obtido é dado por

$$\langle c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} \delta^{ab} e^{-i \cdot k(x-y)}. \quad (129)$$

Figura 3 - Regras de Feynman - *ghosts*.

$$\begin{aligned}
 a \cdots \leftarrow \cdots b &= \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \\
 \begin{array}{c} b, \mu \\ \text{wavy line} \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad c \\ \text{ghost lines} \\ \text{momentum } p \text{ entering vertex} \end{array} &= -gf^{abc} p^\mu
 \end{aligned}$$

Legenda: Regras de Feynman envolvendo os *ghosts*.

Fonte: PESKIN; SCHROEDER, 1995, p.515.

O propagador dos *ghosts* pode ser visto no primeiro diagrama da figura (3). O termo de interação da equação (125) implica em um vértice com duas pernas de *ghosts* e uma com glúons, como mostra a figura (3).

A função desses novos campos  $c$  e  $\bar{c}$  é muito importante, pois eles servem como graus de liberdade “negativos” para cancelar os efeitos dos estados de polarização não físicos dos glúons de calibre.

### 2.3 Regras de Feynman

As regras de Feynman para a Lagrangiana da QCD podem ser encontradas a partir da integral funcional sobre os campos  $q_i$ ,  $\bar{q}_i$  e  $A_\mu^a$  (PESKIN; SCHROEDER, 1995). O propagador do gluon é dado pela eq. (128), o propagador do ghost é dado por (129), enquanto o propagador para quarks é dado por

$$\langle q^{i,i'}(x) \bar{q}^{j,j'}(y) \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( \frac{i}{\gamma^\mu k_\mu - m} \right) \delta^{ij} \delta^{i'j'} e^{-ik \cdot (x-y)}, \quad (130)$$

Para encontrar os vértices dos diagramas, nós escrevemos os termos não lineares da lagrangiana (115). Chamando  $\mathcal{L}_0$  a lagrangiana para campos livres, temos

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_0 + gA_\lambda^a \bar{q}_i \gamma^\lambda t^a q_i - gf^{abc} (\partial_\kappa A_\lambda^a) A^{\kappa b} A^{\lambda c} - \frac{1}{2} g^2 (f^{eab} A_{\kappa a} A_{\lambda b}) (f^{ecd} A_c^\kappa A_d^\lambda). \quad (131)$$

O primeiro termo não linear da equação (131) nos dá o vértice da relação de um quark-antiquark-glúon, como é visto no primeiro diagrama da figura (4). O segundo termo não linear da mesma equação relaciona o encontro de três glúons, dado pelo segundo

Figura 4 - Vértices para a QCD em nível de árvore.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } = ig\gamma^\mu t^a \\
 & \text{Diagram 2: } = gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu] \\
 & \text{Diagram 3: } = -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]
 \end{aligned}$$

Legenda: Vértices para Regras de Feynman envolvendo quarks e glúons.

Fonte: PESKIN; SCHROEDER, 1995, p.507.

diagrama da figura (4). Temos nesse caso 3! possibilidades de contrações, que alternam no sinal de acordo com a anti-simetria total de  $f^{abc}$ . O terceiro termo relaciona o vértice para 4 glúons, dado pelo terceiro diagrama da figura (4). Agora, temos 4! possíveis contrações, das quais 4 delas são iguais entre si.

## 2.4 Simetria BRST

Para mostrar que esse cancelamento se estende para uma teoria de interações completa, Becchi, Rouet, Stora e Tyutin introduziram uma nova simetria da lagrangiana de fixação de calibre (BECCHI; ROUET; R., 1976; TYUTIN, 2008). Essa simetria BRST tem um parâmetro contínuo que é um número anti comutante. Para escrever a simetria, vamos reescrever a lagrangiana da QCD para introduzir um novo campo escalar  $B^a$ , tal que

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{q}^{i,i'} (\delta^{i'j'} \gamma^\mu D_\mu^{ij} - \delta^{ij} M^{i'j'}) q^{j,j'} - \frac{\xi}{2} (B^a)^2 + B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c^c. \quad (132)$$

O novo campo  $B^a$  tem um termo quadrático sem derivadas, então ele não é um campo de propagação normal. Esses campos não possuem dinâmica independente, pois se fizermos a integral funcional sobre  $B^a$  após completar quadrados na equação (132),

conseguimos encontrar precisamente a equação (127). Nós chamamos esse tipo de campo de campo auxiliar ou multiplicador de Lagrange.

Agora, seja  $\epsilon$  um parâmetro infinitesimal anti-comutante. Consideremos as seguintes transformações dos campos em (132):

$$\delta A_\mu^a = -\epsilon D_\mu^{ac} c^c \quad (133)$$

$$\delta q^{i,j'} = i g \epsilon c^a (t^a)^{ij} \delta^{i'j'} q^{j,j'} \quad (134)$$

$$\delta c^a = +\frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c \quad (135)$$

$$\delta \bar{c}^a = \epsilon B^a \quad (136)$$

$$\delta B^a = 0. \quad (137)$$

A transformação dos campos  $A_\mu$  e  $q$  são transformações de calibre locais, cujo parâmetro é proporcional ao campo de *ghost*:  $\alpha^a(x) = g \epsilon c^a(x)$ . Logo, os dois primeiros termos da equação (132) são invariantes sobre a transformação dos campos dos quarks e dos glúons. O terceiro termo da equação (132) é trivialmente invariante utilizando as transformações BRST. A transformação do quarto termo dessa lagrangiana cancela com a transformação de  $\bar{c}^a$  no último termo. Resta agora apenas analisar o termo  $c^a$ :

$$\delta(D_\mu^{ac} c^c) = D_\mu^{ac} \delta c^c + g f^{abc} \delta A_\mu^b c^c. \quad (138)$$

Utilizando as transformações BRST equivalentes, podemos reescrever  $\delta(D_\mu^{ac} c^c)$  como

$$\delta(D_\mu^{ac} c^c) = -\frac{1}{2} g \epsilon \partial_\mu (f^{abc} c^b c^c) - \frac{1}{2} g^2 \epsilon f^{abc} f^{cde} A_\mu^b c^d c^e + g \epsilon f^{abc} (\partial_\mu c^b) c^c + g^2 \epsilon f^{abc} f^{cde} A_\mu^d c^e c^c. \quad (139)$$

Os termos da equação (139) que possuem ordem  $g$  se cancelam. Usando agora a natureza anti comutante dos campos de *ghost* e trocando o nome dos índices, podemos escrever os termos de ordem  $g^2$  como

$$-\frac{1}{2} g^2 f^{abc} f^{cde} (A_\mu^b c^d c^e + A_\mu^d c^e c^b + A_\mu^e c^b c^d), \quad (140)$$

que é nulo pela identidade de Jacobi. Logo, as transformações BRST são uma simetria global da lagrangiana de fixação de calibre com o termo  $B^a$ , para qualquer valor de  $\xi$ .

A transformação BRST tem uma característica notável, que é uma consequência natural de sua natureza anti-comutante. Seja  $Q\phi$  a transformação BRST de um campo  $\phi$ :  $\delta\phi = \epsilon Q\phi$ . Isso resulta por exemplo em  $QA_\mu^a = -D_\mu^{ac} c^c$ . Para qualquer campo, a variação

BRST de  $Q\phi$  gera  $Q^2\phi = 0$ , onde essa relação equivale ao operador identidade

$$Q^2 = 0. \quad (141)$$

Nós dizemos que o operador BRST  $Q$  é nilpotente quando apresenta a propriedade acima. Logo, após essa nova simetria da lagrangiana da QCD, podemos tratar de alguns modelos efetivos que foram propostos para a QCD.

## 2.5 Simetria Quiral na QCD

Voltemos à lagrangiana da QCD, equação (127), e concentremo-nos nos termos referentes aos campos de matéria. Neles, o campo  $q$  pode ser decomposto em componentes que chamamos de mão direita e mão esquerda. Essas componentes são dadas pelos projetores quirais

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \\ P_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2}, \end{aligned} \quad (142)$$

onde podemos escrever para o campo  $q$

$$q = (P_L + P_R)q = q_L + q_R. \quad (143)$$

onde  $q_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}q$  e  $q_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}q$ . Definimos agora  $\gamma^5$  como

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 \quad (144)$$

sendo  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ) as matrizes de Dirac. A representação de  $\gamma^5$  é diagonal tal que

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (145)$$

onde  $q_R$  e  $q_L$  são autovetores de  $\gamma^5$ . Escrevendo a lagrangiana clássica da QCD, em termos dos campos  $q_R$  e  $q_L$ , teremos

$$\mathcal{L}_{cl} = \sum_{f=1}^{N_f} i(\bar{q}_{L,f}\gamma_\mu D^\mu q_{L,f} + \bar{q}_{R,f}\gamma_\mu D^\mu q_{R,f}) - \sum_{f=1}^{N_f} (\bar{q}_{R,f}m_f q_{L,f} + \bar{q}_{L,f}m_f q_{R,f}) - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (146)$$

Os termos com massa presente na lagrangiana da QCD após a inclusão dos quarks

de mão esquerda e direita é muito importante, pois revela como a simetria quiral não é exata. Os termos com massa apresentam termos  $\bar{q}_R q_L$  e  $\bar{q}_L q_R$ , que caracterizam uma quebra de simetria quiral. Logo, fica muito claro ver que a simetria quiral só é conservada na QCD quando consideramos quarks sem massa. Para quarks massivos, essa simetria é claramente quebrada por conta dos termos cruzados nos termos de massa da lagrangiana. Por outro lado, quando é atingido um limite de quarks sem massa, a lagrangiana da QCD revela uma simetria muito especial: uma transformação global  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$  sobre os quarks

$$\begin{aligned} q_L &\rightarrow U_L q_L & \text{para } U(N_f)_L \\ q_R &\rightarrow U_R q_R & \text{para } U(N_f)_R. \end{aligned} \tag{147}$$

deixa a ação invariante. Em (147), denotamos  $q$  como um vetor  $N_f$ -dimensional no espaço dos sabores com cada sabor sendo um campo espinorial de Dirac quadridimensional.

As matrizes  $U_L$  e  $U_R$  atuam no espaço de Dirac, assim como no espaço de sabores. Elas são definidas tais que

$$\begin{aligned} U_L &= \exp \left[ -i P_L \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \theta_L^a t_a \right] \\ U_R &= \exp \left[ -i P_R \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \theta_R^a t_a \right], \end{aligned} \tag{148}$$

onde os parâmetros  $\theta_L^a$  e  $\theta_R^a$  são constantes (pois a simetria é global). É importante frisar aqui que para qualquer grupo de Lie  $U(N_f)$  os geradores são denotados por  $t_a$ , tal que  $a = 0, 1, 2, \dots, N_f^2 - 1$ , enquanto os geradores  $N_f^2 - 1$  de  $SU(N_f)$  são denotados por  $t_i$ , tal que  $i = 1, 2, \dots, N_f^2 - 1$  (HABERSETZER, 2011). Estes geradores  $t_i$  obedecem a relação de comutação

$$[t_i, t_j] = i f_{ijk} t_k. \tag{149}$$

Outra forma de se estudar a simetria  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$  é através da análise das correntes de Noether. O teorema de Noether afirma que, se uma lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a(x^\mu), \partial_\mu \phi_a(x^\mu)) \tag{150}$$

é invariante sob as transformações

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \delta x^\mu, \quad \phi_a \rightarrow \phi'_a = \phi_a + \varepsilon \delta \phi_a^\mu, \tag{151}$$

com  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vão então existir correntes de Noether conservadas

$$j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \delta \phi_a - \delta x^\mu \mathcal{L} \quad (152)$$

de modo que

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (153)$$

e que cada corrente conservada corresponde a uma carga conservada

$$Q_a = \int j_a^0 d^3x. \quad (154)$$

Logo, as correntes de mão esquerda e mão direita podem agora ser obtidas considerando a variação de  $\delta \mathcal{L}_{QCD}$  supondo transformações infinitesimais  $\delta \theta_R$  e  $\delta \theta_L$  em (148).

Utilizando as transformações para  $q$  e as matrizes  $U_L$  e  $U_R$  no início dessa subsecção, podemos reescrever a lagrangiana da QCD como

$$\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD} + \delta \mathcal{L}_{QCD} \quad (155)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{QCD} = & \bar{q}_L t_a \gamma_\mu q_L \partial^\mu \theta_L^a + \bar{q}_R t_a \gamma_\mu q_R \partial^\mu \theta_R^a - i \theta_L^a (\bar{q}_L t_a M q_R - \bar{q}_R t_a M q_L) - \\ & - i \theta_R^a (\bar{q}_R t_a M q_L - \bar{q}_L t_a M q_R). \end{aligned} \quad (156)$$

Assim, as correntes de Noether associadas são

$$j_{aL}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial(\partial^\mu q_{aL})} \delta q_{aL} \quad (157)$$

$$j_{aR}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial(\partial^\mu q_{aR})} \delta q_{aR}. \quad (158)$$

Vamos aqui definir 2 parâmetros independentes  $\theta_{V_a}$  e  $\theta_{A_a}$ , onde para transformações vetoriais,

$$\theta_{L_a} = \theta_{R_a} \quad (159)$$

$$\theta_{V_a} = \theta_{L_a} + \theta_{R_a} \quad (160)$$

e para transformações vetoriais axiais,

$$\theta_{L_a} = -\theta_{R_a} \quad (161)$$

$$\theta_{A_a} = \frac{-\theta_{L_a} + \theta_{R_a}}{2}. \quad (162)$$

Ao permitir que as transformações  $U(N_f)_R \times U(N_f)_R$  atuem simultaneamente nos campos dos quarks de mão esquerda e mão direita, podemos definir transformações globais vetoriais e vetoriais axiais de acordo com

$$q \rightarrow q' = U_L U_R q = \exp[-i\theta_V^a t_a] q \quad \text{para } U(N_f)_V \quad (163)$$

$$q \rightarrow q' = U_L U_R q = \exp[-\gamma^5 \theta_A^a t_a] q \quad \text{para } U(N_f)_A, \quad (164)$$

onde  $U_L$  e  $U_R$  são transformações unitárias dependentes de do parâmetro  $\theta$ . As correntes correspondentes as transformações vetoriais e vetoriais axiais são então dadas por<sup>8</sup>

$$V_a^\mu = (j_L + j_R)_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu t_a q \quad (165)$$

$$A_a^\mu = (j_R - j_L)_a^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 t_a q \quad (166)$$

com as divergências

$$\partial_\mu V_a^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \theta_L^a} + \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \theta_R^a} = i\bar{q}[M, t_a]q \quad (167)$$

$$\partial_\mu A_a^\mu = \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \theta_L^a} - \frac{\partial \delta \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \theta_R^a} = i\bar{q}\{t_a, M\}\gamma^5 q \quad (168)$$

Para analisarmos as correntes representadas nas equações (165) e (166), podemos dividi-las em duas correntes simples e duas correntes pertencentes a representação adjunta do grupo  $U(N_f) = U(1) \times SU(N_f)$ . Três cenários possíveis podem facilitar a análise dessas correntes: todos os quarks possuem massa nula, todos os quarks possuem massa e são degenerados (possuem mesmo valor de massa  $m$ ), e todos os quarks são massivos e não degenerados (possuem massas diferentes).

Primeiro, podemos dizer que a simetria  $U(1)_V$  corresponde a conservação do número de quarks; seu gerador  $t_0$  é proporcional a uma matriz unitária e comuta com todos os geradores. Logo, podemos dizer que a corrente  $U(1)_V$  é dada por

$$V_0^\mu = \bar{q} \gamma^\mu t_0 q \quad (169)$$

e sua divergência dada por

$$\partial_\mu V_0^\mu = i\bar{q}[M, t_0]q = 0. \quad (170)$$

É importante ver aqui que mesmo que os quarks sejam massivos, a simetria vetorial  $U(1)_V$  se mantém e o número bariônico é conservado.

Quando analisamos  $SU(N_f)_V$ , é quebrada no caso de quarks massivos e preservada

---

<sup>8</sup> Nestas equações, o quadrivetor  $A_\mu^a$  corresponde à corrente axial, e não ao campo de calibre. No restante desta dissertação, o símbolo  $A_\mu^a$ , denotará o campo de calibre.

para quarks massivos não degenerados. A matriz de massa dos quarks comuta então com todos os geradores.

Então, as  $N_f^2 - 1$  correntes são conservadas individualmente e  $SU(N_f)_V$  se mantém intacta. Dizemos então que  $SU(N_f)_V$  é a simetria de sabor padrão. Para o caso de  $N_f = 2$ , trata-se de uma simetria de isospin.

Para o caso de  $SU(N_f)_A$ , se as massas dos quarks forem zero, teremos

$$\partial_\mu A_i^\mu = \bar{q} \{t_i, M\} \gamma^5 q. \quad (171)$$

A divergência de  $U(1)_A$  é obtida como

$$\partial_\mu A_0^\mu = 2i\bar{q}M\gamma^5 q, \quad (172)$$

de modo que a corrente axial se conserva classicamente quando temos quarks sem massa. Entretanto, em nível quântico, a simetria axial é quebrada dinamicamente, mesmo com quarks sem massa (HOOFT, 1976).

## 2.6 Quebra espontânea de simetria

Este conceito tão geral teve suas primeiras aplicações fora do âmbito da teoria quântica de campos, como é o caso da abordagem da superfluidez feita por Bogolyubov (BOGOLYUBOV, 1947) e da Quebra Dinâmica de Simetria empregada na teoria da supercondutividade elaborada por Bardeen, Cooper e Schrieff (BARDEEN; N.; SCHRIEFFER, 1957). Os métodos de quebra espontânea de simetria utilizados atualmente em teoria quântica de campos foram primariamente derivados destes trabalhos anteriores e, posteriormente, aprimorados dentro da própria área. Assim, podemos dizer que a quebra espontânea de simetria ocorre quando a ação descrevendo um certo sistema físico possui alguma simetria que seu estado de vácuo não possua; ou, ainda, que a simetria da ação é maior que a de seu vácuo. (PESKIN; SCHROEDER, 1995; COLEMAN, 1988; NUNES, 2011).

Vejamos um exemplo mais simples, envolvendo campos escalares. Para uma lagrangiana de simetria  $O(N)$  da forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi_i)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\Phi_i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\Phi_i)^2]^2 \quad (173)$$

e  $\mu^2 > 0$  existe exatamente um estado fundamental de posição  $\phi_0 = 0$  e o estado fundamental tem a mesma simetria sob transformações  $O(N)$  do campo  $\phi_i \rightarrow O_{ij}\phi_j$ , para  $i, j = 0, 1, \dots, N-1$  da lagrangiana. O número de simetrias do estado fundamental é então o mesmo da dimensão do grupo de simetria da lagrangiana, e todos os  $\frac{N(N-1)}{2}$  geradores

de  $O(N)$  aniquilam o estado fundamental

$$\Phi'_0 = U\Phi_0 = 0. \quad (174)$$

Agora, se  $\mu^2 < 0$ , o estado fundamental é movido de uma distância constante  $\phi_0$  a origem. Em primeiro lugar, o estado fundamental é ainda invariante sob rotações no plano  $N$  dimensional abrangido pelos campos  $\phi_i$ , tal que  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ , mas assim que alguém atribua um valor esperado no vácuo para um campo específico

$$\Phi_0 = (\phi_0, 0, 0, \dots, 0), \quad (175)$$

a simetria é espontaneamente quebrada, pois agora o estado fundamental é invariante sob transformações que envolvem as  $N - 1$  últimas componentes. Em outras palavras o estado de vácuo é simétrico por transformações da álgebra de  $O(N - 1)$ . Dizemos então que a simetria  $O(N)$  da lagrangiana está “quebrada” ou “escondida” no estado de vácuo (cuja simetria manifesta é o  $O(N - 1)$ ).

Goldstone propôs um teorema sobre as quebras espontâneas de simetria (GOLDSTONE, 1961; GOLDSTONE; SALAM; WEINBERG, 1962). Ele afirma que, se uma simetria contínua é espontaneamente quebrada, surgem tantos campos escalares sem massa quantos forem os geradores quebrados no estado fundamental. Mais precisamente, se uma lagrangiana é invariante sob um grupo de simetria contínua global  $G$  e o número de geradores de  $G$  é  $N$ , enquanto o estado fundamental é invariante apenas sob um grupo  $H$ , com a dimensão  $M$ , então, existem  $N - M$  partículas de spin 0 sem massa. Expandir o potencial sobre o seu mínimo dá origem ao termo de massa do campo correspondente à simetria não quebrada, enquanto os campos correspondentes às simetrias quebradas são sem massa. Essas partículas sem massa são chamados de bósons de Goldstone. No caso da quebra  $O(N) \rightarrow O(N - 1)$ , a partir do teorema de Goldstone, teremos  $N - 1$  partículas sem massa.

Para o caso da quebra espontânea de simetria quiral, para  $N_f = 2$  temos que, associada à quebra de  $SU(2)_A$ , há três bósons de Goldstone, correspondentes aos três geradores (“quebrados”) de  $SU(2)_A$ . Estes três bósons de Goldstone são então identificados com os píons  $\pi^\pm$  e  $\pi^0$ . Porém, embora essas partículas possuam massa não nula, ela é muito pequena na escala hadrônica ( $m_\pi \simeq 0.15 m_{proton}$ ). Como essas partículas surgem de uma quebra espontânea de simetria, chamamos estas de pseudo-bósons de Goldstone.

Um outro efeito importantíssimo da quebra espontânea da simetria quiral é a geração de massa para os quarks. De fato, a massa de corrente dos três quarks de valência (oriunda da sua interação com o bóson de Higgs) corresponde a menos de 2% da massa do próton: os pouco mais de 98% restantes têm como origem a quebra espontânea da simetria quiral.

### 3 ALGUNS MODELOS PARA A MATÉRIA FORTEMENTE INTERAGENTE EM CONDIÇÕES EXTREMAS

As vezes, são as  
pessoas que ninguém espera nada que fazem  
as coisas que ninguém consegue imaginar  
*Alan Turing*

Muitos modelos foram desenvolvidos ao longo da história da Física das Interações Fortes para que se pudesse descrever o seu comportamento em temperaturas diferentes. Esta seção vai explorar alguns modelos relacionados a matéria fortemente interagente.

#### 3.1 Gás de ressonâncias hadrônicas

Um dos modelos importantes para tratar da QCD em temperaturas abaixo da transição de confinamento é o gás de ressonâncias hadrônicas (GRH). Para falar disso, vamos primeiro entender o que vem a ser uma ressonância.

Um número muito grande de partículas possuem sua meia-vida curta demais (partículas instáveis) para serem observadas de forma direta. Para que consigamos mostrar a existência delas, são observados picos na distribuição de energia dos produtos de decaimento das mesmas (BREIT; WIGNER, 1936). A fórmula que descreve os processos de produção e decaimento de partículas instáveis é a chamada fórmula de Breit-Wigner (PESKIN; SCHROEDER, 1995)

$$f(E) \propto \frac{1}{E - E_0 + i\Gamma/2}, \quad (176)$$

onde  $f(E)$  é a amplitude de espalhamento,  $\Gamma$  a taxa de decaimento de uma partícula instável,  $E_0$  a energia das partículas incidentes e  $E$  a energia das partículas incididas. Esta fórmula foi aplicada primeiramente para a dispersão de nêutrons lentos, e é não-relativística com parâmetros independentes de energia (GONCHAR; KALOSHIN; LOMOV, 2007). A fórmula de Breit-Wigner mais simples é aplicável apenas para estados estreitos e a descrição de uma curva de ressonância para ressonâncias de hádrons com elevada precisão experimental necessita de alguma fórmula de ressonância melhorada. Na fenomenologia hadrônica existem métodos ligeiramente diferentes para descrever a contribuição de ressonâncias, mas praticamente todos os métodos são baseados na teoria quântica de campos efetiva.

Dessa forma, podemos afirmar que o modelo do gás de ressonâncias hadrônicas baseia-se na ideia de que um gás de hádrons interagente em seu estado fundamental pode

Tabela 1 - Tabela de Bárions.

| Partículas          | Spin | Massa [MeV] |
|---------------------|------|-------------|
| p                   | 1/2  | 938.3       |
| n                   | 1/2  | 939.6       |
| $N(1440)1/2^+$      | 1/2  | 1430        |
| $N(1520)3/2^-$      | 3/2  | 1515        |
| $N(1535)1/2^-$      | 1/2  | 1535        |
| $N(1875)3/2^-$      | 3/2  | 1875        |
| $N(1900)3/2^+$      | 3/2  | 1900        |
| $\Delta(1232)3/2^+$ | 3/2  | 1232        |
| $\Delta(1600)3/2^+$ | 3/2  | 1600        |
| $\Delta(1620)1/2^-$ | 1/2  | 1630        |

Legenda: Partículas bariônicas com seus respectivos valores de spin e massa.

Fonte: PATRIAGNANI et al., 2016,  
Adaptado pelo autor.

Tabela 2 - Primeira Tabela de Mésons.

| Partícula     | Spin | Massa [MeV] | Partícula      | Spin | Massa [MeV] |
|---------------|------|-------------|----------------|------|-------------|
| $\pi^\pm$     | 0    | 139.6       | $f_2(1270)$    | 2    | 1275.1      |
| $\pi^0$       | 0    | 134.8       | $f_1(1285)$    | 1    | 1281.9      |
| $\eta$        | 0    | 547.9       | $\eta(1295)$   | 0    | 1294        |
| $\sigma$      | 0    | 475         | $\pi(1300)$    | 0    | 1300        |
| $\rho(770)$   | 1    | 775.3       | $a_2(1320)$    | 2    | 1318.3      |
| $\omega(782)$ | 1    | 782.6       | $f_0(1370)$    | 0    | 1370        |
| $\eta'(958)$  | 0    | 957.8       | $\pi_1(1400)$  | 1    | 1354        |
| $f_0(980)$    | 0    | 990         | $\eta(1405)$   | 0    | 1408.8      |
| $a_0(980)$    | 0    | 980         | $f_1(1420)$    | 1    | 1426.4      |
| $\phi(1020)$  | 1    | 1019.5      | $\omega(1420)$ | 1    | 1420        |
| $h_1(1170)$   | 1    | 1170        | $a_0(1450)$    | 1    | 1474        |
| $b_1(1235)$   | 1    | 1229.5      | $\rho(1450)$   | 1    | 1465        |
| $a_1(1260)$   | 1    | 1230        | $\eta(1475)$   | 0    | 1476        |

Legenda: Partículas mesônicas com seus respectivos valores de spin e massa menor que 1500 MeV.

Fonte: PATRIAGNANI et al., 2016, Adaptado pelo autor.

Tabela 3 - Segunda Tabela de Mésons.

| Partícula        | Spin | Massa [MeV] | Partícula      | Spin | Massa [MeV] |
|------------------|------|-------------|----------------|------|-------------|
| $f_0(1500)$      | 0    | 1505        | $f_0(1710)$    | 0    | 1722        |
| $f'_2(1525)$     | 2    | 1525        | $\pi(1800)$    | 0    | 1812        |
| $\pi_1(1600)$    | 1    | 1662        | $\phi_3(1850)$ | 3    | 1854        |
| $\eta_2(1645)$   | 2    | 1617        | $\pi_2(1880)$  | 2    | 1895        |
| $\omega(1650)$   | 1    | 1670        | $f_2(1950)$    | 2    | 1944        |
| $\omega_3(1670)$ | 3    | 1667        | $f_2(2010)$    | 2    | 2011        |
| $\pi_2(1670)$    | 2    | 1670        | $a_4(2040)$    | 4    | 1996        |
| $\phi(1680)$     | 1    | 1680        | $f_4(2050)$    | 4    | 2018        |
| $\rho_3(1690)$   | 3    | 1688.8      | $\phi(2170)$   | 1    | 2175        |
| $\rho(1700)$     | 1    | 1720        | $f_2(2300)$    | 2    | 2297        |
| $f_2(2340)$      | 2    | 2339        | -              | -    | -           |

Legenda: Partículas mesônicas com seus respectivos valores de spin e massa maior ou igual a 1500 MeV.

Fonte: PATRIAGNANI et al., 2016, Adaptado pelo autor.

ser bem descrito por um gás de hádrons e ressonâncias que não interagem (VENUGOPALAN; PRAKASH, 1992; NORONHA-HOSTLER et al., 2016). A pressão para este modelo é dada por

$$\Omega^{HRG} = -\frac{T}{V} \sum_{\text{mésons}} \log \mathcal{Z}_i^M(T, \mu_{X^\alpha}) - \frac{T}{V} \sum_{\text{bárions}} \log \mathcal{Z}_i^B(T, \mu_{X^\alpha}) \quad (177)$$

onde

$$\log \mathcal{Z}_i^{M/B} = \mp \frac{V d_i}{2\pi^2} \int_0^\infty d\kappa \kappa^2 \log \left( 1 \mp z_i e^{\omega_i/T} \right), \quad (178)$$

e

$$\omega_i = \sqrt{\kappa^2 + m_i^2} \quad \text{e} \quad z_i = e^{(\sum_\alpha X_i^\alpha \mu_X^\alpha)/T}, \quad (179)$$

onde  $m_i$  representa a massa das partículas das tabelas (1), (2) e (3). Para a equação (179), chamamos  $X_i^\alpha$  de uma carga conservada<sup>9</sup> de determinada partícula e  $\mu_X^\alpha$  é o potencial químico associado a carga conservada de cada partícula. Para o caso em que estamos trabalhando aqui, não vamos utilizar partículas com quark estranho e vamos desconsiderar a carga elétrica das mesmas. A tabela (1) contém todas as partículas bariônicas usadas para este modelo nesta dissertação e a tabela (??) contém todas as partículas mesônicas

<sup>9</sup> Onde esta carga pode ser o número bariônico  $B$ , a carga elétrica  $Q$  ou a estranheza  $S$ .

utilizadas para o mesmo fim. É importante ressaltar aqui que os bárions vão ter  $B = 1$  e os mésons  $B = 0$  (PATRIGNANI et al., 2016).

## 3.2 Modelos Quirais

### 3.2.1 Modelo Nambu-Jona-Lasinio

Um modelo efetivo de quarks que expressa bem a discussão sobre a simetria quiral é o modelo Nambu-Jona-Lasinio (NJL). A versão original do artigo de Nambu e Jona-Lasinio (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961) era um modelo de nucleons interagindo, e foi uma ideia pioneira deles ver que o *gap* de massa no espectro de Dirac do nucleon pode ser gerada de forma bastante análoga à energia de *gap* de um supercondutor na teoria BCS (BUBALLA, 2005). Para esse fim, considerando apenas quarks *up* e *down*, eles introduziram a lagrangiana

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)q + \frac{G}{2}[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\vec{\tau}q)^2] \quad (180)$$

onde  $m_0$  é a massa de corrente dos quarks e  $\vec{\tau}$  são as matrizes de Pauli

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (181)$$

que atuam no espaço de sabor  $SU(2)$ . Quando  $m_0$  for nula, a lagrangiana acima se torna invariante sob transformações quirais, como descrito nas seções anteriores. Em  $d = 4$  dimensões, a constante  $G$  tem dimensão de (energia) $^{-2}$ , o que torna a teoria não renormalizável. Portanto, um corte no *3-momentum*  $\Lambda$  é introduzido para regularizar as divergências nas integrais. Logo, esse corte define um limite superior de energia para essa teoria. Assim, os parâmetros livres do modelo são fixados para reproduzir corretamente os valores no vácuo da constante de decaimento do pión, da massa do pión e da massa do quark constituinte. A lagrangiana deste modelo, na aproximação de campo médio,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NJL} &= \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)q + G \langle \bar{q}q \rangle \bar{q}q - \frac{G}{2} \langle \bar{q}q \rangle^2 \\ &= \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)q - \frac{G}{2} \langle \bar{q}q \rangle^2, \end{aligned} \quad (182)$$

onde

$$M = m_0 - G \langle \bar{q}q \rangle \quad (183)$$

e  $\langle \bar{q}q \rangle$  é chamado de condensado quiral. Para  $N_f = 2$ , ele é dado por  $x'$  Como os quarks e os antiquarks possuem interações fortes atrativas, e se estes são sem massa, a energia para criar um par extra quark-antiquark é pequena. Dessa forma, esperamos que o vácuo da QCD contenha um condensado de pares quark-antiquark  $\bar{q}q$ . O estado de vácuo com um condensado  $\bar{q}q$  chamamos de condensado quiral e este é caracterizado por ter seu valor esperado dado por

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L | 0 \rangle \neq 0. \quad (184)$$

É interessante ver que o condensado quiral mistura a helicidade dos quarks  $u$  e  $d$ . Isso permite que esses quarks adquiram massas efetivas enquanto se movem através do vácuo. Dentro dos estados ligados  $\bar{q}q$ , os quarks  $u$  e  $d$  irão mover-se como se eles tivessem uma massa efetiva considerável, mesmo que tivessem massa zero na lagrangiana original. Logo, o valor esperado não-nulo dado em (184) sinaliza uma quebra espontânea da simetria quiral. Há três simetrias contínuas quebradas espontaneamente, que levam à existência de três bósons de Goldstone, que são identificados com os píons.

Utilizando o mecanismo para encontrar a função partição para os férmions discutido no capítulo 1 e adicionando o termo de potencial químico, podemos afirmar que, na aproximação de campo médio,

$$Z = \exp \left[ -\frac{V}{T} \frac{G \langle \bar{q}q \rangle^2}{2} \right] \det[(p_\mu \gamma^\mu + \mu \gamma^0 - M)/T], \quad (185)$$

onde a massa  $M$  do quark constituinte é determinada pela equação de *gap*

$$\frac{\partial \log Z}{\partial M} = 0. \quad (186)$$

O valor do condensado quiral pode ser expresso através de

$$\langle \bar{q}q \rangle = 2MN_c N_f \int_{p < \Lambda} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} [n_q(T, \mu) + n_{\bar{q}}(T, \mu) - 1], \quad (187)$$

onde  $n_q$  e  $n_{\bar{q}}$  é a distribuição de Fermi-Dirac, definida por

$$n_q(T, \mu) = n_q(T, -\mu) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu)/T]} \quad (188)$$

onde

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}. \quad (189)$$

Logo, escrevemos o grande potencial termodinâmico como

$$\Omega = \frac{(M - m_0)^2}{2G} - 2N_c N_f \int_{p < \Lambda} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left( E + T \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{\mu - E}{T} \right) \right] + T \ln \left[ 1 + \exp \left( \frac{-\mu - E}{T} \right) \right] \right), \quad (190)$$

onde é importante frisar que o corte vai atuar na energia de ponto zero. A minimização de  $\Omega$  com respeito a  $M$  dá a equação de *gap* (186).

### 3.2.2 Modelo Quark-Méson acoplado a quarks

Um outro modelo efetivo muito interessante proposto para a QCD foi o modelo Sigma Linear com quarks constituintes (LSMq), também chamado de modelo Quark-Méson (QM).

Desde quando foi proposto (GELL-MANN; LEVY, 1960), ele tem sido investigado em diferentes contextos, desde teorias nucleares de baixa energia de interações nucleon-méson até colisões de íon pesados em altas energias. Como já visto, para uma teoria com quebra espontânea de simetria, a presença de um condensado (valor esperado no vácuo) modificará as massas presentes no modelo. Para o modelo QM, as massas dos quarks constituintes ( $u$  e  $d$ ) e dos mésons ( $\sigma$  e  $\vec{\pi}$ ) vão incorporar correções que são funções do condensado quirial.

Para descrever este modelo, vamos utilizar a lagrangiana (SCAVENIUS et al., 2001)

$$\mathcal{L}_{QM} = \bar{q}[i\gamma^\mu \partial_\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})]q + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) + \bar{q}\mu\gamma^0 q - U(\sigma, \vec{\pi}), \quad (191)$$

onde o potencial é dado por

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - v^2)^2 - H\sigma. \quad (192)$$

Para a equação (191),  $q$  é o campo de quarks  $q = (u, d)$ ,  $\sigma$  o campo um campo escalar e  $\vec{\pi}$  campo pseudoescalar, tal que  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ . Juntos esses campos formam o campo quirial  $\Phi = (\sigma, \vec{\pi})$ . A Lagrangiana deste modelo não é invariante sob transformações quirais  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ <sup>10</sup> se o termo de quebra explícita de simetria  $H\sigma$  for nulo. A quebra explícita de simetria quirial aparece aqui por conta da massa de corrente dos quarks

<sup>10</sup> Para o modelo QM, temos que seu grupo de simetria é o  $O(4)$  por conta do quadrupeto formado pela campo de  $\sigma$  e o tripleto  $\vec{\pi}$ . Como o grupo  $O(4)$  é isomorfo a  $SU(2) \times SU(2)$ , afirmamos que na ausência de uma massa de corrente ( $m_0 = 0$ ), ocorre aqui uma simetria quirial de uma forma semelhante à da QCD e a do modelo NJL.

não ser nula.

Além disso, no vácuo, o mínimo do potencial não corresponde a  $\sigma = \pi_i = 0$ . Portanto, como em particular  $\langle \sigma \rangle \neq 0$ , isto implica um termo  $g \langle \sigma \rangle \bar{q}q$  na lagrangiana, que corresponde a um termo de massa para os quarks. Assim,  $\langle \sigma \rangle \neq 0$  implica quebra de simetria quiral para os quarks.

Vamos agora considerar um sistema de quarks e antiquarks em equilíbrio termodinâmico à temperatura  $T$  e potencial químico de quarks  $\mu \equiv \mu_B/3$ , onde  $\mu_B$  aqui é o potencial químico bariônico. A grande função de partição na aproximação de campo médio para esse caso, será

$$\mathcal{Z} = \exp\left(-\frac{VU}{T}\right) \int \mathcal{D}\bar{q}\mathcal{D}q \exp\left[\int_x \bar{q}[i\gamma^\mu \partial_\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})]q + \mu \bar{q}\gamma^0 q\right], \quad (193)$$

onde  $\int_x \equiv \int_0^\beta dt \int_V d^3\mathbf{x}$ . Utilizando o mesmo procedimento para o modelo NJL, podemos afirmar que a equação (193) equivale a escrever

$$\mathcal{Z} = \exp\left(-\frac{VU}{T}\right) \det\left(\beta \left[P_\mu \gamma^\mu + \mu \gamma^0 - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\right]\right). \quad (194)$$

A equação (194) está relacionada diretamente com o grande potencial canônico  $\Omega(T, \mu)$ , dado neste caso por

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \log \mathcal{Z} = U(\sigma, \vec{\pi}) + \Omega_{q\bar{q}}, \quad (195)$$

onde a contribuição dos quarks e dos antiquarks é escrita por uma correção térmica dada por

$$\Omega_{q\bar{q}} = -\nu_q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left( E + T \ln \left[ 1 + \exp\left(\frac{\mu - E}{T}\right) \right] + T \ln \left[ 1 + \exp\left(\frac{-\mu - E}{T}\right) \right] \right). \quad (196)$$

Temos que para a equação (196),  $\nu_q = 2N_c N_f$  é o número de graus de liberdade dos quarks, tal que  $N_c = 3$  e  $N_f = 2$ , e  $E = \sqrt{p^2 + M^2}$  é a energia do quark e antiquark de valência. A massa do quark (antiquark) constituinte,  $M$ , é definida por

$$M^2 = g^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2). \quad (197)$$

Os parâmetros da lagrangiana são usualmente escolhidos de forma que a simetria quiral seja espontaneamente quebrada no vácuo e o valor esperado dos campos de méson sejam  $\langle \sigma \rangle = f_\pi$  e  $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$ , onde  $f_\pi = 93$  MeV é a constante de decaimento do pión. Esses valores para o campo médio dos mésons são encontrados fazendo-se a minimização do

potencial efetivo, dado pela equação (195) em relação a  $\langle\sigma\rangle$  e  $\langle\vec{\pi}\rangle$ , tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} &= 0 \\ \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_i} &= 0 \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\Phi_i\partial\Phi_j} &> 0\end{aligned}\tag{198}$$

A constante  $H$  é fixada pela conservação parcial da corrente axial, que nos dá  $H = f_\pi m_\pi^2$ , onde  $m_\pi = 138$  MeV é a massa do pión. Então, encontramos  $v^2 = f_\pi^2 - m_\pi^2/\lambda$ . A constante de acoplamento  $\lambda$  é determinada pela massa de sigma,  $m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 + m_\pi^2$ , que definimos como 600 MeV, produzindo então  $\lambda \approx 20$ . A constante de acoplamento de Yukawa  $g$  é usualmente fixada pela exigência de que a massa do quark constituinte no vácuo,  $M_{vac} = gf_\pi$ , é cerca de 1/3 da massa do núcleon ( $m_N = 938$  MeV). Isso vai gerar  $g \simeq 3.3$ .

### 3.3 Graus de liberdade gluônicos: loop de Polyakov

O Loop de Polyakov é um observável importante da QCD em temperatura finita. Seu valor esperado serve como um parâmetro de ordem para o limite confinante de quarks pesados (POLYAKOV, 1978). Este operador é um loop de Wilson na direção temporal e dado por

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \mathcal{P}\exp\left(i\int_0^\beta d\tau A_0(\vec{x}, \tau)\right)\tag{199}$$

onde  $\mathcal{P}$  significa o caminho ordenado e  $A_0(\vec{x}, \tau)$  é a componente temporal do campo de calibre Euclidiano  $A_\mu$ . Para estabelecer o calibre de Polyakov, podemos definir a componente temporal do calibre Euclidiano como sendo

$$A_0(\vec{x}, \tau) = A_0^c(\vec{x}),\tag{200}$$

onde  $A_0^c(\vec{x}) = A_0^{(3)}(\vec{x})\tau_3 + A_0^{(8)}(\vec{x})\tau_8$  está na sub-álgebra de Cartan<sup>11</sup> e  $\tau_3$  e  $\tau_8$  representam

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\tag{201}$$

<sup>11</sup> Álgebra que abrange geradores diagonais para uma determinada base.

Fica então simples de ver que usando a equação (200), o operador loop de Polyakov pode ser simplificado como

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \exp(i\beta A_0^c(\vec{x})). \quad (202)$$

Estes resultados também podem ser expressos colocando a o loop de Polyakov em função do campo de calibre em função, tal que

$$A_0^c(\vec{x}) = -i(\partial_\beta \mathcal{P}(\vec{x}))\mathcal{P}^\dagger(\vec{x}). \quad (203)$$

Para cálculos termodinâmicos da QCD a temperatura finita, é útil definir uma variável loop de Polyakov normalizada  $\Phi(\vec{x})$  e a sua hermitiana conjugada  $\bar{\Phi}(\vec{x})$  como sendo o valor esperado térmico do traço de cor do operador loop de Polyakov. Tanto  $\Phi(\vec{x})$  quanto  $\bar{\Phi}(\vec{x})$  são campos complexos. Os valores médios dessas variáveis normalizadas estão relacionados com a energia livre de um quark de teste estático e infinitamente pesado na posição espacial  $\vec{x}$ . Isso resulta no parâmetro de ordem  $\Phi(\vec{x})$  ser nulo na fase confinada, onde a energia livre de um quark pesado diverge. Já na fase desconfinada, este tem um valor finito. Esses parâmetros de ordem são dados por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}_c \mathcal{P}(\vec{x}) \rangle_\beta, \quad (204)$$

$$\bar{\Phi}(\vec{x}) = \frac{1}{N_c} \langle \text{tr}_c \mathcal{P}^\dagger(\vec{x}) \rangle_\beta. \quad (205)$$

A função de correlação de duas variáveis do loop de Polyakov estão relacionadas com a energia livre  $F_{q\bar{q}}$  de duas fontes de cor  $q$  e  $\bar{q}$  com separação espacial  $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$  como

$$\frac{1}{N_c^2} \langle \text{tr}_c \mathcal{P}(\vec{x}) \text{tr}_c \mathcal{P}^\dagger(\vec{y}) \rangle_\beta = e^{-\beta F_{q\bar{q}}(\vec{r})} \rightarrow \Phi(\vec{x})\bar{\Phi}(\vec{y}). \quad (206)$$

Essas propriedades são muito importantes pois elas fornecem o critério de Polyakov de confinamento a temperatura finita. A transição de fase para o confinamento e o desconfinamento é caracterizada pelo valor esperado  $\Phi = 0$  na fase confinada e  $\Phi \neq 0$  na fase deconfinada. Para  $T \rightarrow \infty$ , esperamos  $\Phi = 1$ .

Na teoria de Yang-Mills pura, os valores médios  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$  são dados de modo efetivo pela minimização do potencial de loop de Polyakov  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})$ . Aqui nós usamos a expansão polinomial em  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$  até termos de ordem 4

$$\frac{\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{4}(|\Phi|^2 + |\bar{\Phi}|^2) - \frac{b_3}{6}(|\Phi|^3 + |\bar{\Phi}|^3) + \frac{b_4}{16}(|\Phi|^2 + |\bar{\Phi}|^2)^2. \quad (207)$$

Existem outros modelos que utilizam potenciais diferentes, como o chamado potencial de Fukushima (FUKUSHIMA, 2008). Para a expansão polinomial, temos que o

potencial efetivo  $\mathcal{U}$  pode ser escrito em termos de  $|\Phi|$  e  $|\bar{\Phi}|$ , o produto  $\Phi\bar{\Phi}$ , e em  $|\Phi|^3$ ,  $|\bar{\Phi}|^3$  relacionados com a simetria  $Z_3$ . Para teoria de Yang-Mills pura, nós podemos restringir os resultados tal que  $|\Phi| = |\bar{\Phi}|$ .

Os coeficientes deste potencial são fixados por reprodução de resultados da rede para o setor de Yang-Mills pura (RATTI; THALER; WEISE, 2006). Isso nos leva a coeficientes de temperatura que são independentes, como  $b_3 = 0.75$  e  $b_4 = 7.5$ , mas também a um coeficiente que depende da temperatura, como sendo

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T}\right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \quad (208)$$

onde  $a_0 = 6.75$ ,  $a_1 = -1.95$ ,  $a_2 = 2.625$ ,  $a_3 = -7.44$ . Com este potencial polinomial e na ausência de quarks dinâmicos, acontece uma transição de fase de primeira ordem em uma determinada temperatura crítica  $T_0$ , que é o valor que entra na equação (208). Na presença de quarks dinâmicos, é razoável supor que esse valor de  $T_0$  varia conforme o número de sabores envolvidos no problema (SCHAEFER; PAWLOWSKI; WAMBACH, 2007). Como estamos utilizando apenas quarks *up* e *down*, a temperatura equivalente estes sabores é de 208 MeV.

### 3.4 Modelo Polyakov-Quark-Méson

O modelo QM com o acoplamento dos quarks ao loop de Polyakov (PQM) é muito importante pois estão incluídas no modelo as contribuições gluônicas necessárias para uma descrição efetiva da transição dinâmica da QCD a temperatura finita (SCHAEFER; PAWLOWSKI; WAMBACH, 2007). A lagrangiana para esse modelo é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{PQM}} = \bar{q}[i\gamma_\mu D^\mu - g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})]q + \bar{q}\mu\gamma_0 q - U(\sigma, \vec{\pi}) - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}), \quad (209)$$

onde agora o termo  $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi})$  representa o potencial de Polyakov e  $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$  é a derivada covariante. O campo gluônico é escolhido aqui tal que  $A^\mu = \delta_{\mu 0}A^0$ . Aplicando isso na equação (209), podemos dizer que

$$\gamma_\mu D^\mu = \gamma_\mu \partial^\mu - i\gamma_0 A^0. \quad (210)$$

Como já visto para o modelo QM, iremos calcular o potencial termodinâmico na aproximação de campo médio. Vamos primeiro montar a ação efetiva sem os potenciais. Utilizando a equação (210), vamos encontrar que a parte fermiônica na ação é dada por

$$S_{q\bar{q}} = \sum_p \bar{q}^\dagger \left( (P^0 + iA^0 + \mu) - \gamma_0 \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - \gamma_0 g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \right) q \quad (211)$$

Utilizando novamente o método proposto na seção 1 para os férmions e lembrando da expressão do loop de Polyakov em termos do campo de calibre (202), vamos encontrar

$$\Omega_{q\bar{q}} = -2N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ \beta\omega + \text{tr}_c \left[ \log \left( 1 + \mathcal{P} e^{-\beta(\omega-\mu)} \right) + \log \left( 1 + \mathcal{P}^\dagger e^{-\beta(\omega+\mu)} \right) \right] \right]. \quad (212)$$

É muito importante ver que neste caso, temos que resolver o traço de cor, no qual a soma será feita sobre as matrizes de Gell-Mann de  $SU(3)$ . Lembrando que  $\text{tr} \log A = \log \det A$ , podemos agora escrever o grande potencial termodinâmico como sendo

$$\begin{aligned} \Omega_{q\bar{q}} &= -2N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [\log \det [1 + \mathcal{P} e^{-\beta(\omega-\mu)}] + \log \det [1 + \mathcal{P}^\dagger e^{-\beta(\omega+\mu)}]] \\ &= -2N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \log \left[ 1 + 3 \left( \Phi + \bar{\Phi} e^{-\beta(\omega-\mu)} \right) e^{-\beta(\omega-\mu)} + e^{-3\beta(\omega-\mu)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \log \left[ 1 + 3 \left( \bar{\Phi} + \Phi e^{-\beta(\omega+\mu)} \right) e^{-\beta(\omega+\mu)} + e^{-3\beta(\omega+\mu)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (213)$$

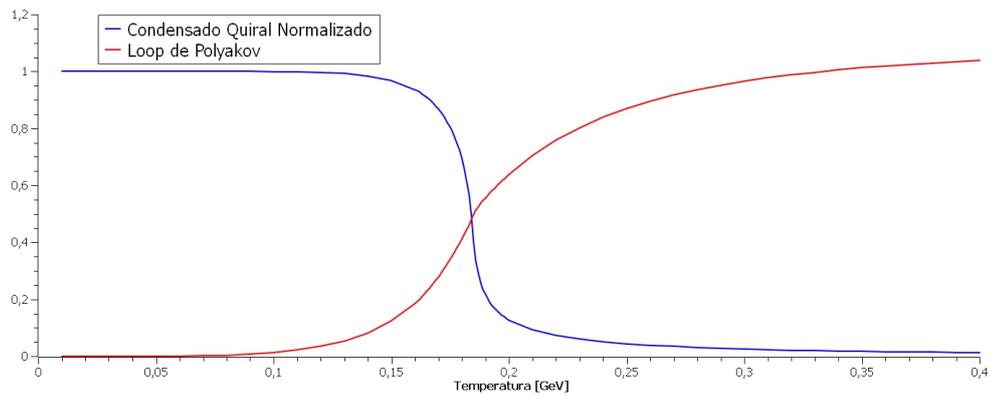
As equações de movimento são encontradas pela minimização de  $\Omega$  com respeito aos parâmetros de ordem  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$  e  $\sigma$ , tal que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\Phi}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Phi} \Big|_{\sigma=\langle \sigma \rangle, \bar{\Phi}=\langle \bar{\Phi} \rangle, \Phi=\langle \Phi \rangle} = 0 \quad (214)$$

e os autovalores da matriz hessiana (de derivadas segunda com relação aos campos) sejam todos positivos.

Para ganharmos um pouco de intuição sobre o modelo, vejamos rapidamente o comportamento dos parâmetros de ordem como função da temperatura, conforme previstos pelo modelo PQM. (O comportamento obtido através de outros modelos é semelhante.) Fica claro olhando a figura (5) o comportamento do parâmetro de ordem quiral e do valor esperado do loop de Polyakov a  $\mu = 0$  na presença de 2 quarks. Para baixos valores de temperatura, temos que  $\sigma$  equivale a 1 e a contribuição de  $\Phi$  é nula. Isto corresponde à fase com simetria quiral quebrada (pois  $M \neq 0$ ) e confinamento. Conforme a temperatura vai aumentando e chegamos a aproximadamente  $T \approx 180 \text{ MeV}$ , acontece um crossover entre esses parâmetros de ordem. Logo após isso, o parâmetro de ordem  $\Phi \rightarrow 1$  e  $\langle \sigma \rangle \rightarrow 0$ , o que indica que, em altas temperaturas há restauração de simetria quiral e desconfinamento.

Por fim, mencionamos que o modelo de Nambu-Jona-Lasinio também pode ter a inclusão do loop de Polyakov (PNJL) em sua lagrangiana, onde o procedimento é muito semelhante ao do modelo PQM com resultados em geral também semelhantes (RATTI; THALER; WEISE, 2006; FUKUSHIMA, 2008).

Figura 5 - Crossover entre  $\sigma$  e  $\Phi$ .

Legenda: Comportamento do condensado quiral  $\sigma$  e do valor esperado do loop de Polyakov  $\Phi$  para  $\mu = 0$  no modelo PQM.

Fonte: O autor, 2017.

## 4 MODELOS PARA O CONFINAMENTO COM VIOLAÇÃO DE POSITIVIDADE

Em algum lugar, alguma coisa incrível está esperando para ser conhecida.

*Carl Sagan*

### 4.1 Critérios de Confinamento

Vamos definir confinamento como sendo a ausência de estados assintóticos com carga de cor não-nula (OEHME, 1995; NISHIJIMA, 1996; ALKOFER; SMEKAL, 2001).

#### 4.1.1 Loop de Wilson

Utilizando a lagrangiana da QCD, podemos separá-la em três partes: lagrangiana para o glúon  $\mathcal{L}_{gluon}$ ; lagrangiana para os quarks  $\mathcal{L}_{quarks}$ ; lagrangiana para a fixação de calibre  $\mathcal{L}_{fc}$ . Para o limite de massa  $m \rightarrow \infty$ , o propagador dos quarks tende a zero. Isso quer dizer que não há propagação, e interpretamos isso como um limite para quarks estáticos.

O funcional gerador para a QCD pode ser dado por

$$Z(J) = \int \mathcal{D}[\Phi] \exp \left[ - \int \mathcal{L}_{QCD} d^4x + \int J_\mu^a A_\mu^a \right] \equiv e^{-W(J)T}, \quad (215)$$

onde  $[\mathcal{D}\Phi] = [\mathcal{D}A][\mathcal{D}B][\mathcal{D}\bar{c}][\mathcal{D}c][\mathcal{D}\bar{q}][\mathcal{D}q]$ ,  $J_\mu^a$  uma fonte,  $T \rightarrow \infty$  o tempo e  $W[J]$  o que chamamos de funcional energia. Assim, para um caso particular em que tenhamos como fonte externa um par quark-antiquark estático, uma forma de escrever a corrente é dada por

$$J_\mu^a = g[\delta(\vec{x} - \vec{x}_q) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\bar{q}})]t^a \delta_{\mu 0} \quad (216)$$

O contorno de integração para o loop de Wilson vai funcionar como um retângulo, no qual isso pode ser visto por conta do lado direito da equação (216). Logo, podemos dizer que

$$\int A_\mu J_\mu d^4x = g \int [\delta(\vec{x} - \vec{x}_q) - \delta(\vec{x} - \vec{x}_{\bar{q}})] A_0 d^4x = \int_{-T}^T dt g [A_0(\vec{x}_q, t) - A_0(\vec{x}_{\bar{q}}, t)] \quad (217)$$

Logo, representamos então o termo  $e^{-W(J_{q\bar{q}})T}$  como

$$e^{-W(J_{q\bar{q}})T} = \int \mathcal{D}A e^{-\int \mathcal{L}_{QCD} d^4x} e^{-\oint g A_0 dt}. \quad (218)$$

O operador  $e^{-\oint g A_0 dt}$  é um caso particular do operador invariante de calibre *loop de Wilson*

$$L(A) = \mathcal{P} \exp \left[ -g \oint_P A_\mu^a t^a dx_\mu \right], \quad (219)$$

onde  $P$  é um caminho de integração no espaço-tempo. Sabendo que o valor esperado de um operador é dado por

$$\langle O(A) \rangle = \int \mathcal{D}A O(A) e^{-S}, \quad (220)$$

encontramos a relação entre o loop de Wilson e o funcional energia

$$\langle L(A) \rangle = e^{-WT}. \quad (221)$$

Como os quarks estão estáticos, temos que a energia total equivale apenas a parte potencial, pois a cinética é nula. Utilizando o potencial

$$V_{q\bar{q}}(R) \approx \sigma R, \quad (222)$$

onde  $R$  tem unidade de comprimento e  $\sigma$  é uma constante para regular a dimensionalidade do lado direito do potencial, podemos escrever o loop de Wilson como

$$\langle L(A) \rangle \approx e^{-\sigma RT}. \quad (223)$$

A relação acima é chamada de “lei de área” e representa o confinamento dos quarks por meio do loop de Wilson, uma vez que ela implica que afastar um quark de um antiquark tem um custo energético cada vez maior com o aumento da distância entre eles.

Por fim, observemos que o loop de Polyakov corresponde a um loop de Wilson a temperatura finita, onde o caminho de integração  $P$  corresponde a uma linha com  $\vec{x}$  constante e  $dx^\mu = d\tau \delta^{0\mu}$ . Note que a periodicidade da coordenada temporal implica que os pontos  $\tau \in [0, \beta]$  formam um caminho fechado.

#### 4.1.2 Violação de positividade

Para falarmos da violação da positividade, precisamos definir primeiro o que isso quer dizer. Utilizando um propagador  $D(x, y)$ , podemos representa-lo através da repre-

sentação espectral de Källén-Lehmann (PESKIN; SCHROEDER, 1995), dada por

$$D(x, y) = \langle \Omega | T(\phi(x)\phi(y)) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{d(M^2)}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x - y; M^2), \quad (224)$$

onde  $|\Omega\rangle$  representa o vácuo e  $\rho(M^2)$  é a função espectral dada por

$$\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2, \quad (225)$$

com  $\lambda_0$  o estado que obedece

$$\vec{P} |\lambda\rangle = 0; \quad H |\lambda_0\rangle = m_\lambda |\lambda_0\rangle. \quad (226)$$

Em princípio, temos que a função espectral  $\rho(M^2) > 0 \forall M^2 > 0$ . Agora, quando analisamos o propagador do glúon na RGZ (Gribov-Zwanziger refinada)

$$D_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} \left[ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) D(p^2) + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right], \quad (227)$$

onde

$$D(p^2) = \frac{p^2 + M^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2) + \Lambda^4}. \quad (228)$$

Note que este possui uma forma diferente do propagador do glúon definido após a quantização da QCD. Não vamos entrar em foco na RGZ, mas apenas citar que o propagador do glúon na RGZ é muito próximo ao propagador do glúon na rede. A figura 6 mostra que isso é verdade, no qual foi usado para o cálculo da rede:  $M^2 = 2.51 \text{ GeV}^2$ ,  $m^2 = -1.92 \text{ GeV}^2$  e  $\Lambda^4 = 5.3 \text{ GeV}^4$  (CUCCHIERI et al., 2012).

Este  $D(p^2)$  pode ser reescrito na forma de frações parciais. Isso quer dizer então que

$$D(p^2) = \frac{R_1}{p^2 + a_1^2} + \frac{R_2}{p^2 + a_2^2} \quad (229)$$

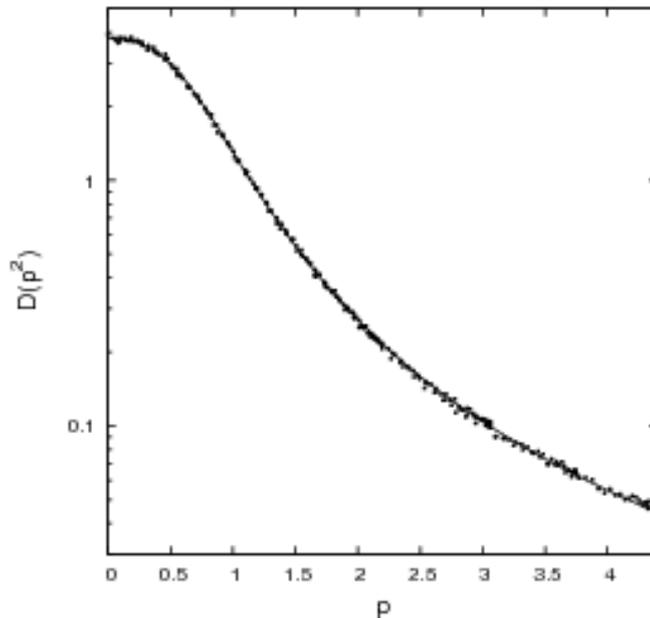
tal que

$$R_1 = \frac{-(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}; \quad a_1^2 = \frac{m^2 + M^2 - \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}{2} \quad (230)$$

$$R_2 = \frac{(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}; \quad a_2^2 = \frac{m^2 + M^2 + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}{2} \quad (231)$$

Um ponto importante aqui é que se  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  forem reais, então vale dizer que  $(m^2 - M^2) - 4\Lambda^4 \geq 0$ . Isso quer dizer que  $|m^2 - M^2| \geq 2\Lambda^2 \geq 0$  e  $R_1 \leq 0$  e  $R_2 \geq 0$ . Um

Figura 6 - Propagador do Glúon



Legenda: Propagador do glúon para um volume de rede de  $V = 128^4$ .  
 Fonte: CUCCHIERI et al, 2012, p.5.

caso interessante a ser discutido é que se  $\Lambda = 0$ , temos  $R_1 = 0$ . Isso conseqüentemente resulta em  $R_2 = 1$ ,  $a_1^2 = M^2$  e  $a_2^2 = m^2$ , onde ( $m^2 \geq M^2$ ).

Logo, reescrevendo o termo  $D(p^2)$  através da representação de Källén-Lehmann, podemos encontrar que

$$D(p^2) = \int_0^\infty \frac{d(M^2)}{2\pi} \frac{\rho(M^2)}{p^2 + M^2}, \quad (232)$$

onde a função espectral agora é dada por

$$\rho(M^2) = 2\pi R_1 \delta(M^2 - a_1^2) + 2\pi R_2 \delta(M^2 - a_2^2). \quad (233)$$

Um grande problema ocorre na equação (233), pois se a função espectral é positiva definida e temos que  $R_1 < 0$ . Dizemos então que houve violação da positividade da função espectral  $\rho(M^2)$ . Caso  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  sejam complexos, então a violação é vista de imediato. Dessa forma, afirmamos então que o propagador RGZ e portanto, o propagador da rede, viola a positividade da função espectral, tendo então sua representação espectral não sendo bem definida.

Por outro lado, podemos dizer que propagadores que não possuam uma representação espectral bem definida não têm em seu espectro estados assintóticos de partículas. Portanto, dizemos que, quando há violação de positividade do propagador de um dado

campo, este encontra-se confinado. Este critério será usado daqui em diante como nosso critério principal de confinamento.

## 4.2 Modelo de Quarks não-locais

Aqui vamos ver como um modelo com quebra suave de simetria BRST pode ser obtido a partir de uma extensão da lagrangiana da QCD.

Como vimos no capítulo 2, a lagrangiana da QCD é invariante sob transformações BRST e isso é crucial para a renormalizabilidade multiplicativa da lagrangiana (ver, por exemplo, (PIGUET; SORELLA, 1995)). Como um passo intermediário na definição do modelo, vamos introduzir dois dubletos BRST  $(\xi^i, \theta^i)$  e  $(\eta^i, \lambda^i)$  na ação da QCD como campos auxiliares (e seus campos hermitianos conjugados) que se transformam como

$$\begin{aligned} s\xi_\alpha^i &= \theta_\alpha^i, & s\theta_\alpha^i &= 0 \\ s\eta_\alpha^i &= \lambda_\alpha^i, & s\lambda_\alpha^i &= 0. \end{aligned} \tag{234}$$

A adição da ação BRST invariante

$$\begin{aligned} S_{\xi\lambda} &= s \int d^4x [-\bar{\eta}_\alpha^i \partial^2 \xi_\alpha^i + \bar{\xi}_\alpha^i \partial^2 \eta_\alpha^i + m^2 (\bar{\eta}_\alpha^i \xi_\alpha^i - \bar{\xi}_\alpha^i \eta_\alpha^i)] \\ &= \int d^4x [-\bar{\lambda}_\alpha^i \partial^2 \xi_\alpha^i - \bar{\xi}_\alpha^i \partial^2 \lambda_\alpha^i - \bar{\eta}_\alpha^i \partial^2 \theta_\alpha^i + \bar{\theta}_\alpha^i \partial^2 \eta_\alpha^i] + \\ &\quad + \int d^4x [m^2 (\bar{\lambda}_\alpha^i \xi_\alpha^i + \bar{\xi}_\alpha^i \lambda_\alpha^i + \bar{\eta}_\alpha^i \theta_\alpha^i - \bar{\theta}_\alpha^i \eta_\alpha^i)] \end{aligned} \tag{235}$$

não pode alterar o conteúdo físico da teoria. Isto pode ser facilmente verificado integrando os campos auxiliares, o que trivialmente dá 1. No entanto, se também adicionarmos à ação o acoplamento

$$S_M = \int d^4x [M_1^2 (\bar{\xi}_\alpha^i q_\alpha^i + \bar{q}_\alpha^i \xi_\alpha^i) - M_2 (\bar{\lambda}_\alpha^i q_\alpha^i + \bar{q}_\alpha^i \lambda_\alpha^i)] \tag{236}$$

entre os campos auxiliares e os campos de matéria, o resultado da ação  $S_{tot} = S_{QCD} + S_{\xi\lambda} + S_M$  já não é mais BRST invariante. Entretanto, isso não destrói a renormalizabilidade da teoria uma vez que isso corresponde a uma quebra suave de simetria BRST (BAULIEU et al., 2010). Claro que a adição de  $S_M$  leva a mudanças da teoria no infravermelho em relação a QCD perturbativa. Por exemplo, o condensado de glúon poderia também ser incorporado na ação e servir como ponto de partida para uma teoria efetiva contendo física não perturbativa, como é o caso da teoria RGZ.

De fato, a presença de tais condensados conduz a um comportamento infravermelho não trivial de propagadores de glúons e *ghosts*, que também pode ser observado em simulações na rede. No setor de quarks na teoria, o termo de quebra BRST em  $S_M$  é

conjecturado para ter uma consequência da condensação do operador  $\bar{q}q$ , uma vez que ele leva a uma quebra explícita da simetria quiral.

O significado físico da ação  $S_{tot}$  torna-se mais claro após a integração dos campos auxiliares  $(\xi, \bar{\xi})$ ,  $(\eta, \bar{\eta})$ ,  $(\theta, \bar{\theta})$  e  $(\lambda, \bar{\lambda})$ . Como resultado disso, devido ao termo de quebra BRST  $S_M$ , nós encontramos uma ação efetiva não local

$$S_{nl} = \int d^4x \bar{\psi}^i \left[ i\gamma_\mu \delta^{ij} \partial_\mu - \delta^{ij} \left( \frac{2M_1^2 M_2}{-\partial^2 + m^2} + m_0 \right) \right] \psi^j \quad (237)$$

para o setor dos quarks, além do acoplamento mínimo para o setor de calibre. Como uma primeira aproximação nesse modelo, negligenciamos a interação entre o setores de calibre e da matéria, exceto pelo termo não perturbativo  $S_M$ . Observe que o caso de férmions livres local usual pode ser recuperado para  $2M_1^2 M_2 = M_3 \rightarrow 0$ .

No vácuo, o propagador do férmion é dado por

$$S(p) = -\frac{\gamma_\mu p_\mu + M_0(p)}{p^2 + M_0^2(p)}, \quad (238)$$

onde nós definimos a função de massa no vácuo como

$$M_0(p) = \frac{2M_1^2 M_2}{p^2 + m^2} + m_0. \quad (239)$$

Essa função de massa de quark é compatível com cálculos da QCD na rede a temperatura zero, bem como uma análise das equações de Dyson-Schwinger do propagador do quark (BHAGWAT et al., 2003). Os parâmetros  $M_3 = 2M_1^2 M_2$ ,  $m^2$  e  $m_0$  dessa função de massa podem ser bem ajustados aos resultados da rede, dando  $M_3 = 0.196 GeV^3$ ,  $m^2 = 0.639 GeV^2$  e  $m_0 = 0.014 GeV$  (DUDAL et al., 2016). A figura 7 mostra o ajuste da função de massa.

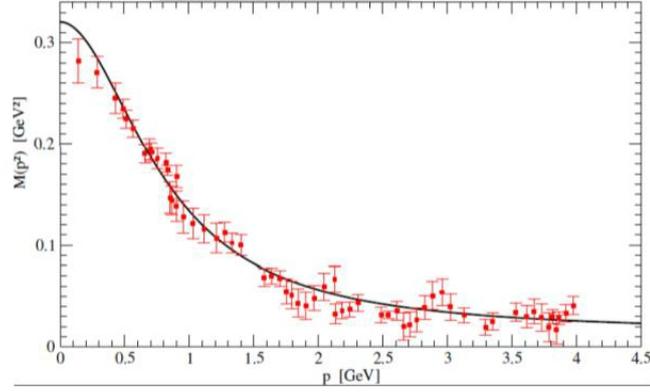
Não é difícil mostrar que a função de massa (239) leva, simultaneamente, a uma quebra de simetria quiral e à violação da positividade do propagador (238). Neste sentido, tanto a quebra de simetria quiral quanto o confinamento são levados em consideração neste modelo.

### 4.3 Termodinâmica do modelo de quarks

A lagrangiana efetiva do modelo em temperatura e potencial químico finitos, omitindo os índices espinoriais e de cor, será dada por

$$\mathcal{L}_{nl} = \bar{q} \left[ \gamma^0 (\partial_0 - \mu) - i\gamma \cdot \nabla + \frac{M_3}{-(\partial_0 - \mu)^2 - \nabla^2 + m^2} + m_0 \right] q. \quad (240)$$

Figura 7 - Função de massa.



Legenda: Gráfico da função de massa para o propagador do férmion dependente do *momentum*.

Fonte: DUDAL, et al, 2016, p.6.

A inclusão do potencial químico aqui é feita simplesmente utilizando a troca tal que  $\partial_0 \rightarrow \partial_0 - \mu$  (GUIMARAES; MINTZ; PALHARES, 2015). Utilizando os métodos já vistos no capítulo 1 para férmions, é simples ver que

$$\mathcal{L}_{nl} = \sum_n \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \tilde{q}^\dagger(\omega_n, -\vec{P}) [\beta(-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \gamma \cdot \vec{P} + \gamma^0 M_{n,\vec{P}}(\mu)] \tilde{q}(\omega_n, \vec{P}) \quad (241)$$

onde

$$M_{n,\vec{P}}(\mu) = \frac{M_3}{-(i\omega_n + \mu)^2 + \vec{P}^2 + m^2} + m_0 \quad (242)$$

corresponde a função de massa para este modelo a temperatura e potencial químico finitos.

Tendo a nova lagrangiana com a transformada de Fourier realizada, podemos encontrar o funcional gerador deste modelo (função de partição), com o método do capítulo 1. Isso vai nos resultar que

$$\mathcal{Z}(T, \mu) = \det_{p,D,f,c} [\beta(-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \gamma \cdot \vec{P} + \gamma^0 M_{n,\vec{P}}(\mu)] \quad (243)$$

sendo que este determinante tem que ser formado em relação ao subespaços de *momentum* (p), Dirac (D), sabores (f) e cores (c).

Para os graus de liberdade de sabor e cor, fica simples pois vai gerar diretamente  $N_f$  e  $N_c$  respectivamente. Para o subespaço de Dirac, vamos ter que:

$$\det[\beta(-i\omega_n + \mu) - \gamma^0 \gamma \cdot \vec{P} + \gamma^0 M_{n,\vec{P}}(\mu)] = \beta^4 [\vec{P}^2 + M_{n,\vec{P}}^2(\mu) - (i\omega_n + \mu)^2]^2. \quad (244)$$

Como o nosso objetivo é buscar a termodinâmica do modelo, utilizamos a identidade  $\log \det \hat{A} = \text{Tr} \log \hat{A}$  o traço do espaço de *momentum* corresponde a uma soma sobre todas as frequências de Matsubara e todos os *momenta*. Isso quer dizer que no limite termodinâmico, temos que

$$\log \mathcal{Z}(T, \mu) = 2V N_c N_f \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log \beta^2 [\vec{P}^2 + M_{n, \vec{P}}^2(\mu) - (i\omega_n + \mu)^2]. \quad (245)$$

Para facilitar a análise do nosso modelo, podemos fazer uma simples modificação na equação (245), adicionando e subtraindo o mesmo termo de logaritmo, só que sem a contribuição do potencial químico. Isso resulta em

$$\frac{\log \mathcal{Z}(T, \mu)}{2\beta V N_c N_f} = T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[ \log[\beta^2(\vec{P}^2 + M_{n, \vec{P}}^2(0) + \omega_n^2)] + \log \left( \frac{\vec{p}^2 + M_{n, \vec{p}}^2(\mu) - (i\omega_n + \mu)^2}{\vec{p}^2 + M_{n, \vec{p}}^2(0) + \omega_n^2} \right) \right], \quad (246)$$

onde agora é possível separar o modelo em duas contribuições diferentes.

O primeiro termo da equação (246) vai estar relacionado com a função de partição para potencial químico nulo, que vamos chamar de  $\log \mathcal{Z}(T, 0)/2\beta V N_c N_f$ . Já o segundo termo desta mesma equação estará relacionada com uma contribuição de  $\mu \neq 0$ . Ela é finita, pois a introdução de um potencial químico na teoria não deveria trazer novas divergências. Por isso, este pode ser calculado numericamente e também tem uma expressão fechada em termos de integrais elementares no limite de temperatura zero. Vamos chamar esse termo de  $\log \mathcal{Z}^{(\mu)}(T, \mu)/2\beta V N_c N_f$ .

Vamos analisar primeiro o termo  $\log \mathcal{Z}(T, 0)$ , que é dado por

$$\log \mathcal{Z}(T, 0) = 2\beta V N_c N_f T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log[\beta^2(\vec{p}^2 + M_{n, \vec{p}}^2(0) + \omega_n^2)]. \quad (247)$$

Um passo importante para a resolução do mesmo é utilizar a equação (242) e escrever o argumento da equação (247), *Arg*, como a razão de dois polinômios,

$$\begin{aligned} \text{Arg} &:= \frac{\beta^2[(\vec{p}^2 + m_o^2 + \omega_n^2)(\vec{p}^2 + m^2 + \omega_n^2)^2 + 2M_3 m_0(\vec{p}^2 + m^2 + \omega_n^2) + M_3^2]}{(\vec{p}^2 + m^2 + \omega_n^2)^2} \\ &\equiv \beta^2 \frac{P_3(\omega_n^2)}{(p^2 + m^2 + \omega_n^2)^2} \end{aligned} \quad (248)$$

onde o polinômio de terceiro grau  $P_3(\omega_n^2)$  pode ser fatorado em

$$P_3(\omega_n^2) = (\omega_n^2 + \varphi_1^2)(\omega_n^2 + \varphi_2^2)(\omega_n^2 + \varphi_3^2), \quad (249)$$

com  $-\varphi_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sendo as três raízes de  $P_3$ . Em geral, as raízes de um polinômio de terceiro grau de coeficientes reais são divididos em uma número real e um par de raízes

que são números complexos conjugados. Este é efetivamente o caso do nosso conjunto de parâmetros, tal como deve ser evidente a partir da presença de polos complexos no propagador, isto é, massas complexas. As três raízes então podem ser calculadas como função do *momentum* e dos parâmetros de massa do modelo. Substituindo então a equação (249) na equação (247), vamos encontrar que

$$\log \mathcal{Z}(T, 0) = 2\beta V N_c N_f T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log \left[ \sum_{i=1}^3 \log[\beta^2(\omega_n^2 + \phi_i^2)] - 2\log[\beta^2(\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m^2)] \right]. \quad (250)$$

Comparando a equação (250) com a equação (76) para a função de partição de um gás de férmions livre, vemos que elas apresentam a mesma estrutura. Logo, o todo o procedimento feito para a equação (76) é válido agora. Isso vai resultar em

$$\log \mathcal{Z}(T, 0) = \log \mathcal{Z}_0 + 4N_c N_f V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log \left[ \frac{(1 + e^{-\beta\varphi_1})(1 + e^{-\beta\varphi_2})(1 + e^{-\beta\varphi_3})}{(1 + e^{-\beta\varphi_0})^2} \right] \quad (251)$$

onde

$$\log \mathcal{Z}_0 = 2N_c N_f V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - 2\varphi_0) \quad (252)$$

é a contribuição de vácuo puro e  $\varphi_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ . Nós escolhemos a normalização tal que  $\log \mathcal{Z}(0, 0) = 0$ . Isso quer dizer que vamos considerar o termo  $\log \mathcal{Z}_0 = 0$ . Um ponto muito interessante a ser notado é que na equação (251), as partes imaginárias das raízes complexas  $\varphi_i$  se cancela, e o resultado final é real, como este deveria ser.

Agora, para a contribuição de  $\mu \neq 0$ , temos que

$$\log \mathcal{Z}^{(\mu)}(T, \mu) = T \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log \left( \frac{\vec{p}^2 + M_{n,\vec{p}}^2(\mu) - (i\omega_n + \mu)^2}{\vec{p}^2 + M_{n,\vec{p}}^2(0) + \omega_n^2} \right) \quad (253)$$

é finita e pode ser calculada para qualquer valor de temperatura e potencial químico. Infelizmente, não foi possível encontrar uma expressão fechada para ela, exceto no limite de  $T \rightarrow 0$ , onde é igual a função de partição completa. O limite de temperatura zero é tomado mais facilmente pela expressão da soma de Matsubara na equação (253) como integral de contorno no plano complexo. Isso já foi visto na equação (79). Definindo

$$\Omega_{\vec{p}}^2(\varrho) := \vec{p}^2 + \left[ \frac{M_3}{-\varrho + \vec{p}^2 + m^2} + m_0 \right] \quad (254)$$

e

$$f(\xi) := \log \left[ \frac{\omega_{\vec{p}}^2(\xi^2) - \xi^2}{\omega_{\vec{p}}^2[(\xi - \mu)^2] - (\xi - \mu)^2} \right], \quad (255)$$

podemos fazer a integração de caminho retangular  $\mathcal{P} = (-iL + \mu + \epsilon, +iL + \mu + \epsilon) \cup (+iL + \mu + \epsilon, +iL + \mu - \epsilon) \cup (+iL + \mu - \epsilon, -iL + \mu - \epsilon) \cup (-iL + \mu - \epsilon, -iL + \mu + \epsilon)$ , com  $L \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , e as somas sobre as frequências de Matsubara sobre a equação (253) como

$$\begin{aligned} T \sum_n f(i\omega_n + \mu) &= T \oint_{\mathcal{P}} \frac{d\xi}{2\pi i} f(\xi) \frac{\beta}{2} \tanh\left(\frac{\beta(\xi - \mu)}{2}\right) \\ &= \int_{-iL+\mu+\epsilon}^{+iL+\mu+\epsilon} \frac{d\xi}{4\pi i} f(\xi) \tanh\left(\frac{\beta(\xi - \mu)}{2}\right) + \\ &\quad + \int_{iL+\mu-\epsilon}^{-iL+\mu-\epsilon} \frac{d\xi}{4\pi i} f(\xi) \tanh\left(\frac{\beta(\xi - \mu)}{2}\right). \end{aligned} \quad (256)$$

Para o limite de  $T \rightarrow 0$ ,

$$\tanh\left[\frac{\beta(\xi - \mu)}{2}\right] \rightarrow 1 - 2\theta[\text{Re}(\mu - \xi)], \quad (257)$$

de modo que podemos escrever (256) como

$$\begin{aligned} T \sum_n f(i\omega_n + \mu) &= \int_{-iL+\mu+\epsilon}^{+iL+\mu+\epsilon} \frac{d\xi}{4\pi i} f(\xi) - \int_{iL+\mu-\epsilon}^{-iL+\mu-\epsilon} \frac{d\xi}{4\pi i} f(\xi) \\ &= \int_{-i\infty+\mu}^{+i\infty+\mu} \frac{d\xi}{2\pi i} f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} f(i\theta + \mu). \end{aligned} \quad (258)$$

A análise de  $f$  também foi usada para eliminar o termo  $\epsilon$  dos limites de integração e depois fizemos uma mudança de variáveis  $\epsilon \rightarrow \theta = -i(\xi - \mu)$ . O limite de temperatura zero da função de partição completa é então dada por

$$\begin{aligned} \log \mathcal{Z}(0, \mu) &= \log \mathcal{Z}^{(\mu)}(0, \mu) = 2\beta V N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} f(i\theta + \mu) \\ &= 2\beta V N_c N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{2\pi} [f(i\theta + \mu) + f(-i\theta + \mu)]. \end{aligned} \quad (259)$$

É importante notar que  $f(-i\theta + \mu) = f^*(i\theta + \mu)$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , a função de partição da equação (259) é uma quantidade real, como tem que ser.

No próximo capítulo, vamos comparar a termodinâmica deste modelo com os outros modelos já apresentados no capítulo anterior.

## 5 COMPARAÇÃO ENTRE OS DIVERSOS MODELOS

Quem é incapaz de construir hipóteses  
jamais será cientista.

*Antonio Gramsci*

### 5.1 Definições de quantidades termodinâmicas

Todos os modelos apresentados nas seções anteriores são importantes no que diz respeito à QCD. Sabendo que o gás de ressonâncias hadrônicas se adapta muito bem aos resultados encontrados pela rede para a pressão em baixas temperaturas, vamos utilizá-lo como um dos modelos de referência<sup>12</sup>. Os modelos quark-méson (QM) e Polyakov-quark-méson (PQM) já são bem conhecidos na literatura, porém o nosso modelo ainda não teve comparativo com outros modelos já existentes. Logo, essa comparação poderá ser feita analisando o comportamento termodinâmico dos modelos dos capítulos 2 e 3. Esse comportamento é descrito por diferentes gráficos de determinadas quantidades termodinâmicas. Algumas dessas quantidades são bem simples de serem descritas a partir do potencial termodinâmico

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \log Z(T, \mu), \quad (260)$$

como a pressão, que é definida como sendo

$$P(T, \mu) = -\Omega(T, \mu). \quad (261)$$

A partir disso, podemos escrever outras variáveis a partir da derivada primeira de  $\Omega(T, \mu)$ , como a densidade de entropia

$$s(T, \mu) = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}(T, \mu) = \frac{\partial P}{\partial T}(T, \mu) \quad (262)$$

ou a densidade de número líquido de quarks ( $n = n_q - n_{\bar{q}}$ )

$$n(T, \mu) = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}(T, \mu) = \frac{\partial P}{\partial \mu}(T, \mu). \quad (263)$$

A densidade de energia pode ser calculada utilizando a relação termodinâmica geral

---

<sup>12</sup> Para correções ao gás de ressonâncias livre, ver por exemplo (VOVCHENKO; GORENSTEIN; H., 2017)

$$e = Ts - P + \mu n. \quad (264)$$

Um observável termodinâmico muito útil também na análise futura é a anomalia do traço normalizada, definida como

$$\begin{aligned} \Delta(T, \mu) &:= \frac{\langle T_{\mu\mu} \rangle}{T^4} \\ &= \frac{e - 3P}{T^4} \\ &= T \frac{d}{dT} \left( \frac{P}{T^4} \right), \end{aligned} \quad (265)$$

onde

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (266)$$

é o valor esperado do tensor energia-*momentum* em equilíbrio termodinâmico e onde a última igualdade da equação (265) é válida para  $\mu = 0$ . A anomalia do traço mede o quão diferente um sistema se comporta com respeito a um gás ideal de partículas sem massa  $e = 3P$ .

Este observável se relaciona com a velocidade do som ao quadrado ( $c_s^2$ ), dada por

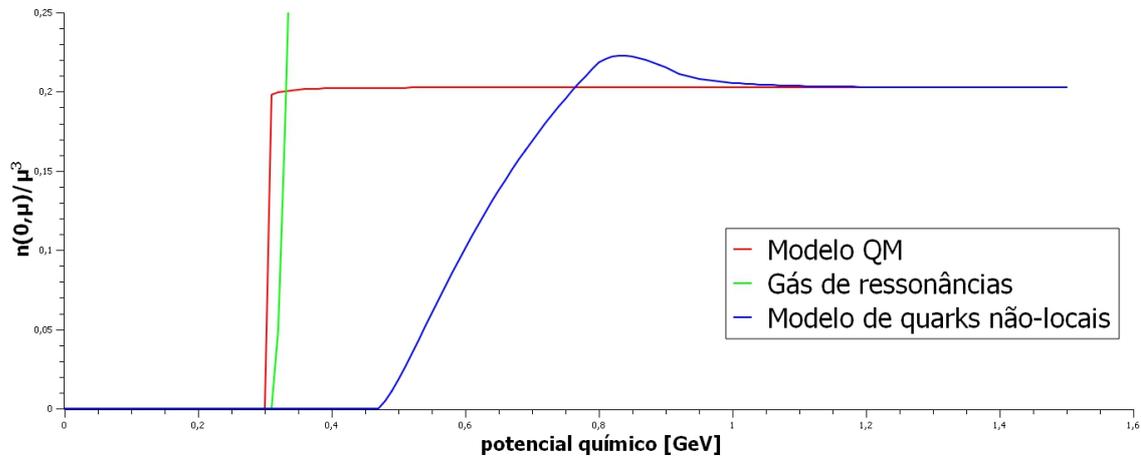
$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial e}. \quad (267)$$

Comparando a equação (265) com a equação (267), vemos que para um gás ideal de partículas sem massa, o valor da velocidade do som ao quadrado é  $c_s^2 \approx 0.33$ . Dessa forma, este é um limite no qual não deve ser ultrapassado.

## 5.2 Comparação entre modelos

Para o modelo de quarks não-locais, estaremos usando aqui o parâmetros da rede citados no final na seção 3.2. Vamos incluir além de todos esses modelos um gás livre de férmions com massa de  $0.5 \text{ GeV}$ . Vejamos a razão para isto. Como, para temperatura nula, o potencial químico equivale a energia de Fermi, temos que o menor valor possível para a energia de Fermi é a massa de repouso de uma partícula. Na prática, o sistema

Figura 8 - Densidade de número líquido de quarks normalizada, em temperatura zero.



Legenda: Gráfico de  $n/\mu^3 \times \mu$  dos modelos QM, GRH e o modelo de quarks não locais.

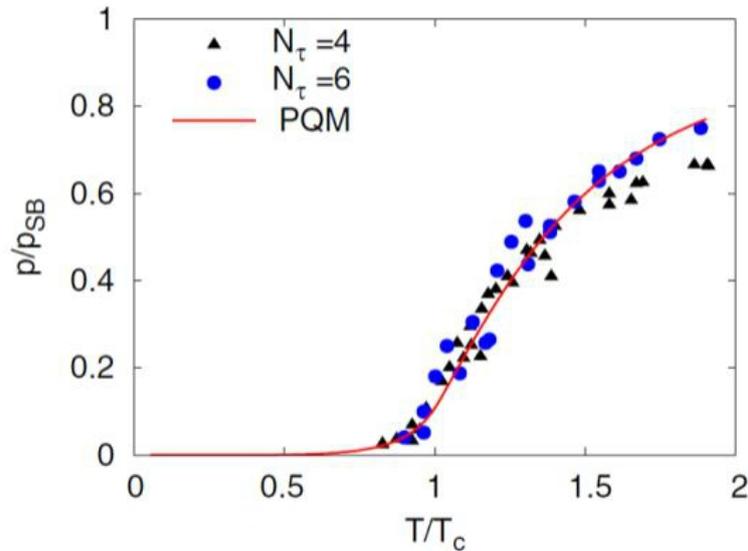
Fonte: O autor, 2017.

se encontra no estado de vácuo abaixo de um potencial químico abaixo da massa da excitação mais leve que contenha a carga associada ao potencial químico. Dessa forma, observando o gráfico da figura 8, podemos ver a densidade de número de quarks para o modelo de quarks não-locais passa a ser diferente de zero apenas em uma região em torno de um potencial químico de 0.5 GeV. Uma possível interpretação para isso é que este modelo daria origem a uma quasepartícula com massa em torno deste valor de 0.5 GeV. Como este modelo tem um valor de massa que é dependente do *momentum*, um gás livre com massa fixa de 0.5 GeV deveria apresentar comportamentos termodinâmicos um pouco diferentes.

Além disso, uma motivação para estarmos utilizando o modelo PQM, é porque ele é compatível com os dados da rede, tal como na figura 9. Ter essa compatibilidade é importante pois a rede apresenta bons resultados para potencial químico nulo para  $N_f = 2$  (KHAN et al., 2001).

Dessa forma, uma análise importante sobre o comportamento termodinâmico dos modelos citados na dissertação é feita utilizando o gráfico da figura 10, que representa como a pressão normalizada em  $T^4$  de cada modelo se comporta quanto à variação da temperatura. Este gráfico apresenta um comportamento semelhante para o modelo QM, quarks não locais e gás livre de férmions com massa 0.5 GeV. As suas curvas possuem uma taxa de crescimento suave, porém o modelo QM começa a crescer em  $T \approx 0.04$  GeV e o modelo de quarks não-locais junto com o gás livre em  $T \approx 0.06$  GeV. Porém, conforme a temperatura vai aumentando, o modelo o gás livre de férmions passa a ter um crescimento menor que o do modelo de quarks não-locais, mostrando assim que existe uma divergência entre eles. Além disso, estes três modelos normalizam no mesmo valor

Figura 9 - Pressão rede.



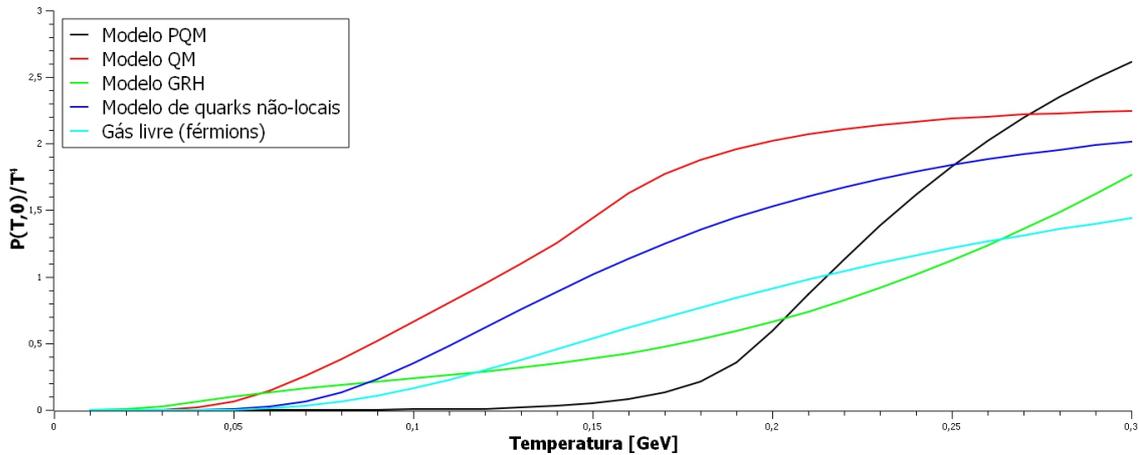
Legenda: Pressão normalizada pela a pressão de Stefan-Boltzmann em função da temperatura dividida pela temperatura psuedo-crítica ( $T_c = 184MeV$ ) do modelo PQM para  $N_f = 2$ .  $N_\tau$  neste gráfico representa o número de sítios na dimensão temporal para a rede.

Fonte: SCHAEFER; PAWLOWSKI; WAMBACH, 2007, p.10 e KHAN et al., 2001, p.30. Adaptado pelo autor.

de pressão, por terem o mesmo número de graus de liberdade. Isso já não acontece com o modelo PQM, pois este modelo só demonstra pequeno crescimento da pressão normalizada para  $T \approx 0.1$  GeV, temperatura essa bem mais alta que QM e modelo não-local. Portanto, é interessante compararmos as pressões normalizadas pelos respectivos limites de gás ideal. Isto é feito na figura 11. Uma peculiaridade também do modelo PQM é que em  $T \approx 0.19\text{GeV}$ , acontece um crescimento muito rápido da pressão, e este normaliza em pressão maior que os outros dois modelos. Isso se dá pelo fato de termos incluindo os graus de liberdade proveniente dos glúons pelo loop de Polyakov. Quanto ao gás de ressonâncias hadrônicas, este apresenta um crescimento muito mais suave que os outros modelos, devido à presença de ressonâncias massivas. Este aumento da pressão em uma região relativamente estreita de temperatura é um indicativo termodinâmico de uma transição de fase. De fato, o desconfinamento corresponde a um aumento do número efetivo de graus de liberdade, levando a um aumento na pressão, na densidade de energia, dentre outros.

É interessante ver que a massa que foi utilizada no modelo QM é dependente da temperatura. De fato, o condensado quiral, como visto na figura 5, tende a zero em altas temperaturas. Portanto, a massa efetiva dos quarks  $m_{eff} = g \langle \sigma \rangle$  diminui com a temperatura, o que faz com que o limite de gás ideal para a pressão seja alcançado

Figura 10 - Pressão normalizada.



Legenda: Gráfico de  $P/T^4 \times T$  de cada modelo utilizado na dissertação.

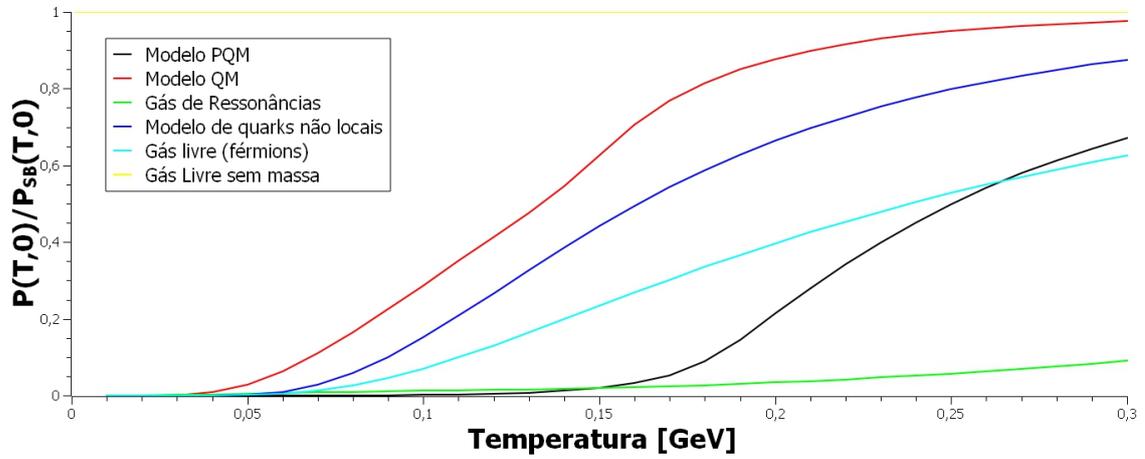
Fonte: O autor, 2017.

mais rapidamente que nos outros modelos. Da maneira mais amena, isso acontece com o modelo de quarks não-locais, pois este possui uma massa dependente do *momentum*, que por sua vez também cresce com o aumento da temperatura. Além disso, como gás de férmions livre possui uma massa fixa, era esperado que a taxa de crescimento de pressão para o modelo de quarks não-locais estar entre o modelo QM e o gás de férmions livre.

Além disso, uma outra análise que nós fazemos é normalizando a densidade de entropia em  $T^3$  e a densidade de energia em  $T^4$ , dados pelas figuras (12) e (13), respectivamente. Em ambos os gráficos, é simples observar uma “quebra” no crescimento do modelo QM, e uma outra “quebra” mais suave no crescimento do modelo PQM. Já o modelo de quarks não-locais e o gás livre de férmions apresentam um crescimento parecido, porém o modelo de quarks estabiliza em um valor de entropia com uma temperatura menor. Quanto ao gás de ressonâncias hadrônicas, este apresenta um crescimento muito suave a baixas temperaturas. Como sabemos que  $e = Ts - P + \mu n$ , para  $\mu = 0$  fica fácil ver que a densidade de energia normalizada a  $T^4$  deve realmente ser semelhante ao comportamento da densidade de entropia normalizada a  $T^3$ , pois o que vai diferir o comportamento de ambos é o “shift” causado pela pressão normalizada a  $T^4$ . Isso além de comprovar o comportamento semelhante desses gráficos, mostra o porque deles não serem exatamente idênticos.

Consideremos agora a anomalia do traço, dada pela equação (265). Observando o gráfico da figura 14, vemos que os modelos QM e PQM apresentam em baixas temperaturas picos muito claros, em torno de  $T \approx 0,15 \text{ GeV}$  e  $T \approx 0,19 \text{ GeV}$ , respectivamente. A presença de tais picos é indicativo de um aumento brusco da pressão, o que pode estar relacionado com uma transição de fase. Um ponto importante é a questão do pico pre-

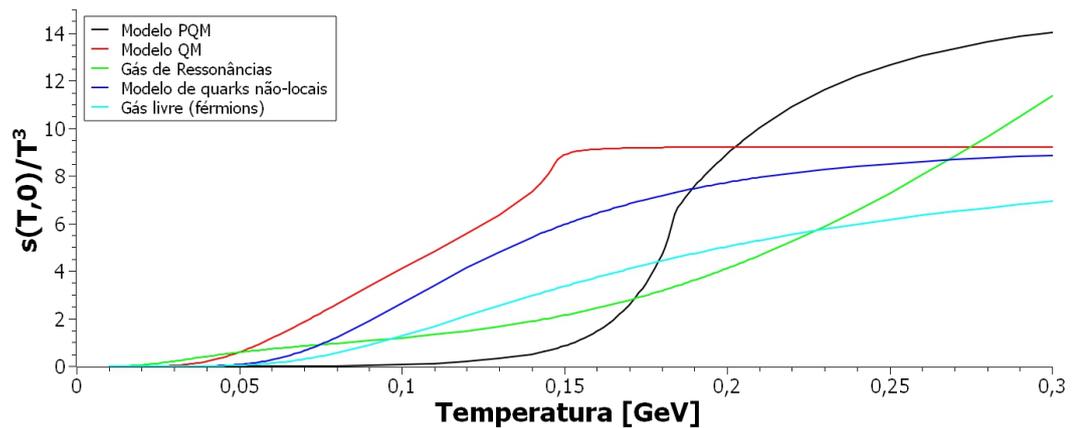
Figura 11 - Pressão normalizada com Stefan-Boltzmann.



Legenda: Gráfico de  $P/P_{SB} \times T$  de cada modelo utilizado na dissertação.

Fonte: O autor, 2017.

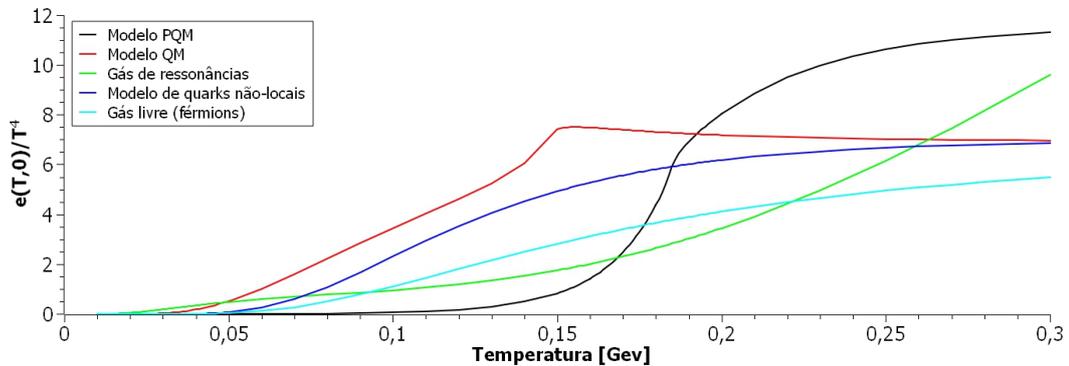
Figura 12 - Densidade de entropia normalizada por  $T^3$ .



Legenda: Gráfico de densidade de entropia normalizada em função da temperatura para cada modelo.

Fonte: O autor, 2017.

Figura 13 - Densidade de energia normalizada.



Legenda: Densidade de energia normalizada em função da temperatura para cada modelo.

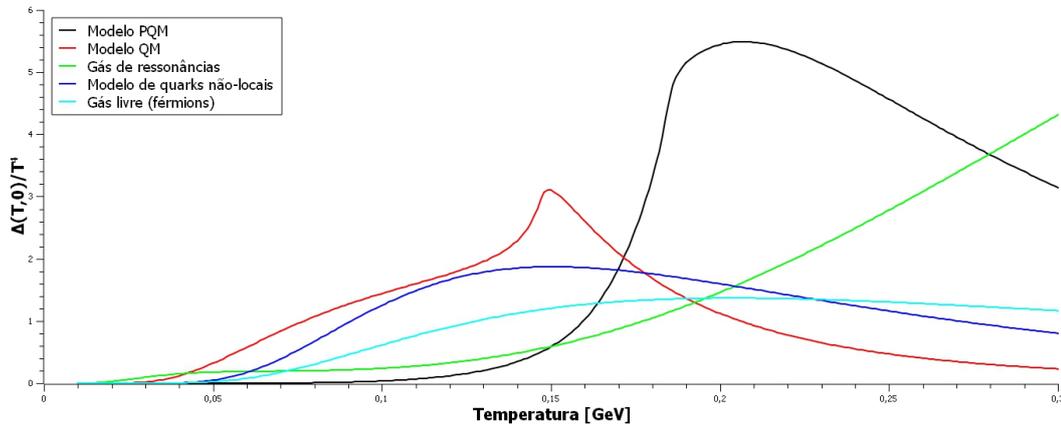
Fonte: O autor, 2017.

sente em QM ser muito mais estreito que o pico presente em PQM. Isso se deve ao fato das contribuições dos glúons através do Loop de Polyakov. Para o modelo não-local, não é possível nesta escala observar um pico. Tanto o modelo de quarks não-locais quanto o gás de férmions livre apresentam um crescimento muito suave, porém sem nenhum pico como o modelo QM e o modelo PQM. É válido ver que o gás de férmions livre cresce mais lentamente e diminui mais lentamente que o modelo de quarks não-locais conforme se aumenta a temperatura. Para o modelo GRH, apenas é observado um crescimento suave nesta escala de temperatura, por conta do seu alto número de graus de liberdade.

A velocidade do som ao quadrado tipicamente mostra um mínimo onde há uma transição de fase que ocorre em cada modelo. De fato, em uma transição de fase de primeira ordem,  $dc_s \neq 0$  enquanto  $dP = 0$  na temperatura de transição, o que implica  $c_s^2(T_c) = 0$ . Num *crossover*, este comportamento é suavizado e  $c_s$  apresenta uma depressão em torno da temperatura pseudo crítica. Os modelos QM e PQM mostram depressões exatamente nas mesmas temperaturas onde se observam os picos na figura 14, como é possível ver no gráfico da figura (15). O gás de ressonâncias hadrônicas apresenta um crescimento suave para temperaturas muito baixas e depois um decréscimo mais suave ainda. Tanto o modelo de quarks não-locais quanto o gás livre de férmions não apresentam sinal de depressões na velocidade do som, mostrando assim que *não há sinal de transição de fase para os modelos*.

Por outro lado, o modelo de quarks não-locais apresenta um comportamento muito incomum, o que não é visto para o gás livre de férmions. São observados dois picos em torno das temperaturas  $T \approx 0,12$  GeV e  $T \approx 0,30$  GeV respectivamente, onde esses resultados além de novos são muito inesperados, principalmente no que diz respeito ao

Figura 14 - Anomalia do traço.



Legenda: Anomalia do traço de cada modelo.

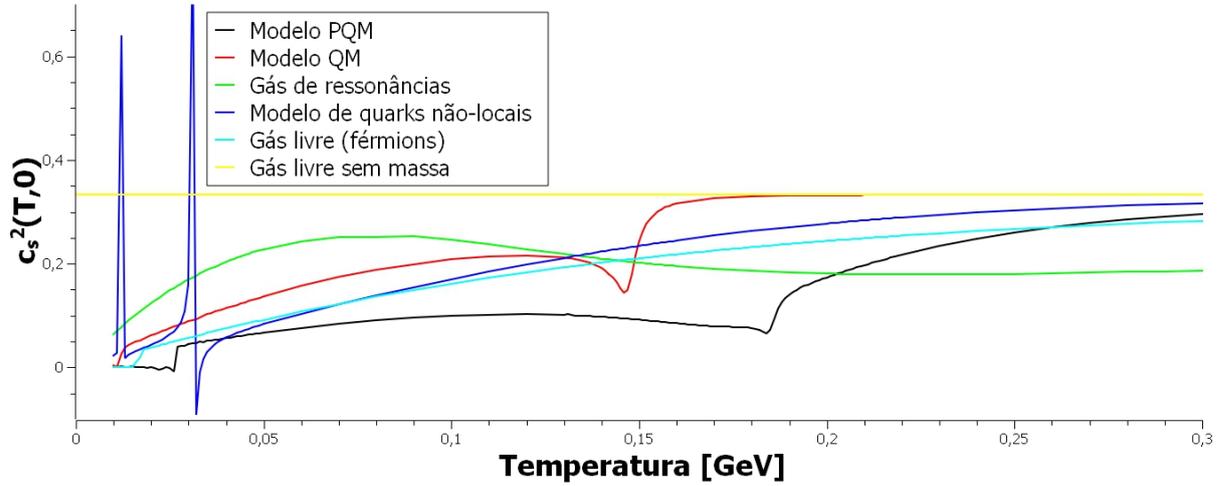
Fonte: O autor, 2017.

pico maior. Este apresenta um valor negativo para  $c_s^2$ . Apesar deste modelo não romper com o princípio de causalidade, que prevê que em termos da equação de estados,  $c_s^2 = \frac{dP}{de} \leq 1$ , ele rompe nas pequenas janelas de temperatura em torno dos picos de  $c_s^2$  com o princípio de Le Chatelier, que diz que em termos de uma equação de estado, vale a relação  $\frac{dP}{de} \geq 0$  (CANFORA et al., 2016). Isso é um resultado muito interessante pois o que está acontecendo nesta região de temperatura do modelo, é que o equilíbrio do sistema está sendo alterado, sem que o sistema se oponha a essa mudança. Isso indica que a equação de estado é instável nessa região.

Uma forma de entender o que está acontecendo é visualizando estes picos num gráfico que envolva pressão e densidade de energia. Como  $c_s^2$  é definido pela equação (267), as singularidades para o nosso modelo estão relacionadas com pontos de derivada que tendem a números grandes positivos e números grandes negativos. Isso fica mais claro de ser entendido observando os gráficos das figuras 16 e 17. A figura 17 nos mostra que existe uma região de temperaturas que apresenta pressão e densidade de energia negativas. Isso foi visto pela primeira vez na análise de (REIF, 1965; CANFORA et al., 2016) e está totalmente relacionando com essa singularidade observada. Um segundo pico é observado para valores muito pequenos de pressão e densidade de energia, da ordem de  $10^{-21} - 10^{-20} \text{ GeV}^4$  e  $10^{-23} \text{ GeV}^4$ , respectivamente.

Uma pergunta que podemos nos fazer é se há relação destas instabilidades com a violação de positividade do propagador dos campos elementares. De fato, é sabido que um propagador com polos complexos apresenta oscilações não físicas em quantidades termodinâmicas em baixas temperaturas. (BENIC; BLASCHKE; BUBALLA, 2012). No trabalho de (CANFORA et al., 2016), mostra-se que a pressão de um modelo baseado na

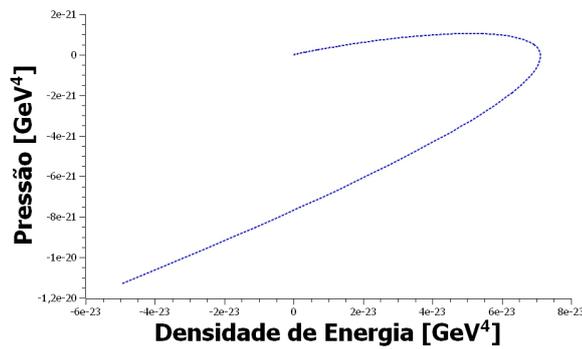
Figura 15 - Velocidade do som ao quadrado.



Legenda: Velocidade do som ao quadrado de cada modelo.

Fonte: O autor, 2017.

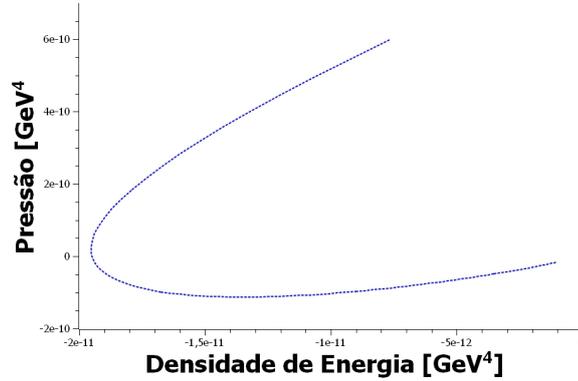
Figura 16 - Singularidade do modelo de quarks não locais - primeiro pico.



Legenda: Pressão em função da densidade de energia, onde as temperaturas consideradas estão no intervalo  $0.0100 \leq T \leq 0.0127$  [GeV].

Fonte: O autor, 2017.

Figura 17 - Singularidade do modelo de quarks não locais - segundo pico.



Legenda: Pressão em função da densidade de energia, onde as temperaturas consideradas estão no intervalo  $0.026 \leq T \leq 0.035$  [GeV].

Fonte: O autor, 2017.

RGZ é dado por uma soma de funções do tipo  $P(T) \approx \sum_i I(T, a_i^2)$ , tal que

$$I(T, a_i^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \log \left[ \frac{(p^2 + a_i^2 + \omega_n^2)}{\Lambda^2} \right]. \quad (268)$$

A resolução analítica de  $I(T, a_i^2)$  se deu por conta de (CANFORA et al., 2016) e equivale a escrever

$$I(T, a_i^2) = \frac{(a_i^2)^2}{32\pi^2} \left[ \log \left( \frac{a_i^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right) \right] - \frac{a_i^2 T^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\sqrt{a_i^2})/T}{n^2}. \quad (269)$$

Quando fazemos o limite para  $T \rightarrow 0$ , podemos dizer que  $K_2(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x}$ . Além disso, sendo  $x \approx \sqrt{a_i^2} \in \mathbb{C}$ , podemos escrever  $K_2 \approx e^{-\alpha} \cos(\alpha/T + \phi)$ , que mostram as oscilações não físicas da pressão em baixa temperatura quando esta é obtida de um propagador com polos complexos. Este comportamento será observado também no modelo de quarks estudado nessa dissertação.

Assim, o modelo de quarks não-locais nos permite relacionar as instabilidades termodinâmicas de baixas temperaturas que ele possui, com os propagadores com violação de positividade. Possivelmente isso é uma característica do confinamento por violação de positividade.

## CONCLUSÕES

Observando o comportamento termodinâmico do modelo de quarks não-locais apresentado no capítulo 5, vemos que este modelo não apresenta uma descrição da matéria fortemente interagente que seja consistente com modelos conhecidos, como o gás de ressonâncias hadrônicas (GRH) ou o modelo quark-méson (QM). Por conta do seu comportamento para a pressão, densidade de entropia e densidade de energia a potencial químico nulo, o modelo não-local está mais próximo de se adaptar ao modelo QM do que ao GRH. Os modelos QM e de quarks não-locais apresentam apenas uma descrição dos quarks. Entretanto, o modelo PQM que apresenta uma dinâmica tanto para os quarks quanto para os glúons, tem uma descrição termodinâmica também distinta de GRH.

Além das quantidades termodinâmicas derivadas do modelo de quarks não-locais não se aproximar daquelas dos outros modelos, este também apresenta singularidades que puderam ser vistas na figura 15. Estas singularidades são um problema muito sério deste modelo, pois este se relaciona com pressão e densidade de energia negativas. O gás de férmions livre com massa de 0.5 GeV foi muito importante na comparação, pois este apresenta em todos os gráficos do capítulo 5, um comportamento semelhante ao do modelo de quarks não-locais. Como o modelo de quarks não-locais possui uma massa que é dependente do *momentum*, o *shift* que existe entre este modelo e o gás de férmions livre em todos os gráficos era esperado.

Uma questão muito importante que vai ser tratada como um trabalho futuro é a inclusão do loop de Polyakov no modelo de quarks não-locais. Assim como para o modelo QM, a adição dos glúons muda de uma forma muito grande o seu comportamento termodinâmico, é esperado que a inclusão da dinâmica dos glúons no modelo de quarks não-locais tenha a mesma modificação em baixas energias. Além disso, a inclusão dos mesmos entra como uma tentativa de se reduzir as singularidades encontradas no gráfico  $c_s^2$ . Com a dinâmica dos glúons, é possível que a equação de estados naquela região possa se tornar mais estável, ou pelo menos haja uma suavização das instabilidades. Esta possibilidade já foi explorada na literatura (BENIC; BLASCHKE; BUBALLA, 2012; CANFORA et al., 2015), para modelos com violação de positividade, embora diferentes destes que exploramos na dissertação.

Logo, para ter confinamento e não ter instabilidade, é difícil.

## REFERÊNCIAS

- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [S.l.], v. 78, p. 025010, Jul. 2008.
- ALKOFER, R.; SMEKAL, L. Von. The infrared behaviour of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Physics Reports*, [S.l.], v. 353, p. 281–465, Nov. 2001.
- BARDEEN, J.; N., Cooper L.; SCHRIEFFER, J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, American Physical Society, [S.l.], v. 108, p. 1175–1204, Dec. 1957.
- BAULIEU, L. et al. Renormalizability of a quark-gluon model with soft BRST breaking in the infrared region. *Eur. Phys. J. C*, [S.l.], v. 66, p. 451–464, Feb. 2010.
- BAZAVOV, A. et al. Nonperturbative QCD simulations with 2 + 1 flavors of improved staggered quarks. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, [S.l.], v. 82, p. 1349–1417, May 2010.
- BECCHI, C.; ROUET, A.; R., Stora. Renormalization of gauge theories. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 98, p. 287–321, Jun. 1976.
- BELLAC, M. Le. *Thermal Field Theory*: Cambridge monographs on mathematical physics. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- BELLAC, M. Le. *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- BENIC, S.; BLASCHKE, D.; BUBALLA, M. Thermodynamic instabilities in dynamical quark models with complex conjugate mass poles. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [S.l.], v. 86, p. 074002, Oct. 2012.
- BERGES, J.; TETRADIS, N.; WETTERICH, C. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, [S.l.], v. 363, p. 223–386, Jun. 2002.
- BHAGWAT, M. S. et al. Analysis of a quenched lattice-QCD dressed-quark propagator. *Phys. Rev. C*, American Physical Society, [S.l.], v. 68, p. 015203, Jul. 2003.
- BLAIZOT, J. P.; MENDEZ-GALAIN, R.; WSCHEBOR, N. Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of  $n$ -point functions. I. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 74, p. 051116, Nov. 2006.
- BOGOLYUBOV, N. N. On the theory of superfluidity. *J. Phys. URSS*, [S.l.], v. 11, p. 23–32, 1947.
- BREIT, G.; WIGNER, E. Capture of slow neutrons. *Phys. Rev.*, American Physical Society, [S.l.], v. 49, p. 519–531, Apr. 1936.
- BUBALLA, M. NJL-model analysis of quark matter at large density. *Physics Reports*, v. 407, p. 205–376, Feb. 2005.

- CANFORA, F. et al. Comments on the compatibility of thermodynamic equilibrium conditions with lattice propagators. *The European Physical Journal C*, [S.l.], v. 76, p. 443, Aug. 2016.
- CANFORA, F. E. et al. Effect of the Gribov horizon on the Polyakov loop and vice versa. *European Physical Journal C*, [S.l.], v. 75, p. 326, Jul. 2015.
- COLEMAN, S. *Aspects Of Symmetry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988.
- CUCCHIERI, A. et al. Massive gluon propagator at zero and finite temperature. Feb. 2012. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1202.0639>. Acesso em: 30 jun. 2017.
- DAS, A. *Finite Temperature Field Theory*. [S.l.]: World Scientific, 1997.
- DUDAL, D. et al. Confinement and dynamical chiral symmetry breaking in a non-perturbative renormalizable quark model. *Annals Phys.*, [S.l.], v. 365, p. 155–179, Mar. 2016.
- FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physical Letters B*, [S.l.], v. 25, p. 29–30, Jul. 1967.
- FODOR, Z.; HOELBLING, C. Light hadron masses from lattice qcd. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, [S.l.], v. 84, p. 449–495, Apr. 2012.
- FUKUSHIMA, K. Phase diagrams in the three-flavor nambu-jona-lasinio model with the polyakov loop. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [S.l.], v. 77, Jun. 2008.
- GELL-MANN, M.; LEVY, M. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento*, v. 16, p. 705–726, May 1960.
- GOLDSTONE, J. Field theories with superconductor solutions. *Il Nouvo Cimento*, [S.l.], v. 19, p. 154–164, Jan. 1961.
- GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken symmetries. *Phys. Rev*, American Physical Society, [S.l.], v. 127, p. 965–970, Aug. 1962.
- GONCHAR, M. O.; KALOSHIN, A. E.; LOMOV, V. P. Fermion resonance in quantum field theory. *Mod. Phys. Lett. A*, [S.l.], v. 22, p. 2511–2519, Nov. 2007.
- GUIMARAES, M. S.; MINTZ, B. W.; PALHARES, L. F. Thermodynamics of an exactly solvable confining quark model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [S.l.], v. 92, p. 085029, Oct. 2015.
- HABERSETZER, A. *Spectral Densities of the  $\tau$  Lepton in a Global  $U(2)_L \times U(2)_R$  Linear sigma Model with Electroweak Interaction*. Tese (Doutorado) — Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt, 2011.
- HOOFT, G. t'. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Physical Review D*, American Physical Society, [S.l.], v. 14, p. 3421–3450, Dec. 1976.
- KAPUSTA, J. I.; GALE, C. *Finite-Temperature Field Theory Principle and Applications*: Cambridge monographs on mathematical physics. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.

- KHAN, A. A. et al. Equation of state in finite temperature qcd with two flavors of improved wilson quarks. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [S.l.], v. 64, p. 074510, Sep. 2001.
- KOGUT, J. B. The lattice gauge theory approach to quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, [S.l.], v. 55, p. 775–836, Jul. 1983.
- MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of Theoretical Physics*, [S.l.], v. 14, p. 351–378, Oct. 1955.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, [S.l.], v. 122, p. 345–358, Apr. 1961.
- NISHIJIMA, K. Brs invariance, asymptotic freedom and color confinement (a review). *Czechoslovak Journal of Physics*, [S.l.], v. 46, p. 1–40, Jan. 1996.
- NORONHA-HOSTLER, J. et al. Kaon fluctuations from lattice qcd. Jul. 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1607.02527>. Acesso em: 13 jun. 2017.
- NUNES, Y. E. C. O. *Modelo de estudo do mecanismo de Gribov através de operadores locais compostos*. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares: [s.n.], 2011.
- OEHME, R. Analytic structure of amplitudes in gauge theories with confinement. *Int. J. Mod. Phys. A*, [S.l.], v. 10, p. 1995–2014, 1995.
- PATRIGNANI, C. et al. Review of particle physics. *Chin. Phys. C*, v. 40, p. 100001, Oct. 2016.
- PAWLOWSKI, J. M. Aspects of the functional renormalisation group. *Annals Phys.*, [S.l.], v. 322, p. 2831–2915, Dec. 2007.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Perseus Books, 1995.
- PIGUET, O.; SORELLA, S. P. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*. Berlin, Germany: Springer, 1995.
- POLYAKOV, A. M. Thermal properties of gauge fields and quark liberation. *Phys. Lett. B*, [S.l.], v. 72, p. 477–480, Jan. 1978.
- RATTI, C.; THALER, M. A.; WEISE, W. Phases of qcd: Lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, [S.l.], v. 73, p. 014019, Jan. 2006.
- REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. [S.l.]: Waveland Press, 1965.
- ROBERTS, C. D. Strong qcd and dyson-schwinger equations. [S.l.], Mar. 2012. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1203.5341>. Acesso em: 26 jun. 2017.
- SCAVENIUS, O. et al. Chiral phase transition within effective models with constituent quarks. *Phys. Rev. C*, [S.l.], v. 64, p. 045202, Aug. 2001.

- SCHAEFER, B. J.; PAWLOWSKI, J. M.; WAMBACH, J. The phase structure of the polyakov-quark-meson model. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 76, p. 074023, Oct. 2007.
- SKANDS, P. Introduction to qcd. *Searching for New Physics at Small and Large Scales*, World Scientific, p. 341–420, Sep. 2013.
- TYUTIN, I. V. Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism. 2008. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0812.0580>. Acesso em: 11 jun. 2017.
- VANDERSICKEL, N. *A Study of the Gribov-Zwanziger action: from propagators to glueballs*. Tese (Doutorado) — Universiteit Gent, Gent, 2011.
- VENUGOPALAN, R.; PRAKASH, M. Thermal properties of interacting hadrons. *Nucl. Phys. A*, [S.l.], v. 546, p. 718–760, Sep. 1992.
- VOVCHENKO, V.; GORENSTEIN, M. I.; H., Stoecker. van der waals interactions in hadron resonance gas: From nuclear matter to lattice qcd. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 118, p. 182301, May 2017.
- WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- WILCZEK, F. Asymptotic freedom. [S.l.], Sep. 1996. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/960909>. Acesso em: 15 jun. 2017.
- WILCZEK, F. Qcd made simple. *Phys. Today*, American Institute of Physics, [S.l.], v. 53N8, p. 22–28, Aug. 2000.
- WILSON, K. G. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 10, p. 2445–2459, Oct. 1974.