Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Tiago Pereira Dourado

Fases anisotrópicas em líquidos Hall quânticos

Rio de Janeiro
2017

Tiago Pereira Dourado

Fases anisotrópicas em líquidos Hall quânticos

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D739 Dourado, Tiago Pereira.
Fases anisotrópicas em líquidos Hall quânticos / Tiago Pereira Dourado. - 2017.
78 f.: il.

Orientador: Daniel Gustavo Barci.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Hall, Efeito quântico de - Teses. 2. Anisotropia - Teses. 3.Teoria quântica - Teses. 4. Elétrons - Teses. I. Barci, Daniel Gustavo. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III.Título.

CDU 537.633

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

_____ _____

Assinatura Data

Tiago Pereira Dourado

Fases anisotrópicas em líquidos Hall quânticos

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 21 de novembro de 2017.
Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Daniel Adrián Stariolo
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Daniel lorenzo Reyes López
Instituto Militar de Engenharia

Prof. Dr. Santiago Perez Bergliaffa
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Bruno de Pinho Alho
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr.ª Zochil González Arenas
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro
2017

DEDICATÓRIA

A minha filha, Luiza
A minha esposa, Andrea

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto de Física Armando Dias Tavares, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) pela oportunidade de cursar o doutorado.

Sou imensamente grato ao professor Dr. Daniel Gustavo Barci, pela orientação e formação durante o doutorado.

Ao prezado Rogerio Texeira, secretário do PPGF, os meus profundos agredecimentos pela sua competência em todo trabalho administrativo.

De forma muito especial, quero agradecer a minha amada esposa Andrea por seu companheirismo, incentivo e carinho durante todos esses anos.

Por fim, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ, pela ajuda financeira.

RESUMO

DOURADO, T. P. *Fases anisotrópicas em líquidos Hall quânticos.* 2017. 78 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

Neste trabalho, desenvolvemos uma teoria efetiva para descrever a existência de fases anisotrópicas em líquido Hall quântico. Partimos de um sistema de elétron líquido bidimensional, submetido a moderados campos magnéticos, onde os níveis de Landau de índices $n \geq 2$ são preenchidos parcialmente, fazendo com que o termo de Coulomb tenha uma importância considerável. Através de uma aproximação Hartree-Fock via campo-médio, calculamos um potencial de interação U_{HF} em função do momento e de um fator de preenchimento parcial elevado, e mostramos que ele apresenta mínimos bem definidos com oscilações no espaço dos momentos. Assim, nos apropriamos do modelo estendido de Brazovskii e escrevemos um fator de estrutura, a $T = 0$, como uma função de correlação de dois pontos, assinalando assim, a existência da fase nemática no líquido Hall quântico. Contudo, para $T \neq 0$, acreditamos que o nosso modelo é um forte candidato para o desenvolvimento de uma teoria efetiva que mostre a existência da transição de fase isotrópica-nemática em sistema Hall.

Palavras-chave: Efeito Hall Quântico. Transições de fase. Elétrons fortemente correlacionados. Níveis de Landau.

ABSTRACT

DOURADO, T. P. *Anisotropic phase in quantum Hall liquid.* 2017. 78 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

In this work, we have developed an effective theory to describe the existence of anisotropic phases in quantum Hall liquid. We start from a two-dimensional liquid electron system, subjected to moderate magnetic fields, where Landau levels of $n \geq 2$ indices are partially filled, making the Coulomb term of considerable importance. Through a Hartree-Fock approximation via the mean field, we calculated a potential U_{HF} interaction as a function of the moment and a high partial fill factor, and we show that it presents minimum wells of nests with oscillations in the space of moments. Thus, we take the Brazovskii extended model and write a structure factor, $T = 0$, as a two-point correlation function, thus signaling the existence of the nematic phase in the quantum Hall liquid. However, for $T \neq 0$, we believe that our model is a strong candidate for the development of an effective theory that shows the existence of the isotropic-nematic phase transition in the Hall system.

Keywords: Quantum Hall Effect. Phase transition. Strongly correlated electrons. Landau levels.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Barra Hall 14
Figura 2 - Regime clássico 15
Figura 3 - Densidade de estados 19
Figura 4 - Medida do Efeito Hall Quântico Inteiro no Si-MOSFET 20
Figura 5 - Resistividades 21
Figura 6 - Estados localizados e não- localizados 23
Figura 7 - Regime Hall quântico fracionário 24
Figura 8 - Resistividades versus campo magnético 25
Figura 9 - Anisotropia 32
Figura 10 - Anisotropia da resistividade longitudinal 33
Figura 11 - Anisotropia em função da temperatura 34
Figura 12 - Fase stripe-paramagnética 61
Figura 13 - Fase nemática 62
Figura 14 - Representação esquemática da fase de stripe 63
Figura 15 - Fator de estrutura para competição de interação 64
Figura 16 - Fator de estrutura para competição de interação 65
Figura 17 - Fator de estrutura para competição de interação 65
Figura 18 - Esquema isotrópico 67
Figura 19 - Valores numéricos na aproximação Hartree-Fock 70

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Potenciais com preenchimento $\nu = 9/2$ 57
Gráfico 2 - Potenciais com preenchimento $\nu = 13/2$ 57
Gráfico 3 - Potencial Hartree-Fock em função do preenchimento 70
Gráfico 4 - Curvatura do potencial Hartree-Fock versus preechimento 71

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	**O EFEITO HALL CLÁSSICO E QUÂNTICO**	13
1.1	**Efeito Hall clássico**	13
1.2	**O caso quântico: níveis de Landau**	16
1.3	**Efeito Hall quântico inteiro**	19
1.4	**Efeito Hall quântico fracionário**	23
1.4.1	A função de onda de Laughlin	26
1.5	**Anisotropia em sistemas Hall**	32
2	**EFEITO DA INTERAÇÃO DE COULOMB NUM LíQUIDO DE HALL COM PREENCHIMENTO PARCIAL**	36
2.1	**Aproximação Hartree-Fock**	36
2.2	**Cálculo Hartree-Fock num sistema Hall com preenchimento parcial**	40
2.3	**Resultados numéricos**	56
3	**FASE NEMÁTICA EM LÍQUIDO HALL QUÂNTICO**	59
3.1	**O padrão de ordem nemático**	62
3.2	**O modelo estendido de Brazovskii**	66
3.3	**Modelo de hamiltoniano efetivo e a fase Hall quântica nemática**	68
	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	75

INTRODUÇÃO

O estudo de líquido quânticos começou a ser desenvolvido por Landau nos anos 50 em relação à fase líquida do ^3He (LANDAU, 1990). A teoria de Landau para líquidos de Fermi teve um considerável sucesso, não apenas pela descrição do ^3He, mas pela descrição do comportamento da maioria dos metais. Uma excelente revisão pode ser encontrada no livro de Giuliani e Vignale(GIULIANI; VIGNALE, 2005). Mais tarde, Anthony Legget desenvolveu uma teoria descobrindo fases exóticas do ^3He (LEGGETT, 1965)(LEGGETT, 1972), a qual foi confirmada experimentalmente e lhe valeu o prêmio Nobel em 2003.

O aparecimento da teoria da supercondutividade BCS (Bardeen, Cooper e Schrieffer), em 1957, potencializou o cenário para a teoria de Landau, mostrando que as interações num líquido eletrônico podem suportar estados homogêneos e não-magnéticos que são qualitativamente diferentes de qualquer sistema não interagente. De fato, as excitações elementares de um supercondutor, surgem quando se quebra um vínculo que une dois elétrons juntos num estado fundamental, o que é consistente com um mar infinito de elétrons, conhecidos como *pares de Cooper*. Como a criação de uma quasepartícula em um supercondutor, perturba o estado fundamental, quando se rompe o vínculo entre dois elétrons, vemos que deve haver uma energia de gap associada à criação da tal quasepartícula. Esta é uma diferença qualitativa que tem com um sistema não interagente, evidenciando que um estado supercondutor não pode ser tido como uma simples continuação do último. Desse modo, a teoria BCS, assinala uma nova era de grande interesse de físicos da matéria condensada, identificada pelo comportamento de sistemas conhecidos como elétrons fortemente correlacionados.

Enquanto isso, avanços tecnológicos no processamento de materiais semicondutores permitiram a realização de sistemas em que, tanto a densidade quanto a dimensionalidade efetiva de líquidos eletrônicos, pudessem ser artificialmente controladas. Tais inovações, permitiram boas perspectivas para o rompimento do paradigma do líquido de Fermi de Landau; primeiro explorando um regime em que a energia potencial de interação torna-se gradualmente mais importante que a energia cinética, e segundo, é que foi possível reduzir efetivamente a energia cinética através de restrições geométricas sobre o movimento dos elétrons. Através disso, foi possível verificar que a o líquido de Fermi de Landau, depende crucialmente da dimensionalidade do sistema, e se torna inviável à medida que se reduz essa dimensionalidade. Em duas dimensões, tem-se que esta fase de elétron líquido é estável na presença de desordem. Já em uma dimensão, a teoria de Landau falha completamente. Qualquer interação, por mais pequena que ela seja, destrói tanto a superfície de Fermi quanto qualquer excitação fermiônica do estado fundamental. As excitações de baixa energia desse sistema são descritas por ondas de densidade de carga e densidade

de spin com velocidades diferentes. Tudo isso marcou os anos 70, e esta fenomenologia exótica deu lugar a um novo paradigma dos líquidos quânticos denominado por Haldane como *líquidos de Luttinger* (HALDANE, 1981).

O aparecimento de novos desafios em Física da Matéria Condensada, indicariam que esta fenomenologia do líquido de Luttinger, deveria ser generalizada para mais de uma dimensão. Sistemas tão diferentes como férmions pesados, óxido de cobre supercondutores e gases de elétrons bidimensionais, apresentam propriedades eletrônicas que se afastam do comportamento típico de um líquido de Fermi, nascendo assim o denominado *non-Fermi liquids*, para descrever esse comportamento metálico exótico. Até hoje, não existe nenhuma teoria fermiônica local para descrever esse comportamento metálico exótico.

A quantização do efeito Hall, descoberto por *von* Klitzing em 1980 (KLITZING; DORDA; PEPPER, 1980), é outro efeito macroscópico quântico que ocorre em um sistema de gás de elétrons bidimensionais, submetido a baixas temperaturas e a altos campos magnéticos. Nestas condições a condutividade Hall exibe platôs com múltiplos inteiros de $\frac{e^2}{h}$, que se tornou uma constante universal. Este fenômeno ficou conhecido como Efeito Hall Quântico Inteiro. A notável precisão na quantização é totalmente indiferente à existência de impureza e de características geométricas do sistema bidimensional. Cada platô, é acompanhado por um mínimo na resistividade diagonal indicando um fluxo de corrente sem dissipação. Em 1982, uma outra surpresa experimental vem à tona. Trabalhando com amostras de alta mobilidade de elétrons, com temperaturas ainda mais baixa e sob campos magnéticos mais intensos, Tsui (TSUI; STORMER; GOSSARD, 1982), descobrem a quantização fracionada da condutividade Hall, descobrindo o Efeito Hall Quântico Fracionário. Apesar de os dois efeitos apresentarem semelhança nos resultados experimentais, os mecanismos físicos responsáveis por eles são diferentes. Enquanto que no primeiro o tratamento da impureza é um ponto fundamental para sua descrição, no segundo, os efeitos causados pelas interações elétron-elétron se faz muito importante.

Todo esse cenário, que está muito longe de ser completamente entendido, teve sua superfície rabiscada quando, em 1983, Robert Laughlin introduziu sua célebre função de onda para explicar o efeito Hall quântico fracionário (LAUGHLIN, 1983). Isso permitiu a descoberta de uma nova fase exótica da matéria, encontrada em um sistema bidimensional de elétrons, a campos magnéticos muito altos, conhecida como *líquido Hall quântico*, que é um líquido quântico incompressível caracterizado pela excitação fracionada de cargas, tendo como principal característica, o desaparecimento da resistividade longitudinal e a perfeita quantização da condutividade que depende apenas das constante fundamentais e e $\hbar$. Uma outra fase exótica, que aparece neste tipo de sistema, é a hipotética fase *cristal Hall*, isto é, uma fase caracterizada por um estado de CDW (do inglês: *charge density wave*) coexistindo com um líquido Hall quântico, que em fracos campos magnéticos, é conhecida como *fase de stripes* (FOGLER; KOULAKOV; SHKLOVSKII, 1996). Todo esse contexto em torno do efeito Hall, levou a premiação de dois prêmios Nobel. O

primeiro, em 1985, a Klaus von Klitzing, pela descoberta do efeito Hall quântico inteiro e, em 1998, R. B. Laughlin, H. L Stormer, e D. C. Tsui, foram os premiados pela contribuição e descoberta do efeito Hall quântico fracionário.

Recentemente, alguns avanços nos estudos de líquido Hall quântico permitiram renovar as esperanças de uma melhor compreensão deste sistema complexo. Experiências em sistemas Hall evidenciam a existência de anisotropias intrínsecas a esse sistema, compatíveis com uma quebra espontânea de simetria de rotação. Tal anisotropia estaria estreitamente ligada ao comportamento do *non-Fermi liquid*. Na verdade, este líquido quântico anisotrópico tem propriedades análogas aos seus parentes clássicos: os cristais líquidos. Podemos falar então, das fases quânticas equivalentes: esmética, nemática, hexática, etc. (FRADKIN; KIVELSON, 1999),(EMERY et al., 2000) (FRADKIN; KIVELSON, 1999). Uma teoria para a fase smética em sistema Hall foi apresentada nos trabalhos de Fradkin e Barci (EMERY et al., 2000)(BARCI et al., 2002)(BARCI; FRADKIN, 2002), enquanto que os primeiros estudos sistemáticos da fase nemática quântica podem ser encontrados nas referências (FRADKIN et al., 2000)(OGANESYAN; KIVELSON; FRADKIN, 2001)(BARCI; OXMAN, 2003)(LAWLER et al., 2006)(BARCI et al., 2008)(BARCI; REYES, 2013). Essas fases surgem da natureza de competição das interações nesses sistemas, onde podem ser observadas diversas transições de fase. Podemos citar, por exemplo, a transição isotrópica-nemática que, embora seja razoavelmente conhecida em sistemas clássicos (BARCI; STARIOLO, 2007)(BARCI; STARIOLO, 2009)(BARCI; STARIOLO, 2011)(BARCI; REYES, 2013)(BARCI; RIBEIRO; STARIOLO, 2013)(TEIXEIRA; STARIOLO; BARCI, 2013), o mesmo não acontece em sistemas que apresentam efeito Hall quântico (BARCI; ARENAS, 2008). A presente proposta de tese, pretende avançar nessa linha de pesquisa que hoje é uma das mais ativas na área de elétrons fortemente correlacionados.

Neste trabalho, estamos considerando um sistema de líquido Hall quântico submetido a campos magnéticos moderados, onde os níveis $n \geq 2$ de Landau, estão parcialmente ocupados. Deste modo, apresentamos no primeiro capítulo os principais fundamentos do efeito Hall, do clássico ao quântico (inteiro e fracionário), enfatizando a fase exótica de líquidos Hall quânticos. Por fim, descrevemos a anisotropia em sistemas Hall e sua dependência com a temperatura, que é uma das motivações do nosso trabalho. No segundo capítulo, consideramos o fato de que o termo de interação de Coulomb é muito importante na análise de nosso problema, e assim, desenvolvemos uma teoria Hartree-Fock via campo médio e apresentamos os nossos principais resultados. Já no terceiro capítulo, apresentamos os fundamentos básicos para a descrição da fase anisotrópica em sistema Hall. Assim, terminamos a tese apresentando nossas principais conclusões e as perspectivas de contribuição para um melhor entendimento do sistema de líquido Hall quântico.

1 O EFEITO HALL CLÁSSICO E QUÂNTICO

Neste capítulo, apresentamos a fenomenologia do efeito Hall, desde o clássico até o quântico (inteiro e fracionário), e suas principais características. Em seguida, abordamos as evidências experimentais da anisotropia em sistemas Hall e sua relação com a conhecida fase quântica *nemática*, mostrando assim o principal motivo para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Efeito Hall clássico

Descoberto em 1879 por E. H. Hall, o efeito Hall clássico tornou-se um método muito eficiente para determinar os portadores de carga num material condutor e também para medir campos magnéticos. De forma a ilustrar o experimento feito por ele, consideremos um sistema de elétrons bidimensional, submetido a um campo magnético perpendicular $\mathbf{B} = B\hat{z}$, como evidenciado pela fig.1. Devido á força de Lorentz, um campo elétrico aplicado na direção $\hat{x}$ gera correntes tanto em $\hat{x}$ quanto em $\hat{y}$. Porém, quando levamos em consideração a presença de impurezas espalhadoras do material, os elétrons se movem com uma velocidade de arrastos $\mathbf{v}_d$, cuja expressão numa aproximação de tempo de relaxação, é

$$m\frac{d\mathbf{v}_d}{dt} \approx m\frac{\mathbf{v}_d}{\tau} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

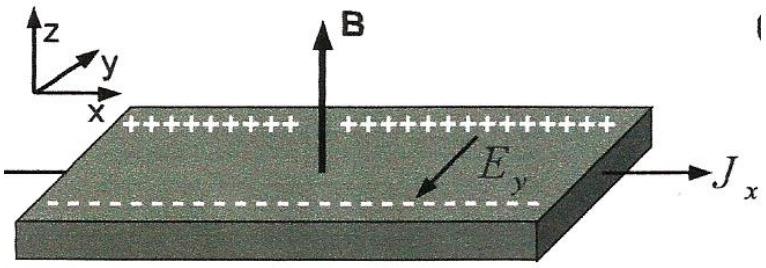
onde τ^{-1} é a taxa de espalhamento. Se tomarmos o movimento dos elétrons como sendo no plano xy, mantendo o compo magnético na mesma direção, a solução para as componentes de $\mathbf{v}_d$, ficam

$$v_{d,x} = \frac{e\tau}{m}\left[-\frac{1}{1+\omega_c^2\tau}E_x + \frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau}E_y\right] \tag{2}$$

$$v_{d,x} = \frac{e\tau}{m}\left[-\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau}E_x - \frac{1}{1+\omega_c^2\tau}E_y\right] \tag{3}$$

sendo $\omega_c = \frac{eB}{m}$ a frequência de cíclotron dos elétrons. Perceba também que, devido ao campo magnético, uma corrente aplicada na direção $\hat{x}$, ou seja, $E_x \neq 0$ e $E_y = 0$, resulta em uma velocidade finita na direção $\hat{y}$. Assim, o acúmulo de cargas nas bordas da amostra gera um campo elétrico E_y, caracterizando o efeito Hall clássico.

Figura 1 - Barra Hall



Legenda: Diagrama de uma barra Hall ilustrando o efeito Hall clássico. Quando se aplica uma corrente J_x pelo gás de elétrons bidimensional, na presença de um campo $\mathbf{B} = B\hat{z}$, estabelece-se um campo transverso E_y devido ao acúmulo de cargas de sinais opostos nas bordas da amostra.

Fonte: GERSON, 2011, p. 39.

A densidade de corrente através da amostra é dado por

$$\mathbf{J} = -en_{2D}\mathbf{v}_d \tag{4}$$

onde n_{2D} é a densidade bidimensional de elétrons. Logo, substituindo as soluções das componentes da velocidade na expressão 4, obtemos

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \sigma_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} & -\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c\tau^2} \\ \frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c\tau^2} & \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \tag{5}$$

onde $\sigma_0 = \frac{e^2\tau n_{2D}}{m}$ é a condutividade de Drude. Se tomarmos $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, podemos escrever as componentes do tensor condutividade como:

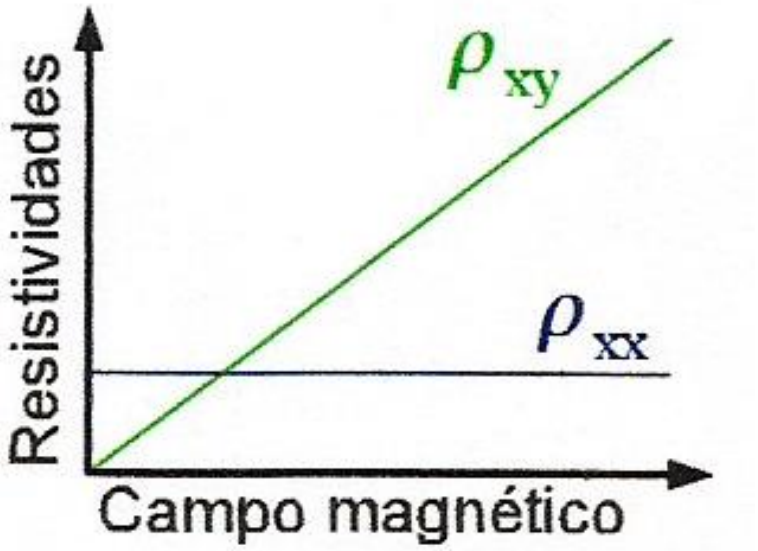
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0 \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2} = \frac{en_{2D}}{B}\left(\frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}\right) \tag{6}$$

$$\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \sigma_0 \frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} = \frac{en_{2D}}{B} + \frac{1}{\omega_c\tau}\sigma_{xx}. \tag{7}$$

No regime Hall clássico, a taxa de espalhamento é alta e o campo magnético é baixo. Assim, se fizermos o limite de $\omega_c\tau \ll 1$, o tensor resistividade, definido como o inverso do tensor condutividade e, por conseguência, dado por $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$, é

$$\rho = \begin{pmatrix} \sigma_0^{-1} & -\frac{B}{en_{2D}} \\ \frac{B}{en_{2D}} & \sigma_0^{-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Figura 2 - Regime clássico



Legenda: Medida da resistividade longitudinal ρ_{xx} e transversal ρ_{xy}, no regime clássico.
Fonte: GERSON, 2011, p. 39.

Podemos escrever suas componentes como

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{1}{en_{2D}\mu}, \tag{9}$$

$$\rho_{yx} = -\rho_{xy} = \frac{B}{en_{2D}}, \tag{10}$$

onde $\mu = \frac{e\tau}{m}$ é a mobilidade de elétrons.

O movimento dos elétrons na direção $\hat{y}$ desloca os elétrons para um dos extremos da barra, gerando um desbalanço de carga, e consequentemente um campo elétrico na direção $\hat{y}$. Medindo-se as diferenças de potenciais longitudinal V_x e transversal V_y, obtêm-se as resistências $R_{xx} = \frac{V_x}{I_x} = (en_{2D}\mu)^{-1}$ e $R_{yx} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{B}{en_{2D}}$. Em um plano, as resistividades são definidas como $\rho_{xx} = \frac{L_y}{L_x}R_{xx}$ e $\rho_{yx} = \frac{L_y}{L_x}R_{yx}$. Mas, se levarmos em consideração que a nossa amostra é quadrada, as resistências e resistividades coincidem. O efeito Hall clássico, é caracterizado pela dependência linear da resistividade ρ_{yx} com o campo magnético, como mostrado na fig.2.

1.2 O caso quântico: níveis de Landau

Suponhamos um gás de elétrons (gás de Fermi) submetido a um campo magnético forte e uniforme, na direção $\hat{z}$

$$\vec{B} = B\hat{z}. \tag{11}$$

Classicamente cada elétron passaria a se mover numa órbita helicoidal sob a ação da força de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{12}$$

onde q é a carga do elétron $-e$, mantendo constante seu movimento na direção do campo. Quanticamente, numa aproximação não relativística, o campo magnético afeta o operador momento através da transformação

$$\vec{p} \to \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A} \tag{13}$$

onde

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{14}$$

Além disso, a assinatura relativística da origem do spin, leva a um termo de acoplamento deste com o campo magnético:

$$V_{dipolo} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{15}$$

ou

$$V_{dipolo} = g_0 \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \tag{16}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{e\hbar}{2m^* c}, \\ \sigma &= \pm\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{17}$$

g_0 é o fator de Landé ($g_0 = 2$ para o elétron no vácuo) e μ_B é o magneton de Bohr. Por enquanrto vamos desprezar o efeito da interação spin-campo magnético, que resulta no *splitting* Zeeman. Este é, em princípio, um erro grave se considerarmos que o nosso "elétron"é o próprio elétron. Mas a energia cinética contém a massa do "elétron". Num semicondutor, as duas são muito diferentes, em geral a massa efetiva m^* é muito menor

que m.

Então, podemos escrever o hamiltoniano como:

$$H = \frac{\left(\vec{p} + \frac{e\vec{A}}{c}\right)^2}{2m^*} = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{e}{2m^*c}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right) + \frac{e^2A^2}{2m^*c^2} \tag{18}$$

para $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, note que

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}\right)\psi(\vec{r}) &= \left(-i\hbar\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}.(-i\hbar\nabla)\right)\psi(\vec{r}) \\ &= -i\hbar\left(\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\right)\psi(\vec{r}) \\ &= -i\hbar\left(\psi\nabla\cdot\vec{A} + 2\vec{A}\cdot\nabla\psi\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Fazendo $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, o hamiltoniano toma a forma:

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + e\frac{\vec{A}\cdot\vec{p}}{m^*c} + \frac{e^2A^2}{2m^*c^2} \tag{20}$$

A escolha do calibre não interfere nas medidas. Podemos escolher, então, o calibre de Landau $\vec{A} = (0, Bx, 0)$, levando-se em conta que $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ e $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$. Substituindo $\vec{A}$ no hamiltoniano, temos:

$$H = \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{p_z^2}{2m^*} + \frac{e}{mc}Bxp_y + \frac{e^2}{2mc^2}B^2x^2 \tag{21}$$

Pode-se comprovar que $[H, p_z] = 0$, logo p_z se conserva e podemos tomar o autoestado de H como auto-estado de p_z. A componente p_y também se conserva, mas ela está multiplicada por x no quarto termo. O quinto termo é quadrático em x. Vamos tentar obter um potencial harmônico, completando os quadrados ($p_z = \hbar k_z, p_y = \hbar k_y$)

$$\frac{\hbar k_y^2}{2m^*} + \frac{eB}{m^*c}\hbar k_y x + \frac{e^2B^2}{2m^*c^2} = \frac{m^*\omega_c^2}{2}(x - X)^2 \tag{22}$$

onde $X = l_c^2 k_y$, sendo $l = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$, e $\omega_c = \frac{eB}{m^*c}$ são os equivalentes dos raios e da frequência de Larmor. Com isso,

$$H = \frac{p_z^2}{2m^*} + \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{m^*\omega_c^2}{2}(x - X)^2 \tag{23}$$

que é o hamiltoniano representando os movimentos desacoplados de um elétron livre com momento $p_z = \hbar k_z$, e de um oscilador harmônico na direção x, cujo centro de "órbita"depende do autovalor do momento em y. Note que não há um termo de energia

cinética em y. Desse modo,

$$H\psi_{n,k_z,k_y}(x,y,z) = E_{n,k_z}\psi_{n,k_z,k_y} \tag{24}$$

com

$$E_{n,k_z} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{25}$$

Portanto, os estados são degenerados. A degenerescência é dada pelo mínimo dos valores permitidos de k_y.

Suponhamos que no plano xy a amostra tenha dimensões L_x e L_y. Assim, o intervalo entre dois valores sucessivos de k_y será $\frac{2\pi}{L_y}$, e a densidade de pontos k_y é $\frac{L_y}{2\pi}$. Por outro lado, o intervalo permitido para X é $\Delta X = L_x$, logo

$$L_x = l_c^2\Delta k_y \longrightarrow \Delta k_y = \frac{L_x}{l_c^2} \tag{26}$$

O número de pontos k_y que cabem neste intervalo é

$$p = \frac{\Delta k_y L_y}{2\pi} = \frac{L_x L_y}{2\pi l_c^2} = \frac{A}{2\pi l_c^2} \tag{27}$$

Se considerarmos a degenerescência de spin, a degenerescência dos estados torna-se

$$p = \frac{2A}{2\pi l_c^2} \tag{28}$$

É interessante notar, substituindo $l^2 = \frac{\hbar c}{eB}$, que

$$p = 2\frac{\phi}{\phi_0} \tag{29}$$

onde ϕ é o fluxo do campo magnético na amostra, $\phi = BA^2$ e o fluxon, $\phi_0 = \frac{hc}{e}$.

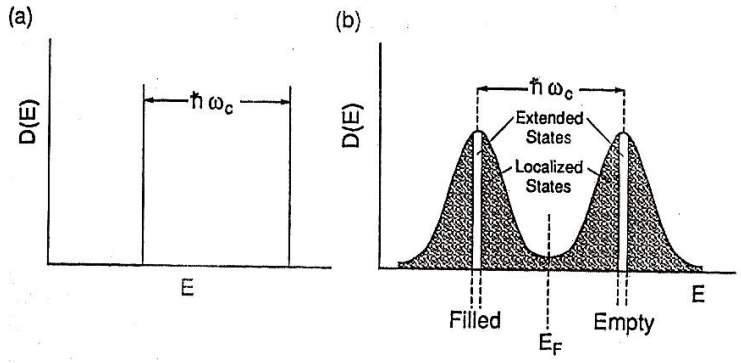
Note que, exceto pelo fator 2 (o splitting Zeeman tira a degenerescencia de spin) a degenerescência do estado de Landau é o número de fluxons que atravessam a amostra. Uma outra quantidade muito importante é o fator de preenchimento do nível de Landa, expressado em termos da densidade de elétrons do sistema,

$$\nu = 2\pi l^2 n_0. \tag{30}$$

Se tomarmos um gás de elétron bidimensional ,podemos escrever a autofunção, ignorando a normalização, como:

$$\Phi_{n,X} = e^{ik_y y}\exp\left[-\left(x-X\right)^2/2l_c^2\right]H_n\left[\left(x-X\right)/l_c\right], \tag{31}$$

Figura 3 - Densidade de estados



Legenda: Densidade de estado versus energia em um gás de elétrons bi-dimensional (2DEG). (a) sistema livre de impurezas. (b) sistema com imupurezas, com mobilidade de borda e regiões localizadas.

Fonte: TAPASH; PEKKA, 1995, p. 7.

sendo H_n o polinômio de Hermite. As funções são extendidas em y e localizadas em x. A localização permanece inalterada sob transformação de *gauge*.

A densidade de estados $D(\varepsilon)$ de um estado quântico $|\alpha\rangle$, é dada por

$$D\left(\varepsilon\right)=\sum_{\alpha}\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{\alpha}\right) \tag{32}$$

onde ε_{alpha} é a energia associada ao estado $|\alpha\rangle$. Se tomarmos o estado de Landau, com autoenergia ε_n, podemos escrever a densidade de estado como:

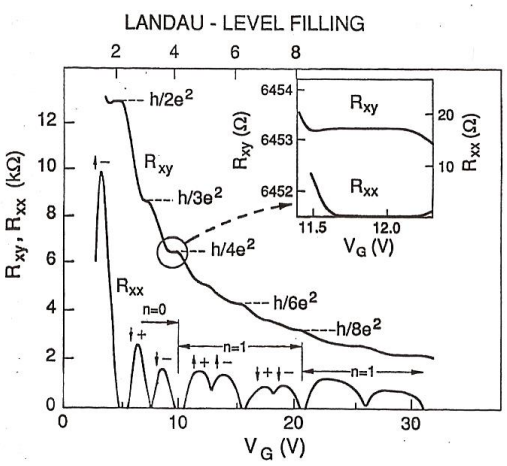
$$D\left(\varepsilon\right)=\sum_{n}\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_{n}\right). \tag{33}$$

Se considerarmos um gás de elétrons puro, ou seja, na ausência de impurezas, a densidade $D(\varepsilon)$ tem seus níveis de energia como uma série de funções delta, espaçados por $\hbar\omega_c$ Fig.3(a). Já na presença de impurezas, as energias associadas ao nível de Landau se ampliam em banda e surge o que se conhece como estados localizados e estados extendidos, como ser observado na Fig.3(b). Esses estados, são muito importantes para o entendimento do efeito Hall quântico inteiro, como veremos a seguir.

1.3 **Efeito Hall quântico inteiro**

O regime do efeito Hall quântico inteiro (EHQI) é estabelecido em um sistema bidimensional de elétrons (2DEL- do inglês *two dimensional electron liquid*), na presença de um campo magnético forte transversal $B_{\perp}$. Neste contexto, o movimento planar dos elétrons é quantizado pelo confinamento magnético em órbitas de Landau. A estrutura

Figura 4 - Medida do Efeito Hall Quântico Inteiro no Si-MOSFET



Legenda: Observação do efeito Hall quântico inteiro no Si-MOSFET, com campo magnético $B = 19T$ e temperatura $T = 1.5K$. As resistências R_{xy} e R_{xx} são plotadas em função da voltage (proporcional a concentração de elétrons).

Fonte: TAPASH; PEKKA, 1995, p. 9.

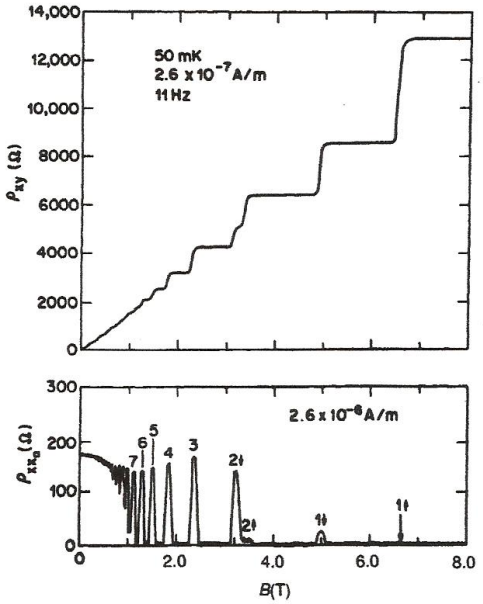
eletrônica é caracterizada por níveis de Landau, $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$, igualmente espaçados por $\hbar\omega_c \propto B_\perp$, cuja degenerescência macroscópica é $\frac{eB_\perp}{h} \sim 10^{11} cm^{-2}$. Para magnéticos fortes, a quantização de Landau leva ao regime quântico, onde ρ_{xy} apresenta platôs com submúltiplos inteiros de $\frac{h}{e^2}$, ou seja, $\rho_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}$, sendo ν um fator de preenchimento inteiro que indica os níveis de Landau ocupados. Na mesma região, a resistividade longitudinal ρ_{xx} desaparece, indicando que não há dissipação de corrente.

Os fundamentos teóricos, descrevendo o efeito Hall quântico, já tinham sido estabelecidos inicialmente em 1975, em um trabalho publicado por Ando et al. (ANDO; MATSUMOTO; UEMURA, 1975). Porém, neste artigo os autores estudam a condutividade ρ_{xy} por várias aproximações, mas não apresentam uma definição definitiva desta quantização. Somente em 1980, Klaus *von* Klitzing (KLITZING; DORDA; PEPPER, 1980) observam experimentalmente a quantização exata dos platôs. Isto lhe rendeu o prêmio Nobel em 1985.

A alta precisão desta quantização, causou uma grande surpresa aos físicos teóricos e experimentais, pois os resultados independem das características do material, tais como, geometria, dimensões, impurezaz, etc., contrapondo-se às previsões clássicas. Atualmente, os platôs de resistividade são usados como padrão universal, $\frac{h}{e^2} = 25.812,807\Omega$, e também para determinar a constante de estrutura fina, dada por $\alpha = \frac{1}{2}\mu_0 c\frac{e^2}{h}$, onde, tanto a permeabilidade no vácuo μ_0 quanto a velocidade da luz c, são constantes universais.

Na fig.4 são apresentados os resultados experimentais de *von* Klitzing para o Si-MOSFET (do inglês *metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*) em um campo magnético de $B = 19T$. A resistência diagonal R_{xx} ($\propto \rho_{xx}$) e resistência Hall R_{xy} ($R_H = \rho_{xy}$

Figura 5 - Resistividades



Legenda: Medidas de ρ_{xx} e ρ_{xy}, em função do campo magnético, do efeito Hall quântico inteiro na heteroestrutura de GaAs-AlGaAs.

Fonte: PAALANEN; TSUI; GOSSARD, 1982, p. 5567.

para uma amostra quadrada) são plotadas em função da tensão V_G, que é proporcional a concentração de elétrons. Observa-se que R_{xx} desaparece nas mesmas regiões em que R_{xy} apresenta platores com $R_{xy} = \frac{h}{ne^2}$, sendo n um inteiro. O mesmo resultado é apresentado na fig.5, onde temos as medidas experimentais das resistividades na heteroestrutura de $GaAs - AlGaAs$. As medidas foram feitas variando o campo magnético e mantendo constante a densidade de elétrons e a temperatura em $50mK$. Um fato interessante a se observar é que no EHQI a condutividade σ_{xx}, descrevendo a densidade de corrente sob a influência do campo elétrico, e a resistividade ρ_{xx}, desaparecem simultaneamente. Acontece que, em sistemas bidimensionais, na presença de campo magnético, a densidade de corrente $\mathbf{J}$ relaciona-se com o campo elétrico $\mathbf{E}$ como $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ ou $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$, onde o tensor condutividade σ e o tensor resistividade $\rho = (\sigma)^{-1}$, são definidos por

$$\rho = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \tag{34}$$

de forma análoga,

$$\sigma = \frac{1}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2} \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Os resultados experimentais mostram que quando um platô aparece, $\rho_{xx} = 0$. Da mesma

forma, $\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} = 0$, obrigando $\rho_{xy} \neq 0$ e $\sigma_{xy} = -\frac{\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2+\rho_{xy}^2} = -\frac{1}{\rho_{xy}}$. Além da formação de platôs e do desaparecimento da resistência e resistividade diagonais, implicando que não há dissipação de corrente, observam também certas oscilações com picos na região de transição entre dois platôs consecultivos.

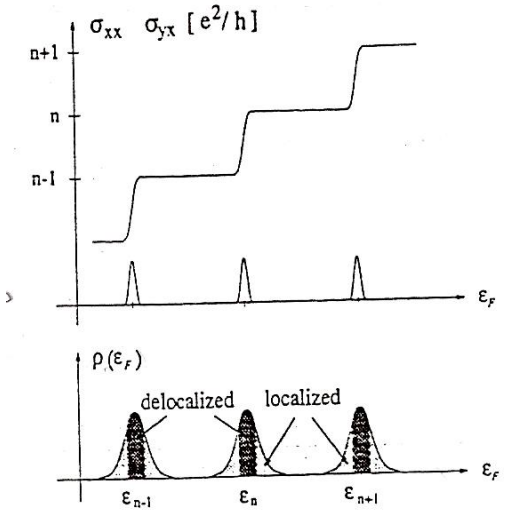
A precisão destes resultados é explicada segundo diferentes modelos (GIULIANI; VIGNALE, 2005). O modelo pioneiro foi publicado por Laughlin em 1981 (LAUGHLIN, 1981), onde ele demonstra que a quantização da condutividade é devida à invariância de *gauge* na equação de Schrödinger. Tal invariância persiste mesmo na presença de pequenas perturbações, tais como desordem e impurezas, mantendo a quantização. Uma outra explicação para o EHQI (Efeito Hall Quântico Inteiro), se fundamenta numa questão de transição de estados localizados e estados extendidos. Tem-se que, num material condutor ou semicondutor, as correntes elétricas dissipativas ocorrem devido à transição de cargas de estados ocupados para estados vazios. Se considerarmos o sistema em uma temperatura $T = 0$, por exemplo, apenas os estados que possuem energia de Fermi contribuem para a condutividade. Assim, podemos destacar dois tipos de estados distinguíveis: estados estendidos não-normalizados, que são similares a ondas planas, e estados localizados normalizados que consideram uma pequena porção do sistema. Estados localizados são tidos como reais, por isso não contribuem para corrente elétrica. Logo, se todos os estados com energia de Fermi são localizados a $T = 0$, a condutividade desaparece.

A discussão sobre o comportamento da condutividade longitudinal no efeito Hall quântico, indica localização na região dos platôs e deslocalização (estado extendido) na região entre dois platôs subsequentes, situados em torno do centro do nível de Landau, como mostra a fig.6. Desta forma, entende-se que o mecanismo para entender o EHQI está numa transição localização-deslocalização que ocorre em torno do centro dos níveis de Landau.

Antes da descoberta do efeito Hall quântico, algumas investigações teóricas evidenciavam que o desaparecimento de σ_{xx} fosse interpretado como uma questão de localização (AOKI; KAMIMURA, 1977). Nos trabalhos de Ando e Aoki (AOKI; ANDO, 1981), demonstra-se que o excesso de corrente em estados estendidos é compensado pela perda de corrente em estados localizados, com valores inteiros do fator de preenchimento. Em 1981, o modelo de Prange (PRANGE, 1981), mostra que a localização de elétrons devido à desordem tem um papel fundamental. Nele, os estados localizados não contribuem para a corrente, entretanto, na região dos platôs estados estendidos são impulsionados por um campo elétrico efetivo criado pelos elétrons localizados, compensando exatamente a perda de corrente devido à localização.

Até agora, os modelos citados descrevem os platôs de resistividade Hall, mas não são tão eficientes para explicar o que acontece na transição entre dois platôs subsequentes e os picos associados à resistividade longitudinal. Na Ref.(BURGT et al., 1995) os autores descrevem os coeficientes de magnetotransporte segundo um modelo fenomeno-

Figura 6 - Estados localizados e não- localizados



Legenda: Imagem qualitativa para explicar o EHQI pela transição localização-deslocalização, que ocorren nos níveis de Landau.

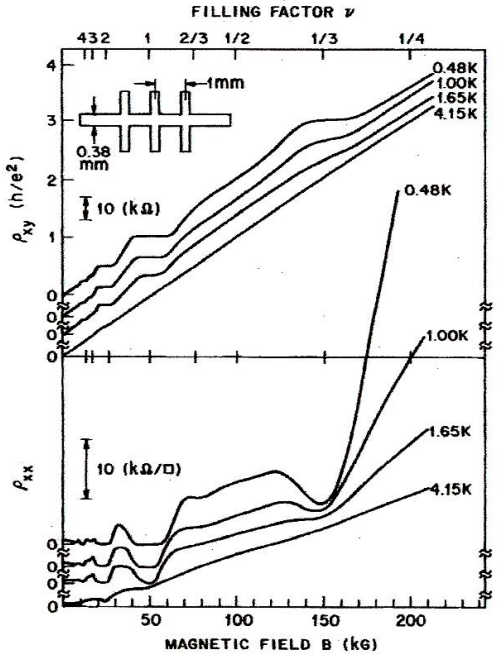
Fonte: JANBEN, 1994, p. 44.

lógico motivados pelas expressões dadas por Ando (ANDO; MATSUMOTO; UEMURA, 1975)(ANDO; FOWLER; STERN, 1982) via formalismo de Kubo, para descrever os componentes do tensor condutividade σ_{xx} e σ_{xy} substituindo a densidade de estado total $D(\varepsilon)$ por uma densidade de estado efetiva $D(\varepsilon)_{eff}$, que descreve o estado extendido da amostra, considerando a compensação de corrente descrita por Prange. Essas duas densidades de estado são descritas por distribuições gaussianas. Para $D(\varepsilon)$, sabe-se que o alargamento devido ao espalhamento por impurezas gera uma distribuição gaussiana (ANDO; FOWLER; STERN, 1982)(ANDO, 1983)(ANDO, 1984a)(ANDO, 1984b). No caso de espalhadores de curto-alcance, esses trabalhos mostram via aproximação auto-consistente de Bohr, que o alargamento depende da mobilidade dos elétrons μ_e, $\Gamma \propto \sqrt{\frac{B}{\mu_e}}$. Porém, a densidade efetiva $D(\varepsilon)_{eff}$ é tratada fenomenologicamente por uma distribuição gaussiana com largura $\Gamma_{eff} < \Gamma$. Ambas são normalizadas para $\frac{eB_{\perp}}{h}$, tal que a densidade de estado reproduz a densidade total de elétrons do nível de Landau, enquanto que a densidade efetiva reproduz o argumento de Prange, que diz que na presença de campos magnéticos fortes, os elétrons estendidos transportam uma corrente equivalente à que seria transportada se tivessemos a contribuição de todos os elétrons.

1.4 **Efeito Hall quântico fracionário**

Em 1982, o "universo"do efeito Hall, apresentou uma grande surpresa para físicos teóricos e experimentais. Trabalhando com 2DEG (two-dimensional electron gas)

Figura 7 - Regime Hall quântico fracionário



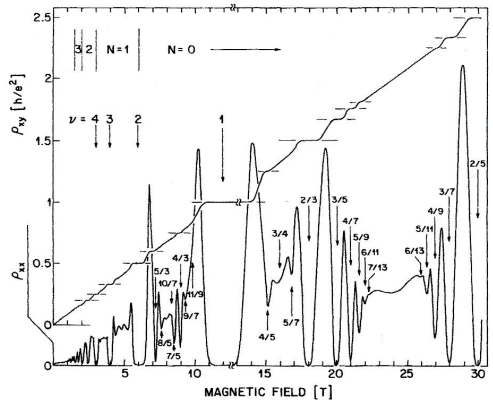
Legenda: Primeiras medidas para o efeito Hall quântico fracionário, com a resistividade Hall ρ_{xy} e resistividade longitudinal ρ_{xx} plotados em função do campo magnético na heteroestrutura de $GaAs$ com densidade eletrônica $n_0 = 1.23 \times 10^{11}/cm^2$. A escala no topo mostra o fator de preenchimento.

Fonte: TSUI; STORMER; GOSSARD, 1982, p. 1560.

de alta mobilidade, na heteroestrutura de $Al_xGa_{1-x}As/GaAs$, e em baixíssima temperatura, Tsui et al. descobriram que a condutividade Hall apresenta platôs com quantização fracionada de $\frac{e^2}{h}$, onde para esses valores a resistividade longitudinal mostra um fluxo de corrente quase dissipado. Na Fig.7 são apresentados os primeiros resultados, feitos por Tsui el al(TSUI; STORMER; GOSSARD, 1982). Observa-se nesta figura que, para $\nu > 1$ prevalece características do QHE (do inglês *quantum Hall effect*), onde temos campos magnéticos de até $10T$, mas quando temos $\nu < 1$, a campos magnéticos fortes e a baixas temperaturas, neste caso $T = 0.48K$, aparecem mínimos para ρ_{xx} e a formação da quantização de platôs em ρ_{xy} quando o fator de preenchimento é $\nu = 1/3$ e $\nu = 2/3$. A medida que foram aparecendo exemplos com valores maiores para a mobilidade e com temperaturas ainda mais baixas, o número de quantização fracionada foi aumentando. Na Fig.8 mostra resultados experimentais recentes para as resistividades longitudinal e diagonal, plotadas em função do campo magnético B, com o fator de preenchimento dado por $\nu = \frac{p}{m}$, onde m é um inteiro ímpar. Esses resultados são evidências do que ficou conhecido como efeito Hall quântico fracionário FQHE (do inglês *fractional quantum Hall effect*).

Experimentalmente, estados do FQHE apresentam algumas características, como: são sensíveis à desordem - amostras de baixa mobilidade não mostram um efeito fracionário;

Figura 8 - Resistividades versus campo magnético



Legenda: Recentes medidas para ρ_{xx} e ρ_{xy} versus campo magnético para o efeito Hall quântico fracionário.

Fonte: YOSHIOKA, 2002, p. 15.

tem uma escala de energia caracterítica de poucos graus Kelvin; existe uma tendência destes estados quantificados com denominadores mais altos exibirem recursos de transportes mais fracos, e sabe-se que campos magnéticos fortes favorecem a observação do FQHE.

De maneira simples, podemos argumentar que, se o nível de Landau está completamente preenchido a condutividade Hall tem que ser quantizada. No caso de um sistema que é invariante translacional, tomemos o argumento dado por (**??**). Imagine que se tem um campo magnético $\vec{B}$ aplicado perpendicularmente à nossa amostra, e que também se aplique um campo elétrico $\vec{E}$ externo paralelo ao sistema. Ao acoplar esse sistema a uma fonte, estabelece-se uma corrente. Em tal situação, há uma força de Lorentz que empurra os elétrons para a borda. Também, se alguns níveis de Landau estã completamente preenchidos e outros vazios, não pode haver nenhuma componente de corrente paralelo ao campo elétrico, desde que se estabeleça um gap de energia igual a $\hbar\omega_c$. Se o campo elétrico for pequeno e o sistema é invariante translacional, há uma estrutura se movendo com uma velocidade $\vec{v}$ relativa ao laboratório, tal que $\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = -\vec{E}$. Nesta estrutura não existe campo elétrico. Um nível de Landau completamente preenchido tem $N = N_\phi$ elétrons. Se os n níveis de Landau estão preenchidos por completo, a carga total Q é $Q = nN_\phi$. Então, a corrente $\vec{J}$ é igual a $\vec{J} = +Qe\vec{v}$. Juntando tudo, concluimos que a densidade de corrente, $\vec{j} = \frac{\vec{J}}{L^2}$, tem componentes

$$j_i = \frac{Qe}{L^2} v_i = \left(\frac{Qec}{BL^2}\right) \epsilon_{ij} E_j. \tag{36}$$

Donde podemos concluir que, a condutância Hall σ_{xy}, isto é, o coeficiente de E_j, é igual a $\frac{Qec}{BL^2}$. Usando o fato de que existem n níveis de Landau preenchidos e que o fluxo BL^2

é igual a N_ϕ vezes o quantum de fluxo $\frac{hc}{e}$, temos que

$$\sigma_{xy} = \frac{Qec}{BL^2} = \frac{nN_\phi ec}{\left(\frac{hc}{e}\right) N_\phi} = \frac{ne^2}{h}, \tag{37}$$

note que, a constante de Plank h e, portanto, a mecânica quântica, entra somente através do quantum de fluxo $\frac{hc}{e}$.

Apesar do argumento descrito no parágrafo anterior ser atraente, ele é enganoso. Primeiramente, ele não se aplica à sistemas que não são invariantes sob translação. Porém, cálculos mais detalhados mostram que a equação 36 vale nesses casos. Segundo, e mais sério problema, é que ele não pode predizer a existência dos valores fracionários de σ_{xy}. De fato, a ausência de uma componente de corrente paralela nos remete ao fato de que, se existe um número inteiro de níveis de Landau preenchidos, não pode existir espalhamento. Se tivermos alguns níveis parcialmente ocupados, existem estados disponíveis para a dispersão, e assim, o argumento desmorona. Este argumento não pode explicar, por exemplo, a incrível precisão com que são feitas estas medidas. No experimento, a densidade de carga e, ou o campo magnético, podem ser variados, neste caso, o potencial químico deve situar-se entre os níveis de Landau para que um nível seja preenchido e o próximo esteja vazio. Como a densidade aumenta, o potencial químico, ou seja, o nível de Fermi, salta de um nível de Landau para outro. Ele permanece fixo na energia de um nível até este ficar completamente preenchido. Isto sugere que σ_{xy} deve crescer em função da densidade de elétrons. Então, se isso for válido, por que ocorre a formação dos platôs?

A resolução de todos esses paradoxos exigiu um grande esforço teórico. A explicação da formação de platôs em σ_{xy}, leva em consideração a existência de impurezas e estados de borda do material. A precisão deste efeito pode ser conectado a propriedades topologicas de estados quânticos. Contudo, o FQHE exigiu a descoberta de um novo estado condensado da matéria, os *estados de Laughlin*.

1.4.1 A função de onda de Laughlin

Até agora, consideramos o problema de elétrons se movendo em uma superfície $2D$, na presença de um campo magnético perpendicular. Assumimos que a densidade de elétrons seja tal que, um número inteiro de níveis de Landau esteja completamente preenchidos. Devido ao fato do sistema apresentar um gap de energia, as interações não desempenham um papel tão importante. De fato, é provável que uma expansão perturbativa em torno de um estado, com um ou mais níveis de Landau preenchidos, seja bem comportada. Uma vez que, todos os processos envolvem excitação de um ou mais elétrons através do gap, os denominadores de energia são sempre diferente de zero. A função de onda para o sistema interagente é suavemente conectada à função de onda

do estado fundamental de um sistema não interagente. Isto indica que, as propriedades topológicas da função de onda para um sistema interagente e não interagente pode ser a mesma. Em outras palavras, a "ingênua"teoria de pertubação, é uma boa aproximação neste caso.

Entretanto, se um nível de Landau é parcialmente preenchido, a teoria de pertubação falha. Considere, por simplicidade, o caso de N partículas sujeitas a um campo magnético B com N_ϕ quanta de fluxo perfurando a superfície. O fator de preenchimento, $\nu = \frac{N}{N_\phi}$ não é um inteiro. Seja o caso em que $\nu = \frac{1}{m}$, onde m é um inteiro ímpar e que para cada elétron existe um m quanta de fluxo. Assumimos que, o campo magnético é suficientemente largo de modo que a energia Zeeman seja tão grande que o sistema é completamente polarizado. Este é o caso, mas não de todos, dos sistemas acessíveis experimentalmente. Neste limite, os elétrons se comportam como férmions carregados sem spin. Se apenas um nível de Landau estiver preenchido ($m = 1$), o estado fundamental não é degenerado, e sua função de onda é um determinante de Slater. Para $m > 1$, apenas uma fração de $\frac{1}{m}$ dos estados do primeiro nível de Landau será ocupada, os estados restantes, $\frac{(m-1)}{m}$, estão vazios. No entanto, estados ocupados e desocupados tem exatamente a mesma energia. Então, o verdadeiro estado fundamental pode ser determinado através de algum tipo de teoria de pertubação degenerada. Este procedimento deveré ser um tanto complexo devido a degenerescência macroscópica dos níveis de Landau. Assim, o estado resultante, terá propriedades que serão completamente diferentes da do estado não pertubado.

A fenomenologia do FQHE sugere que tenhamos um estado completamente diferente. Um estado não interagente, preenchido parcialmente, exibe uma σ_{xy} fracionada, desde que ela seja determinada pela quantidade de cargas presentes. Porém, isso não fundamentaria a precisão que se é observada nos platôs, uma vez que as partículas que forem adiciondas, serão adicionadas quase sem custo de energia. O fato do efeito fracionário ser visto em apenas amostras puras, indica que este efeito é resultado de correlações de elétrons devido a interações coulombianas. Além disso, o congelamento da energia cinética das partículas devido ao alto campo magnético, nos indica que as interações desempenham um papel fundamental. Assim, o FQHE é o resultado da competição entre degenerecência e interação. Neste sentido, ele é um forte exemplo de elétrons fortemente correlacionados.

O modelo que naturalmente descreve as características essenciais do sistema físico, consiste em uma contagem de N elétrons que ocupam uma fração de ν dos N_ϕ estados dos níveis de Landau mais baixos e interagem uns com os outros através de interação de Coulomb. O estado fundamental deste sistema deve ser tal, que não deve suportar qualquer excitação, caso contrário, os platores não poderiam ser tão precisos, e deve ser muito inacessível a presença de impureza. Desse modo, a função de onda deve ser uma função complexa das coordenadas dos elétrons. Finalmente, a estatística de Fermi

demanda que a função de onda $\Psi_N(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)$ seja antissimétrica sobre permutações das posições de qualquer par de patículas. Assim, Ψ_N some a medida que uma partícula se aproxima uma da outra.

Seguindo a construção dada por Laughlin, vamos elaborar uma função de onda que satisfaça a todos esse requisitos. Consideremos primeiro, o limite de baixa densidade, $\nu \ll 1$ ($m \gg 1$). Neste limite, a separação média entre os elétrons é maior que o comprimento magnético l_0 ($a_0 \gg l_0$). Os elétrons não se arriscam muito longe e as interações se restringem ao seu movimento. O estado fundamental neste limite, é um cristal de elétrons conhecido como Cristal de Wigner. Os elétrons são capazes de minimizar a energia total, organizando-se em uma rede triangular. Na verdade, as coordenadas do centro de orientação formam uma rede triangular. Uma aproximação Hartree produz um estado cristal de Wigner $\Psi_W(z_1, ..., z_N)$, da forma

$$\Psi_W(z_1, ..., z_N) = \sum_P (-1)^P \phi_{j_1 l_1}(zP_1) ... \phi_{j_N l_N}(zP_N), \tag{38}$$

onde os estados *single-particle* $\phi_{jl}(z)$ (estados de elétrons independentes) são:

$$\phi_{jl}(z) \approx \exp\left(-\frac{1}{4l_0^2}|z_{jl}^0|^2 + \frac{1}{2l_0^2}\bar{z}z_{jl}^0 - \frac{1}{4l_0^2}|z|^2\right) \tag{39}$$

e os z_{jl}^0 são as coordenadas complexas da rede triangular local, dadas por

$$z_{jl}^{(0)} = l_0\sqrt{\frac{4\pi m}{\sqrt{3}}}\left(j + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)l\right) \tag{40}$$

O estado de Wigner Ψ_W satisfaz a uma série de requisitos citados acima, mas não todos eles. Primeiro, ele suporta excitações elementares com energia de excitação arbitrariamente baixa. Desde que, o estado seja um conjunto periódico de cargas, a densidade de carga não é uniforme e é fortemente afetada por impurezas, que fixam os cristais nos locais de impureza. Assim, esse estado fixado não suporta qualquer corrente de carga, a menos que o campo elétrico seja maior que algum valor crítico E_0, determinado pelas forças locais. Este comportamento é comumente visto em outros cristais de carga como ondas de densidade de carga CDW (do inglês - *charge density wave*) incomensurável. Os exemplos mais conhecidos são o sistema quase-$1D$ de $NbSe_3$ e quase-$2D$ de $NbSe_2$.

Quando a densidade de elétrons aumenta, a separação inter-partícula diminue. Para uma rede triangular, tem-se que a_0 é relacionado ao fator de preenchimento e ao comprimento ciclotrônico pela relação $\nu = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{l_0}{a_0}\right)^2$. À medida que ν se aproxima de uma unidade, a razão $\frac{l_0}{a_0}$ torna-se um número de ordem unitária, quando ν cresce, deve haver uma transição de fase de um cristal de Wigner para um estado que suporte uma corrente Hall. Na verdade, como ν cresce e o comprimento ciclotrônico aproxima-se do

espaçamento entre as partículas, as flutuações quânticas devem aumentar. Essas deve envolver trocas de um pequeno número de partículas próximas. Existem processos, que envolvem troca de três partículas em torno de um triângulo elementar ou anel. Tais processos, estragam a ordem de posição de longo alcance do cristal de Wigner. Se essas trocas de anéis são capazes de proliferar, o cristal de Wigner derrete e ocorre uma transição para o estado líquido. Esta transição de fase, é mais provável ser de primeira ordem, entretanto, dependendo das propriedades microscópicas, também pode ser de segunda ordem. Espera-se que, o estado líquido resultante tenha uma densidade uniforme. O que é mais importante, e longe de ser trivial, é que deve haver um gap para todas as excitações.

O estado líquido deve ser considerado como um novo estado condensado da matéria. Laughlin foi o primeiro a reconhecer que este estado líquido é fundamentalmente diferente dos outros estados condensados, como o magnetismo e a supercondutividade. Assim, ele propôs a seguinte classe de função de onda:

$$\Psi_N\left(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N\right) = \prod_{1\leq j<k\leq N} f\left(z_j - z_k\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} \frac{|z_j|^2}{4l_0^2}\right), \tag{41}$$

onde $f(z)$ é uma função analítica escolhida adequadamente com coordenadas complexas, i.e., estados *single-particle* dos níveis de Landau mais baixos. A estatística de Fermi diz que $f(z_j - z_k)$ seja uma função de $z_j - z_k$ que desapareca com $z_j \to z_k$. Este requerimento, junto ao fato de que Ψ_N possa ser um autoestado com momento angular total L_z, pode ser atendido pela simples escolha de $f(z) \sim z^m$. Assim, temos a célebre função de onda de Laughlin,

$$\Psi_N\left(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N\right) = \prod_{1\leq j<k\leq N} \left(z_j - z_k\right)^m \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} \frac{|z_j|^2}{4l_0^2}\right), \tag{42}$$

onde $m \equiv \frac{1}{\nu}$ é um inteiro ímpar. Esta foi uma proposta altamente original para explicar o efeito fracionário, preparando o cenário para um dos mais belos desenvolvimento da física da século XX. Devido ao expoente de $(z_j - z_k)$, a equação 42 não pode ser escrita como um único determinante de Slater de orbitais *single-particle*: precisamente, o fator polinomial incorpora correlações muito mais fortes do que as devidas ao princípio de exclusão de Pauli. Observe, entretanto que m deve ser ímpar para garantir a antissimetria da função de onda.

Uma das mais interessantes propriedades do estado líquido de Laughlin é a existência de excitações fracionadas carregadas. Em um líquido de Fermi normal, construimos as excitações de quase-partículas, adicionando um elétron ao estado fundamental não-interagente e, em seguida, ativando adiabaticamente a interação. No caso de líquido de Laughlin, inicia-se a partir do estado fundamental de interação descrito pela função de onda de Laughlin e insere-se adiabaticamente um quantum de fluxo magnético através de

uma solenoide infinitamente fina e perpendicular a um plano de $2DEL$ (two-dimensional electron liquid), perfurando-o em um ponto z_0. No final desse processo, o hamiltoniano é equivalente, até uma transformação de *gauge*, ao original, e seu autovalor é portanto inalterado. No entanto, a função de onda do estado fundamental evolui para uma função de onda que correspondente, após uma transformação de *gauge*, a um estado excitado do hamiltoniano original. É este estado excitado que interpretamos como estado de quase-partícula. Observe que, tal estado é naturalmente marcado pela posição z_0 em que o fluxo foi inserido, sugerindo que a quasepartícula está de alguma forma localizada no espaço. Assim, o FQHE pode ser visto como uma manifestação de cargas fracionadas de quase-partícula.

Podemos dizer que a função de onda 42 descreve um *líquido quântico* incompressível (LAUGHLIN, 1983). Isto significa, de um ponto de vista termodinâmico, que a energia do estado fundamental vs densidade exibe extremidade para baixo com fatores de preenchimento do FQHE. Uma decontinnuidade na primeira derivada da energia, ou seja, o potencial químico, sinaliza a existência de um gap no espectro de excitação de uma partícula. Isso pode ser mais ou menos entendido se pensarmaos no estado de Laughlin como um tipo de estado proporcional, em que a densidade eletrônica está ligada ao fluxo magnético por uma relação racional (por exemplo, um elétron por três quanta de fluxo) da mesma forma que em um cristal comum a densidade está ligada à área da célula unitária. Adicionar ou remover um elétron cria um defeito nesta estrutura que custa uma energia finita.

A dificudade fundametal em verificar esta ideia, sob o ponto de vista acima, é que não conhecemos nada sobre a forma da função de onda do estado fundamental para fatores de preenchimento diferentes de $\frac{1}{m}$. O que queremos calcular é o *gap termodinâmico*, definido como:

$$E_g = \left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)_{\nu^+} - \left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)_{\nu^-}$$
$$= \left[E_0\left(N+1,B\right) - E_0\left(N,B\right)\right] - \left[E_0\left(N,B\right) - E_0\left(N-1,B\right)\right] \tag{43}$$

onde $E_0\left(N,B\right)$ é a energia do estado fundamental como uma função do número de elétrons e campo magnético. Estamos falando da energia de estado de quase-buracos e quase-elétrons, obtida pela adição ou remoção de um quanta de fluxo magnético com um número de partículas constantes. Felizmente, essa informação já é suficiente: o gap de energia termodinâmico com preenchimento $\frac{1}{m}$ é apenas a energia necessária para criar m quase-buracos e quase-elétrons bem separados, ou seja, não-interagente:

$$E_g = m\left(\varepsilon^h + \varepsilon^e\right). \tag{44}$$

A prova disso, basea-se no fato que a energia do estado fundamental por elétron, quando

expressado em unidades de $\frac{e^2}{\epsilon_b l}$, é apenas função do fator de preenchimento:

$$E_0\left(N,B\right)=N\epsilon\left(\nu\right)\frac{e^2}{\epsilon_b l}. \tag{45}$$

Agora, aumentando o campo magnético de B para $B+\frac{B}{N}$ e, ao mesmo tempo, o número de elétrons de N para $N+1$, insere $\frac{BA}{N\phi_0}=m$ quanta de fluxo adicional, deixando o fator de preenchimento inalterado. Assim,

$$\begin{aligned}E_0\left(N+1,B+\frac{B}{N}\right)-E_0\left(N,B\right)&=\left[\left(\frac{N+1}{N}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]E_0\left(N,B\right)\\&\simeq\frac{3}{2}\epsilon\left(\nu\right)\frac{e^2}{\epsilon_b l}.\end{aligned} \tag{46}$$

Se compararmos o resultado acima com a mudança na energia que ocorre quando B é alterado em uma constante N, termos:

$$E_0\left(N,B+\frac{B}{N}\right)-E_0\left(N,B\right)=\frac{1}{2}\epsilon\left(\nu\right)\frac{e^2}{\epsilon_b l}+m\varepsilon^h, \tag{47}$$

onde o primeiro termo do lado direito ocorre devido a variação da escala de energia global, $\frac{e^2}{\epsilon_b l}$, com B, e o segundo termo decorre do fato que devemos cria m quase-buracos bem separados para acomodar as m unidades de fluxo magnético.

A diferença entre 46 e 47 é a variação da energia devido a uma mudança em N em B. Assim, obtemos

$$E_0\left(N+1,B\right)-E_0\left(N,B\right)=\epsilon\left(\nu\right)\frac{e^2}{\epsilon_b l}+m\varepsilon^h. \tag{48}$$

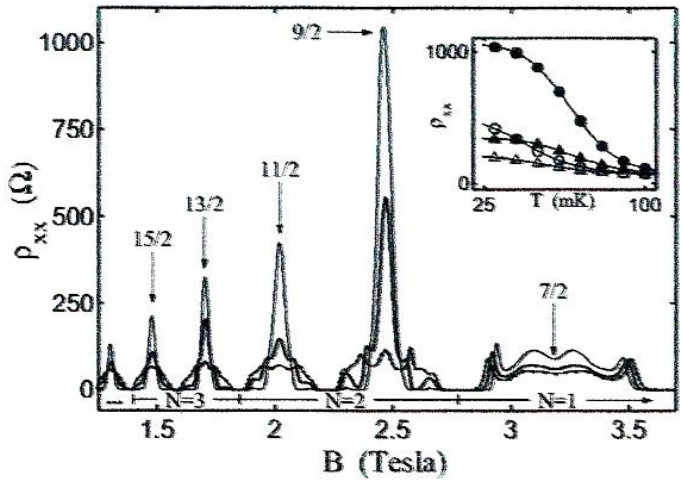
De forma análoga, temos

$$E_0\left(N-1,B\right)-E_0\left(N,B\right)=-\epsilon\left(\nu\right)\frac{e^2}{\epsilon_b l}+m\varepsilon^e. \tag{49}$$

O resultado do gap termodinâmico segue imediatamente da substituição destas duas últimass equações em 43.

O gap termodinâmico não é diretamente acessível experimentalmente, mas geralmente acredita-se que a energia de um bem separado par quase-elétron quase-buraco, $\frac{E_g}{M}$, é o que controla a dependência da resistividade longitudinal ρ_{xx} com a temperatura. Em baixa temperatura, e dentro do platô Hall, espera-se que ρ_{xx} deve variar conforme $e^{-\frac{\Delta}{2k_bT}}$ onde $\Delta=\varepsilon^h+\varepsilon^e$. Medir o gap de transporte deve, portanto, medir o gap termodinâmico E_g pela equação 44. Infelizmente, a presença de desordem e a espessura finita das amostras impediu até o momento uma comparação pura entre teoria e experimento: a energia de ativação parece ser significativamente menor do que o valor teoricamente previsto. Também há efeitos mais fundamentais, tal que a energia de interação entre quase-elétron

Figura 9 - Anisotropia



Legenda: Picos em ρ_{xx} na amostra A, obtidos a baixas temperaturas e níveis de Landau elevados. Linha pontilhada: $T = 100mK$; linha cheia: $T = 65mK$; linha fina: $T = 25mk$.

Fonte: LILLY et al., 1999, p. 395.

e quase-buraco, poderia em princípio, modificar a energia de ativação.

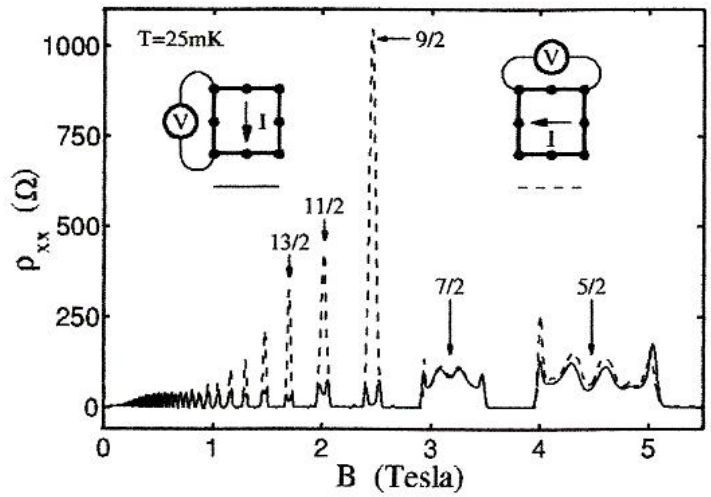
1.5 **Anisotropia em sistemas Hall**

Os experimentos de magnetotransporte em sistemas $2DEL$ na heteroestrutura $GaAs/AlGaAs$, que apresentam uma alta mobilidade de elétrons, tem apresentado fortes anomalias quando os níveis de Landau são preenchidos parcialmente. Estas anomalias estão relacionadas à fortes anisotropias e a não-linearidade da resistividade longitudinal ρ_{xx}, que se tornam aparentes quando temos temperuturas abraixo de $150mK$. Estes fenômenos não são vistos no estado fundamental ou no primeiro nível excitado de Landau, mas iniciam abruptamente no terceiro nível, $N = 2$ e persistem até $N = 6$. Esses efeitos sugerem um quadro consideravelmente mais interessantes do comportamento de elétrons independentes em níveis de Landau elevados.

Nos trabalhos de Lilly et al. (LILLY et al., 1999a)(LILLY et al., 1999b) foi usada a técnica de crescimento por MBE (do inglês- *molecular beam epitaxy*) na heteroestrutura de $GaAs/AlGaAs$. Os exemplos são pastilhas que foram retirados do MBE em seis amostras, A à F. Cada amostra foi rotacionada durante o crescimento para garantir a alta homogeniedade da densidade de elétrons n_s. Assim, as densidades são de $n_s = 2.67cm^{-2}$ para os exemplo A, B e C; $n_s = 2.27cm^{-2}$ para os D e E, e $n_s = 1.52cm^{-2}$ para o F.

A fig.9 mostra a dependência de ρ_{xx} com a temperatura para os níveis de Landau

Figura 10 - Anisotropia da resistividade longitudinal



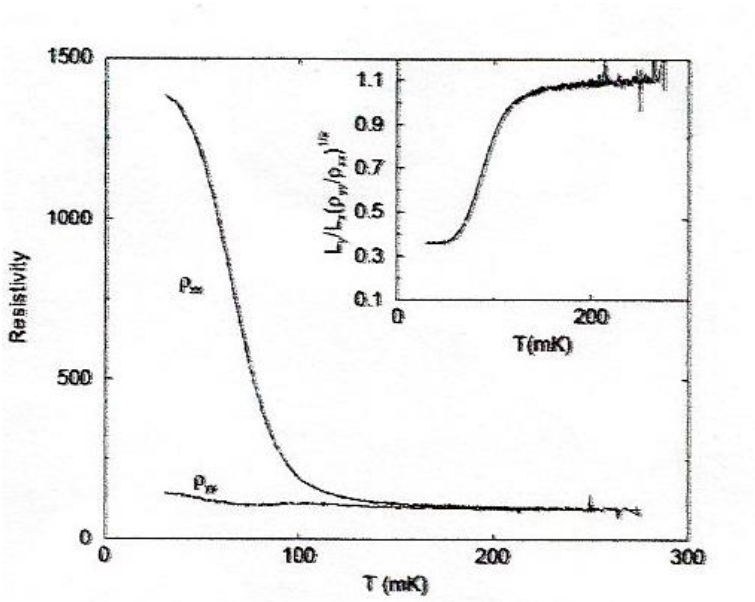
Legenda: Anisotropia de ρ_{xx} na amostra A, obtidos em $T = 25mK$. A linha tracejada e contínua resulta devido a mudança de direção da corrente na amostra, a amostra não é girada.

Fonte: LILLY et al., 1999, p. 395.

$N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$ na primeira amostra no experimento. Abaixo de $T = 150mK$, os picos aparecem para os preenchimentos $\nu = \frac{9}{2}$, $\nu = \frac{11}{2}$, $\nu = \frac{13}{2}$ e $\nu = \frac{15}{2}$ que cresce rapidamente quando a temperatura está abaixo de $100mK$; para $25mK$ com preenchimento $\nu = \frac{9}{2}$ o pico excedeu 1000Ω. Surpreendentemente, os picos não se estreitam à medida que a temperatura é reduzida. Em vez de picos, existem mínimos em $\nu = \frac{7}{2}$ e no estado quântico fracionário $\nu = \frac{5}{2}$. A aproximidade dos campos magnéticos em $\nu = \frac{9}{2}$ e $\nu = \frac{7}{2}$ torna essa diferença muito interessante. Na figura 10, é plotado ρ_{xx} versus campo magnético B a uma temperatura de $T = 25mK$, para a amostra A. Nesta configuração, é medido a resistividade, representado pela linha contínua e tracejada, para dois fluxos de corrente em direções perpendiculares. Como observado no gráfico, há uma forte evidência de anisotropia na resistividade longitudinal que ocorre próximo ao centro dos níveis de Landau que vai de $N = 2$ até $N = 5$. Ela se torna mais aparente quando o preenchimento é $\nu = \frac{9}{2}$ e $\nu = \frac{11}{2}$. Observe que, a dependência da anisotropia da resistividade com baixas temperaturas de um puro $2DEL$, ocorre no terceiro nível de Landau e em níveis mais elevados.

Acredita-se que esta anisotropia esteja relacionada com a formação de estados CDW (do inglês *charge density wave*) neste níveis de Landau mais altos. Os trabalhos publicados por Fogler *et al.* (KOULAKOV; FOGLER; SHKLOVSKII, 1996)(FOGLER; KOULAKOV; SHKLOVSKII, 1996) propõe que um sistema 2DEL puro em níveis de Landau elevados podem ser instáveis contra a formação de CDW. Ele sugere que, preenchendo quase metade dos níveis de Landau o CDW é uma fase de *stripes* unidirecional tendo um

Figura 11 - Anisotropia em função da temperatura



Legenda: Resistividade ρ_{xx} e ρ_{yy}, tendo como base os resultados de Lilly *et al.*(**??**) para $\nu = \frac{9}{2}$.

Fonte: FRADKIN et al., 2000, p. 1983.

comprimento de onda da ordem do raio ciclotrônico. Nesta fase de *stripes* a densidade de elétrons no nível de Landau mais alto alterna entre zero e o preenchimento completo. Em $\nu = \frac{9}{2}$ isto implica que existem *stripes* de estados QHE incompressível $\nu = 4$ e $\nu = 5$. Embora seja certamente plausível que o transporte elétrico, em tal fase unidirecional, seja anisotrópico, não está claro o que forma os *stripes*.

Baseado nos trabalhos de Lilly *et al.*, Fradkin calculou, via método de simulação Monte Carlo, essa dependência da temperatura da anisotropia das resistividade longitudinal ρ_{xx} e ρ_{yy}, para o preenchimento $\nu = \frac{9}{2}$, que mostrou que, abaixo de $150mK$, à medida que se resfria a amostra, a anisotropia aumenta. Este resultado, é uma forte evidência de transição de fase quântica. Fradkin, relacionou essa forte anisotropia a uma transição de fase devido a quebra de simetria de rotação. Podemos então falar, nas fases quânticas: smética e nemática (KIVELSON; FRADKIN; EMERY, 1998)(FRADKIN; KIVELSON, 1999), que estão intrinsecamente relacionadas a essa quebra de simetria. Uma teoria para a fase smética em sistemas Hall pode ser encontrada nos referenciais (EMERY et al., 2000), (BARCI et al., 2002) e (BARCI; FRADKIN, 2002), enquanto que os primeiros estudos sistemáticos da fase nemática quântica pode ser encontrados nas referências (FRADKIN et al., 2000),(OGANESYAN; KIVELSON; FRADKIN, 2001),(BARCI; OXMAN, 2003),(LAWLER et al., 2006),(BARCI et al., 2008),(BARCI; REYES, 2013).

Apesar de a transição de fase isotrópica-nemática ser bem entendida em sistemas clássicos, o mesmo não se pode falar em sistemas que apresenta efeito Hall quântico. Na

presente tese, levamos em consideração a anisotropia que ocorre em líquido Hall quântico, por quebra espontânea de simetria de rotação, quando temos os níveis de Landau preenchidos parcialmente, e desenvolvemos uma teoria efetiva via aproximação Hartree-Fock para provar a existência da fase nemática nesses sistemas.

2 EFEITO DA INTERAÇÃO DE COULOMB NUM LÍQUIDO DE HALL COM PREENCHIMENTO PARCIAL

Uma vez familiarizado com a fenomenologia em torno do efeito Hall quântico, e considerando que a explicação do efeito fracionário surge de uma teoria preliminarmente formulada por Laughlin, que tem como uma das características principais um novo estado quântico condensado conhecido como líquido Hall, apresentamos nesse capítulo os cálculos e resultados da aproximação Hartree-Fock via campo-médio. Basicamente, a idéia principal nesta aproximação é chegar a um hamiltoniano efetivo que seja quadrático nos operadores de criação e destruição de elétrons, de maneira que ele possa ser diagonalizado.

Desde a descoberta do efeito Hall quântico fracionário, as propriedades de um sistema bidimensional de elétrons sob campos magnéticos fortes tem atraído considerável atenção. Historicamente, a maioria dos esforços empenhados nesse fenômeno levam em consideração campos magnéticos fortes quando o nível inferior de Landau está totalmente ocupado. Alguns trabalhos extendem suas análises para sistemas com preenchimento grande, ou seja, $\nu > 1$. Porém, todos eles se limitam ao caso quando a energia de interação elétron-elétron é muito menor que o espaçamento intra-nível de Landau, $\hbar\omega_c \gg \frac{e^2}{kl}$, onde l e k são o comprimento magnético e a constante dielétrica, respectivamente. Entretanto, quando temos um sistema 2D de elétrons submetido a campo magnético fraco, o potencial de Coulomb excede a energia ciclotrônica, $\hbar\omega_c$, de modo que não destroi a quantização de Landau, a passa a ser muito considerável quando temos um sistema com nível de Landau preenchido parcialmente.

Assim, estamos considerando em nosso trabalho, um sistema de líquidos Hall quânticos sob campo magnético fraco e com níveis de Landau preenchidos parcialmente. Desta forma, segue o cálculo Hartree-Fock nesse sistema.

2.1 Aproximação Hartree-Fock

A aproximação HF tornou-se uma ferramenta muito importante em física da matéria condensada, principalmente no desenvolvimento de teorias onde o efeito de muitos-corpos é fundamental. Ela busca resposta à questão de como melhor representar os efeitos de interação elétron-elétron em um sistema de muitos elétrons interagentes.

Para entendermos melhor esse procedimento, tomemos, inicialmente, a equação de Schrödinger de um elétron, da forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\left(\vec{r}\right) + U\left(\vec{r}\right)\psi\left(\vec{r}\right) = \varepsilon\psi\left(\vec{r}\right). \tag{50}$$

Nela, a escolha do potencial $U(\vec{r})$, torna-se um problema muito sutil. Primeiro, de um ponto de vista fundamental, é impossível descrever corretamente os elétrons em um metal, por expemplo, usando a equação 50, pois de certa forma ela é muito "ingênua", uma vez que em tal sistema os elétrons sentem os efeitos da interação causada por outros elétrons e por características intrínsecas a tal exemplo, como: rede, impureza, etc. Em vista disso, uma expressão mais geral para o cálculo das propriedades eletrônicas de um dado material inicia-se tomando uma função de onda de N partículas de todos os N elétrons envolvidos, $\Psi(\vec{r}_1 s_1, \vec{r}_2 s_2, ..., \vec{r}_N s_N)$, onde s_N representa o spin do elétron, na equação de Schrödinger, logo:

$$H\Psi = \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 - Ze^2 \sum_{\vec{R}} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{R}|} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \Psi = E\Psi. \tag{51}$$

Nesta, o termo de energia potencial negativo, representa o potencial eletrostático atrativo dos núcleos fixados a uma distância R da rede de Bravais, e o último termo representa a interação elétron-elétron.

A equação 51 é muito difícil de resolver, mas temos alguma esperança se utilizarmos de algumas ferramentas da física. Isto sugere que, a escolha do potencial $U(\vec{r})$ feito na equação 50, seja feita de tal forma que possamos obter alguma informação a partir dela. Evidentemente $U(\vec{r})$ deverá incluir, por exemplo, os potenciais dos íons:

$$U^{ion}(\vec{r}) = -Ze^2 \sum_{\vec{R}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|}. \tag{52}$$

Além disso, deverá se levar em consideração o fato de que o elétron sente os campos provocados pelos outros elétrons. Pois bem, se tratarmos os elétrons como uma distribuição suave de cargas negativas com densidade ρ, a energia potencial do dado elétron será

$$U^{el}(\vec{r}) = -e \int d\vec{r}' \rho\left(\vec{r}'\right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{53}$$

Ainda mais, se acreditarmos na idéia de elétron independente, a contribuição de um elétron no nível ψ_i, onde o índice i representa os números quânticos, para a densidade de carga será

$$\rho_i(\vec{r}) = -e|\psi_i(\vec{r})|^2. \tag{54}$$

Assim, a densidade eletrônica total de carga, pode ser escrita como:

$$\rho(\vec{r}) = -e \sum_i |\psi_i \vec{r}|^2, \tag{55}$$

onde a soma se extende sobre todos os níveis de um elétron que estão ocupados. Logo, tomando as equações 53 e 55, e considerando $U = U^{ion} + U^{el}$, podemos escrever as equações

de Schrödinger de um eletron como:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_i\left(\vec{r}\right)+U^{ion}\left(\vec{r}\right)\psi_i\left(\vec{r}\right)+\left[e^2\sum_j\int d\vec{r}'\left|\psi_j\left(\vec{r}'\right)\right|^2\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right]\psi_i\left(\vec{r}\right)=\varepsilon_i\psi_i\left(\vec{r}\right). \tag{56}$$

Este conjunto de equações é conhecido como *equações Hartree*. Elas são equações não lineares, cuja solução é feita por iteração: toma-se uma forma para U^{el} (expressão que está entre colchetes na equação (56) de modo que elas possam ser solucionadas. Então, pelo novo potencial calcula-se a função de onda, $\psi_i\left(\vec{r}\right)$, e a equação de Schrödinger é então resolvida. Este tipo de cálculo é conhecido como cálculo auto-consistente. Todavia, a aproximação Hartree peca ao representar a forma com que uma configuração de partículas de $N-1$ elétrons afeta o elétron em consideração, no entanto, a equação (56) descreve os elétrons interagindo com o campo obtido pela média sobre as posições dos outros elétrons. Contudo, tal aproximação torna-se, de certa forma, grosseira se considerarmos a equação de Schrödinger dada em (51).

A inadequação da aproximação Hartree não é totalmente evidente por essa expressão. Mas torna-se clara quando tomamos o principio variacional da equação de Schrödinger para N elétrons. Por esse princípio calcula-se o valor esperado do hamiltoniano em um estado Ψ que seja estacionário,

$$\langle H\rangle_\Psi=\frac{(\Psi,H\Psi)}{(\Psi,\Psi)}, \tag{57}$$

onde

$$(\Psi,\Phi)=\sum_{s_1}...\sum_{s_N}\int d\vec{r}_1...d\vec{r}_N\Psi^*\left(\vec{r}_1s_1,...,\vec{r}_Ns_N\right)\Phi\left(\vec{r}_1s_1,...,\vec{r}_Ns_N\right) \tag{58}$$

Particularmente, a função de onda do estado fundamental Ψ minimiza o hamiltoniano H na equação (57). Esta propriedade do estado fundamental é frequentemente explorada para contruir estados fundamentais aproximados pela minimização da (57), não sobre todo Ψ, mas sobre uma classe limitada de funções de onda escolhida de forma mais atrativa ao problema.

Então, as *equações Hartree* representadas pela expressão (56) resultam do princípio variacional da equação de Schrödinger sobre todo estado Ψ que tem a forma:

$$\Psi\left(\vec{r}_1s_1,\vec{r}_2s_2,...,\vec{r}_Ns_N\right)=\psi_1\left(\vec{r}_1s_1\right)\psi_2\left(\vec{r}_2s_2\right)...\psi_N\left(\vec{r}_Ns_N\right), \tag{59}$$

onde ψ_i são N funções ortonormais, funções de onda de cada elétron. Assim, estas equações dão a melhor aproximação para um sistema de N elétrons que pode ser representado como um produto de funções de onda de níveis de um-elétron. Porém isto é incompatível com o princípio de Pauli, pois a antissimetria da função de onda de N elétrons é uma manifestação fundamental deste princípio, que diz que: o nível ocupado por um elétron

não pode ser ocupado continuamente. Mesmo porque, como se trata de um férmion, obedecerá a estatística de Fermi-Dirac. Contudo, podemos propor então, que o estado Ψ mude de sinal todas as vezes que seus argumentos permutarem. Logo,

$$\Psi\left(\vec{r}_1 s_1, ..., \vec{r}_i s_i, ..., \vec{r}_j s_j, ..., \vec{r}_N s_N\right) = -\Psi\left(\vec{r}_1 s_1, ..., \vec{r}_j s_j, ..., \vec{r}_i s_i, ..., \vec{r}_N s_N\right). \tag{60}$$

A equação (60) não pode ser satisfeita pela equação (59), a menos que Ψ desapareça identicamente.

Podemos fazer uma simples generalização da aproximação Hartree, que incorpore a condição de antissimetria (60), substituindo a (59) por um determinante de Slater. Este é uma combinação linear do produto dado em 59 e todos os outro produtos oriundos da permutação dos $\vec{r}_j s_j$, adicionando, é claro, o sinal ± 1 que garanta a condição de antissimetria. Logo,

$$\Psi = \psi_1\left(\vec{r}_1 s_1\right)\psi_2\left(\vec{r}_2 s_2\right)...\psi_N\left(\vec{r}_N s_N\right) - \psi_1\left(\vec{r}_2 s_2\right)\psi_2\left(\vec{r}_1 s_1\right)...\psi_N\left(\vec{r}_N s_N\right) + ... \tag{61}$$

Este resultado pode ser também representado na forma do derterminante de uma matriz $N \times N$, desde que o determinante mude de sinal toda vez que qualquer duas colunas forem permutadas, logo:

$$\Psi\left(\vec{r}_1 s_1, \vec{r}_2 s_2, ..., \vec{r}_N s_N\right) = \begin{vmatrix} \psi_1\left(\vec{r}_1 s_1\right)\psi_1\left(\vec{r}_2 s_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_1\left(\vec{r}_N s_N\right) \\ \psi_2\left(\vec{r}_1 s_1\right)\psi_2\left(\vec{r}_2 s_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_2\left(\vec{r}_N s_N\right) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \psi_N\left(\vec{r}_1 s_1\right)\psi_N\left(\vec{r}_2 s_2\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_N\left(\vec{r}_N s_N\right) \end{vmatrix} \tag{62}$$

Com um pouco de contabilidade, podemos mostrar que, se a energia calculada na equação (57) levar em consideração um estado representado pelo determinante de Slater (62) com funções de onda *single-particle*, $\psi_1...\psi_N$, então, o resultado será:

$$\begin{aligned} \langle H\rangle_\Psi = \sum_i \int d\vec{r}\psi_i^*\left(\vec{r}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U^{ion}\left(\vec{r}\right)\right)\psi_i\left(\vec{r}_i\right) \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int d\vec{r}\, d\vec{r}^{\,\prime}\frac{e^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|}|\psi_j\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)|^2 \\ -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int d\vec{r}d\vec{r}^{\,\prime}\frac{e^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|}\delta_{s_i s_j}\psi_i^*\left(\vec{r}\right)\psi_i\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)\psi_j^*\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)\psi_j\left(\vec{r}\right). \end{aligned} \tag{63}$$

O termo *single-particle*, é porque estamos tomando uma aproximação de elétrons independentes. Na equação acima, o último termo é negativo e envolve o produto de elétrons independentes $\psi_i^*\left(\vec{r}\right)\psi_i\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)$ no lugar de $|\psi_i\left(\vec{r}\right)|^2$. Minimizando a expressão (63) com relação a ψ_i^* chegamos a uma generalização das equações Hartree conhecida como equações

Hartree-Fock:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_i\left(\vec{r}\right)+U^{ion}\left(\vec{r}\right)\psi_i\left(\vec{r}\right)+U^{el}\left(\vec{r}\right)\psi_i\left(\vec{r}\right)$$
$$-\sum_j\int d\vec{r}'\frac{e^2}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\psi_j^*\left(\vec{r}'\right)\psi_i\left(\vec{r}'\right)\psi_j\left(\vec{r}\right)\delta_{s_is_j}=\varepsilon_i\psi_i\left(\vec{r}\right), \tag{64}$$

onde U^{el} é definido em 53 e 55.

Estas equações diferem das equações Hartree em (56) por um termo aditivo do lado esquerdo, conhecido como *termo de exchange*, que resulta da antissimetria da função de onda e caracteriza a aproximação Hartree-Fock. Esta equação, cuja solução não é trivial, pode ser calculada através de ferramentas de teoria de campos ou por métodos de função de Green aplicados à matéria condensada. Neste trabalho, utilizamos a teoria de campos, particularmente, uma aproximação Hartree-Fock via campo médio na análise de anisotropias que ocorrem em *líquido Hall quântico*, como evidenciado no próximo capítulo.

2.2 **Cálculo Hartree-Fock num sistema Hall com preenchimento parcial**

Seja um sistema bidimensional de elétrons líquidos puros, inseridos em um campo magnético fraco, onde os níveis de Landau estão preenchidos parcialmente. Nos apropriamos do fato de que, em campos magnéticos fracos a interação elétron-elétron não destroi a quantização de Landau, de modo que o termo de Coulomb passa a ser considerável. Em vista disso, partiremos do seguinte hamiltoniano:

$$H=\frac{1}{2m}[\hat{p}-\frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})]^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{|\epsilon(\vec{r}_i-\vec{r}_j)|}. \tag{65}$$

O primeiro termo à direita na expressão (65) refere-se a energia cinética do sistema sujeito ao campo magnético B, o segundo termo, que é o termo de interação de Coulomb, dá a contribuição da interação de cada par de partículas à energia do sistema, sendo as coordenadas da duas partículas, $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$. Partimos da hipótese de que a interação depende apenas das posições relativas entre duas partículas, i.e., estamos admitindo a homogeneidade do espaço. Ele tem um fator $1/2$ que evita a contagem duplicada do mesmo par de interação. Vamos definir a base de estados como sendo

$$|\nu\rangle=|n,X\rangle \tag{66}$$

onde os números quânticos n e X são o nível de Landau e a coordenada, respectivamente. Tomando a base de estados (66), podemos definir os operadores de campo como

$$\hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu}(\vec{r}) = \sum_{\nu} \langle \nu | \vec{r} \rangle \hat{a}^{\dagger}_{\nu} \tag{67}$$

e seu conjugado hermitiano,

$$\hat{\Psi}_{\nu}(\vec{r}) = \sum_{\nu} \langle \vec{r} | \nu \rangle \hat{a}_{\nu}, \tag{68}$$

sendo

$$\langle \vec{r} | \nu \rangle = \langle \vec{r} | n, X \rangle = \frac{e^{\frac{iyX}{l^2} - \frac{1}{2l^2}(x-X)^2}}{\pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n n! l L_y}} H_n(\frac{x-X}{l}), \tag{69}$$

a função de onda, calculada na seção anterior, onde L_y é a dimensão y do sistema, $l = \frac{\hbar}{\sqrt{m\omega_c}}$ é o comprimento magnético e $H_n(x)$ são os polinômios de Hermite. Além disso, $\hat{a}^{\dagger}_{\nu}$ e $\hat{a}_{\nu}$ são os operadores de criação e destruição de partícula nesse estado. Os operadores de campo (67) e (68), satisfazem as seguintes condições de anti-comutação fermiônicas:

$$\{\hat{\Psi}_{\nu}(\vec{r}), \hat{\Psi}_{\nu'}(\vec{r}')\} = \{\hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu}(\vec{r}), \hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu'}(\vec{r}')\} = 0 \tag{70}$$

$$\{\hat{\Psi}_{\nu}(\vec{r}), \hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu'}(\vec{r}')\} = \delta_{\nu\nu'}\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{71}$$

Faremos uso do formalismo de segunda quantização para chegarmos ao hamiltoniano efetivo. Aplicando (67) e (68) em (65), obtemos

$$H = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^{\dagger}(\vec{r}) \frac{1}{2m} [\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})]^2 \hat{\Psi}(\vec{r}) \tag{72}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \int d\vec{r_i} d\vec{r_j} \hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu_1}(\vec{r_i}) \hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu_2}(\vec{r_j}) \frac{e^2}{\epsilon |\vec{r_i} - \vec{r_j}|} \hat{\Psi}_{\nu_3}(\vec{r_j}) \hat{\Psi}_{\nu_4}(\vec{r_i}).$$

Esta expressão nos dá a regra para conversão na segunda quantização. No primeiro termo à direita, a expressão entre colchetes, contem a energia cinética do sistema e a conexão com o campo magnético dado pelo potencial vetor. O primeiro termo é completado pelo produto pela esquerda e pela direito dos operadores de campo (67) e (68), respectivamente. O segundo termo representa a interação entre as partículas por pares, portanto, ele depende das coordenadas das duas partículas. Ele tem um fator 1/2 que evita a contagem duplicada do mesmo par de interação. À esquerda, termo do potencial de interação, temos os hermitianos conjugados dos dois operadores de campo, primeiro da partícula em $\vec{r_i}$, $\hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu_1}(\vec{r_i})$, depois em $\vec{r_j}$, $\hat{\Psi}^{\dagger}_{\nu_2}(\vec{r_j})$, seguido à direita pelos operadores de campo da partícula em $\vec{r_j}$, $\hat{\Psi}_{\nu_3}(\vec{r_j})$ e depois da partícula em $\vec{r_i}$, $\hat{\Psi}_{\nu_4}(\vec{r_i})$. Desta forma, para o primeiro termo

da expressão acima, temos

$$H_0 = \sum_{\nu} \int d\vec{r} [\frac{1}{2m}[\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})]^2] \langle \nu|\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|\nu\rangle \hat{a}^{\dagger}_{\nu}\hat{a}_{\nu}$$

logo

$$H_0 = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu}\hat{a}^{\dagger}_{\nu}\hat{a}_{\nu} \tag{73}$$

onde ε_ν são as autoenergias para o sistema não interagente, que dão justamente os níveis de oscilador harmônico de Landau nesse estado. Seguindo, podemos escrever o termo de interação em termos da transformada de Fourier do potencial de Coulomb,

$$\frac{e^2}{\epsilon|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = 2\pi e^2 \frac{1}{L_x L_y}\sum_{\vec{q}} \frac{1}{q}\exp[i\vec{q}.(\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \rightarrow \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2}\tilde{V}(q)\exp[i\vec{q}.(\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \tag{74}$$

onde

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \frac{2\pi e^2}{q\epsilon(q)} \tag{75}$$

e

$$\epsilon(q) = k\{1 + \frac{2}{qa_B}[1 - J_0^2(qR_c)]\}. \tag{76}$$

é a função dielétrica estática $\epsilon(q) \equiv \epsilon(q, \omega = 0)$ (ALEINER; GLAZMAN, 1995), que descreve a renormalização do termo de Coulomb, J_0 a função de Bessel do primeiro tipo, a_B o raio de Bohr, k a constante dielétrica e R_c o raio ciclotrônico. Vamos admitir uma interação coulombiana pura, onde a função dielétrica $\epsilon(q)$ não depende da frequência.

Com isso, aplicando os operadores de campos (67) e (68), podemos escrever o segundo termo em segunda quantização, como segue:

$$\begin{aligned} H_{e-e} &= \frac{1}{2}\sum_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\int d^2\vec{r}_i d^2\vec{r}_j \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\frac{2\pi e^2}{q\epsilon(q)}\exp[-i\vec{q}.(\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \\ &\qquad \langle\nu_1|\vec{r}_i\rangle\langle\nu_2|\vec{r}_j\rangle\langle\vec{r}_j|\nu_3\rangle\langle\vec{r}_i|\nu_4\rangle\hat{a}^{\dagger}_{\nu_1}\hat{a}^{\dagger}_{\nu_2}\hat{a}_{\nu_3}\hat{a}_{\nu_4} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\tilde{V}(\vec{q})\int d^2\vec{r}_i e^{-i\vec{q}.\vec{r}_i}\langle\nu_1|\vec{r}_i\rangle\langle\vec{r}_i|\nu_4\rangle\hat{a}^{\dagger}_{\nu_1}\hat{a}_{\nu_4} \\ &\qquad \int d^2\vec{r}_j e^{i\vec{q}.\vec{r}_j}\langle\nu_2|\vec{r}_j\rangle\langle\vec{r}_j|\nu_3\rangle\hat{a}^{\dagger}_{\nu_2}\hat{a}_{\nu_3} \end{aligned} \tag{77}$$

de modo que,

$$\hat{H}_{e-e} = \frac{1}{2}\int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\tilde{V}(\vec{q})\hat{\rho}(\vec{q})\hat{\rho}(-\vec{q}) \tag{78}$$

onde

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{\nu_1\nu_4} \int d^2\vec{r}_i e^{-i\vec{q}.\vec{r}_i} \langle \nu_1|\vec{r}_i\rangle\langle \vec{r}_i|\nu_4\rangle \hat{a}^\dagger_{\nu_1}\hat{a}_{\nu_4} \tag{79}$$

e

$$\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{\nu_2\nu_3} \int d^2\vec{r}_j e^{i\vec{q}.\vec{r}_j} \langle \nu_2|\vec{r}_j\rangle\langle \vec{r}_j|\nu_3\rangle \hat{a}^\dagger_{\nu_2}\hat{a}_{\nu_3} \tag{80}$$

são os operadores densidades de carga nesse estado. A ideia agora é escrever o operador densidade de carga de forma mais simples fazendo explicitamente as integrais em $\vec{r}$. Temos então,

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1,X_4} \frac{\hat{a}^\dagger_{n,X_1}\hat{a}_{m,X_4}}{(\pi 2^{n+m}n!m!l^2L_y^2)^{\frac{1}{2}}} \int d^2\vec{r}_i e^{-i\vec{q}.\vec{r}_i} e^{\frac{iyX_1}{l^2}} e^{\frac{-iyX_4}{l^2}} \\ e^{\frac{-1}{2l^2}[(x-X_1)^2+(x-X_4)^2]} H_n(\frac{x-X_1}{l}) H_m(\frac{x-X_4}{l}) \tag{81}$$

expandindo os quadrados

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1,X_4} \frac{\hat{a}^\dagger_{n,X_1}\hat{a}_{m,X_4}}{(\pi 2^{n+m}n!m!)^{\frac{1}{2}}lL_y} e^{\frac{-1}{2l^2}[X_1^2-X_4^2]} \int dxdy e^{-iq_x x} e^{-iq_y y} e^{\frac{iy}{l^2}(X_1-X_4)} \\ e^{\frac{1}{2l^2}[-2x^2+2x(X_1+X_4)]} H_n(\frac{x-X_1}{l}) H_m(\frac{x-X_4}{l}) \tag{82}$$

ou

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1,X_4} \frac{\hat{a}^\dagger_{n,X_1}\hat{a}_{m,X_4}}{(\pi 2^{n+m}n!m!)^{\frac{1}{2}}lL_y} e^{\frac{-1}{2l^2}[X_1^2-X_4^2]} \int dxdy e^{-iy[q_y-\frac{1}{l^2}(X_1-X_4)]} e^{-iq_x x} \\ e^{\frac{1}{2l^2}[-2x^2+2x(X_1+X_4)]} H_n(\frac{x-X_1}{l}) H_m(\frac{x-X_4}{l}). \tag{83}$$

Dado que, usando a transformada de Fourier da delda de Dirac,

$$\int dy e^{-iy[q_y-\frac{1}{l^2}(X_1-X_4)]} = L_y\delta[q_y - \frac{1}{l^2}(X_1-X_4)] \tag{84}$$

de onde

$$q_y = \frac{1}{l^2}(X_1-X_4) \Longrightarrow X_4 = X_1 - q_y l^2$$

De modo que a densidade de estado fica:

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1,X_4} \frac{\hat{a}^\dagger_{n,X_1}\hat{a}_{m,X_4}}{(\pi 2^{n+m}n!m!)^{\frac{1}{2}}l} e^{\frac{-X_1^2}{l^2}} e^{\frac{-q_y^2 l^2}{2}} e^{X_1 q_y} \\ \int dx e^{-iq_x x} e^{\frac{-x^2}{l^2}+\frac{x}{l^2}[2X_1-q_y l^2]} H_n(\frac{x-X_1}{l}) H_m(\frac{x-X_1+q_y l^2}{l}) \tag{85}$$

considerando que o espaço seja homogêneo, podemos fazer a seguinte translação

$$X_1 \longrightarrow X_1 + \frac{l^2 q_y}{2} \tag{86}$$

Assim,

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1} \frac{\hat{a}^{\dagger}_{n,X_{1+}}\hat{a}_{m,X_{1-}}}{(\pi 2^{n+m} n!m!)^{\frac{1}{2}} l} e^{\frac{-X_1^2}{l^2}} e^{\frac{-l^2 q_y^2}{4}} \int dx e^{-iq_x x} e^{\frac{-x^2}{l^2} + \frac{2xX_1}{l^2}} H_n(\frac{x - X_{1+}}{l}) H_m(\frac{x - X_{1-}}{l}) \tag{87}$$

onde $X_{1\pm} = X_1 \pm \frac{l^2 q_y}{2}$. Resta ainda fazer as integrais sobre produtos de polinômios de Hermite. Para isto usamos a seguinte representação

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{(n+1)}} e^{-t^2 + 2tx} \tag{88}$$

Logo, a densidade toma a forma

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1} \frac{\hat{a}^{\dagger}_{n,X_{1+}}\hat{a}_{m,X_{1-}}}{(\pi 2^{n+m} n!m!)^{\frac{1}{2}} l} e^{\frac{-X_1^2}{l^2}} e^{\frac{-l^2 q_y^2}{4}} \int dx e^{-iq_x x} e^{\frac{-x^2}{l^2} + \frac{2xX_1}{l^2}} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{(n+1)}} e^{-t^2 + 2t(\frac{x - X_{1+}}{l})} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{ds}{s^{(m+1)}} e^{-s^2 + 2s(\frac{x - X_{1-}}{l})} \tag{89}$$

mas

$$\begin{aligned} & -iq_x x - \frac{x^2}{l^2} - t^2 + 2t(\frac{x - X_{1+}}{l}) - s^2 + 2s(\frac{x - X_{1-}}{l}) \\ = & \frac{-x^2}{l^2} - \frac{x}{l}[iq_x l - \frac{2X_1}{l} - 2t - 2s] - t^2 - \frac{2tX_{1+}}{l} - s^2 - \frac{2sX_{1-}}{l} \end{aligned} \tag{90}$$

logo

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1} \frac{\hat{a}^{\dagger}_{n,X_{1+}}\hat{a}_{m,X_{1-}}}{(\pi 2^{n+m} n!m!)^{\frac{1}{2}} l} e^{\frac{-X_1^2}{l^2}} e^{\frac{-l^2 q_y^2}{4}} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{(n+1)}} e^{-t^2 - \frac{2tX_{1+}}{l}} \frac{m!}{2\pi i} \oint \frac{ds}{s^{(m+1)}} e^{-s^2 - \frac{2sX_{1-}}{l}} \int dx e^{-\frac{x}{l}[iq_x l - \frac{2X_1}{l} - 2t - 2s]} e^{-\frac{x^2}{l^2}} \tag{91}$$

Agora, chamemos de

$$Int_1 = \int dx e^{-\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l}[iq_x l - \frac{2X_1}{l} - 2t - 2s]} \tag{92}$$

ou

$$Int_1 = \int d\alpha e^{-\alpha^2 - \alpha[iq_x l - \frac{2X_1}{l} - 2t - 2s]} \tag{93}$$

onde $\alpha = \frac{x}{l}$. Da tabela de integrais (GRADSHTEYN et al., 2007), temos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-p^2x^2 \pm qx]dx = \sqrt{\pi}\exp[\frac{q^2}{\sqrt{4p^2}}] \tag{94}$$

logo

$$Int_1 = l\sqrt{\pi}\exp[\frac{1}{4}(iq_xl - \frac{2X_1}{l} - 2t - 2s)^2] \tag{95}$$

expandindo os quadrados

$$\begin{aligned}[(iq_xl - \frac{2X_1}{l}) + (-2t - 2s)]^2 = -q_x^2l^2 + \frac{4X_1^2}{l^2} - 4iq_xX_1 + t^2 - 4iq_xlt \\ +8t\frac{X_1}{l} + s^2 - 4iq_xls + 8s\frac{X_1}{l} + 8ts\end{aligned} \tag{96}$$

de modo que $\hat{\rho}(\vec{q})$ toma a forma:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1}\frac{\hat{a}^\dagger_{n,X_{1+}}\hat{a}_{m,X_{1-}}}{(2^{n+m}n!m!)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{l^2q^2}{4}}e^{-iq_xX_1}\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{(n+1)}}e^{t[-iq_xl+\frac{2X_1}{l}-\frac{2X_{1+}}{l}]} \\ \frac{m!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{(m+1)}}e^{s[-iq_xl+\frac{2X_1}{l}-\frac{2X_{1-}}{l}]}e^{2st}\end{aligned} \tag{97}$$

Vamos trabalhar com a segunda integral na expressão (97) chamando

$$\begin{aligned}Int_2 = \frac{m!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{(n+1)}}e^{s[-iq_xl+\frac{2X_1}{l}-\frac{2X_{1-}}{l}]}e^{2st} \\ = \frac{m!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{(m+1)}}e^{s[-iq_xl+\frac{2(X_1)}{l}-\frac{2}{l}(X_1-\frac{l^2}{2}q_y)]}e^{2st} \\ = \frac{m!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{(m+1)}}e^{s[-iq_xl+lq_y+2t]} \\ = \frac{d^m}{ds^m}e^{s[-iq_xl+lq_y+2t]}|_{s=0} \\ = (-iq_xl + lq_y + 2t)^m\end{aligned} \tag{98}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1}(2^{m+n}n!m!)^{-\frac{1}{2}}\hat{a}^\dagger_{n,X_{1+}}\hat{a}_{m,X_{1-}}e^{-\frac{l^2q^2}{4}}e^{-iq_xX_1} \\ \frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{(n+1)}}[-iq_xl + lq_y + 2t]^m\exp[-\frac{2tX_{1+}}{l} - iq_xlt + 2X_1\frac{t}{l}]\end{aligned} \tag{99}$$

trabalhando agora com a integral que restou,

$$\begin{aligned}Int_3 = \frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{(n+1)}}[-iq_xl + lq_y + 2t]^m\exp[-\frac{2tX_{1+}}{l} - iq_xlt + 2X_1\frac{1}{l}] \\ = \frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{(n+1)}}[-iq_xl + lq_y + 2t]^m\exp[-tlq_y - iq_xlt] \\ = l^m\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{(n+1)}}[q_y - iq_x + 2\frac{t}{l}]^m\exp[-tl(q_y + iq_x)].\end{aligned} \tag{100}$$

Definindo a variável complexa

$$\eta^{\pm} = q_y \pm iq_x$$

e tomando a seguinte mudança de variável

$$\beta = \eta^{-} + 2\frac{t}{l}$$

podemos reescrever a Int_3, como:

$$Int_3 = l^m \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{l}{2} \frac{d\beta\beta^m}{[\frac{l}{2}(\beta - \eta^-)]^{n+1}}$$
$$= l^{m-n} 2^n e^{\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{d\beta}{[\beta - \eta^-]^{n+1}} e^{-fracl^2 2\beta\eta^+}$$
$$= l^{m-n} 2^n e^{\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-} \frac{d^n}{d\beta^n} \beta^m e^{-\frac{l^2}{2}\beta\eta^+}|_{\beta=\eta^-} \tag{101}$$

mas, considerando que, o polinômio de Laguerre pode ser escrito como

$$L_n^{\alpha} = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{n+\alpha} \tag{102}$$

podemos fazer

$$\frac{d^n}{d\beta^n} \beta^m e^{-\frac{l^2}{2}\beta\eta^+} = (\frac{l^2}{2}\eta^+)^{n-m} n! (\frac{l^2}{2}\eta^+\beta)^{m-n} e^{\frac{l^2}{2}\eta^+\beta} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}\eta^+\beta)$$

sendo assim,

$$Int_3 = l^{m-n} 2^n e^{\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-} (\frac{l^2}{2}\eta^+)^{n-m} n! (\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-)^{m-n} e^{\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-)$$
$$= n! 2^n (\eta^-)^{m-n} l^{m-n} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}\eta^+\eta^-) \tag{103}$$

ou

$$Int_3 = n! 2^n [(q_y - iq_x)l]^{m-n} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}q^2) \tag{104}$$

Assim, o operador densidade de carga toma a forma

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm} \sum_{X_1} (2^{m+n} n! m!)^{-\frac{1}{2}} \hat{a}^{\dagger}_{n,X_{1+}} \hat{a}_{m,X_{1-}} e^{-\frac{l^2 q^2}{4}} e^{-iq_x X_1} \tag{105}$$
$$n! 2^n [(q_y - iq_x)l]^{m-n} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}q^2)$$
$$= \sum_{nm} \sum_{X_1} 2^{\frac{1}{2}(n-m)} \sqrt{\frac{n!}{m!}} [(q_y - iq_x)l]^{m-n} e^{-\frac{l^2 q^2}{4}} e^{-iq_x X_1} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}q^2) \hat{a}^{\dagger}_{n,X_{1+}} \hat{a}_{m,X_{1-}} \tag{106}$$

ou

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = \sum_{nm}\sum_{X_1} F_{nm}(q) e^{-iq_x X_1} \hat{a}^{\dagger}_{n,X_{1+}} \hat{a}_{m,X_{1-}}. \tag{107}$$

Finalmente , esta é a forma procurada do operador densidade de carga projetado nos níveis de Landau, onde a função

$$F_{nm}(q) = 2^{\frac{1}{2}(n-m)} \sqrt{\frac{n!}{m!}} [(q_y - iq_x)l]^{m-n} e^{-\frac{l^2 q^2}{4}} L_n^{m-n}(\frac{l^2}{2}q^2). \tag{108}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'}\sum_{X_2,X_3} (2^{n'} n'! l L_y \pi^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} (2^{m'} m'! l L_y \pi^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \hat{a}^{\dagger}_{n',X_2} \hat{a}_{m',X_3} \\
\int d\vec{r}_j e^{i\vec{q}.\vec{r}_j} e^{iy_j \frac{X_2}{l^2} - iy_j \frac{X_3}{l^2} - \frac{1}{2l^2}[(x-X_2)^2 + (x-X_3)^2]} H_{n'}(\frac{x-X_2}{l}) H_{m'}(\frac{x-X_3}{l}) \qquad (109) \\
= \sum_{n'm'}\sum_{X_2,X_3} (2^{n'+m'} n'! m'! \pi)^{-\frac{1}{2}} (l L_y)^{-1} \hat{a}^{\dagger}_{n',X_2} \hat{a}_{m',X_3} \\
\int dx_j e^{iq_x x_j - \frac{1}{2l^2}[(x_j - X_2)^2 + (x_j - X_3)^2]} H_{n'}(\frac{x-X_2}{l}) H_{m'}(\frac{x-X_3}{l}) \\
\int dy_j e^{-iy_j[-q_y + \frac{1}{2l^2}(X_3 - X_2)]} \qquad (110)
\end{aligned}$$

mas temos que:

$$\int dy_j e^{-iy_j[-q_y + \frac{1}{l^2}(X_3 - X_2)]} = L_y \delta[-q_y + \frac{1}{l^2}(X_3 - X_2)]$$

da condição da delta de Dirac chegamos a

$$X_3 = X_2 + q_y l^2$$

de modo que o operador densidade $\hat{\rho}(-\vec{q})$, toma a forma

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'}\sum_{X_2} (2^{n'+m'} n'! m'! \pi)^{-\frac{1}{2}} l^{-1} \hat{a}^{\dagger}_{n',X_2} \hat{a}_{m',X_2+q_y l^2} \qquad (111) \\
\int dx_j e^{iq_x x_j} e^{-\frac{1}{2l^2}[(x_j - X_2)^2 + (x_j - (X_2 + q_y l^2)^2)^2]} H_{n'}(\frac{x_j - X_2}{l}) H_{m'}(\frac{x_j - (X_2 + q_y l^2)}{l})
\end{aligned}$$

expandindo os quadrados, ficamos com

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'}\sum_{X_2} (2^{n'+m'} n'! m'! \pi)^{-\frac{1}{2}} l^{-1} \hat{a}^{\dagger}_{n',X_2} \hat{a}_{m',X_2+q_y l^2} e^{-\frac{X_2^2}{l^2}} e^{-X_2 q_y} e^{-\frac{q_y^2 l^2}{2}} \qquad (112) \\
\int dx_j e^{iq_x x_j} e^{-\frac{1}{2l^2}[2x_j^2 - 4x_j X_2 - 2x_j q_y l^2]} H_{n'}(\frac{x_j - X_2}{l}) H_{m'}(\frac{x_j - (X_2 + q_y l^2)}{l})
\end{aligned}$$

tomando conta da homogeniedade do sistema, podemos realizar a seguinte translação

$$X_2 \Rightarrow X_2 - q_y l^2 \tag{113}$$

e reescrever o operador densidade como:

$$\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'}\sum_{X_2}(2^{n'+m'}n'!m'!\pi)^{-\frac{1}{2}}l^{-1}\hat{a}^{\dagger}_{n',X_{2-}}\hat{a}_{m',X_{2+}}e^{-\frac{X_2^2}{l^2}}e^{-\frac{q_y^2l^2}{4}}$$
$$\int dx_j e^{iq_x x_j}e^{-\frac{x_j^2}{l^2}+\frac{2X_2x_j}{l^2}}H_{n'}(\frac{x_j-X_{2-}}{l})H_{m'}(\frac{x_j-X_{2+}}{l})$$

onde $X_{2\pm} = X_2 \pm \frac{q_y l^2}{2}$. Se tomarmos o polinômio de Hermite como na expressão (88), temos

$$\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'}\sum_{X_2}(2^{n'+m'}n'!m'!\pi)^{-\frac{1}{2}}l^{-1}\hat{a}^{\dagger}_{n',X_{2-}}\hat{a}_{m',X_{2+}}e^{-\frac{X_2^2}{l^2}}e^{-\frac{q_y^2l^2}{4}}\int dx_j e^{iq_x x_j}e^{-\frac{x_j^2}{l^2}+\frac{2X_2x_j}{l^2}}$$
$$\frac{n'!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{n'+1}}e^{-t^2+2t(\frac{x_j-X_{2-}}{l})}\frac{m'!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{m'+1}}e^{-s^2+2s(\frac{x_j-X_{2+}}{l})}$$
$$= \sum_{n'm'}\sum_{X_2}(2^{n'+m'}n'!m'!\pi)^{-\frac{1}{2}}l^{-1}\hat{a}^{\dagger}_{n',X_{2-}}\hat{a}_{m',X_{2+}}e^{-\frac{X_2^2}{l^2}}e^{-\frac{q_y^2l^2}{4}}\frac{n'}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{n'+1}}e^{-t^2-\frac{2tX_{2-}}{l}}$$
$$\frac{m'!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{m'+1}}e^{-s^2-(\frac{2sX_{2+}}{l})}\int dx_j e^{-\frac{x_j^2}{l^2}+\frac{x_j}{l}[iq_xl+\frac{2X_2}{l}+2t+2s]}$$

Chamando

$$Int_1^{'} = \int dx_j e^{-\frac{x_j^2}{l^2}+\frac{x_j}{l}[iq_xl+\frac{2X_2}{l}+2t+2s]}, \tag{114}$$

considerando o resultado (94) e levando em conta a mudança de variável $\alpha = \frac{x_j}{l}$, temos:

$$Int_1^{'} = l\int d\alpha e^{-\alpha^2+\alpha[iq_xl+\frac{2X_2}{l}+2t+2s]} = l\sqrt{\pi}[\frac{1}{4}(iq_xl+\frac{2X_2}{l}+2t+2s)^2], \tag{115}$$

de onde, expandindo os quadrados,

$$[(iq_xl+\frac{2X_2}{l})+(2t+2s)]^2 =$$
$$= -\frac{q_x^2l^2}{4}-\frac{X_2^2}{l^2}+iq_xX_2+t^2+iq_xlt+2X_2\frac{t}{l}+s^2+iq_xls+2X_2\frac{s}{l}+2st$$

De modo que o operador densidade toma a forma

$$\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'}\sum_{X_2}(2^{n'+m'}n'!m'!)^{-\frac{1}{2}}\hat{a}^{\dagger}_{n',X_{2-}}\hat{a}_{m',X_{2+}}e^{-\frac{q_y^2l^2}{4}}e^{iq_xX_2}$$
$$\frac{n'!}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t^{n'+1}}e^{-\frac{2tX_{2-}}{l}+iq_xlt+2X_2\frac{t}{l}}$$
$$\frac{m'!}{2\pi i}\oint\frac{ds}{s^{m'+1}}e^{-\frac{2sX_{2+}}{l}+iq_xls+2X_2\frac{s}{l}+2ts}$$

donde

$$Int_2^{'} = \frac{m^{'}!}{2\pi i}\oint \frac{ds}{s^{m^{'}+1}} e^{[-2s\frac{X_{2+}}{l}+iq_x ls+2X_2\frac{s}{l}+2st]}$$
$$= \frac{m^{'}!}{2\pi i}\oint \frac{ds}{s^{m^{'}+1}} e^{[s(-q_y l+iq_x l+2t)]}$$
$$= \frac{d^{m'}}{ds^{m'}} e^{s[-q_y l+iq_x l+2t]}\mid_{s=0} = (-q_y l + iq_x l + 2t)^{m'}$$

Assim

$$\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n^{'}m^{'}}\sum_{X_2}(2^{n^{'}+m^{'}} n^{'}!m^{'}!)^{-\frac{1}{2}}\hat{a}^{\dagger}_{n',X_{2-}}\hat{a}_{m',X_{2+}} e^{-\frac{q_y^2 l^2}{4}} e^{iq_x X_2}$$
$$\frac{n'!}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t^{n'+1}}(-q_y l + iq_x l + 2t)^{m'} e^{-\frac{2tX_{2-}}{l}+iq_x lt+2X_2\frac{t}{l}}$$

Substituindo X_{2-} na expressão acima e após alguns ajustes algébricos, ficamos com:

$$\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n^{'}m^{'}}\sum_{X_2} l^{m^{'}}(2^{n^{'}+m^{'}} n^{'}!m^{'}!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{q_y^2 l^2}{4}} e^{iq_x X_2}$$
$$\frac{n'!}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t^{n'+1}}(-q_y + iq_x + 2\frac{t}{l})^{m'} e^{tl(q_y+iq_x)}. \tag{116}$$

Tomemos agora

$$Int_3^{'} = \frac{n'!}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t^{n'+1}}(-q_y + iq_x + 2\frac{t}{l})^{m'} e^{tl(q_y+iq_x)}.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$\gamma = -q_y + iq_x + 2\frac{t}{l}$$

temos

$$Int_3^{'} = \frac{l}{2}\frac{n'!}{2\pi i}\oint \frac{d\gamma\gamma^{m'}}{[\frac{l}{2}(\gamma + q_y - iq_x)]^{n'+1}} e^{[\frac{l^2}{2}(\gamma+q_y-iq_x)(q_y+iq_x)]}$$
$$= l^{-n'}2^{n'}\frac{n'!}{2\pi i}\oint \frac{d\gamma\gamma^{m'}}{[\gamma + q_y - iq_x]^{n'+1}} e^{\frac{l^2}{2}(\gamma+q_y-iq_x)(q_y+iq_x)}.$$

Definindo o número complexo $\eta^{\pm} = q_y \pm iq_x$, para facilitar a notação, a integral acima

pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
Int_3^{'} &= l^{-n'} 2^{n'} \frac{n'!}{2\pi i} \oint \frac{d\gamma \gamma^{m'}}{[\gamma+\eta^-]^{n'+1}} e^{\frac{l^2}{2}(\gamma+\eta^-)\eta^+} \\
&= l^{-n'} 2^{n'} e^{\frac{l^2}{2}\eta^-\eta^+} \frac{n^{'}!}{2\pi i} \oint \frac{d\gamma \gamma^{m'}}{[\gamma+\eta^-]^{n'+1}} e^{\frac{l^2}{2}\gamma\eta^+} \\
&= l^{-n'} 2^{n'} e^{\frac{l^2}{2}\eta^-\eta^+} \frac{d^{n'}}{d\gamma^{n'}} \gamma^{m'} e^{\frac{l^2}{2}\gamma\eta^+} \mid_{\gamma=\eta^-} .
\end{aligned}
$$

Levando-se em conta o polinômio de Laguerre dado pela Eq.(102) e após algumas manipulações algébricas, como feito em $\hat{\rho}(\vec{q})$, chegamos a

$$
\hat{\rho}(-\vec{q}) = \sum_{n'm'} \sum_{X_2} F_{n'm'}(\vec{q}) e^{iq_x X_2} \hat{a}^{\dagger}_{n',X_{2-}} \hat{a}_{m',X_{2+}} \tag{117}
$$

onde

$$
F_{n'm'}(q) = 2^{\frac{1}{2}(n'-m')} \sqrt{\frac{n'!}{m'!}} [(q_y - iq_x)l]^{m'-n'} e^{-\frac{l^2q^2}{4}} L_{n'}^{m'-n'}(\frac{l^2}{2}q^2). \tag{118}
$$

Agora, substituindo as expressões (107) e (117)em (78), o operador de interação $\hat{H}_{e-e}$ toma a forma:

$$
\hat{H}_{e-e} = \frac{1}{2} \sum_{nn'mm'} \sum_{X_1X_2} \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} F_{nm}(q) F_{n'm'}(q) e^{-iq_x(X_1-X_2)} \hat{a}^{\dagger}_{nX_{1+}} \hat{a}^{\dagger}_{n'X_{2-}} \hat{a}_{m'X_{2+}} \hat{a}_{nX_{1+}}. \tag{119}
$$

Temos assim um operador de interação, onde se leva em consideração todos os níveis de Landau. A approximação fundamental agora é supor que os níveis de Landau completamente preenchidos não contribuem à dinâmica de baixas energias, simplesmente devido ao principio de exclusão de Pauli. Por outro lado, desprezamos também excitações inter níveis de Landau, já que a energia necessária para excitá-los é muito maior que a energia para excitar estados intra-níveis. Dessa forma, vamos ficar apenas com a contribuição do último nível ocupado. Portanto, ao fixarmos um nível n, a expressão (119) toma a forma:

$$
\hat{H}_{e-e} = \frac{1}{2} \sum_{n} \sum_{X_1,X_2} \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} [F_{nn}(q)]^2 e^{-iq_x(X_1-X_2)} \hat{a}^{\dagger}_{nX_{1+}} \hat{a}^{\dagger}_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{2+}} \hat{a}_{nX_{1+}}. \tag{120}
$$

Temos então, um operador de interação $\hat{H}_{e-e}$ escrito como produto de quatro operadores de criação e destruição. Numa teoria Hartree-Fock via campo-médio, o produto de quatro operadores de criação e destruição de partícula num estado quântico, no nosso caso são partículas identicas (elétrons), é repassado pelo valor esperado de $\langle \hat{a}^{\dagger}_{X_-} \hat{a}_{X_+} \rangle$. Desse modo, para tomarmos uma aproximação Hartree, se faz necessário a seguinte expansão do produto dos operadores densidade de carga na equação (78), somando e substituindo

o valor médio dos operadores para cada termo no produto, tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right) &= \left[\langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle + \left(\hat{\rho}\left(\vec{q}\right) - \langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle\right)\right]\left[\langle\hat{\rho}\left(\vec{-q}\right)\rangle + \left(\hat{\rho}\left(\vec{-q}\right) - \langle\hat{\rho}\left(\vec{-q}\right)\rangle\right)\right] \\ &= \langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right) + \langle\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right)\rangle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right) - \langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle\langle\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right)\rangle \\ &\quad + \left(\hat{\rho}\left(\vec{q}\right) - \langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle\right)\left(\hat{\rho}\left(\vec{-q}\right) - \langle\hat{\rho}\left(\vec{-q}\right)\rangle\right) \\ &\simeq \langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right) + \langle\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right)\rangle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right) - \langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle\langle\hat{\rho}\left(-\vec{q}\right)\rangle. \end{aligned} \tag{121}$$

A terceira linha da expresão acima, trata-se de flutuações de segunda ordem do valor médio e será negligenciada. O valor médio de $\langle\hat{\rho}\left(\vec{q}\right)\rangle$ é finito apenas quando $\vec{q}$ é igual ao vetor de onda do estado CDW. Portanto, definindo um parâmetro de ordem do tipo CDW, como:

$$\Delta(\vec{Q}) = \frac{2\pi l^2}{L_x L_y}\sum_{X_2} e^{-iQ_x X_2}\langle\hat{a}^{\dagger}_{nX_{2-}}\hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \tag{122}$$

podemos escrever o valor médio do operador densidade, projetado no nível de Landau, como sendo

$$\langle\hat{\rho}(-\vec{Q})\rangle = \sum_n\sum_{X_2} e^{-\frac{l^2Q^2}{4}} e^{iQ_x X_2} L_n^0(\frac{l^2Q^2}{2})\langle\hat{a}^{\dagger}_{nX_{2-}}\hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \tag{123}$$

ou

$$\langle\hat{\rho}(-\vec{Q})\rangle = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2}\sum_n \Delta(-\vec{Q})F_{nn}(Q). \tag{124}$$

Usando a aproximação (121) e o parâmetro de ordem definido em (122) na equação (120), podemos escrever o termo Hartree, como:

$$\begin{aligned}\hat{H}_H = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2}\int\frac{d^2\vec{Q}}{(2\pi)^2}\tilde{V}\left(\vec{Q}\right)\sum_n \Delta\left(-\vec{Q}\right)\left[F_{nn}\left(Q\right)\right]^2\sum_{X_1}\exp\left[-iQ_x X_1\right]\hat{a}^{\dagger}_{nX_{1+}}\hat{a}_{nX_{1-}} - \\ \frac{1}{2}\frac{\left(L_x L_y\right)^2}{\left(2\pi l^2\right)^2}\int\frac{d^2\vec{Q}}{(2\pi)^2}\tilde{V}\left(\vec{Q}\right)\left[F_{nn}\left(Q\right)\right]^2\left|\Delta\left(\vec{Q}\right)\right|^2,\end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_H = \frac{\mathbf{n}_L}{2}\sum_n\sum_{\vec{Q}}\tilde{V}(\vec{Q})\left[F_{nn}\left(Q\right)\right]^2\Delta(-\vec{Q})\sum_{X_1}\exp\left[-iQ_x X_1\right]\hat{a}^{\dagger}_{nX_{1+}}\hat{a}_{nX_{1-}} \\ -\frac{\mathbf{n}_L^2}{2L_x L_y}\sum_{\vec{Q}}\tilde{V}\left(\vec{Q}\right)\left[F_{nn}\left(Q\right)\right]^2\left|\Delta\left(\vec{Q}\right)\right|^2,\end{aligned} \tag{126}$$

este é o operador Hartree, onde $\mathbf{n}_L = (2\pi l^2)^{-1}$ é a densidade de um nível de Landau completamente preenchido. Para o termo de Fock, a expansão se dará nos quatro operadores

de criação e destruição da equação (120), como segue:

$$\hat{H}_F = -\frac{1}{2}\sum_n \sum_{X_1} \sum_{X_2} \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) \left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2 \exp\left[-\frac{l^2}{2}q^2 - iq_x(X_1 - X_2)\right] \times(\langle \hat{a}^\dagger_{nX_{1+}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{1-}} + \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{1-}}\rangle \hat{a}^\dagger_{nX_{1+}} \hat{a}_{nX_{2+}} - \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{1+}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{1-}}\rangle). \quad (127)$$

O valor esperado da equação acima, é dado pela transformada inversa de Fourier do parâmetro de ordem $\Delta\left(\vec{Q}\right)$, logo:

$$\langle \hat{a}^\dagger_{n,X_{2-}} \hat{a}_{n,X_{2+}}\rangle = e^{iQ_x X_2} \Delta(\vec{Q}) \delta(q_y - Q_y). \quad (128)$$

Além disso, se faz necessário a seguinte equivalência:

$$\langle \hat{a}^\dagger_{nX_{1+}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \equiv \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \quad (129)$$

e

$$\langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{1-}}\rangle \equiv \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle, \quad (130)$$

então,

$$\langle \hat{a}^\dagger_{nX_{1+}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle = \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \delta_{X_2, X_1 + l^2 q_y} \quad (131)$$

e

$$\langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{1-}}\rangle = \langle \hat{a}^\dagger_{nX_{2-}} \hat{a}_{nX_{2+}}\rangle \delta_{X_2, X_1 - l^2 q_y}. \quad (132)$$

Sendo assim, aplicando esse resultado em 128, ficamos com

$$\hat{H}_F = -\frac{1}{2n_L}\sum_n \sum_{X_1} \sum_{\vec{Q}} \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\vec{q}) \left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2 \exp\left[-\frac{l^2}{2}q^2 - iq_x Q_y l^2\right] \times\{\exp\left[iQ_x\left(X_1 + q_y l^2\right)\right]\Delta\left(\vec{Q}\right)\hat{a}^\dagger_{nX_{1-}}\hat{a}_{nX_{1+}} + \exp\left[-iQ_x\left(X_1 - q_y l^2\right)\right]\Delta\left(-\vec{Q}\right)\hat{a}^\dagger_{nX_{1+}}\hat{a}_{nX_{1-}}\} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{Q}} \int \frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(q) \left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2 \exp\left[-\frac{l^2}{2}q^2 - i\left(Q_y q_x - Q_x q_y\right) l^2\right] |\Delta\left(\vec{Q}\right)|^2 \quad (133)$$

ou

$$\hat{H}_F = -\frac{1}{n_L}\sum_n\sum_{X_1}\sum_{\vec{Q}}\int\frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\tilde{V}(\vec{q})\left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2\exp[-\frac{l^2q^2}{2}-i(Q_yq_x-Q_xq_y)l^2]$$
$$\times\exp[-iQ_xX]\Delta\left(-\vec{Q}\right)\hat{a}^\dagger_{nX_{1+}}\hat{a}_{nX_{1-}}$$
$$+\frac{1}{n_L^2}\sum_{\vec{Q}}\int\frac{d^2\vec{q}}{(2\pi)^2}\tilde{V}(q)\left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2\exp[-\frac{l^2q^2}{2}-i(Q_yq_x-Q_xq_y)l^2]|\Delta\left(\vec{Q}\right)|^2. \quad (134)$$

Fazendo uma mudança para coordenada polar na integral acima, e levando em conta a equação 75, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\rightarrow\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{+\infty}dqq\int_0^{2\pi}d\theta\frac{2\pi e^2}{q\epsilon(q)}\left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2\exp[-\frac{q^2l^2}{2}-iqQl^2cos\theta], \quad (135)$$

onde tomamos

$$Q_yq_x-Q_xq_y=\vec{Q}\times\vec{q}=qQcos\theta.$$

Assim,

$$\rightarrow\frac{e^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dq}{\epsilon(q)}\exp(-\frac{l^2q^2}{2})\left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2I_0(qQl^2), \quad (136)$$

onde I_0 é a função de Bessel. Logo, substituindo este resultado em 134, ficamos com:

$$\hat{H}_F = -\frac{1}{n_L}\sum_n\sum_{\vec{Q}}\frac{e^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dq}{\epsilon(q)}\exp(-\frac{l^2q^2}{2})\left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2I_0(qQl^2)$$
$$\times\exp[-iQ_xX]\Delta\left(-\vec{Q}\right)\hat{a}^\dagger_{nX_{1+}}\hat{a}_{nX_{1-}}$$
$$+\frac{1}{2n_L^2}\sum_{\vec{Q}}\frac{e^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dq}{\epsilon(q)}\exp(-\frac{l^2q^2}{2})\left[L_n^0\left(\frac{l^2}{2}q^2\right)\right]^2I_0(qQl^2)|\Delta\left(\vec{Q}\right)|^2. \quad (137)$$

Por fim, somando as expressões dos termos Hartree (126)e (137), podemos escrever o Hamiltoniano na aproximação Hartree-Fock, como:

$$\hat{H}_{HF} = \frac{n_L}{2}\sum_n\sum_{\vec{Q}}\{\tilde{V}(Q)[F_{nn}(Q)]^2$$
$$-\frac{1}{n_L}\frac{e^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dq}{\epsilon(q)}\exp[-\frac{l^2}{2}q^2][L_n^0(\frac{l^2q^2}{2})]^2I_0(qQl^2)\}$$
$$\times\sum_X\exp[-iQ_xX]\Delta\left(-\vec{Q}\right)\hat{a}^\dagger_{nX_+}\hat{a}_{nX_-}+E_{coh}. \quad (138)$$

onde,

$$E_{coh} = \sum_n \sum_Q \{ -\frac{n_L^2}{2L_xL_y} \tilde{V}\left(\vec{Q}\right) \left[F_{nn}\left(Q\right)\right]^2 \qquad (139)$$

$$\frac{1}{2n_L^2}\frac{e^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dq}{\epsilon(q)}\exp\left[-\frac{l^2}{2}q^2\right][L_n^0(\frac{l^2q^2}{2})]^2 I_0(qQl^2)\}\sum_X \exp\left[-iQ_xX\right]\}|\Delta\left(\vec{Q}\right)|^2,$$

representa a energia coesiva nesse estado.

A expressão (138) é o operador hamiltoniano de Hartree-Fock, que representa os elétrons em um sistema com nível de Landau elevado, parcialmente ocupado. Por enquanto, o termo de energia coesiva dos elétrons em nossa aproximação, será negligenciado, pois ainda não estamos considerando termos de ordem superior na interação. Estamos interessados nos termos que estão entre chaves, que vai nos dar o potencial sentido pelos elétrons em um sistema parcialmente ocupado. Assim, podemos reescrevemos a expressão (138) da seguinte forma:

$$\hat{H}_{HF} = \frac{n_L}{2}\sum_n\sum_Q \tilde{u}_{HF}\left(\vec{Q}\right)\sum_X \exp\left[-iQ_xX\right]\Delta\left(-\vec{Q}\right)\hat{a}^\dagger_{nX_+}\hat{a}_{nX_-}, \qquad (140)$$

onde

$$\tilde{u}_{HF}\left(\vec{Q}\right) = \tilde{V}\left(Q\right)\left[F_{nn}\left(Q\right)\right]^2 - \frac{1}{n_L}\frac{e^2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dq}{\epsilon(q)}\exp\left[-\frac{l^2}{2}q^2\right][L_n^0(\frac{l^2q^2}{2})]^2 I_0(qQl^2) \qquad (141)$$

O primeiro termo da equação (141) é o potencial Hartree $\tilde{u}_H$ e o segundo termo é o potencial de exchange $\tilde{u}_{ex}$ ou Fock.

Considerando que o preenchimento dos níveis de Landau é dado por $\nu = k_F^2 l^2$ (k_F é o vetor de onda de Fermi), que o raio de Bohr é $a_B = \frac{\hbar^2 k}{m\mathbf{e}^2}$, que o parâmetro de intervalo do estado é $r_s = \frac{\sqrt{2}}{k_F l^2}$, que o raio da órbita ciclotrônica é igual a $R_c = k_F l^2$, e fazendo uso das Eqs. (75) e (76), temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_H &= \frac{2\pi\mathbf{e}^2}{Q}\frac{e^{-\frac{l^2Q^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2Q^2}{2})]^2}{k\{1+\frac{2}{Qa_B}[1-J_0^2(QR_c)]\}} \\
&= \frac{2\pi\hbar^2}{mQa_B}\frac{e^{-\frac{l^2Q^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2Q^2}{2})]^2}{\{1+\frac{2}{Qa_B}[1-J_0^2(QR_c)]\}} \\
&= \frac{2\pi l^2\hbar\omega_c}{Qa_B}\frac{e^{-\frac{l^2Q^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2Q^2}{2})]^2}{\{1+\frac{2}{Qa_B}[1-J_0^2(QR_c)]\}} \\
&= \frac{\hbar\omega_c}{n_L}\frac{1}{Qa_B}\frac{e^{-\frac{l^2Q^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2Q^2}{2})]^2}{\{1+\frac{2}{Qa_B}[1-J_0^2(QR_c)]\}}
\end{aligned} \qquad (142)$$

Podemos reescrever o resultado acima da seguinte forma

$$U_H = \frac{n_L \tilde{u}_H}{\hbar\omega_c} = \frac{1}{Qa_B} \frac{e^{-\frac{l^2Q^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2Q^2}{2})]^2}{\{1+\frac{2}{Qa_B}[1-J_0^2(QR_c)]\}} \tag{143}$$

Fazendo $P = Qa_B$, ficamos com

$$U_H = \frac{1}{P} \frac{e^{-\frac{P^2}{4}\frac{l^2}{a_B^2}}[L_n^0(\frac{P^2}{2}\frac{l^2}{a_B^2})]^2}{\{1+\frac{2}{P}[1-J_0^2(P\frac{R_c}{a_B})]\}} \tag{144}$$

e considerando

$$\frac{R_c}{a_B} = \frac{k_F^2 l^2 r_s^2}{\sqrt{2}} = \frac{\nu r_s}{\sqrt{2}} \tag{145}$$

e

$$\frac{l^2}{a_B^2} = \frac{\nu r_s^2}{2}, \tag{146}$$

temos, finalmente, o potencial de Hartree

$$U_H = \frac{1}{P} \frac{e^{-\frac{P^2}{8}r_s^2\nu}[L_n^0(\frac{P^2}{4}r_s^2\nu)]^2}{\{1+\frac{2}{P}[1-J_0^2(P\frac{\nu r_s}{\sqrt{2}})]\}}. \tag{147}$$

Procedendo da mesma forma, o potencial de exchange $\tilde{u}_{ex}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{ex} &= \frac{\mathbf{e}^2}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dqe^{-\frac{(lq)^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2q^2}{2})]^2 I_0(qQl^2)}{k\{1+\frac{2}{qa_B}[1-J_0^2(qR_c)]\}} \\ &= \frac{\hbar^2 k}{2\pi m a_B}\int_0^{+\infty} \frac{dqe^{-\frac{(lq)^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2q^2}{2})]^2 I_0(qQl^2)}{k\{1+\frac{2}{qa_B}[1-J_0^2(qR_c)]\}} \\ &= \frac{\hbar\omega_c l^2}{2\pi a_B}\int_0^{+\infty} \frac{dqe^{-\frac{(lq)^2}{2}}[L_n^0(\frac{l^2q^2}{2})]^2 I_0(qlQl)}{\{1+\frac{2}{qa_B}[1-J_0^2(qR_c)]\}}\end{aligned} \tag{148}$$

fazendo $p = ql$, temos

$$\tilde{u}_{ex} = \frac{\hbar\omega_c l}{2\pi a_B}\int_0^{+\infty} \frac{dpe^{-\frac{(p^2}{2}}[L_n^0(\frac{p^2}{2}]^2 I_0(pQl)}{\{1+\frac{2}{p}\frac{l}{a_B}[1-J_0^2(p\frac{R_c}{l})]\}} \tag{149}$$

e podemos definir o potencial de exchange ou Fock como:

$$U_{ex} = n_L\frac{\tilde{u}_{ex}}{\hbar\omega_c} = \frac{l}{a_B}\int_0^{+\infty} \frac{dpe^{-\frac{(p^2}{2}}[L_n^0(\frac{p^2}{2})]^2 I_0(pQl)}{\{1+\frac{2}{p}\frac{l}{a_B}[1-J_0^2(p\frac{R_c}{l})]\}}. \tag{150}$$

Considerando $P = Qa_B$, temos

$$U_{ex} = \frac{l}{a_B}\int_0^{+\infty} \frac{dpe^{-\frac{p^2}{2}}[L_n^0(\frac{p^2}{2})]^2 I_0(pP\frac{l}{a_B})}{\{1+\frac{2}{p}\frac{l}{a_B}[1-J_0^2(p\frac{R_c}{l})]\}} \tag{151}$$

e dado que

$$\frac{l}{a_B} = \frac{r_s\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}$$

temos, finalmente, para o potencial de exchange,

$$U_{ex} = \frac{r_s\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{dpe^{-\frac{(p^2}{2}}[L_n^0(\frac{p^2}{2})]^2 I_0(pP\frac{r_s\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}})}{\{1+\frac{\sqrt{2\nu}r_s}{p}[1-J_0^2(p\sqrt{\nu})]\}} \tag{152}$$

Por fim, o potencial de Hartree-Fock é definido como:

$$U_{HF} = U_H - U_{ex}. \tag{153}$$

Substituindo as Eqs. (147) e (152) na expressão acima, ficamos com,

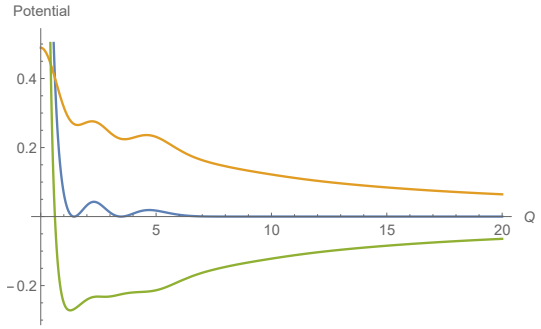
$$U_{HF}(P) = \frac{1}{P}\frac{e^{-\frac{P^2}{8}r_s^2\nu}[L_n^0(\frac{P^2}{4}r_s^2\nu)]^2}{\{1+\frac{2}{P}[1-J_0^2(P\frac{\nu r_s}{\sqrt{2}})]\}} - \frac{r_s\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{dpe^{-\frac{p^2}{2}}[L_n^0(\frac{p^2}{2})]^2 I_0(pP\frac{r_s\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}})}{\{1+\frac{\sqrt{2\nu}r_s}{p}[1-J_0^2(p\sqrt{\nu})]\}}. \tag{154}$$

Este é o resultado principal deste capítulo. Representa o potencial efetivo na aproximação de Hartree-Fock que sente uma partícula num líquido de Hall com um nível de Landau parcialmente preenchido. Esta expressão está escrita em termos do raio de Wigner-Seitz r_s e do preenchimento ν. A integral do segundo termo, termo Fock, só é possível ser solucionada numericamente. A seguir, apresentamos os nosso resultados numéricos obtidos no programa Mathematica.

2.3 **Resultados numéricos**

Nas figuras (1) e (2) são apresentados os resultados numéricos para os potenciais de Hartree U_H, de Fock U_{ex} e Hartree-Fock U_{HF}, plotados em função de $Q(a_B^{-1})$. Tendo como base os trabalhos experimentais de Lilly (LILLY et al., 1999a), estamos considerando as anisotropias que ocorrem quando tem-se preenchimento $\nu = \frac{9}{2}$ e $\nu = \frac{13}{2}$, que estão centradas nos níveis de Landau $n = 2$ e $n = 3$, respectivamente. O rádio de Wigner-Seitz r_s, que pode ser $0.06 < r_s < 1$, foi fixado em $r_s = 0.5$. Para $n > 0$ o potencial Hartree U_H tem zeros devido ao polinômio de Laguerre $L_n(x)$. O potencial de Fock é sempre positivo, portanto, existe um Q onde o potencial Hartree-Fock é negativo, em concordância com a equação 154. Assim, como se observa nas figuras, o potencial U_{HF} é negativo para todos

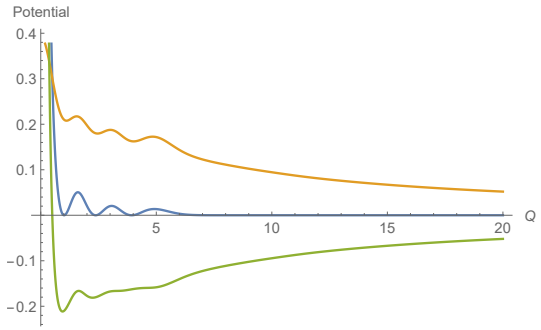
Gráfico 1 - Potenciais com preenchimento $\nu = 9/2$



Legenda: Potenciais de Hartree, Fock e Hartree-Fock em função de Q. A linda na cor azul representa U_H, a cor laranja U_F e a verde U_{HF}. Consideramos $n = 2$, $r_s = 0.5$ e preenchimento $\nu = 9/2$.

Fonte: o autor, 2017.

Gráfico 2 - Potenciais com preenchimento $\nu = 13/2$



Legenda: Potenciais de Hartree, Fock e Hartree-Fock em função de Q. A linda na cor azul representa U_H, a cor laranja U_F e a verde U_{HF}. Consideramos $n = 3$, $r_s = 0.5$ e preenchimento $\nu = 13/2$.

Fonte: o autor, 2017

os valores de $Q > Q_0$, e atinge seu menor valor perto de $Q = Q_0$, onde esse Q_0 se refere ao primeiro mínimo.

A principal conclusãao deste capítulo é que, devido a competição entre o efeito do campo magnético, que tende a condensar os elétrons em níveis de Landau, e a repulsão de Coulomb de longo alcance, o potencial efetivo desenvolve um mínimo para valores de momento diferente de zero. Isto implica que o sistema tem uma tendência a formar domínios com vetor de onda Q_0. Pelo menos qualitativamente, isto é compatível com as anisotropías observadas experimentalmente nestes sistemas.

A aproximação HF em *líquido Hall* quântico, levando em consideração a interação de Coulomb e campos magnéticos fracos, descreve a fase de *stripe* que é muito estudada em sistemas Hall. Uma propriedade comum à esse sistema, é que existe um certo grau de frustação, causado pela competição de interações. Isto é característico de uma quebra

de simetria manifestada pelo comportamento das correlações dos longos comprimentos de onda. Assim, podemos falar em uma fase nemática em *líquido Hall*, dada pela quebra de simetria rotacional do sistema. Essa fase, predomina no terceiro nível e nos níveis superiores de Landau, em campos magnéticos fracos, enquanto que, em campos magnéticos fortes a fase dos FQHE domina o primeiro nível de Landau. A assinatura mais evidente da fase nemática em sistemas Hall quântico é a forte dependência da temperatura da anisotropia nas propriedades de transporte (FRADKIN et al., 2000).

3 FASE NEMÁTICA EM LÍQUIDO HALL QUÂNTICO

Existe um grande número de sistemas em matéria condensada, em que o grau de liberdade de carga forma padrões espaciais regulares comumente conhecidos como listras ou, do inglês, *stripe*. Estas estruturas advêm de características das interações do sistema e resulta da natureza da competição de forças atrativas de curto-alcance, que dá a fase condensada, e das interações de Coulomb de longo-alcance. Especificamente, na fase condensada e na ausência de forças repulsivas de longo-alcance entre cargas iguais, o grau de liberdade de carga tem tendência de formar aglomerados que separam estas fases. Esta tendência à separação de fase é frustrada pelas interações de Coulomb repulsivas de longo-alcance e o resultado é uma organização espontânea do grau de liberdade de carga em estruturas de baixa dimensão. Isto favorece o surgimento de fases complexas por quebra de simetria de rotação e/ou translação.

Observou-se há algum tempo que existe uma tendência de um gás de elétrons bidimensional, $2DEG$, em um campo magnético forte se condensar em um líquido Hall quântico incompressível, com um fator de preenchimento ν quantizado. Nesse sistema, o mesmo tipo de competição se faz presente. Assim, na presença de interações de Coulomb de longo-alcance, com densidade de elétrons intercalando entre dois valores quantizados, é natural esperar que o sistema forme estados inomogêneos com um conjunto periódico de stripe. Os trabalhos de Koulakov, Fogler e Shlovskii (FOGLER; KOULAKOV; SHKLOVSKII, 1996)(KOULAKOV; FOGLER; SHKLOVSKII, 1996), mostram que um gás de elétrons bidimensional sob campo magnético perpendicular, pode ter stripe ou um estado fundamental CDW em que a densidade de carga, em um nível de Landau parcialmente ocupado, exibe oscilações periódicas ao longo de uma direção espacial. Segundo esses cálculos, que são baseados numa aproximação Hartree-Fock, os elétrons formam stripe onde o nível de Landau se alterna entre cheio e vazio. O padrão de stripe é uma modulação periódica da condutância local Hall, entre os valores quantizados $2N\frac{e^2}{h}$ e $(2N+1)\frac{e^2}{h}$.

Motivado pelos resultados experimentais de Lilly (LILLY et al., 1999a)(LILLY et al., 1999b), onde se observa uma dependência forte da anisotropia nas propriedades de transporte eletrônico com a temperatura, e pelos trabalhos teóricos de estados Hartree-Fock com ordem de stripe e, além disso, explorando a analogia com essa formação de fase de stripe com outros sistemas de elétrons fortemente correlacionados (KIVELSON; FRADKIN; EMERY, 1998), Fradkin tem proposto que os estados fundamentais de um sistema Hall quântico, com níveis de Landau parcialmente preenchido para $N \geq 2$, são predominantemente líquidos cristalinos (FRADKIN; KIVELSON, 1999). Estas fases, com quebra de simetria de rotação e as vezes de translação, são intermediárias entre um fluido quântico isotrópico e o cristal eletrônico semiclássico. Em particular, chamam atenção para a existência das fases Hall quânticas: smética, nemática, etc. A fase smética, é

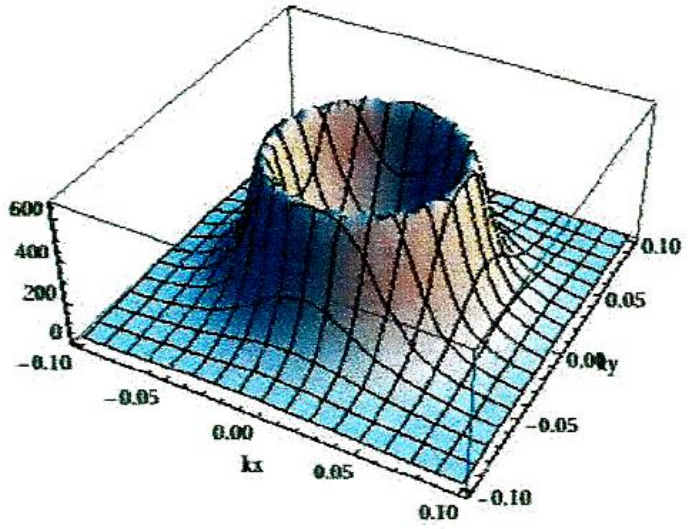
caracterizada pela quebra de simetria de rotação e de translação, enquanto que, a nemática quebra a simetria de rotação e restaura a simetria de translação. Baseado nisso, e no fato que os stripes são resultado da competição entre forças atrativas de curto-alcance e interação de Coulomb, Barci e Fradkin (BARCI et al., 2002) fizeram um estudo teórico da fase smética no sistema Hall quântico. Nesses trabalho, eles desenvolveram uma teoria efetiva para baixa energia via campo-médio, provando que esta fase advem da quebra espontânea da invariância rotacional e translacional de um sistema $2DEG$.

Nos últimos anos, tem se manifestado um enorme interesse na fase nemática em sistemas Hall quânticos. Isto porque há uma quantidade crescente de dados sugerindo que a física da fase nemática pode estar intimamente ligada com o comportamento do conhecido *non-Fermi liquid* de estados anisotrópicos. Uma forte evidência da fase nemática aparece em um sistema bidimensional de elétrons de alta mobilidade na heteroestrutura de $GaAs/GaAlAs$, em temperaturas estremamente baixas e campos magnéticos moderados. Enquanto que para campos magnéticos fortes a fase Hall quântica fracionária domina o primeiro nível de Landau, a fase nemática aparece quando o nível de Fermi se localiza no meio do segundo e dos níveis superiores de Landau, ou seja, a campos magnéticos fracos, tendo como mais forte característica de uma fase nemática Hall quântica, a forte dependência da anisotropia das propriedades de transporte com a temperatura (FRADKIN et al., 2000).

Há algum tempo, Brazovskii propôs um modelo tipo-Landau, que diz que as transições de fase baseiam-se na introdução de um parâmetro de ordem e no estabelecimento de uma expansão da energia livre, para um sistema com competição de interações quase isotrópicas (BRAZOVSKII, 1975). Ele obteve um importante resultado que, embora a expansão de Landau no modelo tinha apenas potências quadrática e quártica do parâmetro de ordem, uma transição de primeira ordem induzida por flutuações foi observada, contrariamente ao que se esperaria a priori. A característica essencial por trás desse comportamento é que o modo de baixa energia dominante não é em $k = 0$, mas sim em $k \neq 0$, e de fato define o comprimento de modulação do parâmetro de ordem. No entanto, o modelo de Brazovskii apenas se limitou à transição stripe-isotrópica. De modo que, uma descrição teórica das fases orientacionais em sistemas com competição isotrópica, ou quase isotrópica, se faz necessário.

Recentemente, uma extensão do modelo de Brazovskii capaz de descrever fases de ordem orientacional, mas não necessariamente posicional, tem sido desenvolvido por Barci e Stariolo (BARCI; STARIOLO, 2007)(BARCI; STARIOLO, 2009). Eles identificaram um parâmetro de ordem similar ao do cristal líquido nemático. Curiosamente, esse parâmetro de ordem surge naturalmente de uma expansão de Landau para um tipo de sistema da classe de Brazovskii. A energia de Landau resultante descreve as duas transições releventes: de isotrópica para nemática e de nemática para stripes, concordando assim, com as observações experimentais. Em outro trabalho, os mesmos autores fizeram

Figura 12 - Fase stripe-paramagnética



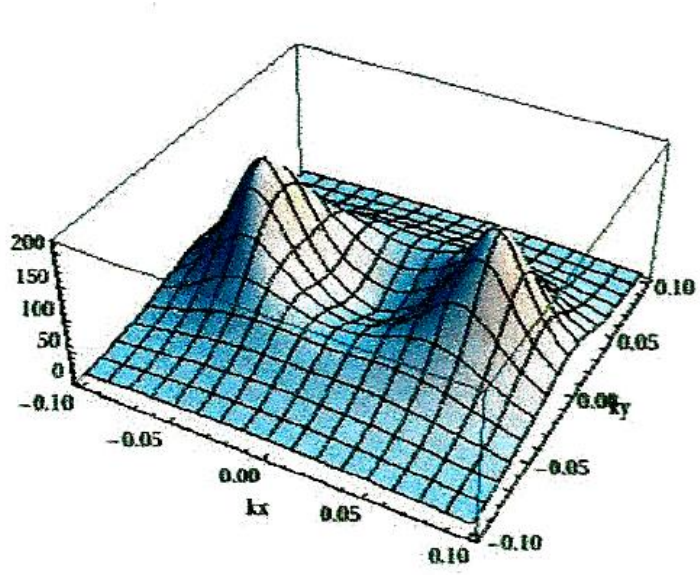
Legenda: Fator de estrutura do sistema DFIF perto de uma transiçã de fase stripes-paramagnética.

Fonte: BARCI; STARIOLO, 2011, p. 7.

o estudo de transição de fase em um sistema de Ising com interações competitivas em diferentes escalas (BARCI; STARIOLO, 2011). Neste, eles consideraram a formação de stripes num sistema bidimensional, onde se torna possível a existência das fases smética, nemática e de cristal. Assim, desenvolveram uma aproximação de campo-médio que leva à energia livre como função da magnetização e do parâmetro de ordem orientacional (nemático). Trabalharam com equações auto-consistente para o parâmetro de ordem, cuja solução leva em consideração um sistema DFIF (*Dipolar Frustrated Ising Ferromagnetic*), que apresenta uma forte anisotropia perpendicular. Desse modo, na descrição da fase nemática, analisaram o comportamento de uma função de Green de dois pontos $G(\vec{k})$, que dá informações do possível crescimento da ordem posicional com altas temperaturas. Os resultados dessa análise são vistos nas figuras 12 e 13. A mudança da imagem nessas figuras, que visto de cima transita de um cículo para elipse, é uma forte característica de uma transição de fase isotrópica-nemática.

Contudo, apesar da forte evidência da fase nemática em sistemas Hall quânticos, até o momento não existe nenhum modelo de teoria efetiva sobre essa fase nesse sistema. Assim, tomando como base o modelo extendido de Brazovskii desenvolvido por Barci e Stariolo e, uma vez que temos calculado um potencial Hartree-Fock para um sistema de líquido Hall quântico sob campo magnético fraco e com níveis de Landau parcialmente ocupados; apresentamos neste capítulo um modelo que comprova efetivamente a existência da fase nemática neste sistema. Portanto, a fim de melhor elucidar o nosso modelo,

Figura 13 - Fase nemática



Legenda: Fator de estrutura do sistema DFIF na fase nemática, perto da transição de fase nemática-stripe.

Fonte: BARCI; STARIOLO, 2011, p. 7.

descrevemos de forma simplificada nas próximas seções, o padrão de ordem nemático e o modelo extendido de Brazovskii, elaborados pelos referidos autores. Por fim, apresento o nosso modelo de hamilltoniano efetivo em líquido Hall quântico.

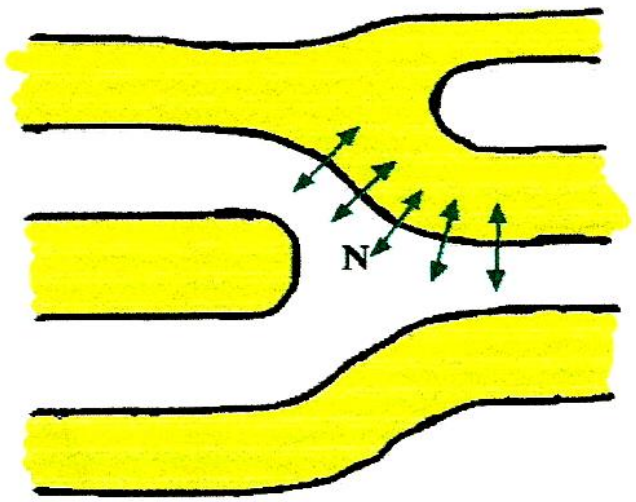
3.1 **O padrão de ordem nemático**

É sabido que competição entre atração de curto alcance e repulsão de longo alcance, ou interações ferromagnéticas de curto alcance e antiferromagnéticas de longo alcance, dão origem a padrões de strips do parâmetro de ordem, que geralmente é representado por uma densidade ou magnetização $\phi(\vec{x})$. É observado uma transição entre valores positivos e negativos do parâmetro de ordem e para quantificar o grau de orientação, podemos definir um campo diretor definido como o gradiente do parâmetro de ordem:

$$N(\vec{x}) \equiv \nabla\phi(\vec{x}) = (\partial_x\phi, \partial_y\phi). \tag{155}$$

Definido desta forma, o campo diretor $N(\vec{x})$ é um vetor que define um campo vetorial sob a área de um sistema bidimensional. Porém, este não é o tipo de padrão de ordem que estamos procurando. Como fica claro na figura 14, a orientação não importa se é da esquerda para a direita, ou se de cima para baixo, ambas as orientações, perpendiculares à parede do domínio, são equivalentes. Uma forma de incorporar esta simetria, é definindo

Figura 14 - Representação esquemática da fase de stripe



Legenda: Esquema representando uma fase stripe com um deslocamento. As setas representam o campo diretor, que é uma medida local das paredes do domínio.
Fonte: BARCI; STARIOLO, 2011, p. 7.

um "tensor"parâmetro de ordem, similar a um tensor parâmetro de ordem do cristal-líquido nemático, que em termos do gradiente da densidade ϕ, este tensor fica definido como

$$Q_{ij} \equiv \phi\left(\vec{x}\right)\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{2}\partial^2\delta_{ij}\right)\phi\left(\vec{x}\right), \tag{156}$$

onde $i, j = \{x, y\}$. Este tensor é simétrico e sem traço e em duas dimensões ele tem apenas dois elementos independentes, que representam essencialmente a orientação média das paredes dos domínios e a força da ordem da orientação.

Para dá sentido físico a este novo parâmetro se faz necessário escrevê-lo no espaço recíproco. Assim, tomando uma transformada de Fourier:

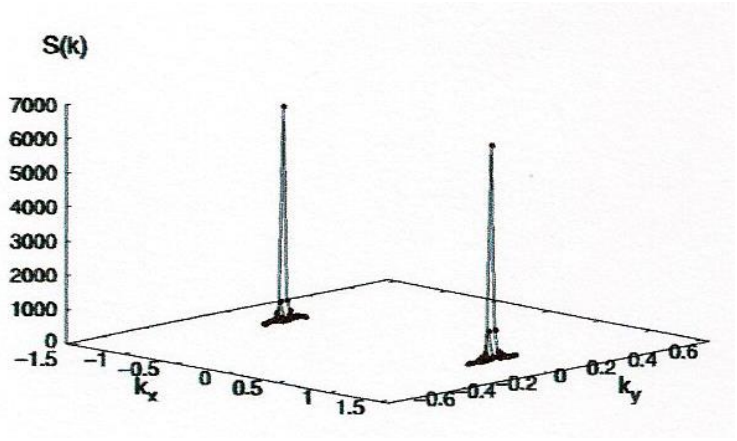
$$\tilde{Q}_{ij}\left(\vec{k}\right) = \int d^2x Q_{ij}\left(\vec{x}\right)\exp\left(-i\vec{k}.\vec{x}\right), \tag{157}$$

$$Q_{ij}\left(\vec{x}\right) = \int \frac{d^2\vec{k}}{\left(2\pi\right)^2}\tilde{Q}_{ij}\left(\vec{k}\right)\exp\left(i\vec{k}.\vec{x}\right), \tag{158}$$

logo,

$$\tilde{Q}_{ij}\left(\vec{k}'\right) = \int d^2\vec{k}\left(k_ik_j - \frac{1}{2}k^2\delta_{ij}\right)\tilde{\phi}\left(\vec{k}\right)\tilde{\phi}\left(\vec{k}' - \vec{k}\right). \tag{159}$$

Figura 15 - Fator de estrutura para competição de interação



Legenda: Fator de estrutura $\langle Q \rangle \sim 1$ de competição de interação em um sistema 2d, a $T = 0.1$.

Fonte: NICOLAO; STARIOLO, 2007, p. 7.

O parâmetro de ordem médio global, é dado por:

$$\langle Q_{ij} \rangle = \int d^2x Q_{ij}\left(\vec{x}\right) = \langle \tilde{Q}_{ij}\left(\vec{k}' = 0\right)\rangle$$
$$= \int d^2k \left(k_i k_j - \frac{1}{2}k^2\delta_{ij}\right) \langle \tilde{\phi}\left(\vec{k}\right)\tilde{\phi}\left(-\vec{k}\right)\rangle, \tag{160}$$

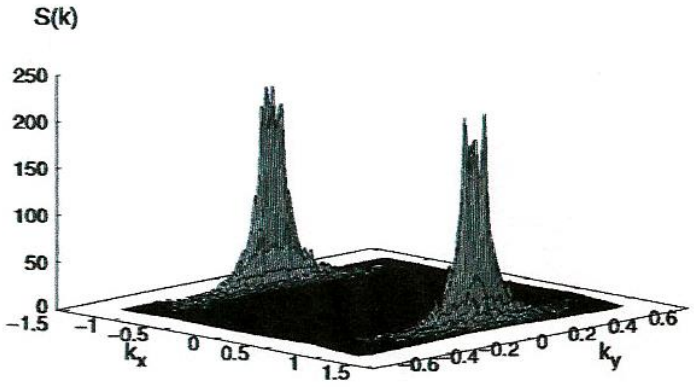
tomando o eixo x como eixo principal, o único elemento relevante do tensor é,

$$\langle Q_{xx} \rangle = \int d^2k k^2 \cos\left(2\theta\right) C\left(\vec{k}\right), \tag{161}$$

onde $k_x = k\cos\left(\theta\right)$, $k_y = k\sin\left(\theta\right)$ e $C\left(\vec{k}\right)$ é o fator estrutural do sistema. Escrito desta forma, o parâmetro de ordem orientacional quantifica o grau de anisotropia do padrão de domínio. Em uma fase completamente isotrópica, por exemplo, uma fase líquida ou um mosaico de domínios sem direção preferencial, a isotropia correspondente no fator de estrutura será refletida em um valor zero do parâmetro de ordem orientacional.

As figuras 15, 16 e 17, representam o fator de estrutura de um modelo para filmes magnéticos ultrafinos com forte anisatropia perpendicular, que tem interações ferromagnéticas de curto alcance competindo com interações dipolar de longo alcance (CARUBELLI et al., 2008). Na imagem no topo, $C(\vec{k})$ é para uma temperatura muito baixa, onde o estado de equilíbrio do sistema apresenta strips quase perfeitamente retos com magnetização up e down. Além disso, $C(\vec{k})$ apresenta dois picos muito estreitos com um vetor de onda correspondendo ao comprimento de modulação dos strips. O sistema possui ordem orientacional e de posicionamento. A segunda figura corresponde a uma temperatura mais alta. Nela, os dois picos são ampliados e a ordem do posicionamento se perde. No entanto, a ordem orientacional ainda está presente e é confirmada pelo alto valor de ten-

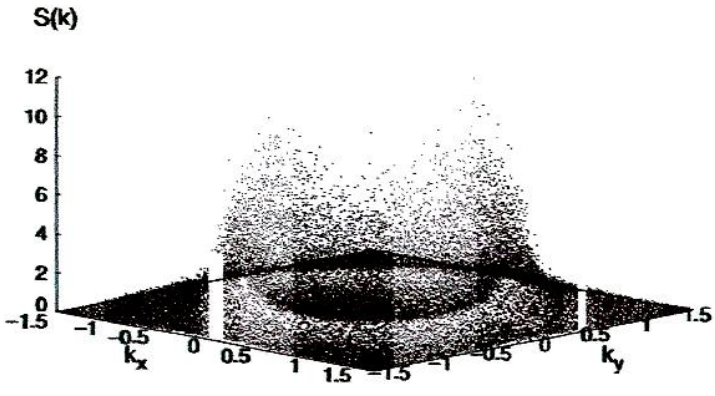
Figura 16 - Fator de estrutura para competição de interação



Legenda: Fator de estrutura $\langle Q \rangle \sim 0.8$ de competição de interação em um sistema 2d, a $T = 0.114$.

Fonte: NICOLAO; STARIOLO, 2007, p. 7.

Figura 17 - Fator de estrutura para competição de interação



Legenda: Fator de estrutura $\langle Q \rangle \sim 0.1$ de competição de interação em um sistema 2d, a $T = 0.14$.

Fonte: NICOLAO; STARIOLO, 2007, p. 7.

sor parâmetro de ordem $\langle Q \rangle \approx 0.8$. Isto corresponde a uma fase igualmente nemática. A terceira figura mostra um fator de estrutura invariante rotacional, o que reflete a ausência de ordem orientacional e corresponde a uma fase desordenada de alta temperatura.

3.2 O modelo estendido de Brazovskii

O domínio de um modo com um vetor de onda não-nulo em baixa energia, pode ser estudado através de um modelo fenomenológico do tipo Landau-Ginzburg, analizado primeiramente por Brazovskii (BRAZOVSKII, 1975), como segue:

$$H = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\phi(\vec{k})(r_0 + \frac{1}{m}(k-k_0)^2 + ...)\phi(-\vec{k}) +$$
$$+u\int\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{d^2k_i}{(2\pi)^2}\right)\phi(\vec{k}_1)...\phi(\vec{k}_4)\delta^2(\vec{k}^1+\vec{k}^2+\vec{k}^3+\vec{k}^4). \quad (162)$$

Este modelo, levado à nível de campo médio, dá origem a uma transição isotrópica-stripes de segunda ordem. Abaixo da temperatura crítica T_c o parâmetro de ordem varia de forma senosoidal:

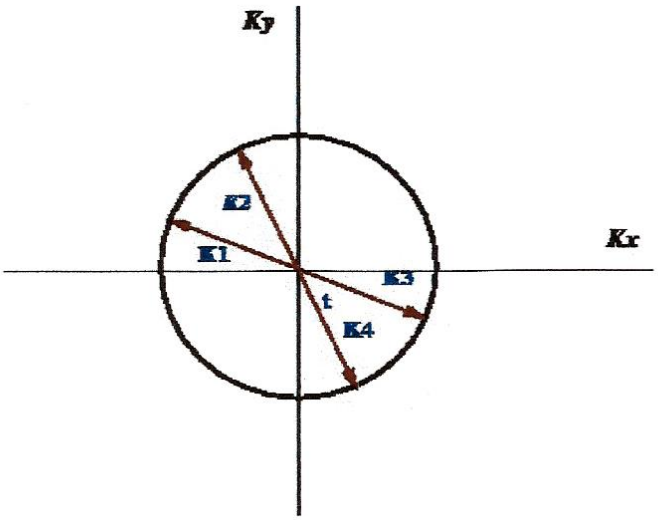
$$\phi(\vec{x}) = A\cos(\vec{k}.\vec{x}). \quad (163)$$

Brazovskii mostrou que incluindo flutuções de maneira auto-consistente, este modelo leva a uma transição de fase de primeira ordem induzida por flutuações. A fase de stripes à baixas temperaturas, dominada por uma modo com vetor de onda k_0, tem ordem de alcance posicional na forma de duas funções de delta simétrica com picos no fator de estrutura, pelo menos perto da transição. Com temperaturas mais baixas, outros modos passam a ser considerados e a informação do parâmetro de ordem muda nas paredes do domínio com $T \to 0$. Embora aplicado a alguns sistemas bidimensionais, sabe-se que em temperatura mais baixas a fase de stripe é muito instável. Flutuações angulares do vetor de onda dominante de módulo k_0 não gasta energia, como mostra a figura 18. É necessário algum tipo de anisotropia nas interações ou a fixação de um substrato para estabilizar a fase.

No entanto, foi demonstrado recentemente que a ordem orientacional pode persistir mesmo no caso de interações isotrópicas ideais (BARCI; STARIOLO, 2007) (BARCI; STARIOLO, 2009). Fazendo uma análise das implicações da isotropia para o termo de interação, que em geral também pode ser uma função $u(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4)$, com vetores de onda k_1, k_2, k_3 e k_4 como mostrado da figura 18, temos as seguintes observações:

- A isotropia força os vetores de onda a permanecerem em um círculo de raio K_0, logo $u(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4) = u(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Figura 18 - Esquema isotrópico



Legenda: Os vetores de onda presentes no termo quártico estão num círculo de raio k_0 para interações perfeitamente isotrópicas. Isto determina a forma do termo quártico na expansão de Landau.

Fonte: STARIOLO; BARCI, 2010, p. 8.

- A conservação do momento total permite eliminar um dos quatro k's.
- Fixando dois deles, os outros dois são fixados automaticamente, pois os quatro vetores se apresentem no círculo.
- Devido a invariância rotacional, a interação pode depender apenas da diferença entre os dois ângulos independentes:

$$u(\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi) = u(\theta_1 - \theta_2) = u(\theta)$$

- Finalmente, a invariância na permuta de índice em $u(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4)$ implica que $u(\theta) = u(\theta + \pi)$, assim u pode ser expandido em uma séri de Fourier:

$$u(\theta) = u_0 + u_2 \cos(2\theta) + u_4 \cos(4\theta) + ... \tag{164}$$

Na expressão anterior para a interação tem-se que o primeiro termo, que é constante, como o que apresentado no modelo original de Brazovskii (BRAZOVSKII, 1975), como mostra a equação 162. Porém, considerações de simetria nos leva a concluir que uma infinidade de termos adicionais podem ser considerados na expansão, mostrando que todos eles são relevantes no sentido de Grupo de Renormalização (BARCI; STARIOLO, 2007). Assim, da equação 164 podemos ver que todos os termos de cosseno compartilham

uma simetria nemática, isto é, são invariantes perante rotação $\theta \to \theta + \pi$. Deste modo, tomando os dois primeiros termos, podemos reescrever o termo de energia de Brazovskii da seguinte forma:

$$H = H_{Br} + u_2 \int \frac{d^2k}{2\pi} Tr\tilde{Q}^2, \tag{165}$$

onde H_{Br} é dada pela equação 162, $Tr\tilde{Q}^2$ é o traço do tensor nemático quadrático e $\tilde{Q}_{ij}(\vec{k})$ é dado pela equação 159.

3.3 **Modelo de hamiltoniano efetivo e a fase Hall quântica nemática**

Uma vez que temos calculado o potencial Hartree-Fock para o sistema de líquidos Hall quânticos sob um campo magnético fraco, onde consideramos os níveis de Landau para $n \geq 2$ parcialmente ocupados, e levando em consideração a forte anisotropia das propriedades de transporte em sistemas Hall quântico, nos apropriamos do modelo estendido de Brazovskii para desenvolver um modelo de hamiltoniano efetivo que descreva a fase Hall quântica nemática.

A ideia é expandir o potencial de Hartree-Fock ao redor do momento Q dado pelo primeiro mínimo da Eq. (154) representado na figura 1. Desta forma obtemos um hamiltoniano efetivo quadrático do mesmo tipo que o modelo de Brazovskii. A vantagem é que os coeficientes da expansão são dados agora a partir de parâmetros microscópicos como o fator de preenchimento ou o campo magnético e a densidade.

Assim, esse sistema, que é um modelo de competição de interação isotrópica, pode ser caracterizado por um hamiltoniano em termos de um campo escalar $\rho(\vec{x})$, de modo que o termo quadrático no espaço recíproco pode ser escrito como:

$$H_0 = \int_\Lambda \frac{d^2Q}{(2\pi)^2} \rho(\vec{Q})(r_0 + A(Q - Q_0)^2 + ...)\rho(-\vec{Q}), \tag{166}$$

onde $\rho(\vec{Q})$ é justamente a densidade de estado calculada nesse estado. Os termos que ficam entre parênteses na expressão (166), emergem de uma expansão em série de Taylor em torno do mínimo do potencial Hartree-Fock U_{HF}, calculado no capítulo anterior. O primeiro termo desta expansão é $r_0 = U_{HF}(Q_0)$, o segundo termo é a segunda derivada do potencial U_{HF} com relação a Q calculado no respectivo mínimo Q_0, $A = \ddot{U}_{HF}(Q_0)$, e o "..."são os termos de ordem superior. A medida de integração $\int_\Lambda d^2Q \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \int_{Q_0-\Lambda}^{Q_0+\Lambda} dQQ$ e $\Lambda \sim \sqrt{\frac{|r_0|}{A}}$ é um cut-off onde a expansão do potencial Hartree-Fock até a ordem quadrática faz sentido. O termo A mede justamente a curvatura do potencial em torno do mínimo Q_0 e a elipse na equação 166 significa os termos de ordem superior em $(Q - Q_0)$.

Na teoria de Landau, o termo constante $r(T)$ depende da temperatura que, perto

da transição, pode ser considerada como $r \sim (T - T^*)$. A equação (166) representa apenas a energia do sistema perto do mínimo, portanto o $r_0 \sim -aT^*$ é uma estimação da temperatura crítica do sistema. Embora o resultado numérico não seja confiável, já que em principio estamos longe de transisão, acreditamos que sua dependência com o fator de preenchimento tenha informação relevante.

Na tabela 19, apresentamos os valores de r_0 e A, calculados numericamente, para diferentes fatores fracionários de preenchimento ν com os respectivos mínimos do potencial U_{HF}. Esses resultados estão perfeitamente de acordo com o comportamento do potencial Hartree-Fock, como evidenciado nos gráficos 1 e 2. Observe que, a medida que vou aumentando o preenchimento e consequentemente o nível de Landau, r_0 e A, se comportam de maneira diferente, veja as figuras 3 e 4.

Um detalhe importante é que o hamiltoniano 166, tem simetria $\rho \to -\rho$. No caso do efeito Hall, isto é válido apenas quando preenchemos o nível de Landau exatamente na metade. Nesse ponto, o sistema tem simetria de conjugação de carga que se reflete como uma simetria de Ising na equação (166). Por este motivo, mostramos os resultados numéricos para preenchimentos semi-inteiros. Se quisermos fazer um modelo para ν genérico deveríamos considerar termos que quebram a simetria de Ising, como por exemplo termos lineares ou cúbicos em ρ.

O fator de estrutura que surge desse modelo, é dado pela seguinte função de Green:

$$G_0(Q) = \frac{1}{r_0 + A(Q - Q_0)^2}. \tag{167}$$

Ela tem um máximo em $Q = Q_0$ com comprimento de correlação $\xi \sim \sqrt{\frac{A}{r}}$. Sendo assim, perto da criticalidade ($r \to 0$) a física é dominada por uma anel no espaço recíproco com o vetor de onda $Q \to Q_0$ e largura 2Λ.

Assim, uma vez que temos os termos r_0 e A bem definidos em nossa aproximação e, tomando como referência os trabalhos desenvolvidos por Barci e Stariolo (BARCI; STARIOLO, 2007)(BARCI; STARIOLO, 2009)(BARCI; STARIOLO, 2011), acreditamos ser possível uma análise detalhada sobre a transição de fase isotrópica-nemática no sistema de líquido Hall quântico. Para tal, consideraremos o nosso sistema submetido a uma temperatura $T \neq 0$, sendo também preciso, levarmos em consideração não apenas o termo livre demonstrado na equação (166), mas também, termos de ordem superior do tipo:

$$H_{int} = v \int (\prod_{i=1}^{4} \frac{d^2 Q_i}{(2\pi)^2}) \phi(\vec{Q}_i) ... \phi(\vec{Q}_4) \delta(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \vec{Q}_4), \tag{168}$$

onde v mede a intensidade da interação. Desse modo, a nova função de Green esperada a baixas temperaturas, tem que ter uma aparência semelhante a:

$$G(\vec{Q}) = \frac{1}{r + A(Q - Q_0)^2 + \alpha(\nu, T) Q^2 \cos(2\theta)}, \tag{169}$$

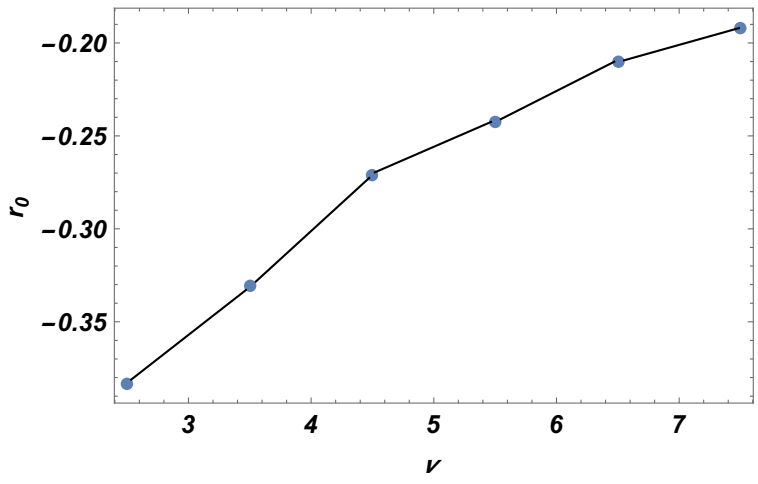
Figura 19 - Valores numéricos na aproximação Hartree-Fock

ν	Q_0	r_0	A
$\frac{5}{2}$	2.04484	−0.383089	0.087065
$\frac{7}{2}$	1.64485	−0.330354	0.170764
$\frac{9}{2}$	1.32714	−0.271376	0.267927
$\frac{11}{2}$	1.18132	−0.242519	0.364614
$\frac{13}{2}$	1.	−0.210368	0.551651
$\frac{15}{2}$	0.938062	−0.191904	0.647835

Legenda: Valores numéricos dos mínimos do potencial Hartree-Fock U_{HF}, dos parâmetros r_0 e A, calculados para diferentes ν. Para os preenchimentos $\frac{5}{2}$ e $\frac{7}{2}$, tem-se que o nível de Landau é $n = 1$, para os $\frac{9}{2}$ e $\frac{11}{2}$, $n = 2$ e para $\frac{13}{2}$ e $\frac{15}{2}$, considera-se $n = 3$.

Fonte: o autor, 2017.

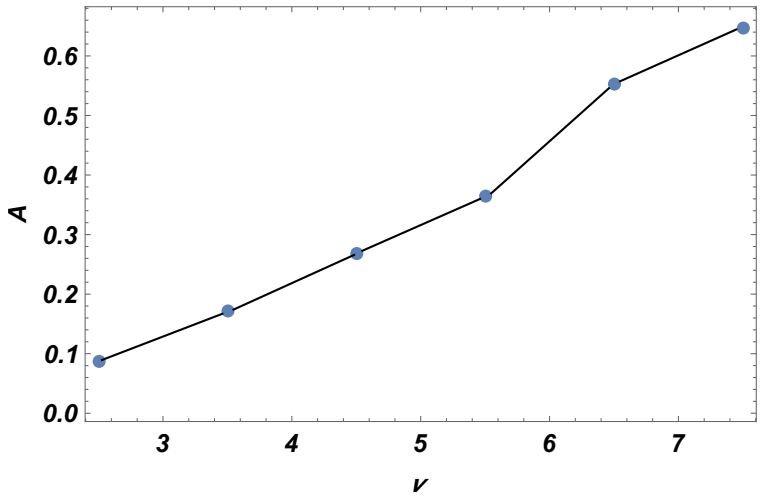
Gráfico 3 - Potencial Hartree-Fock em função do preenchimento



Legenda: Solução numérica de r_0 em função de ν.

Fonte: o autor, 2017.

Gráfico 4 - Curvatura do potencial Hartree-Fock versus preechimento



Legenda: Solução numérica de A em função de ν.
Fonte: o autor, 2017.

onde $\vec{Q} = (Q\cos\theta, Q\sin\theta)$, sendo θ o ângulo entre Q e Q_0, r será o r_0 renormalizado, calculado em uma aproximação Hartree-Fock de forma auto-consistente, α é um termo escalar nemático que estará em função do preenchimento dos níveis de Landau e da temperatura T. Para calculá-lo, é necessário estimar a constante de acoplamento v, da equação (168). Para isto temos que calcular a energia de cohesão E_{coh} dada pela eq. (140), proporcional ao quadrado do parâmetro de ordem de stripes $|\Delta(Q)|^2$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, consideramos um sistema de líquido Hall quântico em um campo magnético fraco, onde os níveis de Landau para $n \geq 2$ estão parcialmente ocupados por elétrons. Como o sistema não tem gaps para preenchimentos fracionários, a interação de Coulomb é não trivial, dada a grande degenerecência dos níveis de Landau. Para tratar o sistema de muitos-corpos interagentes, desenvolvemos uma aproximação de Hartree-Fock via teoria de campo-médio. O regime estudado é o de campos magnéticos fracos o suficiente para preencher níveis de Landau elevados. Por outro lado, o campo magnético é forte o suficiente para não destruir a quantização de Landau e evitar que a interação de Coulomb misture muitos níveis. Este é precisamente o regime onde fortes anisotropias na condutividade são observadas experimentalmente.

No primeiro capítulo fizemos uma introdução aos principais aspectos do efeito Hall, começando com o efeito clássico para depois descrever diferentes regimes do efeito Hall quântico. No final desse capítulo descrevemos os principais experimentos que servem de motivação a esta tese: a descoberta de anisotropias fortemente dependentes da temperatura para preenchimento de níveis de Landau elevados.

O segundo capítulo é a parte central desta tese. A partir de primeiros princípios, desenvolvemos um cálculo de hamiltoniano efetivo na aproximação de Hartree-Fock. Iniciamos o cálculo considerando uma base de um estado de uma partícula $|n, X\rangle$, cujos números quânticos referem-se ao nível de Landau e a coordenada do nosso sistema. Desta forma chegamos a um hamiltoniano de interação em termos de todos os níveis de Landau, como evidenciado na equação (119). A princípio, o nosso interesse foi o efeito das interações que ocorrem em um único nível de Landau, perto do potencial químico. Assim, através da aproximação HF, chegamos a um operador hamiltoniano $\hat{H}_{HF}$, vide equação (138), que é diagonal nos operadores de criação e destruição, $\hat{a}^{\dagger}_{nX_+}$ e $\hat{a}_{nX_+}$. Para lograr isto foi introduzido um parâmetro de ordem $\Delta(Q)$, assinalando que o nosso sistema reflete de alguma forma características de um estado CDW.

O resultado principal deste capítulo é o potencial Hartree-Fock U_{HF} em função do momento e do preenchimento ν, Eq. (154), cuja solução numérica foi apresentada nos gráficos 1 e 2. Podemos observar que, devido a uma competição entre o termo de Hartree e o termo de exchange, o potencial desenvolve um mínimo para um valor $Q_0 \neq 0$, o que representa uma tendência do sistema a produzir modulações de carga. Por outro lado, vemos que o potencial depende do módulo do momento $|\vec{Q}_0|$, proporcionando um potencial isotrópico, porém com uma escala de momentos bem determinada. Nosso resultado coincide com resultados prévios apresentados na ref. (KOULAKOV; FOGLER; SHKLOVSKII, 1996) para valores específicos do preenchimento, especialmente $\nu = \frac{9}{2}$ e $\frac{11}{2}$, centrados no nível de Landau $n = 2$ e $n = 3$. Concluímos então que a competição entre

o campo magnético que tende a formar condensados (níveis de Landau) e a repulsão de Coulomb de longo alcance, é a responsável pelas anisotropias observadas nos experimentos de Lilly (LILLY et al., 1999a).

Já no terceiro capítulo tentamos fazer uma conexão entre o cálculo microscópico do potencial de Hartree-Fock e teorias efetivas para a transição isotrópica-nemática. A observação principal é que o potencial efetivo tem uma clara tendência à formação de domínios em uma escala de momentos Q_0. Porém, é sabido que estruturas tipo stripes em duas dimensões são instáveis. Resta então a possibilidade de desenvolver ordem orientacional, o que corresponderia a uma fase nemática quântica. Fazendo uma expansão do potencial de HF para momentos perto do mínimo, podemos observar que nosso modelo pode ser mapeado a um modelo de Brazovskii e descreve uma transição isotrópica-nemática. Podemos considerar então que, de forma qualitativa, o modelo apresentado descreve uma transição de fase nemática. Porém, para a determinação completa do parâmetro de ordem nemático em função da temperatura e do fator de preenchimento, é necessária a estimação da constante de acoplamento a uma ordem maior da calculada no capítulo 2.

Contudo, para um melhor aprofundamento desta teoria, e enfatizando a sua importância para um melhor entendimento do comportamento das fases quânticas anisotrópicas em líquido Hall quântico, apresentamos as seguintes perspectivas:

- Estudar as diferentes fases não-homogêneas que o sistema apresenta quando os níveis de Landau são preenchidos parcialmente(FRADKIN; KIVELSON, 1999)(FOGLER; KOULAKOV; SHKLOVSKII, 1996).

- Completar o desenvolvimento da teoria efetiva para estudar a transição de fase quântica isotrópica-nemática. Para isso é importante analisar flutuações além da aproximação Hartree-Fock.

- Abordar os efeitos de temperatura na determinação do potencial efetivo.

Uma perspectiva importante é o estudo da fenomenologia abordada nesta tese em novos compostos de carbono como, por exemplo, o grafeno. Recentemente, observou-se experimentalmente que as propriedades de magnetotransporte do grafeno, crescido em uma superfície de SiC, apresenta uma anisotropia, que até então não era observada (SCHUMANN et al., 2012). Tal anisotropia aparece nas medidas das resistividades longitudinais, quando se submete esse material a altos campos magnéticos. Mas diferente, por exemplo, do que ocorre na observação do QHE na heteroestrutura de $GaAs/GaAlAs$, que surge quando se têm além de altos campos magnéticos, temperaturas extremamente baixas, no grafeno, o efeito Hall quântico é observado em alta temperatura. Esse efeito Hall quântico anisotrópico que se observou no grafeno, somado às surpreendentes propriedades eletrônicas deste material, torna-o um excelente laboratório para o desenvolvimento de teorias e aplicações, e tem despertado um grande interesse em pesquisa na matéria condensada.

Uma outra característica muito interessante, é que se tem observado a formação de fases de stripes neste material. Então, também como perspectiva futura, temos o objetivo de estudar a existência de fases anisotrópicas em líquido Hall quântico no grafeno.

REFERÊNCIAS

ALEINER, I. L.; GLAZMAN, L. I. Two-dimensional electron liquid in a weak magnetic field. *Surface Science*, Estados Unidos, n. 361/362, p. 485–488, 1995.

ANDO, T. Electron Localization in a Two-Dimensional System in Strong Magnetic Fields. I. Case of Short-Range Scatterers. *Journal of the Physical Society of Japan*, Japão, v. 52, p. 1740, may 1983.

ANDO, T. Electron Localization in a Two-Dimensional System in Strong Magnetic Fields. II. Long-Range Scatterers and Response Functions. *Journal of the Physical Society of Japan*, Japão, v. 53, p. 3101, sep 1984.

ANDO, T. Electron Localization in a Two-Dimensional System in Strong Magnetic Fields. III. Impurity-Concentration Dependence and Level-Mixing Effects. *Journal of the Physical Society of Japan*, Japão, v. 53, p. 3126, sep 1984.

ANDO, T.; FOWLER, A. B.; STERN, F. Electronic properties of two-dimensional systems. *Reviews of Modern Physics*, Estados Unidos, v. 54, p. 437–672, abr. 1982.

ANDO, T.; MATSUMOTO, Y.; UEMURA, Y. Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System. *Journal of the Physical Society of Japan*, Japão, v. 39, n. 2, p. 279–288, ago. 1975.

AOKI, H.; ANDO, T. Effect of localization on the hall conductivity in the two-dimensional system in strong magnetic fields. *Solid State Communications*, [S. I.], v. 38, p. 1079–1082, jun. 1981.

AOKI, H.; KAMIMURA, H. Anderson localization in a two dimensional electron system under strong magnetic fields. *Solid State Communications*, [S. I.], v. 21, p. 45–47, jan. 1977.

BARCI, D. G.; ARENAS, Z. G. Metastable anisotropy orientation of nematic quantum Hall fluids. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 78, n. 8, p. 085303, ago. 2008.

BARCI, D. G.; FRADKIN, E. Theory of the quantum Hall Smectic Phase. II. Microscopic theory. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 65, n. 24, p. 245320, jun. 2002.

BARCI, D. G. et al. Theory of the quantum Hall Smectic Phase. I. Low-energy properties of the quantum Hall smectic fixed point. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 65, n. 24, p. 245319, jun. 2002.

BARCI, D. G.; OXMAN, L. E. Strongly correlated fermions with nonlinear energy dispersion and spontaneous generation of anisotropic phases. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 67, n. 20, p. 205108, maio 2003.

BARCI, D. G.; REYES, D. Pomeranchuk-nematic instability in the presence of a weak magnetic field. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 87, n. 7, p. 075147, fev. 2013.

BARCI, D. G.; RIBEIRO, L.; STARIOLO, D. A. Nematic phase in two-dimensional frustrated systems with power-law decaying interactions. *Phys. Rev. E.*, Estados Unidos, v. 87, n. 6, p. 062119, jun. 2013.

BARCI, D. G.; STARIOLO, D. A. Competing Interactions, the Renormalization Group, and the Isotropic-Nematic Phase Transition. *Physical Review Letters*, Estados Unidos, v. 98, n. 20, p. 200604, maio 2007.

BARCI, D. G.; STARIOLO, D. A. Orientational order in two dimensions from competing interactions at different scales. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 79, n. 7, p. 075437, fev. 2009.

BARCI, D. G.; STARIOLO, D. A. Microscopic approach to orientational order of domain walls. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 84, n. 9, p. 094439, set. 2011.

BARCI, D. G. et al. Competition between Pomeranchuk instabilities in the nematic and hexatic channels in a two-dimensional spinless Fermi fluid. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 78, n. 3, p. 035114, jul. 2008.

BRAZOVSKII, S. A. Phase transition of an isotropic system to a nonuniform state. *Sov. Phy.-JETP*, Rússia, v. 41, n. 1, p. 85–89, january 1975.

BURGT, M. van der et al. Magnetotransport in a pseudomorphic $GaAs/Ga_{0.8}In_{0.2}As/Ga_{0.75}Al_{0.25}As$ heterostructure with a Si δ-doping layer. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 52, p. 12218–12231, out. 1995.

CARUBELLI, M. et al. Spin reorientation transition and phase diagram of ultrathin ferromagnetic films. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 77, n. 13, p. 134417, abr. 2008.

EMERY, V. J. et al. Quantum Theory of the Smectic Metal State in Stripe Phases. *Physical Review Letters*, Estados Unidos, v. 85, n. 10, p. 2160–2163, set. 2000.

FOGLER, M. M.; KOULAKOV, A. A.; SHKLOVSKII, B. I. Ground state of a two-dimensional electron liquid in a weak magnetic field. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 54, p. 1853–1871, jul. 1996.

FRADKIN, E.; KIVELSON, S. A. Liquid-crystal phases of quantum Hall systems. *Phys. Rev. B*, Estados Unidos, v. 59, n. 12, p. 8065–8072, 1999.

FRADKIN, E. et al. Nematic Phase of the Two-Dimensional Electron Gas in a Magnetic Field. *Physical Review Letters*, Estados Unidos, v. 84, n. 9, p. 1982–1985, fev. 2000.

GERSON, F. J. *Ferromagnetismo no regime Hall quântico inteiro via teoria do funcional de densidade*. 2011. 137 p. Tese (Doutorado em Física) — Universodade de São Paulo, São Carlos, 2011.

GIULIANI, G.; VIGNALE, G. *Quantum Theory of the Electron Liquid*. 1. ed. New York: Cambridge University Press, 2005. 798 p.

GRADSHTEYN, I. S. et al. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7 ed.. ed. USA: Elsevier, 2007. 1171 p.

HALDANE, F. D. M. Luttinger liquid theory of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless fermi gas. *J. Phys. C: Solid State Phys*, Grãn-Bretanha, v. 14, p. 2585–2609, 1981.

JANBEN, M. *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*. Tokyo: VCH, 1994. 296 p.

KIVELSON, S. A.; FRADKIN, E.; EMERY, V. J. Electronic liquid-crystal phases of a doped Mott insulator. *Nature*, Estados Unidos, v. 393, p. 550–553, jun. 1998.

KLITZING, K. von; DORDA, G.; PEPPER, M. New method for high accuracy determination of the fine structure constant based on quantized Hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, Estados Unidos, v. 45, p. 494–497, 1980.

KOULAKOV, A. A.; FOGLER, M. M.; SHKLOVSKII, B. I. Charge density wave in two-dimensional electron liquid in weak magnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, Estados Unidos, v. 76, p. 499–502, 1996.

LANDAU, L. D. The theory of a fermi liquid. *Soviet Physics JETP*, Rússia, v. 3, n. 6, p. 920–925, jan. 1990.

LAUGHLIN, R. B. Quantized Hall conductivity in two-dimensions. *Phys. Rev.*, Estados Unidos, B23, p. 5632–5733, 1981.

LAUGHLIN, R. B. Anomalous quantum Hall effect - An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. *Physical Review Letters*, Estados Unidos, v. 50, p. 1395–1398, maio 1983.

LAWLER, M. J. et al. Nonperturbative behavior of the quantum phase transition to a nematic Fermi fluid. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 73, n. 8, p. 085101, fev. 2006.

LEGGETT, A. J. Theory of a superfluid fermi liquid. 1. general formalism and static properties. *Phys. Rev.*, Estados Unidos, v. 140, n. 6A, p. A1869–A1888, 1965.

LEGGETT, A. J. Interpretation of recent results on he^3 below 3 mk: A new liquid phase? *Physical Review Letters*, Estados Unidos, v. 29, n. 18, p. 1227–1230, oct 1972.

LILLY, M. P. et al. Anisotropic States of Two-Dimensional Electron Systems in High Landau Levels: Effect of an In-Plane Magnetic Field. *Physical Review Letters*, Estados Unidos, v. 83, n. 4, p. 824–827, jul. 1999.

LILLY, M. P. et al. Evidence for an Anisotropic State of Two-Dimensional Electrons in High Landau Levels. *Phys. Rev. Lett.*, Estados Unidos, v. 82, n. 2, p. 394–397, 1999.

NICOLAO, L.; STARIOLO, D. A. Langevin simulations of a model for ultrathin magnetic films. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 76, n. 5, p. 054453, ago. 2007.

OGANESYAN, V.; KIVELSON, S. A.; FRADKIN, E. Quantum theory of a nematic Fermi fluid. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 64, n. 19, p. 195109, nov. 2001.

PAALANEN, M. A.; TSUI, D. C.; GOSSARD, A. C. Quantized Hall effect at low temperatures. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 25, p. 5566–5569, abr. 1982.

PRANGE, R. E. Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 23, p. 4802–4805, maio 1981.

SCHUMANN, T. et al. Anisotropic quantum Hall effect in epitaxial graphene on stepped SiC surfaces. *Phys. Rev. B.*, Estados Unidos, v. 85, n. 23, p. 235402, jun. 2012.

STARIOLO, D. A.; BARCI, D. G. Orientational order in systems with competing interactions. Brasil, v. 246, p. 012021, sep 2010.

TAPASH, C.; PEKKA, P. *The Quantum Hall Effects*. 2 ed.. ed. Germany: Springer, 1995. 302 p.

TEIXEIRA, A. C. Ribeiro; STARIOLO, D. A.; BARCI, D. G. Glassy behavior of two-dimensional stripe-forming systems. *Phys. Rev. E.*, Estados Unidos, v. 87, n. 6, p. 062121, jun. 2013.

TSUI, D. C.; STORMER, H. L.; GOSSARD, A. C. Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. *Phys. Rev. Lett.*, Estados Unidos, v. 48, p. 1559–1562, 1982.

YOSHIOKA, D. *The Quantum Hall Effect*. Tokyo: Springer, 2002. 200 p.