



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologias e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Rodolfo Silva da Rocha

**Estudo da condensação de píons usando o grupo de
renormalização funcional**

Rio de Janeiro

2020

Rodolfo Silva da Rocha

Estudo da condensação de píons usando o grupo de renormalização funcional



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Letícia Faria Domingues Palhares

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

R672 Rocha, Rodolfo Silva da.
Estudo da condensação de píons usando o grupo de renormalização funcional / Rodolfo Silva da Rocha. - 2020.
83 f.: il.

Orientadora: Letícia Faria Domingues Palhares.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria quântica de campos - Teses. 2. Simetria (Física) - Teses. 3. Grupo de renormalização - Teses. I. Palhares, Letícia Faria Domingues. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Rodolfo Silva da Rocha

Estudo da condensação de píons usando o grupo de renormalização funcional

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 01 de outubro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Leticia Faria Domingues Palhares (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Cristian Villavicencio
Universidad del Bío-Bío

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Luca Roberto Augusto Moriconi
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2020

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a minha orientadora Letícia pela sua paciência e a sua incansável dedicação. Tudo começou nas primeiras aulas de Teoria Clássica de Campos. Uma didática exemplar e um conhecimento sem fim me levaram a querer conhecer mais a professora Letícia e saber com o que ela trabalhava. Após as aulas, ou até mesmo antes, sempre estava disposta a tirar as minhas dúvidas. Perdi as contas das incansáveis vezes que fui até a sua sala para tirar dúvidas da minha apresentação e você sempre disposta a me ensinar. Muito obrigado! Já no mestrado, após muitas conversas, decidiu trabalhar comigo, mesmo sabendo que o meu tempo era limitado. Fiquei muito feliz quando aceitou. No decorrer do mestrado, comecei a ter alguns problemas e a pessoa Letícia entrou em cena. Foram muitas perguntas sinceras "Rodolfo, você entendeu mesmo? Como você está? Se você não cuidar da sua saúde, não consegue trabalhar. Alimente-se". Você é muito humana! Em discussões sobre física. entre algumas explicações complicadas, o meu silêncio dizia muita coisa. Ela percebia e volta a explicar quantas vezes era necessário. Me proporcionou viagens a congressos para fazer com que eu tenha o contato direto com a comunidade científica e assim me incentivar ainda mais. Seus conselhos foram fundamentais para a minha formação. O que eu tenho a dizer é que hoje você é um grande exemplo para mim, assim como grandes mulheres que me incentivaram e incentivam até hoje. Muito obrigado por tudo. Gratidão.

Agradeço aos amigos Rui Aquino e Nathan Silvano pelas incansáveis risadas que damos até hoje e pelas discussões de física que foram fundamentais para minha formação. De forma singular, ao Rui por ter me ensinado a usar o Latex e a encontrar artigos na internet.

Agradeço aos amigos Apóllo Vitalino, Carlos Stivens e Kevin Santos por fazer os congressos serem mais divertidos. De forma especial ao amigo Carlos Stivens que além das discussões de física, pela incansável paciência em me ajudar a construir gráficos no Mathematica. Sua ajuda foi fundamental.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação nas disciplinas em que cursei.

Agradeço a todos os amigos de infância, amigos que fiz na graduação, amigos do trabalho, amigos do eSports e amigos de mestrado pela confiança que depositam em mim.

Agradeço a minha família por tudo: Cirley Santos, Vanildo Rocha e Pedro Rocha. Amo vocês.

RESUMO

ROCHA, R.S. *Estudo da condensação de píons usando o grupo de renormalização funcional*. 2020. 83 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

A descrição completa da matéria fortemente interagente requer o conhecimento integral da estrutura de fases gerada por uma teoria quântica de campos. Em muitos casos, analisar a teoria fundamental que descreve suas interações em um meio é bastante complicado, fazendo com que seja interessante utilizar teorias alternativas que reproduzem ao menos em parte as características físicas da teoria fundamental. As teorias efetivas nos fornecem um ferramental matemático e físico poderoso para o limite em que as aplicações da teoria fundamental – a Cromodinâmica Quântica (QCD) no caso das Interações Fortes – se tornam muito complexas (WEINBERG, 1979)(KAPLAN, 1995). No regime denso da matéria, a principal técnica não-perturbativa, as simulações de Monte Carlo na rede (AARTS, 2016), apresenta um problema em aberto chamado de Problema do Sinal devido a um acoplamento de um potencial químico específico. Porém, em algumas situações, as simulações de Monte Carlo não apresentam tal problema, fornecendo resultados satisfatórios na descrição de diversos fenômenos físicos observáveis como, por exemplo, a matéria densa de isospin que poderia existir no interior de estrelas compactas (SCHMITT, 2010). Desta forma, o estudo de teorias efetivas em meios com potenciais químicos de isospin torna-se ainda mais relevante, pois o Problema do Sinal não está presente. Nesta dissertação, investigaremos, utilizando técnicas não-perturbativas, a transição de fase de condensação de Bose-Einstein em uma teoria efetiva para bósons a densidade finita e temperatura nula. Utilizaremos o modelo efetivo chamado Modelo σ Linear, para descrevermos aspectos de simetria do vácuo da QCD e assim estudar a transição de fase. Finalmente, implementaremos o Grupo de Renormalização Funcional (GRF) para estimar a influência de efeitos não-perturbativos.

Palavras-chave: Teoria quântica de campos a temperatura e densidade finitas. Modelos efetivos. Transições de fase.

ABSTRACT

ROCHA, R.S. *Study of the condensation of pions using the Functional Renormalization Group*. 2020. 83 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

The full description of strongly interacting matter requires complete knowledge of the phase structure generated by a quantum field theory. In many cases, analyzing the fundamental theory that describes their interactions in a medium is quite complicated, so that it becomes interesting to use alternative theories that reproduce at least part of the physical characteristics of the fundamental theory. Effective theories provide us with a powerful mathematical and physical tool for the limit in which the application of the fundamental theory – Quantum Chromodynamics (QCD) in the case of Strong Interactions – becomes extremely complex (WEINBERG, 1979)(KAPLAN, 1995). In the dense regime of matter, the main nonperturbative technique, lattice Monte Carlo simulations(AARTS, 2016), presents an open problem called the Sign Problem, due to the coupling of a specific chemical potential. However, in some situations, Monte Carlo simulations do not present such a problem, providing satisfactory results for various observable physical phenomena such as, for example, the dense isospin matter that could exist inside compact stars(SCHMITT, 2010). Thus, the study of effective theories in environments with non-zero chemical potentials is even more relevant because it presents systems in which the Signal Problem is not present. In this dissertation, we will investigate, using non-perturbative techniques, the phase transition of Bose-Einstein condensation in an effective theory for bosons at finite density and zero temperature. We will use the effective model called Linear σ Model to describe aspects of the symmetry of the vacuum of QCD and thus study the phase transition. Finally, we will implement the Functional Renormalization Group (FRG) to estimate the influence of non-perturbative effects.

Keywords: Quantum field theory at finite temperature and density. Effective models.
Phase transitions.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	7
1	ASPECTOS DA SIMETRIA QUIRAL	10
1.1	Introdução à Teoria Quântica de Campos	10
1.2	Simetrias	14
1.2.1	<u>Corrente de Noether e a simetria quiral</u>	15
1.3	Simetria Quiral - Quebra espontânea e explícita	20
1.4	Modelo Sigma Linear	24
2	ALGUNS ELEMENTOS DE TEORIA DE CAMPOS EM UM MEIO	27
2.1	A função de partição via integral de trajetória	28
2.2	Condensação de Bose-Einstein Relativística - Campo escalar complexo	33
2.2.1	<u>Limite não-relativístico</u>	40
2.2.2	<u>Limite ultra-relativístico</u>	42
3	CONDENSAÇÃO DE BOSE-EINSTEIN RELATIVÍSTICA DE PÍONS	44
3.1	O Modelo Sigma Linear em um meio denso de isospin	46
3.2	Ação efetiva na aproximação clássica	47
3.3	Espectro clássico de quasi-partículas	49
4	GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO FUNCIONAL APLICADO À CONDENSAÇÃO DE PÍONS	55
4.1	Equação de fluxo exata	57
4.2	Toy model de condensação de píons	62
4.3	Análise do FRG na LPA para o condensado de píons	66
4.3.1	<u>Resultados numéricos a temperatura zero</u>	72
	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	74
	REFERÊNCIAS	76
	APÊNDICE A – Cálculo da temperatura crítica na condensação de Bose-Einstein para campo escalar complexo no limite ultrarelativístico	79
	APÊNDICE B – Cálculo de somas de Matsubara	81

INTRODUÇÃO

A termodinâmica nos fornece uma descrição geral da matéria no equilíbrio, a partir de relações entre grandezas macroscópicas como energia livre, energia interna, entropia, entalpia, pressão, dentre outras, utilizando quantidades externas como temperatura e potenciais químicos (FERMI, 1956). Quando a descrição macroscópica não é suficiente para um dado sistema físico, a termodinâmica necessita de um auxílio de outras descrições que nos ajudem a entender o comportamento termodinâmico e microscópico da matéria. A Mecânica Estatística é a primeira que estudamos (BELLAC et al., 2004; LANDAU; LIFSHITZ, 1980). A partir da descrição microscópica de sistemas físicos, podemos entender a composição da matéria, simetrias, dimensão, interações e etc. O tratamento estatístico é fundamental para a compreensão de sistemas de muitas partículas onde a descrição completa de cada grau de liberdade é bastante complicada. A mecânica estatística é utilizada tanto para uma descrição clássica de um sistema quanto uma descrição quântica, e grandes progressos nessa área foram feitos por Boltzmann e Maxwell (REIF, 2009). A descrição da matéria em uma escala microscópica pode ser satisfatória utilizando a mecânica clássica, onde somos levados à compreensão de temperatura, entropia, número de partículas e potencial químico. Entretanto, a mecânica clássica apresenta limitações como a instabilidade do átomo e a catástrofe ultravioleta (KAPUSTA, 1993) encontrada pela aplicação da mesma, sendo assim necessária a utilização do formalismo da mecânica quântica. Porém, a utilização do formalismo da mecânica quântica como descrição de estados também é limitada. A descrição de estados físicos quânticos associados a um Hamiltoniano, H , limita-nos em geral a um sistema de poucas partículas, isso porque sistemas com um número de partículas elevado, dentro de nosso entendimento, são complicados de serem resolvidos. A partir desse obstáculo, físicos do século XX como Planck, Fermi, Bose e Einstein começam a conseguir enxergar a Mecânica Estatística Quântica para a descrição de sistemas quânticos de muitas partículas. Toda essa discussão é bem fundamentada para sistemas não-relativísticos. Sistemas relativísticos nos trazem mais complexidade necessitando assim de uma física mais completa.

Sistemas relativísticos nos levam a perguntas que são complicadas de serem respondidas e que motivam a comunidade científica para o melhor entendimento da natureza. Perguntas feitas em (KAPUSTA, 1993) como: "O que acontece quando a matéria comum é tão compactada que os elétrons formam um gás degenerado relativístico, como em uma estrela anã branca? O que acontece quando a matéria é comprimida ainda mais para que os núcleos atômicos se sobreponham para formar matéria nuclear superdensa, como em uma estrela de nêutrons? O que acontece quando a matéria nuclear é aquecida a temperaturas tão altas que os núcleons e os íons se fundem em quarks e glúons, como nas colisões nucleares de alta energia?"

movimentam até hoje a comunidade científica para o entendimento das interações fortes. Neste trabalho não estaremos diretamente preocupados em responder essas perguntas mas sim em estudar um problema específico, relacionado a uma estrutura de simetria, a simetria quiral, que é importante para descrever a QCD e suas aplicações.

A teoria fundamental das interações fortes apresenta uma estrutura de simetrias e de fases rica em fenômenos físicos (WEINBERG, 1995). Desta forma, para a compreensão das fases presentes na QCD entender sua estrutura de simetrias é fundamental. O grande interesse do estudo dessas simetrias está em suas quebras. O vácuo da QCD engloba quebras de simetrias relevantes como: quebra espontânea, explícita, aproximada e quântica.

Um dos focos dos modelos usados nesta dissertação é entender uma das simetrias fundamentais no estudo das Interações Fortes: a **simetria quiral** e suas quebras espontânea e explícita, além de fornecer um arcabouço de técnicas de teoria de campos, como o formalismo funcional e o grupo de renormalização, para que em um trabalho posterior as mesmas possam ser usadas.

A não realização da simetria quiral no estado de vácuo da QCD é caracterizada por excitações de partículas, chamadas píons, cuja massa é muito pequena quando comparada à escala de hádrons típica (Yao et al., 2006). O pión está associado a três partículas subatômicas: π^0 , π^+ e π^- onde cada pión é composto por um quark e um antiquark. Ele foi previsto muito antes de sua observação. Na década de 1930 o físico japonês Yukawa, vencedor do prêmio Nobel em 1949, postulou que deveria haver uma partícula mediadora que garantia a estabilidade do núcleo atômico, visto que prótons, partículas de carga elétrica positiva, ficavam juntos dentro da estrutura atômica. Na década de 1940, os píons enfim foram observados, comprovando assim o postulado de Yukawa. Tal observação resultou no Nobel de 1950, sendo que grandes físicos, como o brasileiro César Lattes, contribuíram para essa descoberta.

A análise da matéria sob condições extremas, como no interior de estrelas compactas, envolve um conjunto de fenômenos físicos interessantes de serem estudados. Neste trabalho em andamento, descreveremos um fenômeno físico a partir de técnicas não perturbativas, onde esse sistema físico é o condensado de Bose Einstein relativístico de píons em meio denso de isospin. Meios densos de isospin são interessantes de serem estudados por não apresentarem o problema do sinal, presente em sistemas com densidade bariônica, permitindo a comparação direta com dados de QCD na rede. No primeiro capítulo deste trabalho, como introdução, fazemos uma breve revisão do formalismo de teoria quântica de campos. Na seção 1.2 descreveremos alguns tipos de simetrias e a aplicação do formalismo de correntes axial e vetorial em um sistema de férmions analisando assim os seus efeitos na estrutura da Lagrangeana sem massa e com massa. Na seção 1.3 analisaremos a quebra espontânea e explícita da simetria quiral. Por fim, na seção 1.4 introduziremos o Modelo Sigma Linear ($M\sigma L$) para a descrição dos efeitos da quebra explícita e espontânea da simetria quiral.

No capítulo 2 introduzimos a Teoria de campos em um meio com a construção da função de partição a partir do formalismo funcional. Logo depois, como introdução a nossa discussão, estudamos o condensado de Bose-Einstein de um campo complexo carregado e analisamos a temperatura crítica de uma transição de fase no limite não-relativístico e no limite ultrarelativístico. A transição quiral a densidade finita de isospin nas Interações Fortes é investigada no contexto do Modelo σ Linear no capítulo 3.

No capítulo 4 utilizamos o grupo de Renormalização Funcional como um arcabouço para cálculos de efeitos não perturbativos em teoria quântica de campos com o objetivo de encontrarmos quantidades como massa efetiva e o valor crítico de potencial químico que caracterizará uma transição de fase de segunda ordem de condensação. Esse formalismo envolve a construção de uma ação efetiva que interpola entre a ação clássica e a ação efetiva completa. Isso nos levará a um conjunto de equações diferenciais que devem ser resolvidas. A solução desse sistema é nada trivial, visto que sua solução nos dará a TQC de forma completa. Com isso, precisamos de algumas aproximações para que consigamos resolvê-las. Utilizamos a Aproximação de Potencial Local (LPA) para assim chegarmos em três equações diferenciais cuja solução exige a utilização de técnicas numéricas. Com a utilização das funções pré-definidas do software Mathematica, como NDSolve, encontramos o valor crítico do potencial químico.

As seguintes referências (KOCH, 1997),(KAPUSTA, 1993) e (PALHARES, 2012) foram utilizadas como texto base para elaboração deste trabalho.

1 ASPECTOS DA SIMETRIA QUIRAL

Neste capítulo, inicialmente, será estudada a transição de uma teoria clássica para uma teoria quântica de campos. A transição do espaço de coordenadas para campos que dependem dessas coordenadas será brevemente discutida. Tal transição é importante para um estudo das simetrias presentes numa teoria quântica de campos, em especial a simetria quiral, que é a simetria base para a construção de modelos de píons (vide, por exemplo, (KOCH, 1997)) e o estudo da transição de fase de condensação destes. Abordaremos a conservação parcial da corrente axial para que possamos entender melhor as quebras espontânea e explícita da simetria quiral dentro do Modelo Sigma Linear (GELL-MANN; LEVY, 1960). Este último é um modelo efetivo para as Interações Fortes em energias intermediárias que consegue reproduzir de forma clara e mais simples as rupturas de simetria.

1.1 Introdução à Teoria Quântica de Campos

Nessa seção faremos uma breve revisão dos fundamentos da teoria quântica de campos que são necessários para um bom entendimento da simetria quiral.

A formulação fundamental mais conveniente para descrever uma teoria de campos é a formulação lagrangeana (GOLDSTEIN, 2002). Sabemos da Mecânica Clássica que, para descrevermos a equação de movimento de um sistema de partícula livre, devemos utilizar o Princípio de Extrema Ação (GOLDSTEIN, 2002):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \delta S = 0, \quad (1)$$

onde S é a ação e L é a função lagrangeana dada pela diferença entre a energia cinética T e a energia potencial V , $L = T - V$, definida no espaço de coordenadas q e suas velocidades \dot{q} . Com a extremização da ação, encontramos a equação fundamental para determinar as equações de movimento de um sistema na mecânica lagrangeana, a equação de Euler-Lagrange definida como (GOLDSTEIN, 2002):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (2)$$

Se formos para o espaço de campos, as coordenadas $q(t)$ são substituídas por campos $\phi(x, t)$ e as velocidades, \dot{q} , pelas derivadas dos campos e toda a formulação matemática da teoria deve ser alterada.

O campo Φ , pode ser determinado em cada ponto do espaço tempo da seguinte forma: $\Phi = (\Phi_1(x_1, t), \Phi_2(x_2, t), \dots)$. Isso equivale a termos um número infinito (contínuo) de graus de liberdade:

$$q \rightarrow \Phi(x, t), \quad (3)$$

$$\dot{q} \rightarrow \partial_\mu \Phi(x, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}, \quad (4)$$

com $\mu = 0, 1, 2$ e 3 , logo $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. A métrica utilizada será $g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$.

A teoria de campos é necessária para a descrição de sistemas com um número infinito, contínuo de graus de liberdade. A utilização de um campo $\Phi(x, t)$ nos leva a um grau de liberdade em cada ponto x do espaço.

No espaço dos campos, a lagrangeana é definido como sendo a integral de uma densidade de Lagrangeana onde a mesma depende dos campos e de suas derivadas:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\Phi(x, t), \partial_\mu \Phi(x, t), t). \quad (5)$$

Tais campos são invariantes por translação dependendo somente de um ponto no espaço-tempo x^μ tornando então uma teoria de campos local¹. A ação \mathcal{S} é dada pela integral de uma densidade de lagrangeana, com a medida de integração definida no espaço-tempo quadridimensional de Minkowski:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(\Phi(x, t), \partial_\mu \Phi(x, t), t). \quad (6)$$

Assim como a Lagrangeana e a ação, a equação de Euler-Lagrange também é modificada. E para isso, assim como no espaço de coordenadas, uma variação nula da ação é exigida para que consigamos encontrar as equações de movimento. Variar a ação implica numa variação dos campos, ou seja, $\delta\mathcal{S} = 0$ origina-se de

$$\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi, \quad (7)$$

$$\partial_\mu \Phi \rightarrow \partial_\mu \Phi + \delta(\partial_\mu \Phi), \quad (8)$$

¹ A escolha de uma teoria de campos local para o estudo de sistemas relativísticos, onde o postulado de localidade da relatividade especial é de extrema importância, nos leva a um caminho mais simples. Pode-se escolher uma teoria não local, porém, o caminho é necessariamente mais complicado por natureza (RAMOND, 1997).

onde:

$$\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu(\delta\Phi). \quad (9)$$

Variando a ação, temos:

$$\delta\mathcal{S} = \int d^4x \delta\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, t), \quad (10)$$

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_\mu \Phi + \delta(\partial_\mu \Phi), t) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, t). \quad (11)$$

Fazendo uma expansão de Taylor em torno de $\delta\phi = 0$, supondo que a variação dos campos na fronteira da teoria do espaço tempo é nula, teremos que:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi) \right] - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, t), \\ \delta\mathcal{S} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Integrando por partes em (12), obtemos:

$$\delta\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right) \delta\Phi + \int_{t_1}^{t_2} \int d^3x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta\Phi \right]. \quad (13)$$

O segundo termo da eq. (13) é nulo, pois é um termo de superfície, e exigimos que $\delta\Phi$ seja nulo na borda (RAMOND, 1997). Fazendo $\delta\mathcal{S} = 0$, temos finalmente a equação de Euler-Lagrange para o campo ² ϕ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = 0. \quad (14)$$

O momento canonicamente conjugado é uma quantidade importante quando tratamos uma teoria quântica. A partir dele, conseguimos encontrar as relações de comutação que são exigidas na quantização da teoria, estabelecendo assim uma álgebra que define como o momento canônico se relaciona com os campos. No espaço de coordenadas, o mesmo é definido como sendo a derivada da lagrangeana com relação à velocidade, \dot{q} . Já para a teoria de campos, o momento canonicamente conjugado é (PESKIN, 2018):

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi(x)/\partial t)}, \quad (15)$$

² Se estivermos lidando com uma teoria com mais de um campo, como no caso dos modelos de píons que veremos mais a diante, a equação (14) tem a mesma forma, porém, adquire um índice que rotula os diferentes campos.

e as relações de comutação são dadas por (PESKIN, 2018):

$$[\Phi(x, t), \Phi(x', t)] = 0, \tag{16}$$

$$[\Pi(x, t), \Pi(x', t)] = 0, \tag{17}$$

$$[\Pi(x, t), \Phi(x', t)] = -i\delta^3(x - x'). \tag{18}$$

Escolhemos estas relações de comutação, pois, ao longo do trabalho, estaremos estudando bósons e não férmions. Para um teoria que envolve férmions, as relações de comutação são substituídas pela anticomutação entre o momento canônico e o campo.

1.2 Simetrias

As simetrias desempenham um papel importante na física e, em especial, na teoria quântica de campos. A escolha de uma simetria específica limita, por exemplo, as possíveis interações. Podemos classificar as simetrias em:

- Simetria Interna - associada a uma transformação no espaço interno dos campos, por exemplo: a simetria de calibre;
- Simetria do espaço tempo - associada a uma transformação do espaço-tempo, por exemplo: as simetrias de Lorentz e Poincaré. Além disso, cada simetria pode ser classificada como simetria local – transformação de simetria dependente das coordenadas x^μ – ou simetria global – transformação não dependente das coordenadas x^μ , ou seja, é a mesma para qualquer ponto no espaço-tempo. A invariância da ação sob uma dessas transformações determina a simetria do sistema.

A degenerescência dos níveis de energia de um determinado sistema quântico está relacionada com as simetrias da teoria. Após a descoberta do nêutron em 1932, Heisenberg propôs o conceito de Isospin. A motivação dessa proposta vem da comparação entre a massa do nêutron e a massa do próton, que são aproximadamente iguais (WEINBERG, 1995): $m_p = 938,28 \text{ MeV}/c^2$, $m_n = 939,57 \text{ MeV}/c^2$. Essa quase degenerescência da massa, ou degenerescência aproximada, levou os físicos da época, como Heisenberg e Wigner, a se questionarem sobre a existência de uma simetria aproximada, visto que o próton e o nêutron se comportam de maneira semelhante e que a única diferença entre eles está em sua carga elétrica. Assim como o spin, o isospin também está associado a uma transformação do grupo $SU(2)$, porém nesse espaço dos campos, levando por exemplo um próton em um nêutron (ou um quark up em um down em um modelo de mais alta energia). Veremos mais adiante a importância desse conceito juntamente com a simetria quiral, cuja quebra está relacionada à existência do condensado quiral. Além disso, estudaremos o condensado de píons, que pode surgir em um meio com densidade de isospin não-nula, que equivale na prática a um desbalanço entre o número de nêutrons e prótons no sistema.

Vamos então agora entender os efeitos de uma transformação de simetria para uma dada teoria.

1.2.1 Corrente de Noether e a simetria quiral

Em 1918, Emmy Noether, em seu primeiro resultado mostrou que a cada simetria irá corresponder uma corrente que satisfaça a equação de continuidade. Considere uma transformação $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$ tal que a Lagrangeana seja simétrica sob essa transformação:

$$\mathcal{L}(\Phi) = \mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi), \quad (19)$$

$$\mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi) - \mathcal{L}(\Phi) = 0.$$

Expandindo o primeiro termo em ordem $\delta\Phi$, temos:

$$\mathcal{L}(\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}(\Phi)}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi) - \mathcal{L}(\Phi) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\Phi)}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta(\partial_\mu\Phi) = 0. \quad (21)$$

Utilizando as equações (8) e (9):

$$\left(\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\right)\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}(\partial_\mu\delta\Phi) = 0, \quad (22)$$

e utilizando a equação (14), temos que:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi \right) = 0. \quad (23)$$

Onde a quantidade entre parênteses é a corrente de Noether:

$$J_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\delta\Phi. \quad (24)$$

Para casos em que há mais de um campo, como no caso dos píons, com três estados de cargas diferentes, introduzimos um índice que rotula os diferentes campos na descrição da teoria, ϕ_i .

Utilizaremos como uma aplicação da corrente de Noether uma rotação de isospin de píons. Considerando uma transformação unitária nos campos Φ_i , temos:

$$\vec{\Phi}' = e^{-i\Theta^a T^a} \vec{\Phi}, \quad (25)$$

$$\Phi'_i \cong \Phi_i - i\Theta^a T_{ij}^a \Phi_j, \quad (26)$$

onde Θ^a é um ângulo de rotação pequeno, T_{ij}^a são matrizes de rotações de isospin (geradores de transformação da álgebra de isospin), em que o índice "a" rotula os diversos geradores de simetria. Para rotações de isospin, teremos três matrizes de isospin e o vetor $\vec{\Phi}$ indicando as componentes dos campos dos píons π^+ , π^- e π^0 .

Com a mesma ideia acima (com o campo escalar), utilizando as equações (23) e (24) temos a seguinte corrente (KOCH, 1997):

$$J_\mu^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} T_{jk}^a \Phi_k. \quad (27)$$

Para uma dada corrente, temos uma carga associada. A carga então é dada pela integral em todo o volume da primeira componente, J_0 da corrente de Noether:

$$Q = \int d^3x J_0(x). \quad (28)$$

Desta forma, se temos uma Lagrangeana simétrica com relação a uma dada transformação de simetria, temos uma corrente conservada que nos leva a uma conservação de carga:

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (29)$$

Até então trabalhamos com uma Lagrangeana simétrica a uma dada transformação, resultando assim em uma corrente conservada. Mas o que acontece se introduzirmos um termo na Lagrangeana fazendo com que a mesma não seja mais simétrica? Escrevendo uma Lagrangeana na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}', \quad (30)$$

onde \mathcal{L}' quebra a simetria de \mathcal{L}_0 , e seguindo os passos anteriores da construção da corrente J_μ , encontramos a seguinte relação:

$$\delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}' = \partial_\mu J_\mu. \quad (31)$$

Note que agora a divergência da corrente não é nula fazendo com que o termo de quebra esteja diretamente relacionado a não conservação da corrente. Essa demonstração é extremamente importante para podermos entender a quebra da simetria quiral aproximada devido a massa finita dos quarks.

Vamos considerar dois exemplos de aplicação da corrente de Noether para uma Lagrangeana de dois sabores de férmions sem massa e com massa, para assim entendermos os efeitos da quebra da simetria da corrente.

Considere o Lagrangeano de um modelo sem massa:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_\alpha \not{\partial} \psi_\alpha, \quad (32)$$

onde α representa o índice interno que rotula o sabor do campo ψ em "up" e "down" e $\not{\partial}$ é a abreviação de $\partial_\mu \gamma^\mu$.

➤ Considere a seguinte transformação:

$$\Lambda_V : \psi_\beta \mapsto \left[e^{-i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2}} \psi \right]_\beta \cong \left(\delta_{\beta\alpha} - \frac{i\tau_{\beta\alpha}^a \theta^a}{2} \right) \psi_\alpha, \quad (33)$$

$$\bar{\psi}_\alpha \mapsto \left[e^{i\frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}}{2}} \bar{\psi} \right]_\alpha \cong \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{i\tau_{\alpha\beta}^a \theta^a}{2} \right) \bar{\psi}_\beta, \quad (34)$$

onde $\vec{\theta}$ um vetor de rotação angular e τ são as matrizes de Pauli 2×2 . Aplicando a transformação na Lagrangeana, temos:

$$\mathcal{L} = i \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{i\tau_{\alpha\beta}^a \theta^a}{2} \right) \bar{\psi}_\beta \not{\partial} \left(\delta_{\alpha\beta'} - \frac{i\tau_{\alpha\beta'}^a \theta^a}{2} \right) \psi_{\beta'}, \quad (35)$$

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_\alpha \not{\partial} \psi_\alpha - i\theta^a \left(i\bar{\psi}_\alpha \not{\partial} \frac{\tau_{\alpha\beta}^a}{2} \psi_\beta - i\bar{\psi}_\alpha \frac{\tau_{\alpha\beta}^a}{2} \not{\partial} \psi_\beta \right), \quad (36)$$

onde o segundo termo é nulo, logo:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_\alpha \not{\partial} \psi_\alpha. \quad (37)$$

Utilizando a equação (27) com $T_{ij}^a \mapsto \frac{\tau_{\alpha\beta}^a}{2}$, obtemos a corrente de Noether, ou vetor de corrente, para o sistema sem massa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_\alpha)} = i\bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu, \quad (38)$$

$$V_\mu^a = \bar{\psi}_\beta \gamma_\mu \frac{\tau_{\beta\alpha}^a}{2} \psi_\alpha. \quad (39)$$

➤ Considere a próxima transformação, chamada de axial, em que a matriz $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

é introduzida (abaixo omitiremos os índices de sabor):

$$\Lambda_A : \psi \mapsto e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}} \psi \cong \left(1 - i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}\right) \psi, \quad (40)$$

$$\bar{\psi} \mapsto e^{i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}} \bar{\psi} \cong \left(1 + i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}\right) \bar{\psi}. \quad (41)$$

Aplicando as transformações no Lagrangeano (32) e utilizando a relação de anti-comutação³ entre as matrizes γ_5 e γ_μ :

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - i\vec{\Theta} \left(\bar{\psi} i\partial_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} \psi + \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\vec{\tau}}{2} i\partial_\mu \gamma^\mu \psi \right), \quad (42)$$

$$= i\bar{\psi}\not{\partial}\psi. \quad (43)$$

Neste caso, a corrente de Noether ou corrente de vetorial-axial é dada por:

$$A_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} \psi. \quad (44)$$

Podemos então concluir que a Lagrangeana de férmions sem massa é invariante sob as transformações Λ_V e Λ_A , ditas transformações quirais. A invariância da Lagrangeana de férmions sem massa sob tais transformações caracteriza a simetria quiral, e a estrutura de grupo de simetria que descreve a mesma, neste caso, é $SU(2)_V \times SU(2)_A$.

Vamos agora analisar o efeito da transformação axial com a introdução de um termo de massa na Lagrangeana. A análise da transformação vetorial pode ser vista em (KOCH, 1997).

Considere a seguinte Lagrangeana fermiônica com massa:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (45)$$

Aplicando a transformação axial, temos:

$$\psi \rightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}} \psi, \quad (46)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\gamma_5 \frac{\vec{\tau}\vec{\Theta}}{2}} \bar{\psi}. \quad (47)$$

Vimos anteriormente que a Lagrangeana sem massa é invariante sob transformações de corrente vetorial e axial, sendo então somente necessário analisar o termo de massa.

³ $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0$

Logo, temos:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}' &= -m\left(e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}\bar{\psi}\right)\left(e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}\psi\right) + m\bar{\psi}\psi, \\ &= -m\left(e^{-2i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}}\right)\bar{\psi}\psi + m\bar{\psi}\psi,\end{aligned}\tag{48}$$

e, expandindo a exponencial:

$$\delta\mathcal{L}' = 2im\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\Theta}\bar{\psi}\psi.\tag{49}$$

Note então que com a introdução de uma massa, a Lagrangeana fermiônica não é mais invariante sob a transformação axial. Desta forma, na próxima seção discutiremos a quebra da simetria referente à transformação axial.

1.3 Simetria Quiral - Quebra espontânea e explícita

A Lagrangeana da QCD com N quarks sem massa é invariante sob certas rotações quirais no espaço de sabores (HALZEN; MARTIN; SONS, 1984). Como visto na seção anterior, a introdução da massa fermiônica na Lagrangeana quebra a simetria da corrente axial. Porém, por mais que essa transformação deixe a ação invariante para $m = 0$, esta simetria, no entanto, não é realizada no vácuo da QCD quando consideramos os glúons na Lagrangeana. Se tal transformação fosse uma simetria do vácuo, o espectro hadrônico deveria ser diferente do que observamos (WEINBERG, 1995). Com isso, a simetria quiral na QCD é espontaneamente quebrada pelo vácuo mesmo na presença de uma pequena quebra explícita, gerada pelas pequenas massas (em torno de 10 MeV) dos quarks up e down (Yao et al., 2006).

O teorema de Goldstone determina que a quebra espontânea de uma simetria contínua dá origem a excitações sem massa, os chamados bósons de Goldstone (PESKIN, 2018). No caso da simetria quiral em QCD, esses bósons correspondem aos píons. Porém, quando medidas suas massas, observamos valores não nulos apesar de pequenos quando comparados à escala de hádrons. Desta forma, somos levados então a um paradoxo: como uma simetria espontaneamente quebrada gera no vácuo da teoria partículas de massas não nulas, visto que o Teorema de Goldstone nos diz que tais excitações devem ser sem massa? A resposta para tal se dá através de outra quebra da simetria, sendo essa explícita. A quebra explícita de uma simetria, diferentemente da espontânea, se dá diretamente na Lagrangeana do sistema físico. No caso da simetria quiral na QCD, isto acontece por causa das massas não-nulas dos quarks *up* e *down*, que são próximas de 10 MeV. Desta forma, podemos dizer que os píons são pseudo-bósons de Goldstone, por conta da sua massa ser pequena com relação aos outros hádrons: os píons possuem massa de aproximadamente 137 MeV, enquanto a escala de energia hadrônica é de aproximadamente 1 GeV (Yao et al., 2006). Com isso, a conservação das correntes quirais deixa de ser realizada graças a parâmetros pequenos, fazendo com que a invariância quiral seja uma ***simetria aproximada espontaneamente quebrada (SAEQ)***.

Realizando então uma transformação de corrente axial no vácuo e projetando no estado dos píons, podemos notar um valor esperado não nulo que dependerá do pequeno parâmetro de quebra explícita – proporcional à soma das massas dos quarks *up* e *down* – que será discutido com mais detalhes na seção 1.4 e no capítulo 3, considerando a transformação de corrente axial para píons (KOCH, 1997),

$$A_\mu^a = f_\pi \partial_\mu \Phi^a(x), \quad (50)$$

onde $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ é a constante de decaimento dos píons determinada a partir de um experimento, a e b são índices referentes ao isospin, μ é o índice do vetor de Lorentz

podendo admitir os valores 0, 1, 2 e 3, Φ^a é o campo referente ao pión.

Desta forma, temos:

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b \rangle = -i f_\pi q_\mu \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}, \quad (51)$$

onde q_μ é o quadri-momento.

Tomando a divergência de (51), temos que:

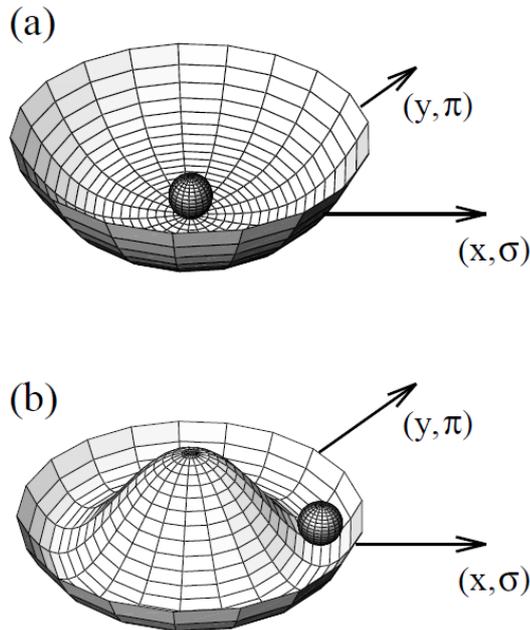
$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = -f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x} = -f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iq \cdot x}. \quad (52)$$

Como mencionado anteriormente, a simetria quirial axial é quebrada explicitamente por conta dos píons apresentarem uma massa não nula e pequena comparada com a escala de hádrons, logo, temos então uma SAEQ. Os píons são então pseudo-bósons de Goldstone e a corrente axial é parcialmente conservada como visto em (52).

Na mecânica clássica, conseguimos construir um análogo importante, através de um potencial do tipo chapéu mexicano, para mostrarmos como a quebra espontânea altera o vácuo da teoria. Considere um potencial ilustrado como a figura 1a. O ponto mais baixo do potencial, em seu centro, é o estado fundamental. Fazendo uma pequena perturbação na esfera, a mesma tenderá a voltar para esse único ponto de mínimo. Temos então um potencial e um estado fundamental invariantes. Observe agora a imagem 1b. O potencial apresenta um máximo local instável, e o estado fundamental está a uma distância finita do centro do potencial. Se perturbarmos a esfera, podemos concluir que a mesma poderá parar em qualquer ponto do vale do potencial. Após fixarmos esse ponto, ou seja, o estado fundamental, a simetria de rotação está espontaneamente quebrada. O potencial continua simétrico, porém o estado fundamental não é mais invariante. Note que por mais que a simetria tenha sido quebrada, efeitos da mesma ainda estão presentes. Não há um custo de energia para mover a esfera no vale do potencial de forma rotacional, entretanto, excitações radiais custam energia.

O análogo quântico no caso da simetria quirial é feito a partir de um potencial efetivo da QCD (ou de um modelo efetivo adequado) que deve assumir uma forma semelhante à da figura 1b. As coordenadas (x,y) passam a ser campos quirais (π, σ) . As rotações espaciais assumem a forma da corrente axial, onde a mesma realiza rotações de π em σ . Rotações ao longo do vale, correspondem a excitações de píons sem custo de energia, ou seja, sem massa.

Figura 1 - Potencial Efetivo

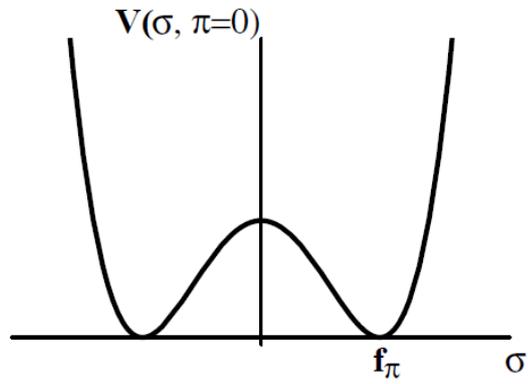


Legenda: (a) Sem quebra de simetria espontânea. (b) Com quebra de simetria espontânea.

Fonte: KOCH, 1997, p.15.

Como mencionado na analogia clássica, no potencial do tipo chapéu mexicano, para que os píons tenham massa nula, ou seja, para que não haja custo de energia para movermos a bolinha em torno do poço de potencial, σ deverá ser massivo, ou seja, excitações radiais geram custos de energia não nulos. Fixando então o plano $\pi = 0$ e σ , temos que o potencial apresenta o formato da figura 2, onde a constante de decaimento do pión será determinante na escolha do ponto de mínimo do potencial (a escolha para o valor do mesmo, será analisada nas próximas seções). Como também há uma quebra explícita da simetria, com a introdução de um pequeno termo no potencial, os pontos de mínimo ficam levemente inclinados como na figura 3, onde teremos um mínimo global caracterizando assim o menor estado de energia. As rotações em torno do vale agora custam energia, dando origem à massa não-nula dos píons.

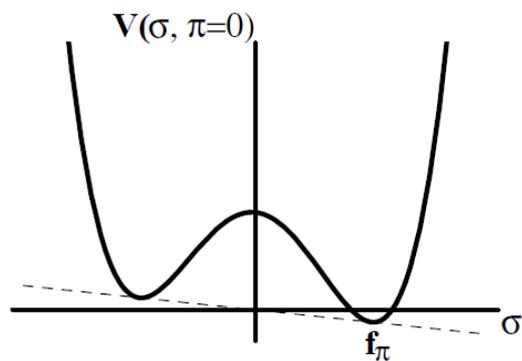
Figura 2 - Potencial $V(\sigma, \pi = 0)$



Legenda: Potencial "chapéu mexicano" sem quebra explícita.

Fonte: KOCH, 1997, p.19.

Figura 3 - Potencial $V(\sigma, \pi = 0)$



Legenda: Potencial "chapéu mexicano" com quebra explícita.

Fonte: KOCH, 1997, p.23.

1.4 Modelo Sigma Linear

Embora a álgebra de correntes tenha trazido bons resultados, Gell-Mann e Levy em 1960 (GELL-MANN; LEVY, 1960) introduzem um modelo da interação entre mésons e núcleons chamado Sigma Linear ($M\sigma L$) que permite a previsão de ainda mais resultados por ser uma teoria de campos renormalizável. A fim de reproduzir as propriedades observadas da conservação parcial da corrente axial (PCAC), o modelo se conecta com a QCD a partir da simetria quirial, reproduzindo, em um contexto mais simples, os aspectos dessa simetria presentes na teoria fundamental: quebra espontânea e quebra explícita pequena. Por essas razões, utilizaremos este modelo para estudar a transição de condensação do Píon a densidade finita.

Alguns critérios devem ser levados em conta para a construção do Lagrangeano do $M\sigma L$: rotações quirais referentes ao grupo $SU(2)_V \times SU(2)_A$ não devem causar efeitos, a menos de um termo pequeno na lagrangeana. Além disso, a invariância de Lorentz deve ser levada em conta, assim como a renormalizabilidade da teoria (WEINBERG, 1995).

A densidade de Lagrangeana completa do $M\sigma L$ é dada por (GELL-MANN; LEVY, 1960):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\not{\partial} - m_q]\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})(\partial^\mu\vec{\pi}) - g\bar{\psi}[i\gamma^5\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}]\psi - \mathcal{V}(\vec{\pi}, \sigma), \quad (53)$$

$$\mathcal{V} = \frac{\lambda^2}{4}[(\vec{\pi}^2 + \sigma^2) - v^2]^2 - h\sigma. \quad (54)$$

O primeiro termo é o Lagrangeano de Dirac que carrega a dependência dos núcleons (ou quarks constituintes, dependendo da escala de energia de interesse), o segundo e o terceiro termos representam a parte cinética para os campos de píons e para o méson escalar σ , o quarto termo é tipo interação de Yukawa, interação entre píon e núcleon, e a densidade de potencial, $\mathcal{V}(\vec{\pi}, \sigma)$, carrega as propriedades necessárias das quebras espontânea e explícita da simetria quirial presentes na QCD.

Neste trabalho, não estaremos interessados nos campos dos núcleons (ou quarks constituintes) e da interação de Yukawa por estarmos buscando um modelo mais simples onde só teremos píons e mesons. Desta forma, a densidade de Lagrangeana do $M\sigma L$ que será considerada neste trabalho para o modelo de píons fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\vec{\pi})(\partial^\mu\vec{\pi}) - \frac{\lambda^2}{4}[(\vec{\pi}^2 + \sigma^2) - v^2]^2 + h\sigma. \quad (55)$$

Mostraremos abaixo que o potencial acima é invariante sob transformações quirais, com exceção do termo $h\sigma$. Com isso, o primeiro termo será responsável pela quebra espontânea devida à presença do termo v^2 que gera um vácuo degenerado, enquanto o segundo termo está associada à pequena quebra explícita.

Usando a composição do pión e da partícula σ em termos de quarks de valência, definida respectivamente como (KOCH, 1997):

$$\vec{\pi} : i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi, \quad (56)$$

$$\sigma : \bar{\psi}\psi, \quad (57)$$

e aplicando a transformação (33) em $\vec{\pi}$, temos:

$$i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi \rightarrow i\left(1 + i\frac{\tau_j\Theta_j}{2}\right)\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\left(1 - i\frac{\tau_j\Theta_j}{2}\right)\psi,$$

$$i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi \rightarrow i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \Theta_j\left(\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\psi - \bar{\psi}\frac{\tau_j}{2}\tau_i\gamma_5\right).$$

Utilizando a identidade entre as matrizes de Pauli, $[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k$, obtemos

$$i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi \rightarrow i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + i\Theta_j\epsilon_{ijk}\bar{\psi}\gamma_5\tau_k\psi,$$

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta} \times \vec{\pi}. \quad (58)$$

Analogamente para σ , temos:

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \left(1 + i\frac{\tau_j\Theta_j}{2}\right)\bar{\psi}\left(1 - i\frac{\tau_j\Theta_j}{2}\right)\psi,$$

$$\sigma \rightarrow \bar{\psi}\psi + O(\Theta^2). \quad (59)$$

Com isso, vemos que tanto π^2 e σ^2 , quanto σ são invariantes sob a transformação quiral vetorial, gerando um potencial \mathcal{V} simétrico frente a Λ_V .

Fazendo o mesmo estudo com a transformação axial, temos:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \bar{\psi}e^{2i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\Theta}\psi, \\ &\rightarrow [\bar{\psi}\psi - \vec{\Theta}(i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi)], \\ \sigma &\rightarrow \sigma - \vec{\Theta} \cdot \vec{\pi}. \end{aligned} \quad (60)$$

Analogamente para o $\vec{\pi}$, temos:

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta}\sigma. \quad (61)$$

Podemos concluir também que, devido a rotação de isospin que Λ_V realiza nos campos, o quadrado dos campos são invariantes sob essa transformação:

$$\pi'^2 = \pi^2, \tag{62}$$

$$\sigma'^2 = \sigma^2. \tag{63}$$

Além disso, a soma dos quadrados desses campos, $\pi^2 + \sigma^2$, também é invariante sob a transformação axial, fazendo com que o primeiro termo do potencial \mathcal{V} também o seja. Este termo de potencial, pode ser ilustrado como na figura 2, em que temos mínimos degenerados, onde a transformação axial mapeia um mínimo diferente, determinando assim a **quebra espontânea da simetria**. Já o segundo termo do potencial quebra explicitamente a simetria quiral axial devido a não invariância do campo σ .

2 ALGUNS ELEMENTOS DE TEORIA DE CAMPOS EM UM MEIO

Desde quando começamos a estudar física somos apresentados a ferramentas matemáticas específicas de acordo com o sistema físico que estudamos. Desta forma, com o objetivo de investigarmos a termodinâmica e as transições de fase na matéria densa e fria a altas energias, necessitamos de ferramentas específicas para que possamos descrever teorias quânticas de campos em um meio.

Neste capítulo, serão apresentados aspectos introdutórios do formalismo da teoria quântica de campos em um meio. A discussão não pretende ser extensa e nem completa, o objetivo é construir um ferramental necessário para que possamos embasar os conceitos abordados nessa dissertação. Para uma discussão mais completa, o leitor deve utilizar a extensa literatura já existente sobre o assunto, onde parte dela será citada ao longo do texto.

Na seção 2.1, construiremos a função de partição via integral de trajetória, formalismo esse conveniente visto que uma teoria de campos apresenta infinitos graus de liberdade, e, nesse caso, o formalismo funcional mostra-se em geral mais eficiente. A dinâmica do sistema quântico estudada não será dada no tempo físico t , uma vez que estamos interessados em descrever situações de equilíbrio termodinâmico. Neste caso, a temperatura T estará associada a uma dimensão de tempo imaginário em que os campos apresentam condições de contorno periódicas (caso bosônico).

Na seção 2.2 abordaremos uma aplicação simples do formalismo de integral de trajetória: estudaremos a transição de fase de um sistema de um campo escalar Φ carregado, determinando assim a temperatura crítica de condensação de Bose-Einstein no limite não-relativístico e no limite relativístico.

Nossa preocupação ao construirmos esse capítulo é que o leitor se familiarize com o formalismo da integral de trajetória para que a discussão sobre o condensado quiral de píons, feita nos capítulos 3 e 4, seja mais direta.

2.1 A função de partição via integral de trajetória

Quando deseja-se analisar um sistema termodinâmico, o primeiro passo é calcular a função de partição. A função de partição descreve todas as quantidades termodinâmicas do sistema, seja tomando suas derivadas ou pelo logaritmo. A fim de descrevermos a mesma utilizando um formalismo funcional, partimos da definição:

$$\mathcal{Z} \equiv \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (64)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano e $\beta = 1/T$ é o inverso da temperatura⁴. Como estamos estudando uma teoria de campos, onde há infinitos graus de liberdade, temos que \mathcal{Z} é escrita em termos dos estados do campo ϕ_a da seguinte forma(KAPUSTA, 1993):

$$\mathcal{Z} = \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-\beta \hat{H}} | \phi_a \rangle. \quad (65)$$

A dinâmica de um sistema quântico é dada em geral pelo operador de evolução temporal, $U(t, t_o)$, como definido em (SAKURAI; NAPOLITANO, 2011):

$$U(t, t_o) = \exp \left[\frac{-i \hat{H}(t - t_o)}{\hbar} \right], \quad (66)$$

⁴ Utilizamos as unidades de $K_B = \hbar = c = 1$ e \hat{O} denota operadores atuando no espaço de Hilbert.

Figura 4 - Linha temporal



Legenda: Linha temporal dividida em N intervalos de tempo.

Fonte: O autor, 2020.

A partir de agora, introduziremos o conceito de tempo imaginário que é adequado para a descrição de sistemas em equilíbrio termodinâmico (KAPUSTA, 1993). Tal formalismo é sugerido na comparação da exponencial da equação (65) com a exponencial da equação (66):

$$t \rightarrow -i\beta, \quad (67)$$

$$t' \in [0, t] \rightarrow -i\tau; \tau \in [0, \beta]. \quad (68)$$

A dinâmica do sistema é determinada pela temperatura na dimensão de tempo imaginário, que não caracteriza mais uma evolução temporal física, além de apresentar as condições de contorno periódicas⁵.

Dividindo o intervalo de tempo (0,t) em N intervalos de tempo Δt , encontra-se uma função de partição na qual conseguimos desenvolver matematicamente afim de querermos representa-la como uma integral de trajetória:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-iN\Delta t \hat{H}} | \phi_a \rangle \\ \mathcal{Z} &= \int d\phi_a \langle \phi_a | e^{-i\Delta t \hat{H}} \cdot e^{-i\Delta t \hat{H}} \cdot e^{-i\Delta t \hat{H}} \cdot e^{-i\Delta t \hat{H}} \dots e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_a \rangle. \end{aligned} \quad (69)$$

Introduzindo N relações de completeza com relação aos momentos canonicamente conjugados e com relação aos campos, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d\phi_a \langle \phi_a | \int d\phi |\phi_{n+1}\rangle \langle \phi_{n+1}| \int \frac{d\Pi_n}{2\pi} |\Pi_n\rangle \langle \Pi_n| e^{-i\Delta t \hat{H}} \int d\phi_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| \times \\ &\times \int \frac{d\Pi_{n-1}}{2\pi} |\Pi_{n-1}\rangle \langle \Pi_{n-1}| e^{-i\Delta t \hat{H}} \dots \int d\phi_2 |\phi_2\rangle \langle \phi_2| \int \frac{d\Pi_1}{2\pi} |\Pi_1\rangle \langle \Pi_1| e^{-i\Delta t \hat{H}} \times \\ &\times \int d\phi_1 |\phi_1\rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle. \end{aligned} \quad (70)$$

⁵ A determinação dessas duas propriedades, nos leva a uma dimensão temporal compactificada que possui consequências físicas importantes. Na próxima seção, veremos na prática tais efeitos na aplicação do condensado de Bose-Einstein para um campo escalar carregado.

Figura 5 - Linha temporal dos campos e momentos



Legenda: Linha temporal dividida em N intervalos de tempo associados ao campo ϕ_{N+1} e ao momento canônico Π_N .

Fonte: O autor, 2020.

Juntando as integrais em um produtório, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d\phi_a \int d\phi_{n+1} \langle \phi_a | \phi_{n+1} \rangle \prod_{i=1}^N \int \frac{d\phi d\Pi_i}{2\pi} \langle \phi_{n+1} | \Pi_n \rangle \langle \Pi_n | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \Phi_n \rangle \langle \phi_n | \Pi_{n-1} \rangle \times \\ &\times \langle \Pi_{n-1} | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_{n-1} \rangle \dots \langle \phi_2 | \Pi_1 \rangle \langle \Pi_1 | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle. \end{aligned} \quad (71)$$

Como:

$$\langle \phi_a | \phi_b \rangle = \delta(\phi_a(x) - \phi_b(x)), \quad (72)$$

reescrevendo função de partição:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d\phi_a \int \prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i d\Pi_i}{2\pi} \langle \phi_{n+1} | \Pi_n \rangle \langle \Pi_n | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \Pi_{n-1} \rangle \langle \Pi_{n-1} | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_{n-1} \rangle \dots \times \\ &\times \langle \phi_2 | \Pi_1 \rangle \langle \Pi_1 | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle. \end{aligned} \quad (73)$$

Com a ideia de simplificarmos a função de partição, podemos associar cada termo misto de ϕ e Π com o seu referente instante de tempo Δt . Observe a figura 3. Na mesma, temos que para cada Δt associa-se um $\Pi_i \phi_{i+1}$.

Tomando $N + 1 = a$, a função de partição pode ser escrita como:

$$\mathcal{Z} = \int d\phi_a \int \prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i d\Pi_i}{2\pi} \langle \phi_{i+1} | \Pi_i \rangle \langle \Pi_i | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_i \rangle \langle \phi_1 | \phi_a \rangle. \quad (74)$$

Expandindo a exponencial até primeira ordem:

$$\langle \Pi_i | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_i \rangle = \langle \Pi_i | 1 - i\Delta t \hat{H} + \mathcal{O}(\Delta t^2) | \phi_i \rangle. \quad (75)$$

O campo $\hat{\phi}$, os campos do operador momento canônico $\hat{\Pi}$ e \hat{H} satisfazem as seguintes

condições:

$$\hat{H}(\hat{\Pi}, \hat{\phi}) |\phi\rangle = H(\Pi, \phi) |\phi\rangle, \quad (76)$$

$$\hat{\phi} |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle, \quad (77)$$

$$\hat{\Pi} |\Pi\rangle = \Pi |\Pi\rangle. \quad (78)$$

Com isso, (75) pode ser escrita como:

$$\langle \Pi_i | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_i \rangle = (1 - i\Delta t H(\Pi_i, \phi_i)) \langle \Pi_i | \phi_i \rangle. \quad (79)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade acima é a expansão em Taylor de uma exponencial em $H(\Pi, \phi)\Delta t$, com isso, utilizando a seguinte identidade (PESKIN, 2018),

$$\langle \phi | \Pi \rangle = \exp\left(i \int d^3x \Pi(x)\phi(x)\right), \quad (80)$$

podemos reescrever a equação (79) como:

$$\langle \Pi_i | e^{-i\Delta t \hat{H}} | \phi_i \rangle = \exp\left\{-i \left[H(\Pi_i, \phi_i)\Delta t + \int \Pi_i \phi_i d^3x \right]\right\}. \quad (81)$$

Além disso, temos também as seguintes relações:

$$\langle \phi_1 | \phi_a \rangle = \delta(\phi_1 - \phi_a), \quad (82)$$

$$\langle \phi_{i+1} | \Pi_i \rangle = \exp\left(i \int d^3x \Pi_i(x)\phi_{i+1}(x)\right), \quad (83)$$

$$H(\Pi_i, \phi_i) = \int d^3x \mathcal{H}(\Pi_i(x), \phi_i(x)). \quad (84)$$

Aplicando (74) e as relações acima na função de partição (81), temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int d\phi_a \int \prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i d\Pi_i}{2\pi} \delta(\phi_1 - \phi_a) \times \\ &\quad \times \exp\left(i \int d^3x \Pi_i \phi_{i+1}\right) \exp\left[-i \left(H(\Pi_i, \phi_i)\Delta t + \int d^3x \Pi_i \phi_i \right)\right], \\ &= \int d\phi_a \int \prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i d\Pi_i}{2\pi} \delta(\phi_1 - \phi_a) \exp\left\{-i\Delta t \sum_{i=1}^N \int d^3x \left[\mathcal{H}(\Pi_i, \phi_i) - \Pi_i \left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta t} \right) \right]\right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

Tomando o limite do contínuo, $N \rightarrow \infty$, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d\phi_a \left[\prod_{i=1}^N \frac{d\phi_i d\Pi_i}{2\pi} \right] \delta(\phi_1 - \phi_a) \equiv \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Pi. \quad (86)$$

Temos que a função de partição é então escrita como:

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}\Pi][\mathcal{D}\phi] \exp\left[\int_0^\beta d\tau \int d^d x \left(\Pi \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{H}(\Pi, \phi)\right)\right]. \quad (87)$$

A equação (87) é a representação funcional da função de partição onde d é a dimensão espacial. Todos os campos Π contribuem na integração. A integração em ϕ_a determinará a periodicidade e a restrição a configurações de campo tais que satisfazem as condições de contorno: $\phi(x, 0) = \phi(x, \beta)$.

2.2 Condensação de Bose-Einstein Relativística - Campo escalar complexo

Os bósons, diferentemente dos férmions, podem ocupar o mesmo estado de energia. Desta forma, a caracterização de um condensado se dá quando um conjunto de partículas ocupam o menor estado de energia. Esse estado será encontrado abaixo de uma certa temperatura chamada de **Temperatura Crítica** (T_c).

Antes de estudar as propriedades termodinâmicas do Condensado de Bose-Einstein relativístico de Píons, introduziremos o estudo com uma aplicação mais simples do formalismo funcional da função de partição, para um campo escalar carregado, Φ , com o objetivo de mostrarmos que essa descrição é completa, nos levando a resultados de uma certa temperatura crítica de condensação no limite relativístico e no limite não relativístico. A descrição do sistema de condensado para o campo carregado, Φ , será fiel à discussão feita em (KAPUSTA, 1993).

Consideremos um campo complexo que descreve bósons com carga positiva e negativa, através da densidade de Lagrangeana (KAPUSTA, 1993):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2. \quad (88)$$

A simetria associada a esta Lagrangeana é representada pelo grupo U(1) (KAPUSTA, 1993). Portanto, podemos escrever uma transformação para um campo Φ' que mantenha o Lagrangeano invariante da seguinte forma:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi e^{-i\alpha}. \quad (89)$$

Com isso, utilizando o Teorema de Noether, podemos encontrar uma corrente conservada. Considerando α como sendo um campo independente, que dependa de x , $\alpha(x)$, e aplicando a transformação acima no Lagrangeano, temos:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \Phi^*(x)\Phi(x)[\partial_\mu \alpha(x)][\partial^\mu \alpha(x)] + i\partial_\mu \alpha(x)(\Phi^*(x)\partial^\mu \Phi(x) - \Phi(x)\partial_\mu \Phi^*(x)). \quad (90)$$

A condição da conservação da corrente é que a sua derivada deve ser nula, ou seja:

$$\partial^\mu j_\mu = 0. \quad (91)$$

Como está sendo considerando α um "campo", podemos então escrever a equação de Euler-Lagrange para o mesmo:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial^\mu \alpha)} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha}. \quad (92)$$

Note que \mathcal{L}' não depende explicitamente de α , logo $\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} = 0$, com isso, a equação (92) se reduz a:

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial^\mu \alpha)} = 0, \quad (93)$$

com

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial (\partial^\mu \alpha)} = \Phi^* \Phi \partial_\mu \alpha - i \Phi \partial_\mu \Phi^* + i \Phi^* \partial_\mu \Phi. \quad (94)$$

Igualando a zero a relação a cima, voltando com a ideia original de que α é uma constante e comparando com a equação (91), a densidade de corrente será:

$$j_\mu = i(\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*). \quad (95)$$

Após encontrarmos a densidade de corrente, começaremos a estudar a densidade hamiltoniana do sistema do condensado de Bose-Einstein. A abordagem inicial da corrente de Noether é importante para que possamos identificar os termos que irão aparecer na função de partição. A densidade hamiltoniana pode ser escrita como:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{d\Phi_i}{dt} - \mathcal{L}. \quad (96)$$

É conveniente decompor o campo Φ em parte real e parte imaginária,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (97)$$

com o momento canonicamente conjugado relativo a cada campo como sendo $\pi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$ e $\pi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$. Reescrevendo a densidade de Lagrangeana em termos de ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) - \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (98)$$

a densidade de hamiltoniana será então:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[\pi_1^2 + \pi_2^2 + (\nabla \phi)^2] + (\nabla \phi_2)^2 + m^2 \phi_1^2 + m^2 \phi_2^2. \quad (99)$$

Para a densidade de Hamiltoniana acima, foi considerado $\lambda = 0$, pois estamos interessados em uma teoria livre de interações. Desta forma, a integral da função de partição torna-se uma integral que sabemos calcular sem muita complexidade, uma vez que tal determinação nos leva a uma integral Gaussiana.

Como há uma corrente conservada associada à simetria do Lagrangeano, a partir do teorema de Noether, temos uma carga associada. O vínculo da conservação da carga

é imposto na função de partição através do método de multiplicadores de Lagrange:

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu\mathcal{N}, \quad (100)$$

onde o potencial químico desempenhará o papel matemático de multiplicador de Lagrange para a conservação da densidade de carga \mathcal{N} . Como \mathcal{N} será a densidade do número de carga, podemos então associar \mathcal{N} à primeira componente da corrente de Noether:

$$Q = \int j_0(x) d^3x. \quad (101)$$

Substituindo $\mu = 0$ em j_μ :

$$j_0 = i(\Phi^* \partial_o \Phi - \Phi \partial_o \Phi^*). \quad (102)$$

Escrevendo Φ^* e Φ como

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \\ \Phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2), \end{aligned} \quad (103)$$

e substituindo em j_0 , temos:

$$\begin{aligned} j_0 &= \frac{i}{2}(-2i\phi_2\pi_1 + 2i\phi_1\pi_2), \\ j_0 &= \phi_2\pi_1 - \phi_1\pi_2. \end{aligned} \quad (104)$$

Observando a equação (101), podemos notar que Q pode ser interpretada como sendo a integral de uma densidade de cargas. Desta forma, j_0 será igual à densidade \mathcal{N} :

$$\mathcal{N} = \phi_2\pi_1 - \phi_1\pi_2. \quad (105)$$

Como em última instância nosso interesse reside na termodinâmica e na transição para a fase com condensação, precisamos construir a função de partição associada à ação para este modelo.

Utilizando o resultado da eq. (2.1) para construirmos a função de partição para os campos ϕ_1 e ϕ_2 e os momentos canônicos π_1 e π_2 , temos:

$$\mathcal{Z} = \int [d\Pi_1][d\Pi_2] \int_{\text{periódico}} [d\phi_1][d\phi_2] e^{i \int dt \int d^3x (\Pi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \Pi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi_1, \pi_2, \phi_1, \phi_2) + \mu\mathcal{N})}. \quad (106)$$

Substituindo $\tau = it$, temos:

$$\mathcal{Z} = \int [d\Pi_1][d\Pi_2] \int_{\text{periódico}} [d\phi_1][d\phi_2] e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\Pi_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\Pi_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\Pi_1, \Pi_2, \phi_1, \phi_2) + \mu(\phi_2\pi_1 - \phi_1\pi_2) \right)}.$$
(107)

Substituindo o Hamiltoniano (99) na função de partição acima, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int [d\pi_1][d\pi_2] \int_{\text{periódico}} [d\phi_1][d\phi_2] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} + i\pi_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2}\pi_1^2 - \frac{1}{2}\pi_2^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 + \mu(\phi_2\pi_1 - \mu\phi_1\pi_2) \right) \right]. \end{aligned}$$
(108)

Agrupando os termos que dependem de π_1 e π_2 , temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & \int_{\text{periódico}} [d\phi_1][d\phi_2] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(-\frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 \right) \right] \times \\ & \times \int [d\pi_1] \int [d\pi_2] \exp \left\{ \int_0^\beta \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi_1 + i \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2 \right) \pi_1 \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ \int_0^\beta \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi_2 + i \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1 \right) \pi_2 \right] \right\}. \end{aligned}$$
(109)

Reescrevendo os argumentos das integrais em π_1 e π_2 , temos respectivamente:

$$-\frac{1}{2}\pi_1^2 + i \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2 \right) \pi_1 = -\frac{1}{2} \left[\pi_1 - i \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2 \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2 \right)^2,$$
(110)

$$\frac{1}{2}\pi_2^2 + i \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1 \right) \pi_2 = -\frac{1}{2} \left[\pi_2 - i \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1 \right) \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1 \right)^2.$$
(111)

Finalmente, substituindo (110) e (111) em (109) e realizando a seguinte troca de variáveis $\xi_1 = \pi_1 - i \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2 \right)$ e $\xi_2 = \pi_2 - i \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1 \right)$, conseguimos escrever duas integrais nos respectivos momentos π_1 e π_2 como integrais Gaussianas. Utilizando uma tabela de integrais ou por meio de manipulações algébricas, realiza-se a integração nos momentos e com isso a função de partição fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & N^2 \int_{\text{periódico}} [d\phi_1][d\phi_2] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\tau} - i\mu\phi_2 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\tau} + i\mu\phi_1 \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$
(112)

A compactificação da dimensão temporal terá uma de suas influências mais diretas sobre os modos de Fourier do campo $\phi(\mathbf{x}, \tau)$. Devido ao traço na definição da função de partição, os modos que contribuirão serão aqueles que apresentam componente zero do momento $p^0 = 2il\pi T$, onde $l \in \mathbb{Z}$, que respeitam as condições de contorno periódicas, $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta), \forall \mathbf{x}$. A expansão dos campos $\phi_1(\mathbf{x}, \tau)$ e $\phi_2(\mathbf{x}, \tau)$ em modos de Fourier que contribuirão em \mathcal{Z} será:

$$\phi_1(\mathbf{x}, \tau) = \sqrt{2}\xi \cos\theta + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n \sum_p e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{1;n}(\mathbf{p}), \quad (113)$$

$$\phi_2(\mathbf{x}, \tau) = \sqrt{2}\xi \sin\theta + \left(\frac{\beta}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_n \sum_p e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \omega_n\tau)} \phi_{2;n}(\mathbf{p}), \quad (114)$$

onde ξ é o parâmetro do condensado, \mathbf{p} é tri-momento, V é o volume espacial e $\omega_n = 2\pi lT$ são as frequências de Matsubara bosônicas.

O valor esperado do campo ϕ é:

$$\langle \phi \rangle = \xi(\cos\theta + i\sin\theta). \quad (115)$$

Como o campo ϕ foi definido como sendo um campo complexo, tomamos então o módulo do valor esperado. Isso porque $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ é uma fase. Logo:

$$|\langle \phi \rangle| = |\xi| \quad (116)$$

Com isso, ξ será o parâmetro de ordem da teoria. Aplicando as expansões dos campos na função de partição, temos:

$$\mathcal{Z} = (N')^2 \prod_n \prod_p \int d\phi_{1;n}(p) d\phi_{2;n}(p) e^{\beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 - \frac{1}{2} \sum_n \sum_p (\phi_{1;-n}, \phi_{2;-n}) D \begin{pmatrix} \phi_{1;n}(p) \\ \phi_{2;n}(p) \end{pmatrix}}, \quad (117)$$

onde,

$$D = \begin{bmatrix} \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 & -2\mu\omega_n \\ 2\mu\omega_n & \omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Integrando \mathcal{Z} e tomando seu logaritmo neperiano:

$$\ln \mathcal{Z} = \beta V(\mu^2 - m^2)\xi^2 + \ln(\det D)^{-\frac{1}{2}}, \quad (119)$$

onde o segundo termo é:

$$\begin{aligned} \ln(\det D)^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} \ln \prod_n \prod_p \beta^4 [(\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2 \omega_n^2] \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left\{ \prod_n \prod_p \beta^2 [\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2] \right\} + \ln \left\{ \prod_n \prod_p \beta^2 [\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (120)$$

Substituindo (120) em (119), temos que:

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z} &= \beta V (\mu^2 - m^2) \xi^2 - \frac{1}{2} \sum_n \sum_p \ln \{ \beta^2 [\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2] \} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_n \sum_p \ln \{ \beta^2 [\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2] \}. \end{aligned} \quad (121)$$

Resolvendo as somas de Matsubara acima e tomando o limite do contínuo, ou seja,

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3},$$

chegamos a:

$$\ln \mathcal{Z} = V \beta (\mu^2 - m^2) \xi^2 - V \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} [\beta \omega + \ln(1 - e^{-\beta(\omega - \mu)}) + \ln(1 - e^{-\beta(\omega + \mu)})]. \quad (122)$$

Fixando β e μ temos que ξ é um parâmetro livre, então $\ln \mathcal{Z}$ (que é proporcional à energia livre) pode ser extremizado com relação a ξ . Logo, derivando a energia livre com relação a ξ , temos:

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \xi} = 2\beta V (\mu^2 - m^2) \xi = 0. \quad (123)$$

Para que a igualdade acima seja satisfeita, ξ deve ser nulo ou $|\mu| = m$. A solução de $\xi = 0$ será descartada pois é uma solução trivial. A solução que estaremos interessados será $|\mu| = m$, em que o condensado pode ser não-nulo.

Desta forma, definindo uma densidade de cargas,

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{T}{V} \left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \mu} \right) \Big|_{\mu=m} \quad (124)$$

e tomando a derivada da equação (122), obtemos:

$$\rho = 2m\xi^2 + \rho^*(\beta, \mu = m), \quad (125)$$

onde:

$$\rho^* = \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+m)} - 1} \right). \quad (126)$$

Como estamos em uma teoria de cargas, o sinal das mesmas é de grande importância. O potencial químico para uma carga negativa é tomado como $\mu_- = -\mu$. Já para uma carga positiva $\mu_+ = +\mu$. Com isso, podemos então interpretar que o primeiro termo de ρ^* é o termo relativo às partículas e o segundo termo relativo às anti-partículas. A contribuição separada das excitações e do condensado (modo de momento nulo) é nítida em ρ . Para temperaturas menores do que a temperatura crítica, temos que ξ assume seu valor de:

$$\xi^2 = \frac{\rho - \rho^*(\beta, \mu = m)}{2m}. \quad (127)$$

Tomando o limite de $T \rightarrow 0$, observamos que $\rho^* \rightarrow 0$, logo, todas as partículas ocupam o mesmo estado de menor energia, ou seja, o estado fundamental. Para $T > 0$, $\rho^* > 0$, teremos excitações de bósons em torno do condensado, e parte dos bósons que estavam no estado fundamental começam a ocupar estados de energia superiores, havendo assim um derretimento da fase de condensação até uma temperatura chamada de temperatura crítica T_c em que o ξ é nulo.

A fim de mostrarmos que o tratamento funcional é uma teoria completa para o estudo de propriedades termodinâmicas de sistemas físicos microscópicos, estaremos interessados no limite relativístico e não-relativístico da densidade de cargas. No limite não-relativístico compararemos a temperatura crítica encontrada com o resultado da literatura para um sistema físico não relativístico onde, para chegar até o mesmo, foi utilizada a mecânica estatística convencional. Já para o limite ultra-relativístico, analisaremos as contribuições extras.

2.2.1 Limite não-relativístico

No limite não relativístico temos que $m \gg p$. Com isso, devemos reescrever ω :

$$\omega = \sqrt{m^2 + p^2} = m\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2}}, \quad (128)$$

$$\omega = m \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2} + O\left(\frac{p^4}{m^4}\right) \right). \quad (129)$$

Excluindo os termos em p^4 , temos:

$$\omega = m + \frac{p^2}{2m}. \quad (130)$$

Note que o segundo termo de ρ^* vai para zero quando para $m \gg p$. Desta forma, ρ^* fica:

$$\rho^* = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} \right). \quad (131)$$

Substituindo a relação (130) em (131), temos:

$$\begin{aligned} \rho^* &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\frac{\beta p^2}{2m}} - 1} \right), \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\frac{\beta p^2}{2m}} - 1} \right) p^2 \sin\phi d\phi d\theta dp, \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \left(\frac{p^2}{e^{\frac{\beta p^2}{2m}} - 1} \right) dp. \end{aligned} \quad (132)$$

Fazendo a seguinte troca de variáveis, utilizando a seguinte expansão para α ,

$$x = \sqrt{\frac{\beta}{2m}} p, \quad (133)$$

$$\frac{x^2 e^{-x^2} \alpha}{1 - e^{-x^2} \alpha} = x^2 (\alpha e^{-x^2} + \alpha^2 e^{-2x^2} + \dots), \quad (134)$$

e tomando $\alpha = 1$ podemos reescrever a integral ρ^* da seguinte forma:

$$\rho^* = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^2 \{ e^{-x^2} + e^{-2x^2} + \dots \}. \quad (135)$$

Realizando as integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (136)$$

e utilizando a função polilogarítmica,

$$Li_n(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^r}, \quad (137)$$

temos que para o caso estudado $r = \frac{3}{2}$ e $\alpha = 1$, a função fica:

$$Li_{\frac{3}{2}}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^{\frac{3}{2}}} = \zeta(3/2). \quad (138)$$

Com esses passos, chegamos que a temperatura crítica para o limite não-relativístico é:

$$T_c = \frac{2\pi}{m} \left(\frac{\rho}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (139)$$

Finalmente, podemos concluir que é a mesma temperatura obtida utilizando a mecânica estatística não relativística como feito em (BELLAC, 2000).

2.2.2 Limite ultra-relativístico

No limite ultra-relativístico, $m \ll p$, haverá contribuição das anti-partículas, pois a segunda integral de ρ^* não será nula. Desta forma, temos que:

$$\rho^* = \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+m)} - 1} \right), \quad (140)$$

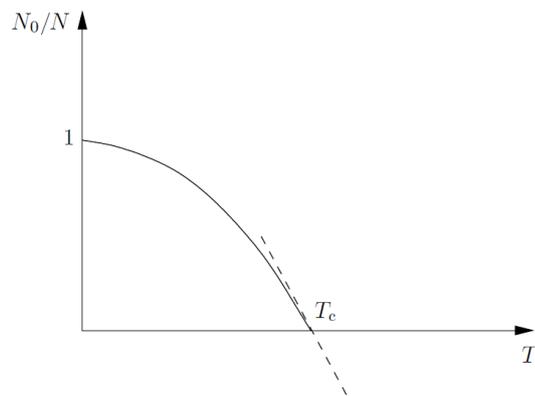
onde ω , agora, equivale à $\sqrt{p^2 + m^2}$.

Para a solução de ρ^* , o cálculo encontra-se no apêndice A. Com isso, a temperatura para esse limite é:

$$T_c = \left(\frac{3\rho}{m} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (141)$$

A transição de fase é de segunda ordem. De forma intuitiva, observando a figura 6, $\xi \times T$, note que o parâmetro de ordem ξ diminui continuamente para zero para valores próximos à T_c . Já para valores maiores do que T_c , o parâmetro de ordem é nulo. Essa é a maneira mais intuitiva de determinarmos que a transição de fase é de segunda ordem, (KAPUSTA, 1993)⁶.

⁶ A intuição é determinada pela teoria geral de Landau de transição de fases. Para uma leitura mais aprofundada sobre o assunto, o leitor é levado para a (BELLAC; BARTON, 1991)

Figura 6 - Diagrama $\xi \times T$ 

Legenda: Parâmetro de ordem em função
de T . A medida que
 $T \rightarrow T_c$, $\xi \rightarrow 0$.

Fonte: BELLAC, 2000, p.302.

3 CONDENSAÇÃO DE BOSE-EINSTEIN RELATIVÍSTICA DE PÍONS

Alguns trabalhos pioneiros de condensado de píons em matéria fortemente interagente sob condições extremas foram introduzidos por volta dos anos 70 por Migdal (MIGDAL, 1978) e outros. Ambientes neutros em meios astrofísicos era o que envolviam os trabalhos. Devido à neutralidade de carga elétrica, a descrição do diagrama de fases da QCD encontrava algumas dificuldades como não só a presença da densidade de isospin mas também a presença da densidade bariônica tornando o condensado de píons inhomogêneo.

Aqui, concentrar-nos-emos no fenômeno de condensação de Bose-Einstein relativística de píons a densidade de isospin finita. A QCD densa de isospin apresenta um cenário particularmente interessante para o desenvolvimento de técnicas não-perturbativas, em sistemas densos, não apresentando o Problema do Sinal, que é encontrado em sistemas com densidade bariônica não nula (AARTS, 2016). As simulações numéricas, como, por exemplo, o método de Monte Carlo, que é utilizado para obtenção de resultados numéricos da teoria fundamental na rede, começam a apresentar problemas na probabilidade (peso estatístico). Tal probabilidade é definida a partir da medida de integração em uma função de partição:

$$\mathcal{Z} = \int [D\phi] e^{-S_E}, \quad (142)$$

onde S_E é a ação euclidiana. Em alguns sistemas a densidade finita, o peso estatístico nessa integral torna-se complexo, inviabilizando o procedimento de *importance sampling* no método de Monte Carlo.

Neste trabalho estaremos interessados no condensado homogêneo na ausência de densidade bariônica, de modo que não há o problema do sinal e a referência robusta de QCD na rede está disponível. Trabalhos pioneiros em sistemas em que o problema do sinal está ausente foram realizados, por exemplo, por Son e Stephanov (SON; STEPHANOV, 2000), (SON; STEPHANOV, 2001), (SPLITTORFF; SON; STEPHANOV, 2001).

A QCD é uma área que vem sendo estudada há bastante tempo devido à sua grande complexidade. A fim de contornar tais problemas, neste capítulo, analisaremos o condensado de Bose-Einstein de píons relativísticos denso de isospin considerando um modelo efetivo da QCD que respeita as características da simetria quiral presentes na mesma, porém, mais simples. Estudaremos então a condensação de píons utilizando o Modelo Sigma Linear ($M\sigma L$) sem quarks constituintes apresentado no capítulo 1.

Ao longo das seções deste capítulo, estaremos interessados em entender a transição de fase de condensação dos píons a partir dos efeitos da quebra espontânea e explícita da simetria quiral utilizando o modelo Sigma Linear. A construção da função de partição

será feita a partir do Lagrangeano já estudado no capítulo 1. Na sequência, soluções em torno do condensado serão analisadas para que assim o espectro de quasi-partículas seja encontrado para as fases sem condensação e com condensação de píons. Por fim, mostraremos um diagrama $m - \mu_I$ que nos ilustrará o comportamento das soluções encontradas para o espectro nas diferentes fases.

3.1 O Modelo Sigma Linear em um meio denso de isospin

Como mencionado no capítulo 1, o Isospin está relacionado à conservação da carga sob a transformação de dois sabores das transformações quirais vetoriais globais $\exp\left[-i\vec{\theta}\cdot\frac{\vec{\tau}_{\alpha\beta}}{2}\right]$ que não são afetadas pela quebra espontânea da simetria quiral. Aqui $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ são as matrizes de Pauli, α e β são índices do espaço de sabores e $\vec{\theta}$ é o parâmetro de transformação. Assim como estudado no caso do condensado de Bose-Einstein, no capítulo anterior, introduzimos o vínculo da conservação do número de isospin através do método de multiplicadores de Lagrange $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mu_I n_I$, onde n_I é a componente zero da corrente de Noether associada a uma transformação local do tipo $\vec{\theta} = (0, 0, \theta_3(x))$ na Lagrangeana:

$$n_I = \pi_1 \partial_0 \pi_2 - \pi_2 \partial_0 \pi_1 = i[\pi^- \partial^0 \pi^+ - \pi^+ \partial^0 \pi^-], \quad (143)$$

onde utilizamos também a notação de $\pi^\pm = \frac{(\pi_1 \mp i\pi_2)}{\sqrt{2}}$ e $\pi^0 = \pi_3$.

Conforme apresentado no Capítulo 1, para o L σ M sem quarks constituintes a Lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})(\partial^\mu \vec{\pi}) - V_{cl}([\sigma^2 + \vec{\pi}^2], \sigma), \quad (144)$$

em que o potencial clássico é dado por:

$$V_{cl}([\sigma^2 + \vec{\pi}^2], \sigma) = \frac{\lambda^2}{4} \{[\sigma^2 + \vec{\pi}^2] - v^2\}^2 - h\sigma. \quad (145)$$

Neste potencial, o primeiro termo está relacionado com a quebra espontânea da simetria quiral e o segundo termo, com a quebra explícita.

A ação euclidiana para o L σ M denso de isospin é dada por:

$$S_E = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})(\partial_\mu \vec{\pi}) + \mu_I [\pi_1 \partial_0 \pi_2 - \pi_2 \partial_0 \pi_1] - \frac{1}{2} \mu_I^2 (\pi_1^2 + \pi_2^2) + V_{cl}([\sigma^2 + \vec{\pi}^2], \sigma) \right\}, \quad (146)$$

onde os dois primeiros termos são cinéticos, o terceiro termo (primeira componente de Noether) e o quarto termo são obtidos na integração sobre os momenta canonicamente conjugados como feito no capítulo 2 na condensação de Bose-Einstein para um campo complexo Φ carregado.

3.2 Ação efetiva na aproximação clássica

A fim de entender a transição de fase para o condensado e o espectro de quasi-partículas, devemos analisar a teoria na presença de condensados e encontrar a solução que minimiza a ação efetiva conforme o potencial químico de isospin varia.

Considerando assim soluções em torno do condensado, temos que:

$$\sigma = \bar{\sigma} + \xi, \quad (147)$$

$$\vec{\pi} = \vec{\bar{\pi}} + \vec{\eta}. \quad (148)$$

Assim, a ação efetiva na aproximação clássica pode ser escrita como:

$$S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial_\mu \xi) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\eta}) \cdot (\partial_\mu \vec{\eta}) + \mu_I [(\bar{\pi}_2 + \eta_2) \partial_0 \eta_1 - (\bar{\pi}_1 + \eta_1) \partial_0 \eta_2] + V_{cl}^{(L\sigma M)}(\sigma, \vec{\pi}) \right\}, \quad (149)$$

enquanto o potencial definido em termos da expansão fica:

$$V_{cl}^{(L\sigma M)}(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda^2}{4} \left\{ \bar{\sigma}^2 + \vec{\bar{\pi}}^2 - v^2 \right\} - h \bar{\sigma} - \frac{\mu_I^2}{2} [\bar{\pi}_1^2 + \bar{\pi}_2^2] + \xi \left[\lambda^2 \bar{\sigma} (\bar{\sigma}^2 + \vec{\bar{\pi}}^2 - v^2) - h \right] + \quad (150)$$

$$+ \eta_i \left[\frac{\lambda}{4} (2\bar{\sigma}^2 2\bar{\pi}_i + 2\vec{\bar{\pi}}^2 2\bar{\pi}_i + 4\bar{\pi}_i (-v^2)) - \frac{\mu_I^2}{2} (1 - \delta_{i3}) (2\bar{\pi}_i) \right] + \quad (151)$$

$$+ \xi^2 \left[\frac{\lambda^2}{4} (4\bar{\sigma}^2 + 2\bar{\sigma}^2 + 2(\vec{\bar{\pi}}^2 - v^2)) \right] +$$

$$+ \eta_i \eta_j \left[\frac{\lambda^2}{4} (4\bar{\pi}_i \bar{\pi}_j + 2\bar{\sigma}^2 \delta_{ij} + 2\vec{\bar{\pi}}^2 + 2[v^2] \delta_{ij}) - \frac{\mu_I^2}{2} \delta_{ij} (1 - \delta_{i3}) \right] +$$

$$+ \xi \eta_i \left[\lambda^2 (\bar{\sigma} 2\bar{\pi}_i) \right] +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{4} \left\{ \xi^4 + \eta_i \eta_i \eta_j \eta_j + 4\bar{\sigma} \xi [\xi^2 + \vec{\eta}^2] + 2\eta^2 [2\vec{\bar{\pi}} \cdot \vec{\eta} + \vec{\eta}^2] + 4\vec{\bar{\pi}} \cdot \vec{\eta} [\vec{\eta}^2] \right\}, \quad (152)$$

onde cada linha desempenha um papel. A **primeira linha** corresponde ao potencial clássico avaliado no condensado. A **segunda e terceira linhas** devem se anular, dando origem às condições de equilíbrio. A **quarta, quinta e sexta linhas** (quadráticas nas flutuações) estão associadas às relações de dispersão das quasi-partículas na fase de condensado, definindo a estabilidade deste. A **última linha** corresponde aos vértices de interação das flutuações (PALHARES, 2012).

Obtêm-se as relações de dispersão para as quasi-partículas derivando a ação no

espaço de Fourier até segunda ordem nos campos de flutuações. Considere a seguinte transformação para o espaço de momento:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \beta V \int_Q e^{iQ \cdot x} \phi(Q), \quad (153)$$

onde $\phi(x) = \xi, \eta_i$ e

$$\int_Q = \sum_{Q_0} \int d^{d-1} \vec{q}.$$

Aplicando a transformação em S_E e utilizando as relações de equilíbrio do potencial (imposição de que a segunda e a terceira linhas no potencial acima devem se anular), temos que:

$$S_E = \beta^3 V V_{cl}^{(L\sigma M)}(\bar{\sigma}, \vec{\bar{\pi}}) + \beta^2 V \int_Q \left(\begin{array}{cccc} \xi(Q) & \eta_1(Q) & \eta_2(Q) & \eta_3(Q) \end{array} \right) \frac{\beta}{2} \mathcal{M}^2(Q) \begin{pmatrix} \xi(-Q) \\ \eta_1(-Q) \\ \eta_2(-Q) \\ \eta_3(-Q) \end{pmatrix} + O(3), \quad (154)$$

onde a matriz \mathcal{M}^2 é:

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_\xi^2 & 2\lambda^2 \bar{\sigma} \bar{\pi}_1 & 2\lambda^2 \bar{\sigma} \bar{\pi}_2 & 2\lambda^2 \bar{\sigma} \bar{\pi}_3 \\ 2\lambda^2 \bar{\sigma} \bar{\pi}_1 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_1^2 & 2\lambda^2 \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2 + 2i\mu_I Q_0 & 2\lambda^2 \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_3 \\ 2\lambda^2 \bar{\sigma} \bar{\pi}_2 & 2\lambda^2 \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2 - 2i\mu_I Q_0 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_2^2 & 2\lambda^2 \bar{\pi}_2 \bar{\pi}_3 \\ 2\lambda^2 \bar{\sigma} \bar{\pi}_3 & 2\lambda^2 \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_3 & 2\lambda^2 \bar{\pi}_2 \bar{\pi}_3 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_3^2 \end{pmatrix}, \quad (155)$$

com as definições:

$$m_\xi^2 = \lambda^2 [2\bar{\sigma}^2 + \vec{\bar{\pi}}^2 + \bar{\sigma}^2 - v^2] \quad (156)$$

$$m_i^2 = \lambda^2 [2\bar{\pi}_i^2 + \vec{\bar{\pi}}^2 \bar{\sigma} - v^2] - (1 - \delta_{i3}) \mu_I^2. \quad (157)$$

3.3 Espectro clássico de quasi-partículas

Para que possamos encontrar o espectro de quasi-partículas devemos então calcular o determinante da matriz \mathcal{M}^2 e assim encontrar o autovalor Q_0 que anule o mesmo no limite em que Q_i (3-momento) é nulo. Esta condição equivale a buscar um pólo no propagador do grau de liberdade associado.

A solução é então tomada pela seguinte relação:

$$\det[\mathcal{M}^2(Q_0, \vec{q} = 0)] = 0. \quad (158)$$

Com isso, analisaremos as fases do sistema a partir das condições de equilíbrio dadas pelas equações (150) e (151).

- Fase normal, com condensado de píons nulo ($\bar{\pi}_i = 0$)

Das condições de equilíbrio, temos:

$$\lambda^2 \bar{\sigma} (\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2 - v^2) - h = 0 \quad (159)$$

$$\{\lambda^2 (\bar{\sigma}^2 + \bar{\pi}^2 - v^2) - \mu_I^2 (1 - \delta_{i3})\} \bar{\pi}_i = 0, \quad (160)$$

sendo $i = 1, 2$ e 3 .

Note que a equação na direção dos píons tem solução trivial. Já a equação na direção σ fica:

$$\lambda^2 \bar{\sigma} (\bar{\sigma}^2 - v^2) - h = 0. \quad (161)$$

Para encontrarmos as soluções explicitamente, alguns valores físicos devem ser fixados. Como estamos considerando um modelo alternativo à QCD, porém que respeite toda a sua estrutura de simetria quirial, os valores físicos de λ, v^2 e h devem ser tais que essa condição seja satisfeita.

O valor esperado no vácuo do campo σ pode se relacionar com a constante de decaimento do pión, f_π (PALHARES, 2008) utilizando a relação de Goldberger-Treiman (vide, por exemplo (KOCH, 1997)) para o $M\sigma L$. Com isso, o valor esperado de σ é:

$$\langle \sigma \rangle = f_\pi. \quad (162)$$

A fim de reproduzir a exigência da relação de PCAC, vista no capítulo 1, no $M\sigma L$ h é então fixado como:

$$h = f_\pi m_\pi^2, \quad (163)$$

onde⁷ f_π é igual a 93 MeV e $m_\pi = 138$ MeV.

Já o parâmetro λ é fixado de acordo com correções quânticas que são realizadas tomando o valor do potencial efetivo no vácuo da teoria. Essa discussão é feita com mais detalhes em (PALHARES, 2008) e (PALHARES, 2012). Desta forma teremos $\lambda^2 \approx 20$, $v^2 \approx 7700$ MeV² e $h = f_\pi m_\pi^2$. Observando então a condição de equilíbrio para a fase normal, teremos um mínimo verdadeiro dado pela condição $\bar{\sigma} \gtrsim v$, enquanto outros pontos corresponderão a mínimos meta-estáveis. Com essa ideia, é intuitivo pensar que $\bar{\sigma}$ deve ter o seu valor fixado em f_π , visto que essa é a constante de decaimento do pión. Portanto, $\bar{\sigma} = f_\pi$ resultará no mínimo verdadeiro.

Assim como λ , o parâmetro v pode ser encontrado de acordo com tais correções quânticas, porém, conseguimos encontrar o valor do mesmo na aproximação clássica utilizando uma das condições de equilíbrio do potencial tomada na seção anterior eq. (159)

$$0 = \lambda^2 f_\pi (f_\pi^2 - v^2) - h, \quad (164)$$

$$v^2 = f_\pi^2 - \frac{m_\pi^2}{\lambda^2}, \quad (164)$$

$$v^2 \approx 7700 \text{ MeV}^2. \quad (165)$$

O potencial, em sua aproximação clássica, fica da seguinte forma sendo avaliado em seu mínimo verdadeiro:

$$V_{cl}^{(M\sigma L)} \Big|_{\text{mín.}, \bar{\pi}^2=0} = m_\pi^2 \left(\frac{m_\pi^2}{4\lambda^2} - f_\pi^2 \right). \quad (166)$$

⁷ A constante de decaimento do pión varia na literatura de acordo com um fator 2 ou $\sqrt{2}$. Desta forma, utilizaremos o mesmo valor da constante de decaimento f_π utilizada em (PALHARES, 2008).

Voltando para a solução para Q_0 , referente aos pólos do propagador, para a fase sem condensado, a matriz se torna:

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_\xi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_1^2 & 2i\mu_I Q_0 & 0 \\ 0 & -2i\mu_I Q_0 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + m_3^2 \end{pmatrix}. \quad (167)$$

Tomando o determinante da matriz acima e igualando a zero, temos:

$$(-Q_0^2 + m_3^2)(-Q_0^2 + m_\xi^2)\{(-Q_0^2 + m_1^2)(-Q_0^2 + m_2^2) - 4\mu_I^2 Q_0^2\} = 0, \quad (168)$$

desta forma:

$$Q_0 = |m_3|,$$

$$Q_0 = |m_\xi|,$$

$$0 = Q_0^4 - Q_0^2(m_1^2 + m_2^2 + 4\mu_I^2) + m_1^2 m_2^2.$$

Utilizando as massas definidas em (156) e (157), a solução para o condensado e o parâmetro v encontrado para o mínimo do potencial, $\bar{\sigma} = f_\pi$, $\bar{\pi} = 0$, temos o espectro de massas como:

$$Q_0^{(\sigma)} = \sqrt{2\lambda^2 f_\pi^2 + m_\pi^2} = m_\sigma, \quad (169)$$

$$Q_0^{(\pi^0)} = m_\pi, \quad (170)$$

$$\left[Q_0^{\pi^\pm}\right]^2 = (m_\pi \mp \mu_I)^2. \quad (171)$$

• Fase com condensado de píons ($\bar{\pi}^2 = (\bar{\pi}_1^2 + \bar{\pi}_2^2)$)

Escrevendo π_1 e π_2 em termos das coordenadas radiais e angulares da seguinte forma:

$$\pi_1 = \rho \cos \alpha, \quad (172)$$

$$\pi_2 = \rho \sin \alpha, \quad (173)$$

$$\bar{\pi}^2 = \rho^2, \quad (174)$$

as condições de equilíbrio ficam:

$$\lambda^2 \bar{\sigma} (\bar{\sigma}^2 + \rho^2 - v^2) - h = 0 \quad (175)$$

$$\{\lambda^2 (\bar{\sigma} + \rho^2 - v^2) - \mu_I^2\} \rho \cos \alpha = 0 \quad (176)$$

$$\{\lambda^2 (\bar{\sigma} + \rho^2 - v^2) - \mu_I^2\} \rho \sin \alpha = 0 \quad (177)$$

Note que as condições de equilíbrio são satisfeitas de forma independente do ângulo de rotação. Isso nos mostra uma simetria remanescente sob rotações em torno de π^3 .

As condições de equilíbrio são satisfeitas para tais valores de $\bar{\sigma}$ e ρ^2 :

$$\bar{\sigma} = \frac{h}{\mu_I^2} \quad (178)$$

$$\rho^2 = \frac{\mu_I^2 - m_\pi^2}{\lambda^2} + f_\pi^2 \left[1 - \frac{m_\pi^4}{\mu_I^4} \right]. \quad (179)$$

O potencial, em sua aproximação clássica, fica da seguinte forma sendo avaliado em seu mínimo verdadeiro para esse caso:

$$V_{cl}^{(M\sigma L)} \Big|_{(\min, \bar{\pi}^2)} = \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{\mu_I^2}{\lambda^2} \right)^2 - \frac{h^2}{\mu_I^2} - \frac{\mu_I^2}{2} \left\{ \frac{\mu_I^2 - m_\pi^2}{\lambda^2} + f_\pi^2 \left[1 - \frac{m_\pi^4}{\mu_I^4} \right] \right\} \quad (180)$$

$$= V_{cl}^{(L\sigma M)} \Big|_{\min, \bar{\pi}^2=0} - \frac{1}{4\lambda^2} [m_\pi^2 - \mu_I^2]^2 - \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{2} \left[\frac{\mu_I}{m_\pi} - \frac{m_\pi}{\mu_I} \right]^2. \quad (181)$$

A partir da equação acima, fica claro que para $\mu_I > m_\pi$ o mínimo do potencial nessa fase é menor do que o mínimo do potencial avaliado na fase sem condensado. Desta forma, este é o nosso mínimo verdadeiro.

O espectro de quasi-partículas para essa fase de condensado de píons com a escolha de $\sin \alpha = 0$ é:

$$(Q_0^2 - m_3^2)(Q_0^2) [-m_\xi^2 m_1^2 + (2\lambda^2 \bar{\sigma} \rho)^2 - m_\xi^2 (2\mu_I)^2 + Q_0^2 (m_\xi^2 + m_1^2 + (2\mu_I)^2) - Q_0^4] = 0, \quad (182)$$

onde as soluções são:

$$Q_0 = |m_3|, \quad (183)$$

$$Q_0 = 0, \quad (184)$$

$$Q_0^2 = \frac{1}{2} \left\{ m_\xi^2 + m_1^2 + 4\mu_I^2 \pm \sqrt{(-m_\xi^2 + m_1^2 + (2\mu_I)^2)^2 + 4(2\lambda^2 \bar{\sigma} \rho)^2} \right\}. \quad (185)$$

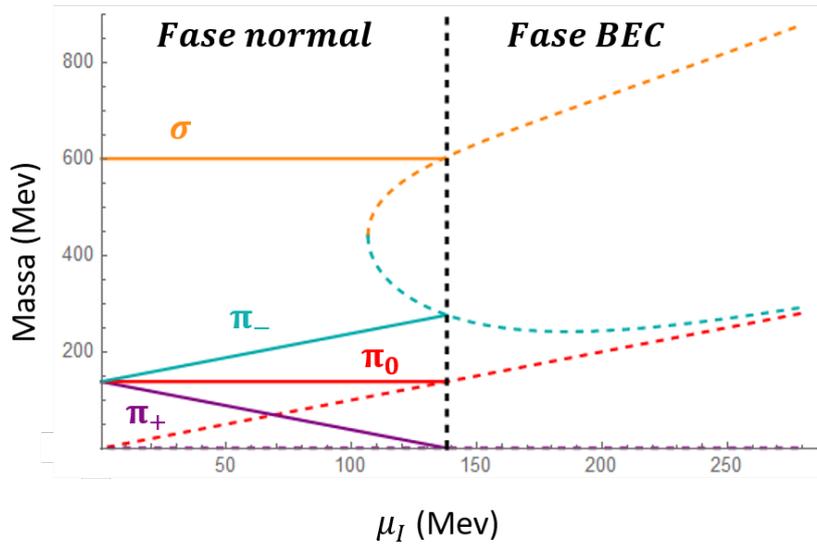
Com isso, podemos fazer a conexão com a literatura dos nomes das quasi-partículas na segunda fase da seguinte forma:

$$(a) \rightarrow \pi^0$$

$$(b) \rightarrow \pi^+$$

$$(c, +) \rightarrow \sigma$$

$$(c, -) \rightarrow \pi^-$$

Figura 7 - Diagrama $M \times \mu_I$ 

Legenda: Linhas contínuas são as massas na fase normal, com condensação quiral porém sem condensado de píons.

Fonte: PALAHARES, 2012, p.135. Adaptada pelo autor.

Logo:

$$Q_0^{(a)} = |\mu_I| \quad (186)$$

$$Q_0^{(b)} = 0 \quad (187)$$

$$\begin{aligned} [Q_0^{(c,\pm)}]^2 &= \frac{7}{2}\mu_I^2 - m_\pi^2 + \lambda^2 f_\pi^2 \pm \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{5}{2}\mu_I^2 - m_\pi^2 + \lambda^2 f_\pi^2 \left(1 - 2\frac{m_\pi^4}{\mu_I^4} \right) \right]^2 + 4\lambda^2 f_\pi^2 \frac{m_\pi^4}{\mu_I^4} \left[\mu_I^2 - m_\pi^2 + \lambda^2 f_\pi^2 \left(1 - \frac{m_\pi^4}{\mu_I^4} \right) \right]}. \end{aligned} \quad (188)$$

A figura 7 nos fornece uma análise mais clara das soluções nas duas fases: normal e com condensado. Na fase normal, σ e π_0 não são afetados pelo potencial de isospin devido à sua invariância rotacional sob o eixo 3. Já os píons carregados apresentam um custo linear de energia dependente do potencial. Conforme o potencial se aproxima do valor de massa m_π , o pión negativo tem seu custo de energia aumentado enquanto o pión positivo tem seu custo de energia indo a zero. Isso nos leva a concluir que o pión que condensa é o π^+ . Na segunda fase em que $\mu_I > m_\pi$ vemos uma dependência não trivial de isospin devido à rotação de isospin efetiva provocada no menor estado de energia do sistema.

4 GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO FUNCIONAL APLICADO À CONDENSÇÃO DE PÍONS

Antes de investigarmos os aspectos não perturbativos da condensação de Bose-Einstein de píons por meio do Grupo de Renormalização Funcional (FRG), serão discutidos os aspectos fundamentais da teoria deste formalismo. Essa discussão não tem como objetivo fazer uma abordagem completa do tema, e sim apresentar somente o que é necessário para que possamos aplicar no nosso modelo de píons a densidade de isospin finita. Para estudos mais aprofundados, o leitor é direcionado às Refs. (BLAIZOT, 2007; DELAMOTTE, 2012; BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002).

O objetivo do Grupo de Renormalização Funcional é o cálculo de efeitos não perturbativos em teoria quântica de campos. Isso se dá através da construção de ações efetivas $\Gamma_\kappa[\phi]$ que interpolam entre a ação clássica (para κ grande o suficiente) e a ação efetiva completa $\Gamma[\phi]$ (quando κ tende a zero).

Esse conjunto de ações efetivas é um fluxo parametrizado pela escala κ , obtido através de equações diferenciais oriundas de uma hierarquia de equações envolvendo funções de n pontos mapeadas a partir de uma equação de grupo de renormalização exata para a ação efetiva Γ_κ (WETTERICH, 1993). Sabemos desde a física básica, que resolver um sistema de equações diferenciais não é um trabalho fácil. Quando nos deparamos com um conjunto de equações diferenciais que envolvem efeitos quânticos de uma dada teoria de campos, solucionar as mesmas é solucionar toda a teoria quântica de campos envolvida. Na prática, a fim de estudar efeitos não-perturbativos na grande maioria das TQC, algumas aproximações e/ou truncamentos devem ser adotados no fluxo exato do FRG, de acordo com a física do sistema que está sendo estudado.

Em teoria quântica de campos, o estudo das escalas de energia está conectado com os valores extremos de momento q (PESKIN, 2018). A escala de energia nos faz conciliar entre os regimes ultravioleta (UV) e infravermelho (IR). O regime de UV costuma ser bem explicado na teoria de renormalização perturbativa, como pode ser encontrado em diversos livros de TQC (vide, por exemplo, (PESKIN, 2018)). Já o regime IR não possui uma abordagem sistemática geral. A fim de definir um fluxo de equações exatas que mantenham de forma controlada os modos IR, a ação efetiva Γ_κ conterá apenas flutuações quânticas no regime em que $q^2 \gg \kappa^2$. Podemos considerar que toda deformação que depende de κ de uma teoria define um fluxo exato no espaço de ações efetivas. Entretanto, algumas condições devem ser impostas à teoria modificada para $\kappa \neq 0$ para que tenhamos equações de fluxo úteis para cálculos de efeitos não-perturbativos. A determinação de um limite suave para κ tendendo a zero e para grandes valores de κ são imprescindíveis para que os efeitos não-perturbativos possam ser acessados quando κ tender a zero.

Como dito pelo título deste trabalho, nosso objetivo principal é, utilizando o grupo de renormalização funcional, estudar a condensação de píons. Até agora, abordamos a estrutura de uma simetria fundamental presente na QCD, a simetria quiral, em suas quebras espontânea e explícita. Neste capítulo trabalharemos com um modelo ainda mais simplificado, o campo escalar complexo, a fim de nos concentrarmos no método não-perturbativo utilizado nesta abordagem preliminar.

Na seção 4.1 construiremos a equação de fluxo exata considerando uma Lagrangeana de um campo escalar complexo com interação Φ^4 . Implementaremos na ação efetiva completa a escala de energia κ , fazendo efetivamente um corte no setor de energia estudado. Para isso, introduziremos um regulador \mathcal{R}_κ a fim de suprimir os modos IR, dentro de um limite de $q^2 \ll \kappa^2$. Descrevemos então um funcional gerador de funções de Green conexas dependente da escala κ para a construção da ação efetiva completa, de modo que a derivada da mesma com relação a κ nos leva ao fluxo do Grupo de Renormalização Funcional, composto de equações diferenciais exatas.

Devido à grande complexidade da equação de fluxo mais geral, é necessário fornecer alguma aproximação e/ou truncamento a fim de diminuir o número de equações diferenciais para que assim consigamos resolver o fluxo do sistema que estamos estudando. Com isso, na subseção 4.1.1 construiremos um modelo a partir da aproximação derivativa chamado de Aproximação de Potencial Local (LPA). Notaremos que a mesma é uma boa aproximação para o sistema que estamos interessados, visto que reproduz os mesmos efeitos observados na aproximação clássica, de maneira similar aos campos de píons estudados no capítulo anterior.

Na subseção 4.1.2, aplicaremos a LPA a fim de reduzir drasticamente o número de equações diferenciais dadas pelo fluxo de FRG, para que assim possamos resolver as mesmas de forma numérica, e, com isso, consigamos analisar a transição de fase a densidade finita.

4.1 Equação de fluxo exata

Nesta seção, através de um arcabouço matemático poderoso, construiremos a equação de fluxo exata interpoladora, como mencionado acima, para uma teoria de campo escalar. Partindo da Lagrangeana com interação $(\Phi^2)^2$ e implementando um termo quadrático na ação dependente de κ a fim de suprimir os efeitos dos modos IR deixando os modos UV intactos, construímos a ação efetiva completa para a teoria na escala κ . Com isso, a equação do FRG é encontrada tomando a derivada parcial desta ação efetiva completa com relação a κ .

A Lagrangeana clássica, no espaço euclideano, que rege o sistema com interação $(\Phi^2)^2$ é escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial_\mu \Phi) + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \frac{\lambda}{4!}(\Phi^2)^2, \quad (189)$$

onde $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$.

Escrevendo o campo Φ e a delta de Dirac δ no espaço de momento, temos:

$$\Phi(x) = \frac{V}{V^{\frac{1}{d}}} \int_q e^{iq \cdot x} \Phi(q), \quad (190)$$

$$\delta(q) = \int d^d x e^{iq \cdot x}, \quad (191)$$

onde V é o volume,

$$\int_q = \int d^d q$$

e $d = 1, 2, 3$ e 4 .

A ação euclideana fica:

$$\begin{aligned} S[\Phi] &= \int d^d x \mathcal{L}, \\ &= \frac{1}{2} \frac{V^2}{V^{\frac{2}{d}}} \int_q \varphi_i(q) [q^2 + m^2] \varphi_i(-q) + \\ &+ \frac{\lambda}{4!} \frac{V^4}{V^{\frac{4}{d}}} \int_{q_1, \dots, q_4} \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \varphi_i(q_1) \varphi_i(q_2) \varphi_j(q_3) \varphi_j(q_4). \end{aligned} \quad (192)$$

Com o objetivo de encontrarmos uma equação de fluxo completa que suprime os modos IR mantendo os modos UV intactos, com a escala κ sendo a fronteira entre os limites, adicionamos um termo quadrático na ação dependente da escala κ definido como:

$$\Delta S_\kappa = \frac{1}{2} \frac{V^2}{V^{\frac{2}{d}}} \int_q \varphi_i(q) \mathcal{R}_\kappa^{ij} \varphi_j(-q), \quad (193)$$

onde $\mathcal{R}_\kappa^{ij}(q)$ é chamado de regulador escrito como $\mathcal{R}_\kappa^{ij}(q) = \delta^{ij} R_\kappa(q)$. Este irá suprimir os modos IR com $q^2 \ll \kappa^2$. Logo, para $q^2 \ll \kappa^2$ o regulador tenderá a κ^2 (efetivamente congelando esses modos IR com a adição desse termo de massa grande) e, quando $q^2 \gtrsim \kappa^2$, temos o regulador indo a zero.

Com o objetivo de escrevermos a ação efetiva completa, precisamos de um funcional gerador de funções de Green conexas da teoria deformada por κ . Definimos então W_κ como sendo:

$$W_\kappa[J] = \ln \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -S[\Phi] - \Delta S_\kappa[\Phi] + \int d^4x \Phi(x) J(x) \right\}. \quad (194)$$

Usando o procedimento padrão (vide, por exemplo, (PESKIN, 2018)), uma ação efetiva pode ser construída via transformada de Legendre. Logo, a ação efetiva fica:

$$\tilde{\Gamma}[\phi] = -W_\kappa[J_\phi] + \int d^d x \phi J_\phi(x), \quad (195)$$

com a derivada funcional de W_κ sendo igual ao valor esperado do campo no vácuo da teoria:

$$\left. \frac{\delta W_\kappa}{\delta J(x)} \right|_{J=J_\phi} = \langle \Phi(x) \rangle_{\kappa, J_\phi}. \quad (196)$$

O funcional construído apresenta características interessantes. Podemos notar que na ausência de fontes externas, a ação efetiva $\tilde{\Gamma}$ é extremizada pelo valor esperado no vácuo de campo ϕ :

$$\left. \frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \phi} \right|_{J_\phi=0, \phi=\langle \phi \rangle} = 0. \quad (197)$$

A ação efetiva $\tilde{\Gamma}[\phi]$ é o funcional gerador de funções de correlação irredutíveis a uma partícula e, no caso em que as flutuações são suprimidas, a ação efetiva recupera a ação original da teoria κ -*modificada*: $S + \Delta S_\kappa$ (SVANES; ANDERSEN, 2011).

Como nosso objetivo é construir uma ação efetiva que interpola entre a teoria completa exata para $\kappa = 0$ e a teoria clássica em grandes escalas, quando $\kappa = \Lambda$, é conveniente definirmos uma transformada de Legendre *modificada*, subtraindo um termo extra $\Delta \mathcal{S}_\kappa$ para que a ação original seja reproduzida quando as flutuações são suprimidas sem afetar assim a teoria completa. O motivo dessa introdução se dá pela não satisfação de que para $\kappa = \Lambda$ a ação Γ_Λ reproduza a ação clássica $S[\phi]$. Definimos então a ação efetiva deformada

como:

$$\Gamma_\kappa[\phi] = -W_\kappa[J]_\phi + \int d^d x \phi J_\phi(x) - \Delta S_\kappa[\phi]. \quad (198)$$

Depois de construirmos o funcional gerador e a ação efetiva, o próximo passo é tomar a derivada ordinária desta última com relação a κ . Derivando (198), temos:

$$\begin{aligned} \partial_\kappa \Gamma_\kappa[\phi] &= -\partial_\kappa W_\kappa[J_\phi] + \int d^d x \phi \partial_\kappa J_\phi(x) - \partial_\kappa \Delta S_\kappa[\phi], \\ \partial_\kappa \Gamma_\kappa[\phi] &= -\partial_\kappa W_\kappa[J]|_{J=J_\phi} - \int d^d x \frac{\delta W_\kappa[J_\phi]}{\delta J_\phi} (\partial_\kappa J_\phi) + \int d^d x \phi \partial_\kappa J_\phi(x) - \partial_\kappa \Delta S_\kappa[\phi]. \end{aligned} \quad (199)$$

onde o primeiro e o segundo termos da igualdade acima aparecem a partir de uma regra da cadeia em $\partial_\kappa W_\kappa$. Usando (196), ficamos com:

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\phi] = -\partial_\kappa W_\kappa[J]|_{J=J_\phi} - \partial_\kappa \Delta S_\kappa[\phi]. \quad (200)$$

A partir da expressão de W_κ como uma integral funcional, podemos então reescrever a derivada da ação como sendo:

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa = -\frac{\int \mathcal{D}\Phi (-\partial_\kappa \Delta S_\kappa[\Phi]) \exp\{-S[\Phi] - \Delta S_\kappa[\Phi] + \int d^4 x \Phi(x) J_\phi(x)\}}{e^{W_\kappa[J_\phi]}} - \partial_\kappa \Delta S_\kappa[\phi]. \quad (201)$$

Substituindo o regulador \mathcal{R}_κ^{ij} na expressão acima e utilizando a notação de média, dada por:

$$\langle \mathcal{A} \rangle_{J_\phi} = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \mathcal{A} \exp\{-S[\Phi] - \Delta S_\kappa[\Phi] + \int d^4 x \Phi(x) J_\phi(x)\}}{e^{W_\kappa[J_\phi]}}, \quad (202)$$

temos que:

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa = \frac{1}{2} \frac{V^2}{V^{\frac{2}{d}}} \int_q \partial_\kappa R_\kappa(q) \delta_{ij} [\langle \varphi_i(q) \varphi_j(-q) \rangle_{J_\phi} - \phi_i(q) \phi_j(-q)], \quad (203)$$

onde $\langle \varphi_i \rangle_{J_\phi} = \phi_i$.

O fator entre parênteses na equação (203), é o propagador \mathcal{G}_κ no espaço de momento que é igual à derivada funcional do campo ϕ_j com relação à fonte $J_{\phi,i}$ (BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002). Desta forma, chegamos em:

$$\begin{aligned}
\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\phi] &= \frac{1}{2} V^{\frac{d-2}{2}} V \int_q \partial_\kappa R_\kappa(q) \delta_{ij} \frac{\delta \phi_j}{\delta J_{\phi,i}}, \\
&= \frac{V}{2} \int_q \partial_\kappa R_\kappa(q) \delta_{ij} V^{\frac{d-2}{2}} \left[\frac{\delta J_{\phi,i}}{\delta \phi_j} \right]^{-1}, \\
&= \text{Tr} \frac{1}{2} \int_q \partial_\kappa R^{ij}(q) V^{\frac{d-2}{2}} \left[\frac{\delta^2(\Gamma_\kappa + \Delta S_\kappa)}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \right]^{-1},
\end{aligned} \tag{204}$$

Definimos então o propagador completo da teoria como sendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_\kappa^{ij}(q) &= V^{\frac{d-2}{2}} \left[\frac{\delta^2(\Gamma_\kappa + \Delta S_\kappa)}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \right]^{-1}, \\
\mathcal{G}_\kappa^{ij}(q) &= V^{\frac{d-2}{d}} \left[\frac{\delta^2 \Gamma_\kappa}{\delta \phi_i \phi_j} + \delta_{ij} R_\kappa \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{205}$$

Por fim, a equação de fluxo exata do FRG interpoladora é então (BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002):

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} V \int_q [\partial_\kappa R_\kappa(q)] \mathcal{G}_\kappa(q). \tag{206}$$

A equação final (206) é a equação de fluxo exata que resultará na hierarquia de equações diferenciais que deverão ser resolvidas e que nos levará a resultados finitos a partir do bom comportamento da equação. Dadas condições de contorno finitas, ambas as divergências IR e UV estão ausentes. O controle de IR é garantido pelo regulador presente no propagador completo \mathcal{G}_κ . Já os efeitos de divergência UV são controlados a partir do fator $\partial_\kappa R_\kappa$.

Apesar de sua aparência agradável, a equação (206) apresenta um nível de dificuldade altíssimo. Resolver a hierarquia de equações diferenciais resultantes da mesma, é basicamente resolver a teoria quântica de campos, o que é praticamente impossível na maioria dos casos. Desta forma, para que tenhamos resultados consistentes, alguns truncamentos e aproximações devem ser feitos para que possamos chegar a equações diferenciais mais simples e assim poder obter os observáveis.

Com isso, para que possamos resolver a equação (206) e chegar nas equações diferenciais que definem o nosso sistema, precisamos conhecer o propagador completo de nossa teoria. O conhecimento do propagador se dará pela aproximação definida. Nos concentraremos em utilizar uma aproximação derivativa, bem particular, chamada de Aproximação de Potencial Local (LPA) (SVANES; ANDERSEN, 2011). Nesta aproximação, considera-

remos campos clássicos constantes de modo que a nossa ação efetiva completa, $\Gamma_\kappa[\phi(x)]$, resultará em um potencial efetivo $V_\kappa(\bar{\phi})$. As equações diferenciais resultarão em equações diferenciais ordinárias cujas derivadas são com relação a κ e dependerão dos valores dos campos clássicos.

4.2 Toy model de condensação de pions

Temos como objetivo futuro estudar o diagrama de temperatura versus potencial químico de isospin para um sistema de pions descrito pelo $M\sigma L$. Nesta seção, apresentaremos no entanto uma teoria mais simples que contém algumas das propriedades físicas vistas no modelo quiral usado anteriormente. Os efeitos não-perturbativos no fenômeno da BEC serão então analisados em uma teoria de campo escalar complexo dado por um $\pi = (\pi^1 + i\pi^2)/\sqrt{2}$ com simetria $U(1)$ a densidade finita.

Assim como na teoria quiral, definiremos uma **ação euclideana** na qual o vínculo de conservação de carga $U(1)$ será incluído:

$$S_E = \int d^4x \left\{ -(\partial_0 + i\mu_I)\pi^*(\partial_0 - i\mu_I)\pi + (\nabla\pi^*) \cdot (\nabla\pi) + m^2\pi^*\pi + \lambda^2(\pi^*\pi)^2 \right\}. \quad (207)$$

Em termos dos campos π^1 e π^2 a ação pode ser reescrita como:

$$S_E = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\partial_\nu\pi^1\partial_\nu\pi^1 + \frac{1}{2}\partial_\nu\pi^2\partial_\nu\pi^2 + \mu_I[\pi^1\partial_0\pi^2 - \pi^2\partial_0\pi^1] + \frac{(m^2 - \mu_I^2)}{2}[(\pi^1)^2 + (\pi^2)^2] + \frac{\lambda^2}{4}[(\pi^1)^2 + (\pi^2)^2]^2 \right\}. \quad (208)$$

Comparando esta ação com a ação do modelo sigma linear a densidade de isospin finita, podemos concluir que o *toy model* é uma versão simplificada na qual apenas as direções dos pions carregados são consideradas.

Assim como fizemos no $M\sigma L$, para que possamos entender a estrutura de fases do *toy model* e o espectro de quasi-partículas a densidade finita, escreveremos a ação em torno de condensados. A ideia é estudar pequenas flutuações em torno do estado de vácuo. Com isso, temos que:

$$\pi^1(x) = \rho\cos\theta + \eta^1(x), \quad (209)$$

$$\pi^2(x) = \rho\sin\theta + \eta^2(x), \quad (210)$$

onde η^1 e η^2 são os campos de flutuação.

Substituindo esses campos na ação S_E , temos:

$$\begin{aligned}
S_E = & \beta V \left(\frac{(m^2 - \mu_I^2)}{2} \rho^2 + \frac{\lambda^2}{4} \rho^4 \right) + \int d^4x \left\{ [(m^2 - \mu_I^2)\rho + \lambda^2 \rho^3] \eta^\theta + \right. \\
& + \frac{1}{2} \partial_\nu \eta^1 \partial_\nu \eta^1 + \frac{1}{2} \partial_\nu \eta^2 \partial_\nu \eta^2 + \mu_I [\eta^1 \partial_0 \eta^2 - \eta^2 \partial_0 \eta^1] + \\
& + \frac{(m^2 - \mu_I^2)}{2} [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2] + \frac{\lambda^2}{4} [4\rho^2 (\eta^\theta)^2 + 2\rho^2 [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2]] + \\
& \left. + \lambda^2 \rho \eta^\theta [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2] + \frac{\lambda^2}{4} [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2]^2 \right\}, \tag{211}
\end{aligned}$$

com $\eta^\theta = (\eta^1 \cos\theta + \eta^2 \sin\theta)$. Acima, um termo de superfície da forma $\int d^4x \partial_0 \eta$ foi desconsiderado, pois podemos supor que os campos vão a zero no infinito. Comparando essa ação expandida com a do M σ L, podemos notar que a segunda linha gera a condição de equilíbrio para a solução do condensado:

$$\bar{\rho}(m^2 - \mu_I^2) + \lambda^2 \bar{\rho}^3 = 0. \tag{212}$$

A solução dessa equação é dada por $\bar{\rho} = 0$ ou $\bar{\rho}^2 = \frac{\mu_I^2 - m^2}{\lambda^2}$.

Após isso, reescreveremos a ação euclidiana no espaço de momento a fim de reproduzir o estudo do condensado feito no modelo M σ L e assim escrever um diagrama que descreva bem a fase normal e a fase do BEC. Considerando a transformada de Fourier dos campos como:

$$\eta^i(x) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \beta V \int_Q e^{iQ \cdot x} \eta^i(Q), \tag{213}$$

e substituindo na ação euclideana, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{S}_E}{\beta V} = & \frac{(m^2 - \mu_I^2)}{2} \rho^2 + \frac{\lambda^2}{4} \rho^4 + \\
& + \frac{1}{\beta V} \int d^4x \left\{ [(m^2 - \mu_I^2)\rho + \lambda^2 \rho^3] \eta^\theta \right\} + \\
& + \int_q \frac{\beta^2}{2} \begin{pmatrix} \eta^1(Q) & \eta^2(Q) \end{pmatrix} \mathcal{G}^{-1}(Q) \begin{pmatrix} \eta^1(-Q) \\ \eta^2(-Q) \end{pmatrix} + \\
& + \frac{1}{\beta V} \int d^4x \left\{ \lambda^2 \rho \eta^\theta [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2] + \frac{\lambda^2}{4} [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2]^2 \right\}, \tag{214}
\end{aligned}$$

onde a matriz do inverso do propagador é definida como:

$$\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -Q_0^2 + (\vec{q})^2 + m^2 - \mu_I^2 + u_e & \lambda^2 \rho^2 \text{sen}(2\theta) - 2i\mu_I Q_0 \\ \lambda^2 \rho^2 \text{sen}(2\theta) + 2i\mu_I Q_0 & -Q_0^2 + (\vec{q})^2 + m^2 - \mu_I^2 + u_s \end{pmatrix}, \quad (215)$$

com $u_e = \lambda^2 \rho^2 (1 + 2\cos^2\theta)$ e $u_s = \lambda^2 \rho^2 (1 + 2\text{sen}^2\theta)$.

Para encontrarmos as relações de dispersão para as quasi-partículas, devemos então encontrar os autovalores de \mathcal{G}^{-1} e igualá-los a zero. Temos então que:

$$g_+^{-1} = -\left(\sqrt{Q_0^2 + \frac{\lambda^4 \rho^4}{4\mu_I^2} - \mu_I} \right)^2 + (\vec{q})^2 + m^2 + 2\lambda^2 \rho^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 \rho^2}{8\mu_I^2} \right), \quad (216)$$

$$g_-^{-1} = -\left(\sqrt{Q_0^2 + \frac{\lambda^4 \rho^4}{4\mu_I^2} + \mu_I} \right)^2 + (\vec{q})^2 + m^2 + 2\lambda^2 \rho^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 \rho^2}{8\mu_I^2} \right), \quad (217)$$

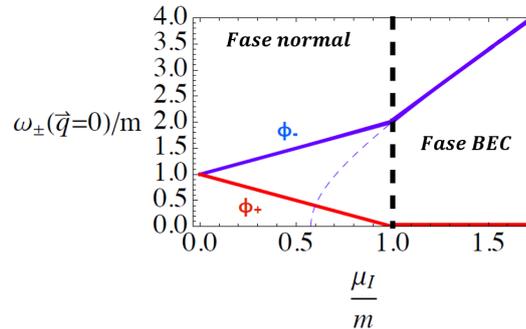
onde teremos $\omega_{\pm}^2(\vec{q})$:

$$\omega_{\pm}^2(\vec{q}) = (\vec{q}^2) + m^2 + \mu_I^2 + 2\lambda^2 \rho^2 \pm \sqrt{\lambda^4 \rho^4 + 4\mu_I^2 [(\vec{q})^2 + m^2 + 2\lambda^2 \rho^2]}. \quad (218)$$

Tomando o caso particular de $\rho = 0$, ou seja, na ausência de condensados, podemos notar que a relação de dispersão é recuperada para um sistema sem condensado sob a ação de um potencial de isospin:

$$\omega_{\pm}^2(\vec{q}) = \left[\sqrt{(\vec{q})^2 + m^2} \pm \mu_I \right]^2. \quad (219)$$

Figura 8 - Espectro de massa



Legenda: Espectro de massas como função do potencial químico μ_I em unidades de massa
 Fonte: PALHARES, 2012,p.148. Adaptada pelo autor.

Para quando $\mu_I > m$, temos que a condição de equilíbrio para um mínimo reproduz a equação (212), e, com isso, a relação de dispersão para a fase com condensado será:

$$\begin{aligned}\omega_{\pm}^{\rho=\bar{\rho}}(\vec{q}) &= (\vec{q})^2 + 3\mu_I^2 - m^2 \pm \sqrt{(\mu_I^2 - m^2)^2 + 4\mu_I^2[(\vec{q})^2 + 2\mu_I^2 - m^2]}, \\ \omega_{\pm}^{\rho=\bar{\rho}}(\vec{q}) &= (\vec{q})^2 + 3\mu_I^2 - m^2 \pm \sqrt{(3\mu_I^2 - m^2)^2 + 4\mu_I^2(\vec{q})^2}.\end{aligned}\quad (220)$$

Tomando o limite de $\vec{q} \rightarrow 0$, obtemos o espectro de massa em que:

$$\begin{aligned}m_a^2 &= 2(3\mu_I^2 - m^2), \\ m_b^2 &= 0,\end{aligned}$$

onde m_b é o modo do bóson de Goldstone sem massa na fase de condensado, devido à quebra da simetria quirial.

Inicialmente escolhemos um modelo simples que possa reproduzir os efeitos do BEC de maneira similar ao modelo $M\sigma L$. Devido a simplicidade de escolha, ao escrevermos π como sendo uma combinação linear de π^1 e π^2 , na figura acima que representa o espectro de massa como função do potencial químico, podemos notar que o espectro de flutuações de ϕ_+ e ϕ_- é similar ao dos píons carregados para o modelo quirial de píons. Desta forma, como anteriormente estudado, podemos dizer que nesse modelo simples, sob efeito de comparação ϕ_+ corresponde ao pión positivo que condensa e ϕ_- corresponde ao pión de carga negativa. Com isso, na subseção seguinte implementaremos, nessa teoria mais simples, um estudo não perturbativo limpo da física da BEC e das interações presentes.

4.3 Análise do FRG na LPA para o condensado de píons

Nosso objetivo nessa seção é encontrar, na aproximação de LPA, as equações diferenciais que definem o fluxo de FRG no modelo simplificado apresentado na subseção anterior. Como mencionado no início desta seção, a aproximação LPA nos dá uma drástica redução das equações diferenciais.

Partindo da deformação da ação efetiva dependente de κ , temos:

$$\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\pi^i] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_\kappa R_\kappa [\mathcal{G}^{-1} + R_\kappa]^{-1} \right], \quad (221)$$

sendo $\mathcal{G}^{-1}(Q)$:

$$\left[\mathcal{G}^{-1}(Q) \right]^{ij} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta^2 \Gamma_\kappa}{\delta \pi^i(Q) \delta \pi^j(-Q)}, \quad (222)$$

onde R_κ é o regulador que suprime os modos IR. Como discutido acima, o regulador desempenha também um papel importante de filtrar os efeitos UV fazendo com que não precisemos nos preocupar com a renormalização. O regulador deve ser escolhido de acordo com a teoria física que estamos estudando. Para este trabalho, utilizaremos o regulador de Litim. Recomendamos ao leitor a referência (BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002) para uma discussão mais aprofundada do regulador utilizado. Temos então que:

$$R_\kappa(\vec{q}^2) = (\kappa^2 - \vec{q}^2) \theta(\kappa^2 - \vec{q}^2). \quad (223)$$

Para encontrar uma expressão explícita e fechada para a equação de fluxo, uma ação efetiva dependente de κ , Γ_κ , deve ser determinada.

Tomaremos como referência a ação efetiva \mathcal{S}_E , descrita anteriormente, para descrever a ação efetiva em termos de κ na LPA:

$$\Gamma_\kappa[\pi^i] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\nu \pi^1 \partial_\nu \pi^1 + \frac{1}{2} \partial_\nu \pi^2 \partial_\nu \pi^2 + \mu_\kappa [\pi^1 \partial_0 \pi^2 - \pi^2 \partial_0 \pi^1] + V_\kappa(\alpha) \right\}, \quad (224)$$

onde α e $V_\kappa(\alpha)$ são definidos como:

$$\alpha = (\pi^1)^2 + (\pi^2)^2, \quad (225)$$

$$V_\kappa(\alpha) = \mathcal{V}_\kappa + \frac{(m_\kappa^2 - \mu_\kappa^2)}{2} \alpha + \frac{\lambda_\kappa^2}{4} \alpha^2. \quad (226)$$

Assim como feito anteriormente, para estudarmos o espectro e as relações de dispersão, vamos transformar parcialmente essa ação para o espaço de momento. Utilizando a mesma transformação para os campos que fizemos anteriormente, obtemos:

$$\Gamma_\kappa[\pi^i] = \int \frac{\beta^2}{2} \begin{pmatrix} \pi^1(Q) & \pi^2(Q) \end{pmatrix} \mathcal{A}(Q) \begin{pmatrix} \pi^1(-Q) \\ \pi^2(-Q) \end{pmatrix} + \int d^4x V_\kappa(\alpha), \quad (227)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -Q_0^2 + (\vec{q}^2) & -2i\mu_\kappa Q_0 \\ 2i\mu_\kappa Q_0 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) \end{pmatrix}. \quad (228)$$

Da ação acima, encontramos o inverso do propagador completo da seguinte forma:

$$\mathcal{G}^{-1}(Q) = \frac{1}{\beta^2} \frac{\delta^2 \Gamma_\kappa}{\delta \pi^a(Q) \delta \pi^b(-Q)}, \quad (229)$$

$$\mathcal{G}^{-1}(Q) = \mathcal{A}(Q) + \frac{1}{\beta V} \int d^4x \left\{ 4V''_\kappa(\alpha) \pi^a(x) \pi^b(x) + 2V'_\kappa(\alpha) \delta^{ab} \right\}. \quad (230)$$

Podemos dizer que o ansatz da LPA define tal aproximação para campos constantes, logo, a expressão acima é reescrita como:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -Q_0^2 + (\vec{q})^2 + 4V_\kappa''(\alpha)(\pi^1)^2 + 2V_\kappa'(\alpha) & 4V_\kappa''(\alpha)\pi^1\pi^2 - 2i\mu_\kappa Q_0 \\ 4V_\kappa''(\alpha)\pi^1\pi^2 + 2i\mu_\kappa Q_0 & -Q_0^2 + (\vec{q}^2) + 4V_\kappa''(\alpha)(\pi^2)^2 + 2V_\kappa'(\alpha), \end{pmatrix} \quad (231)$$

e a ação se reduz ao potencial $V_\kappa(\alpha)$:

$$\frac{\Gamma_\kappa}{\beta V} = V_\kappa(\alpha). \quad (232)$$

Tomando a derivada com relação a κ dos dois lados, temos:

$$\frac{1}{\beta V} (\partial_\kappa \Gamma_\kappa[\pi^i]) = \partial_\kappa V_\kappa(\alpha). \quad (233)$$

Observe que a derivada da ação (221) dependerá da derivada do regulador. Desta forma, derivando o regulador com relação a κ :

$$\partial_\kappa R_\kappa = 2\kappa\theta(\kappa^2 - \vec{q}^2), \quad (234)$$

a equação de fluxo fica:

$$\partial_\kappa V_\kappa = \frac{1}{2} \int_Q 2\kappa\theta(\kappa^2 - \vec{q}^2) \text{Tr} \left\{ \left[\mathcal{G}^{-1}(Q_0, \vec{q}^2 \rightarrow \vec{q}^2 + (\kappa^2 - \vec{q}^2)\theta(\kappa^2 - \vec{q}^2)) \right]^{-1} \right\}. \quad (235)$$

Tomando $\vec{q}^2 \rightarrow \kappa^2$, a função final filtra os valores de κ e o regulador cumpre o seu papel de filtragem dos efeitos IR e UV:

$$\partial_\kappa V_\kappa(\alpha) = \sum_{Q_0} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \kappa \int_0^\kappa dq q^2 \text{Tr} \left\{ \left[\mathcal{G}^{-1}(Q_0, \vec{q}^2 \rightarrow \kappa^2) \right]^{-1} \right\}, \quad (236)$$

$$\partial_\kappa V_\kappa(\alpha) = \frac{\kappa^4}{6\pi^2} \sum_{Q_0} \text{Tr} \left\{ \left[\mathcal{G}^{-1}(Q_0, \vec{q}^2 \rightarrow \kappa^2) \right]^{-1} \right\}. \quad (237)$$

Observe que o argumento do traço nada mais é do que o propagador completo da teoria. Da identidade $A^{-1}A = I$, podemos encontrar a matriz \mathcal{G} e calcular o traço da mesma. Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}(Q_0, \kappa^2) \right\} &= 2 \frac{-Q_0^2 + v_\kappa}{[-Q_0^2 + v_\kappa]^2 - 4\alpha^2[V_\kappa'']^2 - 4\mu_\kappa^2 Q_0^2}, \\ &= 2 \frac{-Q_0^2 + v_\kappa}{[Q_0^2 - (v_\kappa + 2\mu_\kappa^2 + 2\omega_\kappa)][Q_0^2 - (v_\kappa + 2\mu_\kappa^2 - 2\omega_\kappa)]}, \\ &= \left(\frac{\mu_\kappa^2}{\omega_\kappa} + 1 \right) \frac{1}{-Q_0^2 + E_+^2} + \left(-\frac{\mu_\kappa^2}{\omega_\kappa} + 1 \right) \frac{1}{Q_0^2 + E_-^2}. \end{aligned} \quad (238)$$

com:

$$\begin{aligned}
v_\kappa &= \kappa^2 + 2\alpha V_\kappa'' + 2V_\kappa', \\
\omega_\kappa &= \sqrt{\mu_\kappa^2(\kappa^2 + 2V_\kappa') + (\mu_\kappa^2 + \alpha V_\kappa'')^2}, \\
E_\pm^2 &= \kappa^2 + 2\alpha V_\kappa'' + 2V_\kappa' + 2\mu_\kappa^2 \pm 2\sqrt{\mu_\kappa^2(\kappa^2 + 2V_\kappa') + (\mu_\kappa^2 + \alpha V_\kappa'')^2}.
\end{aligned} \tag{239}$$

A equação de fluxo é reescrita como:

$$\partial_\kappa V_\kappa = \frac{\kappa^4}{6\pi^2} \left\{ \left(\frac{\mu_\kappa^2}{\omega_\kappa} + 1 \right) \sum_{Q_0} \frac{1}{-Q_0^2 + E_+^2} + \left(-\frac{\mu_\kappa^2}{\omega_\kappa} + 1 \right) \sum_{Q_0} \frac{1}{-Q_0^2 + E_-^2} \right\}. \tag{240}$$

A equação (240) nos mostra a soma de Matsubara do traço do propagador completo. Após fazermos o traço e reescrevermos a equação de fluxo, chegamos que as somas de Matsubara que devem ser feitas nas equações de fluxo V_κ e $V_\kappa^{(n)}$ devem ser da forma geral:

$$\sum_{Q_0} f_n(E^2) = \sum_{Q_0} \frac{1}{(-Q_0^2 + E^2)^n}. \tag{241}$$

Observando a equação de fluxo, temos que $n = 1$, logo:

$$\sum_{Q_0} f_1(E^2) = \sum_{Q_0} \frac{1}{-Q_0^2 + E^2},$$

onde essa soma, cuja demonstração encontra-se no apêndice B, resulta em (KAPUSTA, 1993; PALHARES, 2012):

$$\begin{aligned}
\sum_{Q_0} f_1(E^2) &= \frac{1}{2\sqrt{E^2}} \left[n_b(\sqrt{E^2}) - n_b(-\sqrt{E^2}) \right], \\
&= \frac{1}{2\sqrt{E^2}} \left[1 + 2n_b(\sqrt{E^2}) \right],
\end{aligned} \tag{242}$$

e de forma generalizada:

$$\sum_{Q_0} f_n(E^2) = (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} [\partial_{E^2}]^{n-1} \sum_{Q_0} f_1(E^2), \tag{243}$$

com n_b sendo a distribuição de Bose-Einstein:

$$n_b(\omega) = [1 - \exp(\beta\omega)]^{-1}. \tag{244}$$

A equação de fluxo exata em sua forma final é dada por:

$$\partial_\kappa V_\kappa = \frac{\kappa^4}{12\pi^2} \left\{ \left(\frac{\mu_\kappa^2}{\omega_\kappa} + 1 \right) \frac{1}{\sqrt{E_+^2}} \left[1 + 2n_b(\sqrt{E_+^2}) \right] + \left(-\frac{\mu_\kappa^2}{\omega_\kappa} + 1 \right) \frac{1}{\sqrt{E_-^2}} \left[1 + 2n_b(\sqrt{E_-^2}) \right] \right\}. \tag{245}$$

Relembrando ω_κ e E_\pm^2 , temos:

$$\omega_\kappa = \sqrt{\mu^2(\kappa^2 + 2V'_\kappa) + (\mu_\kappa^2 + \alpha V''_\kappa)}, \quad (246)$$

$$E_\pm^2 = \kappa^2 + 2\alpha V''_\kappa + 2V'_\kappa + 2\mu_\kappa^2 \pm 2\sqrt{\mu_\kappa^2(\kappa^2 + 2V'_\kappa) + (\mu_\kappa^2 + \alpha V''_\kappa)^2}. \quad (247)$$

onde as derivadas do potencial são:

$$V_\kappa(\alpha) = \mathcal{V}_\kappa + \frac{m_\kappa^2 - \mu_\kappa^2}{2}\alpha + \frac{\lambda_\kappa^2}{4}\alpha^2, \quad (248)$$

$$V'_\kappa(\alpha) = \frac{m_\kappa^2 - \mu_\kappa^2}{2} + \frac{\lambda_\kappa^2}{2}\alpha, \quad (248)$$

$$V''_\kappa = \frac{\lambda_\kappa^2}{2}. \quad (249)$$

Com isso, substituindo as derivadas de $V_\kappa(\alpha)$ em ω_κ e E_\pm , podemos reescrevê-los da seguinte forma:

$$\omega_\kappa = \sqrt{\mu_\kappa^2(\kappa^2 + m_\kappa^2 + 2\alpha\lambda_\kappa^2) + \alpha^2\lambda_\kappa^4/4}, \quad (250)$$

$$E_\pm^2 = \kappa^2 + m_\kappa^2 + 2\alpha\lambda_\kappa^2 + \mu_\kappa^2 \pm 2\sqrt{\mu_\kappa^2(\kappa^2 + m_\kappa^2 + 2\alpha\lambda_\kappa^2) + \alpha^2\lambda_\kappa^4/4}. \quad (251)$$

Desta forma, estaremos interessados em analisar o limite da equação de fluxo (245), para uma teoria livre, $\lambda_\kappa = 0$, sem condensação, $\alpha = 0$, e o limite do potencial químico nulo, $\mu_\kappa = 0$.

- Teoria livre, $\lambda_\kappa = 0$:

$$\omega_\kappa = \sqrt{\mu_\mu^2(\kappa^2 + m_\kappa^2)}, \quad (252)$$

$$E_\pm^2 = \kappa^2 + m_\kappa^2 + \mu_\kappa^2 \pm 2\sqrt{\mu_\kappa^2(\kappa^2 + m_\kappa^2)}, \quad (253)$$

$$E_\pm^2 = (\mu_\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2})^2. \quad (254)$$

Substituindo na equação de fluxo exata, temos:

$$\partial_\kappa V_\kappa = \frac{\kappa^4}{12\pi^2} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2}} \left[2 + 2n_b(\sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2 + \mu_\kappa}) + 2n_b(\sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2} - \mu_\kappa) \right]. \quad (255)$$

- Sem condensação, $\alpha = 0$:

Observando as equações de ω_κ e E_\pm^2 , nota-se que os termos de λ e α são os mesmos. Desta forma, zerando a interação ou zerando o condensado, somos levados à mesma equação de fluxo:

$$\partial_\kappa V_\kappa = \frac{\kappa^4}{12\pi^2} \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2}} \left[2 + 2n_b(\sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2 + \mu_\kappa}) + 2n_b(\sqrt{\kappa^2 + m_\kappa^2} - \mu_\kappa) \right]. \quad (256)$$

- Potencial químico nulo, $\mu_\kappa = 0$:

$$\omega_\kappa = \alpha \frac{\lambda_\kappa^2}{2}, \quad (257)$$

$$E_\pm^2 = \kappa^2 + m_\kappa^2 + (2 \pm 1)\alpha\lambda_\kappa^2. \quad (258)$$

Substituindo na equação de fluxo exata, temos:

$$\partial_\kappa V_\kappa = \frac{\kappa^4}{12\pi^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E_+^2}} \left[1 + 2n_b(\sqrt{E_+^2}) \right] + \frac{1}{\sqrt{E_-^2}} \left[1 + 2n_b(\sqrt{E_-^2}) \right] \right\}. \quad (259)$$

Com isso, da equação de fluxo completa para o potencial efetivo V_κ , eq. (245), chegamos às equações diferenciais acopladas:

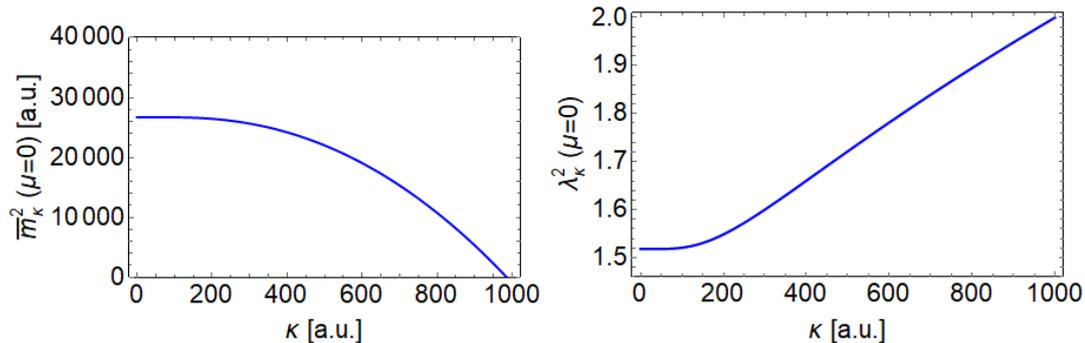
$$\partial_\kappa V_\kappa(\alpha = 0) = \partial_\kappa \mathcal{V}_\kappa, \quad (260)$$

$$\partial_\kappa V'_\kappa(\alpha = 0) = \partial_\kappa \frac{\bar{m}_\kappa^2}{2}, \quad (261)$$

$$\partial_\kappa V''_\kappa(\alpha = 0) = \partial_\kappa \frac{\lambda_\kappa^2}{2}, \quad (262)$$

onde os lados esquerdos de (261) e (262) estão em função das derivadas de V_κ com relação a α avaliadas em $\alpha = 0$, com $\bar{m}_\kappa = m_\kappa^2 - \mu_\kappa^2$.

Em seguida, iremos resolver o sistema de equações de fluxo. Porém, devemos fazer algumas observações. Note que, como \mathcal{V}_κ não aparece do lado direito da equação (245), a sua equação (260) pode ser solucionada de forma independente assim que as outras duas equações de \bar{m}_κ^2 e λ_κ^2 forem resolvidas. Fixaremos $\mu_\kappa = \mu$, onde o mesmo será um parâmetro de controle para a investigação da estrutura de fases da teoria a temperatura nula. A fixação do potencial se dá também pelo fato de que o fluxo do potencial químico e da massa não sejam independentes, isso por conta do *ansatz* para o potencial efetivo e a hipótese dos campos serem constantes.

Figura 9 - Fluxo no vácuo, $T = \mu = 0$.

Legenda: \bar{m}_κ^2 versus κ à esquerda e λ_κ^2 versus κ à direita.

Fonte: O autor, 2020.

4.3.1 Resultados numéricos a temperatura zero

Após encontrarmos o fluxo de equações exatas que define o nosso sistema, investigaremos as soluções numéricas do conjunto de equações de fluxo acopladas, (261) e (262), onde o lado esquerdo das equações é escrito, respectivamente, em termos da derivada primeira e segunda da equação (245) com relação a α .

A fixação dos parâmetros para uma escala $\kappa = \Lambda$ é dada por

$$\bar{m}_\Lambda^2 = m^2 - \mu^2, \quad (263)$$

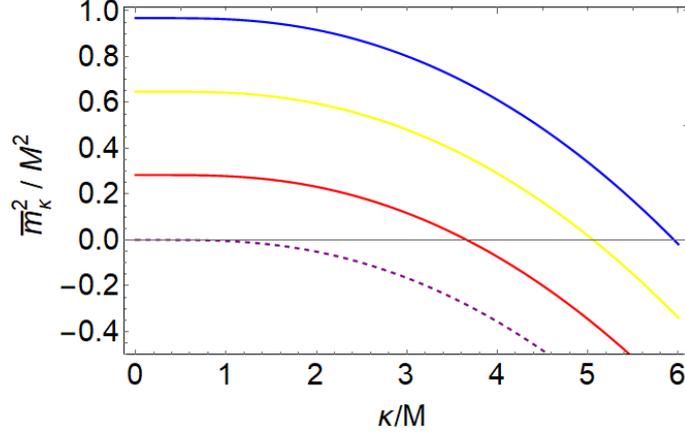
$$\lambda_\Lambda^2 = g, \quad (264)$$

onde escolhemos, em unidades arbitrárias, $m^2 = -1000 \text{ a.u.}$, $\Lambda = 1000 \text{ a.u.}$ e $g = 2$.

Desta forma, considerando o fluxo em $T = \mu = 0$ e usando as condições iniciais acima, as soluções numéricas⁸ das equações de fluxo (261) e (262) nos leva ao gráfico 9, onde os valores físicos são aqueles obtidos ao final do fluxo, em $\kappa = 0$. Para $\kappa = 0$, a massa efetiva $\bar{m}_0^2|_{\mu=0}$ toma o valor de 26709.6 a.u. , e $\lambda_0^2|_{\mu=0}$ tende a 1.518 . No limite em que κ é nulo, todas as flutuações quânticas estão incluídas. Na medida em que κ aumenta, essas flutuações são suprimidas progressivamente até a teoria alcançar a forma da ação clássica, quando κ tende a $\Lambda = 1000 \text{ a.u.}$ (condição essa imposta para Λ). Nesta escala, supõe-se que todas as correções quânticas remanescentes estão incluídas na redefinição dos parâmetros da Lagrangeana original através do processo de renormalização perturbativa convencional.

⁸ Os cálculos numéricos foram realizados com o auxílio do software Mathematica e suas funções pré-definidas, como NDSolve.

Figura 10 - Diagrama $\bar{m}_\kappa^2/M^2 \times \kappa/M$



Legenda: Curvas para diferentes $\frac{\mu^2}{M^2}\Big|_{T=0}$.

Fonte: O autor, 2020.

Após obtermos os valores para $\mu = 0$, o nosso interesse reside em ligar o potencial químico. Como visto anteriormente, o espectro das excitações nos revela a manifestação da transição de fase para um valor de potencial químico crítico dado por $\mu = m_{f|s|}$. A fim de encontrarmos o comportamento do espectro de \bar{m}_κ para um dado valor de potencial, iremos reescalonar a unidade de medida de $\bar{m}_0|_{\mu=0}$ como uma unidade de medida de energia M , ou seja: $\bar{m}_0|_{\mu=0} \equiv M$.

Após a determinação da escala, ligamos o potencial químico nas equações de fluxo e procuramos o valor crítico de μ que fará com que $\bar{m}_0|_{\mu=\mu_{crit}} = 0$, onde a anulação da massa efetiva caracteriza a transição de fase de segunda ordem, que corresponde à condensação de Bose-Einstein relativística.

O fluxo a densidade finita, para $\mu \neq 0$, é mostrado na figura 10, onde são representadas curvas para diferentes valores de μ^2/M^2 . A curva superior (caracterizada pela cor azul) é relativa a $\frac{\mu^2}{M^2} = 0,0301$, já a curva imediatamente abaixo desta (em amarelo) corresponde a $\frac{\mu^2}{M^2} = 0,351$, a curva logo acima da tracejada (em vermelho,) a $\frac{\mu^2}{M^2} = 0,7150$ e a curva tracejada refere-se ao valor crítico de $\frac{\mu^2}{M^2} = 0,99827960$, caracterizando assim, para esse valor de potencial a transição de fase de segunda ordem de condensação. O valor encontrado para a massa efetiva no limite de $\kappa = 0$:

$$\frac{\bar{m}_0^2(\mu^2 = 0,99827960M^2)}{M^2} = 0,0000824564. \quad (265)$$

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Foi abordada nesta dissertação a interação da matéria densa e fria descrita através de teorias efetivas da QCD. Utilizando o formalismo de teoria de campos quânticos a temperatura finita, descrevemos um sistema de condensado quiral relevante ao estudo da quebra da simetria quiral em um sistema em que os píons são pseudo-bósons de Goldstone. Desta forma, foi possível estudar o comportamento da simetria quiral a densidade de isospin finita e assim entender a transição de fase de píons pelo formalismo de integração funcional da função de partição. Reproduzimos também um arcabouço matemático utilizando o grupo de renormalização funcional a fim de investigarmos aspectos não perturbativos da condensação de píons em um modelo simplificado de um campo escalar complexo na aproximação de Potencial Local para o fluxo. Chegamos a três equações diferenciais que devem ser resolvidas por método numérico para a extração dos observáveis. Por fim, resolvendo duas destas equações, localizamos a transição de fase de condensação de píons no caso a densidade finita e temperatura zero, incluindo efeitos não perturbativos.

No capítulo 1 descrevemos os efeitos da quebra da simetria quiral espontânea e explícita. Nota-se que a simetria quiral no vácuo da QCD é uma simetria aproximada devido ao seu parâmetro de quebra explícita ser pequeno. Utilizamos o potencial do chapéu mexicano para exemplificar os efeitos da quebra de simetria. Discutimos então a construção do modelo efetivo chamado de $M\sigma L$ para que possamos reproduzir os efeitos de simetria presentes na QCD.

No capítulo 2, seção 2.1, construímos a função de partição utilizando o formalismo funcional onde implementamos o formalismo de teoria quântica de campos a temperatura finita no formalismo de tempo imaginário. Na seção 2.2, discutimos o condensado de Bose-Einstein para um campo carregado Φ , já bem conhecido, com o intuito de aplicarmos o formalismo funcional da função de partição e assim mostrarmos que o mesmo é um formalismo completo, que nos leva tanto a resultados no limite relativístico quanto a resultados no limite não-relativístico.

No capítulo 3 foi adotado o Modelo σ Linear como teoria efetiva para a discussão das consequências sobre a transição quiral da QCD a densidade finita. O acoplamento de um potencial químico no Hamiltoniano nos leva a um desbalanço de cargas originando a condensação de píons positivos. O custo de energia de π^+ varia linearmente com o potencial μ_I na fase normal indo a zero na fase de condensação como mostrado pelo diagrama $M - \mu_I$. Já o custo de energia de π^- aumenta linearmente na fase normal e apresenta um comportamento não trivial na fase de condensação. O pión π^0 , por apresentar carga líquida nula, não é afetado pelo potencial químico, assim como o méson σ .

No capítulo 4, discutimos, utilizando modelos efetivos, o condensado de Bose-Einstein de píons carregados, introduzindo aspectos não-perturbativos utilizando uma equação de fluxo determinada pelo grupo de renormalização funcional. Mostramos que o FRG é uma ferramenta não-perturbativa poderosa para abordar a estrutura de fases de teorias de campo em um meio. Aproximações adequadas, que dependerão do sistema físico estudado, são determinantes para a obtenção de um fluxo de equações diferenciais solúvel na prática para que assim consigamos responder as perguntas necessárias para que um diagrama de fases T - μ_I seja descrito. Construimos uma ação efetiva completa dependente de uma escala de energia κ que mapeia as zonas de energia infravermelha e ultravioleta. Um regulador de Litim foi introduzido em Γ_κ a fim de filtrarmos os efeitos IR que podem aparecer na teoria. Após utilizarmos a aproximação de LPA, encontramos três equações diferenciais, sendo duas delas acopladas e uma independente. A equação independente não foi resolvida, pois, não é de nosso interesse no momento. Nesta dissertação nosso interesse foi encontrar o valor do potencial químico no qual a transição de fase de condensação dos píons ocorre, ou seja, o valor de μ^2/M^2 que faz com que a massa efetiva \bar{m}_κ^2/M^2 tenda a zero quando $\kappa \rightarrow 0$. Desta forma, após solucionarmos numericamente as equações (261) e (262), encontramos o ponto de $\frac{\mu^2}{M^2} = 0,99827960$ em que a transição de fase ocorre para um campo escalar complexo carregado.

Neste trabalho, tomamos os resultados a temperatura zero, nos restringindo além disso em solucionar duas, das três, equações diferenciais encontradas a partir do fluxo na APL. Como trabalho futuro, solucionar a equação (260) nos levará a encontrar a pressão e a densidade do sistema para $T = 0$. Resultados numéricos a temperatura finita também podem ser tomados, e, com isso, um diagrama de fases $T/M \times \mu/M$ pode ser construído.

REFERÊNCIAS

- AARTS, G. J. Introductory lectures on lattice QCD at nonzero baryon number. *Journal of Physics: Conference Series*, [S.l.], v. 706, 022004, 2016. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102). Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/706/2/022004>. Acesso em 03 mar. 2021
- BELLAC, M. *Thermal Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- BELLAC, M.; BARTON, G. *Quantum and Statistical Field Theory*. [S.l.]: Clarendon Press, 1991. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-Mg7SDpqEZYC>. Acesso em 23 fev. 2021
- BELLAC, M.; BARTON, G. *Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=LZcdi4uzaWIC>. Acesso em 01 fev. 2021
- BERGES, J.; TETRADIS, N.; WETTERICH, C. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, [S.l.], v. 363, p. 223–386, 2002. DOI : 10.1016/s0370-1573(01)00098-9 . Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00098-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00098-9). Acesso em 14 fev. 2021
- BLAIZOT, J. Non Perturbative Renormalization Group and Bose-Einstein Condensation, *arXiv: cond-mat.stat-mech*, [S.l.], 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0801.0009>. Acesso em 15 fev. 2021
- BROWN, J.; CHURCHILL, R. *Complex Variables and Applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2004. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ytJFAQAIAAJ>. Acesso em 01 fev. 2021
- DELAMOTTE, B. An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group. *Lecture Notes in Physics*, [S.l.], v. 852, p. 49–132, 2012. DOI : 10.1007/978-3-642-27320-9_2. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-27320-9_2. Acesso em 14 fev. 2021
- Fermi, E. *Thermodynamics*. [S.l.]: Dover Publications, 1956. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VEZ11jsT3IwC>. Acesso em 12 fev. 2021
- GELL-MANN, M.; LEVY, M. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, [S.l.], v. 16, p. 705, 1960. DOI : 10.1007/BF02859738.
- GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Pearson Education, 2002. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Spy6xHWFJIEC>. Acesso em 12 fev. 2021.
- HALZEN, F.; MARTIN, A.; SONS, J. W. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. [S.l.]: Wiley, 1984. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=zwDvAAAAMAAJ>. Acesso em 12 fev. 2021.
- KAPLAN, D. B. Effective Field Theories, *arXiv: nucl-th*, [S.l.], 1995. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/nucl-th/9506035>. Acesso em 15 fev. 2021
- KAPUSTA, J. *Finite-Temperature Field Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=nT2kbcDtMI8C>. Acesso em 12 fev. 2021

- KOCH, V. Aspects of Chiral Symmetry. *International Journal of Modern Physics E*, [S.l.], v. 06, n. 02, p. 203-249, 1997. DOI: 10.1142/S0218301397000147 Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218301397000147>. Acesso em 12 fev. 2021
- LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E. M. *Statistical Physics*. [S.l.]: Elsevier Science, 1980. Disponível em <https://books.google.de/books?id=dEVtKQEACAAJ>. Acesso em 12 fev. 2021
- MIGDAL, A. B. Pion fields in nuclear matter. *Rev. Mod. Phys.*, [S.l.], v. 50, p. 107--172, 1978 DOI: 10.1103/RevModPhys.50.107 Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.50.107>. Acesso em 12 fev. 2021
- PALHARES, L. *Matéria Densa e Fria: Termodinâmica, Transições de Fase e Renormalização* 2008. 156 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Curso de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- PALHARES, L.. *Exploring the different phase diagrams of Strong Interactions*. 2012. 212 f. Tese (Doutorado) - Curso de Curso de Pós-Graduação em Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.
- PESKIN, M.E.. *An Introduction To Quantum Field Theory*. [S.l.]: CRC Press, 2018. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=9EpnDwAAQBAJ>. Acesso em 12 fev. 2021
- RAMOND, P. *Field Theory*. [S.l.]: Avalon Publishing, 1997. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Ctr9K61fY4kC>. Acesso em 12 fev. 2021
- REIF, F. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. [S.l.]: Waveland Press, 2009. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=gYpBPgAACAAJ>. Acesso em 12 fev. 2021
- SAKURAI, J.J.; NAPOLITANO, J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2011. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=N4I-AQAACAAJ>. Acesso em 12 fev. 2021
- SCHMITT, A. Dense Matter in Compact Stars: A Pedagogical Introduction. *Lecture Notes in Physics*, [S.l.], v. 811, p. 1–147, 2010. DOI : 10.1007/978-3-642-12866-0. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-12866-0>. Acesso em 14 fev. 2021
- SCHMITT, Andreas. *Thermal field theory, WS 13/14*. Disponível em: <http://hep.itp.tuwien.ac.at/~aschmitt/thermal13.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2021
- SON, D.; STEPHANOV, M. QCD at a Finite isospin density: From the pion to quark-antiquark condensation. *Physics of Atomic Nuclei.*, [S.l.], v. 64, p. 834-842, 2000 DOI: 10.1134/1.1378872 Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1134/1.1378872>. Acesso em 12 fev. 2021.
- SON, D.; STEPHANOV, M. QCD-like theories at finite baryon and isospin density. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 86, p. 592--595, 2001 DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.592. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.592>. Acesso em 12 fev. 2021.
- SPLITTOFF, K.; SON, D.; STEPHANOV, M. QCD-like theories at finite baryon and isospin density. *Phys. Rev. D.*, [S.l.], v. 64, p. 016003, 2000 DOI: 10.1103/PhysRevD.64.016003. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.016003>. Acesso em 12 fev. 2021.
- SVANES, E. E.; SON, D.; ANDERSEN, J. Functional renormalization group at finite density and Bose condensation. *Nuclear Physics.*, [S.l.], v. 857, p. 16-28, 2000 DOI:

10.1016/j.nuclphysa.2011.03.007. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2011.03.007>. Acesso em 12 fev. 2021.

WEINBERG, S. Phenomenological Lagrangians. *Physica A*, [S.l.], v. 96, p. 327--340, 1979

DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2011.03.007. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2011.03.007>. Acesso em 12 fev. 2021.

WEINBERG, S. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge: Cambridge University Press,

1995. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=sn9QvU5dmBQC>. Acesso em 12 fev. 2021.

WETTERICH, C. Exact evolution equation for the effective potential. *Phys. Lett*, [S.l.], v. B301, p. 90-94, 1993 DOI: 10.1016/0370-2693(93)90726-X. Disponível em:

<http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=2666480>. Acesso em 12 fev. 2021

ZYLA, P. A. *et al.* Review of Particle Physics. *Journal of Physics G*, [S.l.], v. 33, p. 083C01,

2020. DOI: 10.1093/ptep/ptaa104. Disponível em: <http://pdg.lbl.gov>. Acesso em 12 fev. 2021.

APÊNDICE A – Cálculo da temperatura crítica na condensação de Bose-Einstein para campo escalar complexo no limite ultrarelativístico

Como analisado no capítulo 3, a condensação de Bose-Einstein se dá para uma certa temperatura crítica, T_c , no limite não-relativístico e no limite ultrarelativístico. O objetivo do cálculo da temperatura crítica feito no capítulo 3 foi mostrar como a descrição funcional da função de partição é completa: a definição da mesma se dá a partir de uma teoria relativística com infinitos graus de liberdade nos campos, nos levando a um resultado também no limite não-relativístico. Desta forma, conseguimos mostrar a importância dessa descrição além da sua grande aplicabilidade.

Neste apêndice, serão detalhados alguns passos para que possamos chegar ao resultado da temperatura crítica, T_c , no limite ultrarelativístico (SCHMITT, 2013).

Da equação (126) no capítulo 3, temos:

$$\rho^* = \int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{e^{\beta(\omega-m)} - 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+m)} - 1} \right), \quad (266)$$

onde, no limite ultrarelativístico, temos que $\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$. Expandindo ω em torno de m , e truncando a expansão em primeira ordem, temos que:

$$\omega \approx p + O(m^2). \quad (267)$$

Logo:

$$\rho^* = \frac{1}{2} \int_0^\infty dp p^2 \left(\frac{1}{e^{\frac{p-m}{T}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{p+m}{T}} - 1} \right). \quad (268)$$

Utilizando a seguinte transformação de variável:

$$x = \frac{p}{T} \rightarrow x^2 = \frac{p^2}{T^2}, \quad (269)$$

$$dx = \frac{dp}{T} \rightarrow dp = T dx, \quad (270)$$

reescrevemos (268) como:

$$\rho^* = \frac{T^3}{2\pi} \int_0^\infty dx x^2 \left(\frac{1}{e^{x-\frac{m}{T}} - 1} - \frac{1}{e^{x+\frac{m}{T}} - 1} \right). \quad (271)$$

Note que temos duas exponenciais na integral acima: uma referente às partículas e outra

referente às anti-partículas. Expandindo as mesmas até primeira ordem em $\frac{m}{T}$, temos:

$$\frac{1}{e^{x \mp \frac{m}{T}} - 1} \simeq \frac{1}{e^x - 1} \left(1 \pm \frac{m}{T} \right) \pm \frac{m/T}{(e^x - 1)^2}. \quad (272)$$

Logo:

$$\rho_{\pm} = \frac{T^3}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^x - 1} \pm \frac{T^2 m}{2\pi^2} \left[\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^x - 1} + \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \right], \quad (273)$$

onde ρ_+ é a contribuição do termo exponencial referente às partículas e ρ_- é a contribuição do termo exponencial referente às anti-partículas.

Utilizando a função zeta $\zeta(\alpha)$ (já vista no capítulo 3), temos o resultado das integrais:

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2\zeta(3), \quad (274)$$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 2\zeta(3). \quad (275)$$

Substituindo em ρ_{\pm} , temos:

$$\begin{aligned} \rho_{\pm} &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left[2\zeta(3) \pm \frac{m}{T} \left(2\zeta(3) + \frac{\pi^2}{3} - 2\zeta(3) \right) \right], \\ \rho_{\pm} &= \frac{T^3}{2\pi^2} \left(2\zeta(3) \pm \frac{m\pi^2}{3T} \right). \end{aligned} \quad (276)$$

Como ρ^* é a subtração da contribuição das partículas ρ_+ da contribuição das anti-partículas ρ_- , temos:

$$\rho^* = \rho_+ - \rho_-, \quad (277)$$

$$\rho^* = \frac{T^3}{2\pi^2} \left(2\zeta(3) + \frac{m\pi^2}{3T} - 2\zeta(3) + \frac{m\pi^2}{3T} \right),$$

$$\rho^* = \frac{mT^2}{3}. \quad (278)$$

Como o condensado se dá em $\rho = \rho^*$ para uma dada temperatura crítica T_c , temos:

$$T_c = \sqrt{\frac{3\rho}{m}}. \quad (279)$$

Portanto, a temperatura crítica para um sistema de campo escalar carregado, como estudado no capítulo 3, no limite ultrarelativístico é dada pela equação (279).

APÊNDICE B – Cálculo de somas de Matsubara

Como foi visto ao longo do trabalho, devido à compactificação do tempo, a construção da equação de fluxo exata nos leva a somas de Matsubara. Neste apêndice demonstraremos o resultado da soma de Matsubara, dada pela equação (231).

Para a realização dessa soma utilizaremos o método de integração de contorno que consiste em interpretar a soma sobre as frequências de Matsubara como uma soma de resíduos utilizando o teorema de Cauchy (BROWN; CHURCHILL, 2009). Uma vez construída a integral de contorno, podemos deformar a mesma repetindo as condições de analiticidade do integrando de forma específica para que seja possível resolvermos a integral explicitamente.

Consideramos a soma bosônica dada por (230):

$$\sum_{Q_0} f_1(E^2) = \sum_{Q_0} \frac{1}{-Q_0^2 + E^2}. \quad (280)$$

Note que podemos associar essa soma à soma típica para bósons feita em (KAPUSTA, 1993). Fazendo as seguintes manipulações:

$$\sum_{Q_0} \frac{1}{-Q_0^2 + E^2} = \sum_{Q_0} \frac{1}{(iQ_0)^2 + E^2}, \quad (281)$$

$$iQ_0 = \omega_n, \quad \forall \quad Q_0 = Q_0^B = 2\pi nT \quad (282)$$

$$E = \omega \quad (283)$$

chegamos a:

$$\sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \quad (284)$$

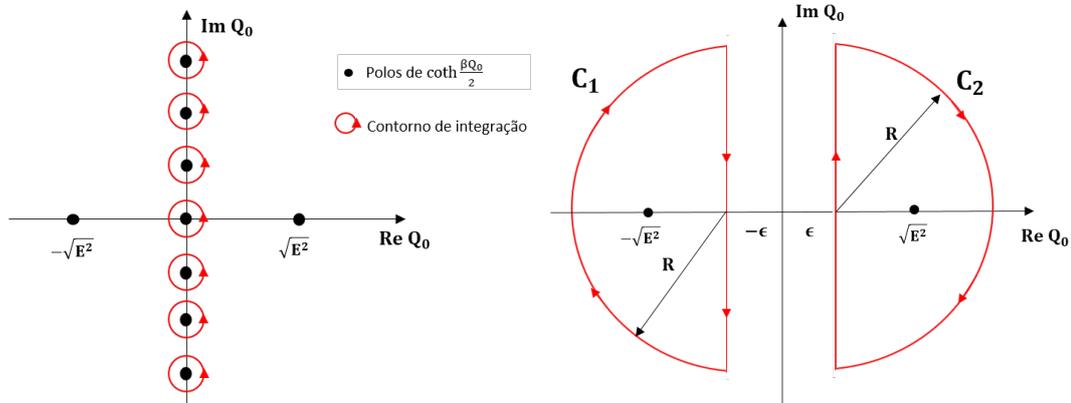
Desta forma, devemos identificar funções cujos pólos localizam-se sobre as frequências de Matsubara bosônicas, onde os resíduos representam os termos de soma.

Com isso, como a função $\frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{\beta Q_0}{2}\right)$ possui pólos com resíduos sobre as frequências de Matsubara bosônicas, utilizando o teorema de Cauchy:

$$S_B = \frac{T}{2\pi i} \oint_C dQ_0 f(Q_0) \frac{\beta}{2} \coth\left(\frac{\beta Q_0}{2}\right), \quad (285)$$

onde C é um contorno que envolve todas as frequências de Matsubara bosônicas.

Figura 11 - Plano complexo de Q_0 com infinitos pólos de $\coth\left(\frac{Q_0}{2}\right)$ à esquerda e curvas C_1 e C_2 à direita.



Legenda: À esquerda, integração de contorno no plano complexo de Q_0 e à direita contornos C_1 e C_2 no plano complexo definidos para $R \rightarrow \infty$.

Fonte: O autor, 2020.

Na figura 11, o gráfico à esquerda representa os pólos de $\coth\left(\frac{Q_0}{2}\right)$ nas infinitas frequências de Matsubara sobre o eixo imaginário. Podemos, então, definir uma curva C formada por duas retas paralelas distanciadas a ϵ para a direita e $-\epsilon$ para a esquerda do centro do eixo imaginário, conectadas em $\text{Im}(Q_0) = \pm\infty$, vide o gráfico à direita.

Reescrevendo $\coth\left(\frac{Q_0}{2}\right)$ em uma de suas formas alternativas,

$$\coth\left(\frac{\beta Q_0}{2}\right) = 1 + \frac{1}{e^{-\beta Q_0} - 1}, \quad (286)$$

temos que:

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dQ_0 \left(\frac{-1}{Q_0^2 - E^2} \right) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta Q_0} - 1} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dQ_0 \left(\frac{-1}{Q_0^2 - E^2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-\beta Q_0} - 1} \right).$$

Determinando a função analítica sobre o eixo imaginário, $f(Q_0) = \frac{-1}{Q_0^2 - E^2}$, obtemos

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{+i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dQ_0 f(Q_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta Q_0} - 1} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dQ_0 f(Q_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-\beta Q_0} - 1} \right). \quad (287)$$

Para a função analítica $f(Q_0)$ podemos tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$ nos primeiros termos de cada integral e tomando o limite de $Q_0 \rightarrow -Q_0$ na primeira integral, temos que:

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dQ_0 \frac{1}{2} f(-Q_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} f(Q_0) \left(\frac{1}{e^{\beta Q_0} - 1} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dQ_0 \frac{1}{2} f(Q_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ_0 \left(\frac{1}{e^{\beta Q_0} - 1} \right). \quad (288)$$

Agrupando os termos, temos que:

$$S_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{2} [f(Q_0) + f(-Q_0)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty+\epsilon}^{-i\infty+\epsilon} dQ_0 [f(Q_0) + f(-Q_0)] n_B(Q_0), \quad (289)$$

onde $n_b(Q_0)$ é a distribuição de Bose-Einstein:

$$n_B(Q_0) = \frac{1}{e^{\beta Q_0} - 1}. \quad (290)$$

Aplicando os resultados para o caso da soma do capítulo 4, temos que:

$$\sum_{Q_0} f_1(E^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{g(Q_0)}{-Q_0^2 + E^2} dQ_0 + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dQ_0 \left[\frac{g(Q_0)}{-Q_0^2 + E^2} + \frac{g(-Q_0)}{E^2 - (Q_0)^2} \right] n_B(Q_0). \quad (291)$$

Utilizando o teorema de Cauchy em cada integral, temos que:

$$\begin{aligned} \bar{S}_B &= \frac{1}{\sqrt{E^2}} \left\{ n_B(\sqrt{E^2}) - n_B(-\sqrt{E^2}) \right\}, \\ \bar{S}_B &= \frac{1}{\sqrt{E^2}} \left\{ 1 + 2n_B(\sqrt{E^2}) \right\}. \end{aligned} \quad (292)$$