



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Mariana Alves Alcoforado


**Métodos espectrais com decomposição de domínios: explorando
o colapso gravitacional em espaços-tempos com simetria esférica
e não-esférica**

Rio de Janeiro

2020

Mariana Alves Alcoforado

Métodos espectrais com decomposição de domínios: explorando o colapso gravitacional em espaços-tempos com simetria esférica e não-esférica



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Willians Oswaldo Barreto Acevedo

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

A354m

Alcoforado, Mariana Alves.

Métodos espectrais com decomposição de domínios: explorando o colapso gravitacional em espaços-tempos com simetria esférica e não esférica / Mariana Alves Alcoforado. - 2020.

87f.: il.

Orientador: Henrique Pereira de Oliveira

Coorientador: Willians Oswaldo Barreto Acevedo

Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Colapso gravitacional - Teses. 2. Simetria - Teses.
3. Espaço e tempo - Teses. 4. Relatividade (Física) -
Teses. I. Oliveira, Henrique Pereira de. II. Acevedo,
Willians Oswaldo Barreto. III. Universidade do Estado do
Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares.
IV. Título.

CDU 530.12

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Mariana Alves Alcoforado

Métodos espectrais com decomposição de domínios: explorando o colapso gravitacional em espaços-tempos com simetria esférica e não-esférica

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 17 de dezembro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Willians Oswaldo Barreto Acevedo (Coorientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Eduardo Lima Rodrigues
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Universidade Federal da Paraíba

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

À minha mãe e aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Louvado e engrandecido seja o nome do Senhor. Ele me renovou a esperança a cada dia e me fez forte para que a sua glória se manifestasse em minha vida. Toda a honra seja dada à Jesus Cristo, Meu Salvador.

Agradeço à minha mãe, a mulher mais inteligente que conheço, pelo apoio e segurança e aos meus irmãos Felipe e Gustavo pela compreensão e colaboração cada qual ao seu modo.

Agradeço ao meu orientador Henrique de Oliveira por ter acreditado e confiado em mim, permitindo que este trabalho se desenvolvesse no meu tempo.

Agradeço a todos os professores que com seu empenho e dedicação têm exercido a tarefa de transmitir conhecimentos. A todos estes dedico apreço, desejando que cada vez mais pessoas tenham a satisfação de tê-los como mestres.

Agradeço a meus colegas de curso que trilharam comigo este caminho e me auxiliaram sempre que possível. Em especial, agradeço ao José Crespo, pelas inúmeras dicas e disposição em me ajudar.

Agradeço ao meu grande amigo Sérgio Dias que acompanhou de perto esta trajetória e me encorajou a seguir em frente.

Agradeço aos funcionários da Pós que me cobravam os documentos e me lembravam dos prazos.

Agradeço a todos os que contribuíram, direta ou indiretamente, para este trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Quisera ser imortal para viver a glória eterna do Flamengo.

RESUMO

ALCOFORADO, M.A. *Métodos espectrais com decomposição de domínios: explorando o colapso gravitacional em espaços-tempos com simetria esférica e não-esférica*. 2020. 87 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Apesar de publicada há mais de cem anos, a teoria da Relatividade Geral, que fornece a descrição clássica da gravitação, possui poucas soluções exatas conhecidas. Para um entendimento mais completo das implicações desta teoria é necessário que as soluções para as equações de campo de Einstein sejam obtidas de outra forma. A Relatividade Numérica apresenta-se como uma alternativa apropriada para tal objetivo. Neste trabalho estuda-se a aplicação de métodos espectrais em dois problemas da Relatividade Geral, com ênfase no emprego da técnica da decomposição de domínios. O primeiro problema abordado é o caso de um campo escalar sem massa auto-gravitante em simetria esférica na formulação característica. Utiliza-se o método de Galerkin-Colocação em dois, três e quatro subdomínios. Os códigos são validados por testes de convergência e como aplicação reproduz-se a lei de escala de Choptuik do fenômeno crítico do colapso gravitacional. O segundo caso estudado é o problema de Bondi com simetria axial. Desenvolveram-se códigos em um e dois domínios, ambos baseados tanto no método de Galerkin-Colocação quanto no método de Galerkin com integração numérica. A convergência dos códigos é verificada e como resultado apresenta-se o cálculo da massa de Bondi para regimes de campo fortes. Também relacionou-se o decaimento da massa de Bondi com a extração de ondas gravitacionais através da função news. Procurou-se documentar em detalhes as estratégias adotadas na construção dos códigos, suas principais vantagens e desvantagens. Destaca-se também as possíveis aplicações que poderão ser realizadas e os aperfeiçoamentos necessários.

Palavras-chave: Métodos espectrais. Decomposição de domínios. Colapso gravitacional. Fenômeno crítico.

ABSTRACT

ALCOFORADO, M.A. *Spectral methods with domain decomposition: exploring the gravitational collapse in spacetimes with spherical and non-spherical symmetry*. 2020. 87 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Although published over a hundred years ago, the theory of General Relativity, which provides the classic description of gravitation, has few known exact solutions. For a more complete understanding of the implications of this theory, it is necessary that the solutions to the Einstein's field equations to be pursued in another way. Numerical Relativity presents itself as an appropriate alternative for this purpose. In this work, the application of spectral methods to two problems of General Relativity is studied, emphasizing the use of the domain decomposition technique. The first problem addressed is the case of a spherically symmetric self-gravitating massless scalar field in the characteristic formalism. The Galerkin-Collocation method is used in two, three and four subdomains. The codes are validated by convergence tests and as an application, Choptuik's scale law of the critical phenomenon in gravitational collapse is reproduced. The second case studied is the Bondi problem with axial symmetry. Codes were developed in one and two domains, both based on the Galerkin-Collocation method and the Galerkin method with numerical integration. The convergence of the codes is verified and as a result the calculation of the Bondi mass for strong field regimes is presented. Bondi mass decay was also related to the extraction of gravitational waves through the news function. We sought to report in detail how strategies were adopted for the construction of the codes, their main advantages and disadvantages. It also stands out as possible applications that can be carried out and improvements to be performed.

Keywords: Spectral methods. Domain decomposition. Gravitational collapse. Critical phenomenon.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Tipos de foliação do espaço-tempo.	16
Figura 2	- Método de decomposição de domínios.	20
Figura 3	- Esquema básico de decomposição de domínios.	35
Figura 4	- Mudança de variáveis.	58
Figura 5	- Pontos de colocação para as equações de hipersuperfícies β e U	60
Figura 6	- Decomposição de domínios e aplicação de mudança de variáveis.	66
Figura 7	- Resultado final da divisão de domínios e mudanças de variáveis.	66

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Decaimento dos modos a_k no instante inicial.	25
Gráfico 2 - Solução exata e solução aproximada com $N = 40$ nos instantes $u = 0$ e $u = 8$	25
Gráfico 3 - Módulo da diferença entre a solução exata e solução aproximada para $N = 20$, $N = 40$ e $N = 50$ nos instantes $u = 0$ e $u = 5$	25
Gráfico 4 - Módulo da equação residual para $N = 20$, $N = 40$ e $N = 50$ nos instantes $u = 0$ e $u = 5$	26
Gráfico 5 - Erro L_2 de $ \Phi_{exata} - \Phi_N $	26
Gráfico 6 - Decaimento dos modos a_k no instante inicial.	29
Gráfico 7 - Solução exata e solução aproximada com $N_1 = N_2 = 20$ nos instantes $u = 0$ e $u = 8$	29
Gráfico 8 - Erro L_2 de $ \Phi_{exata} - \Phi_N $ para subdomínio \mathcal{D}_1 (esquerda) e subdomínio \mathcal{D}_2 (direita).	30
Gráfico 9 - Erro da conservação de energia $C(u)$ para o código em dois, três e quatro subdomínios.	43
Gráfico 10 - Erro da fórmula de Bondi ΔM_B para o código em dois, três e quatro subdomínios.	44
Gráfico 11 - Erro da constante de Newman-Penrose c_{NP} para o código em dois, três e quatro subdomínios.	46
Gráfico 12 - Acima, o comportamento da massa de Bondi para uma solução supercrítica até a formação do horizonte aparente. Abaixo, função degrau típica predita por Christodoulou anterior a formação do horizonte aparente. Em ambos os casos, a massa do horizonte aparente $m_{AH} = r_{AH}/2$ e a massa de Bondi são aproximadamente iguais. Aqui $M_{BH} \approx 2.18 \times 10^{-3}$ correspondendo a $A_0 = 1.5129325$	47
Gráfico 13 - Espectro de massas M_{BH} em função de A_0 para $N_1 = N_2 = 500$, $x^{(0)} = 0$ ($r^{(0)} = L_0$) e $L_0 = 0.5$	48
Gráfico 14 - Lei de escala para caso $N_1 = N_2 = 500$, $r^{(0)} = L_0$ ($x^{(0)} = 0$) e $L_0 = 0.5$	48
Gráfico 15 - Lei de escala para caso $N_1 = 200$ e $N_2 = 300$, $r^{(0)} = \frac{L_0}{3}$ ($x^{(0)} = -0.5$) e $L_0 = 0.3$	49
Gráfico 16 - Lei de escala para caso $N_1 = N_2 = N_3 = 200$ and $N_4 = 300$, com interfaces em $r^{(1)} = L_0/7$, ($x^{(1)} = -0.75$), $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(1)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(1)} = 0$) sendo $L_0 = 0.1$	49
Gráfico 17 - Lei de escala para caso $N_1 = N_2 = N_3 = 105$ and $N_4 = 140$, com interfaces em $r^{(1)} = L_0/19$, ($x^{(1)} = -0.9$), $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(1)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(1)} = 0$) sendo $L_0 = 0.1$	50

Gráfico 18 - Presença de um potencial. Quatro subdomínios com $N_1 = N_2 = N_3 = 200$ e $N_3 = 300$, com interfaces localizadas em $r^{(1)} = L_0/7$, $(x^{(1)} = -0.75)$, $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(1)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(1)} = 0$) sendo $L_0 = 0.1$.	51
Gráfico 19 - Erro da conservação de energia $C(u)$ para código em um domínio. . . .	70
Gráfico 20 - Erro da conservação de energia $C(u)$ para código em dois domínios. . .	71
Gráfico 21 - Massa de Bondi para o dado inicial 192 com $A_0 = 30$ para código em um domínio com $N_r = 20$, $N_x = 5$, $M_r = 27$, $M_x = 9$, $\bar{M}_r = 27$, $\bar{M}_x = 9$ e $L_0 = 0.5$	72
Gráfico 22 - Diferença da massa de Bondi para o dado inicial 192 com $A_0 = 30$ para as soluções em domínio único e decomposto.	73
Gráfico 23 - Massa de Bondi para o dado inicial 192 e amplitudes $A_0 = 75$, $A_0 = 80$ e $A_0 = 85$ para código em um domínio com $N_r = 25$, $N_x = 25$, $M_r = 33$, $M_x = 33$, $\bar{M}_r = 33$, $\bar{M}_x = 33$	73
Gráfico 24 - Massa de Bondi para o dado inicial 192 e amplitude $A_0 = 85$ para código em um domínio com $N_r = 30$, $N_x = 30$, $M_r = 39$, $M_x = 39$, $\bar{M}_r = 39$, $\bar{M}_x = 39$	74
Gráfico 25 - Massa de Bondi para o dado inicial 193 e amplitude $A_0 = 1.8$	74
Gráfico 26 - Sequência da evolução numérica de $\gamma(u, r, x)$ em alguns instantes de tempo.	76
Gráfico 27 - Função news para o dado inicial 193 e amplitude $A_0 = 1.8$. Acima tem-se $N(u, \theta = \frac{\pi}{4})$ e abaixo $N(u, \theta = \frac{\pi}{2})$	77
Gráfico 28 - Gráfico dos polinômios de Chebyshev.	83
Gráfico 29 - Gráfico dos polinômios de Legendre.	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Funções de base para as aproximações espectrais de Φ , β e V	36
Tabela 2	- Distribuição dos pontos de colocação em cada subdomínio de acordo com a ordem de truncagem.	39
Tabela 3	- Divisão dos subdomínios em termos do parâmetro de mapeamento L_0 considerando-se que o domínio computacional intermediário foi igualmente dividido.	42

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	13
1	MÉTODOS ESPECTRAIS	17
1.1	O método dos resíduos ponderados	17
1.1.1	<u>Método de Galerkin</u>	18
1.1.2	<u>Método de colocação (pseudo-espectral)</u>	19
1.2	Método de decomposição de domínios	19
1.2.1	<u>Método de junção</u>	20
1.2.1.1	Problema elíptico unidimensional	21
1.2.1.2	Problema hiperbólico unidimensional	21
1.2.2	<u>Exemplo</u>	22
1.2.2.1	1 Domínio	23
1.2.2.2	2 Domínios	27
2	CASO ESFÉRICO: PROBLEMA DE BONDI	31
2.1	Fenômeno crítico no colapso gravitacional	33
2.2	Estratégia numérica: Métodos espectrais com decomposição de domínios	34
2.2.1	<u>Implementação computacional</u>	40
2.3	Resultados Numéricos	41
2.3.1	<u>Validação do algoritmo</u>	41
2.3.2	<u>Colapso crítico</u>	45
2.4	Discussão	51
3	CASO AXIAL: PROBLEMA DE BONDI	53
3.1	Estratégia numérica	57
3.1.1	<u>Código em dois subdomínios</u>	65
3.2	Resultados numéricos	70
3.2.1	<u>Validação do algoritmo</u>	70
3.2.2	<u>Aplicação dos códigos</u>	71
3.3	Discussão	75
	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICE A – Polinômios de Chebyshev e Legendre	83
	APÊNDICE B – Funções de base radial	86

INTRODUÇÃO

Em 1915, o físico alemão Albert Einstein apresentou sua Teoria da Relatividade Geral (EINSTEIN, 1916), que desde então fornece a descrição clássica mais geral da gravitação. No escopo desta teoria, a gravidade é entendida como uma propriedade geométrica do espaço e do tempo, que agora integram uma única estrutura chamada de espaço-tempo.

A Relatividade Geral (RG) é uma teoria covariante, formulada como um conjunto de equações tensoriais, dadas por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura, R é o escalar de curvatura, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia que descreve a distribuição de matéria, e $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$, sendo G a constante de gravitação universal e c a velocidade da luz no vácuo ¹.

Para que efetivamente sejam resolvidas, as equações de Einstein precisam ser escritas em um dado sistema referencial. A total liberdade de escolha de tal sistema, característica sobre a qual a teoria foi derivada, dá origem as diferentes formulações da RG, dentre as quais destacam-se a formulação 3+1 (ou ADM) e a formulação característica. Por se tratarem de um sistema acoplado de dez equações diferenciais parciais não-lineares da métrica $g_{\mu\nu}$, as equações de Einstein são difíceis de serem solucionadas analiticamente. Desde a publicação do artigo original algumas soluções analíticas das equações de Einstein foram obtidas, dentre as quais pode-se citar: Schwarzschild, Kerr, Reissner-Norström, Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. O que estas e outras soluções analíticas tem em comum é que foram derivadas impondo-se simetrias ou considerando-se regimes assintóticos, de forma que o problema fosse extremamente simplificado. Deste modo, apesar da RG ser a descrição mais geral da gravitação, o conhecimento baseado apenas neste tipo de solução faz com que seu completo entendimento e implicações permaneçam desconhecidos.

Para a descrição de sistemas reais é necessário que as equações de Einstein sejam resolvidas de outra maneira. Além da aplicação de métodos perturbativos, os métodos numéricos surgiram como alternativa na busca de tais soluções, principalmente a partir da segunda metade do século XX, quando o aumento do poder computacional possibilitou o estudo de sistemas mais complexos. Tal campo de estudos é denominado de Relatividade Numérica (RN).

¹ Neste texto utiliza-se $8\pi G = c = 1$, sendo $\kappa = 1$.

A investigação numérica da RG já produziu inúmeros frutos. Um deles, que será inclusive tratado aqui, é a descoberta da existência de fenômeno crítico na RG. Uma segunda realização da RN que merece ser citada diz respeito às ondas gravitacionais. O estudo numérico de sistemas gravitacionais fortes, tais como interação entre buracos negros e/ou estrelas massivas, é fundamental para a análise de tais sinais detectados. A acurácia dos modelos das fontes e formas de onda permitem a decodificação da informação carregada pelas ondas gravitacionais.

Formulação característica da Relatividade Geral

Conforme já dito anteriormente, a RG é uma teoria covariante. A resolução numérica das equações de Einstein é obtida então, tratando-se tal conjunto de equações como um problema de valor inicial.

O primeiro passo na formulação do problema é projetar as equações de Einstein numa família de hipersuperfícies ortogonais a um dado campo vetorial quadridimensional, o que é chamado de foliação do espaço-tempo. Cada tipo de foliação dá origem a um tipo diferente de formulação da RG, sendo as duas principais: o formalismo 3+1 ou formulação de Cauchy e a formulação característica.

No caso da escolha de um campo vetorial tipo-tempo, as hipersuperfícies ou fatias serão tipo-espaço e podem ser rotuladas por uma coordenada temporal. A escolha do campo vetorial tipo-tempo não é única, existindo um número infinito de possíveis foliações. A este tipo de formulação dá-se o nome de formalismo 3+1 ou ADM, devido a Arnowitt, Deser e Misner (BAUMGARTE; SHAPIRO, 2010).

Já a formulação característica é definida pela escolha de um campo vetorial tipo-nulo, que folia o espaço-tempo em hipersuperfícies nulas (BONDI; BURG; METZNER, 1962; SACHS; BONDI, 1962). Aqui também existem variações da formulação característica, gerando sistemas de equações com algumas diferenças entre si. Entretanto, esta formulação possui uma estrutura bem definida e seguida por todas as suas variantes.

Escolhendo-se o campo vetorial nulo, as fatias ou hipersuperfícies nulas são rotuladas por um parâmetro u , sendo geradas por um conjunto bidimensional de raios nulos x^A , $A = 2, 3$, e tendo a coordenada λ variando ao longo desses raios. Neste sistema de coordenadas nulas $x^a = (u, \lambda, x^A)$, as equações principais de Einstein tomam a forma

$$F_{,\lambda} = H_F[F, G] \tag{2}$$

$$G_{,u\lambda} = H_G[F, G, G_{,u}] \tag{3}$$

onde F e G representam os conjuntos de variáveis de hipersuperfície e evolução, res-

pectivamente. Os operadores não-lineares de hipersuperfície H_F e H_G operam sobre os valores de F , G e $G_{,u}$ apenas numa única hipersuperfície nula. Este conjunto de equações possui uma estrutura hierárquica, conforme ficará mais claramente demonstrado quando o problema de Bondi for apresentado.

Os códigos numéricos de evolução em formulação característica apresentam robusta estabilidade, sendo bem sucedidos em situações onde códigos baseados na formulação 3+1 falham. Além disso, são mais bem adaptados ao tratamento de espaços-tempos radiativos, possibilitando a extração de ondas gravitacionais sem a necessidade de aproximações. Outras vantagens que estes códigos de evolução partilham são (WINICOUR, 2009):

- Dados iniciais são livres; não há necessidade de resolver equações de vínculo para a determinação da configuração inicial;
- Pouca liberdade de calibre; o que torna as equações mais simples e os graus de liberdade mais óbvios;
- Equações de evolução de primeira ordem;
- Identificação da formação de horizonte de eventos durante a evolução para espaços-tempos contendo buracos negros.

Existem duas desvantagens principais dos códigos baseados na formulação característica. A primeira diz respeito aos dados iniciais, que apesar de serem livremente especificáveis, apresentam a dificuldade em descrever configurações iniciais que correspondam a situações físicas de interesse. A segunda desvantagem é a possibilidade do surgimento de cáusticas durante a evolução. Uma forma de contornar este problema é adotar a formulação *worldtube-nullcone*, onde são fornecidas condições de contorno em uma superfície interna tipo-tempo (TAMBURINO; WINICOUR, 1966). Tal formulação será adotada neste trabalho.

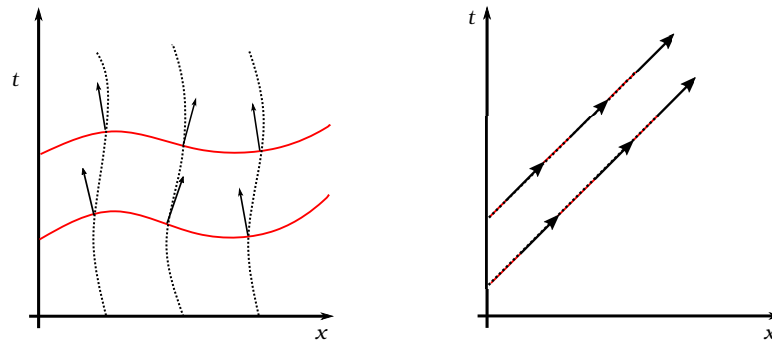
Estrutura do trabalho

Além desta introdução, que visa situar o leitor dentro do campo da Relatividade Numérica e apresentar alguns dos problemas de interesse da área, este trabalho possui mais quatro capítulos.

No capítulo 1 faz-se uma breve apresentação dos métodos espectrais utilizados nos problemas aqui tratados. Também introduz-se o método de decomposição de domínios, que será amplamente utilizado ao longo do trabalho, e resolve-se um exemplo simples de forma a facilitar o entendimento da metodologia adotada posteriormente.

No capítulo 2 apresenta-se o problema de Bondi com simetria esférica. O problema assim posto, apesar de já ter sido exaustivamente estudado (o fenômeno crítico no colapso

Figura 1 - Tipos de foliação do espaço-tempo.



Legenda: Representação da foliação 3+1(esquerda) e da foliação característica(direita). As setas representam os vetores normais às hipersuperfícies, que são representadas pelas linhas sólidas. Esses vetores normais são tipo-tempo e tipo-nulo, respectivamente.

Fonte: A autora, 2020.

gravitacional foi primeiramente identificado aqui), ainda é capaz de fornecer resultados interessantes. Além disso, pela mesma razão, serve de teste para os códigos desenvolvidos com a técnica de decomposição de domínios a serem utilizados em geometrias mais complexas e em outros formalismos da Relatividade Geral.

No capítulo 3 é apresentado o problema de Bondi com simetria axial. Aqui a solução do problema é obtida no regime de campos fortes. Também desenvolveu-se um código utilizando-se a técnica de decomposição de domínios.

No último capítulo trata-se das conclusões e perspectivas futuras do trabalho. Os resultados obtidos são analisados e colocados em perspectiva dentro do campo da Relatividade Numérica. Também apresenta-se possíveis problemas de interesse que podem ser estudados partindo-se dos códigos já construídos e quais as modificações necessárias para o aperfeiçoamento do que já foi realizado.

1 MÉTODOS ESPECTRAIS

Os problemas estudados em Relatividade Geral são representados por equações diferenciais parciais não-lineares. Conforme já dito anteriormente, a resolução analítica deste tipo de equação é bastante rara, geralmente obtidas apenas quando são impostas inúmeras simplificações, e mesmo assim são difíceis de serem derivadas.

Desta forma, o emprego de técnicas numéricas se faz necessário. Basicamente existem dois tipos de métodos numéricos: o método das diferenças finitas e os métodos espectrais.

Os primórdios da Relatividade Numérica foram quase que totalmente desenvolvido utilizando-se o método das diferenças finitas (GUSTAFSSON; OLIGER, 1995). Até hoje, grande parte dos trabalhos nesta área emprega tal tipo de método. Entretanto, nas últimas décadas surgiram alguns trabalhos que aplicam métodos espectrais na resolução de problemas da Relatividade Geral (GOURGOULHON, 1991; KIDDER; FINN, 2000).

Neste capítulo, apresenta-se um pequeno resumo do que são os métodos espectrais, suas classificações, principais características e exemplo de implementação.

1.1 O método dos resíduos ponderados

Considere um problema de valor de contorno na forma

$$\begin{cases} H u(x) - f = 0, & x \in \Omega \subset R^n \\ B u(y) = 0, & y \in \partial \Omega \end{cases}, \quad (4)$$

onde H é um operador diferencial, B é um operador diferencial relacionado às condições de contorno, f é uma função das variáveis do problema e Ω é o domínio da equação.

Uma solução aproximada $u_N(x)$ desta equação é dada por

$$u_N(x) \equiv \sum_{k=0}^N a_k \psi_k(x), \quad (5)$$

onde a_k , $k = 0, 1, \dots, N$, são os modos ou coeficientes modais, $\psi_k(x)$ são as funções de base e N é a ordem de truncagem.

Substituindo-se a solução aproximada dada por 5 na equação diferencial 4, obtém-se a equação residual 6, ou simplesmente resíduo

$$Res_u(a_k; x) \equiv H u_N - f. \quad (6)$$

O método dos resíduos ponderados estabelece um critério para a determinação dos

coeficientes modais a_k de tal forma que o resíduo seja tão pequeno quanto possível (BOYD, 2001; CANUTO; HUSSAINI; QUATERONI, 2006). Tal critério é dado por

$$\langle Res_u(a_k; x), \chi_j(x) \rangle = \int_{\Omega} Res_u(a_k; x) \chi_j(x) \omega(x) dx = 0, \quad (7)$$

válido para todo $j = 0, 1, \dots, N$. Aqui as funções $\chi_j(x)$ são chamadas de funções de teste e $\omega(x)$ é a função peso associada a elas. Os métodos espectrais são classificados de acordo com a escolha das funções de teste e também das funções de base.

A seguir, apresenta-se os dois métodos espectrais utilizados neste trabalho: Galerkin e colocação (pseudo-espectral).

1.1.1 Método de Galerkin

Neste método, cada função de base $\psi_k(x)$ é escolhida de forma a satisfazer as condições de contorno. Além disso, as funções de teste $\chi_j(x)$ são idênticas às funções de base $\psi_k(x)$, ou seja

$$\chi_i(x) = \psi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

O método de Galerkin é bastante preciso e eficiente, apresentando rápida convergência mesmo com uma truncagem N pequena. No entanto, o cálculo das integrais (7) pode ser bastante custoso computacionalmente ou impraticável analiticamente. Para contornar este problema existe uma variante bastante eficaz do método de Galerkin, denominada método de Galerkin com integração numérica, ou G-NI. Nesta variante, as integrais são calculadas utilizando-se alguma fórmula de quadratura de Gauss. Por exemplo, tem-se que

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \sum_{j=0}^N f(x_j) \omega_j, \quad (9)$$

onde x_j são os pontos de colocação dados por

$$x_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N}\right) \quad (10)$$

e $\omega_j = \frac{\pi}{N}$ são os pesos.

1.1.2 Método de colocação (pseudo-espectral)

No método de colocação as função de teste $\chi_j(x)$ são as funções Delta de Dirac

$$\chi_j(x) = \delta(x - x_j), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

onde x_j , $j = 0, 1, \dots, N$ são os pontos de colocação escolhidos apropriadamente, de acordo com a escolha das funções de base. Os pesos associados às funções de teste valem 1.

A equação 7 fica reduzida a

$$Res_N(a_k; x_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (12)$$

o que significa que o resíduo é exatamente nulo nos pontos de colocação.

1.2 Método de decomposição de domínios

A modelagem de problemas físicos requer que o método numérico leve em consideração não apenas a acurácia e confiabilidade, mas também a eficiência e custo computacional. Alguns sistemas possuem soluções que dependem fortemente das condições iniciais ou cujas propriedades físicas são muito sensíveis aos valores dos parâmetros. Nestes casos, o aumento da precisão numérica se torna essencial que para que as soluções numéricas sejam devidamente obtidas. Uma estratégia que vem sendo amplamente difundida nos últimos tempos é a decomposição de domínios em métodos espectrais.

O método de decomposição de domínios para a solução de problemas diferenciais consiste em dividir o domínio computacional em um conjunto de subdomínios, que podem ser sobrepostos ou não, em que a solução é calculada levando-se em conta algumas condições de transmissão entre os subdomínios.

As principais motivações para a aplicação das técnicas de decomposição de domínios são (BOYD, 2001; GOTTLIEB; ORSZAG, 1977):

- Simplificar problemas sobre geometrias complexas, cujo mapeamento em um único domínio computacional poderia ser bastante complicado;
- Melhorar as propriedades de convergência do método numérico;
- Refinar a resolução espacial em regiões de maior relevância;
- Possibilitar a paralelização do código;
- Converter o sistema em matriz esparsa, ao invés de densa, que é menos custosa computacionalmente de ser invertida.

A solução de equações diferenciais com decomposição de domínios foi proposta inicialmente por Schwarz em 1870 (SCHWARZ, 1870), utilizando subdomínios sobrepostos. Neste trabalho, utiliza-se o método de junção, onde os subdomínios são disjuntos, fazendo com que a única região de interseção dos subdomínios seja a fronteira entre eles. Este método é brevemente descrito na próxima subseção.

1.2.1 Método de junção

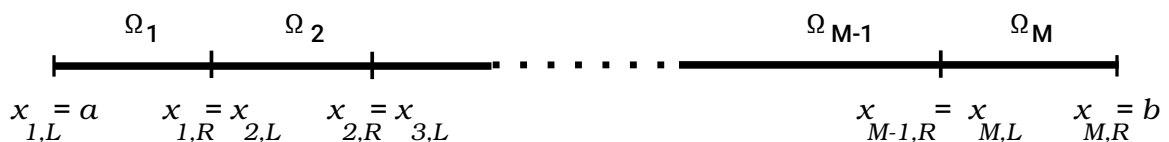
Para ilustrar o modo como a técnica de decomposição de domínios é implementada, descreve-se sua aplicação no caso unidimensional. A extensão para casos em mais de uma dimensão segue a mesma metodologia.

Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} H u(x) - f = 0, & x \in \Omega = (a, b) \\ B_- u(x) = g_-, \text{ em } x = a, & B_+ u(x) = g_+, \text{ em } x = b \end{cases} \quad (13)$$

O domínio $\Omega = (a, b)$ é dividido nos subdomínios Ω_j , $j = 1, \dots, M$, onde M denota a quantidade de subdomínios. Logo, $\Omega = \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ e os subdomínios são dados por $\Omega_j = (x_{j,L}, x_{j,R})$, onde faz-se $x_{1,L} = a$ e $x_{M,R} = b$. A restrição $x_{j,R} = x_{j+1,L}$ deve ser feita para que os subdomínios não sejam sobrepostos. A figura 2 ilustra o que foi descrito anteriormente.

Figura 2 - Método de decomposição de domínios.



Fonte: A autora, 2020.

A solução da equação diferencial sobre Ω é denotada por u e sua restrição sobre Ω_j , por $u^{(j)}$, $j = 1, \dots, M$. Do mesmo modo, a coordenada $x^{(j)}$ denota o valor da coordenada x contido em Ω_j . A solução numérica u^N é a aproximação espectral de ordem N , enquanto u_N^j é a aproximação espectral de ordem N_j válida sobre o subdomínio Ω_j . Então, $N = \sum_{j=1}^M N_j$ é a truncagem global da solução aproximada u^N .

O método de junção determina as condições de transmissão da seguinte forma: se a equação diferencial for de ordem espacial d , então na interface de dois subdomínios contíguos a solução e suas derivadas de ordem até $d - 1$ devem ser contínuas (BOYD, 2001; CANUTO; HUSSAINI; QUATERONI, 2006).

1.2.1.1 Problema elíptico unidimensional

Considere a seguinte equação diferencial

$$\begin{cases} H u \equiv q_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + q_1(x) \frac{du}{dx} + q_0(x)u = f(x), & x \in \Omega = (a, b) \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta \end{cases} \quad (14)$$

Considerando que o domínio $\Omega = (a, b)$ seja decomposto em dois subdomínios $\Omega_1 = (a, c)$ e $\Omega_2 = (c, b)$, a solução é dada por

$$\begin{cases} H u_1 = f, & x \in \Omega_1 = (a, c) \\ u(a) = \alpha, \\ H u_2 = f & x \in \Omega_2 = (c, b) \\ u(b) = \beta \end{cases} \quad (15)$$

com as seguintes condições de transmissão

$$\begin{cases} u_1(c) = u_2(c), \\ u_1'(c) = u_2'(c) \end{cases} \quad (16)$$

onde ' significa diferenciação com respeito a x . A demonstração de equivalência entre as equações 15-16 e 14 pode ser encontrada em (CANUTO et al., 1988).

1.2.1.2 Problema hiperbólico unidimensional

Os problemas hiperbólicos apresentam um tratamento da interface mais delicado. Considerando a equação de onda unidimensional

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \Omega = (a, b), \quad t > 0 \\ u(a, t) = u_L(t), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (17)$$

Caso se faça uma decomposição em dois subdomínios conforme feito acima tem-se

$$\frac{\partial u_1^N}{\partial t} + \frac{\partial u_1^N}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega_1 \quad (18)$$

$$u_1^N(a, t) = u_L(t) \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_2^N}{\partial t} + \frac{\partial u_2^N}{\partial x} = 0, \quad x \in \Omega_2 \quad (20)$$

$$u_1^N(c, t) = u_2^N(c, t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} \Big|_{x=c} + \eta \frac{\partial u_1^N}{\partial x} \Big|_{x=c} + (1 - \eta) \frac{\partial u_2^N}{\partial x} \Big|_{x=c} = 0. \quad (22)$$

A constante η que aparece na equação 22 determina o peso das contribuições de cada subdomínio para o ponto de interface na equação de evolução. As escolhas mais comuns para η são

- Downwind: $\eta = 0$. O problema é resolvido independentemente em Ω_2 e o problema em Ω_1 é resolvido adotando como condição na interface o valor $u_2^N(t, c)$.
- Upwind: $\eta = 1$. O problema é resolvido independentemente em Ω_1 e o problema em Ω_2 é resolvido adotando como condição na interface o valor $u_1^N(t, c)$.
- Average: $\eta = \frac{1}{2}$. Ambos os subdomínios têm igual contribuição.

A escolha da forma como a junção será feita depende de como as soluções se propagam. Uma escolha incorreta da forma como a transmissão é feita de um subdomínio ao outro pode levar a configurações instáveis.

1.2.2 Exemplo

Para ilustrar de que forma os métodos espectrais apresentados são implementados, considere a resolução da equação de onda dada por

$$\Phi_{,ur} - \frac{1}{2}\Phi_{,rr} = 0, \quad (23)$$

sujeita a condição inicial propagando-se em direção a origem

$$\Phi_0(r) = A_0 r e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \quad (24)$$

e as condições de contorno na origem

$$\Phi(u, r) = \Phi_0(u)r + \Phi_1(u)r^2 + \mathcal{O}(r^3), \quad (25)$$

e no infinito

$$\Phi(u, r) = c(u) + \frac{\Phi_{-1}(u)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}). \quad (26)$$

A solução exata desta equação é dada por

$$\Phi_{exata}(u, r) = A_0 \left(\frac{u}{2} + r \right) e^{-\left(\frac{u}{2} + r - r_0\right)^2 / \sigma^2} - A_0 \frac{u}{2} e^{-\left(\frac{u}{2} - r_0\right)^2 / \sigma^2}. \quad (27)$$

Na resolução deste exemplo utiliza-se uma variante do método de colocação, que chama-se método de Galerkin-Colocação, ou GC. O que se faz é escolher funções de base que satisfaçam individualmente as condições de contorno, como é feito no método de Galerkin. Entretanto, as funções de teste são deltas de Dirac, e logo o resíduo é minimizado como no método de colocação. Se não fosse este o caso, o método de colocação exigiria que duas equações suplementares fossem adicionadas ao sistemas de equações resultantes da minimização do resíduo para garantir que as condições de contorno fossem satisfeitas. A aplicação do método de GC aumenta a convergência do método em comparação ao método de pura colocação, onde as funções de base não satisfazem as condições de contorno.

O que se faz a seguir é resolver o problema duas vezes. A primeira vez em domínio único e a segunda vez aplicando-se a técnica de decomposição de domínios, com dois subdomínios.

1.2.2.1 1 Domínio

Para resolver a equação 23 utilizando-se métodos espectrais, o primeiro passo é escrever a solução aproximada

$$\Phi_N(u, r) = \sum_{k=0}^N a_k(u) \psi_k(r), \quad (28)$$

sendo $a_k(u)$ os modos em cada instante u , $\psi_k(r)$ as funções de base e N a truncagem da solução.

Os polinômios racionais de Chebyshev são dados por

$$TL_k(r) = T_k \left(x = \frac{r - L_0}{r + L_0} \right), \quad (29)$$

onde $T_k(x)$ são os polinômios de Chebyshev do primeiro tipo de ordem k . O mapeamento algébrico

$$r = L_0 \frac{1 + x}{1 - x}, \quad (30)$$

transforma o domínio físico $0 \leq r \leq \infty$ no domínio computacional $-1 \leq x \leq 1$. As funções de base são

$$\psi_k(r) = \frac{1}{2} (TL_{k+1}(r) + TL_k(r)) \quad (31)$$

e satisfazem as condições de contorno 25 e 26.

Substituindo-se a solução aproximada 28 na equação 23 obtém-se a equação residual

$$\text{Res}_{\Phi}(u, r) = \sum_{k=0}^N \left(\dot{a}_k(u) \psi'_k(r) - \frac{1}{2} a_k(u) \psi''_k(r) \right), \quad (32)$$

onde $\dot{}$ e $'$ representam diferenciação com relação a u e r , respectivamente.

O método de colocação consiste em fazer a equação residual igual a zero nos pontos de colocação. Os pontos de colocação são pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto dados por (PEYRET, 2002)

$$x_j = \cos \left(\frac{\pi j}{N+1} \right), \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (33)$$

Os pontos de colocação definidos no domínio computacional relacionam-se aos pontos do domínio físico através do mapeamento algébrico dado na equação 30. Logo, a cada x_j corresponde um r_j .

Fazendo-se isto obtém-se o conjunto de $N+1$ equações diferenciais ordinárias para os modos $a_k(u)$, $k = 0, \dots, N$, dadas por

$$\sum_{k=0}^N \left(\dot{a}_k(u) \psi'_k(r_j) - \frac{1}{2} a_k(u) \psi''_k(r_j) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (34)$$

O sistema de EDO's resultante foi integrado utilizando-se o método de Runge-Kutta de passo fixo de quarta ordem. Para os resultados apresentados a seguir adotou-se $A_0 = 1$, $\sigma = 1$ e $r_0 = 5$. A constante L_0 , chamada de constante de mapeamento e que determina a distribuição dos pontos de colocação no domínio físico, foi feita igual a 5 neste caso.

No gráfico 1 apresenta-se o decaimento dos modos a_k que interpolam o dado inicial para uma truncagem $N = 40$. No gráfico 2 apresenta-se a solução aproximada e a solução exata em diferentes instantes u , também para truncagem $N = 40$.

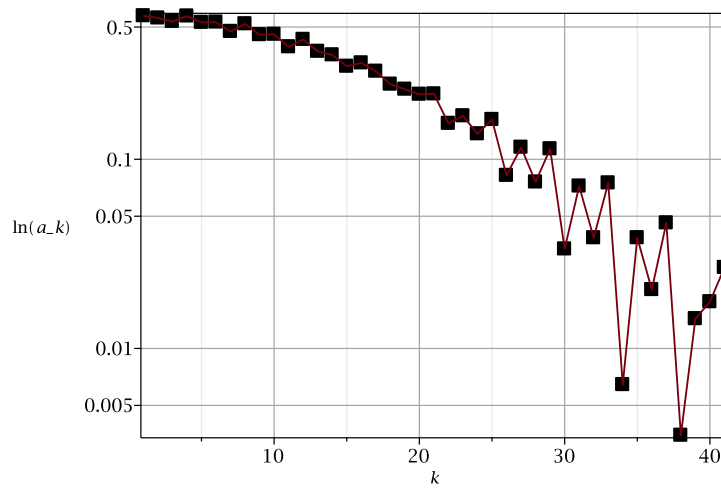
No gráfico 3 está o valor de $|\Phi_{exata} - \Phi_N|$ para $N = 20$, $N = 40$ e $N = 50$ nos instantes $u = 0$ e $u = 5$. Já o gráfico 4 apresenta o valor do resíduo para estes mesmos valores de truncagem nos mesmos instantes.

Verifica-se que a solução aproximada tende à solução exata conforme se aumenta o valor da truncagem N . Uma forma mais precisa de verificar a convergência do método é através do erro L_2 para o módulo da diferença entre a solução exata e a solução aproximada, $|\Phi_{exata} - \Phi_N|$, definido por

$$L_2(|\Phi_{exata} - \Phi_N|) = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\Phi_{exata} - \Phi_N)^2 dx}. \quad (35)$$

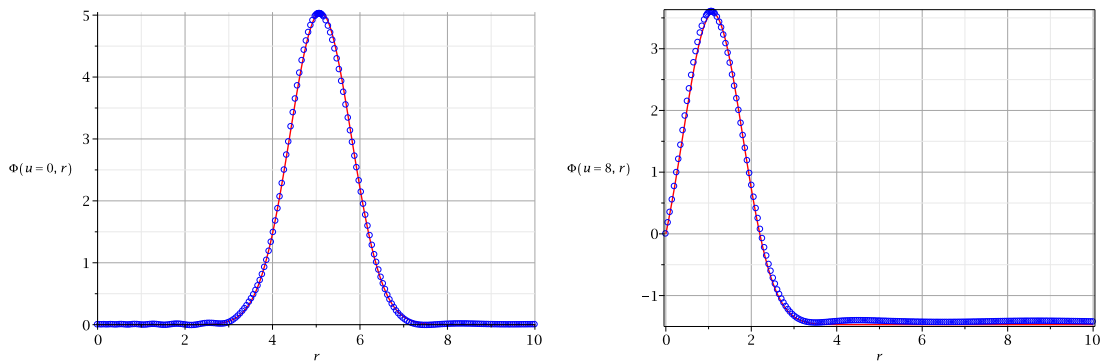
Os gráficos dos erros L_2 para diferentes truncagens são mostrados em 5.

Gráfico 1 - Decaimento dos modos a_k no instante inicial.



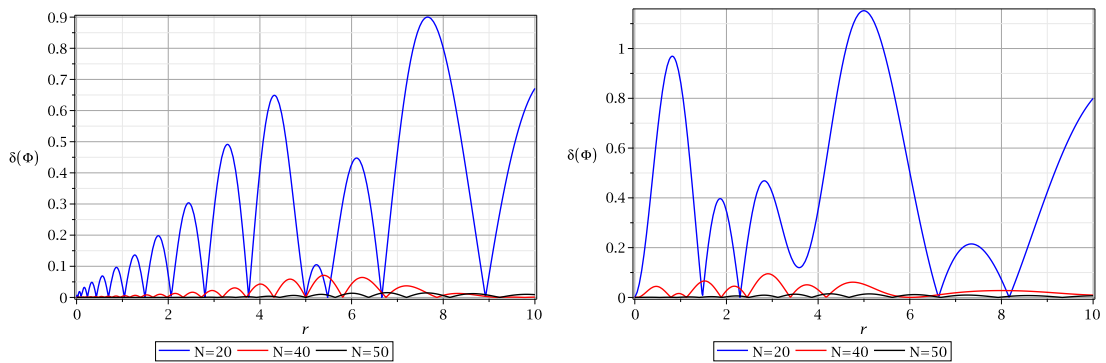
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 2 - Solução exata e solução aproximada com $N = 40$ nos instantes $u = 0$ e $u = 8$.



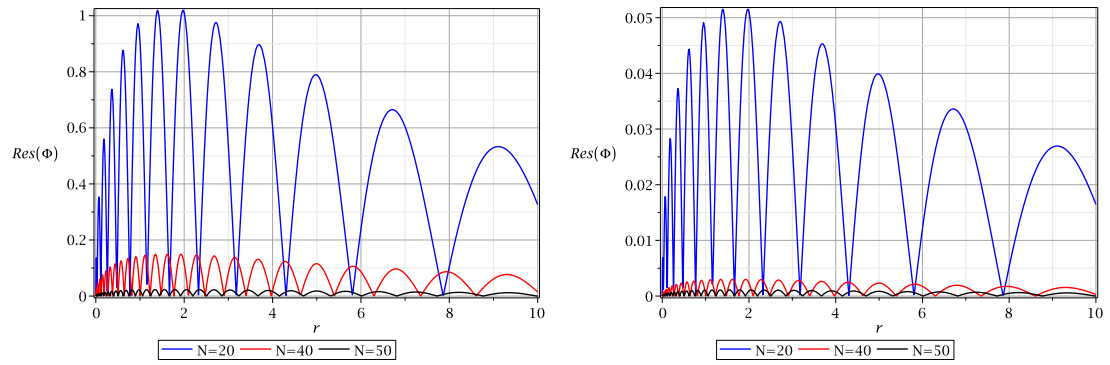
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 3 - Módulo da diferença entre a solução exata e solução aproximada para $N = 20$, $N = 40$ e $N = 50$ nos instantes $u = 0$ e $u = 5$.



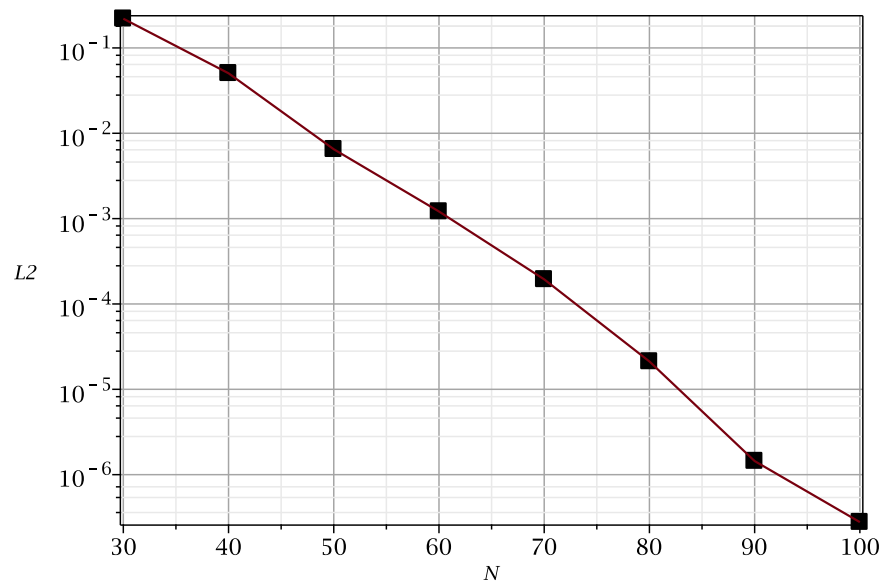
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 4 - Módulo da equação residual para $N = 20$, $N = 40$ e $N = 50$ nos instantes $u = 0$ e $u = 5$.



Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 5 - Erro L_2 de $|\Phi_{exata} - \Phi_N|$.



Fonte: A autora, 2020.

Uma outra quantidade que é útil como medida de erro, nos casos onde a solução exata é desconhecida, e por isso são utilizados métodos numéricos, é o erro L_2 da equação residual, definido por

$$L_2(\text{Res}_\Phi) = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{Res}_\Phi(x)^2 dx}. \quad (36)$$

1.2.2.2 2 Domínios

Nesta parte, o mesmo problema será resolvido também pelo método de Galerkin-Colocação, mas agora considerando-se a técnica de decomposição de domínios.

Do mesmo modo que anteriormente, mapeia-se o domínio físico $0 \leq r \leq \infty$ no domínio computacional $-1 \leq x \leq 1$, através da equação 30, e então divide-se tal domínio em dois subdomínios não sobrepostos, $\mathcal{D}^{(1)}$ e $\mathcal{D}^{(2)}$, cujo ponto de interface é $x^{(1)}$. O mapeamento do domínio computacional intermediário nos dois subdomínios é feito por transformações lineares dadas por

$$x = \frac{x^{(1)} + 1}{2} \xi^{(1)} + \frac{x^{(1)} - 1}{2}, \quad (37)$$

$$x = \frac{1 - x^{(1)}}{2} \xi^{(2)} + \frac{x^{(1)} + 1}{2}, \quad (38)$$

onde $-1 \leq \xi^{(l)} \leq 1$, $l = 1, 2$, são as variáveis que descrevem os subdomínios. Por uma questão de simplicidade, escolheu-se neste exemplo a interface em $x^{(1)} = 0$, dividindo o domínio computacional intermediário em partes iguais, de modo que $r^{(1)} = L_0$. Com esta escolha, o domínio físico se relaciona aos subdomínios da forma

$$r = L_0 \frac{1 + \xi^{(1)}}{3 - \xi^{(1)}}, \quad (39)$$

$$r = L_0 \frac{3 + \xi^{(2)}}{1 - \xi^{(2)}}. \quad (40)$$

As aproximações espectrais em cada subdomínio são dadas por

$$\Phi^{(l)}(u, r) = \sum_{k=0}^{N_l} a_k^{(l)}(u) \psi_k^{(l)}(r), \quad (41)$$

para $l = 1, 2$, onde $a_k^{(l)}$ e $\psi_k^{(l)}$ são os modos e as funções de base, respectivamente, e N_l é a truncagem em cada subdomínio.

Como se está utilizando o método de Galerkin, a função de base $\psi_k^{(1)}$ deve satisfazer a condição de contorno na origem, dada pela equação 25, enquanto $\psi_k^{(2)}$ deve satisfazer a condição assintótica dada pela equação 26.

São definidos os polinômios racionais de Chebyshev em cada subdomínio, levando-

se em conta as relações das equações 39-40. Logo

$$TL_k^{(1)} = T_k \left(\xi^{(1)} = \frac{3r - L_0}{(r + L_0)} \right), \quad (42)$$

e

$$TL_k^{(2)} = T_k \left(\xi^{(2)} = \frac{r - 3L_0}{(r + L_0)} \right). \quad (43)$$

As funções de base são

$$\psi_k^{(1)} = \frac{1}{2} \left(TL_{k+1}^{(1)}(r) + TL_k^{(1)}(r) \right), \quad (44)$$

e

$$\psi_k^{(2)} = TL_k^{(2)}(r). \quad (45)$$

Substituindo-se as aproximações espectrais dadas na equação 41 na equação 23 obtém-se as correspondentes equações residuais em cada subdomínio. A minimização das equações residuais é feita pelo método de colocação. Os pontos de colocação para o primeiro subdomínio são dados por

$$\xi_j^{(1)} = \cos \left(\frac{j\pi}{N_1 + 1} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N_1, \quad (46)$$

e para o segundo subdomínio

$$\xi_j^{(2)} = \cos \left(\frac{j\pi}{N_2} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N_2, \quad (47)$$

de modo que a interface pertence ao segundo subdomínio. O total de pontos de colocação utilizados é $N_1 + N_2$ e então as duas equações ainda necessárias para a determinação dos modos $a_k^{(l)}$ são obtidas pelas condições de transmissão na interface, que são dadas por

$$\Phi^{(1)}(u, r^{(1)}) = \Phi^{(2)}(u, r^{(1)}), \quad (48)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)_{r^{(1)}} = \left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} \right)_{r^{(1)}}. \quad (49)$$

Neste caso, apesar de tratar-se de um problema hiperbólico, escolheu-se, por uma questão de simplicidade, as condições de transmissão da forma 16.

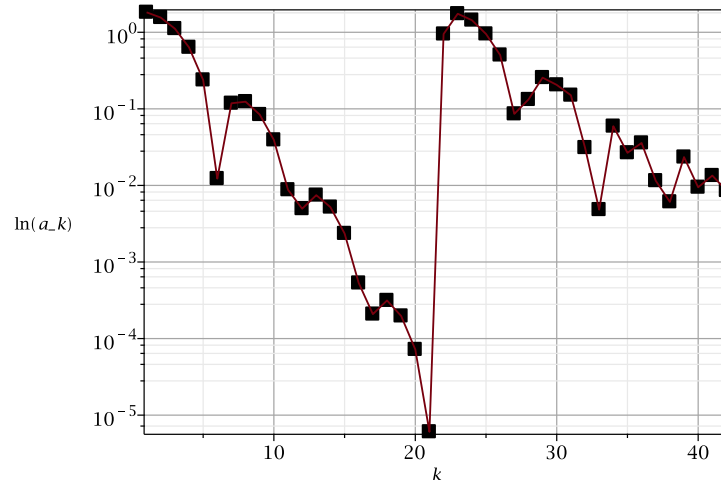
O sistema de EDO's resultante é integrado pelo método de Runge-Kutta de passo fixo. O dado inicial adotado é a Gaussiana da equação 24, com parâmetros idênticos aos utilizados anteriormente, e também escolheu-se o mesmo valor para a constante de mapeamento L_0 .

Por simplicidade, convencionou-se fazer $N_1 = N_2$ em todas as simulações, mas isto

não é uma regra e é ajustável conforme os objetivos procurados.

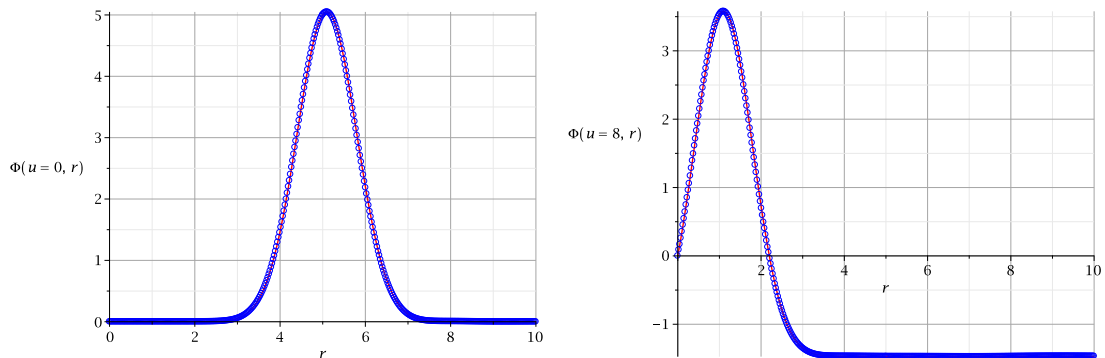
O decaimento dos modos iniciais para $N_1 = N_2 = 20$ é apresentado no gráfico 6. O gráfico 7 ilustra o campo Φ nos instantes $u = 0$ e $u = 8$, obtido com as mesmas truncagens.

Gráfico 6 - Decaimento dos modos a_k no instante inicial.



Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 7 - Solução exata e solução aproximada com $N_1 = N_2 = 20$ nos instantes $u = 0$ e $u = 8$.

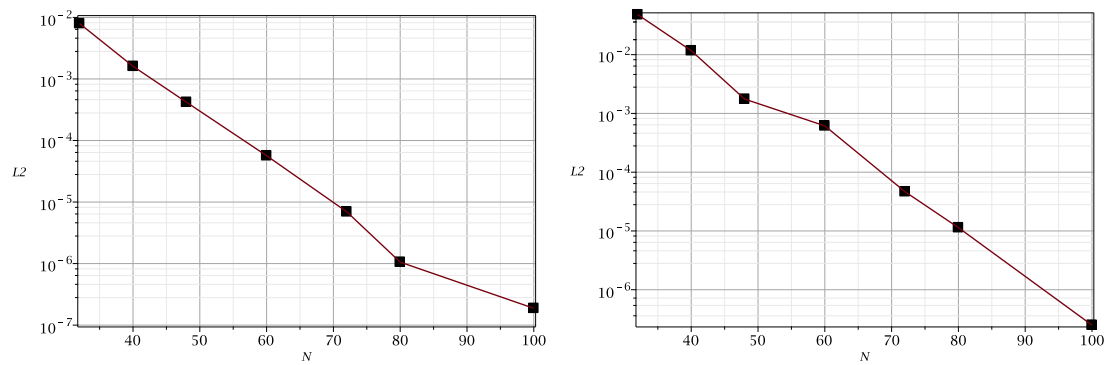


Fonte: A autora, 2020.

O erro L_2 de $|\Phi_{exata} - \Phi_a|$ foi calculado para ambos os subdomínios, utilizando-se a equação 35. Os resultados obtidos são apresentados no gráfico 8.

Este exemplo demonstra a aplicação dos métodos espectrais na resolução de equações diferenciais. Observa-se que ambas as soluções para a equação de onda obtidas apresentam convergência exponencial. Os modos iniciais no caso do domínio decomposto apresentam um decaimento mais acentuado, quando comparado com soluções de mesma truncagem para domínio único, indicando que o dado inicial é melhor interpolado neste caso. Outro ponto favor da solução em domínio decomposto é o menor tempo de integração do sistema, já que as matrizes associadas ao problema são matrizes esparsas.

Gráfico 8 - Erro L_2 de $|\Phi_{exata} - \Phi_N|$ para subdomínio \mathcal{D}_1 (esquerda) e subdomínio \mathcal{D}_2 (direita).



Fonte: A autora, 2020.

2 CASO ESFÉRICO: PROBLEMA DE BONDI

Em um sistema de coordenadas de Bondi, o elemento de linha de uma métrica com simetria esférica é dado por (WINICOUR, 2009)

$$ds^2 = -\frac{V}{r} e^{2\beta} du^2 - 2 e^{2\beta} dudr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (50)$$

onde $u = \text{constante}$ representa as hipersuperfícies nulas que foliam o espaço-tempo, e r é a coordenada radial tal que a área da 2-superfície gerada pelas coordenadas angulares (θ, φ) vale $4\pi r^2$.

O campo escalar $\phi = \phi(u, r)$ possui tensor momento-energia dado por

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + 2U(\phi)), \quad (51)$$

onde $U(\phi)$ é o potencial do campo escalar.

As equações de campo de Einstein, dadas pela equação 1, são então reduzidas a duas equações de hipersuperfícies

$$\beta_{,r} = \frac{r}{4} \phi_{,r}^2, \quad (52)$$

$$V_{,r} = e^{2\beta} [1 - r^2 U(\phi)] \quad (53)$$

e a equação de Klein-Gordon $g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \frac{dU}{d\phi}$ fica dada por

$$r \phi_{,ur} + \phi_{,r} - \frac{1}{2r} (r V \phi_{,r}) + \frac{r}{2} e^{2\beta} \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (54)$$

O conjunto de equações 52-54 possui a típica estrutura dos problemas em formulação característica. O dado inicial $\phi(u_0, r)$ é fornecido sobre uma hipersuperfície nula, e então a equação 52 é integrada fornecendo $\beta(u_0, r)$. Na sequência, integra-se a equação 53 obtendo-se $V(u_0, r)$. Por fim, a integração da equação 54 determina $\phi_{,\mu}$ na hipersuperfície nula inicial $u = u_0$, permitindo fixar o campo escalar na próxima hipersuperfície nula, ou seja, $\phi(u_0 + \delta u, r)$. Repetindo-se este ciclo, a evolução do espaço-tempo é gerada.

Por questão de conveniência, o campo escalar ϕ será substituído pelo campo auxiliar $\Phi(u, r) \equiv r \phi(u, r)$, mais apropriado ao tratamento numérico das equações 52-54.

As condições de contorno que refletem as características físicas do sistema devem ser impostas. Além disso, para a implementação do código numérico baseado no método de Galerkin-Colocação é fundamental que tais condições sejam satisfeitas pelas funções de base.

Próximo a origem, em $r = 0$, o campo auxiliar $\Phi(u, r)$ e as funções métricas $\beta(u, r)$ e $V(u, r)$ comportam-se da seguinte forma (GOMEZ; WINICOUR, 1992)

$$\Phi(u, r) = \Phi_0(u)r + \Phi_1(u)r^2 + \mathcal{O}(r^3), \quad (55)$$

$$\beta(u, r) = \mathcal{O}(r^2), \quad (56)$$

$$V(u, r) = r + \mathcal{O}(r^3), \quad (57)$$

o que garante a regularidade da métrica e indica que a coordenada nula retardada u é o tempo próprio no centro.

Próximo ao infinito nulo \mathcal{I}^+ , as seguintes condições de contorno que devem ser satisfeitas são

$$\Phi(u, r) = c(u) + \frac{\Phi_{-1}(u)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (58)$$

$$\beta(u, r) = H(u) + \frac{\beta_{-2}(u)}{r} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (59)$$

$$V(u, r) = r e^{2H(u)} - 2 e^{2H(u)} M_B(u) + \mathcal{O}(r^{-1}). \quad (60)$$

Estas condições garantem que o espaço-tempo seja assintoticamente plano. As funções $H(u)$ e $M_B(u)$ são funções arbitrárias decorrentes da integração das equações 52 e 53, respectivamente. A escolha de $H \neq 0$ faz com que a métrica não assuma a forma explícita de Minkowski no infinito, e é característica do calibre de Winicour (GOMEZ; WINICOUR, 1992). No caso de $H = 0$ obtém-se o calibre original de Bondi.

Como consequência das condições de contorno, a métrica não apresenta a forma padrão de Minkowski em \mathcal{I}^+ , implicando que o tempo próprio u é relacionado ao tempo de Bondi u_B por

$$\frac{du_B}{du} = e^{2H(u)}. \quad (61)$$

A função de massa $m(u, r)$ mede a quantidade de momento-energia dentro de uma esfera de raio r na hipersuperfície nula u , e é definida por

$$1 - \frac{2m(u, r)}{r} \equiv g^{\mu\nu} r_{,\mu} r_{,\nu} = \frac{V e^{-2\beta}}{r}. \quad (62)$$

Levando-se em conta o comportamento assintótico de β e V na equação acima, pode-se mostrar que a função arbitrária $M_B(u)$ é relacionada à função de massa $m(u, r)$

por

$$M_B(u) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(u, r). \quad (63)$$

A função $M_B(u)$ é a chamada massa de Bondi e não é uma quantidade conservada (BONDI; BURG; METZNER, 1962; GOMEZ; WINICOUR, 1992). O decaimento da massa de Bondi é dado pela fórmula de Bondi

$$\frac{dM_B(u)}{du} = -\frac{1}{2} e^{-2H} N^2, \quad (64)$$

onde $c(u)_{,u} = N(u)$ é a função news, que quantifica a energia radiada em função do tempo.

Uma outra forma de calcular a massa de Bondi é através da integral (GOMEZ; WINICOUR, 1992)

$$M_B = \frac{1}{4} \int_0^\infty \left[r V e^{-2\beta} \left(\frac{\Phi}{r} \right)_{,r}^2 + 2 r^2 U(\phi) \right] dr, \quad (65)$$

que apresenta-se mais acurada numericamente do que a expansão assintótica de V .

A formação de um horizonte aparente sinaliza a formação de um buraco negro e é determinada quando a expansão dos raios nulos, dada por

$$\theta_+ = \frac{2 e^{-2\beta}}{r} \quad (66)$$

se torna igual a zero, o que ocorre quando $\beta \rightarrow \infty$.

2.1 Fenômeno crítico no colapso gravitacional

Um dos resultados mais importantes obtidos pela RN foi a descoberta do fenômeno crítico no colapso gravitacional. Em seu artigo de 1993 (CHOPTUIK, 1993), Matt Choptuik estudou a evolução de um campo escalar em simetria esférica e ali observou que as soluções das equações de Einstein para algumas famílias de dados iniciais, $S[p]$, que dependem de um parâmetro p dividem-se em dois grupos: aquelas que formam buracos negros, com $p > p^*$, e aquelas que dispersam para o infinito, com $p < p^*$, sendo p^* o valor crítico de p .

Choptuik foi capaz de determinar que as soluções supercríticas, isto é, com $p > p^*$, exibem as seguintes características:

- Universalidade com respeito ao dado inicial;
- Invariância de escala das soluções supercríticas;
- Lei de escala para a massa do buraco negro.

Após o artigo de Choptuik, inúmeros trabalhos se seguiram, onde outros tipos de matéria foram considerados e a condição de simetria esférica foi relaxada. Também foram utilizadas técnicas perturbativas, além de métodos numéricos na investigação do fenômeno crítico.

A lei de escala para a massa do buraco negro M_B é dada por (GUNDLACH; MARTIN-GARCIA, 2007)

$$\ln M_{BH} = C + \gamma \ln |p - p^*| + f(|p - p^*|), \quad (67)$$

onde γ é o expoente crítico, que é universal. O que se entende por universal é que para um certo tipo de matéria, não importa o dado inicial, o valor de γ é o mesmo. A constante C depende do dado inicial. Já a função $f(z)$ é uma função periódica em z com frequência angular dada por

$$\omega = \frac{4\pi\gamma}{\Delta}, \quad (68)$$

onde Δ também é universal.

Para o caso estudado no artigo original de 1993 (campo escalar não-massivo em simetria esférica), Choptuik obteve $\gamma \approx 0.37$ e $\Delta \approx 3.43$ (CHOPTUIK, 1993).

2.2 Estratégia numérica: Métodos espectrais com decomposição de domínios

A resolução do sistema de equações 52-54 é obtida através da aplicação de métodos espectrais. Com o objetivo de obter soluções mais acuradas numericamente e que permitam a investigação do fenômeno crítico na RG, necessita-se aplicar decomposição de domínios. O procedimento genericamente descrito a seguir foi implementado em dois, três e quatro subdomínios.

O domínio físico $\mathcal{D} : 0 \leq r \leq \infty$ é dividido em n subdomínios, com $n \geq 2$

$$\mathcal{D}_1 : r^{(0)} \leq r \leq r^{(1)}, \mathcal{D}_2 : r^{(1)} \leq r \leq r^{(2)}, \dots, \mathcal{D}_n : r^{(n-1)} \leq r < \infty,$$

onde $r^{(0)} = 0$ e $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n-1)}$ representam a interface entre subdomínios contíguos.

Primeiramente, deve-se fazer uma aproximação espectral de cada uma das funções métricas β e V e também do campo auxiliar Φ em cada um dos subdomínios. Tomando-se como exemplo o campo auxiliar $\Phi(u, r)$, em cada subdomínio l tem-se

$$\Phi^{(l)}(u, r) = \sum_{k=0}^{N_l} a_k^{(l)}(u) \psi_k^{(l)}(r), \quad (69)$$

onde $l = 1, 2, \dots, n$; $a_k^{(l)}$ e $\psi_k^{(l)}$ são os modos e as funções de base, respectivamente, e N_l são

as ordens de truncagem em cada subdomínio, que determinam a quantidade de modos.

Seguindo-se o método de Galerkin, as funções de base $\psi^{(1)}(r)$ e $\psi^{(n)}(r)$ devem satisfazer as condições de contorno 55 e 58, respectivamente. Para os $n - 2$ subdomínios interiores as funções de base $\psi_k^{(l)}$, $l = 2, 3, \dots, n-1$, são os polinômios racionais de Chebyshev definidos em cada subdomínio.

Para definir os polinômios racionais de Chebyshev em cada subdomínio, primeiro deve-se mapear o domínio físico $\mathcal{D} : 0 \leq r < \infty$ no domínio computacional $-1 \leq x \leq 1$ utilizando-se o mapeamento algébrico (BOYD, 2001)

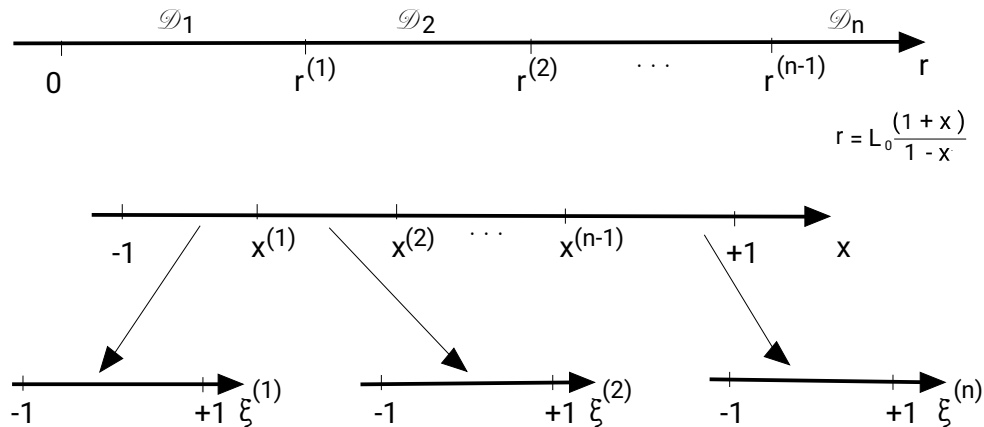
$$r = L_0 \frac{1+x}{1-x}, \quad (70)$$

onde L_0 é a constante de mapeamento. Neste caso, as interfaces entre os subdomínios contíguos passam a ser dadas por $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$. A figura 3 ajuda a ilustrar o procedimento. Depois, introduzem-se transformações lineares, de forma que o domínio computacional intermediário passe a ser descrito em termos de $-1 \leq \xi^{(l)} \leq 1$

$$x(\xi^{(l)}) = \frac{1}{2} \left[(x^{(l)} - x^{(l-1)}) \xi^{(l)} + x^{(l)} + x^{(l-1)} \right], \quad (71)$$

onde $l = 1, 2, \dots, n$, sendo $x^{(0)} = -1$ e $x^{(n)} = 1$.

Figura 3 - Esquema básico de decomposição de domínios.



Legenda: Subdomínios físicos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$ é mapeado algebricamente no domínio computacional intermediário $-1 \leq x \leq 1$, que é então convertido nos subdomínios $-1 \leq \xi_j \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, n$, através de transformações lineares.

Fonte: A autora, 2020.

É possível definir os polinômios racionais de Chebyshev em cada subdomínio como (BOYD, 2001)

$$TL_k^{(l)} = T_k \left(\xi^{(l)} = \frac{a^{(l)}r + b^{(l)}}{r + L_0} \right), \quad (72)$$

onde

$$a^{(l)} = \frac{2L_0 + r^{(l)} + r^{(l-1)}}{r^{(l)} - r^{(l-1)}}, \quad (73)$$

$$b^{(l)} = -\frac{2r^{(l)}r^{(l-1)} + L_0(r^{(l)} + r^{(l-1)})}{r^{(l)} - r^{(l-1)}}, \quad (74)$$

sendo $T_k(\xi)$ o polinômio de Chebyshev de primeiro tipo de ordem k , $r^{(l-1)} \leq r < r^{(l)}$ corresponde a $-1 \leq \xi^{(l)} \leq 1$ para todos os $l = 1, 2, \dots, n$ com $r^{(0)} = 0$ e $r^{(n)}$ localizado no infinito.

Agora que os polinômios racionais de Chebyshev já foram definidos, pode-se construir as funções de base para as aproximações espectrais de $\Phi(u, r)$ em cada subdomínio. Para os subdomínios internos \mathcal{D}_l , $l = 2, 3, \dots, n-1$ tem-se

$$\psi_k^{(l)}(r) = TL_k^{(l)}(r). \quad (75)$$

Para o primeiro subdomínio \mathcal{D}_1 , onde a condição de contorno 55 deve ser satisfeita faz-se

$$\psi_k^{(1)}(r) = \frac{1}{2} \left(TL_{k+1}^{(1)}(r) + TL_k^{(1)}(r) \right). \quad (76)$$

Para o último subdomínio \mathcal{D}_n , os polinômios racionais $TL_k^{(n)}(r)$ podem ser utilizados como base, pois satisfazem a condição de contorno expressa em 58. Logo, tem-se

$$\psi_k^{(n)}(r) = TL_k^{(n)}(r). \quad (77)$$

As escolhas das funções de base em cada subdomínio para o campo auxiliar Φ , assim como para as funções métricas β e V , estão resumidas na tabela 1.

Tabela 1 - Funções de base para as aproximações espectrais de Φ , β e V .

Tabela 1					
	\mathcal{D}_1	\mathcal{D}_2	...	\mathcal{D}_{n-1}	\mathcal{D}_n
Φ	$\psi_k^{(1)}(r)$				$TL_k^{(n)}(r)$
β	$\chi_k^{(1)}(r)$	$TL_k^{(l)}(r)$			$TL_k^{(n)}(r)$
V	$TL_k^{(1)}(r)$				$TL_k^{(n)}(r)$

Fonte: A autora, 2020.

O próximo passo é estabelecer as condições de transmissão nas interfaces, de forma que todas as partes dadas pela equação 69 representem a mesma função $\Phi(u, r)$. Neste caso, utiliza-se o método de junção (CANUTO et al., 1988), onde a função e todas as suas $(d-1)$ derivadas espaciais devem ser contínuas na interface de subdomínios contíguos,

sendo d a ordem da maior derivada espacial que aparece na equação. No caso do campo auxiliar Φ , tem-se $d = 2$, e então as condições de transmissão são dadas por

$$\Phi^{(l)}(u, r^{(l)}) = \Phi^{(l+1)}(u, r^{(l)}), \quad (78)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial r}\right)_{r^{(l)}} = \left(\frac{\partial \Phi^{(l+1)}}{\partial r}\right)_{r^{(l)}}, \quad (79)$$

onde $l = 1, 2, \dots, n - 1$.

As aproximações espectrais para as funções métricas $\beta(u, r)$ e $V(u, r)$ são

$$\beta^{(l)}(u, r) = \sum_{k=0}^{\bar{N}_l} b_k^{(l)}(u) \chi_k^{(l)}(r), \quad (80)$$

$$V^{(l)}(u, r) = r + \sum_{k=0}^{\bar{N}_l} c_k^{(l)}(u) r \tilde{\chi}_k^{(l)}(r), \quad (81)$$

onde $b_k^{(l)}(u)$ e $c_k^{(l)}(u)$ são modos associados a β e V , respectivamente. As ordens de truncagem \bar{N}_l podem ser diferentes daquela do campo auxiliar Φ , o que significa que pode-se ter dois conjuntos de pontos de colocação. As funções de base $\chi_k^{(1)}(r)$, $\tilde{\chi}_k^{(1)}(r)$ e $\chi_k^{(n)}(r)$, $\tilde{\chi}_k^{(n)}(r)$ satisfazem as condições de contorno 56, 57 e 59, 60, respectivamente, e são descritas a seguir

$$\chi_k^{(1)}(r) = \frac{1}{8} \left[\frac{(1+2k)}{3+2k} TL_{k+2}^{(1)}(r) + \frac{4(1+k)}{3+2k} TL_{k+1}^{(1)}(r) + TL_k^{(1)}(r) \right], \quad (82)$$

$$\tilde{\chi}_k^{(1)}(r) = TL_k^{(1)}(r), \quad (83)$$

$$\chi_k^{(n)}(r) = TL_k^{(n)}(r), \quad (84)$$

$$\tilde{\chi}_k^{(n)}(r) = TL_k^{(n)}(r). \quad (85)$$

As condições de transmissão são

$$\beta^{(l)}(u, r^{(l)}) = \beta^{(l+1)}(u, r^{(l)}), \quad (86)$$

$$V^{(l)}(u, r^{(l)}) = V^{(l+1)}(u, r^{(l)}), \quad (87)$$

com $l = 1, 2, \dots, n - 1$.

A resolução do problema inicia-se prescrevendo o dado inicial $\Phi(u_0, r)$ na hipersuperfície nula $u = u_0$ em termos dos modos $a_k^{(l)}(u_0)$ em cada subdomínio. Substituindo-se

as aproximações espectrais 69 e 80 obtém-se a equação residual de β em cada subdomínio. Esquemáticamente têm-se

$$\text{Res}_\beta^{(l)}(u, r) = \sum_{k=0}^{\bar{N}_l} b_k^{(l)}(u) \chi_{k,r}^{(l)}(r) - \frac{r}{4} \left(\frac{\Phi^{(l)}}{r} \right)_{,r}^2, \quad (88)$$

com $l = 1, 2, \dots, n$. O método de colocação será utilizado para minimizar o resíduo, gerando um conjunto de equações algébricas para os modos $b_k^{(l)}$. Isto significa que a equação residual 88 deve ser nula nos conjuntos de pontos de colocação de cada subdomínio. Então $\text{Res}_\beta^{(l)}(u, r_j^{(l)}) = 0$, onde $r_j^{(l)}$ são os pontos de colocação no domínio físico, que se relacionam aos pontos de colocação $\xi_j^{(l)}$ nos subdomínios computacionais por

$$r_j^{(l)} = \frac{b^{(l)} - L_0 \xi_j^{(l)}}{\xi_j^{(l)} - a^{(l)}}, \quad (89)$$

com $a^{(l)}, b^{(l)}$ dados pelas relações 73 e 74, respectivamente. A quantidade de pontos de colocação deve ser tal que juntamente com as condições de contorno na interface igualem o total de modos desconhecidos. Desta forma, tem-se

$$\underbrace{\sum_{l=1}^n \bar{N}_l + n}_{\text{número de modos } b_k^{(l)}} - \underbrace{(n-1)}_{\text{condições de transmissão}} = \underbrace{\sum_{l=1}^n \bar{N}_l + 1}_{\text{número de pontos de colocação}}.$$

Deste modo, o número de equações 88 vale $\sum_{l=1}^n \bar{N}_l + 1$, que juntamente com as $n-1$ condições de contorno 86, formam um sistema de equações algébricas para os modos $b_k^{(l)}$, cuja solução pode ser escrita como

$$b_k^{(l)} = F_k^{(l)} \left(\left[\left[\left(\frac{\Phi}{r} \right)_{,r} \right]_j^{(q)} \right] \right), \quad (90)$$

onde $k = 0, 1, \dots, \bar{N}_l$, $l, q = 1, 2, \dots, n$ e $\left[\left(\frac{\Phi}{r} \right)_{,r} \right]_j^{(q)}$ são os valores de $(\Phi/r)_{,r}$ nos pontos de colocação do q -ésimo subdomínio. Vale ressaltar que os coeficientes $b_k^{(l)}$ dependem tanto dos valores de $(\Phi/r)_{,r}$ calculados no mesmo subdomínio, $l = q$, como daqueles calculados em outros subdomínios, $l \neq q$.

Os pontos de colocação $\xi_j^{(l)}$ são pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto (PEYRET, 2002). No primeiro subdomínio faz-se

$$\xi_j^{(1)} = \cos \left(\frac{j\pi}{\bar{N}_l + 2} \right), \quad j = 1, 2, \dots, \bar{N}_l + 1, \quad (91)$$

e para os outros subdomínios

$$\xi_j^{(l)} = \cos\left(\frac{j\pi}{\bar{N}_l + 1}\right), \quad j = 1, 2, \dots, \bar{N}_l, \quad (92)$$

para todo $l = 2, 3, \dots, n$. Vale notar que a escolha dos conjuntos de pontos de colocação é tal que as interfaces $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n-1)}$ pertencem aos subdomínios subsequentes, $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_n$, respectivamente. A tabela 2 ajuda a visualizar a alocação dos pontos de colocação.

Tabela 2 - Distribuição dos pontos de colocação em cada subdomínio de acordo com a ordem de truncagem.

Tabela 2

	\mathcal{D}_1	\mathcal{D}_2	...	\mathcal{D}_{n-1}	\mathcal{D}_n
β	$\bar{N}_1 + 1$	\bar{N}_2	...	\bar{N}_{n-1}	\bar{N}_n
V	$\bar{N}_1 + 1$	\bar{N}_2	...	\bar{N}_{n-1}	\bar{N}_n
Φ	N_1	$N_2 - 1$...	$N_{n-1} - 1$	N_n

Fonte: A autora, 2020.

Para a equação de hipersuperfície de $V(u, r)$ adota-se o mesmo procedimento já descrito, e considera-se o mesmo conjunto de pontos de colocação. Assim como para a função β , a equação residual é feita identicamente nula nos pontos de colocação e obtém-se um sistema algébrico para os modos $c_k^{(l)}$ cuja solução pode ser escrita como

$$c_k^{(l)} = G_k^{(l)}(\beta_j^{(q)}, \Phi_j^{(q)}), \quad (93)$$

onde $k = 0, 1, \dots, \bar{N}_l$ e $l, q = 1, 2, \dots, n$. Aqui $\beta_j^{(q)}$ and $\Phi_j^{(q)}$ são os valores de β e Φ nos pontos de colocação do q -ésimo subdomínio.

O último passo é obter o sistema de equações dinâmicas que aproximam a equação de Klein-Gordon 54. Substituindo-se as aproximações espectrais 69, 80 e 81 na equação 54 tem-se

$$\text{Res}_{\Phi}^{(l)}(u, r) = \sum_{k=0}^{N_l} \frac{da_k^{(l)}}{du} \psi_{k,r}^{(l)}(r) - \frac{1}{2r} \left[rV\left(\frac{\Phi}{r}\right)_{,r} \right]_{,r}^{(l)} + \frac{r^2}{2} e^{2\beta^{(l)}} \left(\frac{dU}{d\Phi} \right)^{(l)}, \quad (94)$$

onde $l = 1, 2, \dots, n$, as funções Φ, V, β acima são dadas pelas suas respectivas aproximações espectrais em cada subdomínio. A equação residual 94 deve ser nula nos pontos de colocação definidos em cada subdomínio e ainda deve-se considerar as condições de transmissão para o campo auxiliar Φ dadas pelas equações 78 e 79. Dessas equações obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\frac{da_k^{(l)}}{du} = L_k^{(l)}(\beta_j^{(q)}, V_j^{(q)}, \Phi_j^{(q)}, \dots), \quad (95)$$

onde $k = 0, 1, \dots, N_l$ e $l, q = 1, 2, \dots, n$. O lado direita da equação 95 depende dos valores de β, V, Φ, \dots nos pontos de colocação de todos os subdomínios.

Para as equações residuais 94 considera-se um segundo conjunto de pontos de colocação, dado que as truncagens N_l podem ser diferentes das truncagens \bar{N}_l . Para que juntamente com as condições de transmissão, o número de modos desconhecidos $a_k^{(l)}$ seja igualado, a quantidade de pontos de colocação é dada por

$$\underbrace{\sum_{l=1}^n N_l + n}_{\text{número de modos } a_k^{(l)}} - \underbrace{2(n-1)}_{\text{condições de transmissão}} = \underbrace{\sum_{l=1}^n N_l - n + 2}_{\text{número de pontos de colocação}},$$

A distribuição dos pontos de colocação deste segundo conjunto também está representada na Tabela 2. Os pontos de colocação são pontos de Chebyshev-Gauss-Lobatto. Para o primeiro e o último domínio tem-se

$$\xi_j^{(l)} = \cos\left(\frac{j\pi}{N_l}\right), \quad (96)$$

sendo $l = 1, n$, onde $j = 0, 1, \dots, N_1$ e $j = 1, 2, \dots, N_n - 1$, para o primeiro e último subdomínio, respectivamente. Para todos os outros subdomínios tem-se

$$\xi_j^{(l)} = \cos\left(\frac{j\pi}{N^{(l)} - 1}\right), \quad (97)$$

para todo $l = 2, \dots, n-1$, onde $j = 1, 2, \dots, N_l - 1$. Novamente, as interfaces $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n-1)}$ pertencem aos subdomínios subsequentes, $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots, \mathcal{D}_n$, respectivamente.

O sistemas de equações 95 deve ser integrado no tempo de forma que os modos $a_k^{(l)}$ sejam determinados num instante de tempo subsequente. A integração do sistema de equações diferenciais ordinárias é realizada pelo método de Runge-Kutta de passo fixo ou variável a depender da situação.

2.2.1 Implementação computacional

Todos os códigos numéricos implementados neste trabalho seguiram a mesma estratégia. Faz-se a seguir um pequeno resumo da metodologia adotada.

Inicialmente foi utilizado o Maple, software de computação algébrica, para a construção das bases em que as funções são expandidas, valendo-se do fato de que os polinômios de Chebyshev e Legendre (que serão utilizados no problema de Bondi axial) já são definidos. Os pontos de colocação são gerados e todas as quantidades necessárias para a resolução do problema são calculadas em tais pontos. O que se faz então é exportar todas essas quantidades como matrizes, para serem importadas no Matlab, onde o sistema

dinâmico será integrado, sendo os modos desconhecidos e outras quantidades de interesse (massa de Bondi, função news, etc..) obtidos.

Existe a possibilidade do problema ser integralmente implementado no Matlab (ou no seu equivalente de código aberto, Octave), como na verdade foi realizado para o caso de dois subdomínios do problema esférico. Entretanto, esta estratégia abre mão da facilidade da construção das bases. O Matlab não possui polinômios especiais em sua suíte básica (apenas em pacotes complementares), e então se faz necessária a construção dos polinômios a partir de funções elementares nativas e fórmulas de recorrência, que são uma fonte grande de erro numérico. Além disso, os pontos de colocação de Legendre-Gauss-Lobatto são soluções de uma equação diferencial, que tem de ser resolvida iterativamente. No Maple tais dificuldades não existem.

Uma outra vantagem da formulação do problema no Maple, é que este se constitui uma excelente plataforma de testes. A evolução de um sistema com baixa truncagem é essencial para a verificação de quaisquer erros que possam ter sido cometidos, antes que se proceda a integração de sistemas com truncagens elevadas, que são necessários para obtenção de resultados.

A integração do sistema dinâmico no Matlab apresenta fortes pontos positivos. Todo o programa de integração é baseado em multiplicação de matizes, o que no Matlab é feito de forma paralela (por padrão, o Matlab utiliza $N/2$ threads, onde N é a quantidade de threads da máquina). Além disso, para os problemas tratados com decomposição de domínios, a maior parte das matrizes é esparsa, ou seja, apresentam grande quantidade de seus elementos iguais a zero. O Matlab possui uma forma otimizada de fazer a armazenagem e a multiplicação de matrizes esparsas, gerando ganho de tempo na integração do sistema.

As quantidades relativas à solução do problema são gravadas em arquivos externos. Logo, a apresentação de resultados pode ser feita tanto no Matlab quanto no Maple, aproveitando-se neste último caso do fato das bases já estarem construídas.

2.3 Resultados Numéricos

2.3.1 Validação do algoritmo

Neste trabalho, a estratégia descrita na seção anterior foi implementada em dois, três e quatro subdomínios. O primeiro passo então é realizar testes de convergência de forma que os códigos numéricos possam ser validados. Os dois testes aos quais os códigos foram submetidos são: a verificação da constante de Newman-Penrose e a fórmula de Bondi para a conservação de energia. O que se espera analisar é a influência que o aumento do número de subdomínios e o aumento do número de pontos de colocação

exercem na convergência do código.

Nestas simulações, o sistema dinâmico foi integrado utilizando-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem. A truncagem \bar{N}_l foi mantida aproximadamente 30% maior do que N_l .

Para ambos os testes realizados, a configuração adotada foi manter o domínio computacional intermediário $-1 \leq x \leq 1$ igualmente dividido. Logo, para o caso de dois subdomínios, a interface está localizada em $x^{(1)} = 0$, o que corresponde a $r^{(1)} = L_0$. Para três subdomínios, tem-se $x^{(1)} = -\frac{1}{3}$ e $x^{(2)} = \frac{1}{3}$, implicando em $r^{(1)} = \frac{L_0}{2}$ e $r^{(2)} = 2L_0$. O caso de quatro subdomínios segue a mesma lógica. A configuração completa está descrita na Tabela 3. A localização das interfaces é determinada pela constante de mapeamento L_0 .

Tabela 3 - Divisão dos subdomínios em termos do parâmetro de mapeamento L_0 considerando-se que o domínio computacional intermediário foi igualmente dividido.

Tabela 3

\mathcal{D}_1	\mathcal{D}_2	\mathcal{D}_3	\mathcal{D}_4
$0 \leq r \leq L_0$	$L_0 \leq r < \infty$	-	-
$0 \leq r \leq \frac{1}{2}L_0$	$\frac{1}{2}L_0 \leq r \leq 2L_0$	$2L_0 \leq r < \infty$	-
$0 \leq r \leq \frac{1}{3}L_0$	$\frac{1}{3}L_0 \leq r \leq L_0$	$L_0 \leq r \leq 3L_0$	$3L_0 \leq r < \infty$

Fonte: A autora, 2020.

O primeiro teste numérico consiste em verificar a validade da fórmula de Bondi, dada pela equação 64. Isto é feito introduzindo-se a função $C(u)$ (GOMEZ; WINICOUR, 1992), que mede o desvio da conservação global da energia, pela expressão dada a seguir

$$C(u) = \frac{1}{M_B(u_0)} \left[M_B(u) - M_B(u_0) + \frac{1}{2} \int_{u_0}^u e^{-2H(u)} N(u)^2 du \right] \times 100. \quad (98)$$

No caso da solução exata tem-se $C(u) = 0$.

O dado inicial considerado foi uma gaussiana dada por

$$\Phi_0(r) = A_0 r e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \quad (99)$$

onde escolheu-se $r_0 = 0.5$, $\sigma = 1$ e $A_0 = 1.5$, que é uma configuração próxima a formação de horizonte aparente. O passo do integrador vale 5.0×10^{-5} e a constante de mapeamento foi fixada em $L_0 = 0.5$. Considera-se $U(\phi) = 0$ daqui em diante, até que se diga que esta condição foi alterada.

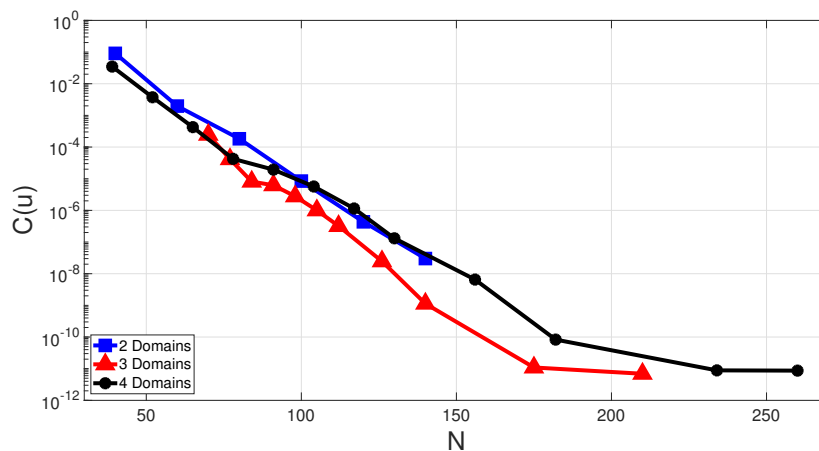
A integral que aparece do lado direito da equação 98 foi calculada através da fórmula de Newton-Cottes de cinco pontos (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972), dada a

seguir

$$\int_{u_0}^u f(u)du \approx \frac{2h}{45} \sum_{j=0}^{N_i} [7f(u_{4j}) + 32f(u_{4j+1}) + 12f(u_{4j+2}) + 7f(u_{4j+4})], \quad (100)$$

onde f corresponde ao integrando que aparece na equação 98, u_f é o valor de u referente à última iteração do integrador em um determinado intervalo $\Delta u = u_f - u_0$, N_i está relacionado ao número de iterações feitas em Δu , de modo que $u_j = u_0 + jh$ e $u_{4N_i+4} = u_f$, e h é o passo de integração. Os resultados obtidos são apresentados no gráfico 9.

Gráfico 9 - Erro da conservação de energia $C(u)$ para o código em dois, três e quatro subdomínios.



Fonte: A autora, 2020.

O que se observa é que o valor de $C(u)$ decai exponencialmente para os casos de dois, três e quatro subdomínios, indicando a rápida convergência do código espectral. No caso de três subdomínios verifica-se que para uma truncagem geral $N = 175$ para o campo auxiliar Φ o erro atinge o patamar de $10^{-12}\%$. No caso de quatro subdomínios este mesmo patamar de erro é atingido com uma truncagem geral $N = 234$.

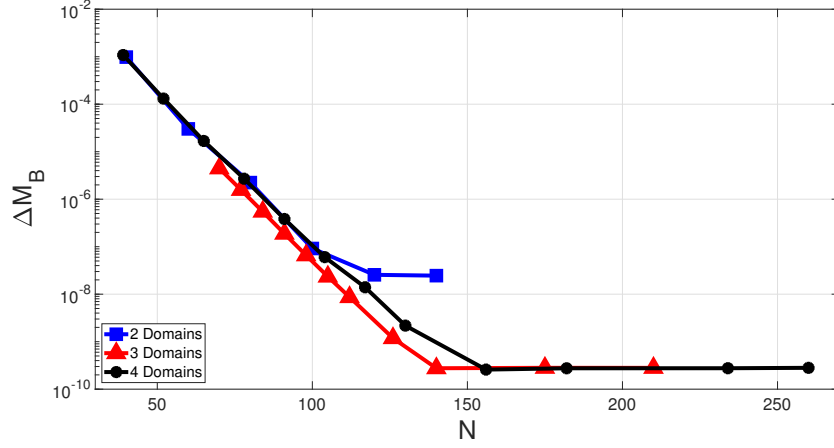
Uma forma alternativa de se verificar o erro da fórmula de Bondi é aproximar a derivada temporal do lado esquerdo da equação 64 e assim definir o desvio $\Delta M_B(u)$ como

$$\Delta M_B(u) = \left| \frac{1}{2\delta u} (M_B(u + \delta u) - M_B(u - \delta u)) + \frac{1}{2} e^{-2H(u)} N(u)^2 \right|. \quad (101)$$

Os resultados do teste de convergência de ΔM_B são apresentados no gráfico 10.

Da mesma forma que ocorre para o desvio da conservação de energia $C(u)$, ΔM_B também apresenta decaimento exponencial para as abordagens em dois, três e quatro subdomínios. Os códigos em três e quatro subdomínios apresentam desempenho equivalente.

Uma segunda forma de testar a convergência dos códigos numéricos é através da verificação da constante de Newman-Penrose, c_{NP} (NEWMAN; PENROSE; BOND, 1968).

Gráfico 10 - Erro da fórmula de Bondi ΔM_B para o código em dois, três e quatro subdomínios.

Fonte: A autora, 2020.

A constante c_{NP} é uma quantidade assintótica do campo auxiliar Φ , dada pela equação 69. A partir das equações de campo obtém-se que

$$c_{NP} \equiv \Phi_{-1}(u) = \text{constante.} \quad (102)$$

Utilizando-se como dado inicial

$$\Phi_0(r) = \frac{A_0 r}{k_1 + (r - k_2)^2}, \quad (103)$$

onde k_1 e k_2 são constantes positivas e A_0 é a amplitude inicial do campo escalar, verifica-se que

$$c_{NP} = A_0. \quad (104)$$

A aproximação espectral do campo escalar Φ permite que o valor da constante c_{NP} seja expresso em termos dos modos $a_k^{(n)}$ do último subdomínio. Isto é feito da forma

$$c_{NP}(u) = - \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial r} \right). \quad (105)$$

Os valores adotados são $k_1 = 0.5$, $k_2 = 2$ e $A_0 = 0.27$ que representam o dado inicial próximo da formação de horizonte aparente ($A_0 \gtrsim 0.28$). A configuração dos subdomínios é a mesma do primeiro teste, dada na Tabela 3.

O integrador Runge-Kutta foi executado com passo 1.0×10^{-4} . Aqui realizou-se um teste adicional, que consistiu em variar o valor da constante de mapeamento L_0 . Os valores adotados foram $L_0 = 0.5, 1.0$ e 2.0 .

Como medida de erro tomou-se o desvio

$$\delta c_{NP} = \frac{|c_{NP}(0) - c_{NP}(u)|}{c_{NP}(0)} \times 100, \quad (106)$$

onde $c_{NP}(0)$ é dado pela equação 104. Os resultados são apresentados nos gráficos 11.

Para dois subdomínios, a convergência não é bem definida para $L_0 = 0.5$ e $L_0 = 1.0$. Para $L_0 = 2.0$ o decaimento exponencial característico dos métodos espectrais aparece conforme o esperado.

Para o caso de três subdomínios, os melhores resultados ocorrem para $L_0 = 1.0$, onde se obteve $\delta c_{NP} \simeq 10^{-10}\%$ para uma truncagem geral $N = 200$. Para $L_0 = 0.5$ e $L_0 = 2.0$ os erros apresentados são maiores em comparação, mesmo para truncagens elevadas. Para o caso de quatro subdomínios, os erros apresentam decaimento exponencial para os três valores de L_0 considerados, sendo o melhor resultado obtido com $L_0 = 2.0$, onde $\delta c_{NP} \simeq 10^{-10}\%$ para $N = 250$.

Conforme fica demonstrado por estas simulações, a convergência dos códigos depende de inúmeros fatores: localização das interfaces, da constante de mapeamento, do número de pontos de colocação e da quantidade de subdomínios. Os resultados gerados nesta seção foram obtidos considerando-se que o domínio computacional intermediário $-1 \leq x \leq 1$ estava igualmente subdividido. Esta escolha não é fixa e pode ser feita de acordo com objetivo a ser alcançado, como é o caso do cálculo da massa de Bondi na formação de horizonte aparente, onde uma outra configuração é adotada.

2.3.2 Colapso crítico

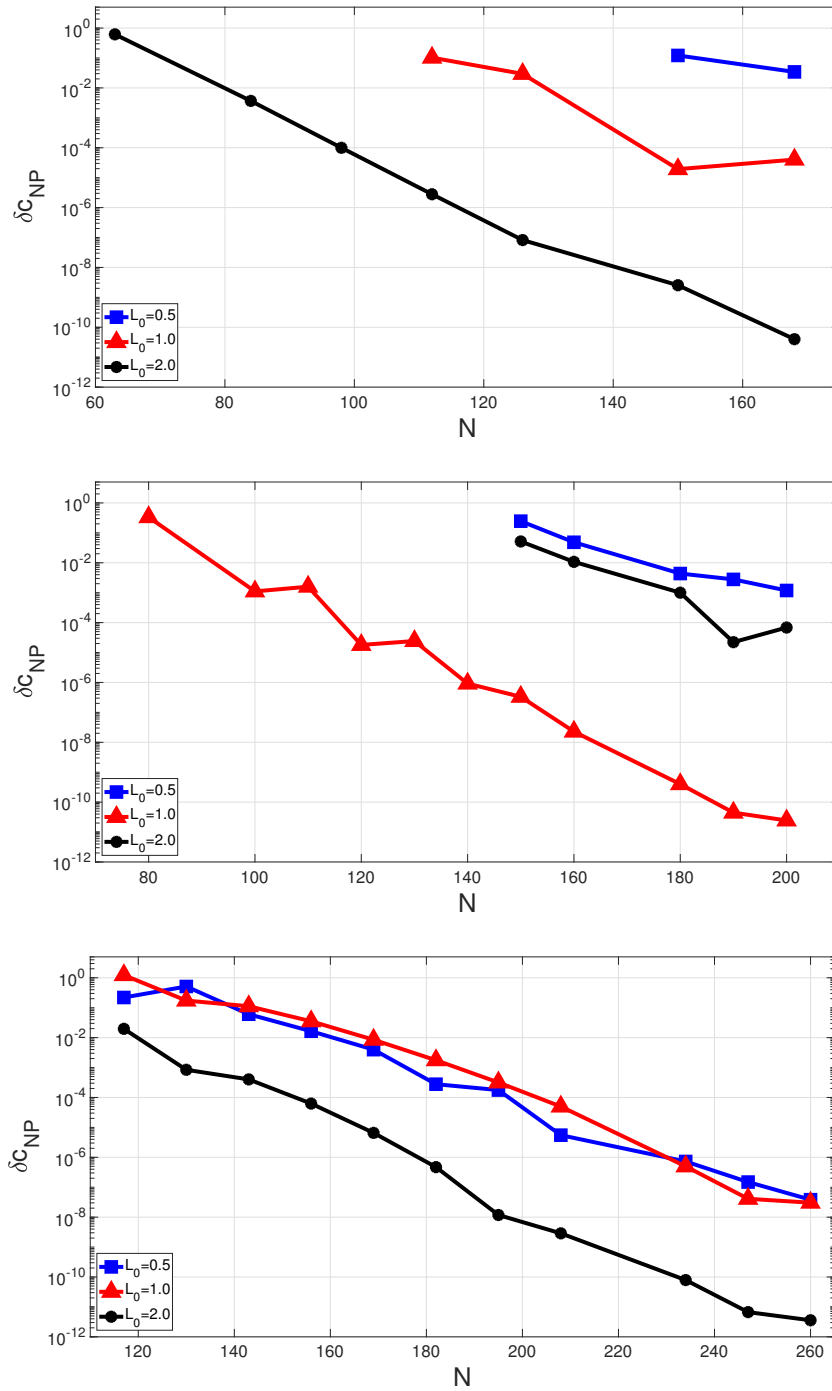
A seguir são apresentados os resultados do colapso gravitacional obtidos utilizando-se os códigos desenvolvidos em dois e quatro subdomínios. Para esta etapa a integração do sistema dinâmico foi realizada pelo método de Cash-Karp, que é um método do tipo Ruge-Kutta com passo variável.

O dado inicial é a Gaussiana dada na equação 99, que será repetida abaixo

$$\Phi_0(r) = A_0 r e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2}, \quad (107)$$

com $r_0 = 0.5$ e $\sigma = 1.0$. Dependendo do valor do campo escalar inicial, que é determinado pela amplitude A_0 , haverá ou não a formação de buraco negro. O regime subcrítico é obtido escolhendo-se um valor de $A_0 < A_0^*$, onde A_0^* é o valor crítico, e é caracterizado pela dispersão total do campo escalar (CHOPTUIK, 1993; GUNDLACH; MARTIN-GARCIA, 2007). Para valores de $A_0 > A_0^*$, tem-se as soluções supercríticas, onde há a formação de buraco negro. Como o valor de A_0^* é desconhecido, a escolha do valor de A_0 é feita por tentativa e erro.

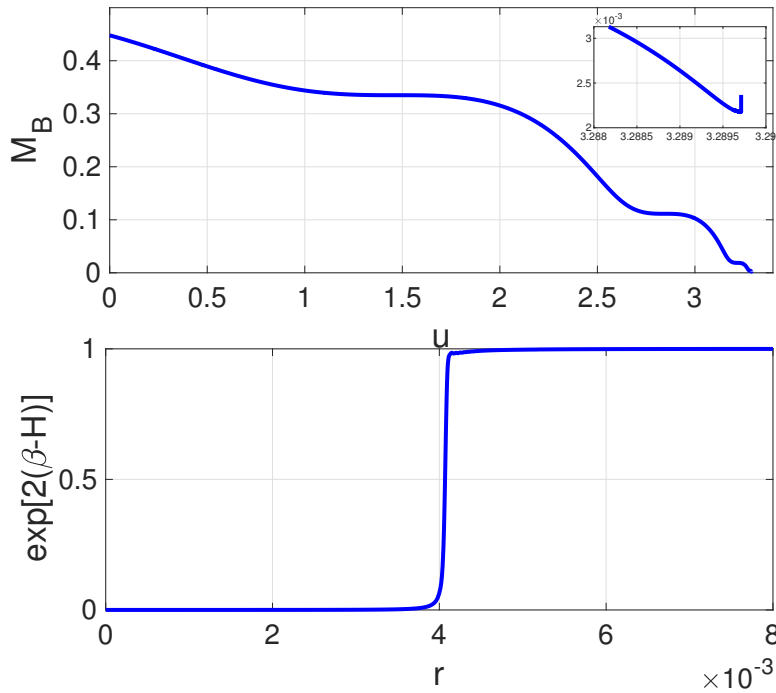
Gráfico 11 - Erro da constante de Newman-Penrose c_{NP} para o código em dois, três e quatro subdomínios.



Fonte: A autora, 2020.

A formação de buraco negro é determinada pela formação do horizonte aparente durante a evolução numérica do código. A detecção do horizonte aparente é realizada monitorando-se a expansão dos raios nulos, que no instante de formação do horizonte iguala-se a zero, que é equivalente a $\beta \rightarrow \infty$. Conforme demonstrado por Christodoulou (CHRISTODOULOU, 1987), neste instante ocorre a formação de uma função degrau $e^{2(\beta-H)}$, que localiza o horizonte e determina sua massa $M_{AH} = \frac{r_{BH}}{2}$. O gráfico 12 ilustra tais resultados.

Gráfico 12 - Acima, o comportamento da massa de Bondi para uma solução supercrítica até a formação do horizonte aparente. Abaixo, função degrau típica prevista por Christodoulou anterior a formação do horizonte aparente. Em ambos os casos, a massa do horizonte aparente $m_{AH} = r_{AH}/2$ e a massa de Bondi são aproximadamente iguais. Aqui $M_{BH} \approx 2.18 \times 10^{-3}$ correspondendo a $A_0 = 1.5129325$.



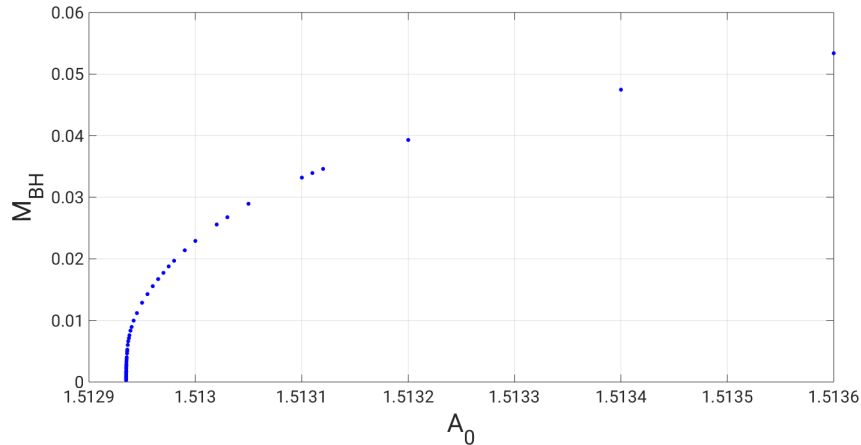
Fonte: A autora, 2020.

O código foi evoluído tendo como critério de parada a diminuição do passo de integração além de um valor mínimo $h_{min} = 10^{-18}$. Para a construção da lei de escala o que se fez foi a coleta da massa de Bondi mínima depois que a evolução já havia sido interrompida. Para adoção deste critério verificou-se após algumas simulações que os instantes da formação da função degrau e a massa de Bondi mínima são compatíveis dentro da precisão numérica.

Inicia-se a apresentação dos resultados pelo caso de dois subdomínios. Neste código fez-se $N_1 = N_2 = 500$ e $x^{(1)} = 0$, o que implica em $r^{(1)} = L_0$, com $L_0 = 0.5$. O gráfico

13 mostra o espectro de massas dos buracos negros formados em função das amplitudes iniciais A_0 .

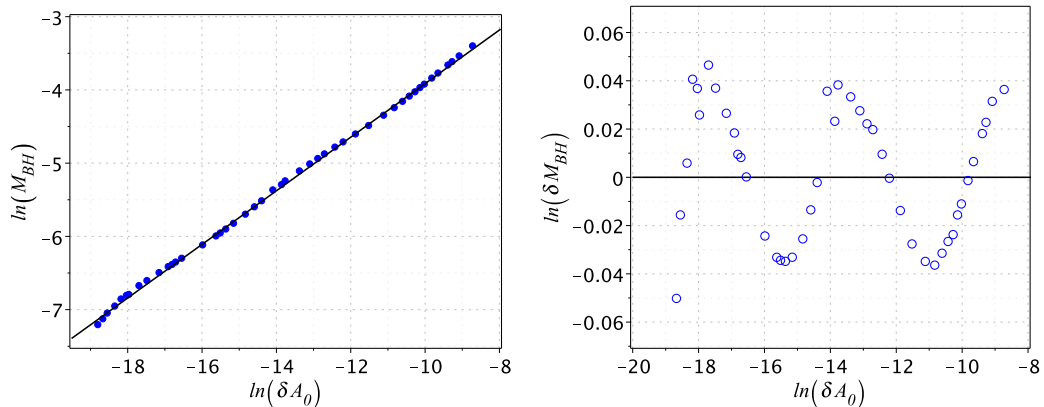
Gráfico 13 - Espectro de massas M_{BH} em função de A_0 para $N_1 = N_2 = 500$, $x^{(0)} = 0$ ($r^{(0)} = L_0$) e $L_0 = 0.5$.



Fonte: A autora, 2020.

Aplicando-se regressão linear ao conjunto de massas obtidas, obtém a $\gamma \approx 0.3659$. Quando se desconta a parte linear da lei de escala dada na equação 67 obtém-se $\Delta \approx 3.139$. O gráfico 14 apresentam o resultado do ajuste.

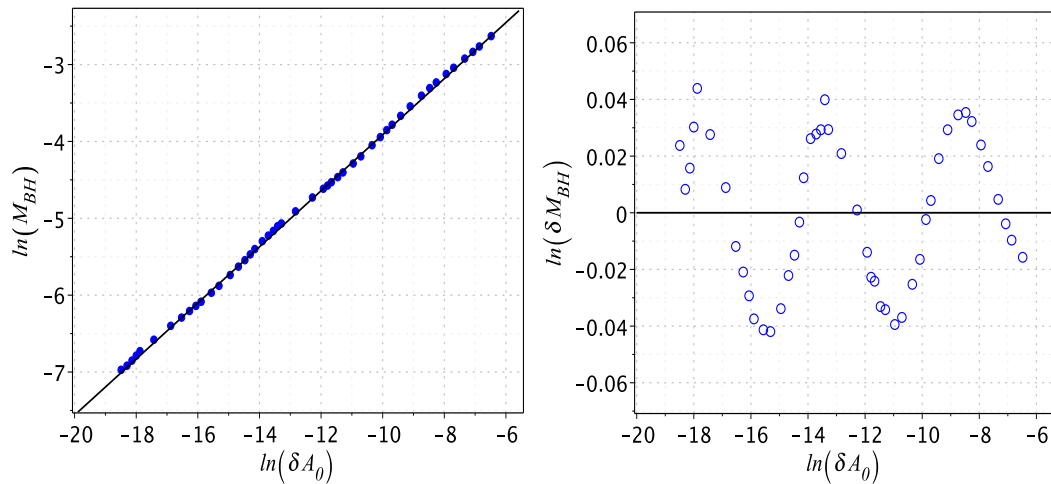
Gráfico 14 - Lei de escala para caso $N_1 = N_2 = 500$, $r^{(0)} = L_0$ ($x^{(0)} = 0$) e $L_0 = 0.5$.



Fonte: A autora, 2020.

Uma segunda rodada de simulações foi realizada utilizando-se a decomposição em dois subdomínios, com $N_1 = 200$ e $N_2 = 300$, mas desta vez fazendo-se $x^{(1)} = -0.5$, ou seja, $r^{(1)} = \frac{L_0}{3}$ com $L_0 = 0.3$. Esta estratégia apesar de diminuir o valor da truncagem global, aumenta a concentração de pontos de colocação na região próxima da formação do horizonte aparente. Este aumento de resolução parece render bons frutos. A lei de escala obtida para este sistema obteve o valor de $\gamma \approx 0.3647$ e $\Delta \approx 3.468$. O gráfico 15 apresenta os resultados relativos a este sistema.

Gráfico 15 - Lei de escala para caso $N_1 = 200$ e $N_2 = 300$, $r^{(0)} = \frac{L_0}{3}$ ($x^{(0)} = -0.5$) e $L_0 = 0.3$.

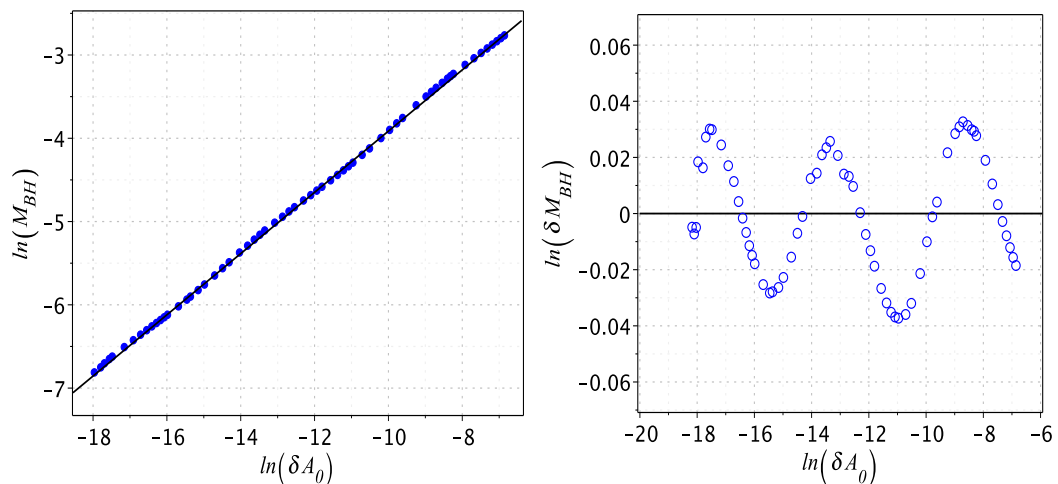


Fonte: A autora, 2020.

Os valores obtidos para o expoente crítico γ nos dois conjuntos de simulações são próximos dos valor de referência, obtido por métodos perturbativos ($\gamma = 0.37$). O mesmo acontece para o período Δ ($\Delta = 3.44$) (GUNDLACH, 1997). No primeiro caso a discrepância é de 4.61%, enquanto que para o segundo caso obteve-se 1.34%.

No caso do código em quatro subdomínios dois sistemas distintos foram simulados. Primeiramente fez-se $N_1 = N_2 = N_3 = 200$ e $N_4 = 300$, e ainda $x^{(1)} = -0.75$, $x^{(2)} = -0.5$ e $x^{(3)} = 0$, o que corresponde a $r^{(1)} = \frac{L_0}{7}$, $r^{(2)} = \frac{L_0}{3}$ e $r^{(3)} = L_0$ e adotou-se $L_0 = 0.1$. Os resultados são apresentados no gráficos 16.

Gráfico 16 - Lei de escala para caso $N_1 = N_2 = N_3 = 200$ and $N_4 = 300$, com interfaces em $r^{(1)} = L_0/7$, ($x^{(1)} = -0.75$), $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(2)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(3)} = 0$) sendo $L_0 = 0.1$.



Fonte: A autora, 2020.

Neste caso, obteve-se o valor do expoente crítico e o período da componente

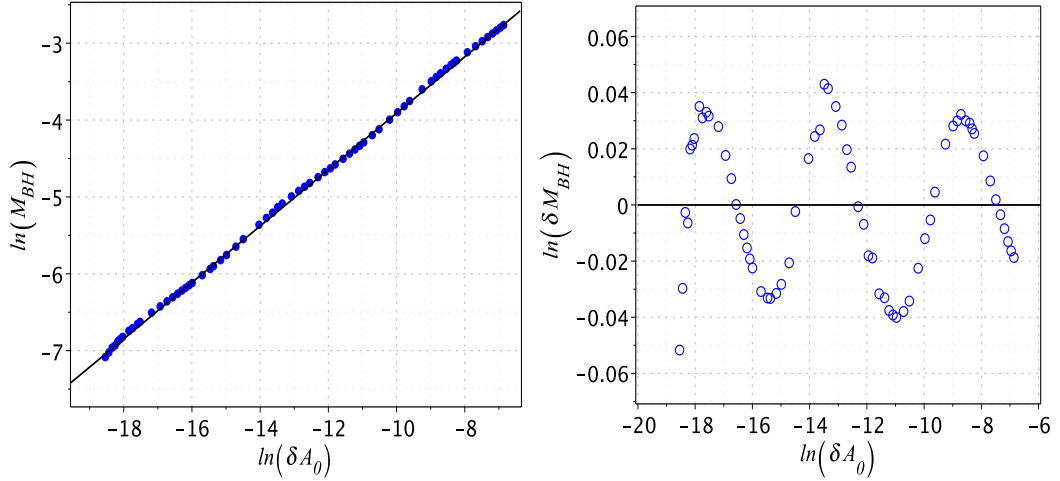
oscilatória

$$\gamma \approx 0.36767, \quad \varpi \approx 4.540. \quad (108)$$

que equivale a $\Delta \approx 3.338$, ou seja, uma discrepância de 2.96% do valor de referência.

Uma segunda configuração de quatro subdomínios foi considerada. Fez-se $N_1 = N_2 = N_3 = 105$ and $N_4 = 140$, mas desta vez a interface entre o primeiro e segundo subdomínios foi localizada em $r^{(1)} = L_0/19$, ($x^{(1)} = -0.9$) mantendo-se todas as outras interfaces fixas. O valor da constante de mapeamento também permaneceu inalterado. O gráfico 17 mostra os resultados obtidos.

Gráfico 17 - Lei de escala para caso $N_1 = N_2 = N_3 = 105$ and $N_4 = 140$, com interfaces em $r^{(1)} = L_0/19$, ($x^{(1)} = -0.9$), $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(1)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(1)} = 0$) sendo $L_0 = 0.1$.



Fonte: A autora, 2020.

Este sistema forneceu

$$\gamma \approx 0.3670, \quad \varpi \approx 4.549, \quad (109)$$

sendo $\Delta \approx 3.339$ diferindo em 2.93% do valor de referência.

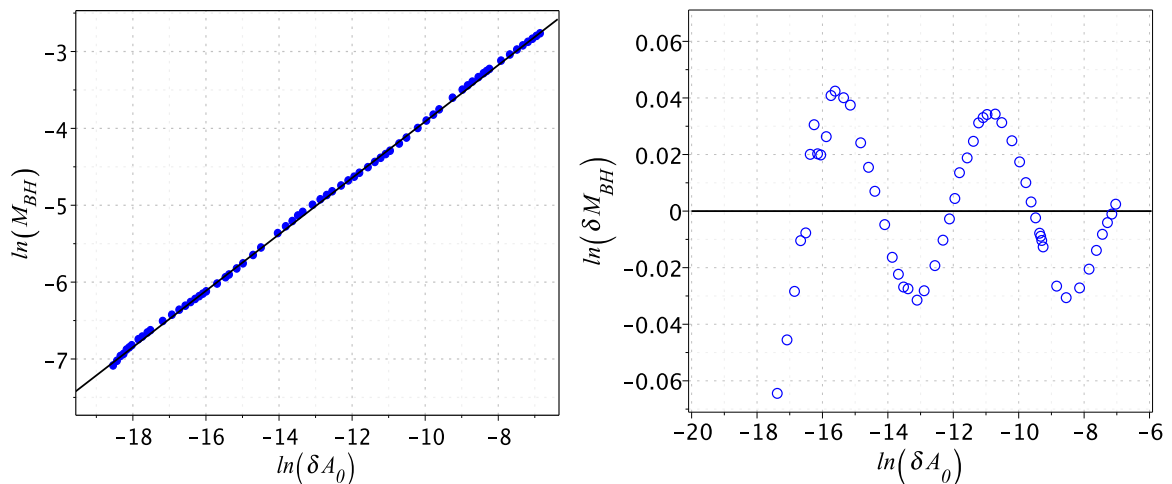
Assim como para o caso de dois subdomínios, o aumento da concentração de pontos de colocação próximos a localização do horizonte aparente fornece bons resultados apesar de ter-se diminuído a truncagem global na segunda configuração.

Finalizando a série de experimentos realizados em simetria esférica adicionou-se um potencial $U(\phi) = \lambda\phi^4/4$ e utilizou-se o código em quatro subdomínios com $N_1 = N_2 = N_3 = 200$ and $N_4 = 300$ e $r^{(1)} = L_0/7$, ($x^{(1)} = -0.75$), $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(1)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(1)} = 0$), fazendo-se $L_0 = 0.1$. Escolheu-se $\lambda = 1$, o que não restringe a validade dos resultados. Obteve-se

$$\gamma \approx 0.36852, \quad \varpi \approx 4.636, \quad (110)$$

sendo $\Delta \approx 3.417$, que é muito próximo do valor predito de 3.44. O gráfico 18 apresenta os resultados obtidos.

Gráfico 18 - Presença de um potencial. Quatro subdomínios com $N_1 = N_2 = N_3 = 200$ e $N_3 = 300$, com interfaces localizadas em $r^{(1)} = L_0/7$, ($x^{(1)} = -0.75$), $r^{(2)} = L_0/3$ ($x^{(1)} = -0.5$), $r^{(3)} = L_0$ ($x^{(1)} = 0$) sendo $L_0 = 0.1$.



Fonte: A autora, 2020.

O que se verifica é que a inclusão do potencial não altera o valor do expoente crítico nem do período da componente oscilatória.

2.4 Discussão

Neste capítulo considerou-se o caso do campo escalar auto-gravitante em simetria esférica descrito no formalismo característico. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando-se algoritmos desenvolvidos com a técnica de decomposição de domínios.

O primeiro passo no desenvolvimento do código é compactificar e dividir o domínio espacial $\mathcal{D} : 0 \leq r \leq \infty$ em vários subdomínios. Isto é feito introduzindo-se o domínio computacional intermediário $\mathcal{D} : -1 \leq x \leq 1$ através do mapeamento algébrico 70 e com mapeamentos lineares define-se os vários subdomínios $-1 \leq \xi^{(l)} \leq 1$, $l = 1, 2, \dots, n$, conforme mostrado na figura 3.

Na sequência estabelece-se as funções de base necessárias para as aproximações espectrais das funções métricas e do campo escalar em cada subdomínio. Para conectar as soluções em cada subdomínio utiliza-se o método de junção nas interfaces dos subdomínios.

Uma outra característica importante é que utiliza-se dois conjuntos distintos de pontos de colocação. O primeiro para a resolução das equações de hipersuperfície de β e

de V , dadas pelas equações 52 e 53, respectivamente. O segundo conjunto de pontos de colocação é utilizado para resolver a equação de evolução de Φ . As truncagens das funções métricas β e V e do campo auxiliar Φ poderiam ter sido feitas iguais, o que exigiria apenas uma grid de pontos de colocação. Entretanto, para obter-se uma convergência mais rápida com menor resolução, preferiu-se fazer $\bar{N}_l > N_l$.

A validação do algoritmo de Galerkin-Colocação com decomposição de domínios foi feita por dois testes numéricos. O primeiro foi a verificação da fórmula de Bondi 64, através do cálculo da conservação de energia. O segundo teste foi a verificação da constante de Newman-Penrose, dada pela equação 102. Apesar dos dados iniciais utilizados nestes testes não resultarem na formação de horizonte aparente, encontram-se bem próximos de fazê-lo. Em geral, os resultados apresentados exibem convergência exponencial. Entretanto, conforme verificou-se, a convergência depende de vários fatores: o número de subdomínios, a localização das interfaces, o número de pontos de colocação em cada subdomínio, e a constante de mapeamento L_0 .

Como aplicação do código desenvolvido reproduziu-se a lei de escala de Choptuik (CHOPTUIK, 1993) e a correspondente componente oscilatória relacionadas ao colapso crítico gravitacional. Os resultados foram obtidos para o código em dois e quatro subdomínios, onde em ambos os casos não se ultrapassou 1000 pontos de colocação no total. Além disso, utilizou-se a massa de Bondi calculada no instante de formação do horizonte aparente. Em todos os casos, o expoente crítico, $\gamma \approx 0.367$, que é ligeiramente diferente dos valores apresentados por Choptuik (CHOPTUIK, 1993), Hod and Piran (HOD; PIRAN, 1997), e Purrer et al. (PÜRRER; HUSA; AICHELBERG, 2005), mas em concordância com Barreto et al. (BARRETO; OLIVEIRA; RODRIGUEZ-MUELLER, 2017). Entretanto, o objetivo era apresentar resultados confiáveis com uma resolução moderada, demonstrando a eficiência do método de Galerkin-Colocação com decomposição de domínios para o bem conhecido e dispendioso computacionalmente colapso crítico gravitacional e sua estrutura fina.

3 CASO AXIAL: PROBLEMA DE BONDI

O artigo de Bondi de 1962 (BONDI; BURG; METZNER, 1962) dedica-se à análise do problema da emissão de ondas gravitacionais por uma fonte isolada com simetria axial inicialmente estática, que irradia por um período finito e retorna à configuração estática. Devido a emissão de ondas gravitacionais há perda de massa pela fonte material. O problema de Bondi desenvolveu o formalismo característico da RG, que é o mais apropriado para o estudo de espaços-tempos radiativos.

A métrica do espaço-tempo com simetria axial e assintoticamente plana para o problema de Bondi é dada por

$$ds^2 = \left(\frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right) du^2 + 2 e^{2\beta} du dr + 2 U r^2 e^{2\gamma} du d\theta - r^2 \left(e^{2\gamma} d\theta^2 + e^{-2\gamma} \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (111)$$

onde a coordenada u define superfícies de nível de um escalar nulo, isto é, $\nabla^\mu u \nabla_\mu u = 0$. A coordenada radial r é tal que as superfícies $(u, r) = \text{constante}$ tem área $4\pi r^2$, e as coordenadas θ e ϕ são constantes ao longo das geodésicas nulas.

As funções métricas β , U , V e γ são funções das coordenadas u , r e θ . As equações de campo de Einstein no vácuo são

$$\beta_{,r} = \frac{1}{2} r (\gamma_{,r})^2, \quad (112)$$

$$\left[r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,r} \right]_{,r} = 2 r^2 \left[r^2 \left(\frac{\beta}{r^2} \right)_{,r\theta} - \frac{(\sin^2 \theta \gamma)_{,r\theta}}{\sin^2 \theta} + 2 \gamma_{,r} \gamma_{,\theta} \right], \quad (113)$$

$$V_{,r} = -\frac{1}{4} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} (U_{,r})^2 + \frac{(r^4 \sin \theta U)_{,r\theta}}{2 r^2 \sin \theta} + e^{2(\beta-\gamma)} \left[1 - \frac{(\sin \theta \beta_{,\theta})_{,\theta}}{\sin \theta} + \gamma_{,\theta\theta} + 3 \cot \theta \gamma_{,\theta} - (\beta_{,\theta})^2 - 2 \gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta}) \right], \quad (114)$$

$$4 r (r \gamma)_{,ur} = \left\{ 2 r \gamma_{,r} V - r^2 \left[2 \gamma_{,\theta} U + \sin \theta \left(\frac{U}{\sin \theta} \right)_{,\theta} \right] \right\}_{,r} - 2 r^2 \frac{(\gamma_{,r} U \sin \theta)_{,\theta}}{\sin \theta} + \frac{1}{2} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} (U_{,r})^2 + 2 e^{2(\beta-\gamma)} \left[(\beta_{,\theta})^2 + \sin \theta \left(\frac{\beta_{,\theta}}{\sin \theta} \right)_{,\theta} \right]. \quad (115)$$

As equações 112-114 são equações de hipersuperfície para β , U e V . Já a equação 115 é a equação de evolução para γ , sendo a única que possui diferenciação com respeito a u .

Novamente é possível identificar a estrutura hierárquica das equações no problema característico no caso de simetria axial. Uma vez especificado o valor inicial $\gamma_0(r, \theta) = \gamma(u_0, r, \theta)$ sobre uma hipersuperfície nula inicial $u = u_0$, as equações 112-114 determinam as funções métricas β , U e V sobre esta hipersuperfície. A partir destes resultados, a equação de evolução 115 fornece o valor de $\gamma_{,u}$ sobre $u = u_0$, que uma vez integrado determina o valor de γ na próxima hipersuperfície nula $u = u_0 + \delta u$, e todo o ciclo é repetido fornecendo a evolução do espaço-tempo.

Como qualquer métrica descrita em coordenadas polares, deve-se impor condições de regularidade em torno do eixo de simetria ($\sin \theta = 0$). Neste caso, deve-se impor que

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\sin^2 \theta}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\sin \theta} \quad (116)$$

sejam contínuas em $\theta = 0, \pi$. Isto implica que

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\sin^4 \theta}. \quad (117)$$

As condições de regularidade do espaço-tempo na origem são

$$\gamma \sim \mathcal{O}(r^2), \quad \beta \sim \mathcal{O}(r^4), \quad U \sim \mathcal{O}(r), \quad V \sim r + \mathcal{O}(r^3) \quad (118)$$

Já as condições assintóticas das funções métricas são dadas por

$$\gamma = K(u, \theta) + \frac{c(u, \theta)}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (119)$$

$$\beta = H(u, \theta) + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (120)$$

$$U = L(u, \theta) + \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (121)$$

$$V = r^2 \frac{[\sin \theta L(u, \theta)]_{,\theta}}{\sin \theta} + r e^{2(H-K)} V_1(u, \theta) - 2 e^{2H} M(u, \theta) + \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (122)$$

onde $V_1(u, \theta)$ está relacionado às funções $H(u, \theta)$, $K(u, \theta)$, $L(u, \theta)$, e $M(u, \theta)$ é o aspecto de massa de Bondi.

Conforme já foi mencionado na seção sobre formulação característica, neste trabalho adota-se a formulação *worldtube-nullcone*, com o objetivo de evitar-se a formação de caústicas durante a evolução do código numérico. Deste modo, para que as condições de regularidade da métrica na origem sejam satisfeitas, decorre que esta não possui a forma de Minkowski no limite assintótico. Esta escolha de calibre é devida a (TAMBURINO; WINICOUR, 1966) e difere daquela adotada no trabalho original de Bondi (BONDI; BURG; METZNER, 1962), onde tem-se as funções $K = H = L = 0$. Esta escolha original de calibre é possível naquele trabalho, pois Bondi estava considerando soluções

exteriores à uma fonte de matéria localizada na origem. Todavia, como um dos focos de desenvolvimento dos códigos deste trabalho é o colapso gravitacional, é necessário que todo o domínio radial seja coberto pelo sistema de coordenadas, e logo faz-se a escolha do calibre de Winicour-Tamburino (SIEBEL, 2002).

Entretanto, para que se possa extrair formas de ondas gravitacionais é necessário introduzir observadores inerciais no infinito nulo. Isto é feito relacionando-se a métrica da 2-geometria de uma esfera unitária nas coordenadas de Bondi, que é recuperada fazendo-se $K = H = L = 0$, com a expressão similar neste sistemas de coordenadas, através do fator conforme ω da forma mostrada a seguir

$$d\hat{s}_B^2 = d\theta_B^2 + \sin^2 \theta d\phi_B^2 = \omega^2 \left(e^{2K} d\theta^2 + \sin^2 \theta e^{-2K} d\phi^2 \right), \quad (123)$$

onde

$$\omega = \frac{e^{2K}}{(1+x)e^\Delta + (1-x)e^{-\Delta}} \quad (124)$$

e

$$\Delta = \int_0^x \frac{e^{2K} - 1}{1-x^2} dx, \quad (125)$$

e ainda foi efetuada a mudança de variável $x = \cos \theta$.

Deste modo, o tempo coordenado de Bondi u_B e o tempo retardado u se relacionam por

$$du = \frac{1}{\omega} e^{-2H} du_B. \quad (126)$$

A fórmula de Bondi, que informa o decréscimo da massa de Bondi no tempo devido a extração de ondas gravitacionais, é dada por (OLIVEIRA; RODRIGUES, 2011)

$$\frac{dM_B(u)}{du} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{e^{2H}}{\omega} N^2 \sin \theta d\theta \quad (127)$$

onde N é a função news que vale

$$N = e^{-2H} c_{,u} - e^{-2H} \frac{(\sqrt{1-x^2} c^2 L)'}{2c} + \frac{1}{2} e^{-2(K+H)} \omega (1-x^2) \left[\frac{(\omega e^{2H})'}{\omega^2} \right]', \quad (128)$$

e a massa de Bondi é dada por

$$\begin{aligned}
M_B(u) = & \int_{-1}^1 \omega^{-1} \left\{ \frac{1}{2} M + \frac{1}{4} e^{-2K} [(1-x^2)c'' - 4xc' - 2c] - \right. \\
& e^{-2K} c' (H' + K') (1-x^2) - e^{-2K} c (H'^2 - 2H'K' - K'^2) \\
& - e^{-2K} c (H'^2 - 2H'K' - K'^2) (1-x^2) \\
& \left. - \frac{1}{2} e^{-2K} c [(1-x^2)(H'' - K'') - 4x(H' + K')] \right\} dx \quad (129)
\end{aligned}$$

A relação entre a função news e a extração de ondas gravitacionais é o principal resultado do artigo de Bondi de 1962, sendo uma das principais vantagens de se utilizar a formulação característica.

De modo a simplificar a implementação numérica introduz-se a função $S(u, r, \theta)$ tal que (TAMBURINO; WINICOUR, 1966)

$$V \equiv r + r^2 S. \quad (130)$$

Em termos da função S a equação 114 é reescrita como

$$\begin{aligned}
(r^2 S)_{,r} = & -1 - \frac{1}{4} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} (U_{,r})^2 + \frac{(r^4 \sin \theta U)_{,r\theta}}{2 r^2 \sin \theta} + \\
& e^{2(\beta-\gamma)} \left[1 - \frac{(\sin \theta \beta_{,\theta})_{,\theta}}{\sin \theta} + \gamma_{,\theta\theta} + 3 \cot \theta \gamma_{,\theta} - (\beta_{,\theta})^2 - 2 \gamma_{,\theta}(\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta}) \right], \quad (131)
\end{aligned}$$

e a expansão assintótica de S é dada por

$$S = S_0(u, \theta) + \frac{S_{-1}(u, \theta)}{r} - 2 e^{2H} M(u, \theta) + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (132)$$

sendo $S_0 = \frac{[\sin \theta L(u, \theta)]_{,\theta}}{\sin \theta}$ e S_{-1} está relacionada às funções K , H , L .

Uma segunda modificação feita é transformar a equação de hipersuperfície de U , que é de segunda ordem, em duas equações de primeira ordem (BARRETO, 2014). Logo, tem-se

$$(r^2 Q)_{,r} = 2 r^2 \left[r^2 \left(\frac{\beta}{r^2} \right)_{,r\theta} - \frac{(\sin^2 \theta \gamma)_{,r\theta}}{\sin^2 \theta} + 2 \gamma_{,r} \gamma_{,\theta} \right], \quad (133)$$

e

$$U_{,r} = e^{2(\beta-\gamma)} \frac{Q}{r^2}. \quad (134)$$

Este procedimento apresenta-se muito vantajoso do ponto de vista computacional, pois evita a inversão de matriz durante a execução do código de evolução.

3.1 Estratégia numérica

Novamente serão utilizados métodos espectrais na resolução das equações do problema de Bondi. Entretanto, antes de propor-se as aproximações espectrais das funções métricas γ , β , U e Q , V (reescrita em termos de S), deve-se observar algumas características à respeito do sistema de equações 112-115.

Em problemas na formulação característica, a escolha do dado inicial é livre. Entretanto, é importante que tal escolha seja feita de forma a descrever situações de interesse físico. Como os modos de radiação gravitacional são expandidos em termos de modos pares (momento de quadrupolo, momento de octapolo, etc.), a escolha de uma função inicial γ com paridade par não se apresenta tão restritiva. Isto é vantajoso pois um bom entendimento físico é obtido com menos recursos computacionais. Para uma análise do caso geral, onde o dado inicial γ não possui paridade definida, deve-se dispor de uma resolução maior.

A equação de hipersuperfície de β , dada por 112, informa que a função métrica $\beta(u, r, \theta)$ é par com relação à variável angular θ . Já a equação hipersuperfície de U , sendo β e γ pares com relação a θ , implica que a função métrica U é ímpar em θ . Logo, a função Q também será ímpar em θ . Fazendo-se análise similar para a equação de hipersuperfície de V , conclui-se que esta é uma função par de θ , e conseqüentemente S também o será. A partir da equação de evolução 115 verifica-se que a paridade de γ é mantida e assim apenas os modos pares são evoluídos. Esta análise da paridade das funções métricas com relação à dependência angular é de grande importância para a construção das aproximações espectrais.

A seguinte mudança de variáveis é realizada

$$x = \cos \theta, \tag{135}$$

$$y = \frac{r - L_0}{r + L_0}. \tag{136}$$

Desta forma, a parte angular do domínio físico $0 \leq \theta \leq \pi$ é transformada em $-1 \leq x \leq 1$. Já a parte radial é mapeada algebricamente e então $0 \leq r \leq \infty$ transforma-se em $-1 \leq y \leq 1$. A figura 4 ilustra a mudança de variáveis realizada.

As aproximações espectrais das funções métricas são dadas a seguir

$$\bar{\gamma}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_x} a_{kj}(u) \psi_k^{(\gamma)}(r) P_{2j}(x), \tag{137}$$

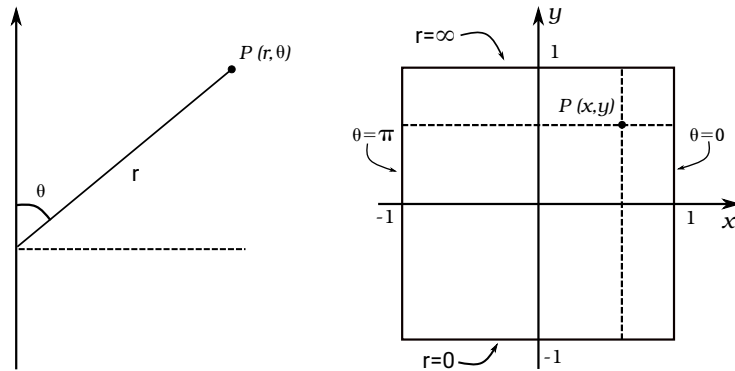
$$\bar{\beta}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r} \sum_{j=0}^{M_x} c_{kj}(u) \psi_k^{(\beta)}(r) P_{2j}(x), \tag{138}$$

$$\bar{U}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r} \sum_{j=0}^{M_x} b_{kj}(u) \psi_k^{(U)}(r) P_{2j+1}(x), \quad (139)$$

$$Q(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r} \sum_{j=0}^{M_x} q_{kj}(u) \psi_k^{(\gamma)}(r) P_{2j+1}(x), \quad (140)$$

$$S(u, r, x) = \sum_{k=0}^{\bar{M}_r} \sum_{j=0}^{\bar{M}_x} s_{kj}(u) \psi_k^{(U)}(r) P_{2j}(x). \quad (141)$$

Figura 4 - Mudança de variáveis.



Fonte: A autora, 2020.

As funções de base $\psi_k^{(\gamma)}(r)$ satisfazem as condições de contorno dadas em 118 e 119. O mesmo ocorre para as funções de base $\psi_k^{(\beta)}(r)$ e $\psi_k^{(U)}(r)$, que além das condições na origem 118, satisfazem as condições assintóticas 120 e 121, respectivamente. A expansão assintótica da função Q é idêntica a de γ , o que justifica tal escolha da função de base radial $\psi_k^{(\gamma)}(r)$. O mesmo ocorre com relação a função métrica S , cuja expansão assintótica 132 é idêntica à de U . Todas estas funções de base radiais, $\psi_k^{(\gamma)}(r)$, $\psi_k^{(\beta)}(r)$ e $\psi_k^{(U)}(r)$, são construídas em termos de polinômios racionais de Chebyshev, e estão discriminadas no Apêndice B.

Com relação as funções de base angular, os polinômios de Legendre são a escolha natural, pois satisfazem as condições de regularidade 116 e 117. Além disso, valendo-se da paridade destes polinômios é trivial construir funções de base que respeitem a paridade das funções métricas. Logo, para γ , β e S , as funções de base angular são os polinômios pares de Legendre $P_{2j}(x)$, enquanto que para as funções U e Q , toma-se os polinômios ímpares de Legendre $P_{2j+1}(x)$. Esta escolha é importante pois dobra a resolução das aproximações espectrais, visto que apenas os modos pares ou ímpares das funções métricas são excitados, conforme sua paridade.

Para a função métrica γ as truncagens radial e angular valem N_r e N_x , respectivamente. Para as funções β e U as truncagens são M_r e M_x , enquanto que para a função

S , tem-se \bar{M}_r e \bar{M}_x . Assim, a quantidade total de modos $a_{kj}(u)$ vale $(N_r + 1) \times (N_x + 1)$, de modos $c_{kj}(u)$, $q_{kj}(u)$ e $b_{kj}(u)$ vale $(M_r + 1) \times (M_x + 1)$, e de modos $s_{kj}(u)$ vale $(\bar{M}_r + 1) \times (\bar{M}_x + 1)$. Os valores adotados para as truncagens devem satisfazer alguns critérios para que o código numérico seja estável e apresente uma boa convergência com uma resolução moderada. Estes aspectos serão discutidos adiante.

Comparado ao problema em simetria esférica descrito no capítulo 2, o problema de Bondi em simetria axial é bem mais complexo. Entretanto, uma vez que são derivadas as equações de campo, sua implementação numérica é bastante similar ao caso anterior.

O primeiro passo é fornecer o dado inicial sobre uma hipersuperfície nula $u = u_0$. Isto equivale a prescrever a função $\gamma(u = u_0, r, \theta) = \gamma_0(r, \theta)$ em termos dos modos $a_k(u_0)$.

As aproximações espectrais de γ e β , dadas pelas equações 137 e 138, são substituídas na equação de hipersuperfície 112, obtendo-se a equação residual de β dada por

$$\text{Res}_\beta(u_0, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r} \sum_{j=0}^{M_x} c_{kj}(u_0) \psi_{k,r}^{(\beta)}(r) P_{2j}(x) - \frac{1}{2} r \left(\sum_{k=0}^{N_r} \sum_{j=0}^{N_x} a_{kj}(u_0) \psi_{k,r}^{(\gamma)}(r) P_{2j}(x) \right)^2 \quad (142)$$

Para minimizar a equação residual 142 utiliza-se o método de colocação. Os pontos de colocação são dados por

$$x_j = \text{zeros de } \frac{dP_{2(M_x+1)+1}}{dx}, \quad \text{tal que } 0 < x_j < 1, \quad (143)$$

$$y_k = \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2M_r+2} \right), \quad k = 0, \dots, M_r, \quad (144)$$

que são pontos de Legendre-Gauss e Chebyshev-Gauss, respectivamente. Apenas pontos interiores são utilizados, pois as equações residuais de β e U são identicamente satisfeitas tanto na origem quanto no infinito nulo. A grid com os pontos de colocação está representada na figura 5. Observe que apenas os pontos entre $0 < x < 1$ são utilizados, visto que as funções métricas foram expandidas em termos de funções de base que obedecem sua paridade. Isto equivale a dobrar a resolução numérica.

A equação residual 142 deve ser nula nos pontos de colocação, ou seja

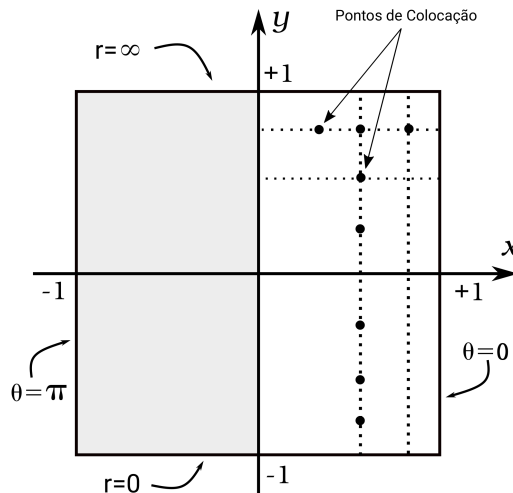
$$\text{Res}_\beta(u_0, r_k, x_j) = 0. \quad (145)$$

onde $k = 0, \dots, M_r$ e $j = 0, \dots, M_x$. Isto constitui um sistema de $(M_r + 1) \times (M_x + 1)$ equações algébricas, que podem ser representadas na forma

$$(\bar{\beta}_{,r})_{kj} = \frac{1}{2} r_k (\bar{\gamma}_{,r})_{kj}^2 \quad (146)$$

onde $(\bar{\beta}_{,r})_{kj}$ e $(\bar{\gamma}_{,r})_{kj}$ representam os valores de $\bar{\beta}_{,r}$ e $\bar{\gamma}_{,r}$ calculados nos pontos de colocação (r_k, x_j) .

Figura 5 - Pontos de colocação para as equações de hipersuperfícies β e U .



Fonte: A autora, 2020.

O lado direito da equação 146 é diretamente calculado a partir do dado inicial, que foi fornecido através dos modos $a_{lm}(u_0)$, e também dos pontos de colocação. O lado esquerdo da equação relaciona linearmente os modos $c_{lm}(u_0)$ com os valores de $(\bar{\beta}_{,r})_{kj}$ da seguinte forma

$$(\bar{\beta}_{,r})_{kj} = \sum_{l=0}^{M_r} \sum_{m=0}^{M_x} c_{lm}(u_0) \psi_{l,r}^{(\beta)}(r_k) P_{2m}(x_j) \quad (147)$$

para $k = 0, \dots, M_r$ e $j = 0, \dots, M_x$.

Esta característica é explorada na implementação numérica do algoritmo de evolução. O que se faz é escrever a equação residual nos pontos de colocação de forma matricial, e então obter os modos c_{lm} em termos dos valores $(\bar{\beta}_{,r})_{kj}$, que por sua vez são determinados pelo lado direito da equação 146. Uma vez que se calcula os modos $c_{lm}(u_0)$, a função métrica $\beta(u_0, r, \theta)$ e todas as suas derivadas podem ser reconstruídas, e não apenas seus valores nos pontos de colocação são obtidos, mas em todo o domínio físico. Esta se constitui uma vantagem dos métodos espectrais com relação ao método de diferenças finitas, onde apenas os valores na grid de colocação são conhecidos.

Para que o problema seja reescrito na forma matricial faz-se necessário adotar uma notação em que os valores referenciados por dois índices, tais como $c_{lm}(u_0)$, $(\bar{\beta}_{,r})_{kj}$, passem a sê-lo por apenas um índice. Desta forma, cada equação residual 146 corresponde a uma linha na matriz, e os modos c_{lm} , a_{lm} , e os outros, são representados por vetores colunas.

Esta conversão é feita da seguinte forma

$$i = k(M_x + 1) + j + 1, \quad (148)$$

para $k = 0, \dots, M_r$ e $j = 0, \dots, M_x$. E então a grid de pontos de colocação, que é bidimensional, é estendida ao longo de uma reta e tem-se

$$z_1 = (r_0, x_0), z_2 = (r_0, x_1), \dots, z_{M_x+1} = (r_0, x_{M_x}), z_{M_x+2} = (r_1, x_0), z_{M_x+3} = (r_1, x_1), \dots \quad (149)$$

A mesma conversão de índices leva a $c_1 = c_{00}, c_2 = c_{01}, c_3 = c_{03}, \dots, c_{M_x+1} = c_{0M_x}, \dots$. Todas as outras quantidades sofrem a mesma conversão.

Para demonstrar a ideia básica do que foi descrito, considere a função $f(u, r, x)$, cuja aproximação espectral vale

$$f(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r} \sum_{j=0}^{M_x} \hat{f}_{kj}(u) \psi_k(r) P_j(x). \quad (150)$$

Na convenção matricial adotada $\chi_i(r, x) \equiv \psi_k(r) P_j(x)$, utilizando-se a conversão de índices 148. Quando calculada nos pontos de colocação 149, a função f é dada por

$$f_i = f(z_i) = \Psi_{ij} \hat{f}_j, \quad (151)$$

ou

$$\underline{f} = \Psi \underline{\hat{f}}. \quad (152)$$

A matriz $\Psi = (\Psi)_{ij}$ corresponde às funções de base calculadas nos pontos de colocação e os vetores colunas \underline{f} e $\underline{\hat{f}}$ são os valores da função f nos pontos de colocação e os modos, respectivamente. Eles são dados por

$$\Psi = \begin{bmatrix} \chi_1(z_1) & \dots & \chi_{M_x+1}(z_1) & \chi_{M_x+2}(z_1) & \dots & \chi_{2(M_x+1)}(z_1) & \dots & \chi_M(z_1) \\ \chi_1(z_2) & \dots & \chi_{M_x+1}(z_2) & \chi_{M_x+2}(z_2) & \dots & \chi_{2(M_x+1)}(z_2) & \dots & \chi_M(z_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_1(z_M) & \dots & \chi_{M_x+1}(z_M) & \chi_{M_x+2}(z_M) & \dots & \chi_{2(M_x+1)}(z_M) & \dots & \chi_M(z_M) \end{bmatrix}, \quad (153)$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{M_x+1}, f_{M_x+2}, \dots, f_M)^T, \quad (154)$$

$$\underline{\hat{f}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_{M_x+1}, \hat{f}_{M_x+2}, \dots, \hat{f}_M)^T, \quad (155)$$

sendo $M = (M_r + 1)(M_x + 1)$.

A relação 152 pode ser invertida e os modos $\underline{\hat{f}}$ determinados a partir dos valores da função f nos pontos de colocação. Basicamente, isto é o que ocorre na determinação dos

modos $c_{lm}(u_0)$ na equação de hipersuperfície de β . A principal vantagem de descrever o problema em notação matricial é que as quantidades nos pontos de colocação e a determinação dos modos $b_{kj}(u)$ são realizadas por multiplicação matricial. Como a evolução do sistema foi implementada no Matlab(ou Octave), onde a multiplicação de matrizes é realizada paralelamente, tem-se um efeito direto no tempo de execução dos processos.

Uma vez que os modos $c_{lm}(u_0)$ foram determinados, passa-se a equação de hipersuperfície de U . Conforme descrito anteriormente, a equação de U , que é de segunda ordem com relação a r , foi reduzida a duas equações de primeira ordem. Logo, deve-se substituir a expansão de Q na equação 133 para obter-se sua correspondente equação residual Res_Q .

A minimização desta equação residual também é feita pelo método de colocação e são utilizados os mesmos pontos de grid 143 e 144, ou seja

$$\text{Res}_Q(u_0, r_k, x_j) = 0, \quad (156)$$

para $k = 0, \dots, M_r$ e $j = 0, \dots, M_x$. Ou ainda

$$\left[(r^2 Q)_{,r} \right]_{kj} = \left\{ 2 r^2 \left[r^2 \left(\frac{\beta}{r^2} \right)_{,r\theta} - \frac{(\sin^2 \theta \gamma)_{,r\theta}}{\sin^2 \theta} + 2 \gamma_{,r} \gamma_{,\theta} \right] \right\}_{kj}. \quad (157)$$

O lado direito da equação 157 é calculado nos pontos de colocação de forma direta, uma vez que só depende das funções β e γ , e estas são conhecidas em termos dos modos $c_{lm}(u_0)$ e $a_{lm}(u_0)$.

O lado esquerdo da equação 157 é escrito em termos das aproximações espectral 140 da seguinte forma

$$\left[(r^2 Q)_{,r} \right]_{kj} = \left[\left(r^2 \sum_{l=0}^{M_r} \sum_{m=0}^{M_x} q_{lm}(u_0) \psi_l^{(\gamma)}(r) P_{2m+1}(x) \right)_{,r} \right]_{kj}. \quad (158)$$

Isto representa uma relação linear entre os modos $q_{lm}(u_0)$ e os valores de $(r^2 Q)_{,r}$ nos pontos de colocação. Adotando-se a mesma estratégia de descrever o problema de forma matricial, já descrita anteriormente para a equação de hipersuperfície de β , obtém-se os modos $q_{lm}(u_0)$. A partir daí, procede-se a determinação dos modos $b_{lm}(u_0)$ através da equação 134. A equação residual correspondente a equação 134 é dada por

$$\text{Res}_U(u_0, r_k, x_j) = (U_{,r})_{kj} - e^{2(\beta_{kj} - \gamma_{kj})} \frac{Q_{kj}}{r_k^2}. \quad (159)$$

para $k = 0, \dots, M_r$ e $j = 0, \dots, M_x$.

O segundo termo do lado direito da equação 159 é diretamente calculado, pois os modos $a_{lm}(u_0)$, $c_{lm}(u_0)$ e $q_{lm}(u_0)$ já foram determinados. A relação entre $(U_{,r})_{kj}$ e os

modos $b_{lm}(u_0)$ vale

$$(U_{,r})_{kj} = \sum_{l=0}^{M_r} \sum_{m=0}^{M_x} b_{lm}(u_0) \psi_{l,r}^{(U)}(r) P_{2m+1}(x), \quad (160)$$

que é escrita em forma matricial e determina os modos $b_{lm}(u_0)$ em termos das quantidades calculadas nos pontos de colocação.

A redução da equação de segunda ordem 113 em duas equações de primeira ordem 133 e 134 faz com que o problema não seja resolvido diretamente para os modos $b_{lm}(u_0)$. Apesar de apresentar uma etapa extra, este procedimento evita que se tenha de inverter uma matriz em tempo de execução do código. Caso a equação 113 fosse diretamente implementada, os modos $b_{lm}(u_0)$ seriam determinados através da expressão $[r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,r}]_{,r}$ calculada nos pontos de colocação. Entretanto, esta relação não se mantém constante ao longo da integração uma vez que depende de β e γ e estas quantidades também são evoluídas. Logo, para determinar-se $b_{lm}(u_0)$ através desta estratégia, seria necessário inverter a matriz que representa esta relação inúmeras vezes durante a integração.

Com a estratégia que foi adotada, a relação entre os modos $q_{lm}(u_0)$ com a quantidade $(r^2 Q)_{,r}$ calculadas nos pontos de colocação, assim como entre $b_{lm}(u_0)$ e $U_{,r}$ não se alteram durante a evolução. Logo, as matrizes correspondentes são calculadas uma única vez, invertidas e armazenadas, sendo utilizadas durante a integração, descartando-se inversões matriciais.

A equação de hipersuperfície de V , que foi reescrita em termos de S , também é resolvida pelo método de colocação. Entretanto, a aproximação espectral de S possui truncagens radial e angular diferentes das adotadas para β e U , e então os pontos de colocação neste caso pertencem a uma outra grid, que é dada por

$$x_j = \text{zeros de } \frac{dP_{2\bar{M}_x+1}}{dx}, \quad 1, \quad \text{tal que } 0 < x_j \leq 1, \quad (161)$$

$$y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{\bar{M}_r + 1}\right), \quad k = 0, \dots, \bar{M}_r, \quad (162)$$

para $k = 0, \dots, \bar{M}_r$ e $j = 0, \dots, \bar{M}_x$.

Neste caso, o ponto de colocação correspondente ao infinito nulo será utilizado, pois a equação 114 não é identicamente satisfeita neste ponto.

A grid possui $(\bar{M}_r + 1) \times (\bar{M}_x + 1)$ pontos de colocação que é a quantidade necessária para determinar-se os modos $s_{lm}(u_0)$. A equação residual nos pontos de colocação é dada por

$$\text{Res}_S(u_0, r_k, x_j) = 0, \quad (163)$$

para $k = 0, \dots, \bar{M}_r$ e $j = 0, \dots, \bar{M}_x$.

Os modos $s_{lm}(u_0)$ relacionam-se linearmente com os valores de $(r^2 S)_{,r}$ nos pontos de colocação por

$$\left[(r^2 S)_{,r} \right]_{kj} = \left[\left(r^2 \sum_{l=0}^{\bar{M}_r} \sum_{m=0}^{\bar{M}_x} s_{lm}(u_0) \psi_l^{(U)}(r) P_{2m}(x) \right) \right]_{,r}{}_{kj}, \quad (164)$$

Mais uma vez a transformação em notação matricial permite a determinação dos modos $s_{lm}(u_0)$ a partir das quantidades calculadas nos pontos de colocação. A relação que converte a notação em dois índices para um índice é dada por

$$i = k(\bar{M}_x + 1) + j + 1. \quad (165)$$

Por fim, tem-se equação de evolução de γ . Diferentemente das equações de hipersuperfície, que foram resolvidas pelo método de Colocação, a equação 115 o será pelo método de Galerkin.

Segundo este método, a equação residual de γ é minimizada da forma

$$\langle \text{Res}_\gamma(u_0, r, x), \psi_l^{(\gamma)}(r) P_{2m}(x) \rangle = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \text{Res}_\gamma(u_0, r, x) \psi_l^{(\gamma)}(r) P_{2m}(x) \frac{dr}{\sqrt{r}(r+1)} dx, \quad (166)$$

para $l = 0, \dots, N_r$ e $m = 0, \dots, N_x$. Ou ainda

$$\langle \text{Res}_\gamma(u_0, y, x), \psi_l^{(\gamma)}(r(y)) P_{2m}(x) \rangle = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \text{Res}_\gamma(u_0, y, x) \psi_l^{(\gamma)}(r(y)) P_{2m}(x) \frac{dx dy}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (167)$$

Assim como foi feito em (OLIVEIRA; RODRIGUES, 2011), as integrações da equação 167 são realizadas pela fórmula de quadratura de Gauss e tem-se então

$$\langle \text{Res}_\gamma(u_0, y, x), \psi_l^{(\gamma)}(r(y)) P_{2m}(x) \rangle = \sum_{k=0}^{\bar{M}_r} \sum_{j=0}^{\bar{M}_x} \text{Res}_\gamma(u_0, y_k, x_k) \psi_l^{(\gamma)}(r_k) P_{2m}(x_j) w_k v_j, \quad (168)$$

para $l = 0, \dots, N_r$ e $m = 0, \dots, N_x$, onde w_k e v_j são os pesos associados às funções de teste $\psi_l^{(\gamma)}(r)$ e $P_m(x)$, respectivamente. Por esta razão, este método é chamado de método de Galerkin com integração numérica, ou G-NI.

Para os pontos de quadratura y_k e x_j são escolhidos os pontos da grid de colocação para a equação de hipersuperfície de S , dados nas equações 161 e 162. Esta escolha evita que se tenha de calcular as quantidades que aparecem do lado direito da equação 115 em uma nova grid, uma vez que a maior parte já foi feita na grid de S , deixando o código mais eficiente e econômico. Além disso, a implementação matricial permite que a resolução numérica seja consideravelmente aumentada.

Por simplicidade, considere

$$\text{Res}_\gamma(u_0, y, x) = 4r(r\gamma)_{,ur} - G(u, r, x), \quad (169)$$

onde $G(u, r, x)$ representa o lado direito da equação 115. Então a equação 168 transforma-se em

$$\begin{aligned} \langle \text{Res}_\gamma, \psi_l^{(\gamma)} P_{2m} \rangle &= \sum_{k=0}^{\bar{M}_r} \sum_{j=0}^{\bar{M}_x} [(r\bar{\gamma}),_{ur}]_{kj} \psi_l^{(\gamma)}(r_k) P_{2m}(x_j) w_k v_j \\ &+ \sum_{k=0}^{\bar{M}_r} \sum_{j=0}^{\bar{M}_x} G_{kj} \psi_l^{(\gamma)}(r_k) P_{2m}(x_j) w_k v_j, \end{aligned} \quad (170)$$

O segundo termo da equação 170 corresponde a projeção do lado direito da equação 115 nas funções de teste $\psi_l^{(\gamma)}(r)$ e $P_m(x)$, sendo G_{kj} esta quantidade calculada nos pontos de quadratura.

Já o primeiro termo de 170 relaciona as quantidades $[(r\bar{\gamma}),_{ur}]_{kj}$ com $\dot{a}_{lm}(u)$. Assim, o que se tem é um conjunto de equações diferenciais ordinárias para os modos a_{lm} , que uma vez integrado fornecem os modos $a_{lm}(u_0 + \delta u)$ na próxima hipersuperfície nula $u = u_0 + \delta u$. Este processo é repetido, determinando-se assim a evolução do espaço-tempo.

A integração do sistema de EDO's 170 é feito por um método Runge-Kutta, que pode ser de passo fixo ou variável, conforme o objetivo do estudo.

Com relação a escolha das truncagens, pode-se dizer que a única restrição obrigatória é que $M_x > N_x + 1$, para que a estabilidade do código seja garantida. Com relação a escolha das truncagens radiais fez-se $N_r < M_r < \bar{M}_r$ para ter-se uma convergência mais rápida.

3.1.1 Código em dois subdomínios

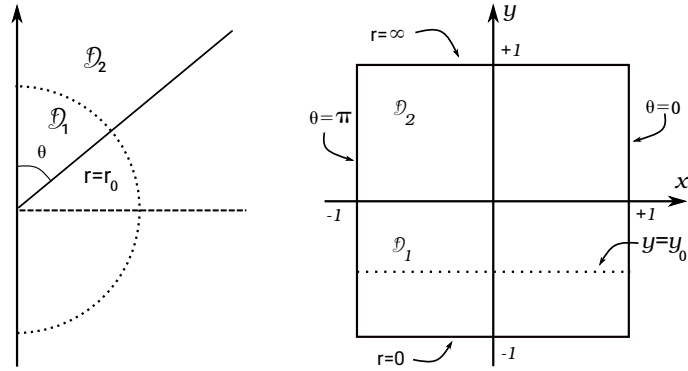
Uma segunda versão do código foi desenvolvida utilizando-se a técnica de decomposição de domínios. A estratégia numérica é bastante similar àquela aplicada ao problema com simetria esférica tratado no capítulo 2.

Aqui a parte radial do domínio físico foi dividida em dois subdomínios. As mudanças de variáveis 135 e 136 são aplicadas e o que se obtém é ilustrado na figura 6.

A interface entre os subdomínios \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 é representada por $r = r_0$, que após a mudança de variáveis equivale a $y = y_0$. Então, tem-se o subdomínio $\mathcal{D}_1 : 0 \leq r \leq r_0$ e o subdomínio $\mathcal{D}_2 : r_0 \leq r \leq \infty$. A parte angular dos subdomínios é $0 \leq \theta \leq \pi$, ou $-1 \leq x \leq 1$, pois não há divisão na parte angular do domínio físico. Transformações lineares como as apresentadas em 71 são realizadas e tem-se $\mathcal{D}_1 : -1 \leq y^{(1)} \leq 1$ e $\mathcal{D}_2 : -1 \leq y^{(2)} \leq 1$. A figura 7 ilustra o resultado final do que foi descrito.

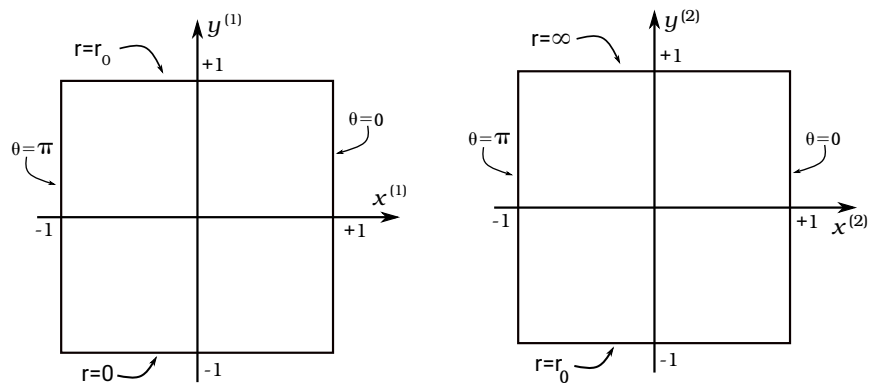
O primeiro passo é estabelecer as aproximações espectrais para as funções métricas

Figura 6 - Decomposição de domínios e aplicação de mudança de variáveis.



Fonte: A autora, 2020.

Figura 7 - Resultado final da divisão de domínios e mudanças de variáveis.



Legenda: À esquerda o subdomínio \mathcal{D}_1 e à direita o subdomínio \mathcal{D}_2 .

Fonte: A autora, 2020.

em cada subdomínio. Tem-se

$$\bar{\gamma}^{(l)}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{N_r^{(l)}} \sum_{j=0}^{N_x^{(l)}} a_{kj}^{(l)}(u) \psi_k^{(l)}(r) P_{2j}(x), \quad (171)$$

$$\bar{\beta}^{(l)}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r^{(l)}} \sum_{j=0}^{M_x^{(l)}} c_{kj}^{(l)}(u) \chi_k^{(l)}(r) P_{2j}(x), \quad (172)$$

$$\bar{U}^{(l)}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r^{(l)}} \sum_{j=0}^{M_x^{(l)}} b_{kj}^{(l)}(u) \tilde{\chi}_k^{(l)}(r) P_{2j+1}(x), \quad (173)$$

$$Q^{(l)}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r^{(l)}} \sum_{j=0}^{M_x^{(l)}} q_{kj}^{(l)}(u) \psi_k^{(l)}(r) P_{2j+1}(x), \quad (174)$$

$$S^{(l)}(u, r, x) = \sum_{k=0}^{\bar{M}_r^{(l)}} \sum_{j=0}^{\bar{M}_x^{(l)}} s_{kj}^{(l)}(u) \tilde{\chi}_k^{(l)}(r) P_{2j}(x), \quad (175)$$

onde $l = 1, 2$.

As funções de base radial são escolhidas de forma a satisfazerem as condições de contorno 118-122. Então, por exemplo, a função de base $\psi_k^{(1)}(r)$ deve satisfazer a condição na origem 118, enquanto $\psi_k^{(2)}(r)$ deve satisfazer a condição assintótica 119. Todas as funções de base radial estão descritas no Apêndice B.

O que se faz é proceder como nos casos descritos anteriormente. Tomando-se a equação de hipersuperfície de β como modelo, substitui-se as aproximações espectrais 171 e 172 nas equação 112 e obtém-se as equações residuais correspondentes a cada subdomínio.

$$\text{Res}_{\beta}^{(l)}(u_0, r, x) = \sum_{k=0}^{M_r} \sum_{j=0}^{M_x} c_{kj}(u_0) \chi_{k,r}^{(l)}(r) P_{2j}(x) - \frac{r}{2} (\gamma)_{,r}^2, \quad (176)$$

para $l = 1, 2$. Tais equações serão minimizadas pelo método de colocação. As grids de pontos de colocação em cada subdomínio são dadas por

$$x_j^{(1)} = \text{zeros de } \frac{dP_{2M_x^{(1)}+1}}{dx}, \quad 1, \quad \text{tal que } 0 < x_j^{(1)} \leq 1, \quad (177)$$

$$y_k^{(1)} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2M_r^{(1)}+2}\right), \quad k = 0, \dots, M_r^{(1)}, \quad (178)$$

$$x_j^{(2)} = \text{zeros de } \frac{dP_{2M_x^{(2)}+1}}{dx}, \quad 1, \quad \text{tal que } 0 < x_j^{(2)} \leq 1, \quad (179)$$

$$y_k^{(2)} = \cos\left(\frac{k\pi}{M_r^{(2)}}\right), \quad k = 1, \dots, M_r^{(2)}, \quad (180)$$

Novamente aqui faz-se uso da paridade das funções métricas e os pontos de colocação angulares pertencem ao intervalo $0 < x \leq 1$. A interface $r = r_0$ pertence ao segundo subdomínio.

Da minimização das equações residuais nos pontos de colocação obtém-se $(M_r^{(1)} + 1) \times (M_x^{(1)} + 1) + M_r^{(2)} \times (M_x^{(2)} + 1)$ equações residuais. Para que os modos $c_{kj}(u)$ sejam determinados faltam $(M_x^{(2)} + 1)$ equações que são obtidas das condições de transmissão na interface. Sendo a equação 112 de primeira ordem em r , tais condições de transmissão são

$$\begin{aligned} &\langle (\bar{\beta}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{\beta}^{(2)}(u_0, r_0, x)), P_{2j}(x) \rangle = \\ &\int_{-1}^1 (\bar{\beta}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{\beta}^{(2)}(u_0, r_0, x)) P_{2j}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, M_x^{(2)}, \end{aligned} \quad (181)$$

o que completa o sistema de equações algébricas necessário para a determinação dos modos $c_{kj}(u)$.

Na interface entre os domínios deve-se ter $\bar{\beta}^{(1)}(u_0, r_0, x) = \bar{\beta}^{(2)}(u_0, r_0, x)$ para todo valor de x . Entretanto, na resolução numérica deve-se escolher um número finito de condições de transmissão de forma a perfazer a quantidade de equações necessárias a determinação dos modos $c_{kj}(u)$. A escolha das condições de transmissão não é fixa e poderia ser feita de outra forma.

A mesma estratégia de descrever o problema em notação matricial é adotada. Aqui, devido a decomposição de domínios, as matrizes correspondentes as quantidades calculadas nos pontos de colocação são matrizes esparsas. Esta característica é muito interessante, pois o Matlab armazena e efetua a multiplicação de matrizes esparsas de forma otimizada, fazendo com que o tempo de execução seja menor quando comparado a matrizes densas de mesmo tamanho.

Os modos $c_{kj}(u_0)$ são determinados resolvendo-se o sistema de equações algébricas resultante. Feito isto, o próximo passo é resolver a equação 133 para os modos $q_{kj}(u_0)$, e então resolver a equação 134 para os modos $b_{kj}(u_0)$.

O procedimento é similar ao já descrito acima para ambas as equações. A grid de pontos de colocação utilizada na minimização do resíduo é a mesma.

As condições de transmissão na interface são

$$\begin{aligned} &\langle (Q^{(1)}(u_0, r_0, x) - Q^{(2)}(u_0, r_0, x)), P_{2j+1}(x) \rangle = \\ &\int_{-1}^1 (Q^{(1)}(u_0, r_0, x) - Q^{(2)}(u_0, r_0, x)) P_{2j+1}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, M_x^{(2)}, \end{aligned} \quad (182)$$

$$\begin{aligned} \langle (\bar{U}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{U}^{(2)}(u_0, r_0, x)), P_{2j+1}(x) \rangle = \\ \int_{-1}^1 (\bar{U}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{U}^{(2)}(u_0, r_0, x)) P_{2j+1}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, M_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (183)$$

Para a equação 131 também utilizou-se o método de colocação. Entretanto, a grid de pontos de colocação neste caso é dada por

$$x_j^{(1)} = \text{zeros de } \frac{dP_{2\bar{M}_x^{(1)}+1}}{dx}, \quad 1, \quad \text{tal que } 0 < x_j^{(1)} \leq 1, \quad (184)$$

$$y_k^{(1)} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2\bar{M}_r+2}\right), \quad k = 0, \dots, \bar{M}_r^{(1)}, \quad (185)$$

$$x_j^{(2)} = \text{zeros de } \frac{dP_{2\bar{M}_x^{(2)}+1}}{dx}, \quad 1, \quad \text{tal que } 0 < x_j^{(2)} \leq 1, \quad (186)$$

$$y_k^{(2)} = \cos\left(\frac{k\pi}{\bar{M}_r^{(2)}-1}\right), \quad k = 0, \dots, \bar{M}_r^{(2)} - 1. \quad (187)$$

A condição de transmissão em $r = r_0$ é

$$\begin{aligned} \langle (S^{(1)}(u_0, r_0, x) - S^{(2)}(u_0, r_0, x)), P_{2j}(x) \rangle = \\ \int_{-1}^1 (S^{(1)}(u_0, r_0, x) - S^{(2)}(u_0, r_0, x)) P_{2j}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, \bar{M}_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (188)$$

Para a equação de γ utiliza-se o método G-NI, assim como feito anteriormente, utilizando-se como pontos de quadratura aqueles dados pelas equações 184-187, exceto que o ponto de colocação $y_0^{(2)}$ não será utilizado. A supressão deste ponto é necessária para que a quantidade de equações seja igual ao número total de modos a_{kj} a serem determinados. As condições de transmissão na interface são dadas por

$$\begin{aligned} \langle (\bar{\gamma}_{,u}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{\gamma}_{,u}^{(2)}(u_0, r_0, x)), P_{2j}(x) \rangle = \\ \int_{-1}^1 (\bar{\gamma}_{,u}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{\gamma}_{,u}^{(2)}(u_0, r_0, x)) P_{2j}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, \bar{M}_x^{(2)}, \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \langle (\bar{\gamma}_{,ur}^{(1)}(u_0, r_0, x) - \bar{\gamma}_{,ur}^{(2)}(u_0, r_0, x)), P_{2j}(x) \rangle = \\ \int_{-1}^1 (\bar{\gamma}_{,ur}^{(1)}(r_0) - \bar{\gamma}_{,ur}^{(2)}(r_0)) P_{2j}(x) dx = 0, \quad j = 0, \dots, \bar{M}_x^{(2)}. \end{aligned} \quad (190)$$

O sistema de EDO's resultante é resolvido para que os modos $a_{kj}(u_0 + \delta u)$ sejam determinados na hipersuperfície nula seguinte.

3.2 Resultados numéricos

3.2.1 Validação do algoritmo

Os códigos numéricos desenvolvidos para o problema de Bondi com simetria axial foram validados pelo teste de convergência da conservação de energia aplicada a fórmula de Bondi, conforme a equação 191

$$C(u) = \frac{1}{M_B(u_0)} \left[M_B(u) - M_B(u_0) + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\int_{u_0}^u \frac{e^{2H}}{\omega} N^2 \sin \theta du \right) d\theta \right] \times 100. \quad (191)$$

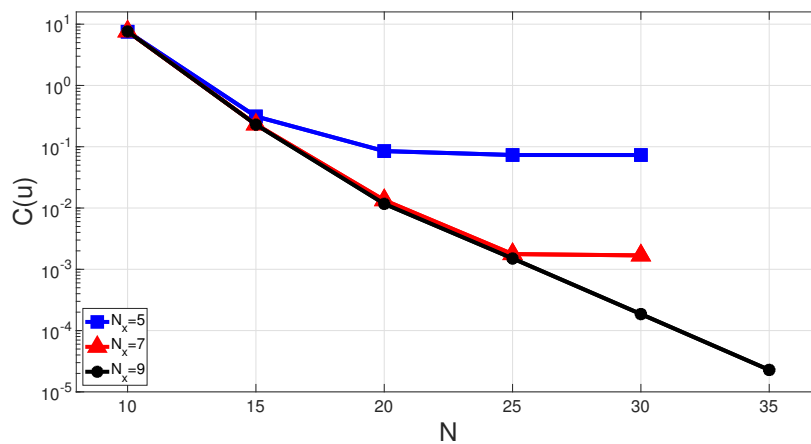
Para esta verificação, adotou-se o seguinte dado inicial

$$\bar{\gamma}_0(r, x) = \frac{216 r^6 (1 - x^2)^2}{(1 + 2r)^9}. \quad (192)$$

O que se fez foi fixar as truncagens angulares e variar as truncagens radiais para verificar o decaimento do erro.

No caso do código em um domínio utilizou-se três configurações: na primeira fez-se $N_x = 5$, $M_x = 8$ e $\bar{M}_x = 11$; na segunda $N_x = 7$, $M_x = 9$ e $\bar{M}_x = 13$; e por fim, na terceira fez-se $N_x = 9$, $M_x = 14$ e $\bar{M}_x = 17$. Adotou-se $A_0 = 30$ e a constante de mapeamento $L_0 = 0.5$. O gráfico 19 apresenta os resultados obtidos.

Gráfico 19 - Erro da conservação de energia $C(u)$ para código em um domínio.



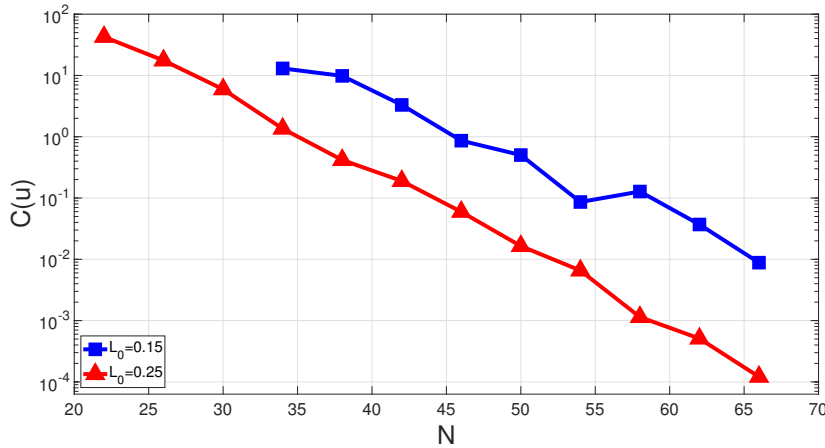
Fonte: A autora, 2020.

Observa-se a convergência exponencial característica dos métodos espectrais. Além disso, verifica-se que as truncagens angulares apresentam grande influência no decaimento do erro.

Para o código em dois subdomínios adotou-se o dado inicial 192 com o mesmo valor de A_0 . A interface foi localizada em $y_0 = 0$, de modo que $r_0 = L_0$, e a constante de

mapeamento L_0 foi feita igual a 0.15 e 0.25 para verificar sua influência. As truncagens angulares são: $N_x^{(1)} = 10$, $N_x^{(2)} = 12$, $M_x^{(1)} = 12$, $M_x^{(2)} = 14$, $\bar{M}_x^{(1)} = 14$ e $\bar{M}_x^{(2)} = 16$. O gráfico 20 apresenta os resultados obtidos.

Gráfico 20 - Erro da conservação de energia $C(u)$ para código em dois domínios.



Fonte: A autora, 2020.

No caso deste código o erro também apresenta decaimento exponencial. O maior valor de L_0 apresenta um resultado melhor.

Comparando-se ambos os códigos vê-se que aquele em domínio único apresenta convergência mais rápida. O dado inicial utilizado nestes testes de convergência está bastante próximo da origem e é suficientemente suave, de modo que o código em um domínio é suficiente para lidar com este problema. A justificativa para utilizar-se a técnica de decomposição de domínios é em situações onde o código em domínio único não é capaz de interpolar bem o dado inicial, ou para dados que apresentem rápida variação dentro de uma região, ou quando está-se interessado em regiões específicas.

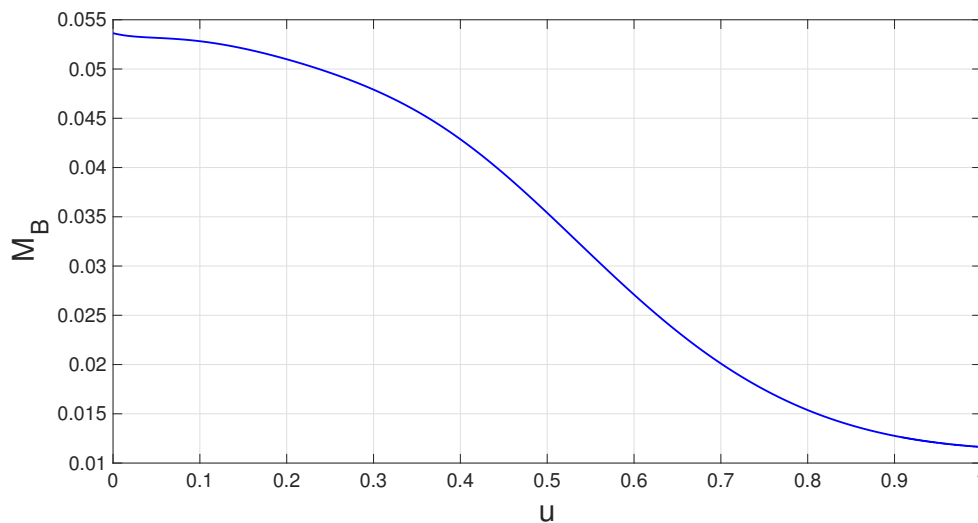
3.2.2 Aplicação dos códigos

Os códigos para o problema de Bondi com simetria axial foram desenvolvidos com o objetivo principal de observar o colapso gravitacional, e indo além, o fenômeno crítico. Para que tal objetivo seja alcançado é necessário que tais códigos sejam estáveis e acurados no regime altamente não-linear.

Os teste de convergência apresentados na seção anterior já demonstram que os códigos são bastante robustos no regime de campos fortes. Por exemplo, para o dado inicial dado em 192, com amplitude $A_0 = 30$, a massa de Bondi é mostrada no gráfico 21.

O resultado apresentado foi obtido para um sistema com $N_r = 20$, $N_x = 5$, $M_r =$

Gráfico 21 - Massa de Bondi para o dado inicial 192 com $A_0 = 30$ para código em um domínio com $N_r = 20$, $N_x = 5$, $M_r = 27$, $M_x = 9$, $\bar{M}_r = 27$, $\bar{M}_x = 9$ e $L_0 = 0.5$.



Fonte: A autora, 2020.

27, $M_x = 9$, $\bar{M}_r = 27$, $\bar{M}_x = 9$, e constante de mapeamento $L_0 = 0.5$. Verifica-se que para este sistema com resolução de γ de apenas 21(radial) \times 6(angular) obteve-se uma massa de Bondi inicial $M_{B_0} = 0.054$.

O mesmo problema foi resolvido com o código em domínio decomposto. O sistema gerado possui no primeiro subdomínio $N_r^{(1)} = 20$, $N_x^{(1)} = 10$, $M_r^{(1)} = 22$, $M_x^{(1)} = 12$, $\bar{M}_r^{(1)} = 24$, $\bar{M}_x^{(1)} = 14$, e no segundo $N_r^{(2)} = 22$, $N_x^{(2)} = 12$, $M_r^{(2)} = 24$, $M_x^{(2)} = 14$, $\bar{M}_r^{(2)} = 26$, $\bar{M}_x^{(2)} = 16$ e $L_0 = 0.25$. Observa-se que os resultados concordam entre si, sendo a diferença máxima entre as massas de Bondi da ordem de 10^{-5} , conforme mostrado no gráfico 22.

Considerando-se ainda o mesmo dado inicial, a massa de Bondi para os valores de amplitude $A_0 = 75$, 80 e 85 são mostrados no gráfico 23. O sistema que gerou tais resultados é $N_r = 25$, $N_x = 25$, $M_r = 33$, $M_x = 33$, $\bar{M}_r = 33$, $\bar{M}_x = 33$.

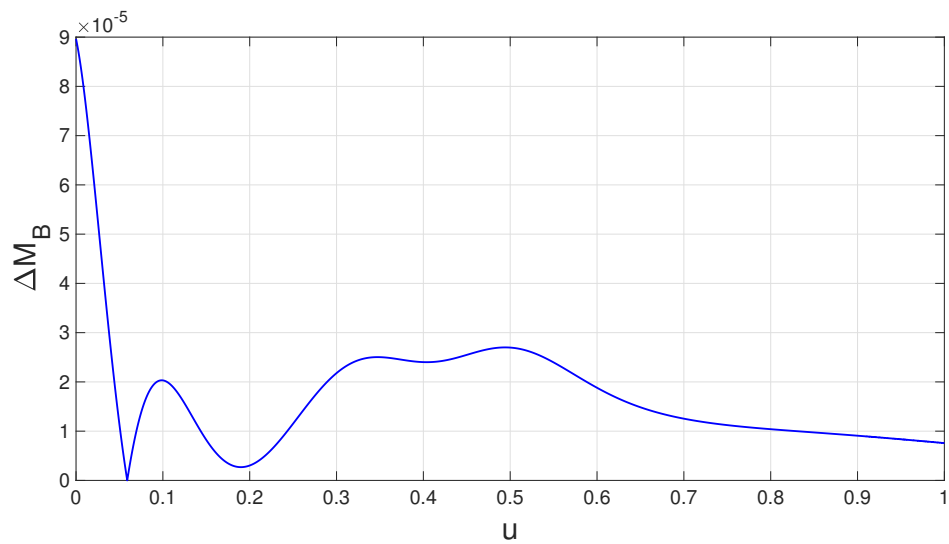
Para o maior valor de amplitude, $A_0 = 85$, o cálculo da massa de Bondi não é suficientemente acurado, apresentando problemas a partir de $u = 0.15$. Para que isto seja corrigido é necessário aumentar-se a resolução do sistema. O novo cálculo é apresentado no gráfico 24.

Outro dado inicial utilizado foi

$$\bar{\gamma}_0(r, x) = \frac{A_0 r^4 e^{\frac{(r-5)^2}{0.72}} (1 - x^2)^2 (0.2 - x^4)}{(1 + 2r)^4}, \quad (193)$$

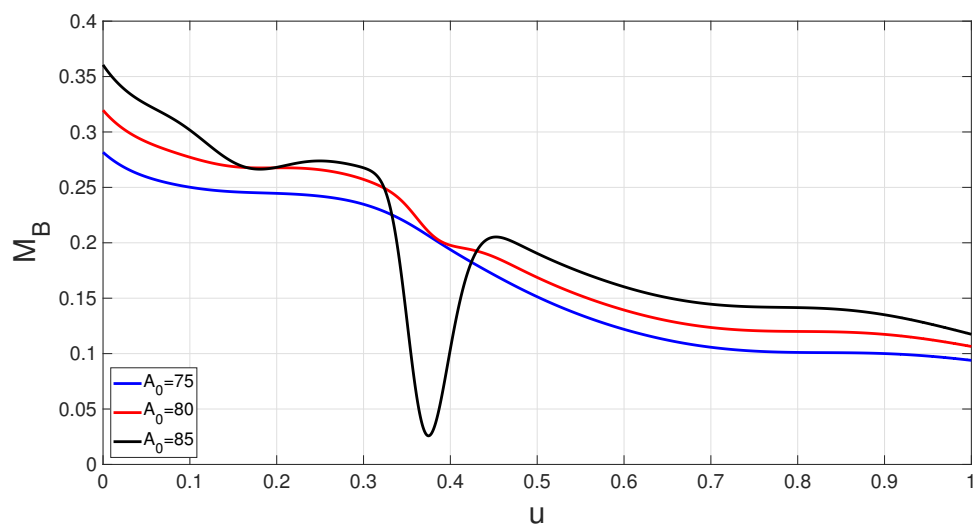
que para uma amplitude inicial $A_0 = 1.8$ tem a massa de Bondi mostrada no gráfico 25. No gráfico 26 apresenta-se uma sequência da evolução numérica de $\gamma(u, r, x)$ em alguns instantes de tempo. Estes resultados foram obtidos com o código em dois domínios, sendo

Gráfico 22 - Diferença da massa de Bondi para o dado inicial 192 com $A_0 = 30$ para as soluções em domínio único e decomposto.



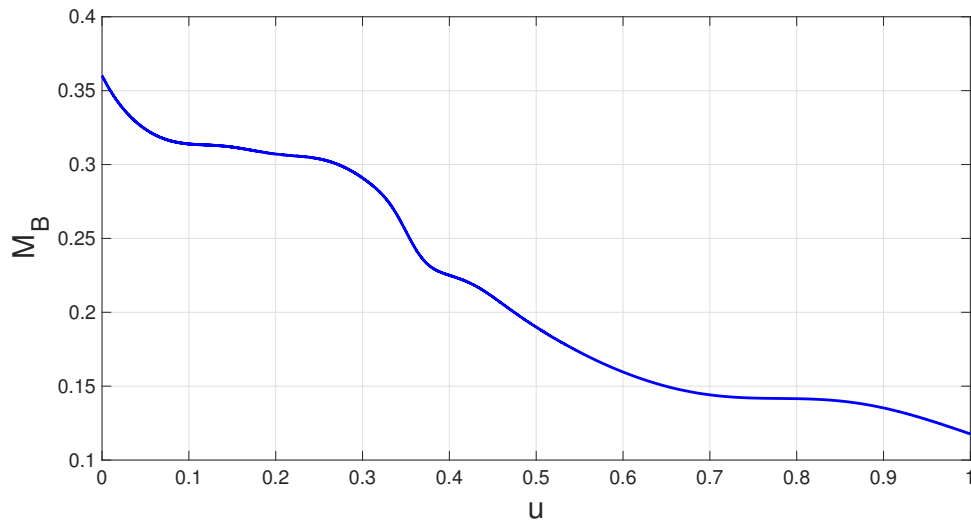
Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 23 - Massa de Bondi para o dado inicial 192 e amplitudes $A_0 = 75$, $A_0 = 80$ e $A_0 = 85$ para código em um domínio com $N_r = 25$, $N_x = 25$, $M_r = 33$, $M_x = 33$, $\bar{M}_r = 33$, $\bar{M}_x = 33$.



Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 24 - Massa de Bondi para o dado inicial 192 e amplitude $A_0 = 85$ para código em um domínio com $N_r = 30$, $N_x = 30$, $M_r = 39$, $M_x = 39$, $\bar{M}_r = 39$, $\bar{M}_x = 39$.



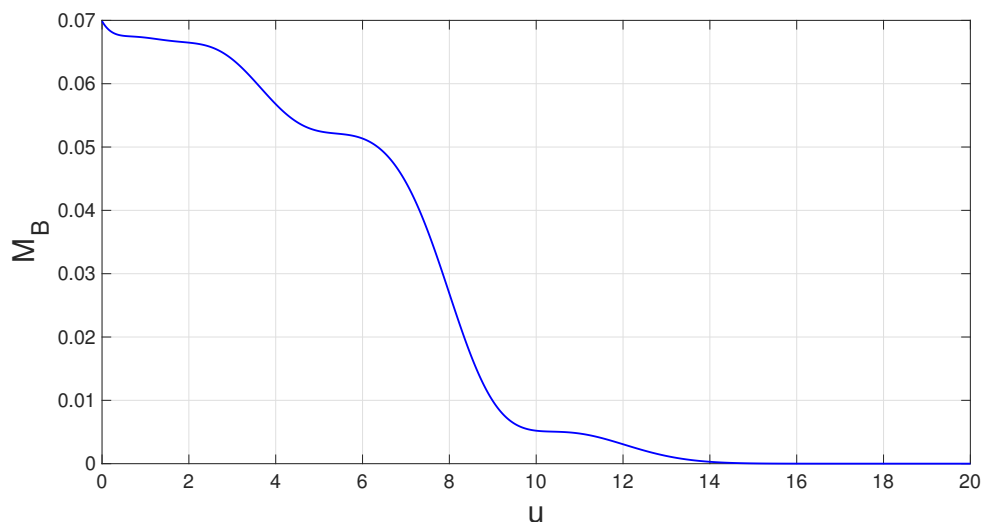
Fonte: A autora, 2020.

$N_r^{(1)} = 32$, $N_x^{(1)} = 22$, $N_r^{(2)} = 37$, $N_x^{(2)} = 22$ e $L_0 = 6.0$. É possível observar que a junção entre as interfaces, localizada em $r_0 = L_0 = 6$, é evoluída perfeitamente.

Para a métrica de Bondi dada pela equação 111, as ondas gravitacionais são diretamente obtidas a partir da função news. A função news calculada nas direções angulares $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ é mostrada no gráfico 27. Quando calculada nos pólos ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$), a função news é nula.

A função news N está relacionada ao modo de polarização \oplus da onda gravitacional da forma $N = \partial_t h_{\oplus}$.

Gráfico 25 - Massa de Bondi para o dado inicial 193 e amplitude $A_0 = 1.8$.



Fonte: A autora, 2020.

3.3 Discussão

Neste capítulo desenvolveu-se um código numérico para evoluir o espaço-tempo com simetria axial descrito pelo problema de Bondi. Um dos códigos desenvolvidos utiliza a técnica de decomposição de domínios.

O primeiro passo foi estabelecer aproximações espectrais para as funções métricas, de modo que as condições de contorno na origem e no infinito nulo sejam satisfeitas. As funções de base radial foram escolhidas em termos dos polinômios racionais de Chebyshev. Já para as funções de base angular foram escolhidos os polinômios de Legendre par ou ímpar, de acordo com a paridade das funções métricas. Aqui fez-se uma escolha que apesar de parecer restritiva, possibilita a obtenção de resultados com menor custo computacional, sem que a descrição física seja prejudicada.

As equações de hipersuperfície de β , U e V foram resolvidas pelo método de colocação. Duas grids de pontos de colocação foram utilizadas, uma para as equações de β e U e outra para a equação de V .

O conjunto de equações algébricas resultante para cada uma das equações é descrito de forma matricial. Uma vez que os modos são obtidos, as funções métricas podem ser reconstruídas. Mais uma vez ressalta-se que a grande vantagem dessa estratégia de implementação é valer-se do fato da multiplicação matricial ser realizada paralelamente no Matlab.

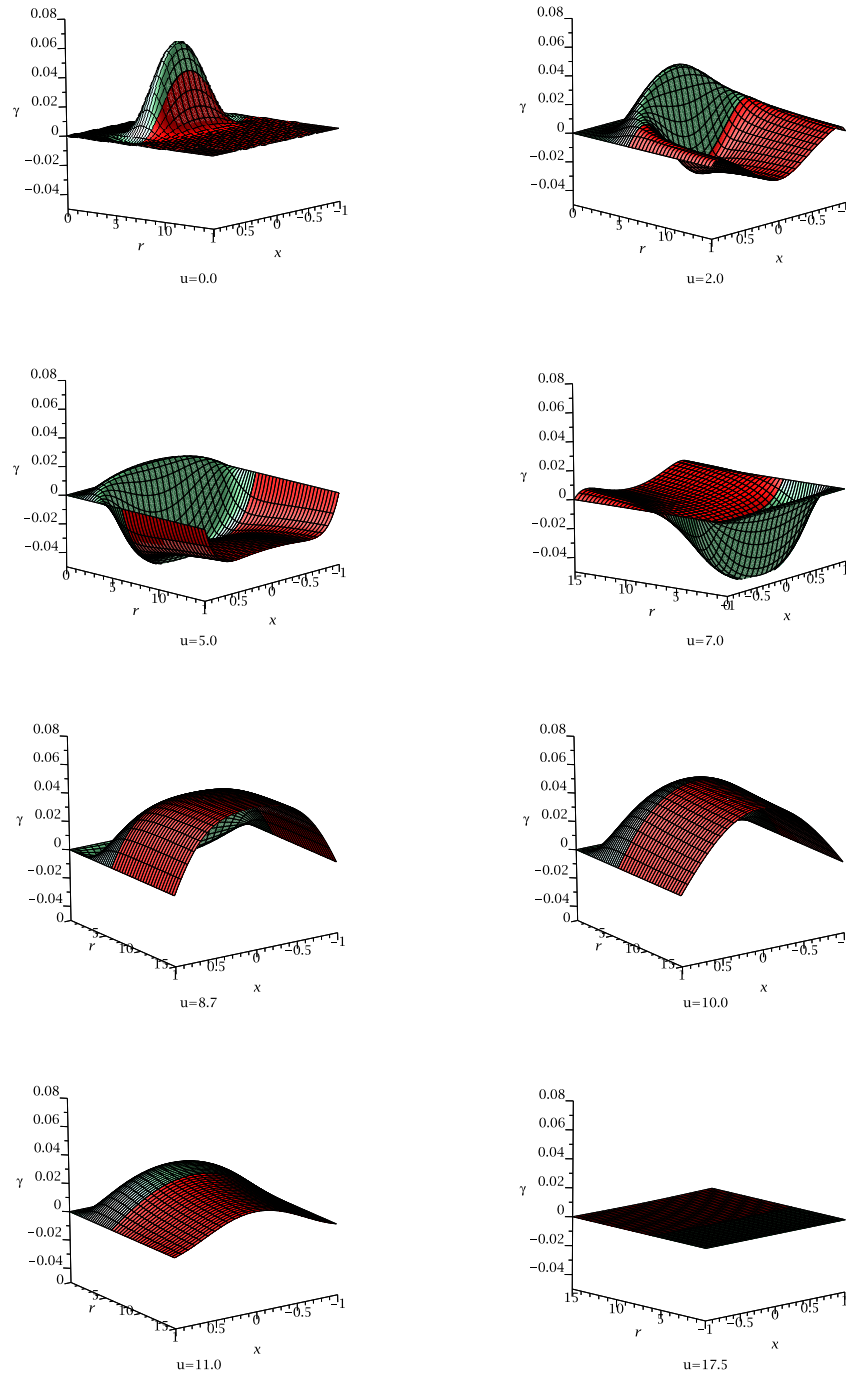
No caso da equação de hipersuperfície de U fez-se uma redução de ordem, originando duas equações de primeira ordem. Esta estratégia evita de ter-se de inverter uma matriz inúmeras vezes ao longo da integração.

A equação de evolução de γ foi resolvida utilizando-se o método G-NI. Para o cálculo da projeção da equação residual, a grid de pontos de colocação foi a mesma utilizada para resolver a equação de hipersuperfície de S . Isto é vantajoso pois aproveita-se do fato de grande parte das quantidades que aparecem na equação 115 já terem sido calculadas nesta grid para a obtenção dos modos s_{lm} .

Da minimização da equação residual de γ resulta um conjunto de equações diferenciais ordinárias dos modos $a_{lm}(u)$. Este conjunto de EDO's foi integrado através do método de Runge-Kutta.

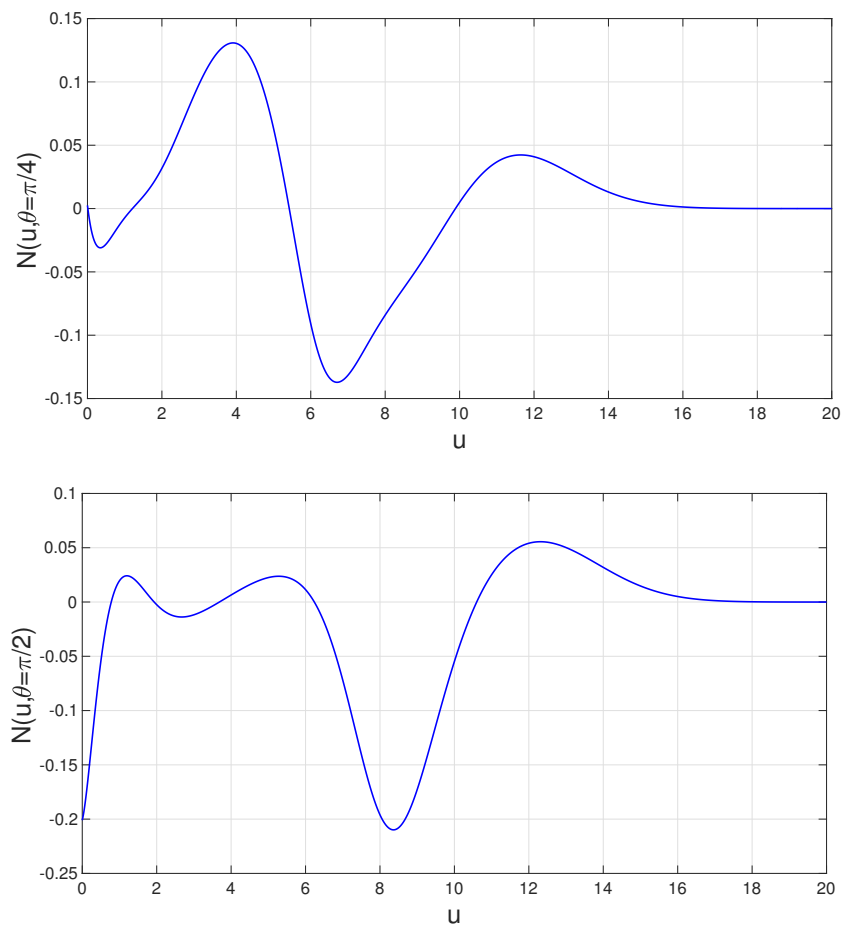
Para o código desenvolvido em dois subdomínios, além das equações resultantes da minimização do resíduo, definiu-se condições de transmissão na interface baseadas no método de junção. A escolha adequada dessas condições é importante para que não haja reflexão numérica na interface, adicionando informação não-física à evolução.

Os códigos foram validados pelo teste de convergência da conservação de energia da fórmula de Bondi. Os resultados obtidos mostram convergência exponencial. A partir do código em domínio único verificou-se que a truncagem angular exerce grande influência sobre o decaimento do erro.

Gráfico 26 - Sequência da evolução numérica de $\gamma(u, r, x)$ em alguns instantes de tempo.

Fonte: A autora, 2020.

Gráfico 27 - Função news para o dado inicial 193 e amplitude $A_0 = 1.8$. Acima tem-se $N(u, \theta = \frac{\pi}{4})$ e abaixo $N(u, \theta = \frac{\pi}{2})$.



Fonte: A autora, 2020.

No caso do código em dois domínios o decaimento do erro também é exponencial, mas apresenta-se pior quando comparado ao melhor caso em um domínio. A grande vantagem da decomposição de domínios apresentou-se tanto na geração das matrizes do sistema quanto no tempo de execução da integração.

Na sequência apresentou-se alguns resultados obtidos com os códigos em um e dois domínios. As configurações estabelecidas mostraram-se suficientes para tratar o regime de campos fortes, como ficou demonstrado pelos valores das massas de Bondi obtidos.

A função news foi calculada para a extração de ondas gravitacionais. Esta função, definida apenas na formulação característica, está relacionada ao escalar de Weyl Ψ_4 descrito na tetrada apropriada. Ressalta-se que o escalar Ψ_4 é uma forma mais geral de determinar a radiação gravitacional sainte, podendo ser aplicado em qualquer formalismo da Relatividade Geral. Entretanto, para que seja corretamente interpretado como tal, deve-se fazer a escolha certa da tetrada na qual o escalar será calculado. Isto não ocorre com a função news, que apesar de só existir na formulação característica, é independente da escolha de calibre.

CONCLUSÃO

O principal resultado deste trabalho foi o desenvolvimento de códigos numéricos baseados em métodos espectrais para resolução de problemas da Relatividade Geral. Procurou-se documentar todo o desenvolvimento e apontar as principais vantagens e algumas desvantagens do método utilizado.

No problema em simetria esférica foram desenvolvidos códigos baseados no método de Galerkin-Colocação utilizando-se a técnica de decomposição de domínios. Foram gerados códigos em dois, três e quatro subdomínios, validados por testes de convergência da conservação de energia e da verificação da constante de Newman-Penrose. Como aplicação de tais códigos estudou-se o fenômeno crítico no colapso gravitacional. Determinou-se o expoente crítico e o período da componente oscilatória em concordância com os valores encontrados na literatura. Verificou-se que resultados similares são obtidos com um custo computacional menor apenas ajustando-se convenientemente alguns parâmetros para a situação de interesse. A quantidade de subdomínios, a localização das interfaces, e o valor da constante de mapeamento exercem grande influência no desempenho do código.

Uma constatação importante é que o aumento no número de subdomínios deixa a evolução do espaço-tempo mais rápida computacionalmente, uma vez que as matrizes relativas ao problema são matrizes esparsas. Tendo sido a integração implementada no Matlab, esta característica constitui-se uma grande vantagem, pois a multiplicação matricial é uma operação efetuada de forma paralela nesta plataforma.

Deste primeiro caso estudado já é possível verificar-se que os métodos espectrais apresentam uma excelente convergência, mesmo quando utilizadas truncagens moderadas. Quando comparado ao método das diferenças finitas, a exigência de recursos computacionais é reduzida sem detrimento dos resultados obtidos. Com relação a técnica de decomposição de domínios, esta permite que a resolução seja aumentada apenas numa região de interesse, sendo por isso bastante apropriada para o estudo do colapso gravitacional. Futuramente, pretende-se aumentar a resolução dos códigos, sendo o código em quatro subdomínios o mais apropriado, para refinar os resultados obtidos para o fenômeno crítico (expoente crítico e período da componente oscilatória).

No problema de Bondi com simetria axial foram desenvolvidos dois códigos: um em domínio único e o outro utilizando-se a técnica de decomposição de domínios. Ambos os códigos utilizaram o método de Galerkin-Colocação para resolver as equações de hipersuperfície, e o método de Galerkin com Integração Numérica para a equação de evolução. Da mesma forma que o problema com simetria esférica, os códigos foram validados pelo teste de convergência da conservação de energia. Verificou-se que a truncagem angular possui extrema influência na precisão do código. E além da precisão numérica, depois

verificou-se que tais truncagens possuem enorme importância no decaimento da massa de Bondi, que só era corretamente calculada quando ocorria um aumento das truncagens angulares, mantendo-se as mesmas truncagens radiais.

Vale destacar que os códigos foram utilizados no regime de campos fortes, sendo as massas de Bondi obtidas bem elevadas. Boa parte da literatura que trata do mesmo problema não apresenta valores tão elevados de massa, sendo em sua maioria apenas estudos do regime linear. Esta se constitui uma das virtudes da solução aqui obtida.

Como aplicação futura dos códigos gerados para o problema de Bondi com simetria axial tem-se o estudo do colapso gravitacional e verificação do fenômeno crítico. É bastante razoável supor que este objetivo esteja próximo de ser alcançado com o código em dois subdomínios.

Com os códigos já disponíveis pretende-se explorar ainda mais as formas de ondas gravitacionais.

Uma segunda aplicação a ser implementada é a inclusão de um campo escalar não-massivo. O código em um domínio deste problema já foi construído. O que falta é executar os testes de convergência e então iniciar a fase de geração de resultados.

Outra aplicação seria a perturbação não-esférica de um buraco negro. Neste caso, os códigos deveriam ser ligeiramente alterados pois algumas simplificações podem ser feitas. Para tratar um problema deste tipo na formulação característica, o calibre original de Bondi é mais apropriado, visto que a origem do sistema de coordenadas não é tratada. Isto significa que as expressões da massa de Bondi e da função news são bastante simplificadas.

Aproveitando-se do que se aprendeu ao longo deste trabalho, pode-se aplicar tais conhecimentos no desenvolvimento de códigos numéricos baseados em métodos espectrais com decomposição de domínios para problemas da Relatividade Geral em outras formulações, tais como o formalismo ADM e o BSSN.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.l.]: Dover, 1972.
- ARFKEN, G.; WEBBER, J. *Física Matemática- Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. [S.l.]: Elsevier- Campus, 2007.
- BARRETO, W. Extended two-dimensional characteristic framework to study nonrotating black holes. *Physical Review D*, [S.l.], v. 90, n. 2, p. 024055, Jul 2014.
- BARRETO, W.; OLIVEIRA, H. P.; RODRIGUEZ-MUELLER, B. Fixed mesh refinement in the characteristic formulation of General Relativity. *Gen. Rel. Grav.*, [S.l.], v. 49, n. 8, p. 107, Jul 2017.
- BAUMGARTE, T. W.; SHAPIRO, S. L. *Numerical Relativity. Solving Einstein's Equations on the Computer*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- BONDI, H.; BURG, M. G. J. Van der; METZNER, A. W. K. Gravitational waves in general relativity, vii. waves from axi-symmetric isolated system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, [S.l.], v. 269, n. 1336, p. 21–52, 1962.
- BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. [S.l.]: Dover Publications, 2001.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M.; QUATERONI, A. *Spectral Methods- Fundamentals in Single Domains*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2006.
- CANUTO, C. et al. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1988.
- CHOPTUIK, M. W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 70, p. 9–12, Jan 1993.
- CHRISTODOULOU, D. A mathematical theory of gravitational collapse. *Comm. Math. Phys.*, [S.l.], v. 109, n. 4, p. 613–647, Dec 1987.
- EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, [S.l.], 1916.
- GOMEZ, R.; WINICOUR, J. Asymptotics of gravitational collapse of scalar waves. *Journal of Mathematical Physics*, [S.l.], v. 33, n. 4, p. 1445–1457, Apr 1992.
- GOTTLIEB, D.; ORSZAG, S. A. *Numerical Analysis of Spectral Methods*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- GOURGOULHON, E. Simple equations for general relativistic hydrodynamics in spherical symmetry applied to neutron star collapse. , v. 252, n. 2, p. 651–663, Dec 1991.
- GUNDLACH, C. Understanding critical collapse of a scalar field. *Physical Review D*, [S.l.], v. 55, n. 2, p. 695–713, Jan 1997.
- GUNDLACH, C.; MARTIN-GARCIA, J. M. Critical phenomena in gravitational collapse. *Living Reviews in Relativity*, [S.l.], v. 10, n. 1, Dec 2007.

GUSTAFSSON, H. K. B.; OLIGER, J. *Time-Dependent Problems and Difference Methods*. [S.l.]: Wiley, 1995.

HOD, S.; PIRAN, T. Fine structure of choptuik's mass-scaling relation. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 55, p. R440–R442, Jan 1997.

KIDDER, L. E.; FINN, L. S. Spectral Methods for Numerical Relativity. The Initial Data Problem. *Physical Reviews D*, [S.l.], v. 62, n. 8, Nov 2000.

NEWMAN, E. T.; PENROSE, R.; BONDI, H. New conservation laws for zero rest-mass fields in asymptotically flat space-time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, [S.l.], v. 305, n. 1481, p. 175–204, Jun 1968.

OLIVEIRA, H. P.; RODRIGUES, E. L. Numerical evolution of axisymmetric vacuum spacetimes: a code based on the galerkin method. *Classical and Quantum Gravity*, [S.l.], v. 28, n. 23, p. 235011, Nov 2011.

PEYRET, R. *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. [S.l.]: Springer-Verlag, 2002.

PÜRRER, M.; HUSA, S.; AICHELBURG, P. C. News from critical collapse: Bondi mass, tails, and quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 71, p. 104005, May 2005.

SACHS, R. K. .; BONDI, H. Gravitational waves in general relativity viii. waves in asymptotically flat space-time. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, [S.l.], v. 270, n. 1340, p. 103–126, Oct 1962.

SCHWARZ, H. A. Ueber einen grenzübergang durch alternierendes verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, [S.l.], v. 15, p. 272–286, Aug 1870.

SIEBEL, F. Simulation of axisymmetric flows in the characteristic formulation of general relativity. In: . [S.l.: s.n.], 2002.

TAMBURINO, L. A.; WINICOUR, J. H. Gravitational fields in finite and conformal bondi frames. *Phys. Rev.*, [S.l.], v. 150, p. 1039–1053, Oct 1966.

WINICOUR, J. Characteristic evolution and matching. *Living Reviews in Relativity*, [S.l.], v. 12, n. 1, Apr 2009.

APÊNDICE A – Polinômios de Chebyshev e Legendre

Descrevemos agora algumas das características mais importantes dos polinômios de Chebyshev e Legendre, que foram utilizados como funções de base nos problemas resolvidos neste trabalho.

A.1 Polinômios de Chebyshev

Os polinômios de Chebyshev de 1º tipo, $T_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ são autofunções do problema de Sturm-Liouville (ARFKEN; WEBBER, 2007)

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{1-x^2} \frac{dT_n(x)}{dx} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) = 0. \quad (194)$$

O polinômio de Chebyshev $T_k(x)$ pode ser definido como

$$T_k(x) \equiv \cos(kx), \quad (195)$$

onde $x = \cos(\theta)$ com $x \in [-1, 1]$. Deste modo, os valores extremos de $T_k(x)$ são dados por $T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k$.

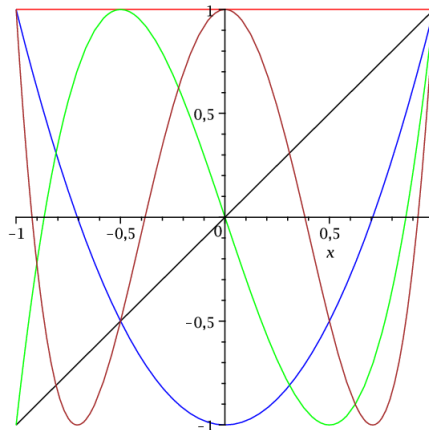
A fórmula de recursão para os polinômios de Chebyshev é dada por

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = 0, \quad (196)$$

com $T_0 = 1$ e $T_1 = x$.

O gráfico 28 mostra o gráfico dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev.

Gráfico 28 - Gráfico dos polinômios de Chebyshev.



Fonte: A autora, 2020.

A partir do gráfico vemos que $T_n(x)$ é par para valores pares de n e ímpar para valores ímpares de n .

Os polinômios de Chebyshev são uma família de polinômios ortogonais com respeito ao peso $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no intervalo $x \in [-1, 1]$, cujo produto interno é dado por

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_j(x) dx = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0k}) \delta_{kj}. \quad (197)$$

Os pontos de colocação de Chebyshev-Gauss-Lobatto são dadas por

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{N}. \quad (198)$$

A relação discreta de ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev é dada por

$$\delta_{mn} = \frac{2}{N c_m} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} T_n(x_j) T_m(x_j), \quad (199)$$

onde

$$c_j = \begin{cases} 2, & \text{se } j = 0 \text{ ou } N, \\ 1, & \text{se } j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (200)$$

A.2 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre, $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$ são autofunções do problema de Sturm-Liouville (ARFKEN; WEBBER, 2007)

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (201)$$

O polinômio de Legendre P_k pode ser escrito como

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k} \quad (202)$$

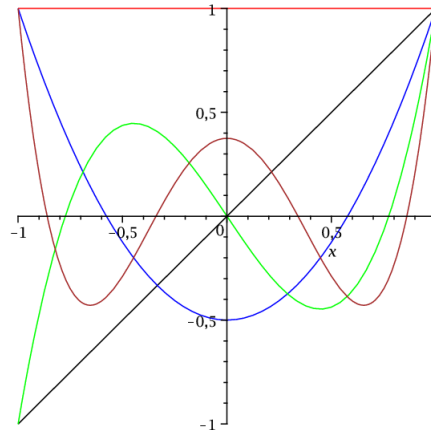
e satisfazem a seguinte fórmula de recursão

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad (203)$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$. O gráfico dos cinco primeiros polinômios de Legendre é mostrado no gráfico 29.

O pontos de colocação para a base de Legendre são as raízes de $\frac{dP_n(x)}{dx}$. Estas raízes não são conhecidas analiticamente e devem ser calculadas por um método numérico.

Gráfico 29 - Gráfico dos polinômios de Legendre.



Fonte: A autora, 2020.

Os polinômios de Legendre $P_k(x)$ formam uma família de polinômios ortogonais com relação ao peso $\omega(x) = 1$, cujo produto interno é dado por

$$\int_{-1}^1 P_j(x) P_k(x) dx = \frac{2}{2k+1} \delta_{jk}. \quad (204)$$

APÊNDICE B – Funções de base radial

As funções de base radial para o problema de Bondi com simetria axial, discutido no Capítulo 3 são discriminadas aqui.

B.1 Um domínio

Os polinômios racionais de Chebyshev são dados por

$$TL_k(r) = T_k\left(y = \frac{r - L_0}{r + L_0}\right), \quad (205)$$

onde $T_k(x)$ é o polinômio de Chebyshev de primeiro tipo de ordem k . A função $\Psi_k(r)$ é dada por

$$\Psi_k(r) = TL_{k+1}(r) + TL_k(r). \quad (206)$$

A partir daí são definidas as funções de base radial de \bar{U} e $\bar{\gamma}$ da forma

$$\psi_k^{(U)}(r) = \frac{1}{2}\Psi_k(r), \quad (207)$$

$$\psi_k^{(\gamma)}(r) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+2k}{3+2k}\Psi_{k+1}(r) + \Psi_k(r)\right). \quad (208)$$

Para a função de base radial para $\bar{\beta}$ constrói-se as funções $\Psi_k^{(0)}(r)$, $\Psi_k^{(1)}(r)$ e $\Psi_k^{(2)}(r)$ da forma dada a seguir

$$\Psi_k^{(0)}(r) = \frac{1}{8}\left(-\frac{(2k^2 + 2k + 1)}{3 + 2k + 2(k+1)^2}\Psi_{k+1}(r) + \Psi_k(r)\right), \quad (209)$$

$$\Psi_k^{(1)}(r) = 2\left(\frac{(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)(2k^2 + 10k + 13)}{(2k^2 + 6k + 5)(k^3 + 6k^2 + 12k + 8)}\Psi_{k+1}^{(0)}(r) + \Psi_k^{(0)}(r)\right), \quad (210)$$

$$\Psi_k^{(2)}(r) = \frac{(k+1)(4k^3 + 18k^2 + 24k + 9)(k+3)^2}{(k+2)^3(4k^3 + 30k^2 + 72k + 55)}\Psi_{k+1}^{(1)}(r) + \Psi_k^{(1)}(r). \quad (211)$$

E finalmente tem-se a função de base radial $\Psi_k^{(\beta)}(r)$ dada por

$$\psi_k^{(\beta)}(r) = \frac{(k+1)(2k^2 + 14k + 23)(-7 + 10k + (k+3)^2)(3+2k)}{(5+2k)(k+3)(9+14k+2(k-1)^2)(3+10k+(k-2)^2)}\Psi_{k+1}^{(2)}(r) + \Psi_k^{(2)}(r) \quad (212)$$

B.2 Dois domínios

Os polinômios racionais de Chebyshev para cada subdomínio são dados por

$$TL_k^{(1)}(r) = T_k \left(y^{(1)} = \frac{(3 - y_0)r - L_0(1 + y_0)}{(1 + y_0)(r + L_0)} \right), \quad (213)$$

$$TL_k^{(2)}(r) = T_k \left(y^{(2)} = \frac{(-1 + y_0)r - L_0(3 + y_0)}{(-1 + y_0)(r + L_0)} \right). \quad (214)$$

As funções de base radial de \bar{U} e $\bar{\gamma}$ no primeiro subdomínio valem

$$\tilde{\chi}_k^{(1)}(r) = \frac{1}{2} \left(TL_{k+1}^{(1)}(r) + TL_k^{(1)}(r) \right), \quad (215)$$

$$\psi_k^{(1)}(r) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + 2k}{3 + 2k} \tilde{\chi}_{k+1}^{(1)}(r) + \tilde{\chi}_k^{(1)}(r) \right). \quad (216)$$

Para a função de base radial de $\bar{\beta}$ primeiro faz-se

$$\chi_k^{(aux)}(r) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{(2k^2 + 3k + 1)}{(4 + 3k + 2(k + 1)^2)} \psi_{k+1}^{(1)}(r) + \psi_k^{(1)}(r) \right), \quad (217)$$

e então

$$\chi_k^{(1)}(r) = - \left(\frac{(3 + 11k + 12k^2 + 4k^3)}{(14 + 11k + 12(k + 1)^2 + 4(k + 1)^3)} \chi_{k+1}^{(aux)}(r) + \psi_k^{(aux)}(r) \right). \quad (218)$$

Todas as funções de base radial no segundo subdomínio são os polinômios racionais de Chebyshev $TL_k^{(2)}(r)$.