Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Felipe José Lacerda de Souza

Equivalência conforme de espaços-tempos

Rio de Janeiro
2019

Felipe José Lacerda de Souza

Equivalência conforme de espaços-tempos

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea

Rio de Janeiro
2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS /CTC/D

S729e Souza, Felipe José Lacerda de.
Equivalência conforme espaços-tempos / Felipe José Lacerda de Souza. - 2019.
173 f.: il.

Orientador: James Ewan Faskin Skea.
Tese (doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Relatividade geral (Física) - Teses. 2. Geometria Riemanniana - Teses. 3. Espaço e tempo - Teses. I. Skea, James Ewan Faskin. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.12

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Felipe José Lacerda de Souza

Equivalência conforme de espaços-tempos

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 13 de dezembro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rodrigo Maier
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcelo José Rebouças
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Profa. Dra. Marcela Campista Borges de Carvalho
Observatório Nacional

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

À minha família por todo seu amor e apoio.

Aos funcionários do Instituto de Física por sua dedicação e profissionalismo.

Aos meus professores pelo conhecimento que me passaram.

Ao meu orientador por sua inestimável ajuda e paciência.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

SOUZA, F. J. L. *Equivalência conforme de espaços-tempos*. 2019. 173 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Nesta tese estudamos o problema de equivalência conforme entre espaços-tempos. Inicialmente apresentamos uma revisão de Topologia, Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana e um pequeno resumo da teoria dos Grupos de Lie e dos fibrados diferenciáveis, numa abordagem independente de sistemas de coordenadas. Para compreender o problema de equivalência conforme e sua solução precisamos entender um grande número de assuntos matemáticos: as transformações conformes entre métricas e suas respectivas curvaturas; a geometria de Weyl e a relação de seus tensores de curvatura e seus análogos riemannianos; o problema de equivalência entre *coframes*; o problema de G-equivalência entre *coframes*; e o problema de equivalência entre geometrias riemannianas. Todos estes assuntos são objetos de estudo no texto. Após toda esta preparação o problema de equivalência conforme entre métricas é definido e solucionado para quaisquer assinaturas e dimensões. Especializamos esta solução para geometrias lorentzianas usando um formalismo espinorial, estudando em particular espaços-tempos que apresentem algum grupo de isotropia não-trivial. Ao final da tese usamos a solução para determinar as condições que um espaço tipo Petrov III deve satisfazer para alcançar máxima simetria conforme, e obtemos algumas métricas com esta característica.

Palavras-chave: Geometria Riemanniana. Geometria de Weyl. Problema de Equivalência. Relatividade Geral.

ABSTRACT

SOUZA, F. J. L. *Conformal equivalence of space-times.* 2019. 173 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

In this thesis we study the conformal equivalence problem applied to space-times. Initially we present a review of Topology, Differential Geometry, Riemannian Geometry and a brief résumé of Lie Groups and the theory of differentiable fibre bundles, using a coordinate-free approach. To understand the Equivalence Problem and its solution it is necessary to study a wide range of areas of mathematics: conformal transformations between metrics and their respective curvatures; Weyl Geometry and the relation between its curvature tensors and the Riemannian analogues; the Equivalence Problem for coframes; the G-equivalence problem for coframes; and the Equivalence Problem for Riemannian geometries. All these subjects are treated in the body of the thesis. After this preparation, the Conformal Equivalence Problem between metrics is defined and solved for arbitrary signature and dimension. We specialise this solution to Lorentzian geometries using spinor formalism which is then used to study space-times with a non-trivial isotropy group. At the end of the thesis, we use the method to determine under what conditions a Petrov type III space-time has maximal conformal symmetry, and obtain some explicit solutions and metrics with these characteristics.

Keywords: Riemannian Geometry. Weyl Geometry. Equivalence Problem. General Relativity.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na teoria da Relatividade Geral representamos a gravitação através de um tensor simétrico de segunda ordem, chamado tensor métrico. Este tensor, que caracteriza o espaço-tempo, deve ser uma solução das Equações de Einstein que regem a dinâmica do campo gravitacional relativístico.

A covariância (invariância de forma frente a transformações de coordenadas) das equações tensoriais é o análogo matemático para a covariância das Leis da Física frente a mudanças dos observadores, incluindo aqueles acelerados. Mas, apesar desta covariância satisfazer nossas necessidades, ela traz consigo uma desvantagem: temos dificuldade de discernir quando duas métricas representam o mesmo campo gravitacional em coordenadas distintas. O análogo matemático deste problema é chamado o Problema de Equivalência de Geometrias Riemannianas.

O primeiro passo para a solução deste problema matemático foi dado por Cartan em seu livro *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, onde foi apontada a solução para o problema de equivalência entre dois *coframes*. Com algumas modificações, esta solução pode ser usada para resolver problemas de equivalência que possam ser descritos em termos de formas diferenciais, o que inclui aquele entre geometrias riemannianas.

Brans (BRANS, 1965) mostrou como a solução de Cartan poderia ser usada para tentar descobrir quado duas soluções das Equações de Einstein são equivalentes, mas as perspectivas de aplicação prática não eram promissoras, pois poderia requerer a computação de até a décima derivada covariante dos tensor de Riemann, impraticável com os recursos computacionais na época. Mais tarde Karlhede (KARLHEDE, 1980) mostrou uma maneira prática de usar a sugestão de Brans: usar a formulação espinorial da geometria de Relatividade Geral para dividir os espaços-tempos em diferentes classes e escolher *coframes* privilegiados para a descrição da geometria. A solução encontrada por Karlhede reduziu o limite máximo para sete derivadas covariantes, embora apenas casos muito especiais poderiam requerer tal derivada. Na maior parte dos casos o problema era solucionado até a segunda derivada covariante do tensor de Riemann.

Uma extensão do problema de equivalência entre geometrias riemannianas, chamada problema de equivalência conforme entre geometrias riemannianas, consiste em descobrir quando duas métricas são proporcionais, ainda que sejam dadas em diferentes sistemas de coordenadas. Embora não seja uma das simetrias das Equações de Einstein (dadas pelos difeomorfismos), as transformações conformes têm aplicações em Relatividade Geral na compactação dos espaços-tempos, e algumas métricas apresentam simetrias conformes, que representam propriedades especiais dela sob um reescalonamento. Por fim, ainda que uma métrica em si não seja uma solução das Equações de Einstein, ela pode estar relacionada a uma solução por uma transformação conforme.

Pouco progresso foi feito neste problema: apenas em (SZEKERES, 1968) consegue-se uma solução parcial, mas que requer a existência de ao menos um invariante escalar distinto de zero dos tensores de curvatura.

Resolver o problema de equivalência conforme entre geometrias riemannianas é o objetivo desta tese. Embora a motivação inicial tenha partido da Teoria de Relatividade Geral, o problema e a solução aqui encontrados se aplicam a qualquer geometria.

No capítulo 1 faremos uma breve apresentação de Topologia. Explicamos apenas as definições e ideias mais importantes para a teoria das variedades diferenciáveis, com alguns exemplos simples para para facilitar a compreensão do leitor. Os importantes conceitos de conexidade, compacidade, funções contínuas, e homeomorfismos são discutidos, e ao final definimos as condições topológicas necessárias para a definição de variedades diferenciáveis.

O capítulo 2 desta tese é dedicado a uma revisão de Geometria Diferencial. A abordagem inicial é feita de forma independente do sistema de coordenadas, pois haverá muitas situações que precisaremos descrever o mesmo objeto usando diferentes linguagens. O capítulo termina com breves resumos dos grupos de Lie, de suas ações sobre variedades diferenciáveis, e da teoria dos fibrados diferenciáveis, dois assuntos correlacionados com as soluções dos problemas de equivalência.

No capítulo 3 apresentamos as estruturas geométricas necessárias para a geometria riemanniana, e exploramos os efeitos de uma transformação conforme entre estas geometrias. No fim do capítulo apresentamos uma generalização da geometria riemanniana, chamada geometria de Weyl, que surgirá naturalmente quando resolvermos o problema de equivalência conforme.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo da solução de Cartan para problemas de equivalências. Inicialmente mostra-se como foi descoberto quando dois *coframes* são equivalentes, e em seguida como usar esta solução para resolver problemas de equivalência mais gerais.

No capítulo 5 ocupamo-nos dos problemas de equivalência entre métricas. Revisamos a solução do problema de equivalência entre geometrias riemannianas como preparação para resolver o problema de equivalência conforme entre estas geometrias, que ocupa a maior parte desse capítulo.

No capítulo 6 especializamos a solução para o caso de Relatividade Geral. Iniciamos o capítulo resumindo a teoria espinorial necessária para a implementação prática da solução, e depois vemos como ela se aplica ao problema de equivalência entre espaços-tempos. Depois estuda-se a aplicação para o problema de equivalência conforme. Terminamos o capítulo aplicando esta solução para obter algumas geometrias com propriedades específicas, que simultaneamente tenham máxima simetria conforme.

1 TOPOLOGIA

Nesta tese estamos interessados em objetos chamados variedades diferenciáveis. Porém, estes objetos são casos particulares de outra classe de objetos, chamados espaços topológicos. Em termos práticos, a Topologia vai se ocupar de propriedades relativas ao espaço como um todo, chamadas *propriedades globais*, enquanto a geometria estudará as propriedades nas vizinhanças dos pontos (que serão definidas de forma precisa neste capítulo), chamadas *propriedades locais*.

Embora nesta tese estaremos preocupados exclusivamente com questões locais, o conhecimento de Topologia permitirá descrever toda a teoria sem ambiguidades. Além disto, como a Topologia é construída com base na Teoria dos Conjuntos, as definições, hipóteses e provas são mais gerais e mais simples que seus equivalentes geométricos.

A maior parte deste capítulo é baseado no texto de Lee (LEE, 2010), que é dedicado à Topologia de Variedades. Outros livros usados são o texto de Nakahara (NAKAHARA, 2003) e Hall (HALL, 2004).

1.1 Espaços Topológicos

Começamos esta seção com a definição de uma topologia sobre um conjunto X, cujo significado será esclarecido em seguida.

Definição 1.1.1 (Topologia, Espaço Topológico, Subconjuntos Abertos)
Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{T}$ uma coleção de subconjuntos de X. A coleção $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre X se satisfizer as seguintes condições:

1. *O conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio conjunto X pertencem a $\mathcal{T}$;*

2. *A união arbitrária de (possivelmente infinitos) elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$;*

3. *A interseção de finitos elementos de $\mathcal{T}$ pertence a $\mathcal{T}$.*

Um par $(X, \mathcal{T})$ que satisfaz estas condições é chamado espaço topológico, e os elementos de $\mathcal{T}$ são ditos subconjuntos abertos, ou apenas abertos, de $(X, \mathcal{T})$.

Note que a terceira hipótese pode ser substituída pela interseção de dois subconjuntos sem prejuízos. Se X faz parte de um espaço topológico, chamamos seus elementos de *pontos*. A intenção da definição de topologia fica clara pelo nome dado aos seus elementos: uma topologia sobre X é uma caracterização axiomática de quais subconjuntos devem ser considerados abertos em X.

Todo conjunto X admite ao menos duas topologias: a *topologia discreta* é dada pela coleção de todos os subconjuntos de X: $\mathcal{T}_{dis} = \{U \mid U \subset X\}$, enquanto a *topologia trivial* é dada apenas pelo próprio conjunto e o conjunto vazio: $\mathcal{T}_{triv} = \{\emptyset, X\}$.

O exemplo mais importante de um espaço topológico é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munido da coleção da união de todos os intervalos abertos em $\mathbb{R}$, chamada *topologia usual* ou *topologia euclidiana*.

$$\mathcal{T}_{us} = \left\{ U \mid U = \bigcup_{a,b \,\in\, \mathbb{R}} \{(a,b)\} \right\}. \tag{1}$$

Por outro lado, a interseção de um conjunto infinito de subconjuntos abertos não é necessariamente aberta. Para a topologia euclidiana temos como exemplo

$$\bigcap_{a \,\in\, \mathbb{R}} \{(x-a, x+a)\} = \{x\} \notin \mathcal{T}_{us}, \tag{2}$$

que justifica a assimetria na definição de topologias. A topologia euclidiana sobre $\mathbb{R}^m$ é definida de forma análoga, sendo dada pela união de todos os produtos cartesianos de m intervalos abertos em $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}_{us} = \bigcup_{a_i,b_i \,\in\, \mathbb{R}} \{(a_1,b_1) \times \ldots \times (a_m,b_m)\}. \tag{3}$$

Outro tipo de espaço topológico importante são os *espaços métricos*, uma generalização dos espaços euclidianos. Estes espaços são equipados com uma definição de *distância*, dada abaixo.

Definição 1.1.2 (Métrica, Espaços Métricos, Bolas Abertas)

Seja X um conjunto não vazio e p, q, r três elementos quaisquer em X. Uma métrica ou distância em X é um mapa[1] *$d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Positiva Definida: $d(p,q) \geq 0$, e $d(p,q) = 0$ se e somente se $p = q$;*
2. *Simetria: $d(p,q) = d(q,p)$;*
3. *Desigualdade Triangular: $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.*

O par (X,d) é chamado espaço métrico.

Seja $R \in \mathbb{R}$. Uma bola aberta de raio R e centro em p do espaço métrico, denotada por $B(p,R)$, é o subconjunto dado por

$$B(p,R) = \{q \in X \mid d(p,q) < R\}. \tag{4}$$

[1] Mais conhecidos pelo termo função, mas reservaremos este nome para um tipo particular de mapa que estudaremos no próximo capítulo.

A topologia de um espaço métrico é dada pela união de suas bolas abertas. A topologia usual em $\mathbb{R}^m$ também é uma topologia métrica. Sejam $p = (x^1, \ldots, x^m)$ e $q = (y^1, \ldots, y^m)$ dois pontos em $\mathbb{R}^m$, a métrica usual para este conjunto é dada pela distância euclidiana

$$d_{us}(p, q) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^m - y^m)^2}. \tag{5}$$

A teoria dos espaços métricos é um assunto conhecido da Física Matemática, e portanto não será explorada em detalhes nesta tese. Nós nos limitaremos a mostrar como a Topologia generaliza algumas das definições e propriedades destes espaços.

Voltando à definição de espaço topológico, note que este é o par dado pelo conjunto e a topologia, sendo possível definir várias topologias sobre o mesmo conjunto. Num abuso de linguagem, podemos falar apenas no espaço topológico X se uma topologia já foi definida ou se o conjunto possui uma topologia padrão (como a euclidiana). Nestes casos escrevemos $\mathcal{T}$ explicitamente apenas se usarmos uma topologia distinta.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O *conjunto diferença* entre B e A é o conjunto $B \setminus A$ de todos os elementos que pertencem a B mas não pertencem a A,

$$B \setminus A = \{x \in B \text{ e } x \notin A\}. \tag{6}$$

Se $A \subset B$ então $B \setminus A$ também é chamado de *complemento de A em B*, e se o conjunto B é prefixado ou subentendido pelo contexto, denotamos $B \setminus A$ apenas por A^c. Obviamente em Topologia usamos o complemento de um subconjunto relativo a X. Agora podemos definir os *subconjuntos fechados* de um espaço topológico e a noção de conexidade.

Definição 1.1.3 (Subconjuntos Fechados, Conectividade)

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto $F \subset X$ é dito fechado se seu complemento é aberto, $F^c = X \setminus F \in \mathcal{T}$.

O espaço topológico é dito conexo se $\emptyset$ e X são os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados. Do contrário o espaço topológico é dito desconexo.

A definição de conexidade pode parecer muito abstrata, mas mostraremos em breve um exemplo concreto de seu uso. Em geral, subconjuntos podem ser simultaneamente abertos e fechados, apenas abertos, apenas fechados, ou nenhum dos dois.

Os conjuntos fechados satisfazem condições análogas aos axiomas da definição de topologia: ambos $\emptyset$ e X são fechados, a interseção arbitrária de subconjuntos fechados é fechada e a união de finitos conjuntos fechados é fechada. Embora seja padrão definir uma topologia pelos seus subconjuntos abertos, ela é igualmente caracterizada por seus subconjuntos fechados. Por exemplo, a topologia usual em $\mathbb{R}$ pode ser definida pelos intervalos fechados $[a, b]$ (que são o complemento dos abertos $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$) através de sua união $\bigcup_{a,b \in \mathbb{R}} [a, b]$.

Além da conexidade, outra propriedade importante de um espaço topológico é a compacidade.

Definição 1.1.4 (Cobertura, Subcobertura, Compacidade)

Seja $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico. Uma cobertura de* X *é uma coleção* $\mathcal{U}$ *de subconjuntos de* X *tal que todo ponto de* X *pertença a (ao menos) um dos elementos de* $\mathcal{U}$*, ou seja,* $\bigcup_{U\in\,\mathcal{U}} U = X$*. Se os subconjuntos são abertos* $\mathcal{U}$ *é chamada de cobertura aberta.*

Uma subcoleção de $\mathcal{U}$ *é dita uma subcobertura se ela também satisfizer a definição de cobertura.*

Um espaço topológico é dito compacto se toda cobertura aberta admite uma subcobertura finita $U_1, \ldots, U_N$*,* $X = U_1 \cup \ldots \cup U_N$*.*

Uma topologia em X permite obter uma topologia em qualquer de seus subconjuntos, chamada *topologia de subespaço* ou *topologia relativa.*

Definição 1.1.5 (Topologia Relativa, Subespaço Topológico)

Seja $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* A *qualquer subconjunto não vazio de* X*. A topologia relativa* $\mathcal{T}_A$ *em* A *é definida por*

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \;\forall\; U \in \mathcal{T}\}. \tag{7}$$

O par $(A, \mathcal{T}_A)$ *é dito ser um subespaço topológico de* $(X, \mathcal{T})$*. Um subespaço é dito conexo ou compacto se satisfaz estas propriedades na topologia relativa.*

Note que um subconjunto aberto ou fechado na topologia relativa não necessariamente apresenta tal propriedade na topologia original (como o próprio subconjunto A mostra), porém, se A é aberto (fechado) em $\mathcal{T}$ então os abertos (fechados) do subespaço também apresentaram a mesma propriedade na topologia de X.

Podemos usar a topologia relativa para construir e estudar topologias menos triviais que as euclidianas. Por exemplo, dado $\mathbb{R}^{m+1}$ com a topologia usual o lugar geométrico S^m da equação

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 + (x^{m+1})^2 = 1 \tag{8}$$

herda de $\mathbb{R}^{m+1}$ uma topologia compacta e conexa chamada *topologia esférica.* Um subconjunto isolado de pontos (possivelmente infinitos, como os números naturais, inteiros e racionais) herda de $\mathbb{R}^m$ a topologia discreta. Como último exemplo, considere a topologia herdada por duas figuras em $\mathbb{R}^m$ que não se interseccionam (como os dois ramos de um hiperboloide). Este subespaço é desconexo, pois cada figura é aberta e fechada na topologia relativa.

Uma topologia é definida pela coleção de todos os subconjuntos abertos, mas esta descrição pode ser pouco prática. A solução para esta dificuldade é descrever a topologia em termos de uma coleção menor de subconjuntos, chamada *base*.

Definição 1.1.6 (Base, Topologia Gerada, Topologia Produto)

Seja X um conjunto, uma base $\mathcal{B}$ de X é uma coleção de subconjuntos tal que

1. *Para todo $p \in X$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B$, ou seja, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$;*

2. *Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $p \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

A coleção $\mathcal{T}$ de todas as uniões dos subconjuntos em $\mathcal{B}$ é uma topologia, chamada topologia gerada por $\mathcal{B}$.

Sejam $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_N, \mathcal{T}_N)$ espaços topológicos. A topologia $\mathcal{T}_{prod}$ gerada pela base $\mathcal{B} = \{U_1 \times \ldots \times U_N, U_i \in \mathcal{T}_i\}$ é chamada topologia produto e o par $(X_1 \times \ldots \times X_N, \mathcal{T}_{prod})$ é chamado espaço produto.

O leitor atento deve ter reparado que já usamos implicitamente a ideia de base e topologia produto quando definimos as topologias usuais sobre os conjuntos dos reais, seus produtos cartesianos, e a topologia de espaços métricos.

A noção de proximidade num espaço topológico é dada pela definição de vizinhança.[2] A ideia de vizinhança é necessária para o estudo das propriedades locais do espaço topológico, e será necessária para a definição de variedade diferenciável.

Definição 1.1.7 (Vizinhança de um ponto)

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e p um ponto de X. Uma vizinhança U_p de p é um aberto ao qual p pertença.

Encerramos aqui a discussão das propriedades gerais de espaços topológicos necessárias para este texto. Outras propriedades relevantes, mas que não são essenciais para a tese, podem ser encontradas nas referências.

1.2 Mapas Entre Espaços Topológicos

Nesta seção estudaremos brevemente as relações entre espaços topológicos. Começaremos com uma definição matematicamente precisa deste conceito.

Definição 1.2.1 (Relação)

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação R entre A e B é um subconjunto de $A \times B$. Denotamos que um par $(a, b) \in R$ apenas por aRb.

---

[2] Alguns textos, como (NAKAHARA, 2003), definem as vizinhanças como subconjuntos que contenham abertos. O leitor deve consultar a definição do texto para evitar confusões.

Entre as várias possíveis coleções de relações duas guardam particular importância para esta tese, e serão descritas em maiores detalhes. As primeiras delas são chamadas *relações de equivalência*, e definem precisamente quando dois elementos de um conjunto devem ser considerados, de acordo com algum critério, o "mesmo" objeto.

Definição 1.2.2 (Relações de Equivalência, Classe de Equivalência)

Seja A um conjunto e a, b, c três elementos em A. Uma relação de equivalência $\sim$ em A é uma relação que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Reflexividade: $a \sim a$;*
2. *Simetria: $a \sim b \implies b \sim a$;*
3. *Transitividade: $a \sim b$ e $b \sim c \implies a \sim c$.*

A classe de equivalência de a é o conjunto de todos os elementos equivalentes a a, e é denotada por $[a]$. O conjunto de todas as classes de equivalência é chamado de conjunto quociente, e é denotado por $A/\sim$.

Pela reflexividade todo elemento pertence a alguma classe de equivalência. As classes de equivalência dividem todo o conjunto A em subconjuntos disjuntos.

As outras relações de interesse para esta tese são chamadas *mapas.*[3]

Definição 1.2.3 (Mapa, Domínio, Contradomínio, Imagem, Pré-Imagem)

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Um mapa f é uma relação tal que para todo $a \in A$ existe apenas um par (a, b) em $f \subset A \times B$. Dizemos que f é um mapa de A em B, e o denotamos por $f : A \to B$. Os conjuntos A e B são chamados respectivamente domínio e contradomínio do mapa. O (único) elemento de B que corresponde a $a \in A$ é denotado por $f(a)$.

Sejam $S \subset A$ e $S' \subset B$. O conjunto $f(S) = \{b \in B \mid b = f(a)\ \forall\ a \in S\} \subset B$ é chamado de imagem de S sob f, e o conjunto $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid b = f(a)\ \forall\ b \in S'\} \subset A$ é chamado de pré-imagem de S' sob f.

A imagem $f(A) \subset B$ é chamada apenas imagem de f.

A importância dos mapas está na garantia da existência e unicidade do correspondente $f(a)$. Um mapa importante e necessário para a próxima definição é o *mapa identidade* $id_A : A \to A$ que leva um elemento em A nele mesmo, $id_A(a) = a$. Podemos agora estudar mapas que admitem um mapa inverso.[4]

---

[3] Já vimos um mapa neste texto na definição 1.1.2 (espaços métricos).

[4] A relação inversa R^{-1} de R é o subconjunto de $B \times A$ definido por $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Todo mapa possui uma relação inversa, mas ela não necessariamente satisfaz a definição de mapa.

Definição 1.2.4 (Mapa Injetivo, Sobrejetivo, Bijetivo, Composição, Inverso)
Um mapa $f : A \to B$ é dito injetivo se $f(a) = f(b) \implies a = b$, e sobrejetivo se $f(A) = B$. Um mapa é dito bijetivo se for simultaneamente injetivo e sobrejetivo.

Seja $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a composição $g \circ f : A \to C$ é o mapa definido por $c = g(f(a))$.

Se f é bijetivo existe um (único) mapa inverso $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.[5]

Agora especializamos nossos mapas para espaços topológicos. O conceito mais importante aqui é a definição de *mapa contínuo*.

Definição 1.2.5 (Mapa Contínuo, Mapa Contínuo num Ponto)
Sejam X e Y dois espaços topológicos. Um mapa $f : X \to Y$ é dito contínuo se a pré-imagem de todo aberto U em Y for um aberto $f^{-1}(U)$ em X.

Um mapa é $f : X \to Y$ é dito contínuo num ponto $p \in X$ se houver uma vizinhança U_p tal que sua restrição $f|_{U_p} : U_p \to Y$ é contínuo.

Continuidade implica continuidade local, o contrário só é verdade se o mapa for localmente contínuo em todos os pontos do espaço topológico.

Pela definição, quaisquer mapas cujo domínio seja um espaço com topologia discreta, cujo contradomínio possua topologia trivial, ou que seja um mapa constante (a imagem é apenas um ponto) são contínuos.

Como exemplo concreto do uso destas definições, considere o conjunto dos números reais com a topologia usual e o mapa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 1 + x, & x < 0 \end{cases}. \tag{9}$$

A pré-imagem do aberto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é dada por $f^{-1}\left(\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[0, \frac{1}{2}\right)$ que não é aberto. O mapa é localmente contínuo em todos os pontos tais que $x \neq 0$, pois

$$f(\ (x - \delta, x + \delta)\ ) = \begin{cases} (x - \delta, x + \delta), & x > 0 \\ (1 + x - \delta, 1 + x + \delta), & x < 0 \end{cases} \tag{10}$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno (que é a noção mais conhecida de continuidade).

[5] Mapas injetivos admitem inversos g pela esquerda, $g(f(a)) = g(f(a')) \implies a = a'$, enquanto mapas sobrejetivos admitem inversos g pela direita, $f(g(b)) = b$. Estes inversos não são únicos.
Note que a notação para pré-imagem e função inversa são idênticas, embora sejam conceitos diferentes. Apesar da ambiguidade, estas notações são consagradas e por isto as manteremos nesta tese.

Como primeira mostra da utilidade dos mapas contínuos, vamos usá-los para refinar nossa caracterização de conexidade.

Definição 1.2.6 (Conexidade por Arcos, Espaços Simplesmente Conexos)

Seja X um espaço topológico e p, q dois pontos distintos em X. Um arco entre p e q é um mapa contínuo $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = p$ e $f(1) = q$. O espaço X é dito conexo por arcos se existe um arco entre quaisquer dois pontos de X.

Um loop em X é um mapa contínuo $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = f(1)$. O espaço X é dito simplesmente conexo se qualquer loop f pode ser reduzido a um ponto p por uma deformação contínua, ou seja, um mapa $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $F(s,0) = f(s)$, $F(0,t) = F(1,t)$ e $F(s,1) = p$.

Um espaço simplesmente conexo é conexo por arcos, e um espaço conexo por arcos é conexo, mas as afirmativas inversas não são necessariamente verdadeiras.

Outra aplicação de mapas contínuos é a definição de *topologia quociente.*

Definição 1.2.7 (Topologia Quociente, Espaço Quociente)

Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um conjunto não vazio. Um mapa sobrejetivo $\pi : X \to A$ define uma topologia $\mathcal{T}_{quoc}$ em A, chamada topologia quociente, através de

$$\mathcal{T}_{quoc} = \{U \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}. \tag{11}$$

Por definição o mapa π é contínuo. O método mais simples de construir espaços quocientes é definir uma relação de equivalência $\sim$ sobre X. O mapa $\pi : X \to X \backslash \sim$ que leva os elementos de X em suas classes de equivalências define um espaço quociente.

Como exemplo concreto, considere $\mathbb{R}$ com a topologia usual e a relação de equivalência $x \sim x + 2n\pi,\ n \in \mathbb{N}$. Então o espaço quociente é um círculo: $S^1 = \mathbb{R}/\sim$.

Agora vamos discutir a ideia mais importante da Topologia, os *homeomorfismos.*

Definição 1.2.8 (Homeomorfismo, Homeomorfismo Local)

Sejam X e Y dois espaços topológicos. Um homeomorfismo é um mapa bijetivo contínuo $f : X \to Y$ cujo inverso $f^{-1} : Y \to X$ também é contínuo. Os espaços X e Y são ditos homeomorfos.

Um mapa $f : X \to Y$ é dito ser um homeomorfismo local se para cada ponto $p \in X$ existe uma vizinhança U_p tal que $f(U_p)$ seja aberto e $f|_{U_p}$ é um homeomorfismo.

Em termos mais informais um homeomorfismo é uma deformação contínua (sem quebrar ou colar) entre os espaços topológicos. Os homeomorfismos preservam a estrutura topológica (os abertos e fechados) ao transformamos os espaços. Ser homeomorfo é uma relação de equivalência entre os espaços topológicos, e portanto os consideramos o mesmo espaço, apenas descrito de forma distinta.

Note que o inverso de um mapa contínuo não é necessariamente contínuo. Por exemplo, considere os conjuntos $[0,1)$ e S^1 com as topologias relativas a topologia usual, e os mapas $f : [0,2\pi) \to S^1$ e $f^{-1} : S^1 \to [0,2\pi)$ dados por

$$(x,y) = f(t) = (\ \cos(t), \operatorname{sen}(t)\ ), \qquad f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \arccos(x), & y \geq 0 \\ \pi + \arccos^{-1}(x), & y < 0 \end{cases}. \tag{12}$$

O mapa f é contínuo (note que a pré-imagem da vizinhança de $(1,0)$ é $[0,\delta) \cup (2\pi - \delta)$, que é aberto na topologia relativa), mas f^{-1} não é contínuo, pois a pré-imagem do aberto $[0,\delta)$ é $\bigcup_{t \in [0,\delta)} \{(\cos(t), \operatorname{sen}(t))\}$, que não é aberto em S^1. Estes espaços não são homeomorfos.

Como um homeomorfismo preserva a topologia, algumas propriedades ou estruturas do espaço topológicos não são alteradas ao transformá-lo, como a conexidade e a compacidade. Estas propriedades são chamadas *invariantes topológicos*. Por outro lado, dois espaços com diferentes invariantes topológicos não podem ser homeomorfos.

Como não há (até agora) uma lista completa com todos os invariantes topológicos, eles só podem ser usados para uma caracterização parcial dos espaços topológicos.

Os invariantes topológicos não são vitais para o resto desta tese, portanto direcionamos o leitor interessado no assunto para as referências.

1.3 **Separação e Enumerabilidade**

Até aqui nosso estudo é aplicável a qualquer espaço topológico, mas um espaço topológico arbitrário é demasiado geral para os propósitos desta tese. Para especificar os espaços de nosso interesse precisamos de três hipóteses extras, que explicaremos a seguir.

Em Topologia há um conjunto de hipóteses sobre as vizinhanças, os *Axiomas de Separação*, que podem ser supostas para obter espaços topológicos com propriedades mais intuitivas. Para os estudos de geometria a hipótese relevante é o *axioma de Hausdorff*.

Definição 1.3.1 (Espaços de Hausdorff)

Um espaço topológico é dito ser um espaço de Hausdorff se, para quaisquer dois pontos distintos p e q, existem vizinhanças U_p e U_q tais que $U_p \cap U_q = \emptyset$.

Um outro conjunto de hipóteses de interesse são conhecidos como *Axiomas de Enumerabilidade*. A hipótese necessária para as variedades diferenciáveis é o *Segundo Axioma de Enumerabilidade*, e os espaços que o satisfazem são ditos *segundo enumeráveis*.

Definição 1.3.2 (Espaços Segundos Enumeráveis)

Um espaço topológico é dito segundo enumerável se admite uma base contável.[6]

O axioma de Hausdorff garante que pontos isolados são fechados e que, se uma sequência de pontos converte para algum ponto, este ponto é único. Esta hipótese garante que há uma quantidade suficiente de abertos para discernir os pontos. Por outro lado o Segundo Axioma de Enumerabilidade limita a quantidade de abertos no espaço topológico.

A última hipótese necessária para nossos espaços topológicos é a exigência que as vizinhanças dos pontos sejam semelhantes a algum subconjunto de $\mathbb{R}^m$ com a topologia usual, propriedade que chamamos de *localmente euclidiana*.

Definição 1.3.3 (Espaços Localmente Euclidianos)

Um espaço topológico é dito localmente euclidiano de dimensão m se todo ponto p possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^m$.

Com estas três definições temos todas as hipóteses necessárias para formular a teoria das variedades diferenciáveis, que será estudada no próximo capítulo.

[6] Com finitos elementos, ou que admite uma bijeção para os números naturais. Em outras palavras, podemos indexar os elementos da base (ainda que infinita) pelos números naturais.

2 GEOMETRIA DIFERENCIAL

O segundo capítulo desta tese é dedicado a um resumo de Geometria Diferencial, baseado nos textos de Olver (OLVER, 1995) e Stewart (STEWART, 1991), além da dissertação de mestrado do próprio autor (SOUZA, 2014).

Em vez de uma abordagem baseada em componentes, mais comum em textos de Relatividade Geral, definiremos tensores como objetos independentes das coordenadas. Adotaremos esta postura, pois precisaremos descrever estes objetos usando diferentes linguagens, portanto necessitamos de uma noção invariante destes objetos. Uma vez que estas definições estejam estabelecidas, voltaremos à notação de componentes, que é mais útil para nossos propósitos. As últimas seções do capítulo são dedicadas a um resumo dos grupos de Lie, e sua aplicação para a definição de grupos de transformações numa variedade diferenciável e na teoria dos fibrados.

2.1 Variedades Diferenciais, Funções Escalares e Vetores

Começamos este resumo de geometria diferencial com as definições de sistema de coordenadas e variedade diferenciável.

Definição 2.1.1 (Sistema de Coordenadas, Variedade Diferenciável)

Seja M um espaço de Hausdorff segundo enumerável e localmente euclidiano, e $U \subset M$ um subconjunto aberto conexo de M. Um sistema de coordenadas é um mapa bijetivo $\Phi : U \to \Phi(U)$, onde $\Phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ é um subconjunto aberto conexo de $\mathbb{R}^m$.

Dados dois sistemas de coordenadas Φ_A e Φ_B e seus respectivos domínios U_A e U_B cuja interseção é não-vazia, o mapa de transição Φ_{AB} é o mapa $\Phi_A \circ \Phi_B^{-1} : \Phi_B(U_A \cap U_B) \to \Phi_A(U_A \cap U_B)$.

Um atlas A é uma coleção de sistemas de coordenadas Φ_A tal que $\bigcup_A U_A = M$.

O par (M, A) é chamado de variedade diferenciável. A dimensão m da variedade é definida como a dimensão (única) das imagens $\Phi_A(U_A)$ dos sistemas de coordenadas.

Por fim, um atlas e sua respectiva variedade são ditos C^k-diferenciável, suave ou analítico se todos os seus mapas de transição apresentarem as respectivas propriedades.

Ou seja, um sistema de coordenadas atribui a pontos de M uma m-upla de números para identificá-los, enquanto o mapa de transição mapeia as coordenadas de um ponto no sistema Φ_B para as coordenadas deste ponto no sistema Φ_A. A definição de atlas garante que todos os pontos da variedade são descritos ao menos em um sistema de coordenadas e que poderemos definir, sem ambiguidades, uma regra de derivação em M.

Sempre podemos remover sistemas de coordenadas para obter variedades suaves, portanto estaremos interessados apenas nestas variedades. Na prática omitiremos os mapas Φ e o atlas A, chamando apenas o conjunto M de variedade diferenciável e adicionando novas coordenadas quando necessárias. Identificaremos um ponto apenas por p ou por suas coordenadas $x = (x^1, \ldots, x^m)$ (ou apenas x^a, $a = 1, \ldots, m$) num sistema qualquer. Exigiremos apenas que estes sistemas sejam locais, ou seja, bem definidos numa vizinhança aberta de p. Os mapas de transição serão denotados apenas por $y = y(x)$.

A importância da definição de variedades diferenciáveis é relacionada as ideias de derivadas de *funções escalares* (ou somente escalares), curvas e vetores, dadas abaixo.

Definição 2.1.2 (Funções Escalares, Curvas, Vetores, Campos Vetoriais)

Uma função escalar (real) é um mapa $f : U \to \mathbb{R}$, *onde* $U \subset M$. *A função* f *é dita* C^k*-diferenciável, suave ou analítica, se todos os mapas* $f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *apresentarem a respectiva propriedade. O conjunto de todas as funções reais em* M *será denotado por* $\mathbb{F}(M, \mathbb{R})$.[7]

Uma curva C^k*-diferenciável (suave, analítica) em* M *é um mapa* $\theta : I \to M$, *onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto, semi-aberto ou fechado, tal que* $\Phi \circ \theta$ *seja* C^k*-diferenciável (suave, analítica) para todos os sistemas de coordenadas.*

Seja $x_0 = \theta(t_0)$, *as coordenadas de um ponto* $p \in M$. *O vetor tangente à curva* θ *no ponto* p *é o mapa* $\dot{\theta}_P : \mathbb{F}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *cuja imagem é a derivada direcional de* f*:*

$$\dot{\theta}_p[f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \theta(t))\bigg|_{t=t_0} . \tag{13}$$

O conjunto de todos os vetores tangentes a um ponto p *forma um espaço vetorial sobre o corpo dos reais, chamado espaço tangente ao ponto* p, *e denotado por* $T_p(M)$.

Um campo vetorial X *é um mapa* $X(p)$ *tal que* $p \in M$ *e* $X(p) \in T_p(M)$, *ou seja, um mapa que leva um ponto* p *em* M *num vetor* $X(p)$ *no espaço vetorial tangente a* p.

Pela definição as coordenadas (tomadas individualmente) são escalares. A regra da cadeia garante que as derivadas parciais relativas a coordenadas quaisquer são bem-definidas, e que podemos usá-las para estudar a variação das funções no entorno de um ponto. Em geral, simplificaremos a notação descrevendo uma função f apenas por $f(x)$ e uma curva apenas por $\theta(t)$ ou, de forma ainda mais resumida, somente $x(t)$.[8]

Descrevendo os pontos, as funções e curvas nas formas simplificadas $x = \Phi(p)$, $f(x) = f(p)$ e $x(t) = \Phi(\theta(t))$, podemos escrever $f \circ \theta(t) = f(x(t))$. Usando a convenção

---

[7] Note que as funções escalares não precisam ser definidas em toda variedade M. Podemos definir funções escalares sobre outros conjuntos mudando o contradomínio na definição.

[8] Na verdade estes são os mapas $f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $\Phi \circ \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$.

de somatório de Einstein,[9] o vetor tangente vale

$$\dot{\theta}_p[f] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(x(t))\bigg|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t}(t)\bigg|_{t=t_0} \frac{\partial f}{\partial x^a}(x)\bigg|_{x=x_0} \equiv X_p^a \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_p [f], \tag{14}$$

onde escrevemos $X_p^a = dx^a/dt|_{t=t_0}$. Vemos que todos os vetores tangentes podem ser escritos como uma combinação linear dos operadores $\partial/\partial x^a|_p$. Portanto os operadores de derivadas parciais formam uma base para o espaço tangente, que possui mesma dimensão m da variedade M. O conjunto de números $X_p^1, \ldots, X_p^m$ são chamadas *componentes do vetor* X_p na base $\partial/\partial x^a|_p$.

A regra da cadeia para derivação, a diferenciabilidade dos mapas de transição $y = y(x)$ e o Teorema da Função Inversa, garantem que um vetor tangente é bem-definido, ou seja, é o mesmo mapa para todos os sistemas de coordenadas,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(y(x(t)))\bigg|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}y^a}{\mathrm{d}t}(t)\bigg|_{t=t_0} \frac{\partial f}{\partial y^a}(y)\bigg|_{y=y_0} = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t}(t)\bigg|_{t=t_0} \frac{\partial f}{\partial x^a}(x)\bigg|_{x=x_0}. \tag{15}$$

Raramente lidaremos com vetores definidos apenas num ponto. Na prática, trabalharemos quase que exclusivamente com campos vetoriais suaves. Por economia de linguagem, podemos chamá-los apenas de vetores, deixando implícito que estão definidos em parte da variedade. Se uma situação se aplicar especificamente a vetores definidos num ponto, deixaremos isto explícito.

Para finalizar a discussão sobre vetores, definiremos o comutador entre dois vetores e as curvas integrais de um campo vetorial.

Definição 2.1.3 (Comutador)

Dados campos vetoriais X e Y, definidos numa variedade M, o comutador de X e Y é o campo vetorial $[X, Y]$ dado por:

$$[X, Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]]. \tag{16}$$

Note que $[X[Y[f]]$ não é um vetor, pois envolve uma derivada segunda de f. A subtração do termo simétrico garante que $[X, Y]$ seja um vetor com componentes

$$[X, Y]^a = X^b \frac{\partial Y^a}{\partial x^b} - Y^b \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \tag{17}$$

na base $\partial/\partial x^a|_p$. Dados dois campos vetoriais, o comutador permite construir um terceiro campo vetorial (não necessariamente linearmente independente dos campos originais).

O comutador possui três propriedades notáveis: a antissimetria; a linearidade e a

[9] Sub-índices e super-índices idênticos nas mesmas equações devem ser somados sobre todos os valores possíveis (de 1 até a dimensão de M, ou de 0 até dimensão de M menos um).

identidade de Jacobi,

$$
\begin{aligned}
&[X,Y] = -[Y,X],\\
&[X,aY+Z] = a[X,Y] + [X,Z],\\
&[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Se $f \in \mathbb{F}(M,\mathbb{R})$, o comutador $[X, fY]$ vale

$$[X, fY] = f[X,Y] + X[f]Y. \tag{19}$$

Usamos curvas para definir vetores, mas é possível fazer o contrário: dado um campo vetorial X, podemos construir uma congruência de curvas através deste campo, chamadas *curvas integrais de X*.

Definição 2.1.4 (Curvas Integrais)

Uma curva integral de um campo vetorial X numa variedade M é uma curva tal que seu vetor tangente em qualquer ponto p da curva coincide com $X(p)$.

Na prática, para obter as curvas integrais de um campo vetorial escolhemos um sistema de coordenadas x e resolvemos as equações diferenciais ordinárias dadas por

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t}(t) = X^a(x(t)), \tag{20}$$

com condições iniciais $x(0) = x_p$ para algum ponto p na curva cujas coordenadas são x_p. O teorema de Picard garante uma solução (local) para estas equações,[10] que em seguida são mapeadas na variedade pela mapa inverso às coordenadas.[11]

2.2 1-Formas e Tensores

Para todo espaço vetorial $\mathbb{V}$, existe um segundo espaço vetorial de mesma dimensão chamado *espaço vetorial dual a* $\mathbb{V}$, formado pelos operadores lineares $\mathbb{V}^* : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$.[12] Para os vetores tangentes, as *diferenciais* das funções escalares definem algum destes operadores.

Definição 2.2.1 (Espaço Cotangente, 1-Formas)

[10] Ver, por exemplo, a página 228 de (DEBNATH; MIKUSIŃSKI, 2005).

[11] Escolhendo novos pontos (que não estão ao longo das curvas já obtidas) para as condições iniciais, podemos construir toda a congruência de curvas integrais.

[12] Para espaços vetoriais sobre outros corpos, devemos mudar o contradomínio.

Dado um ponto p numa variedade M, o espaço vetorial dual a $T_p(M)$ é chamado espaço vetorial cotangente ao ponto p, e denotado por $T^*_p(M)$.

Os elementos de $T^*_p(M)$ são chamados 1-formas ou covetores.

Uma função escalar f define em cada ponto de seu domínio uma 1-forma chamada diferencial de f, e denotada por $\mathrm{d}f$, através do mapa $\mathrm{d}f : T_p(M) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathrm{d}f[X_p] = X_p[f]. \tag{21}$$

Campos de 1-forma são definidos de forma análoga aos campos vetoriais, portanto adotaremos as mesmas simplificações na linguagem para eles.

Para cada base no espaço $\mathbb{V}$ existe uma base em $\mathbb{V}^*$ chamada base dual, composta pelos operadores cujos mapas levam a base de $\mathbb{V}$ na delta de Kronecker δ^a_b. Para a base formada pelas derivadas das coordenadas em $T_p(M)$, a base dual em $T^*_p(M)$ é dada pelas diferenciais das coordenadas, uma vez que

$$\mathrm{d}x^a \left[\left. \frac{\partial}{\partial x^b} \right|_p \right] = \left. \frac{\partial x^a}{\partial x^b} \right|_{x=x(p)} = \delta^a_b. \tag{22}$$

Usando a convenção de somatório de Einstein, escrevemos qualquer 1-forma $\omega|_p$ e o mapa (21) que a define como

$$\begin{aligned} \omega|_p &= \omega_a \mathrm{d}x^a|_p,\ \omega_a = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m, \\ \omega[X] &= \omega_a \mathrm{d}x^a \left[X^b \frac{\partial}{\partial x^b} \right] = \omega_a X^b \mathrm{d}x^a \left[\frac{\partial}{\partial x^b} \right] = \omega_a X^b \delta^a_b = \omega_1 X^1 + \ldots + \omega_m X^m. \end{aligned} \tag{23}$$

Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ e seu espaço dual $\mathbb{V}^*$, podemos criar mapas lineares, chamados *tensores*, cujos argumentos são um número arbitrário de vetores e 1-formas.

Definição 2.2.2 (Tensores, Espaços Tensoriais)

Um tensor T de ordem (k, l) num ponto p de uma variedade M é um mapa $T : T^*_p(M)^k \times T_p(M)^l \to \mathbb{R}$ linear em todos os seus $k + l$ argumentos. O conjunto de todos estes tensores é chamado espaço tensorial de ordem (k, l) do ponto p, e é denotado (neste texto) por $T^{k,l}_p(M)$.

Pela definição, vetores e 1-formas são tensores de ordens $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Podemos definir campos tensoriais de forma análoga aos campos vetoriais e de 1-formas, e também os chamaremos apenas de tensores por brevidade. Dadas 1-formas $\omega^1, \ldots, \omega^k$ e vetores $X_1, \ldots, X_l$, a definição de tensores é dada por

$$T[\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l] \equiv \omega^1_{a_1} \ldots \omega^k_{a_k} X^{b_1}_1 \ldots X^{b_l}_l T^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l}, \tag{24}$$

onde $T^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} = T[\mathrm{d}x^{a_1}, \ldots, \mathrm{d}x^{a_k}, \partial/\partial x^{b_1}, \ldots, \partial/\partial x^{b_l}]$ são as *componentes* de T. Os índices superiores e inferiores são chamados, respectivamente, *contravariantes* e *covariantes*.[13]

Há várias operações que podem ser definidas sobre tensores, as mais importantes são definidas abaixo.

Definição 2.2.3 (Soma, Produto Tensorial, Contração, Permutação)
Sejam T e U tensores em $T_p^{k,l}(M)$, Y um tensor em $T_p^{r,s}(M)$ e $a \in \mathbb{R}$.

Definimos a soma e a multiplicação por escalar $W = aT + U \in (k,l)$, o produto tensorial $Z = T \otimes Y \in (k+r, l+s)$, a contração $t \in T_p^{k-1,l-1}(M)$ e a permutação $V \in T_p^{k,l}(M)$ entre o i-ésimo e j-ésimo índices contravariantes por

$$\begin{aligned}
W[\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l] &= aT[\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l] + U[\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l], \\
Z[\omega^1, \ldots, \omega^{k+r}, X_1, \ldots, X_{l+s}] &= T[\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l] Y[\omega^{k+1}, \ldots, \omega^{k+r}, X_{l+1}, \ldots, X_{l+s}], \\
t[\omega^1, \ldots, \omega^k, X_1, \ldots, X_l] &= \sum_{c=1}^{m} T[\ldots, \omega^{i-1}, \mathrm{d}x^c|_p, \omega^{i+1} \ldots, X_{j-1}, \partial/\partial x^c|_p, X_{j+1}, \ldots], \\
V[\ldots, \omega^i, \ldots, \omega^j, \ldots] &= T[\ldots, \omega^j, \ldots, \omega^i, \ldots]. \qquad (25)
\end{aligned}$$

A permutação entre componentes covariantes é definida de forma análoga.

Em termos das componentes estas operações são escritas simplesmente como

$$\begin{aligned}
W^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} &= aT^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} + U^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} \\
Z^{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+l}}_{b_1,\ldots,b_l,b_{l+1},\ldots,b_{l+s}} &= T^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} Y^{a_{k+1},\ldots,a_{k+r}}_{b_{l+1},\ldots,b_{l+s}}, \\
t^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} &= T^{a_1,\ldots,a_{i-1},c,a_{i+1},\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_{j-1},c,b_{j+1}\ldots,b_l}, \\
V^{a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_k}_{\ldots} &= T^{a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_i,\ldots,a_k}_{\ldots}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

A primeira operação implica que $T_p^{k,l}(M)$ é um espaço vetorial de dimensão $(k+l)^m$ sobre os reais. O produto tensorial é distributivo em relação a soma tensorial e comuta com a multiplicação por escalar,[14] mas em geral, não é possível comutar seus argumentos.

Os produtos tensoriais das bases vetorial e dual formam bases para os espaços tensoriais. É fácil mostrar que um tensor $T \in T_p^{k,l}(p)$ pode ser escrito como

$$T = T^{a_1,\ldots,a_k}_{b_1,\ldots,b_l} \left.\frac{\partial}{\partial x^{a_1}}\right|_p \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{a_k}}\right|_p \otimes \mathrm{d}x^{b_1}|_p \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{b_l}|_p. \qquad (27)$$

Um tensor é dito *simétrico*/*antissimétrico* em relação a um conjunto de índices se, ao permutarmos qualquer par de índices do conjunto, o tensor é multiplicado por $1/-1$.

As operações de simetrização e antissimetrização permitem construir tensores com

[13] Eventualmente podemos abreviar algum dos conjuntos de índices escrevendo apenas $\ldots$, quando não forem relevantes.

[14] Por causa desta operação, podemos considerar escalares como tensores de ordem $(0,0)$.

as respectivas propriedades a partir de quaisquer tensores.[15]

Definição 2.2.4 (Simetrização, Antissimetrização)

Seja $T \in T_p^{k,l}(M)$, $I = (i, j, \dots) \in (\mathbb{N}^*)^n$ *um conjunto de* n *números naturais e* $\Pi = \{(\omega^1, \dots, \omega^i, \dots, \omega^j, \dots, \omega^k, X_1 \dots, X_l), (\omega^1, \dots, \omega^j, \dots, \omega^i, \dots, \omega^k, X_1 \dots, X_l), \dots\}$ *o conjunto de todas as permutações das* k *1-formas* $(\omega^1, \dots, \omega^k)$ *nas posições dadas por* I.

A simetrização de T *no conjunto de índices cujas posições são dadas por* I *é o tensor* $S \in T_p^{k,l}(M)$ *dado por*

$$S[\dots, \omega^i, \dots, \omega^j, \dots] = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \Pi} T[P]. \tag{28}$$

Seja σ_P *o sinal da permutação* P*, a antissimetrização de* T *no conjunto de índices cujas posições são dadas por* I *é o tensor* $A \in T_p^{k,l}(M)$ *dado por*

$$A[\dots, \omega^i, \dots, \omega^j, \dots] = \frac{1}{n!} \sum_{P \in \Pi} \sigma_P T[P]. \tag{29}$$

As definições para índices covariantes são análogas.

Em termos de componentes as definições acima são dadas por

$$\begin{aligned} S^{a_1 \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k}_{\dots} &= \frac{1}{n!}(T^{a_1 \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k}_{\dots} + T^{a_1 \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_k}_{\dots} + \dots), \\ A^{a_1 \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k}_{\dots} &= \frac{1}{n!}(T^{a_1 \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_k}_{\dots} - T^{a_1 \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_k}_{\dots} + \dots). \end{aligned} \tag{30}$$

Por praticidade usamos parênteses e colchetes respectivamente para denotar simetrização e antissimetrização de índices, colocando entre linhas verticais, índices que devem ser excluídos da operação. Tensores cujo número de índices antissimetrizados é maior que a dimensão da variedade são identicamente zero.

Todos os tensores e as operações foram definidos de forma independente das coordenadas, portanto segue que as equações tensoriais também são independentes das coordenadas. Se usarmos componentes numa base específica, basta mostrar que elas pertencem a um tensor e sua invariância está garantida. Como há muitas vantagens no uso das componentes em geral usaremos esta notação, salvo algumas exceções específicas.

[15] O tensor identicamente nulo, o único que satisfaz ambas as propriedades, é o resultado se simetrizamos um tensor antissimétrico e/ou vice-versa.

2.3 Mapas entre Variedades Diferenciais

Nesta seção discutiremos mapas entre variedades. Além da importância em si mesmos, eles induzem outros mapas entre espaços tensoriais das variedades e possuem aplicações necessárias aos nossos objetivos.

Definição 2.3.1 (Mapas regulares entre variedades)

Sejam M e N duas variedades diferenciais suaves. O mapa $\Phi : M \to N$ é dito suave se para todas as funções $g \in \mathbb{F}(N, \mathbb{R})$ a função $f = g \circ \Phi : M \to \mathbb{R}$ for suave.

O posto r da transformação num ponto é definido como o posto da matriz jacobiana de F naquele ponto. O mapa é dito regular se seu posto é constante em toda a variedade.

Enquanto o contradomínio N tem dimensão n, a imagem de Φ tem dimensão $r \leq n$, onde r é o posto da transformação. Seja x algum sistema de coordenadas em M e y algum sistema de coordenadas em N. O mapa Φ será denotado apenas por $y = y(x)$, e a função $f = g \circ \Phi$ será escrita como $f(x) = g(y(x))$.

Como Φ mapeia pontos de M em pontos de N, ele também mapeia uma curva θ dada por $x(t)$ em M numa curva θ' dada por $y(x(t))$ em N. Como consequência, vetores tangentes à curva θ são mapeados em vetores tangentes à curva θ'. Analogamente Φ mapeia funções $g \in \mathbb{F}(N, \mathbb{R})$ em funções $g \circ \Phi \in \mathbb{F}(M, \mathbb{R})$. Logo deve haver um mapa entre as diferenciais destas funções. Estes dois mapas são chamados, respectivamente, *push-foward* e *pullback*, e estão definidos abaixo.

Definição 2.3.2 (Push-Foward, Pullback)

Sejam duas variedades M e N, um mapa $\Phi : M \to N$, um ponto $p \in M$, um vetor $X \in T_p(M)$ e uma 1-forma $\omega \in T_p^*(N)$.

O push-foward é o mapa $\Phi_* : T_p(M) \to T_{\Phi(p)}(N)$ definido por

$$(\Phi_* X)_{\Phi(p)} [g] = X_p[g \circ \Phi]. \tag{31}$$

O pullback é o mapa $\Phi^* : T_{\Phi(p)}^*(N) \to T_p^*(M)$ definido por

$$(\Phi^* \omega)|_p[X_p] = \omega|_{\Phi(p)}[(\Phi_* X)_{\Phi(p)}]. \tag{32}$$

Note que o *pullback* Φ^* tem direção oposta ao mapa Φ e o *push-foward* Φ_*. Ambos são transformações lineares. O produto tensorial induz uma generalização óbvia para tensores de ordem maiores. Em termos de componentes estes mapas são escritos como[16]

$$\acute{V}^{a'b'\cdots}(y(x)) = \frac{\partial y^{a'}}{\partial x^a}\frac{\partial y^{b'}}{\partial x^b}\dots V^{ab\cdots}(x), \qquad W_{ab\dots}(x) = \frac{\partial y^{a'}}{\partial x^a}\frac{\partial y^{b'}}{\partial x^b}\dots \acute{W}_{a'b'\dots}(y(x)), \tag{33}$$

onde os índices com linha assumem os valores $1, \dots, n$ e os índices sem linha assumem os valores $1, \dots, m$. O comutador de dois vetores X e Y é mapeado pelo *push-foward* no comutador de suas imagens em N, através de

$$\Phi_*[X, Y] = [\Phi_* X, \Phi_* Y] \iff [\acute{X}, \acute{Y}]^{a'} = \frac{\partial y^{a'}}{\partial x^a}[X, Y]^a. \tag{34}$$

Um mapa regular e bijetivo é chamado *difeomorfismo*.[17] Se as dimensões de M e N são iguais mas o mapa não é bijetivo temos um *difeomorfismo local*, e estes mapas podem ser invertidos localmente. Se $M = N$ temos um *automorfismo*, Φ é um mapa de transição, e podemos generalizar o *push-foward* de Φ e o *pullback* de Φ^{-1} para campos tensoriais de qualquer ordem. Em termos de componentes, temos

$$\acute{T}^{a'\dots}_{b'\dots} = \frac{\partial y^{a'}}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial y^{b'}}\dots T^{a\dots}_{b\dots}. \tag{35}$$

Esta é a conhecida fórmula para calcular as novas componentes de um tensor após trocarmos as coordenadas de x para y.

Outra aplicação de mapas entre variedades é a definição de *fluxo* e do *mapa exponencial de um campo vetorial*, dadas abaixo.

Definição 2.3.3 (Fluxo, Mapa exponencial)

Seja M uma variedade diferenciável, p um ponto em M, X um campo vetorial em M e $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde I é um intervalo aberto, fechado ou semi-aberto de $\mathbb{R}$.

Um fluxo em M é um mapa $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ que satisfaz as propriedades

$$\Phi(t_1 + t_2, p) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, p)) \qquad \text{e} \qquad \Phi(0, p) = p. \tag{36}$$

O mapa exponencial de X, denotado por $\mathrm{e}^{tX}(p)$, é o fluxo que satisfaz a condição

$$X(p) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{tX}(p)\right)\Big|_{t=0}. \tag{37}$$

Para t fixo, o mapa $\Phi_t(p)$ é um automorfismo de M. A definição de fluxo implica

---

[16] Para campos tensoriais o *push-foward* pode não ser bem-definido globalmente. Se o mapa Φ não for injetivo então dois tensores em pontos distintos de M podem ser mapeados no mesmo ponto de N. Ao contrário do *push-foward*, o *pullback* é sempre bem-definido.

[17] Um isomorfismo que preserva a estrutura diferencial da variedade ou seja, preserva a noção de derivação.

que sua composição do fluxo, e que existe um fluxo inverso dado pelo parâmetro $-t$,

$$\Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2} = \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2}, \qquad\qquad \Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}. \tag{38}$$

Para um ponto p fixo, um fluxo descreve uma curva parametrizada por t e portanto um vetor tangente. Considerando todos os pontos em M, o fluxo define um campo vetorial através de

$$X(p)[f] = \frac{\partial}{\partial t} f(\Phi(t,p))\bigg|_{t=0} \quad \forall\ f \in \mathbb{F}(M,\mathbb{R}). \tag{39}$$

Em termos de coordenadas e componentes, escrevemos o fluxo como $x' = x'(t,x)$, e a equação acima é reescrita como

$$X^a(x) = \frac{\partial}{\partial t} x'^a(t,x)\bigg|_{t=0}. \tag{40}$$

O mapa exponencial de X é o fluxo construído a partir de X e pelas observações do parágrafo acima, sua imagem são as curvas integrais de X. Novamente, o teorema de Picard garante uma solução local para o fluxo (ou seja, num intervalo local $I \subset \mathbb{R}$), mas em geral, as curvas não poderão ser estendidas para todos os valores de $\mathbb{R}$.

Enquanto todas as funções de uma variedade são definidas no mesmo espaço $\mathbb{F}(M,\mathbb{R})$, tensores em diferentes pontos p estão definidos em diferentes espaços $T_p^{k,l}(M)$. Logo, não é possível subtrair tensores em pontos diferentes e portanto é impossível definir suas derivadas parciais. Ou seja, precisamos generalizar o conceito de derivação parcial.

A *derivada de Lie* relativa ao campo vetorial X é construída usando os automorfismos dados pelo mapa exponencial de X.

Definição 2.3.4 (Derivada de Lie)

Seja M uma variedade diferenciável, X um campo vetorial, Φ_t seu mapa exponencial e T um campo tensorial, ambos os campos definidos em M.

A derivada de Lie de T em relação ao campo X no ponto P é definida por

$$(\mathcal{L}_X T)|_p = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi_{t*} T|_{\Phi(t,p)}\right)\bigg|_{t=0}. \tag{41}$$

Note que o campo T é inicialmente calculado em $\Phi(P,t)$, mas o *push-foward* o mapeia de volta em P. Lembrando que o fluxo inverso é dado por $x = x(-t,x')$, podemos escrever as componentes do tensor dentro do operador de derivação como

$$T^{a\dots}_{b\dots}(x'(t,x)) = \frac{\partial x^a}{\partial x'^d}(-t,x'(t,x))\frac{\partial x'^e}{\partial x^b}(t,x)\dots \acute{T}^{d\dots}_{e\dots}(x'(t,x)). \tag{42}$$

Derivando em relação ao parâmetro t,

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{a\dots}_{b\dots} = \frac{\partial x'^c}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'^c}\left(\frac{\partial x^a}{\partial x'^d}\right)\frac{\partial x'^e}{\partial x^b}\dots \acute{T}^{d\dots}_{e\dots} + \dots - \frac{\partial}{\partial x'^d}\left(\frac{\partial x^a}{\partial t}\right)\frac{\partial x'^e}{\partial x^b}\dots \acute{T}^{d\dots}_{e\dots} - \dots$$
$$+ \frac{\partial x^a}{\partial x'^d}\frac{\partial}{\partial x^b}\left(\frac{\partial x'^e}{\partial t}\right)\dots \acute{T}^{d\dots}_{e\dots} + \dots + \frac{\partial x^a}{\partial x'^d}\frac{\partial x'^e}{\partial x^b}\frac{\partial x'^c}{\partial t}\dots\frac{\partial}{\partial x'^c}\acute{T}^{d\dots}_{e\dots}. \tag{43}$$

Em $t = 0$, valem

$$x'(0,x) = x' = x(0,x') = x, \qquad \left.\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right|_{t=0} = \delta^a_b,$$
$$\left.\frac{\partial x'^a}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial x^a}{\partial t}\right|_{t=0} = X^a, \qquad \acute{T}^{a\dots}_{b\dots}|_{t=0} = T^{a\dots}_{b\dots}. \tag{44}$$

Logo, a expressão final para a derivada de Lie é

$$(\mathcal{L}_X T)^{a\dots}_{b\dots} = X^c\frac{\partial}{\partial x^c}T^{a\dots}_{b\dots} - \frac{\partial X^a}{\partial x^c}T^{c\dots}_{b\dots} - \dots + \frac{\partial X^c}{\partial x^b}T^{a\dots}_{c\dots} + \dots. \tag{45}$$

Em particular, para uma função escalar e um campo vetorial Y temos

$$\mathcal{L}_X f = X[f],\ \mathcal{L}_X Y = [X,Y]. \tag{46}$$

A derivada de Lie é linear no campo X e, com exceção do produto tensorial, comuta com as operações algébricas da álgebra tensorial. A derivada de Lie do produto tensorial obedece a regra de Leibniz,

$$\mathcal{L}_X(T\otimes W) = (\mathcal{L}_X T)\otimes W + T\otimes(\mathcal{L}_X W). \tag{47}$$

A relação com a derivada parcial é obtida escolhendo um sistema de coordenadas tal que x^1 seja um parâmetro ao longo das curvas integrais de X. Logo $X = \partial/\partial x^1$, $X^a = \delta^a_1$, e nestas coordenadas temos

$$\mathcal{L}_X T^{a\dots}_{b\dots} = \frac{\partial}{\partial x^1}T^{a\dots}_{b\dots}. \tag{48}$$

2.4 **Frames, Coframes e Formas Diferenciais**

Nas seções anteriores estudamos tensores usando bases obtidas naturalmente através dos sistemas de coordenadas. Em muitas circunstâncias teremos interesse em trabalhar em bases mais gerais. Estas bases são chamadas *frames* e *coframes*.[18]

[18] Também conhecidos como referenciais ou, no contexto de Relatividade Geral, tétradas ou *vierbeins*.

Definição 2.4.1 (Frames, Coframes)

Seja $U \in M$ um subconjunto aberto numa variedade diferenciável de dimensão m. Um frame em U é um conjunto ordenado de m campos vetoriais $\{e_1, \ldots, e_m\}$, tal que, os vetores formam bases para os espaços tangentes $T_p(M)$ em todos os pontos $p \in U$.

Um coframe em U é um conjunto ordenado de m campos de 1-formas $\{\omega^1, \ldots, \omega^m\}$, tal que, elas formam bases para os espaços cotangentes $T_p^*(M)$ em todos os pontos $p \in U$.

Frames e *coframes* são ditos duais, se as bases o forem em todos os pontos de U. Por simplicidade, vamos chamar ambos de *frame*, salvo se a distinção for relevante.

Os *frames* formados pelas derivadas parciais de coordenadas são ditos *holônomos*.[19] Na prática, precisamos de um sistema de coordenadas para computarmos tensores, mesmo se trabalhamos com *frames* não-holônomos, então, será útil estudar a relação entre os dois tipos de *frames*. Usaremos letras latinas do meio do alfabeto para diferenciar os índices relativos aos *frames* gerais, dos índices relativos a *frames* holônomos, denotados por letras latinas do começo do alfabeto.

Começamos escrevendo o *frame* e o *coframe* não-holônomos e a condição de dualidade em termos dos correspondentes holônomos,

$$e_i = e_i^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a},\ \omega^i = \omega_a^i(x)\mathrm{d}x^a,\ \omega^i[e_j] = \omega_a^i(x)e_j^a(x) \equiv \delta_j^i. \tag{49}$$

Portanto as componentes dos vetores e das 1-formas podem ser consideradas matrizes inversas. Dado um tensor T qualquer, a relação entre as suas componentes é

$$T_{j\ldots}^{i\ldots} = \omega_a^i(x)\ldots e_j^b(x)\ldots T_{b\ldots}^{a\ldots} \implies T_{b\ldots}^{a\ldots} = e_i^a(x)\ldots \omega_b^j(x)\ldots T_{j\ldots}^{i\ldots}. \tag{50}$$

Junto com os *frames*, temos uma generalização das derivadas parciais, chamadas *derivadas absolutas*, *relativas ao frame ou apenas derivadas do frame*, definidas por

$$\mathrm{D}_i f(x) = e_i[f] = e_i^a(x)\frac{\partial f}{\partial x^a}. \tag{51}$$

Em geral, derivadas absolutas não comutam, mesmo que a função f seja suave. A fórmula para o comutador das derivadas segundas é dada pelo comutador do *frame*,

$$[e_j, e_k]f(x) \equiv \gamma^i{}_{jk}(x)e_i[f(x)] \implies (\mathrm{D}_j\mathrm{D}_k - \mathrm{D}_k\mathrm{D}_j)f(x) = \gamma^i{}_{jk}(x)\mathrm{D}_i f(x), \tag{52}$$

onde os $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ escalares $\gamma^i{}_{jk}(x) = -\gamma^i{}_{kj}(x)$ dos comutadores são chamadas *coeficientes de comutação*, e devem ser considerados se quisermos trocar a ordem das derivadas.

[19] O nome é consequência das curvas integrais (infinitesimais) dos vetores do *frame* serem fechadas.

A expressão explícita para os coeficientes de comutação é dada por

$$\gamma^i{}_{jk}(x) = \omega^i_b \left(e^a_j \frac{\partial e^b_k}{\partial x^a} - e^a_k \frac{\partial e^b_j}{\partial x^a} \right) = -\left(e^a_j e^b_k - e^a_k e^b_j \right) \frac{\partial \omega^i_b}{\partial x^a} = e^a_j \mathrm{D}_k \omega^i_a - e^a_k \mathrm{D}_j \omega^i_a. \tag{53}$$

O comutador entre dois vetores X e Y num *frame* arbitrário é dado por

$$[X, Y]^i = X^l \mathrm{D}_l Y^i - Y^l \mathrm{D}_l X^i + \gamma^i{}_{jk} X^j Y^k. \tag{54}$$

Pela identidade de Jacobi, os coeficientes de comutação obedecem o vínculo diferencial

$$\mathrm{D}_l \gamma^i{}_{jk} + \mathrm{D}_j \gamma^i{}_{kl} + \mathrm{D}_k \gamma^i{}_{lj} + \gamma^i{}_{lm} \gamma^m{}_{jk} + \gamma^i{}_{jm} \gamma^m{}_{kl} + \gamma^i{}_{km} \gamma^m{}_{lj} = 0. \tag{55}$$

Observamos que nem sempre é possível escolher um único *frame* que seja definido em toda a variedade, mas sempre, podemos defini-los na vizinhança de um ponto.

Ainda há uma última derivada que surge naturalmente em variedades diferenciáveis. Esta derivada opera numa sub-álgebra dos espaços tensoriais, a *álgebra exterior* das 1-formas. Os elementos desta obra são chamados *formas diferenciais.*

Definição 2.4.2 (Formas diferenciais)

Uma k-forma diferencial (ou apenas k-forma) é um campo tensorial de ordem $(0, k)$ *totalmente antissimétrico.*

No formalismo de formas diferenciais usamos as operações de soma e multiplicação por escalar, mas em vez do produto tensorial precisamos de uma operação cuja imagem seja tensores totalmente antissimétricos. Esta operação é chamada *produto exterior.*

Definição 2.4.3 (Produto Exterior)

Seja α uma k-forma e β uma l-forma. O produto exterior $\alpha \wedge \beta$ é a $(k + l)$-forma γ definida por

$$\gamma[v_1, \ldots, v_{k+l}] = \frac{k!l!}{(k + l)!} \sum_{P \in \Pi} \sigma_P (\alpha \otimes \beta)[P], \tag{56}$$

onde Π *é o conjunto de todas as permutações de* $(v_1, \ldots, v_{k+l})$, *P é uma destas permutações e σ_P o sinal desta permutação.*

O produto exterior é associativo, comuta com a multiplicação por escalares (que são considerados 0-formas) e é distributivo em relação à soma de formas. Quanto à comutatividade, o produto exterior entre uma k-forma α e uma l-forma β obedece a propriedade

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha, \tag{57}$$

ou seja, duas formas de ordem ímpar anti-comutam, de outra forma elas comutam. Em particular, o produto exterior de uma forma ímpar e si mesma é identicamente zero.

Pela antissimetria, todas as k-formas são zero se $k > \dim(M)$. Este resultado é um caso particular de um propriedade mais geral: o produto exterior entre um conjunto de 1-formas é zero se e somente se o conjunto de 1-formas é linearmente dependente.

Como o produto exterior é construído através do produto tensorial e a soma de tensores, ele é invariante ao *pullback*: $\Phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\Phi^*\alpha) \wedge (\Phi^*\beta)$.

Dada uma função escalar f, sabemos como definir sua diferencial $\mathrm{d}f$. Queremos estender este operador, chamado *derivada exterior*, para formas de qualquer ordem. Poderíamos definir este operador tomando suas propriedades como axiomas, mas preferimos uma abordagem mais prática. Começamos escrevendo uma k-forma α em termos de suas componentes num *frame* holônomo,

$$\alpha = \alpha_{a_1 \ldots a_k} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{a_k}. \tag{58}$$

Em termos destas componentes, o produto exterior é escrito como

$$\begin{aligned}\gamma_{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_{k+l}} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{a_{k+l}} &= \alpha_{a_1 \ldots a_k} \beta_{a_{k+1} \ldots a_{k+l}} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{a_{k+l}} \\ &= \alpha_{[a_1 \ldots a_k} \beta_{a_{k+1} \ldots a_{k+l}]} \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{a_{k+l}}.\end{aligned} \tag{59}$$

A *derivada exterior* de α é a $(k+1)$-forma cujas componentes são

$$\mathrm{d}\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^b} \alpha_{a_1 \ldots a_k} \right) \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{a_k}. \tag{60}$$

Como consequência da definição uma segunda aplicação do operador d é identicamente zero. Esta propriedade é chamada *Lema de Poincaré*, e pode ser demonstrada por

$$\mathrm{d}^2\alpha = \partial_{[c} \partial_b \alpha_{a_1 \ldots a_k]} \mathrm{d}x^b \wedge \mathrm{d}x^{a_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{a_k} \equiv 0 \Longleftrightarrow \mathrm{d}^2 \equiv 0. \tag{61}$$

Exploraremos seu significado ao final desta seção.

Em geral derivadas parciais de tensores não são tensores, mas a combinação acima é uma exceção. Vamos mostrar que esta derivada é invariante ao *pullback* de $x = x(y)$,

$$\begin{aligned}\Phi^*(\mathrm{d}\alpha) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^b} \alpha_{a_1 \ldots a_k}(x(y)) \right) \frac{\partial x^b}{\partial y^{d'}} \mathrm{d}y^{d'} \wedge \frac{\partial x^{a_1}}{\partial y^{c'_1}} \mathrm{d}y^{c'_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial x^{a_k}}{\partial y^{c'_k}} \mathrm{d}y^{c'_k} \\ &= \left(\frac{\partial x^b}{\partial y^d} \frac{\partial x^{a_1}}{\partial y^{c'_1}} \cdots \frac{\partial x^{a_k}}{\partial y^{c'_k}} \frac{\partial}{\partial x^b} \alpha_{a_1 \ldots a_k}(x(y)) \right) \mathrm{d}y^{d'} \wedge \mathrm{d}y^{c'_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{c'_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial y^{d'}} \left(\frac{\partial x^{a_1}}{\partial y^{c'_1}} \cdots \frac{\partial x^{a_k}}{\partial y^{c'_k}} \alpha_{a_1 \ldots a_k}(x(y)) \right) \mathrm{d}y^{d'} \wedge \mathrm{d}y^{c'_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{c'_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial y^{d'}} \left(\alpha'_{c'_1 \ldots c'_k}(y) \right) \mathrm{d}y^{d'} \wedge \mathrm{d}y^{c'_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y^{c'_k},\end{aligned} \tag{62}$$

onde usamos a comutação das derivadas segundas para obter a penúltima linha,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^{d'}}\frac{\partial x^a}{\partial y^{c'}}\right)\mathrm{d}y^{d'}\wedge\mathrm{d}y^{c'}=\frac{\partial^2 x^a}{\partial y^{d'}\partial y^{c'}}\equiv 0. \tag{63}$$

Portanto o operador d é invariante ao *pullback*

$$\mathrm{d}(\Phi^*\alpha)=\Phi^*(\mathrm{d}\alpha), \tag{64}$$

o que garante que sempre temos o mesmo tensor em diferentes sistemas de coordenadas.

É fácil mostrar que a derivada exterior de uma soma de formas é igual a soma das derivadas, e o mesmo vale para a multiplicação por uma constante escalar. A derivação exterior obedece uma versão modificada da regra de Leibniz. Seja α uma k-forma e β outra forma diferencial, a derivada do produto exterior vale

$$\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=(\mathrm{d}\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge(\mathrm{d}\beta). \tag{65}$$

Como exemplo desta propriedade, se α e β são duas 1-formas temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta)=\mathrm{d}\left(\alpha_a\beta_b\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b\right)&=\left(\frac{\partial\alpha_a}{\partial x^c}\beta_b+\alpha_a\frac{\partial\beta_b}{\partial x^c}\right)\mathrm{d}x^c\wedge\mathrm{d}x^a\wedge\mathrm{d}x^b\\&=\left(\frac{\partial\alpha_a}{\partial x^c}\mathrm{d}x^c\wedge\mathrm{d}x^a\right)\wedge(\beta_b\mathrm{d}x^b)-(\alpha\mathrm{d}x^a)\wedge\left(\frac{\partial\beta_b}{\partial x^c}\mathrm{d}x^c\wedge\mathrm{d}x^b\right)\\&=\mathrm{d}\alpha\wedge\beta-\alpha\wedge\mathrm{d}\beta.\end{aligned} \tag{66}$$

Por enquanto trabalhamos apenas em *coframe* holônomos, mas como formas diferenciais são tensores podemos estuda-las em *coframes* arbitrários. Na verdade, o uso do cálculo de formas num *coframe* qualquer é crucial para os resultados deste trabalho.

Sejam ω^i as formas de um *coframe* qualquer, uma k-forma pode ser escrita como,

$$\alpha=\alpha_{a_1\ldots a_k}(e^{a_1}_{i_1}\omega^{i_1})\wedge\ldots\wedge(e^{a_k}_{i_k}\omega^{i_k})=\left(e^{a_1}_{i_1}\ldots e^{a_k}_{i_k}\alpha_{a_1\ldots a_k}\right)\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_k}, \tag{67}$$

ou seja, a transformação usual das componentes. A diferencial de uma função f vale

$$\mathrm{d}f=(e^a_i\partial_a f)\,\omega^i\equiv e_i[f]\omega^i=(\mathrm{D}_i f)\omega^i. \tag{68}$$

As componentes da diferencial neste *coframe* são as derivadas relativas ao *frame* de f.

Para as derivadas exteriores de um *coframe* arbitrário, vale

$$\mathrm{d}\omega^i=\mathrm{d}(\omega^i_a\mathrm{d}x^a)=\frac{\partial\omega^i_a}{\partial x^b}\mathrm{d}x^b\wedge\mathrm{d}x^a=e^b_je^a_k\frac{\partial\omega^i_a}{\partial x^b}\omega^j\wedge\omega^k\implies\mathrm{d}\omega^i=-\tfrac{1}{2}\gamma^i{}_{jk}(x)\omega^j\wedge\omega^k. \tag{69}$$

As equações acima são chamadas *equações de estrutura do coframe* e os coeficientes são chamados *coeficientes de estrutura* ou *funções de estrutura*. Note que os coeficientes de estrutura são o negativo dos coeficientes de comutação do *frame*.[20]

Devemos considerar as derivadas exteriores do *coframe* ao calcular as derivadas exteriores de uma forma qualquer. Como exemplo, a derivada exterior de uma 1-forma α num *coframe* arbitrário vale

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(\alpha_i\omega^i) = (\mathrm{D}_j\alpha_i)\omega^j \wedge \omega^i + \alpha_i\left(-\tfrac{1}{2}\gamma^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k\right) = \left(\mathrm{D}_j\alpha_k - \tfrac{1}{2}\gamma^i{}_{jk}\alpha_i\right)\omega^j \wedge \omega^k. \tag{70}$$

Voltamos agora às consequências do lema de Poincaré. Uma forma diferencial α é dita *fechada* se sua derivada exterior é zero, $\mathrm{d}\alpha = 0$, enquanto uma forma diferencial β é chamada *exata*, se ela é a derivada exterior de outra forma diferencial, $\beta = \mathrm{d}\theta$.

Como consequência do Lema de Poincaré, toda forma exata é uma forma fechada. Por outro lado a forma potencial θ na definição de uma forma exata não é única, pois a derivada exterior de $\theta + \mathrm{d}\phi$ também será β.

Resta uma questão: toda forma fechada também é uma forma exata? A resposta depende da topologia da variedade. Se a variedade for simplesmente conexa a resposta para a pergunta é positiva. Do contrário é possível existir formas fechadas não-exatas, mas ainda existem formas potenciais “locais”, ou seja, bem-definidas apenas numa subconjunto aberto de M. Por exemplo, a 1-forma fechada

$$\omega = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}, \tag{71}$$

é suave em toda a variedade $M = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, mas não há função escalar θ tal que $\omega = d\theta$ seja válida em toda variedade. A função $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ (ângulo polar) satisfaz $\omega = \mathrm{d}\theta$ localmente, mas ela não é suave em toda a variedade M.[21]

2.5 Grupos de Lie

Nesta seção estudaremos um tipo importante de variedade, os *grupos de Lie*. A importância destes grupos é por sua relação com a ideia de simetria num contínuo. Eles não terão papel tão proeminente neste texto, sendo usados apenas para interpretar a ausência de certos invariantes numa variedade. Por outro lado, os nossos resultados terão implicações sobre os grupos de simetria dos tensores métricos.

Começaremos com a definição de Grupo de Lie e a principal aplicação para a

---

[20] O lema de Poincaré $\mathrm{d}^2 f = 0$ agora reflete as relações de comutação das derivadas relativas ao *frame*. Aplicando-o às formas do *coframe*, $\mathrm{d}^2\omega^i = 0$, resulta nos vínculos das identidades de Jacobi.

[21] Por outro lado, se esta forma for definida em $\mathbb{R}^2$ ela não é suave em toda a variedade pois não é bem-definida em $x = y = 0$.

Geometria Diferencial, a *ação de um grupo sobre uma variedade.*

Definição 2.5.1 (Grupo de Lie, Subgrupo de Lie, Ação de um Grupo)

Um grupo de Lie suave $\mathbb{G}$ *é uma variedade diferenciável suave, munida de uma operação que satisfaz os axiomas de grupo, tal que a multiplicação* $(a, b) \to ab$ *e a inversão* $a \to a^{-1}$ *sejam mapas suaves.*

Um subgrupo $\mathbb{G}_0 \subset \mathbb{G}$ *é um subgrupo de Lie se houver um homomorfismo injetivo regular* $H : \mathbb{G}_* \to \mathbb{G}_0$*, onde* $\mathbb{G}_*$ *é um grupo de Lie.*

O subconjunto de $\mathbb{G}$ *conexo com a identidade,* $\mathbb{G}_e$*, é um subgrupo de Lie.*

Seja M *uma variedade diferenciável. Uma ação de* $\mathbb{G}$ *sobre a variedade* M *é um mapa suave* $\Phi : \mathbb{G} \times M \to M$ *e denotado por* $\Phi(a, p) = a \cdot p$*, que satisfaz*

$$e \cdot p = p \quad \text{e} \quad (ab) \cdot p = a \cdot (b \cdot p). \tag{72}$$

Quando trabalhamos com estes mapas, dizemos que o grupo de transformação $\mathbb{G}$ age sobre a variedade M através da ação dada por Φ.[22] Doravante, omitiremos referências diretas ao mapa Φ sempre que não houver ambiguidades.

Embora usemos toda a variedade M e todo o grupo $\mathbb{G}$ na definição de grupo de transformação, na prática podemos definir Φ apenas no entorno da identidade e, e impomos as condições (72) apenas onde elas forem bem-definidas. A segunda equação em (72) mostra que a^{-1} determina a inversa da transformação de a,

$$a^{-1} \cdot (a \cdot p) = (a^{-1}a) \cdot p = e \cdot p = p. \tag{73}$$

Portanto, para cada $a \in \mathbb{G}$ fixo, a ação do grupo define um automorfismo $\Phi_a : M \to M$.

Na prática, as ações serão representadas por matrizes que servirão como operadores lineares de algum espaço vetorial. Por exemplo, o *grupo geral real de ordem* n, $GL(\mathbb{R}, n)$, pode ser representado pelo conjunto de todas as matrizes quadradas inversíveis de ordem n com o produto matricial, e sua ação sobre $\mathbb{R}^n$ será dada por

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n{}_1 & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{74}$$

O subgrupo conexo com a identidade é o subgrupo de matrizes com determinante positivo. Subgrupos podem ser obtidos limitando os valores dos elementos da matriz de transformação, por exemplo usando uma matriz triangular, ou com linhas e/ou colunas nulas.

A ação de $\mathbb{G}$ sobre M define um subgrupo de Lie em cada ponto p da variedade,

[22] Note que há muitas ações possíveis para um mesmo par $(\mathbb{G}, M)$.

chamado *grupo de isotropia.*

Definição 2.5.2 (Grupos de Isotropia)

Seja M uma variedade diferenciável, $\mathbb{G}$ um grupo e $a \cdot p$ uma ação de $\mathbb{G}$ em M. O grupo de isotropia $\mathbb{G}_p$ de um ponto p é o subgrupo de $\mathbb{G}$ que mantém p fixo,

$$\mathbb{G}_p = \{a \mid \ a \cdot p = p\}. \tag{75}$$

O grupo de isotropia global $\mathbb{G}_M$ é o subgrupo de $\mathbb{G}$ que mantém todos os pontos fixos,[23]

$$\mathbb{G}_M = \{a \mid \ a \cdot p = p \ \forall \ p \in M\}. \tag{76}$$

O grupo de isotropia de um ponto é um subgrupo de Lie, e pode ser considerado o subgrupo de simetria do ponto.

Um subconjunto $S \subset M$ é $\mathbb{G}$-*invariante* à ação do grupo se $p \in S \implies a \cdot p \in S$. Uma *órbita de* $\mathbb{G}$ é um subconjunto $\mathbb{G}$-invariante minimal não-vazio. A órbita de um ponto p é o conjunto $\mathcal{O}_p$ de todas as imagens de p sob a ação de G

$$\mathcal{O}_p = \{a \cdot p \mid \ a \in \mathbb{G}\}. \tag{77}$$

Se o grupo é conexo, então, as órbitas são conexas. Claramente qualquer subconjunto $\mathbb{G}$-invariante é a união das órbitas de $\mathbb{G}$.

A ação de um grupo é *semi-regular* se suas órbitas possuem a mesma dimensão e *regular*, se além desta condição todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança arbitrariamente pequena tal que sua intersecção com cada órbita seja um subconjunto conexo. Nestes casos há coordenadas (locais) privilegiadas para as órbitas, chamadas *coordenadas retificadoras.*

Teorema 2.5.1 (Coordenadas Retificadoras)

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie que age regularmente numa variedade M de dimensão m, e cujas órbitas possuem dimensão r. Então no entorno de cada ponto de M existe um sistema local de coordenadas $x = (t, u) = (t^1, \ldots, t^r, u^1, \ldots, u^{m-r})$, tal que qualquer órbita intersecciona no máximo uma r-superfície dada por $u^1, \ldots, u^{m-r}$ constantes.

Posto de outra forma, nestas coordenadas as órbitas são determinadas pelas equações $u^1 - c^1 = \ldots = u^{m-r} - c^{m-r} = 0$ e $c^1, \ldots, c^{m-r}$ são constantes. A prova deste teorema pode ser encontrada no capítulo 14 de (OLVER, 1995).

O conceito de órbita é relacionado com a ideia de *invariante* de um grupo.

Definição 2.5.3 (Invariante da Ação de um Grupo)

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie agindo numa variedade M. Um invariante I de $\mathbb{G}$ é uma função $I : M \to \mathbb{R}$ que satisfaz $I(a \cdot p) = I(p) \ \forall \ a \in \mathbb{G}$.

[23] O grupo de isotropia global também é a intersecção dos grupos de isotropia de todos os pontos.

Como consequência da definição acima I é constante ao longo das órbitas de $\mathbb{G}$, e as hipersuperfícies $I(p) = c$, c constante, são $\mathbb{G}$-invariantes. Se $I_1(p), \ldots, I_{m-r}(p)$ são invariantes então qualquer função $H(I_1(p), \ldots, I_{m-r}(p))$ também é invariante, e basta procurar um conjunto mínimo de invariantes para obter todos eles. Em geral não é possível encontrar invariantes bem-definidos em toda a variedade M, mas podemos definir *invariantes locais*, cuja quantidade é determinada pela dimensão das órbitas de $\mathbb{G}$.

Definição 2.5.4 (Invariante Local, Invariante Global)

Seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie que age numa variedade M. Uma função I definida num subconjunto aberto $U \subset M$ é chamada invariante local se $I(a \cdot p) = I(p)\ \forall\ p \in M$ e para todo $a \in G_p$, sendo $G_p \subset \mathbb{G}$ uma vizinhança da identidade (que pode depender de p).

Se $I(a \cdot p) = I(p)\ \forall\ (a, p) \in \mathbb{G} \times U$ então I é dito ser um invariante global de $\mathbb{G}$ (mesmo não sendo necessariamente definido em toda a variedade M).

A solução para os invariantes locais é dada pelas coordenadas retificadoras: se a ação é semi-regular e as órbitas possuem dimensão r então todo invariante local I pode ser escrito como função das $m - r$ coordenadas $u^1, \ldots, u^{m-r}$ que definem um subconjunto invariante; se a ação for regular, então estes invariantes são globais e dois pontos estão na mesma órbita se e somente se todos os invariantes possuem o mesmo valor.[24]

Além de funções, há outros objetos invariantes às ações dos grupos. O mais importante são os campos vetoriais, também conhecidos como *geradores do grupo*.

Definição 2.5.5 (Campo Vetorial $\mathbb{G}$-Invariante)

Seja $\mathbb{G}$ um grupo que age numa variedade M. Um campo vetorial V em M é dito $\mathbb{G}$-invariante se não for modificado pela ação de qualquer elemento do grupo

$$\Phi_{a*}[V|_p] = V|_{a\cdot p}\ \forall\ (a, p) \in \mathbb{G} \times M \mid\ \exists\ a \cdot p. \tag{78}$$

Considere as ações dadas pelas multiplicações pela esquerda, $L_a : b \mapsto ab$, e pela direita, $R_a : b \mapsto ba$. Um campo vetorial é dito *invariante à esquerda ou invariante à direita* se for invariante ao respectivo mapa. O conjunto dos campos invariantes à esquerda e à direita são chamados *Álgebra de Lie à esquerda* e *Álgebra de Lie à direita* de $\mathbb{G}$.

As Álgebras de Lie formam um espaço vetorial, pois os valores dos campos invariantes em cada ponto de $\mathbb{G}$ são completamente determinados pelo valor que eles assumem na identidade: $V_R|_a = R_{a*}V|_e$ e $V_L|_a = L_{a*}V|_e$. Portanto as Álgebras de Lie são isomorfas ao espaço vetorial tangente $T_e(\mathbb{G})$ e possuem a mesma dimensão s de $\mathbb{G}$.

Como o comutador entre campos vetoriais é invariante ao *push-foward* o comutador entre dois campos invariantes também será invariante. O comutador entre dois campos

[24] Este resultado não garante a existência de invariantes bem-definidos em toda variedade M, e nada diz sobre invariantes discretos.

invariantes é mapeado em uma nova operação na Álgebra de Lie, os *colchetes de Lie*, que permite definir estas álgebras de forma independente dos grupos.

Definição 2.5.6 (Álgebra de Lie)

Uma Álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ *munido de um mapa bilinear antissimétrico* $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*, os colchetes de Lie, que satisfaz a identidade de Jacobi,*

$$[V,[W,Z]] + [W,[Z,V]] + [Z,[V,W]] \equiv 0. \tag{79}$$

Seja $v_1, \ldots, v_s$ uma base para alguma Álgebra de Lie (e portanto um *frame* invariante em $\mathbb{G}$), então os comutadores são escritos como

$$[v_\mu, v_\gamma] = C^\lambda{}_{\mu\gamma} v_\lambda, \quad C^\lambda{}_{\mu\nu} = -C^\lambda{}_{\nu\mu}, \quad C^\lambda{}_{\kappa\rho} C^\rho{}_{\mu\nu} + C^\lambda{}_{\mu\rho} C^\rho{}_{\nu\kappa} + C^\lambda{}_{\nu\rho} C^\rho{}_{\kappa\mu} = 0, \tag{80}$$

onde os $\frac{1}{2}s^2(s-1)$ coeficientes são chamados *constantes de estrutura*. Um conjunto de constantes que satisfazem as equações acima determina uma única Álgebra de Lie.[25] Por outro lado é possível mostrar que a Álgebra de Lie determina completamente um grupo de Lie conexo através dos mapas exponenciais dos vetores invariantes à direita

$$a = \mathrm{e}^{t^1 v_1} \cdots \mathrm{e}^{t^r v_r} e = \mathrm{e}^{t^\lambda v_\lambda} e \equiv \mathrm{e}^{t^\lambda v_\lambda}, \tag{81}$$

onde a notação acima pode representar tanto o mapa exponencial que age sobre e quanto o elemento a.

Todos os grupos com a mesma Álgebra de Lie são localmente idênticos, mas podem diferir globalmente.[26] Por causa destes resultados (e o isomorfismo entre as duas Álgebras de Lie) de agora em diante, trabalharemos com a Álgebra de Lie à direita do grupo, salvo indicado o contrário.

Voltemos agora a ações de grupos sobre quaisquer variedades, e em particular de seus subgrupos conexos com a identidade e. Seja $v \in \mathfrak{g}$ um vetor da Álgebra de Lie e e^{tv} seu mapa exponencial. A ação do grupo define um campo vetorial $\widehat{v}(p)$ em M dado por

$$\widehat{v}(p) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{tv} \cdot p\right)\bigg|_{t=0}. \tag{82}$$

Estes campos são chamados *geradores infinitesimais da ação do grupo*.

Como o *push-foward* preserva o comutador, e portanto o colchete de Lie, o resultado do mapa acima é outra Álgebra de Lie, não necessariamente isomorfa, mas certamente homomorfa à $\mathfrak{g}$. O homomorfismo é uma consequência da possibilidade deste mapa entre

[25] Obviamente o inverso não é verdade pois o valor das constantes depende da base escolhida.

[26] Ou seja, são homomorfos ao grupo de Lie conexo com a correspondente Álgebra.

espaços vetoriais possuir um núcleo,[27] que é formado pelos geradores do subgrupo de isotropia global de $\mathbb{G}_M$. Supondo $\mathbb{G}_M = \{e\}$, não precisaremos distinguir entre os geradores do grupo e da ação. Como o grupo de isotropia global não tem nenhum efeito sobre os pontos da variedade, podemos adotar a hipótese $\mathbb{G}_M = \{e\}$ sem nenhum prejuízo.

Por fim, vale ressaltar que podemos reconstruir a ação local de $\mathbb{G}_e$ sobre M usando estes geradores, de forma análoga ao que foi feito com a ação da multiplicação de $\mathbb{G}$.

Escolhendo uma base v_α para os geradores do grupo, um tensor T é invariante à ação local do grupo se

$$\mathcal{L}_{v_\lambda} T = 0 \ \forall \ 1 \leq \lambda \ \leq s. \tag{83}$$

Particularmente importante para este trabalho, são as 1-formas invariantes à multiplicação do grupo pela direita, R_a. Estas formas são chamadas *formas de Maurer-Cartan* [28], α^μ, e são definidas pela equação

$$R_a^* \alpha^\mu = \alpha^\mu. \tag{84}$$

As formas de Maurer-Cartan formam um espaço-dual à Álgebra de Lie, e portanto formam um espaço vetorial de dimensão s. Escolhendo uma base neste espaço obtemos um *coframe* invariante em $\mathbb{G}$, cujas equações de estrutura são dadas por

$$\mathrm{d}\alpha^\lambda = -\tfrac{1}{2} C^\lambda{}_{\mu\nu} \alpha^\mu \wedge \alpha^\nu. \tag{85}$$

Em vez de calcular a base dual à Álgebra de Lie, há outra forma mais simples de encontrar o *coframe* de Maurer-Cartan. Se o grupo é representada pela matriz $g = g(a)$, um método prático de calcular estas formas é pela fórmula

$$\mathrm{d}g \cdot g^{-1} = A_\mu \alpha^\mu, \tag{86}$$

onde A_μ são matrizes cujos elementos são constantes. Para provar a invariância, seja $h = h(b)$ e considere

$$R_b^*(\mathrm{d}g \cdot g^{-1}) = \mathrm{d}(g \cdot h) \cdot (g \cdot h)^{-1} = ((\mathrm{d}g) \cdot h) \cdot (h^{-1} \cdot g^{-1}) = \mathrm{d}g \cdot g^{-1}. \tag{87}$$

Portanto os elementos de $\mathrm{d}g \cdot g^{-1}$ são combinações lineares das formas de Maurer-Cartan, e os elementos das matrizes A_μ devem ser constantes.

[27] Em inglês, *kernel*: um sub-espaço vetorial que é mapeado no vetor nulo.

[28] Também há formas de Maurer-Cartan definidas pela multiplicação do grupo à esquerda, mas não serão usadas neste texto.

2.6 Fibrados

Encerramos este capítulo explicando brevemente a teoria dos fibrados diferenciáveis, que será necessária para a formulação das soluções do problema de equivalência. A teoria completa é muito extensa para discutir nesta tese, portanto vamos nos ater apenas ao essencial para nossos propósitos.

Um estudo mais completa do assunto pode ser encontrado nos textos de Johannesen (JOHANNESEN, 2016), no qual se baseia a maior parte desta seção; Nakahara (NAKAHARA, 2003), cujo livro adota uma abordagem mais aplicada, além dos dois volumes de Kobayashi e Nomizu (KOBAYASHI; NOMIZU, 1963a), (KOBAYASHI; NOMIZU, 1963b), que faz um estudo extenso do assunto.

Definição 2.6.1 (Fibrado Diferenciável, Trivialização, Funções de Transição) *Sejam M e F duas variedades diferenciáveis, $\mathbb{G}$ um grupo de Lie, G uma ação de $\mathbb{G}$ em F pela esquerda, e $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M.*

Uma variedade diferenciável E é chamada um fibrado sobre M com fibra F e grupo de estrutura G se satisfizer as seguintes condições:

1. *Existe um mapa sobrejetivo $\pi : E \to M$, chamado projeção do espaço total E para a variedade base M. Seja p um ponto em M, a imagem inversa $F_p = \pi^{-1}(p)$ é chamada fibra sobre p;*

2. *Seja $U \in \mathcal{U}$ e $p \in U$. Existe um família $\mathcal{F}$ de difeomorfismos $t : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ que satisfazem $\pi \circ t^{-1}(p, v) = p$, chamados trivializações locais;*

3. *Duas trivializações t e t' devem ser G-relacionadas, ou seja, deve existir um mapa $\phi : p \to G$, chamado mapa de transição, tal que*

$$t' \circ t^{-1}(p, v) = (p, \phi(p) \cdot v) \;\forall\; p \in U \cap U'; \tag{88}$$

4. *A família $\mathcal{F}$ é maximal, no sentido que se t é G-relacionado a todas as trivializações locais em $\mathcal{F}$, então $t \in \mathcal{F}$.*

A família $\mathcal{F}$ é chamada *estrutura de fibrado* em E, e é única. O mapa $t_p^{-1} : F \to F_p$ definido por $t_p^{-1}(v) = t^{-1}(p, v)$ é um difeomorfismo, e portanto as fibras F_p sobre cada ponto são difeomorfas à fibra F (o que justifica nossa notação para as fibras). Obviamente o mapa inverso a t_p^{-1} será descrito por $t_p : F_p \to F$.

Denotaremos um fibrado escrevendo-o como um quíntupla (E, π, M, F, G). Em termos simples, um fibrado é uma variedade que pode ser localmente decomposta no produto $M \times F$, mas que globalmente pode ser muito diferente deste produto. Um fibrado que admite uma decomposição global, $E = M \times F$, é chamado *fibrado trivial.*

Considere $U_A, U_B, \ldots$, elementos de uma cobertura com interseções não-vazias, e p um ponto nestas interseções. Com as observações do parágrafo anterior o mapa de transição ϕ_{AB} de uma trivialização definida em $\pi^{-1}(U_B)$ para uma definida em $\pi^{-1}(U_A)$ no ponto p é dado por

$$\phi_{AB}(p) = t_{A,p} \circ t_{B,p}^{-1}. \tag{89}$$

Os mapas de transição devem satisfazer as seguintes condições de consistência

$$\phi_{AB}(p) = \phi_{AC}(p) \cdot \phi_{CB}(p), \qquad \phi_{AA}(p) = e, \qquad \phi_{BA}(p) = \phi_{AB}(p)^{-1}. \tag{90}$$

O exemplo mais simples de fibrados não-triviais são chamados *fibrados vetoriais*, onde as fibras são um espaço vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão n. Neste caso o grupo de estrutura é um subgrupo do grupo linear geral $GL(\mathbb{R}, n)$ e a ação G é dada por

$$(v_A)^{i'} = (T_{AB})^{i'}{}_{j'}(p)(v_B)^{j'}, \text{ onde } i', j' = 1, \ldots, n. \tag{91}$$

Os fibrados tangentes, cotangentes e tensoriais são casos particulares de fibrados vetoriais. Sejam U_A, U_B dois subconjuntos abertos com interseção não-vazia, e x, y dois sistemas de coordenadas definidos respectivamente em cada subconjunto. Então os mapas de transição destes fibrados são a matriz jacobiana, sua inversa, e os produtos externos entre elas.

Outra ideia importante na teoria dos fibrados é a definição de *seções*.

Definição 2.6.2 (Seção, Seção Local)

Seja (E, π, M, F, G) um fibrado. Uma seção de E é um mapa $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = id_M$. O conjunto de todas as seções é denotado por $\Gamma(M, F)$.

Uma seção local satisfaz a condição acima, mas seu domínio é uma vizinhança U de um ponto. O conjunto de todas as seções locais em U é denotado por $\Gamma(U, F)$.

Em geral, não é possível definir seções globais num fibrado, mas sempre podemos definir seções locais. As seções são generalizações dos campos definidos numa variedade. Em particular, os campos tensoriais são as seções dos fibrados tensoriais.

Um *frame* num subconjunto aberto U pode ser definido como $n = \dim(\mathbb{V})$ seções linearmente independentes que geram a fibra do fibrado vetorial. Novamente, em geral não é possível definir um *frame* em toda a variedade base, apenas numa vizinhança de um ponto.

Um tipo de fibrado particularmente importante é aquele cuja fibra coincide com seu grupo de estrutura.

Definição 2.6.3 (Fibrado Principal)

Um fibrado é dito ser um fibrado principal se suas fibras são idênticas ao grupo de estrutura. Denotamos um fibrado principal por $P(M, \mathbb{G})$.

Além da ação sobre as fibras pela esquerda, um fibrado principal naturalmente vem equipada com uma multiplicação pela direita, induzida pela operação do grupo. Como as ações pela esquerda e direita comutam, a ação pela direita é independente da trivialização local. Se $u \in P(M, G)$, explicitamente temos

$$u \equiv t_A^{-1}(p, b_A \cdot a) = t_A^{-1}(p, \phi_{AB}(p) \cdot b_B \cdot a) = t_B^{-1}(p, b_B \cdot a). \tag{92}$$

Como consequência da definição da ação pela direita sobre o fibrado, temos $\pi(u \cdot a) = \pi(u)$. Por outro lado, por definição a fibra $\pi^{-1}(u)$ é difeomorfa ao grupo. Portanto toda a fibra pode ser construída pela ação a direita, $\pi^{-1}(u) = \{u \cdot a \mid a \in \mathbb{G}\}$.

Um tipo particularmente importante de fibrado principal para esta tese são os chamados *fibrados de frames*.[29]

Definição 2.6.4 (Fibrado de Frames)

Considere o fibrado vetorial $(E, \pi, M, \mathbb{V}, G)$ cuja ação do grupo de transição é dada por $G = GL(\mathbb{R}, n)$. Seja $L(\mathbb{V})$ o conjunto de todas as transformações lineares $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. A união das transformações lineares $L(\mathbb{V}_p)$ de todas as fibras $\mathbb{V}_p$,

$$L(E) = \bigcup_{p \in M} L(\mathbb{V}_p), \tag{93}$$

é um fibrado principal de $GL(\mathbb{R}, n)$ com variedade base M, chamado fibrado de frames.

Em particular, o fibrado de *frames* do fibrado tangente $T(M)$ é chamado apenas de fibrado de *frames* de M, e denotado por $L(M)$. Em termos simplificados, um fibrado de *frames* nos dá uma descrição contínua de de todos os possíveis *frames* na vizinhança de um ponto $p \in M$.

Na prática, o conjunto de todos os *frames* é geral demais para nossos propósitos. Precisamos de um grupo mais restrito de *frames*, dado abaixo.

Definição 2.6.5 (Fibrado Ortonormal)

Considere um fibrado vetorial $(E, \pi, M, \mathbb{V}, G)$ cuja ação do grupo de transição é dada por matrizes ortogonais $G = O(\mathbb{R}, k, l), k + l = n$. Seja $\Lambda(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares ortogonais $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. A união das transformações ortogonais $\Lambda(\mathbb{V}_p)$ de todas as fibras $\mathbb{V}_p$,

$$\Lambda(E) = \bigcup_{p \in M} \Lambda(\mathbb{V}_p), \tag{94}$$

é um fibrado principal de $O(\mathbb{R}, k, l)$ com variedade base M, chamado fibrado ortonormal.

[29] Também chamados fibrados de referenciais ou fibrados de base. Usaremos fibrados de *frames* nesta tese para preservar a consistência com o resto do texto.

3 GEOMETRIAS MÉTRICAS

Neste capítulo vamos estudar dois tipos de geometrias baseadas no tensor métrico, as geometrias riemannianas e de Weyl. Como o problema de determinar se dois tensores métricos são conformalmente relacionados é o objeto de estudo desta tese, o conhecimento destas geometrias é vital para este trabalho.

O material das quatro primeiras seções é adaptado da dissertação do autor (SOUZA, 2014) e dos textos de Stewart, (STEWART, 1991) e Wald, (WALD, 1984). A última seção é dedicada a geometria de Weyl. Dois resumos históricos das aplicações desta geometria na Física podem ser encontradas nos artigos de Schoutz (SCHOLZ, 2011) e (SCHOLZ, 2017), enquanto Wheeler (WHEELER, 2018) faz uma análise mais detalhada dos tensores da curvatura destas variedades.

3.1 **Conexão e Curvatura**

Começamos estudando a definição de vetores paralelos numa variedade e as consequências desta definição.

Numa variedade diferenciável a caracterização de vetores paralelos é obtida definindo uma *derivada covariante* de forma axiomática, através da ideia de *conexão linear*.

Definição 3.1.1 (Conexão Linear)

Sejam M uma variedade diferenciável, X, Y e Z três campos vetoriais, a um número real, f uma função escalar T e W dois tensores arbitrários.

Uma conexão linear ∇ em M é um mapa que leva um par de campos vetoriais (X, Y) a outro campo vetorial $\nabla_X Y$ e que satisfaz:

$$\begin{aligned}
&\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z,\\
&\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (X[f])Y,\\
&\nabla_{fX+Z} Y = f\nabla_X Y + \nabla_Z Y..\\
&\nabla_X f = X[f],\\
&\nabla_X(T \otimes W) = T \otimes \nabla_X W + (\nabla_X T) \otimes W. \qquad (95)
\end{aligned}$$

Como ∇ é linear no primeiro argumento para qualquer tensor T de ordem (p, q) então ∇T é um tensor de ordem $(p, q+1)$, chamado *derivada covariante de T*. Um tensor T é *paralelamente transportado ao longo (das curvas integrais) de X* se satisfizer

$$\nabla_X T = 0. \qquad (96)$$

Um vetor paralelamente transportado ao longo de uma curva em geral não é paralelamente transportado ao longo de outra curva. Esta é uma expressão da *curvatura* da variedade.

Seja e_i um *frame* em M, como $\nabla_{e_k} e_j$ é um vetor há escalares $\Gamma^i{}_{jk}$ tais que

$$\nabla_k e_j \equiv \nabla_{e_k} e_j = \Gamma^i{}_{jk} e_i. \tag{97}$$

Os $\Gamma^i{}_{jk}$ são chamados *coeficientes de conexão* e representam o desvio da condição de paralelismo do vetor e_j ao longo das curvas integrais de e_k. Com os coeficientes de conexão, podemos calcular as componentes do mapa na definição, cujo resultado é

$$(\nabla_X Y)^i = X^k \nabla_k Y^i \equiv X^k Y^i{}_{;k} = X^k (\mathrm{D}_k X^i + \Gamma^i{}_{jk} X^j). \tag{98}$$

As componentes da derivada covariante de um tensor arbitrário $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ são:

$$\nabla_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \mathrm{D}_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \Gamma^{i_1}{}_{lk} T^{l \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \ldots + \Gamma^{i_p}{}_{lk} T^{i_1 \dots l}_{j_1 \dots j_q} - \Gamma^l{}_{j_1 k} T^{l \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \ldots - \Gamma^l{}_{j_q k} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots l}. \tag{99}$$

Se escolhermos um *frame* holônomo recuperamos a forma mais usual da derivada covariante, com derivadas parciais em vez das derivadas absolutas do *frame*.

Escolhendo um novo *frame* $e'_i = B_i{}^j e_j$, com transformação inversa $e_j = B^i{}_j e'_i$, os novos coeficientes de conexão são

$$\Gamma'^i{}_{jk} = B_k{}^n B^i{}_l (B_j{}^m \Gamma^l{}_{mn} + \mathrm{D}_n B_j{}^l) = B^i{}_l B_j{}^m B_k{}^n \Gamma^l{}_{mn} - B_j{}^m B_k{}^n \mathrm{D}_n B^i{}_m. \tag{100}$$

Para *frames* holônomos as matrizes B são as matrizes jacobianas e reobtemos a relação mais conhecida para a transformação dos coeficientes de conexão. Note que a subtração entre dois coeficientes de conexão cancela os termos não-homogêneos, e portanto a subtração entre duas conexões é um tensor.

Uma *curva geodésica afim* é uma curva cujo vetor tangente X satisfaz $\nabla_X X \propto X$. Se a curva é descrita por coordenadas $x = x(t)$, no *frame* holônomo as componentes do vetor tangente são $X^a = \mathrm{d}x^a/\mathrm{d}t$ e a condição para as geodésicas é a *equação geodésica*:

$$\nabla_X X^a = \frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}t} \nabla_c \left(\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\mathrm{d}^2 x^a}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^a{}_{bc} \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}t} = \lambda(t) \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t}. \tag{101}$$

Reparametrizando a curva sempre podemos escolher *parâmetros afins* tais que $\lambda(\tau) = 0$.[30]

Para uma conexão geral podemos definir três tensores que a caracterizam.[31]

Definição 3.1.2 (Torção, Tensor de Riemann, Tensor de Ricci)

Sejam X, Y e Z três campos vetoriais. O tensor de torção é o campo tensorial

[30] Assim chamados pois são determinados a menos de uma transformação $\tau' = a\tau + b$.

[31] Os sinais destas definições podem diferir, dependendo das convenções de cada autor.

tipo $(1,2)$ T *definido por*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \tag{102}$$

O tensor de Riemann é o tensor R *tipo* $(1,3)$ *definido por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z. \tag{103}$$

Na convenção deste trabalho, o tensor de Ricci é o tensor tipo $(0,2)$ *obtido através da contração do primeiro e do terceiro índices do tensor de Riemann,*

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj}. \tag{104}$$

As componentes da torção podem ser facilmente encontradas por

$$T(e_j, e_k) = \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_k} e_j - [e_j, e_k] = -(\Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj} + \gamma^i{}_{jk}) e_i \equiv T^i{}_{jk} e_i. \tag{105}$$

Pela definição acima o tensor de Riemann é antissimétrico nos dois últimos índices. Para interpretar o tensor de Riemann, transportamos paralelamente um vetor Z_0 ao longo de uma curva infinitesimal fechada dada pelas curvas integrais de X e Y. O vetor $R(X,Y)Z$ informa a diferença entre o vetor Z_0 e o vetor paralelamente transportado.

Se o tensor de Riemann é zero a variedade é dita plana, ou seja, sem curvatura. Na ausência de torção e curvatura é possível construir um sistema de coordenadas tal que os coeficientes de conexão sejam zero em seu *frame* holônomo.

Em termos de componentes a definição do tensor de Riemann é chamada de *Identidade de Ricci.* Para o vetor na definição e para tensores gerais esta identidade é

$$\begin{aligned} (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) v^i &= -R^i{}_{jkl} v^j, \\ (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^{i\ldots}_{j\ldots} &= -R^i{}_{mkl} T^{m\ldots}_{j\ldots} - \ldots + R^m{}_{jkl} T^{i\ldots}_{m\ldots} + \ldots. \end{aligned} \tag{106}$$

Num *frame* holônomo, a torção é a parte antissimétrica da conexão. Se a conexão é *livre de torção*, $T^i{}_{jk} = 0$, as geodésicas determinam completamente a conexão. Para estas conexões valem as *Identidades de Bianchi*

$$\begin{aligned} R^i{}_{[jkl]} = 0 &\iff R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0, \\ \nabla_{[m} R^i{}_{|j|kl]} = 0 &\iff \nabla_m R^i{}_{jkl} + \nabla_l R^i{}_{jmk} + \nabla_k R^i{}_{jlm} = 0. \end{aligned} \tag{107}$$

3.2 Geometria Riemanniana

Vamos agora introduzir o objeto de maior interesse deste trabalho, o *tensor métrico*.

Definição 3.2.1 (Produto Escalar)

Sejam X_p, Y_p e Z_p três vetores definidos num ponto $p \in M$ e a um escalar. O produto escalar $\langle X_p, Y_p \rangle$ entre dois vetores X_p e Y_p é um mapa $T_P(M) \times T_P(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
\langle aX_p + Y_p, Z_p \rangle &= a\langle X_p, Z_p \rangle + \langle Y_p, Z_p \rangle, \\
\langle X_p, Y_p \rangle &= \langle Y_p, X_p \rangle, \\
\langle X_p, Y_p \rangle &= 0 \ \forall \ X_p \Longleftrightarrow Y_p = 0,
\end{aligned}
\tag{108}
$$

Estas propriedades definem um tensor simétrico não-degenerado g de ordem $(0, 2)$, chamado tensor métrico ou simplesmente *métrica*.[32]

Se $\langle X_p, X_p \rangle \geq 0 \ \forall \ X_p$ a métrica é dita positivamente definida e a variedade é chamada *riemanniana*. Se $\langle X_p, X_p \rangle$ pode ter qualquer sinal a métrica é dita indeterminada e a variedade é chamada *pseudo-riemanniana*, embora na prática esta distinção seja frequentemente ignorada por economia de linguagem.

Uma característica invariante da métrica é sua assinatura, que é relacionada à ideia de norma de um vetor.

Definição 3.2.2 (Assinatura, Norma)

A assinatura da métrica é a diferença entre o número de seus autovalores positivos e o número de seus autovalores negativos.

A norma $||X||$ de um vetor é definida por $||X||^2 = \langle X, X \rangle$.

A assinatura é invariante a mudanças de *frames*, mas pode variar ponto a ponto. Para estas métricas singulares vamos restringir nosso estudo a subconjuntos abertos tais que a assinatura seja constante. O sinal da norma de um autovetor é igual ao sinal de seu autovalor. Neste texto usaremos assinaturas não-positivas para métricas indefinidas.

No caso de variedades riemannianas apenas $X = 0$ tem norma zero, mas para variedades pseudo-riemannianas a norma permite separar os vetores em três tipos disjuntos: se $||X||^2 > 0$ o vetor é dito tipo-tempo; se $||X||^2 < 0$ o vetor é dito tipo-espaço; e se $||X||^2 = 0$, o vetor é dito nulo ou tipo-luz.[33] Curvas são ditas tipo-tempo, tipo-espaço ou nulas num ponto, de acordo com o tipo de seus vetores tangentes.

O ângulo entre dois vetores tipo-espaço também é definido pela métrica.

---

[32] Por não-degenerado afirmamos que g não aniquila nenhum subespaço vetorial de $T_p(M)$.

[33] Para métricas de assinatura positiva a denominação dos vetores tipo tempo e tipo espaço é invertida. No caso de vetores não-nulos o módulo da norma pode ser interpretado como a magnitude do vetor.

Definição 3.2.3 (Ângulos entre vetores)

Sejam X e Y vetores tipo-espaço. O ângulo θ entre estes vetores é definido por

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle X, Y\rangle}{||X|| \cdot ||Y||}\right). \tag{109}$$

Dois vetores são ditos ortogonais se $\langle X, Y\rangle = 0$. Vetores nulos são ortogonais a si mesmos.

Se X é um vetor, podemos obter uma 1-forma através do mapa $X \mapsto \omega$ dado por

$$\omega[Y] = \langle X, Y\rangle \Longleftrightarrow \omega_i = g_{ij}X^j. \tag{110}$$

Este mapa é um isomorfismo entre os espaços vetoriais tangente e cotangente e por isto, ambos os tensores são identificados como o mesmo objeto geométrico. Nestes casos é padrão usar a mesma letra para identificar tanto o vetor quanto a 1-forma.

Podemos usar o mapa inverso de (110) para obter um tensor simétrico tipo (2,0) chamado *tensor métrico contravariante*, que também é entendido como uma representação diferente da mesma métrica e pode ser usado para definir uma mapa $\omega \mapsto X$. Suas componentes são denotadas por g^{ij} e satisfazem $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$. Para tensores de qualquer ordem estes isomorfismos são conhecidos como levantamento e abaixamento de índices, devido à forma que a operação toma ao usarmos componentes. Por exemplo,

$$A^i{}_j = g^{ik}A_{kj}, \; A^{ij} = g^{ik}g^{jl}A_{kl}, \; A_{ij} = g_{ik}g_{jl}A^{kl}. \tag{111}$$

Note que há dois tensores de tipo (1,1). Para sermos capazes de distinguir entre os dois, passaremos a dar importância também à ordem de índices de tipos distintos: $A_i{}^j \neq A^j{}_i$.[34]

A métrica nos permite escolher uma conexão privilegiada, chamada *conexão de Levi-Civita* ou *conexão métrica.*

Definição 3.2.4 (Conexão de Levi-Civita, Geodésicas Métricas)

Dada uma métrica g, a conexão de Levi-Civita é a conexão livre de torção que preserva o produto interno durante o transporte paralelo, ou seja, satisfaz $\nabla g = 0$.

As geodésicas desta conexão são chamadas geodésicas métricas.

Com a conexão de Levi-Civita podemos comutar as operações de diferenciação covariante com o levantamento e abaixamento de índices. Os coeficientes de conexão $\Gamma^i{}_{jk}$ podem ser obtidos através da derivada covariante da métrica

$$\nabla_k g_{ij} = \mathrm{D}_k g_{ij} - \Gamma^l{}_{ik}g_{lj} - \Gamma^l{}_{jk}g_{il} \equiv 0. \tag{112}$$

---

[34] Com a métrica podemos definir tensores simétricos e antissimétricos em índices de tipo diferente, exigindo que o tensor com as componentes totalmente covariante (ou contravariante) possuam a simetria correspondente. Por exemplo $B_{ij\ldots} = \pm B_{ji\ldots} \implies B^i{}_{j\ldots} = \pm B_j{}^i{}_{\ldots}$.

Calculando o tensor $Q_{kij} = \nabla_k g_{ij} + \nabla_i g_{kj} - \nabla_j g_{ik} = 0$ temos

$$\begin{aligned} Q_{kij} &= (\mathrm{D}_k g_{ij} - \Gamma^l{}_{ik} g_{lj} - \Gamma^l{}_{jk} g_{il}) + (\mathrm{D}_i g_{kj} - \Gamma^l{}_{ki} g_{lj} - \Gamma^l{}_{ji} g_{kl}) - (\mathrm{D}_j g_{ik} - \Gamma^l{}_{ij} g_{lk} - \Gamma^l{}_{kj} g_{il}) \\ &= (\mathrm{D}_k g_{ij} + \mathrm{D}_i g_{kj} - \mathrm{D}_j g_{ik}) - (\Gamma^l{}_{ik} + \Gamma^l{}_{ki}) g_{lj} - (\Gamma^l{}_{jk} - \Gamma^l{}_{kj}) g_{il} - (\Gamma^l{}_{ji} - \Gamma^l{}_{ij}) g_{kl} \\ &= (\mathrm{D}_k g_{ij} + \mathrm{D}_i g_{kj} - \mathrm{D}_j g_{ik}) - (2\Gamma^l{}_{ik} + \gamma^l{}_{ik}) g_{lj} + \gamma^l{}_{jk} g_{il} + \gamma^l{}_{ji} g_{kl} \equiv 0, \end{aligned} \tag{113}$$

onde usamos a ausência de torção, $T^i{}_{kj} = \Gamma^i{}_{jk} - \Gamma^i{}_{kj} + \gamma^i{}_{jk} = 0$. Logo a solução é

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\mathrm{D}_j g_{lk} + \mathrm{D}_k g_{jl} - \mathrm{D}_l g_{jk} + g_{jm} \gamma^m{}_{lk} + g_{km} \gamma^m{}_{lj} - g_{lm} \gamma^m{}_{jk} \right). \tag{114}$$

Dois casos particulares são importantes. Se o *frame* for holônomo, $e_i = \delta^a_i \partial / \partial x^a$, os comutadores γ são zero e temos

$$\Gamma^a{}_{bc} = \tfrac{1}{2} g^{ad} \left(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{ab} \right). \tag{115}$$

Estes coeficientes são conhecidos como *símbolos de Christoffel de Segunda Espécie* e são a forma mais conhecida desta conexão. Se escolhemos um *frame* tal que as componentes da métrica sejam constantes a conexão é descrita pelos *coeficientes de rotação de Ricci*,

$$\Gamma^i{}_{jk} = \tfrac{1}{2} g^{il} \left(g_{jm} \gamma^m{}_{lk} + g_{km} \gamma^m{}_{lj} - g_{lm} \gamma^m{}_{jk} \right). \tag{116}$$

O mais comum nestes casos é usar *frames ortonormais*, construídos usando os autovetores da métrica cujas normas são iguais a ± 1.

Para medir a variação da métrica precisamos usar a derivada de Lie. Calculando-a num *frame* holônomo por simplicidade temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X g_{ab} &= X^c \partial_c g_{ab} + g_{ac} \partial_b X^c + g_{cb} \partial_a X^c = X^c (\Gamma^d{}_{ac} g_{db} + \Gamma^d{}_{bc} g_{ad}) + g_{ac} \partial_b X^c + g_{cb} \partial_a X^c \\ &= g_{db} (\partial_a X^d + X^c \Gamma^d{}_{ac}) + g_{ad} (\partial_b X^d + X^c \Gamma^d{}_{bc}) = \nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 2 \nabla_{(a} X_{b)}. \end{aligned} \tag{117}$$

Os campos X tais que $\mathcal{L}_X g_{ij} = 0$ são chamados *campos de Killing*, e formam uma Álgebra de Lie. Eles são as simetrias contínuas da métrica, chamadas *isometrias* por preservarem as normas de todo vetor. Esta álgebra admite duas extensões importantes para este trabalho. Os *campos de Killing homotéticos* são aqueles cuja derivada de Lie é proporcional à métrica por um fator constante c, $\mathcal{L}_X g = cg$. Uma generalização desta álgebra são os *campos de Killing conformes*, que são proporcionais à métrica por uma função arbitrária, $\mathcal{L}_X g = \phi(x) g$. Esta última é diretamente relacionada com o objetivo deste trabalho e representará parte da solução do problema de equivalência conforme. Uma análise detalhada destas álgebras pode ser encontrada em (HALL, 2004).

Com a métrica podemos definir um tensor de Riemann totalmente covariante dado por $R_{ijkl} = g_{im} R^m{}_{jkl}$. Este tensor tem duas novas simetrias: ele é antissimétrico com relação aos dois primeiros índices e simétrico com relação à troca entre o primeiro e o segundo pares de índices, $R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{klij}$. Estas simetrias implicam que o tensor de Ricci correspondente é simétrico $R_{ij} = R_{ji}$.

A métrica nos permite construir outros três tensores ligados à curvatura do espaço.

Definição 3.2.5 (Escalar de Ricci, Tensor de Einstein, Tensor de Weyl)
O escalar de Ricci R é o traço do tensor de Ricci, $R = R^i{}_i$.

O tensor de Einstein G_{ij} é definido por $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}$.

O tensor de Weyl ou tensor conforme $C^i{}_{jkl}$ é a parte livre-de-traço do tensor de Riemann, ou seja, a componente de $R^i{}_{jkl}$ que satisfaz $C^k{}_{ikj} = 0$.

O tensor de Einstein satisfaz a chamada *Identidade de Bianchi Contraída*,

$$\nabla_k G^{ik} = 0. \tag{118}$$

O tensor de Weyl é chamado de conforme por ser invariante com relação a transformações conformes, que serão estudadas na seção 3.4. Este tensor é identicamente zero para variedades de dimensão $m < 4$, e pode ser obtido pela *decomposição de Ricci*,

$$R_{ijkl} = C_{ijkl} + \frac{2}{m-2}(R_{i[k}g_{l]j} - R_{j[k}g_{l]i}) - \frac{2}{(m-1)(m-2)}Rg_{i[k}g_{l]j}, \quad m > 2. \tag{119}$$

É trivial mostrar que $R^k{}_{ikj} = R_{ij}$ com a equação acima.

3.3 Relatividade Geral

Nesta seção discutiremos como usar a Geometria para modelar as Leis da Física na ausência e na presença de um campo gravitacional. Em vez de descrever as hipóteses físicas destas teorias e modelar um formalismo matemático para estas hipóteses, postularemos os axiomas matemáticos da teoria e deduziremos suas consequências.

Chamamos de *evento* um ponto no espaço num determinado instante do tempo. Supomos, com base em nossa experiência, que o conjunto de todos os eventos formam um contínuo chamado *espaço-tempo*.

Na ausência de gravidade a Física (não-quântica) é descrita pela *Teoria da Relatividade Restrita*. Nesta teoria o espaço-tempo é o conjunto $\mathbb{R}^4$ com sua topologia usual, munido de uma métrica lorentziana plana. Este espaço-tempo é chamado *Espaço de Minkowski*.

Daquela afirmação segue a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo e a existência de coordenadas retangulares globais $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ tais que, em seu *frame* holônomo, a métrica possua componentes ortonormais $g_{ab} = \eta_{ab}$ dadas por $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1$ e o resto zero. Identificamos a coordenada que descreve o tempo como aquela cuja componente da métrica de Minkowski é positiva. Um observador que mede distâncias e o tempo de acordo com estas coordenadas é dito *inercial*.

Observadores inerciais não são únicos. Seus sistemas de coordenadas são relacionados pela Álgebra de Killing do Espaço de Minkowski, que forma um grupo de Lie de dimensão dez, chamado *Grupo de Poincaré*, composto das translações e reflexões das coordenadas do espaço-tempo, rotações dos eixos espaciais, e *boosts*. Os dois últimos preservam as coordenadas da origem $x = (0, 0, 0, 0)$ e portanto são o grupo de isotropia da origem (e de qualquer outro ponto), chamado *Grupo de Lorentz*. Estudaremos este grupo em maiores detalhes no capítulo 6.

Não é difícil mostrar que as geodésicas deste espaço-tempo são linhas retas, e deduzir a estrutura causal deste espaço, dada por um cone de luz. Sejam dois eventos P_1 e P_2, definimos o intervalo escalar (invariante as transformações de Poincaré) dado por

$$\Delta s^2 = \eta_{ab}(x_2^a - x_1^a)(x_2^b - x_1^b) = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \tag{120}$$

Se $\Delta s^2 < 0$ podemos usar transformações de Lorentz para encontrar um observador onde $t_2 - t_1 = 0$. Logo os eventos são simultâneos no novo observador e uma partícula não pode se deslocar entre P_1 e P_2. Neste caso $l_0 = \sqrt{-\Delta s^2}$ é chamado *distância própria*.

Se $\Delta s^2 > 0$ é possível usar transformações de Lorentz para obter um observador tal que $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = z_2 - z_1 = 0$. Portanto uma partícula pode viajar do evento com menor valor de coordenada tempo para aquele com a maior. Aqui chamamos $\tau_0 = \sqrt{\Delta s^2}$ de *tempo próprio* entre os eventos.

Se $\Delta s^2 = 0$ não podemos obter nenhum dos observadores acima. Nestes casos

$$c^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{\Delta t^2} = 1 \tag{121}$$

tem o mesmo valor em todos os observadores inerciais. Partículas que viajam entre estes eventos devem fazê-lo com uma velocidade universal $c = 1$ (portanto estamos usando *unidades naturais*), que é a mesma em todos os observadores inerciais.[35]

Por fim, se supormos que os sistemas físicos são descritos por tensores e que as Leis da Física devem ser escritas como equações tensoriais que envolvem estes tensores, suas derivadas covariantes e a métrica de Minkowski, concluímos que estas Leis são as mesmas

[35] E também não-inerciais, que serão explicados em breve. Recuperamos aqui o postulado da invariância da velocidade da luz na formulação usual da Teoria da Relatividade Restrita.

para todos os observadores inerciais, que é o *Princípio da Relatividade Restrita.*[36]

No espaço de Minkowski partículas descrevem curvas chamadas *linhas de universo* e seus vetores tangentes u^a são chamados *quadrivelocidades.* Partículas sem massa (incluindo fótons) viajam em curvas nulas, enquanto as linhas de universo de partículas com *massa de repouso*[37] $m > 0$ são tipo-tempo, e as normas lorentzianas de suas quadrivelocidades são normalizadas a unidade. Se estas partículas estão livres de qualquer interação suas linhas de universo são retas.

A energia e o momento das partículas são dados por um vetor chamado quadrimomento, que neste *frame holônomo* possui componentes $p^a = (E, p^x, p^y, p^z)$. Para partículas massivas a relação entre a quadrivelocidade e o quadrimomento é dada por

$$p^a = mu^a. \tag{122}$$

No caso de partículas sem massa o quadrimomento também é um vetor nulo. Um observador com quadrivelocidade u^a qualquer mede a energia da partícula como $E = p_a u^a$.

Para um campo físico qualquer a conservação de energia e momento é dada pela nulidade da divergência do tensor de energia-momento:

$$\nabla_a T^{ab} = \partial_a T^{ab} = 0. \tag{123}$$

Embora haja uma classe de observadores privilegiados em Relatividade Restrita é possível estudar a Física medida por um observador acelerado usando coordenadas tipo-tempo curvilíneas que sejam coincidentes com a linha de universo deste observador.[38] O efeito da aceleração se manifesta pelos coeficientes de conexão, que são zero apenas nas coordenadas retangulares, e fazem o papel de forças inerciais na Mecânica Relativística.

Por fim, embora tenhamos descrito a teoria usando *frames* holônomos, a natureza tensorial das equações garante que elas são válidas em qualquer base.

Na presença de um campo gravitacional, descreveremos a Física usando a *Teoria de Relatividade Geral.* O espaço-tempo é descrito por uma variedade diferenciável quadridimensional M munido de uma métrica lorentziana g_{ij}.

As linhas de universo de partículas teste (com dimensões e energia suficientemente

---

[36] Muitas vezes usado como pedra fundamental da teoria, aqui ele é uma consequência de nossos axiomas. Ressaltamos que a Física Quântica requer campos com outro tipo de transformação, chamados espinores. Discutiremos um tipo de espinor no capítulo 6 desta tese, mas eles não são necessários para formular as Leis da Física fora do domínio quântico.
Na Física Quântica também há interações que violam a simetria de reflexão espacial, enquanto a Segunda Lei da Termodinâmica viola a reflexão temporal. Estas violações permitem incorporar pseudotensores às Leis da Física, e são consistentes com a orientabilidade global do espaço de Minkowski.

[37] Medida no referencial da própria partícula.

[38] Para obter quantidades físicas diretamente das componentes é preciso normalizar o vetor tipo-tempo.

pequenas) em queda livre são geodésicas de g_{ij}. A relação com a matéria é dada pela *Equação de Einstein*[39]

$$G_{ij} = -8\pi T_{ij} + \Lambda g_{ij}, \tag{124}$$

onde Λ é a *constante cosmológica* (aqui e doravante usamos *unidades geometrizadas*, tais que a constante de gravitação universal G e a velocidade da luz c são iguais a unidade: $G = c = 1$). Sempre que fizermos a interpretação física de um tensor de Ricci, o faremos de acordo com esta equação, embora interpretações alternativas possam ser obtidas se usarmos uma teoria alternativa à Relatividade Geral.

A equação de Einstein e a Segunda Identidade de Bianchi garantem a conservação do tensor de energia-momento, enquanto a hipótese do movimento geodésico garante que partículas livres estão em movimento inercial quando a métrica é plana (ou seja, quando podemos desprezar a influência do campo gravitacional).

A equação geodésica não faz referência à massa, à carga elétrica, ou a qualquer outra propriedade da partícula. Como consequência de nossas hipóteses concluímos o *Princípio de Equivalência*: todas as partículas são afetadas pela gravidade de forma idêntica, independente de suas características.

Novamente as Leis da Física são formuladas como equações tensoriais, mas agora não há necessariamente um conjunto de observadores privilegiados, logo todos os *frames* devem ser considerados como igualmente capazes de descrevê-las. Obtemos o *Princípio de Relatividade Geral*: as Leis da Física são as mesmas para qualquer observador.

A estrutura causal do espaço-tempo ainda é dada por cones de luz, mas agora eles são bem-definidos apenas nas vizinhanças de um evento, e são construídos usando as curvas geodésicas para conectar eventos próximos. A estrutura causal global deve ser induzida destas estruturas locais.

Encerramos esta seção exemplificando brevemente dois tipos de matéria que usaremos para interpretar fisicamente o tensor de Ricci.

Um *fluído perfeito* é uma distribuição contínua de matéria caraterizado pela quadrivelocidade u^i do fluído, sua *densidade de energia* ρ e a pressão isotrópica P medidas no referencial do fluído. O tensor de energia-momento de um fluído perfeito é dado por

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + P(u_i u_j - g_{ij}). \tag{125}$$

Portanto a conservação de energia para um fluído perfeito é escrita como

$$\nabla^i T_{ij} = u_j[u^i \nabla_i \rho + (\rho + P)\nabla_i u^i] + [(\rho + P)u^i \nabla_i u_j - (\delta^i_j - u^i u_j)\nabla_i P] = 0. \tag{126}$$

[39] O sinal nesta equação depende das convenções adotadas para a assinatura da métrica, para o tensor de Riemann e para o tensor de Ricci. O termo com a constante cosmológica não afeta a divergência.

Contraindo a equação acima com u^j e lembrando que $\nabla_i(u^j u_j) = 2u^j \nabla_i u_j = 0$ concluímos que as equações entre colchetes devem ser zero separadamente. A primeira equação é a conservação de energia e a segunda é a conservação de momento.

Note que na ausência de pressão a quadrivelocidade satisfaz a equação geodésica, $u^i \nabla_i u_j = 0$, e a primeira equação é a conservação de massa-energia, $\nabla_i(\rho u^i) = 0$.

O outro tipo de matéria que usaremos neste texto é um campo eletromagnético, que é descrito por uma 2-forma $F_{ij} = -F_{ji}$. Um observador com quadrivelocidade v^i pode obter os campos elétricos e magnéticos por $E_i = F_{ij} v^j$ e $B_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijkl} v^j F^{kl}$, onde ε_{ijkl} é o tensor de Levi-Civita.[40] Se J^i é a quadricorrente, as equações de Maxwell são dadas por

$$\nabla_j F^{ij} = 4\pi J^i, \quad 3\nabla_{[k} F_{ij]} = \nabla_k F_{ij} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_i F_{jk} = 0. \tag{127}$$

Calculando a divergência da primeira equação obtemos a conservação da quadricorrente,

$$4\pi \nabla_i J^i = \nabla_i \nabla_j F^{ij} = \nabla_{(i} \nabla_{j)} F^{[ij]} \equiv 0 \implies \nabla_i J^i = 0. \tag{128}$$

A segunda equação implica que F_{ij} é fechada, e pode ser obtida (ao menos localmente) através de uma 1-forma A_i chamada *quadripotencial eletromagnético*,

$$F_{ij} = \nabla_i A_j - \nabla_j A_i. \tag{129}$$

O tensor de energia-momento do campo eletromagnético é dado por

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{4} g_{ij} (F_{kl} F^{kl}) - F_{ik} F_j{}^k \right]. \tag{130}$$

Usando as equações de Maxwell, é fácil mostrar que a divergência deste tensor energia-momento vale

$$\nabla^k T_{ki} = F_{ik} J^k, \tag{131}$$

portanto a energia-momento do campo eletromagnético só é conservada na ausência de cargas, $J^i = 0$. Se esta condição não é satisfeita é preciso considerar a energia da matéria eletricamente carregada para a conservação da energia total.

[40] Um pseudo-tensor totalmente antissimétrico, tal que $\varepsilon_{0123} = 1$.

3.4 Transformações Conformes

O objetivo deste texto é estabelecer quando duas métricas, em diferentes sistemas de coordenadas, são relacionadas por um tipo específico de transformação chamada *transformação conforme*. Nesta seção vamos definir o que são estas transformações e como os vários tensores que descrevem a geometria riemanniana são afetados por elas.

Definição 3.4.1 *Transformação Conforme*

Duas métricas g_{ij} e $\widetilde{g}_{ij}$ são relacionadas por uma transformação conforme com fator de escala $\omega(x)$ se

$$\widetilde{g}_{ij} = \mathrm{e}^{2\omega} g_{ij}. \tag{132}$$

Note que a métrica $\widetilde{g}_{ij}$ é outro tensor, diferente de g_{ij}. A transformação conforme não implica em uma mudança do sistema de coordenadas, do *frame* ou do *coframe* usados para os espaços tensoriais.

A expressão conforme, num contexto geométrico, se refere à preservação de ângulos entre vetores. Em particular uma transformação conforme preserva a natureza dos vetores: vetores tipo-tempo, tipo-espaço ou nulos numa métrica apresentam a mesma característica em todas as métricas conformalmente relacionadas. Dados vetores X^i e Y^i ambos tipo-espaço, o cosseno é o mesmo em todas as métricas conformalmente relacionadas,

$$\cos(\theta) = \frac{g_{ij} X^i Y^j}{\sqrt{(g_{kl} X^k X^l)(g_{mn} Y^m Y^n)}} = \frac{\widetilde{g}_{ij} X^i Y^j}{\sqrt{(\widetilde{g}_{kl} X^k X^l)(\widetilde{g}_{mn} Y^m Y^n)}}. \tag{133}$$

As métricas contravariantes são relacionadas por

$$\widetilde{g}^{ij} = \mathrm{e}^{-2\omega} g^{ij}, \tag{134}$$

ou seja, as componentes covariantes e contravariantes da métrica se transformam de forma diferentes (as componentes mistas se igualam à delta de Kronecker e são invariantes).

Diferentes conjuntos de componentes do mesmo tensor se transformam de forma distinta. Por exemplo, seja X^i um vetor tangente a uma curva, como a curva e sua parametrização são independentes das métricas temos

$$\widetilde{X}^i = X^i \implies \widetilde{X}_i = \mathrm{e}^{2\omega} X_i, \tag{135}$$

ou seja X^i é *conformalmente invariante*, ao contrário de X_i. Por outro lado, seja f uma função escalar e $\alpha_i \equiv \mathrm{D}_i f$ sua diferencial. Esta se transforma como

$$\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i, \implies \widetilde{\alpha}^i = \mathrm{e}^{-2\omega} \alpha^i. \tag{136}$$

Diremos que um tensor $T^{i\dots}_{j\dots}$ é *conformalmente covariante com peso conforme* N se diante de uma transformação conforme suas componentes se transformam como[41]

$$\widetilde{T}^{i\dots}_{j\dots} = \mathrm{e}^{N\omega} T^{i\dots}_{j\dots}. \tag{137}$$

Tensores com peso zero são conformalmente invariantes. Um tensor conformalmente invariante importante é o produto de métricas covariantes e contravariantes

$$\widetilde{g}^{ij}\widetilde{g}_{kl} = g^{ij} g_{kl}. \tag{138}$$

Este tensor aparece com frequência nas fórmulas relativas às transformações conformes, e sua invariância permite que troquemos com liberdade as métricas neste produto.

Diante de uma transformação conforme pode-se mostrar que os símbolos de Christoffel se transformam como

$$\widetilde{\Gamma}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + \delta^i_k \mathrm{D}_k\omega + \delta^i_j \mathrm{D}_k\omega - g_{jk} g^{il} \mathrm{D}_l\omega \equiv \Gamma^i{}_{jk} + \omega^i{}_{jk}. \tag{139}$$

Note que $\omega^i{}_{jk}$, por ser uma diferença entre conexões, é um tensor. As derivadas covariantes de tensores conformalmente covariantes (incluindo os invariantes) não apresentam esta propriedade. Para a derivada covariante de um tensor de peso conforme N temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_k \widetilde{T}^{\dots i_p}_{\dots j_q} &= \nabla_k \widetilde{T}^{\dots i_p}_{\dots j_q} + \ldots + \omega^{i_p}{}_{lk} \widetilde{T}^{\dots l}_{\dots j_q} - \ldots - \omega^l{}_{j_q k} \widetilde{T}^{\dots i_p}_{\dots l} \\
&= \nabla_k (\mathrm{e}^{N\omega} T^{\dots i_p}_{\dots j_q}) + \ldots + \omega^{i_p}{}_{lk} \widetilde{T}^{\dots l}_{\dots j_q} - \ldots - \omega^l{}_{j_q k} \widetilde{T}^{\dots i_p}_{\dots k} \\
&= \mathrm{e}^{N\omega} (\nabla_k T^{\dots i_p}_{\dots j_q} + N\omega_{,k} T^{\dots i_p}_{\dots j_q} + \ldots + \omega^{i_p}{}_{lk} T^{k\dots}_{j_q\dots} - \ldots - \omega^l{}_{j_q k} T^{i_p\dots}_{l\dots}) \\
&= \mathrm{e}^{N\omega} [\nabla_k T^{\dots i_p}_{\dots j_q} + (N + p - q)\omega_{,k} T^{\dots i_p}_{\dots j_q} + \ldots + \delta^{i_p}_k \omega_{,l} T^{\dots l}_{\dots j_q} - \omega^{,i_p} g_{lk} T^{\dots l}_{\dots j_q} \\
&\quad + \ldots - \omega_{,j_q} T^{\dots i_p}_{\dots k} + g_{j_q k} \omega^{,l} T^{\dots i_p}_{\dots l}].
\end{aligned} \tag{140}$$

Obviamente as equações acima implicam $\widetilde{\nabla}_k \widetilde{g}_{ij} = 0$ e $\widetilde{\nabla}_k \widetilde{g}^{ij} = 0$.

A relação entre as equações geodésicas de métricas conformalmente relacionadas é

$$\begin{aligned}
X^k \widetilde{\nabla}_k X^i - \lambda X^i &= X^k \nabla_k X^i + \omega^i{}_{jk} X^j X^k - \lambda X^i \\
&= X^k \nabla_k X^i - (g_{jk} X^j X^k)\omega^{,i} + [2(X^k \omega_{,k}) - \lambda] X^i = 0.
\end{aligned} \tag{141}$$

Por causa da segunda parcela, a equação acima mostra que em geral as soluções X^i para os vetores tangentes não são as mesmas. Porém, para as geodésicas nulas essa parcela é zero em todas as métricas conformalmente relacionadas, portanto, as geodésicas

[41] Não confundir com o peso de uma densidade tensorial.

nulas são as mesmas para métricas conformalmente relacionadas.[42] Esta propriedade é fundamental para a aplicação de transformações conformes em Relatividade Geral. Elas são usadas para compactar espaços-tempo e facilitar a compreensão global da geometria enquanto ainda podemos rastrear as trajetórias das geodésicas nulas, desenhando toda uma geometria ilimitada num desenho compacto chamado *diagrama de Penrose*.[43]

A relação entre as Álgebras de Killing é facilmente encontrada por

$$\mathcal{L}_X\widetilde{g}_{ij} = \mathcal{L}_X(\mathrm{e}^{2\omega}g_{ij}) = \mathrm{e}^{2\omega}\mathcal{L}_X g_{ij} + 2\mathrm{e}^{2\omega}g_{ij}X^k\mathrm{D}_k\omega = (\phi + 2X^k\mathrm{D}_k\omega)\widetilde{g}_{ij}. \tag{142}$$

Portanto métricas conformalmente relacionadas possuem a mesma Álgebra de Killing conforme, mas o mesmo não ocorre com as álgebras isométrica e homotética (salvo se o fator de escala for constante).

Para descobrir a transformação do tensor de Riemann, computamos a derivada covariante segunda de uma 1-forma (conformalmente invariante) θ

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_k\widetilde{\nabla}_l\theta_j &= \nabla_k(\widetilde{\nabla}_l\theta_j) - \omega^i{}_{lk}\widetilde{\nabla}_i\theta_j - \omega^i{}_{jk}\widetilde{\nabla}_l\theta_i \\
&= \nabla_k(\nabla_l\theta_j - \omega^i{}_{jl}\theta_i) - \omega^i{}_{lk}\widetilde{\nabla}_i\theta_j - \omega^i{}_{jk}(\nabla_l\theta_i - \omega^m{}_{il}\theta_m) \\
&= \nabla_k\nabla_l\theta_j - \theta_i\nabla_k\omega^i{}_{jl} - \omega^i{}_{jl}\nabla_k\theta_i - \omega^i{}_{lk}\widetilde{\nabla}_i\theta_j - \omega^i{}_{jk}\nabla_l\theta_i + \omega^m{}_{jk}\omega^i{}_{ml}\theta_i \\
&= \nabla_k\nabla_l\theta_j - (\nabla_k\omega^i{}_{jl} - \omega^m{}_{jk}\omega^i{}_{ml})\theta_i - [\omega^i{}_{lk}\widetilde{\nabla}_i\theta_j + 2\omega^i{}_{j(k}\nabla_{l)}\theta_i].
\end{aligned}$$

Antissimetrizando nos índices k e l e usando a identidade de Ricci podemos relacionar ambos os tensores de Riemann. Os termos entre colchetes são simétricos nestes índices e desaparecem após a antissimetrização. Eliminando a forma arbitrária θ, o resultado é

$$\widetilde{R}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} + 2\nabla_{[l}\omega^i{}_{|j|k]} + 2\omega^m{}_{j[k}\omega^i{}_{|m|l]}. \tag{143}$$

Computando as duas parcelas separadamente temos

$$\begin{aligned}
2\nabla_{[l}\omega^i{}_{|j|k]} &= 2\delta^i_{[k}\nabla_{l]}\nabla_j\omega - 2g_{j[k}\nabla_{l]}\nabla^i\omega, \\
2\omega^m{}_{j[k}\omega^i{}_{|m|l]} &= 2\delta^i_{[l}\nabla_{k]}\omega\nabla_j\omega - 2g_{j[l}\nabla_{k]}\omega\nabla^i\omega - 2g_{j[k}\delta^i_{l]}\nabla_m\omega\nabla^m\omega
\end{aligned} \tag{144}$$

Portanto o resultado final para a transformação do tensor de Riemann é

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} &+ 2\delta^i_{[k}\nabla_{l]}\nabla_j\omega - 2g_{j[k}\nabla_{l]}\nabla^i\omega \\
&- 2\delta^i_{[k}\nabla_{l]}\omega\nabla_j\omega + 2g_{j[k}\nabla_{l]}\omega\nabla^i\omega + 2\delta^i_{[k}g_{l]j}\nabla_m\omega\nabla^m\omega.
\end{aligned} \tag{145}$$

[42] Note que uma possível parametrização afim não é preservada pela transformação conforme.

[43] Neste diagrama o futuro e passado das geodésicas nulas estão em duas superfícies $\mathcal{I}^+$ e $\mathcal{I}^+$, o futuro e passado das geodésicas tipo-tempo estão em pontos i^+ e i^- e o passado e futuro das as geodésicas tipo-espaço estão ambos num ponto i^0.

A equação acima fica mais simétrica usando componentes totalmente covariantes

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ijkl} = \mathrm{e}^{2\omega}(&R_{ijkl} + 2g_{i[k}\nabla_{l]}\nabla_j\omega - 2g_{j[k}\nabla_{l]}\nabla_i\omega \\ &- 2g_{i[k}\nabla_{l]}\omega\nabla_j\omega + 2g_{j[k}\nabla_{l]}\omega\nabla_i\omega + 2g_{i[k}g_{l]j}\nabla_m\omega\nabla^m\omega).\end{aligned} \tag{146}$$

Fazendo uma contração, a transformação conforme do tensor de Ricci é

$$\widetilde{R}_{ij} = R_{ij} + (m-2)(\nabla_j\nabla_i\omega - \nabla_j\omega\nabla_i\omega) + (\nabla_m\nabla^m\omega + (m-2)\nabla_m\omega\nabla^m\omega)g_{ij}, \tag{147}$$

onde m é a dimensão da variedade diferenciável. Com uma segunda contração obtemos a transformação do escalar de Ricci

$$\widetilde{R} = \mathrm{e}^{-2\omega}[R + 2(m-1)\nabla_m\nabla^m\omega + (m-2)(m-1)\nabla_m\omega\nabla^m\omega]. \tag{148}$$

Note que nenhum dos tensores de curvatura discutidos até agora são conformalmente covariantes. Porém, usando as transformações acima podemos mostrar que o tensor de Weyl de tipo $(1,3)$ é conformalmente invariante

$$\widetilde{C}^i{}_{jkl} = C^i{}_{jkl} \tag{149}$$

e portanto os outros conjuntos de componentes deste tensor são conformalmente covariantes com os pesos adequados.

Este resultado é mais fácil de se demonstrar introduzindo um tensor auxiliar S_{ij}, o *tensor de Schouten*.[44] Seguindo (GARCÍA et al., 2004), nós o definimos como

$$S_{ij} = \frac{1}{m-2}\left(R_{ij} - \frac{1}{2(m-1)}Rg_{ij}\right). \tag{150}$$

A relação entre os traços e a equação para reconstruir o tensor de Ricci são

$$S_k{}^k = \frac{R}{2(m-1)}, \;\; R_{ij} = (m-2)S_{ij} + S_k{}^k g_{ij}. \tag{151}$$

O tensor de Schouten possui uma transformação conforme simplificada, dada por

$$\widetilde{S}_{ij} = S_{ij} + \nabla_j\nabla_i\omega - \nabla_j\omega\nabla_i\omega + \tfrac{1}{2}(\nabla_k\omega\nabla^k\omega)g_{ij}. \tag{152}$$

Em termos dos tensores de Weyl e de Schouten, o tensor de Riemann é escrito como

$$R_{ijkl} = C_{ijkl} + 4g_{[i[k}S_{l]j]}. \tag{153}$$

[44] Este tensor só pode ser definido para dimensões $m > 2$.

A ausência de traço e a covariância conforme dos tensores de Weyl são facilmente provadas a partir da equação acima.

Além do tensor de Schouten, um último tensor importante para a geometria conforme é o *tensor de Cotton* C_{ijk}. Seguindo novamente (GARCÍA et al., 2004), este tensor é definido por

$$C_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(m-1)}(g_{ij}\nabla_k R - g_{ik}\nabla_j R). \tag{154}$$

Este tensor é identicamente zero para um espaço bidimensional. Para espaços com dimensão $m > 2$ também podemos escrever

$$C_{ijk} = 2(m-2)\nabla_{[k}S_{j]i}. \tag{155}$$

Podemos facilmente provar que o tensor de Cotton possui as seguintes propriedades

$$C_{i(jk)} = 0,\ C_{[ijk]} = 0,\ C^k{}_{ki} = 0, \tag{156}$$

onde a última equação é consequência das identidades de Bianchi contraídas.

Para espaços com dimensão $m > 2$ a transformação conforme do tensor de Cotton é

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m-2}\widetilde{C}_{ijk} &= 2\widetilde{\nabla}_{[k}\widetilde{S}_{j]i} = 2\nabla_{[k}\widetilde{S}_{j]i} - 2\omega^l{}_{[jk]}\widetilde{S}_{li} - 2\omega^l{}_{i[k}\widetilde{S}_{j]l} \\
&= 2\nabla_{[k}\widetilde{S}_{j]i} - 2\delta^l_i\nabla_{[k}\omega\widetilde{S}_{j]l} - 2\delta^l_{[k}\nabla_{|i|}\omega\widetilde{S}_{j]l} + 2\nabla^l\omega g_{i[k}\widetilde{S}_{j]l} \\
&= 2\nabla_{[k}\widetilde{S}_{j]i} - 2\nabla_{[k}\omega\widetilde{S}_{j]i} + 2\nabla^l\omega g_{i[k}\widetilde{S}_{j]l} \\
&= 2\nabla_{[k}\widetilde{S}_{j]i} - 4g_{[l[k}\widetilde{S}_{j]i]}\nabla^l\omega \\
&= 2\nabla_{[k}\widetilde{S}_{j]i} - 4\{g_{[l[k}S_{j]i]} + g_{[l[k}\nabla_{j]}\nabla_{i]}\omega \\
&\quad - g_{[l[k}\nabla_{j]}\omega\nabla_{i]}\omega + \tfrac{1}{2}g_{[l[k}g_{j]i]}(\nabla^m\omega\nabla_m\omega)\}\nabla^l\omega.
\end{aligned} \tag{157}$$

Calculando a derivada de $\widetilde{S}_{ji}$,

$$\begin{aligned}
2\nabla_{[k}\widetilde{S}_{j]i} &= 2\left(\nabla_{[k}S_{j]i} + \nabla_{[k}\nabla_{j]}\nabla_i\omega - \nabla_{[k}\nabla_{j]}\omega\nabla_i\omega - \nabla_{[j}\omega\nabla_{k]}\nabla_i\omega + \tfrac{1}{2}(\nabla_l\omega\nabla^l\omega)_{;[k}g_{j]i}\right) \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + R^l{}_{ikj}\nabla_l\omega - 2\nabla_{[j}\omega\nabla_{k]}\nabla_i\omega + 2\nabla^l\omega g_{i[j}\nabla_{k]}\nabla_l\omega \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + (R_{likj} - 2g_{l[j}\nabla_{k]}\nabla_i\omega + 2g_{i[j}\nabla_{k]}\nabla_l\omega)\nabla^l\omega \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + (R_{likj} + 4g_{[l[k}\nabla_{j]}\nabla_{i]}\omega)\nabla^l\omega.
\end{aligned} \tag{158}$$

Juntando as equações

$$
\begin{aligned}
2\widetilde{\nabla}_{[k}\widetilde{S}_{j]i} &= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + (R_{likj} + 4g_{[l[k}\nabla_{j]}\nabla_{i]}\omega)\nabla^l\omega \\
&\quad - 4[g_{[l[k}S_{j]i]} + g_{[l[k}\nabla_{j]}\nabla_{i]}\omega - g_{[l[k}\nabla_{j]}\omega\nabla_{i]}\omega + \tfrac{1}{2}g_{[l[k}g_{j]i]}(\nabla^m\omega\nabla_m\omega)]\nabla^l\omega \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + (R_{likj} - 4g_{[l[k}S_{j]i]})\nabla^l\omega \\
&\quad + 2[g_{l[k}\nabla_{j]}\omega\nabla_i\omega - g_{i[k}\nabla_{j]}\omega\nabla_l\omega - g_{l[k}g_{j]i}(\nabla^m\omega\nabla_m\omega)]\nabla^l\omega \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + C_{likj}\nabla^l\omega \\
&\quad + 2\nabla_{[k}\omega\nabla_{j]}\omega\nabla_i\omega - 2g_{i[k}\nabla_{j]}\omega(\nabla^l\omega\nabla_l\omega) - 2\nabla_{[k}\omega g_{j]i}(\nabla^m\omega\nabla_m\omega).
\end{aligned}
\tag{159}
$$

O resultado final do cálculo da transformação conforme de tensor de Cotton é

$$
\widetilde{C}_{ijk} = C_{ijk} - (m-2)C^l{}_{ijk}\nabla_l\omega. \tag{160}
$$

Para a dimensão $m = 3$ o tensor de Weyl é identicamente nulo e portanto o tensor de Cotton é conformalmente invariante.[45]

Encerramos esta seção mostrando a relação entre as derivadas dos tensores de Weyl e de Ricci. Esta relação é a parte restante da Segunda Identidade de Bianchi, que complementa a Identidade de Bianchi Contraída. Contraindo a Segunda Identidade de Bianchi

$$
\begin{aligned}
3g^{im}R_{ij[kl;m]} &= g^{im}(\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk}) \equiv 0 \\
&= \nabla^i R_{ijkl} - \nabla_k R_{jl} + \nabla_l R_{jk} \\
&= \nabla^i(C_{ijkl} + 2g_{i[k}S_{l]j} - 2g_{j[k}S_{l]i}) - 2\nabla_{[k}R_{l]j} \\
&= \nabla^i C_{ijkl} + 2\nabla_{[k}S_{l]j} - 2g_{j[k}\nabla^i S_{l]i} - 2(m-2)\nabla_{[k}S_{l]j} - 2g_{j[l}\nabla_{k]}S_m{}^m \\
&= \nabla^i C_{ijkl} - (m-3)2\nabla_{[k}S_{l]j} \\
&\quad + g_{jl}(\nabla^i S_{ki} - \nabla_k S_m{}^m) - g_{jk}(\nabla^i S_{li} - \nabla_l S_m{}^m).
\end{aligned}
\tag{161}
$$

Pela Identidade de Bianchi Contraída, as parcelas entre parênteses são nulas

$$
\begin{aligned}
\nabla^i S_{ki} - \nabla_k S_m{}^m &= \frac{1}{m-2}\left[\nabla^i\left(R_{ki} - \frac{Rg_{ki}}{2(m-1)}\right)\right] - \frac{\nabla_k R}{2(m-1)} \\
&= \frac{1}{m-2}\left[\frac{\nabla_k R}{2} - \frac{\nabla_k R}{2(m-1)}\right] - \frac{\nabla_k R}{2(m-1)} = 0.
\end{aligned}
\tag{162}
$$

[45] Nesta dimensão ele pode ser substituído por um pseudo-tensor, chamado *tensor de Cotton-York* e dado por $C^i{}_j = \epsilon^{ikl}C_{jkl}$, onde $\epsilon^{ikl} = \epsilon^{[ikl]}$ é o pseudo-tensor de Hodge tridimensional. O tensor de Cotton-York é simétrico e livre-de-traço.

Logo obtemos a relação prometida

$$\nabla_i C^i{}_{jkl} = -\frac{m-3}{m-2} C_{jkl}. \tag{163}$$

Para variedades com dimensão maior que três a identidade acima mostra que o tensor de Cotton também pode ser calculado através da divergência do tensor de Weyl.

3.5 Geometria de Weyl

Em Relatividade Geral trabalhamos com a geometria riemanniana e sua conexão de Levi-Civita. Para os propósitos deste trabalho precisamos de uma extensão da geometria riemanniana, chamada *geometria de Weyl*.

Introduzimos esta geometria relaxando a condição sobre a derivada covariante da métrica: em vez de exigir que seja zero, pedimos que seja proporcional à métrica.

Definição 3.5.1 *Conexão de Weyl*

Dada uma métrica g_{ij} e uma 1-forma W_k, chamada 1-forma de Weyl, a conexão de Weyl é a conexão livre de torção definida por

$$\mathring{\nabla}_k g_{ij} = 2W_k g_{ij}. \tag{164}$$

Obviamente se a forma de Weyl for zero temos a conexão de Levi-Civita de g_{ij}. Esta condição é suficiente, mas não necessária, para que a derivada de Weyl seja uma conexão métrica. A condição suficiente será dada mais adiante.

Para calcular as componentes da conexão é mais fácil calcular a diferença entre a conexão de Weyl $\mathring{\Gamma}^i{}_{jk}$ e a conexão de Levi-Civita $\Gamma^i{}_{jk}$ dadas por

$$\mathring{\Gamma}^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} - W^i{}_{jk}. \tag{165}$$

Podemos descobrir quanto vale o tensor $W^i{}_{jk}$ usando as derivadas do tensor métrico,

$$\mathring{\nabla}_k g_{ij} = \left(\mathring{\nabla}_k - \nabla_k\right) g_{ij} = W^l{}_{ik} g_{lj} + W^l{}_{jk} g_{il} = 2W_{(ij)k} \equiv 2W_k g_{ij}. \tag{166}$$

Usando as mesmas parcelas que permitiram obter os símbolos de Christoffel temos

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla}_k g_{ij} + \mathring{\nabla}_j g_{ki} - \mathring{\nabla}_i g_{jk} &= 2W_{(ij)k} + 2W_{(ki)j} - 2W_{(jk)i} \\ &= W_{ijk} + W_{jik} + W_{kij} + W_{ikj} - W_{jki} - W_{kji} \\ &= 2W_{ijk} \equiv 2g_{ij}W_k + 2g_{ki}W_j - 2g_{jk}W_i. \end{aligned} \tag{167}$$

O resultado final para o tensor ${W^i}_{jk}$ é

$$ {W^i}_{jk} = \delta^i_j W_k + \delta^i_k W_j - W_l g^{li} g_{jk}. \tag{168} $$

A semelhança com a expressão da transformação conforme das conexões de Levi-Civita não é coincidência, e será esclarecida adiante.

Uma importante consequência da conexão de Weyl é que esta derivada não comuta com as operações de levantar e abaixar índices, Por exemplo, seja $T = g_{ij}T^{ij}$ o traço do tensor T^{ij}, as suas derivadas são relacionadas por

$$ g_{ij}\overset{\circ}{\nabla}_k T^{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_k \left(g_{ij}T^{ij}\right) - T^{ij}\overset{\circ}{\nabla}_k g_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_k T - T^{ij}(2W_k g_{ij}) = \overset{\circ}{\nabla}_k T - 2W_k T. \tag{169} $$

Para a métrica contravariante temos

$$ \overset{\circ}{\nabla}_k g^{ij} = -2W_k g^{ij}. \tag{170} $$

O produto tensorial entre a métrica covariante e contravariante é zero,

$$ \overset{\circ}{\nabla}_m \left(g_{ij}g^{kl}\right) = \left(\overset{\circ}{\nabla}_m g_{ij}\right) g^{kl} + g_{ij}\overset{\circ}{\nabla}_m g^{kl} = (2W_m g_{ij})g^{kl} + g_{ij}(-2W_m g^{kl}) = 0, \tag{171} $$

assim como a derivada da delta de Kronecker também é zero.

Na conexão de Levi-Civita se um vetor X^i é transportado paralelamente ao longo de uma direção Y^i então a derivada de sua norma será zero

$$ Y^k\nabla_k X^i = 0 \Longrightarrow Y^k\nabla_k(g_{ij}X^iX^j) = 0. \tag{172} $$

Isto não ocorre na conexão de Weyl: um vetor transportado paralelamente não terá sua norma necessariamente preservada ao longo daquela direção:

$$ \begin{aligned} Y^k\overset{\circ}{\nabla}_k X^i = 0 \Longrightarrow Y^k\overset{\circ}{\nabla}_k \left(||X||^2\right) &= Y^k\overset{\circ}{\nabla}_k(g_{ij}X^iX^j) = \left(Y^k\overset{\circ}{\nabla}_k g_{ij}\right) X^iX^j \\ &= 2(Y^kW_k)(g_{ij}X^iX^j) = 2Y^kW_k||X||^2. \end{aligned} \tag{173} $$

Por outro lado é possível mostrar que os ângulos são preservados nesta conexão. Para o produto escalar entre dois vetores X^i e Z^i paralelamente transportados temos

$$ Y^k\overset{\circ}{\nabla}_k(g_{ij}X^iZ^j) = 2(Y^kW_k)(g_{ij}X^iZ^j). \tag{174} $$

Por a derivada do cosseno entre os vetores é

$$
\begin{aligned}
Y^k \overset{\circ}{\nabla}_k \cos(\theta) &= Y^k \overset{\circ}{\nabla}_k \left(\frac{g_{ij} X^i Z^j}{\sqrt{||X||^2 ||Z||^2}} \right) \\
&= \frac{2(Y^k W_k)(g_{ij} X^i Z^j)}{\sqrt{||X||^2 ||Z||^2}} - (g_{ij} X^i Z^j) \frac{1}{2} \frac{(4Y^k W_k)(||X||^2 ||Z||^2)}{(||X||^2 ||Z||^2)^{3/2}} = 0.
\end{aligned} \tag{175}
$$

Uma vez que a conexão de Weyl preserva os ângulos entre vetores, é natural perguntar qual é sua relação com as transformações conformes. Dada uma transformação conforme $\widetilde{g}_{ij} = \mathrm{e}^{2\omega} g_{ij}$, a derivada de Weyl da nova métrica é

$$
\overset{\circ}{\nabla}_k \widetilde{g}_{ij} = \overset{\circ}{\nabla}_k (\mathrm{e}^{2\omega} g_{ij}) = 2(W_k + \mathrm{D}_k \omega) \widetilde{g}_{ij} \equiv \widetilde{W}_k \widetilde{g}_{ij}. \tag{176}
$$

Portanto a derivada da métrica transformada possui a mesma forma que a derivada da métrica original, mas com outra forma de Weyl. Além da semelhança formal, é crucial notar que ainda temos a mesma conexão de Weyl. De fato, usando a transformação conforme da conexão de Levi-Civita obtida na seção anterior e juntando com a transformação da forma de Weyl é fácil mostrar que os coeficientes de conexão são iguais,

$$
\overset{\circ}{\widetilde{\Gamma}}{}^i{}_{jk} = \widetilde{\Gamma}^i_{jk} - \widetilde{W}^i{}_{jk} = \Gamma^i_{jk} - W^i{}_{jk} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^i{}_{jk}, \tag{177}
$$

pois os gradientes de ω nas derivadas da métrica e nas formas de Weyl se cancelam.

Embora a definição da conexão de Weyl faça referência a um par específico (g_{ij}, W_k), vemos que a geometria construída por ela define uma classe de equivalência $[g_{ij}, W_k]$ entre pares de métricas e 1-formas, cujas relações são dadas pela *transformação de calibre*

$$
(g_{ij}, W_k) \to (\widetilde{g}_{ij}, \widetilde{W}_k) = (\mathrm{e}^{2\omega} g_{ij}, W_k + \mathrm{D}_k \omega). \tag{178}
$$

Objetos invariantes com respeito à transformação acima podem ser chamados invariantes de *gauge* ou conformalmente invariantes. Daremos preferência a última opção porque ela combina melhor com a natureza deste trabalho.

As considerações algébricas referentes aos tensores conformalmente covariantes se aplicam às transformações de calibre, mas há uma diferença crucial na questão analítica: como a derivada de Weyl é conformalmente invariante, as derivadas de Weyl dos tensores conformalmente covariantes também são conformalmente covariantes.

Em particular, as geodésicas afins (e uma possível parametrização afim) da geometria de Weyl são conformalmente invariantes. A relação com as geodésicas métricas é semelhante àquela entre métricas conformalmente relacionadas, ou seja,

$$\begin{aligned} X^k \overset{\circ}{\nabla}_k X^i - \lambda X^i &= X^k \nabla_k X^i - W^i{}_{jk} X^j X^k - \lambda X^i \\ &= X^k \nabla_k X^i + (g_{jk} X^j X^k) W^i - [2(X^k W_k) + \lambda] X^i = 0. \end{aligned} \tag{179}$$

As conclusões também são semelhantes: as geodésicas nulas são as mesmas, mas em geral com diferentes parametrizações afins; as outras geodésicas são distintas.

Ao contrário dos tensores de Riemann da conexão de Levi-Civita, que não são conformalmente covariantes, a invariância da conexão de Weyl implica que seu tensor de Riemann de tipo $(1,3)$ será invariante. Apesar de não precisarmos testar esta propriedade, ainda temos interesse nas relações entre os tensores de curvatura das duas conexões. Usando a definição de tensor de Riemannn e repetindo os passos usados para encontrar a relação entre dois tensores de Riemann de métricas conformalmente relacionadas, chegamos a uma equação formalmente idêntica,

$$\overset{\circ}{R}{}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} - 2\nabla_{[l} W^i{}_{|j|k]} + 2W^m{}_{j[k} W^i{}_{|m|l]}, \tag{180}$$

onde $R^i{}_{jkl}$ é o tensor de Riemann da conexão de Levi-Civita.

Embora a forma seja idêntica, há diferenças estruturais importantes entre as equações. No lado esquerdo da equação o tensor de Riemann da conexão de Weyl não possui a antissimetria nos dois primeiros índices, ou a simetria da troca de pares de índices, ao contrário do tensor de Riemann da conexão de Levi-Civita. No lado direito a derivada covariante da métrica não é zero e a derivada covariante da forma de Weyl não é necessariamente simétrica, ao contrário dos gradientes das funções ω.

Devemos computar as duas parcelas com as formas de Weyl. A segunda é formalmente idêntica à equação para uma transformação conforme, bastando substituir os gradientes pela forma de Weyl. Logo esta parcela vale

$$2W^m{}_{j[k} W^i{}_{|m|l]} = 2\delta^i_{[l} W_{k]} W_j - 2g_{j[l} W_{k]} W^i + 2(W_m W^m)\delta^i_{[k} g_{l]j}. \tag{181}$$

A primeira parcela envolve derivadas com propriedades diferentes das transformações conformes entre geometrias riemannianas, portanto precisamos calculá-la novamente. Temos

$$2\nabla_{[l} W^i{}_{|j|k]} = 2\delta^i_j \nabla_{[l} W_{k]} + 2\delta^i_{[k} \nabla_{l]} W_j - 2g^{im} g_{j[k} \nabla_{l]} W_m. \tag{182}$$

O resultado da relação entre os tensores de curvatura é

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{R}{}^i{}_{jkl} = R^i{}_{jkl} &+ 2\delta^i_j \nabla_{[k} W_{l]} - 2\delta^i_{[k} \nabla_{l]} W_j + 2g^{im} g_{j[k} \nabla_{l]} W_m \\ &- 2\delta^i_{[k} W_{l]} W_j + 2g_{j[k} W_{l]} W^i + 2(W_m W^m)\delta^i_{[k} g_{l]j}. \end{aligned} \tag{183}$$

Novamente o resultado é mais simétrico se usarmos componentes totalmente covariantes

$$\begin{aligned}\mathring{R}_{ijkl} &= R_{ijkl} + 2g_{ij}\nabla_{[k}W_{l]} - 2g_{i[k}\nabla_{l]}W_j + 2g_{j[k}\nabla_{l]}W_i \\ &\quad - 2g_{i[k}W_{l]}W_j + 2g_{j[k}W_{l]}W_i + 2(W_m W^m)g_{i[k}g_{l]j} \\ &= R_{ijkl} + 2g_{ij}\nabla_{[k}W_{l]} - 4g_{[i[k}\nabla_{l]}W_{j]} - 4g_{[i[k}W_{l]}W_{j]} + 2(W_m W^m)g_{i[k}g_{l]j}. \end{aligned} \tag{184}$$

As três últimas parcelas são formalmente idênticas à transformação conforme entre geometrias riemannianas, mas com a importante diferença que o tensor $\nabla_k W_l$ não é simétrico. A segunda parcela é responsável pela maior diferença algébrica entre os tensores de curvatura. Como consequência desta parcela temos

$$\mathring{R}_{(ij)kl} = 2g_{ij}\nabla_{[k}W_{l]} \implies \mathring{R}^i{}_{ikl} = 2m\nabla_{[k}W_{l]}, \tag{185}$$

onde $\mathring{R}^i{}_{ikl}$ é chamado de *tensor homotético* ou *segmental curvature tensor* (JIMÉNEZ; HEISENBERG; KOIVISTO, 2016) e m é a dimensão da variedade.

Estes tensores são relacionados com a variação da métrica ao ser transportada paralelamente num circuito local fechado

$$2\mathring{\nabla}_{[k}\mathring{\nabla}_{l]}g_{ij} = g_{mj}\mathring{R}^m{}_{ikl} + g_{im}\mathring{R}^m{}_{jkl} = 2\mathring{R}_{(ij)kl} \equiv 2g_{ij}W_{kl}, \tag{186}$$

onde o novo tensor W_{kl} é a derivada exterior da forma de Weyl,

$$W_{kl} = 2\mathring{\nabla}_{[k}W_{l]} = 2\nabla_{[k}W_{l]} = \mathrm{D}_k W_l - \mathrm{D}_l W_k + \gamma^i{}_{kl}W_i. \tag{187}$$

Este tensor será chamado *2-forma de Weyl* e é conformalmente invariante.[46]

Se a 2-forma de Weyl é zero a geometria é chamada *geometria de Weyl integrável.* Para estas geometrias a métrica não muda ao ser transportada ao longo de uma curva fechada, ou equivalentemente, a variação da métrica ao ser transportada de entre dois pontos é independente do caminho usado. Aplicações deste tipo de geometria de Weyl à gravitação estão em (ROMERO; FONSECA-NETO; PUCHEU, 2012) e (POULIS; SALIM, 2014).

Nestes casos a forma de Weyl é o gradiente de alguma função f, $W_i = \mathrm{D}_i f$, e podemos usar uma transformação conforme com $\omega = -f$ que leva o par $(g_{ij}, \mathrm{D}_k f)$ para um novo par $(\tilde{g}_{ij}, 0) = (\mathrm{e}^{-2f}g_{ij}, 0)$ que satisfaz $\mathring{\nabla}_k\tilde{g}_{ij} = 0$, ou seja, que é uma conexão de Levi-Civita. A conclusão é clara: uma geometria de Weyl é conformalmente equivalente a uma geometria riemanniana se e somente se ela é uma geometria de Weyl integrável.

Assim como o tensor de Riemann, o tensor de Ricci da conexão de Weyl é alge-

[46] Análogo ao tensor de Faraday de um campo eletromagnético, que também é invariante de gauge.

bricamente mais complicado que aquele da conexão de Levi-Civita. Em particular, este tensor de Ricci não é simétrico. Contraindo temos

$$\mathring{R}_{ij} = R_{ij} + W_{ij} - (m-2)(\nabla_j W_i + W_j W_i) - (\nabla^m W_m - (m-2)W^m W_m)g_{ij}, \tag{188}$$

e em particular, para a parte antissimétrica

$$\mathring{R}_{[ij]} = \left(\tfrac{1}{2}m\right) W_{ij}. \tag{189}$$

Quanto à relação entre os escalares de Ricci temos

$$\mathring{R} = R - 2(m-1)\nabla^k W_k + (m-1)(m-2)W^k W_k. \tag{190}$$

Ambas as identidades de Bianchi ainda são válidas. A Segunda Identidade de Bianchi ainda é escrita como

$$3\mathring{\nabla}_{[m}\mathring{R}^i{}_{|j|kl]} = \mathring{\nabla}_m \mathring{R}^i{}_{jkl} + \mathring{\nabla}_l \mathring{R}^i{}_{jmk} + \mathring{\nabla}_k \mathring{R}^i{}_{jlm} \equiv 0. \tag{191}$$

Com uma contração temos

$$\mathring{\nabla}_i \mathring{R}^i{}_{jkl} + \mathring{\nabla}_l \mathring{R}_{jk} - \mathring{\nabla}_k \mathring{R}_{jl} = 0. \tag{192}$$

Fazendo uma contração entre os índices j e l e usando a propriedade de Leibniz, a primeira parcela vale

$$\begin{aligned} g^{jl}\mathring{\nabla}_i \mathring{R}^i{}_{jkl} &= \mathring{\nabla}_i \left(g^{jl}\mathring{R}^i{}_{jkl}\right) - \left(\mathring{\nabla}_i g^{jl}\right)\mathring{R}^i{}_{jkl} \\ &= \mathring{\nabla}_i \left[g^{jl}\left(-\mathring{R}_j{}^i{}_{kl} + 2\delta^i_j W_{kl}\right)\right] - (-2W_i g^{jl})\left(-\mathring{R}_j{}^i{}_{kl} + 2\delta^i_j W_{kl}\right) \\ &= g^{im}\mathring{\nabla}_i \mathring{R}_{mk} + \mathring{R}_{ik}\mathring{\nabla}_i g^{im} + 2W_{kl}\mathring{\nabla}_i g^{il} + 2g^{il}\mathring{\nabla}_i W_{kl} + 2W_i\left(\mathring{R}^i{}_k + 2W_k{}^i\right) \\ &= \mathring{\nabla}^m \mathring{R}_{mk} + \mathring{R}_{mk}(-2W^m) + 2W_{kl}(-2W^l) + 2\mathring{\nabla}^l W_{kl} + 2W_i\left(\mathring{R}^i{}_k + 2W_k{}^i\right) \\ &= \mathring{\nabla}^m \mathring{R}_{mk} - 2\mathring{\nabla}^l W_{lk}. \end{aligned} \tag{193}$$

As outras duas parcelas valem

$$g^{jl}\mathring{\nabla}_l \mathring{R}_{jk} = \mathring{\nabla}^j \mathring{R}_{jk} \tag{194}$$

$$g^{jl}\mathring{\nabla}_k \mathring{R}_{jl} = \mathring{\nabla}_k \left(g^{jl}\mathring{R}_{jl}\right) - \mathring{R}_{jl}\mathring{\nabla}_k g^{jl} = \mathring{\nabla}_k \mathring{R} + 2W_k \mathring{R} = \mathring{\nabla}^l\left(\mathring{R} g_{lk}\right). \tag{195}$$

Juntando as três equações, obtemos as novas identidades contraídas

$$\mathring{\nabla}^i \mathring{G}_{ij} = \mathring{\nabla}^i\left(\mathring{R}_{ij} - W_{ij} - \tfrac{1}{2}\mathring{R} g_{ij}\right) = 0, \tag{196}$$

onde definimos $\overset{\circ}{G}_{ij} = \overset{\circ}{R}_{ij} - W_{ij} - \frac{1}{2}\overset{\circ}{R}g_{ij}$ como o novo (e não-simétrico) tensor de Einstein.

Definiremos o tensor de Schouten da geometria de Weyl como (note a troca na ordem dos índices na primeira linha)[47]

$$\overset{\circ}{S}_{ji} = \frac{1}{m-2}\left(\overset{\circ}{R}_{ij} - W_{ij} - \frac{1}{2(m-1)}\overset{\circ}{R}g_{ij}\right) = S_{ji} - \nabla_j W_i - W_j W_i + \tfrac{1}{2}(W^k W_k)g_{ji}. \quad (197)$$

Este tensor de Schouten, assim como o tensor de Ricci, possui uma parte antissimétrica dada por

$$\overset{\circ}{S}_{[ij]} = -\tfrac{1}{2}W_{ij}. \quad (198)$$

De forma análoga ao caso riemanniano, o tensor de curvatura da geometria de Weyl na equação (184) pode ser reescrito como

$$\overset{\circ}{R}_{ijkl} = C_{ijkl} + g_{ij}W_{kl} + 4g_{[i[k}\overset{\circ}{S}_{l]j]}. \quad (199)$$

Definiremos o tensor de Cotton da geometria de Weyl por

$$\overset{\circ}{C}_{ijk} = 2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{R}_{j]i} - \frac{2}{m-1}\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\left(\overset{\circ}{R}g_{j]i}\right) \equiv 2(m-2)\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i}, \quad (200)$$

ou seja, formalmente idêntico ao caso riemanniano. A relação entre os dois tensores de Cotton pode ser encontrada de forma semelhante à transformação entre os tensores de Cotton de duas geometrias riemannianas conformalmente relacionadas, através de

$$2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i} = 2\nabla_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i} + 2W^l{}_{[jk]}\overset{\circ}{S}_{li} + 2W^l{}_{i[k}\overset{\circ}{S}_{j]l} = 2\nabla_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i} + 2W^l{}_{i[k}\overset{\circ}{S}_{j]l}. \quad (201)$$

A primeira parcela vale

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i} &= 2\nabla_{[k}S_{j]i} - 2\nabla_{[k}\nabla_{j]}W_i - 2(\nabla_{[k}W_{j]})W_i - 2W_{[j}\nabla_{k]}W_i + 2W^l g_{i[j}\nabla_{k]}W_l \\ &= 2\nabla_{[k}S_{j]i} - R^l{}_{ikj}W_l - W_{kj}W_i - 2W_{[j}\nabla_{k]}W_i + 2W^l g_{i[j}\nabla_{k]}W_l \\ &= 2\nabla_{[k}S_{j]i} - (R^l{}_{ikj} + \delta^l_i W_{kj} - 2g_{i[j}\nabla_{k]}W^l)W_l - 2W_{[j}\nabla_{k]}W_i, \end{aligned} \quad (202)$$

[47] Esta definição é diferente daquela dada em (WHEELER, 2018), que usa apenas a parte simétrica deste tensor. As duas definições são coincidentes apenas em variedades de Weyl integráveis.
Os cálculos e definições aqui são anteriores a publicação deste artigo.

enquanto a segunda parcela vale

$$
\begin{aligned}
2W^l{}_{i[k}\overset{\circ}{S}_{j]l} &= 2W_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i} + 2W_i\overset{\circ}{S}_{[jk]} - 2W^l g_{i[k}\overset{\circ}{S}_{j]l} \\
&= 2[W_{[k}S_{j]i} - W_{[k}\nabla_{j]}W_i + \tfrac{1}{2}(W^lW_l)W_{[k}g_{j]i}] - W_iW_{jk} \\
&\quad - 2[W^l g_{i[k}S_{j]l} - W^l g_{i[k}\nabla_{j]}W_l - W^l g_{i[k}W_{j]}W_l + \tfrac{1}{2}(W^lW_l)g_{i[k}W_{j]}] \\
&= (2\delta^l_{[k}S_{j]i} - \delta^l_i W_{jk} - 2g_{i[k}S_{j]}{}^l + 2g_{i[k}\nabla_{j]}W^l)W_l - 2W_{[k}\nabla_{j]}W_i.
\end{aligned}
\tag{203}
$$

Juntando ambas as parcelas temos

$$
\begin{aligned}
2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{S}_{j]i} &= 2\nabla_{[k}S_{j]i} + (-R^l{}_{ikj} - \delta^l_i W_{kj} + 2g_{i[j}\nabla_{k]}W^l)W_l - 2W_{[j}\nabla_{k]}W_i \\
&\quad + (2\delta^l_{[k}S_{j]i} - \delta^l_i W_{jk} - 2g_{i[k}S_{j]}{}^l + 2g_{i[k}\nabla_{j]}W^l)W_l - 2W_{[k}\nabla_{j]}W_i \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} - (R^l{}_{ikj} - 2\delta^l_{[k}S_{j]i} + 2g_{i[k}S_{j]}{}^l)W_l \\
&= 2\nabla_{[k}S_{j]i} - C^l{}_{ikj}W_l.
\end{aligned}
\tag{204}
$$

A conclusão é análoga à transformação conforme entre geometrias riemannianas

$$
\overset{\circ}{C}_{ijk} = C_{ijk} + (m-2)W_lC^l{}_{ijk}. \tag{205}
$$

Para os casos tridimensionais o tensor de Weyl é identicamente zero, e os tensores de Cotton de ambas as geometrias coincidem.

Voltando à equação (192) usamos a relação entre tensores de Riemann, Weyl e Schouten para escrever a primeira parcela como

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\nabla}_i\overset{\circ}{R}^i{}_{jkl} &= \overset{\circ}{\nabla}_i\left(C^i{}_{jkl} + \delta^i_j W_{kl} + 2\delta^i_{[k}\overset{\circ}{S}_{l]j} - 2g_{j[k}\overset{\circ}{S}_{l]}{}^i\right) \\
&= \overset{\circ}{\nabla}_i C^i{}_{jkl} + \overset{\circ}{\nabla}_j W_{kl} + 2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{S}_{l]j} - 2g_{j[k}\overset{\circ}{\nabla}^i\overset{\circ}{S}_{l]i},
\end{aligned}
\tag{206}
$$

enquanto as outras duas parcelas valem

$$
2\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{R}_{|j|k]} = 2(m-2)\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{S}_{k]j} - 2\overset{\circ}{\nabla}_{[l}W_{k]j} + \frac{1}{m-1}\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\left(\overset{\circ}{R}g_{k]j}\right). \tag{207}
$$

Juntando ambas, a equação (192) é escrita como

$$
\begin{aligned}
0 &= \overset{\circ}{\nabla}_i\overset{\circ}{R}^i{}_{jkl} + 2\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{R}_{|j|k]} \\
&= \overset{\circ}{\nabla}_i C^i{}_{jkl} + \overset{\circ}{\nabla}_j W_{kl} + 2\overset{\circ}{\nabla}_{[k}\overset{\circ}{S}_{l]j} - 2g_{j[k}\overset{\circ}{\nabla}^i\overset{\circ}{S}_{l]i} \\
&\quad + 2(m-2)\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{S}_{k]j} + \overset{\circ}{\nabla}_k W_{lj} + \overset{\circ}{\nabla}_l W_{jk} + \frac{1}{m-1}\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\left(\overset{\circ}{R}g_{k]j}\right) \\
&\equiv \overset{\circ}{\nabla}_i C^i{}_{jkl} + 3\overset{\circ}{\nabla}_{[j}W_{kl]} + 2(m-3)\overset{\circ}{\nabla}_{[l}\overset{\circ}{S}_{k]j} + \Delta_{jkl}.
\end{aligned}
\tag{208}
$$

O tensor Δ_{jkl} vale

$$\begin{aligned}\Delta_{jkl} = & -2g_{j[k}\mathring{\nabla}^i\mathring{S}_{l]i} + \frac{1}{m-1}\mathring{\nabla}_{[l}\left(\mathring{R}g_{k]j}\right) \\ = & -\frac{2}{(m-2)}\left(g_{j[k}\mathring{\nabla}^i\mathring{R}_{|i|l]} - g_{j[k}\mathring{\nabla}^i W_{|i|l]} - \frac{1}{2(m-1)}g_{j[k}\mathring{\nabla}^i\left(\mathring{R}g_{l]i}\right)\right) \qquad (209)\\ & + \frac{1}{m-1}\mathring{\nabla}_{[l}\left(\mathring{R}g_{k]j}\right). \qquad (210)\end{aligned}$$

Usando as identidades contraídas podemos trocar a divergência nas duas primeiras parcelas pelas derivadas do escalar de Ricci. Continuando o cálculo de Δ_{jkl},

$$\begin{aligned}\Delta_{jkl} &= -\frac{2}{(m-2)}\left(\frac{1}{2}g_{j[k}\mathring{\nabla}^i\left(\mathring{R}g_{l]i}\right) - \frac{1}{2(m-1)}g_{j[k}\mathring{\nabla}^a\left(\mathring{R}g_{l]i}\right)\right) + \frac{1}{m-1}\mathring{\nabla}_{[l}\left(\mathring{R}g_{k]j}\right) \\ &= -\frac{1}{(m-1)}g_{j[k}\mathring{\nabla}^i\left(\mathring{R}g_{l]i}\right) + \frac{1}{m-1}\mathring{\nabla}_{[l}\left(\mathring{R}g_{k]j}\right) \\ &= -\frac{1}{m-1}\left[\left(g_{j[k}\mathring{\nabla}_{l]}\mathring{R} + 2g_{j[k}W_{l]}\mathring{R}\right) - \left(\left(\mathring{\nabla}_{[l}\mathring{R}\right)g_{k]j} + 2\mathring{R}W_{[l}g_{k]j}\right)\right] = 0. \qquad (211)\end{aligned}$$

Por outro lado, já que a conexão não tem torção, vale[48]

$$\mathring{\nabla}_{[j}W_{kl]} = 2\mathring{\nabla}_{[j}\mathring{\nabla}_k W_{l]} = 2\mathring{R}^i{}_{[jkl]}W_i = 0. \qquad (212)$$

Temos a outra parte da Identidade de Bianchi, também idêntica ao caso riemanniano,

$$\mathring{\nabla}_i C^i{}_{jkl} = -\frac{m-3}{m-2}\mathring{C}_{jkl}. \qquad (213)$$

[48] Este resultado vale para tensores covariantes totalmente antissimétricos de qualquer ordem, e é outra forma do Lema de Poincaré.

4 PROBLEMAS DE EQUIVALÊNCIAS

Neste capítulo em descobrir quando dois *coframes* diferem apenas por um difeomorfismo e/ou pela ação linear de um grupo).

Na primeira seção estaremos interessados apenas em descobrir se podemos mapear um *coframe* noutro apenas com um difeomorfismo, o chamado *Problema de Equivalência de Coframes*. Seguiremos a abordagem do oitavo capítulo do texto de Olver (OLVER, 1995). A equivalência de *coframes* é o ponto de partida não apenas por sua simplicidade, mas também por sua solução ser a base da resposta de outros problemas de equivalência.

Na segunda seção queremos descobrir quando dois *coframes* diferem por um difeomorfismo e uma transformação linear dada pela ação linear de um grupo. Chamamos este problema de *Problema de G-equivalência de Coframes*. Novamente adaptaremos os argumentos de Olver, especificamente os capítulos 10 a 12.

Uma abordagem alternativa, cujo ponto de partida é o problema de G-equivalência, pode ser encontrada em Gardner (GARDNER, 1989).

4.1 Equivalência de Coframes

Começamos esta seção definindo o que queremos dizer quando afirmamos que dois *coframes* são equivalentes.

Definição 4.1.1 (Coframes equivalentes)
Sejam $U \subset M$ e $\overline{U} \subset \overline{M}$ dois subconjuntos abertos de duas variedades de dimensão m, e ω e $\overline{\omega}$ dois coframes definidos respectivamente em U e $\overline{U}$. Os coframes são (localmente) equivalentes se houver um difeomorfismo $\Phi : U \to \overline{U}$ tal que $\Phi^*\overline{\omega} = \omega$.

Obviamente *coframes* definidos em variedades de dimensões distintas não podem ser equivalentes. Se $M = \overline{M}$ temos um automorfismo, e podemos dizer que temos o mesmo *coframe* em diferentes sistemas de coordenadas (a equivalência de *coframes* é uma generalização desta ideia).

Com a definição acima, podemos formular o problema de equivalência de *coframes*: dados dois *coframes* quaisquer, como descobrir se eles são equivalentes?

A forma mais óbvia de resolver o problema é usar dois sistemas de coordenadas x e $\overline{x}$ definidos em M e $\overline{M}$, escrever as componentes dos *coframes* em termos das diferenciais das coordenadas, usar a regra da cadeia para escrever o *pullback*, e tentar resolver o sistema de m equações diferenciais parciais em m variáveis para algum difeomorfismo $\overline{x} = \Phi(x)$,

$$\Phi^*\overline{\omega}^i = \omega^i \Longrightarrow \Phi^*\left(\overline{\omega}^i_a(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}^a\right) = \overline{\omega}^i_a(\Phi(x))\frac{\partial \Phi^a}{\partial x^b}(x)\mathrm{d}x^b = \omega^i_b(x)\mathrm{d}x^b. \tag{214}$$

Na prática há boas chances de não conseguirmos resolver estas equações ou provar que uma solução não existe. Precisamos de uma ideia mais refinada para resolver este problema.

A solução do problema foi obtida por Cartan. O método usado por Cartan para resolver a equivalência de *coframes* consiste em trocar as m equações diferenciais parciais acima por um conjunto finito de equações algébricas (em geral, transcendentais).

A chave para esta troca é a invariância do operador de derivação exterior d ao *pullback*. Sejam $\overline{F}$ uma função em $\overline{M}$ e $F = \overline{F} \circ \Phi$ a função mapeada pelo difeomorfismo em M. Junto com os *coframes* ω e $\overline{\omega}$, valem as igualdades

$$\Phi^*\mathrm{d}\overline{\omega}^i = \mathrm{d}\omega^i, \;\; \Phi^*\mathrm{d}\overline{F} = \mathrm{d}F. \tag{215}$$

Para compreender a primeira destas equações devemos lembrar que as derivadas exteriores do *coframe* introduzem as $\frac{1}{2}m^2(m-1)$ funções de estrutura

$$\mathrm{d}\omega^i = \tfrac{1}{2}\Omega^i{}_{jk}(x)\omega^j \wedge \omega^k. \tag{216}$$

Aplicando o *pullback* para esta equação em $\overline{M}$ e lembrando que $\Phi^*\overline{\omega}^i = \omega^i$,

$$\Phi^*\mathrm{d}\overline{\omega}^i = \tfrac{1}{2}\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\Phi(x))(\Phi^*\overline{\omega}^j) \wedge (\Phi^*\overline{\omega}^k) = \tfrac{1}{2}\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\Phi(x))\omega^j \wedge \omega^k. \tag{217}$$

Como os produtos exteriores são linearmente independentes só nos resta concluir

$$\Omega^i{}_{jk}(x) = \overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \overline{\Omega}^i{}_{jk}(\Phi(x)), \tag{218}$$

ou seja, *coframes* equivalentes possuem necessariamente as mesmas funções de estrutura, porém escritas em coordenadas diferentes. Interpretando a equação acima de outra forma, podemos afirmar: se os *coframes* forem equivalentes então as equações que igualam as funções de estrutura *necessariamente* possuem uma solução $\overline{x} = \Phi(x)$.

Para entender a outra equação de invariância do operador d lembramos que $\mathrm{d}F = (\mathrm{D}_i F(x))\omega^i$. Aplicando o *pullback* para $\mathrm{d}\overline{F}$ temos

$$\Phi^*\mathrm{d}\overline{F} = (\Phi^*\overline{\mathrm{D}}_i\overline{F}(\overline{x}))(\Phi^*\overline{\omega}^i) = \overline{\mathrm{D}}_i\overline{F}(\Phi(x))\omega^i. \tag{219}$$

Juntando as duas equações acima e a relação entre as diferenciais das funções escalares temos outra relação de igualdade entre as componentes

$$\mathrm{D}_i F(x) = \overline{\mathrm{D}}_i\overline{F}(\overline{x}) = \overline{\mathrm{D}}_i\overline{F}(\Phi(x)) \implies \mathrm{D}_i F = \left(\overline{\mathrm{D}}_i\overline{F}\right) \circ \Phi. \tag{220}$$

Portanto as derivada absolutas das funções $F, \overline{F}$ também são as mesmas funções em coordenadas diferentes. Além disto, podemos aplicar novamente o operador d para a equação acima para obter uma relação idêntica para as derivadas superiores.

Dados dois *coframes* arbitrários, para tentar usar as derivadas na solução do problema de equivalência precisamos ter certeza que os derivandos são relacionadas pelo difeomorfismo. Felizmente conhecemos um conjunto de funções que satisfaz estes propriedades: as funções de estrutura. Portanto valem as (infinitas) equações

$$\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \Omega^i{}_{jk}(x),\ \overline{\mathrm{D}}_l\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x),\ \overline{\mathrm{D}}_m\overline{\mathrm{D}}_l\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \mathrm{D}_m\mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x),\ \ldots \tag{221}$$

Todas estas funções são invariantes ao difeomorfismo, por isto são chamadas *invariantes de Cartan* do *coframe*.

Definição 4.1.2 (Invariantes de Cartan)

Dado um coframe ω *definido numa variedade* M *o conjunto das funções de estrutura e suas derivadas absolutas*

$$\{\Omega^i{}_{jk}(x), \mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x), \mathrm{D}_m\mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x), \mathrm{D}_n\mathrm{D}_m\mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x), \ldots\} \tag{222}$$

são os mesmos para quaisquer coframes equivalentes, e seus elementos são chamados invariantes de Cartan do coframe. A ordem do invariante é definida como a ordem da derivada (sendo zero a ordem das funções de estrutura).

Temos um conjunto de equações (221) para testar a equivalência de *coframes*. Se dois *coframes* são equivalentes há (ao menos) uma solução $\overline{x} = \Phi(x)$ destas equações, mas não podemos testar se um conjunto infinito de equações possui solução. Precisamos obter um subconjunto mínimo de equações que seja suficiente para inferir a equivalência.

Apesar de haver infinitos invariantes de Cartan, nem todos são independentes. Os comutadores das derivadas dos *frames* vinculam derivadas primeiras e segundas, enquanto a identidade de Jacobi vincula as derivadas primeiras e os quadrados das funções de estrutura. Estes vínculos mostram que o número efetivo de invariantes é menor que aparenta inicialmente, mas eles não são o suficiente para eliminar todas as redundâncias. Para resolver a questão precisamos de um novo conceito: *dependência funcional*.

Definição 4.1.3 (Dependência Funcional)

Sejam N *funções* $f_1, f_2, \ldots, f_N$ *definidas numa variedade* M*. Estas funções são ditas funcionalmente dependentes se houver um mapa suave* $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tal que*[49]

$$H \circ (f_1, f_2 \ldots, f_N) = H(f_1, f_2, \ldots, f_N) = 0. \tag{223}$$

Obviamente testar a dependência funcional de um conjunto procurando alguma função H que satisfaça a definição é ineficiente. Felizmente há um método mais simples

[49] De forma mais intuitiva, dizemos que as funções são funcionalmente dependentes se formos capaz de escrever (qualquer) uma delas em termos das outras.

para obter a resposta: derivando a equação acima e usando a regra da cadeia temos

$$\frac{\partial H}{\partial f_1}\mathrm{d}f_1 + \frac{\partial H}{\partial f_2}\mathrm{d}f_2 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial f_N}\mathrm{d}f_N = 0, \tag{224}$$

ou seja, as diferenciais das funções são linearmente diferentes. Na prática, para testar a independência linear das funções devemos calcular o produto exterior $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}f_N$, que será zero se e somente se o conjunto for linearmente dependente.

Sabemos que numa variedade m-dimensional todas as formas diferenciais de ordem maior que m são identicamente zero. Portanto numa variedade m-dimensional podemos encontrar no máximo m funções funcionalmente independentes.[50]

O conceito de dependência funcional e o limite no número de funções independentes são a chave que falta para resolver o problema de equivalência de *coframes*. Sabemos que no conjunto de infinitos invariantes de Cartan há um número finito $s \leq m$ de invariantes funcionalmente independentes. Sejam $I_1(x), \ldots, I_s(x)$ um conjunto maximal de s invariantes de Cartan funcionalmente independentes do *coframe*. Qualquer outro invariante de Cartan $I(x)$ pode ser escrito como função dos elementos do conjunto, portanto temos

$$I(x) \equiv H(I_1(x), \ldots, I_s(x)). \tag{225}$$

Por outro lado, sejam $\overline{I}_1(\overline{x}), \ldots, \overline{I}_s(\overline{x})$ e $\overline{I}(\overline{x})$ estes invariantes calculados em outro *coframe* equivalente. Como os invariantes são iguais eles satisfazem as mesmas equações, logo

$$\overline{I}(\overline{x}) \equiv H(\overline{I}_1(\overline{x}), \ldots, \overline{I}_s(\overline{x})). \tag{226}$$

Ou seja, as funções H que caracterizam as relações funcionais entre os invariantes também são invariantes. Estas funções são chamadas *funções classificatórias*. Note que a forma dos invariantes depende do sistema de coordenadas, mas as funções classificatórias são exatamente as mesmas em todos os *coframes* equivalentes.

Inicialmente parece que trocamos o problema de resolver infinitas equações pelo de determinar infinitas funções classificatórias, mas esta impressão é equivocada. Se sabemos que o invariante $I(x)$ é relacionado aos invariantes funcionalmente independentes pela função classificatória H sabemos que suas derivadas absolutas são relacionadas por

$$\mathrm{D}_k I = \mathrm{D}_k H(I_1, \ldots, I_s) = \frac{\partial H}{\partial I_1}\mathrm{D}_k I_1 + \frac{\partial H}{\partial I_2}\mathrm{D}_k I_2 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial I_s}\mathrm{D}_k I_s. \tag{227}$$

Por outro lado os invariantes $I_1, I_2 \ldots, I_s$ foram supostos como um conjunto maximal de invariantes independentes, logo as suas próprias derivadas absolutas são funcionalmente

[50] Uma forma mais concreta de expressar esta ideia é que podemos escrever todas as funções $f \in \mathbb{F}(M, \mathbb{R})$ como mapas $f(x)$ de (no máximo) m coordenadas.

dependentes dos elementos do conjunto,

$$\mathrm{D}_k I_1 = H_{k,1}(I_1, I_2, \dots, I_s), \dots, \mathrm{D}_k I_s = H_{k,s}(I_1, I_2, \dots, I_s). \tag{228}$$

Se sabemos que I é relacionado a um conjunto maximal de invariantes funcionalmente independentes por uma função classificatória H sabemos automaticamente quais são as funções classificatórias que relacionam as derivadas de I e não precisamos computá-las.

A última peça da solução é descobrir como obter o número máximo de invariantes funcionalmente independentes A resposta está no próprio conjunto de invariantes de Cartan: calculamos novas derivadas, testamos a dependência funcional dos novos invariantes de Cartan com aqueles de ordem menor e adicionamos qualquer novo invariante independente ao conjunto $I_1, I_2, \dots$ até encontrarmos a ordem $\sigma + 1 \leq m$ tal que todos os novos invariantes são funcionalmente dependentes dos invariantes de ordem menor.

Conhecidas as funções classificatórias dos invariantes desta ordem (e das anteriores) sabemos automaticamente as funções classificatórias das ordens maiores. Temos então um conjunto minimal de condições necessárias para dois *coframes* serem equivalentes. Com uma condição extra de regularidade, esta condição também é suficiente.[51]

Teorema 4.1.1 (Teorema de Equivalência de Coframes)

Um coframe é dito totalmente regular se o número de invariantes funcionalmente independente em cada ordem é constante (independe do ponto).

O posto do coframe é número máximo de invariantes de Cartan funcionalmente independentes.

Dois coframes totalmente regulares são equivalentes se e somente se existe uma solução $\overline{x} = \Phi(x)$ para os conjunto de equações que igualam seus invariantes de Cartan,

$$\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \Omega^i{}_{jk}(x),\ \overline{\mathrm{D}}_l\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x),\ \overline{\mathrm{D}}_m\overline{\mathrm{D}}_l\overline{\Omega}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \mathrm{D}_m\mathrm{D}_l\Omega^i{}_{jk}(x), \dots. \tag{229}$$

É preciso que os *coframes* sejam totalmente regulares pois a demonstração do teorema requer o uso do teorema de Frobenius para a solução de equações diferenciais. A prova pode ser encontrada no teorema 14.24 de Olver (OLVER, 1995).

Se um *coframe* possuir posto igual à dimensão da variedade em que foi definido, podemos usar os invariantes de Cartan como coordenadas para a variedade. Por outro lado, qual o significado de um *coframe* possuir posto menor que a dimensão da variedade? A resposta é dada pela definição abaixo.

[51] A natureza local do nosso problema resulta em dificuldades práticas para o uso das funções classificatórias, relacionadas à diferenças nos domínios onde os *coframes* são definidos, inequações que os invariantes devem satisfazer ou a funções multivaloradas que geram ambiguidades nas relações entre os invariantes. Para resolver estes problemas é preciso definir um gráfico num espaço euclidiano de dimensão maior, chamado *variedade de classificação*. Detalhes sobre estas variedades podem ser encontrados no texto de Olver (OLVER, 1995).

Definição 4.1.4 (Grupo de Simetria de um Coframe)

Seja ω um coframe definido num subconjunto aberto de M. O grupo de simetria de ω é o conjunto de pullback auto-equivalentes, ou seja, que satisfazem $\Phi^*\omega = \omega$.

Na prática a definição acima nos diz que o *coframe* possui a *mesma forma* em ambos os sistemas de coordenadas. Um exemplo trivial são os *coframes* holônomos $(\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^m)$ cujo grupo de simetria é dado pelas translações $(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^m) = (x^1 + x_0^1, \ldots, x^m + x_0^m)$. Nas novas coordenadas o *coframe* tem a forma $(\mathrm{d}\overline{x}^1, \ldots, \mathrm{d}\overline{x}^m)$, exatamente a mesma forma do *coframe* no sistema de coordenadas anterior. No caso mais geral de simetria máxima, se todas as funções de estrutura são constantes sabemos que o *coframe* é equivalente a um *coframe* de Maurer-Cartan, portanto invariante a ação do grupo correspondente.

Por outro lado considere um *coframe* ω de posto s, e um sistema de coordenadas locais dadas por s invariantes de Cartan $I = (I_1, \ldots, I_s)$ funcionalmente independentes de ω e outras $m - s$ coordenadas quaisquer. Restringindo o *coframe* às curvas de nível $I_1 = c_1, \ldots, I_s = c_s$, sendo todos os $c_1, \ldots, c_s$ constantes, obtemos um *coframe* de dimensão $m - s$ com funções de estrutura constantes, que gera o grupo de transformação requerido.

Temos o seguinte teorema

Teorema 4.1.2

Seja ω um coframe de posto s definido num subconjunto aberto U de uma variedade m-dimensional M. Então ω possui um grupo de simetria contínuo (e conexo com a identidade) de dimensão $m - s$.

Uma prova rigorosa pode ser encontrada no teorema 14.26 de (OLVER, 1995). Note que o teorema acima nada diz sobre possíveis simetrias discretas do *coframe* ω.

Para encerrar esta seção, mostraremos alguns exemplos práticos do teorema de equivalência de *coframes*.

Exemplo 3.1.1 Considere um *coframe* cujas funções de estrutura são

$$\Omega^2{}_{12} = C_2, \ldots, \Omega^m{}_{1m} = C_m, \tag{230}$$

onde todos os C_i são constantes e o resto das funções de estrutura são zero.

Como $\Omega^1{}_{jk} = 0$ temos $\omega^1 = \mathrm{d}f \equiv \mathrm{d}x^1$. Para a segunda forma do *coframe* temos

$$\mathrm{d}\omega^2 = C_2 \omega^1 \wedge \omega^2 = C_2 \mathrm{d}x^1 \wedge \omega^2 \neq 0. \tag{231}$$

Podemos integrar a equação diferencial escolhendo uma coordenada x^2 tal que

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{C_2 x^1} \mathrm{d}x^2. \tag{232}$$

Obviamente este raciocínio pode ser aplicado para as outras formas, portanto

$$\omega^1 = \mathrm{d}x^1,\ \omega^{i'} = \mathrm{e}^{C_{i'}x^1}\mathrm{d}x^{i'},\ i' = 2, \ldots, m. \tag{233}$$

Coframes as mesmas constantes de estrutura são equivalentes. Por outro lado *coframes* com esta forma mas diferentes constantes não são equivalentes. Todos os *coframes* equivalentes a estes são dados por

$$\overline{\omega}^1 = \frac{\partial \Phi^1}{\partial \overline{x}^a}(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}^a,\ \overline{\omega}^{i'} = \mathrm{e}^{C_{i'}\Phi^1(\overline{x})}\frac{\partial \Phi^{i'}}{\partial \overline{x}^a}(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}^a,\ i' = 2, \ldots, m, \tag{234}$$

onde não há soma nos índices i'. O grupo de simetria é m-dimensional. Nas coordenadas x as transformações de simetria são

$$(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^m) = (x^1 + x^1_0, \mathrm{e}^{-C_2 x^1_0}x^2 + x^2_0, \ldots, \mathrm{e}^{-C_m x^1_0}x^m + x^m_0). \tag{235}$$

Observe que o *coframe* $\phi = (\omega^2, \omega^1, \ldots, \omega^m)$ não é equivalente ao *coframe* acima, apesar de diferir apenas por uma permutação das formas. A equivalência de *coframes* é insensível a este tipo de transformação discreta (embora não seja difícil percebê-la em casos práticos). Só é possível descobrir transformações discretas entre as variáveis x.

Exemplo 3.1.2 Seja $F(x) = 1 + C_a x^a, \mathrm{d}C_a = 0$, podemos construir o *coframe*

$$\omega^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{1 + C_a x^a} \implies \mathrm{d}\omega^i = C_a \omega^i \wedge \omega^a \equiv C_j \omega^i \wedge \omega^j. \tag{236}$$

Os *coframes* equivalentes a este são dados por

$$\overline{\omega}^i = \frac{1}{1 + C_j \Phi^j(\overline{x})}\frac{\partial \Phi^i}{\partial \overline{x}^a}(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}^a, \tag{237}$$

e as simetrias m-dimensionais dadas por

$$\overline{x}^a = [1 + C_b x^b_0]x^a + x^a_0. \tag{238}$$

Exemplo 3.1.3 Considere o *coframe*

$$\omega^1 = A(x)\mathrm{d}x + B(x)\mathrm{d}y, \qquad \omega^2 = D(x)\mathrm{d}y. \tag{239}$$

As funções de estrutura são dadas por

$$\Omega^1{}_{12} = \frac{1}{A(x)D(x)}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}(x) \equiv f(x), \qquad \Omega^2{}_{12} = \frac{1}{A(x)D(x)}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}(x) \equiv g(x). \tag{240}$$

Dois *coframes* com a forma acima são equivalentes se e somente se houver uma solução

$\overline{x} = X(x)$ *simultânea* para as equações $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, $\overline{g}(\overline{x}) = g(x)$. A existência desta solução não garante a equivalência dos *coframes*. Como obtemos novos invariantes nas funções de estrutura, precisamos das equações para os invariantes de primeira ordem,

$$\frac{1}{\overline{A}(\overline{x})} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\frac{1}{A(x)}, \qquad -\frac{\overline{B}(\overline{x})}{\overline{A}(\overline{x})\overline{D}(\overline{x})} = -\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\frac{B(x)}{A(x)D(x)}. \tag{241}$$

Embora as equações pareçam óbvias (são um difeomorfismo $\overline{x} = X(x)$), como já temos a solução $\overline{x} = X(x)$ estas são equações algébricas, em vez de equações diferenciais.

Estes *coframes* possuem um invariante de Cartan funcionalmente independente, e seu grupo de simetria é obviamente dado pela translação da coordenada y. Na verdade estes são *coframes* bidimensional de posto 1 arbitrários, escritos num sistema de coordenadas privilegiado (não-único) para a descrição de sua simetria.

4.2 G-Equivalência de Coframes

A equivalência de *coframes* é interessante do ponto de vista puramente teórico, mas para a Matemática Aplicada ela é só um degrau para resolver um problema mais geral e útil: em vez de exigir que o difeomorfismo mapeie um *coframe* diretamente noutro, exigimos que um *coframe* seja mapeado numa combinação linear do outro *coframe*, tal que as componentes sejam elementos de um grupo de matrizes.

Definição 4.2.1 (G-equivalência de coframes)

Considere um grupo de Lie $\mathbb{G}$, e ω e $\overline{\omega}$ dois coframes definidos em duas variedades diferenciáveis m-dimensionais M e $\overline{M}$, $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ uma representação matricial de $\mathbb{G}$.

Os coframes ω e $\overline{\omega}$ são ditos G-equivalentes se existir um difeomorfismo (local) $\overline{x} = \Phi(x)$ e uma função matricial $g : M \to G$ com elementos g^i_j, tais que

$$\Phi^*\overline{\omega}^i = g^i_j\omega^j \iff \Phi^*\overline{\omega} = g \cdot \omega. \tag{242}$$

Dados dois *coframes* ω e $\overline{\omega}$ e a ação G, a determinação de um difeomorfismo Φ e da matriz g que satisfaça a equação acima é chamada problema de G-equivalência entre *coframes*. O problema de equivalência de *coframes* da seção anterior é um caso particular, onde $\mathbb{G} = \{e\}$ é o grupo trivial.[52] Já conhecemos a solução deste problema.

Outro problema trivial são as equivalências pelos grupos lineares gerais, $G = GL(m, \mathbb{R})$. Nestes caso todos os *coframes* são equivalentes. Por isto na prática estaremos interessados apenas nos problemas onde G é um subgrupo próprio de $GL(m, \mathbb{R})$.

[52] Estes problemas também são chamados equivalência de G-estruturas, e por esta razão a equivalência de *coframes* é sinônimo de equivalência de $\{e\}$-estruturas.

O primeiro passo para resolver o problema de G-equivalência é reescrevê-lo de forma mais simétrica. Considere duas matrizes g' e $\overline{g}'$ tais que $g' = \overline{g}' \circ \Phi$. Podemos escrever

$$(\overline{g}' \circ \Phi) \cdot \Phi^* \omega = \Phi^*(\overline{g}' \cdot \overline{\omega}) = g' \cdot g \cdot \omega = (g' \cdot g) \cdot \omega. \tag{243}$$

Redefinido as matrizes acima como $\overline{g}$ e g temos as formas mais simétricas e úteis

$$\Phi^*(\overline{g} \cdot \overline{\omega}) = g \cdot \omega \iff \overline{g}^i_j(\overline{x})\overline{\omega}^j = g^i_j(x)\omega^j. \tag{244}$$

Numa análise ingênua conclui-se que aumentamos o problema, pois agora precisamos determinar duas matrizes. A vantagem de reescrever o problema nesta forma é que podemos *escolher* matrizes g_0, $\overline{g}_0$ que satisfaçam algumas condições específicas a serem determinadas posteriormente. Escolhidas as matrizes temos dois *coframes* $\omega_0 \equiv g_0(x)\omega$, $\overline{\omega}_0 \equiv \overline{g}_0(\overline{x})\overline{\omega}$ e podemos usar a solução da seção anterior para descobrir se os *coframes* ω_0 e $\overline{\omega}_0$ são equivalentes. Se a resposta for positiva a solução do problema original é

$$\Phi^*\overline{\omega} = \overline{g}^{-1}(\Phi(x)) \cdot g(x) \cdot \omega. \tag{245}$$

Se $\overline{\omega}_0$ e ω_0 não forem equivalentes então não há par de matrizes que tornem os *coframes* originais G-equivalentes.

Qual o tipo de condição que devemos impor sobre as matrizes para resolver o problema? Obviamente as matrizes devem ser relacionadas pelo difeomorfismo Φ, mas como não conhecemos o mapa Φ não podemos escolher ambas g e $\overline{g}$ arbitrariamente.

Para resolver a questão, considere uma *função G-invariante* F, ou seja, tal que $F(\overline{x}, \overline{g}) = F(x, g)$, que dependa ao menos de um parâmetro de $\mathbb{G}$. Se os *coframes* são G-equivalentes devemos ser capazes de escolher matrizes g e $\overline{g}$ tais que as funções G-invariantes assumam um mesmo valor constante específico, $F(x, g) = \overline{F}(\overline{x}, \overline{g}) = c$. Se obtivermos um número suficiente destas funções podemos resolver as equações $F_\lambda = c_\lambda$ para os parâmetros do grupo e obter as matrizes g_0 e $\overline{g}_0$.

Felizmente há um método sistemático para descobrir estas funções e resolver o problema de G-equivalência, chamado *Método de Equivalência de Cartan.* Todo o método é bem extenso e relativamente intrincado, e levaremos o resto da seção descrevendo-o.

Primeiramente precisamos descrever todos os *coframes* G-equivalentes possíveis. Em vez de usar funções $g : M \to G$ usaremos o *fibrado principal* $P(M, \mathbb{G})$.[53] Trocaremos

[53] Como nosso problema é local podemos trabalhar apenas com uma trivialização local e ignorar as funções de transição sem dificuldades, ou seja, podemos efetuar os cálculos como se os objetos estivessem definidos sobre o fibrado trivial $M \times \mathbb{G}$.

os *coframes* $g(x)\omega$ pelos *coframes modificados* θ dados por

$$\theta^i = g^i_j(a)\omega^j, \tag{246}$$

onde $a^\kappa = (a^1, \ldots, a^r)$ são os r parâmetros que servem de coordenadas para o grupo $\mathbb{G}$. Especificando alguma *seção* $a = a(x)$ do fibrado reobtemos os *coframes* $\theta|_x = g(x)\omega$.

Apesar de chamarmos θ de *coframe* modificado estas formas não são um *coframe* pois são definidas no fibrado $P(M, \mathbb{G})$ que possui dimensão $m + r$, enquanto há apenas m formas em θ, todas linearmente dependentes das diferenciais $\mathrm{d}x^a$. Felizmente podemos completar o *coframe* do fibrado simplesmente anexando r formas de Maurer-Cartan α^κ.

Se houver solução $\overline{x} = \Phi(x)$ para o problema de G-equivalência entre dois *coframes* então há soluções $\overline{a}(\overline{x}) = \overline{a}(\Phi(x)) = a(x)$ para os parâmetros normalizados. Ou seja, os *coframes* modificados são equivalentes, $\Psi^*(\overline{\theta}, \overline{\alpha}) = (\theta, \alpha)$. Nosso objetivo é encontrar seções $a = a(x)$ e $\overline{a} = \overline{a}(\overline{x})$ nos fibrados produtos que sejam unicamente determinadas para testarmos a equivalência dos *coframes* normalizados.

Voltemos à procura de G-invariantes e a normalização dos *coframes*. Como no caso da equivalência de *coframes*, a solução depende da invariância do operador d. Calculando a derivada exterior do *coframe* modificado temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i &= \mathrm{d}(g^i_j\omega^j) = \mathrm{d}g^i_j \wedge \omega^j + g^i_j \mathrm{d}\omega^j = \mathrm{d}g^i_j \wedge [(g^{-1})^j_k g^k_l \omega^l] + g^i_j\, \frac{1}{2}\Omega^j{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l \\
&= [\mathrm{d}g^i_j (g^{-1})^j_k] \wedge \theta^k + \tfrac{1}{2}[g^i_j (g^{-1})^k_m (g^{-1})^l_n \Omega^j{}_{kl}]\theta^m \wedge \theta^n \implies \\
\mathrm{d}\theta^i &\equiv A^i{}_{k\lambda}\alpha^\lambda \wedge \theta^k + \tfrac{1}{2}\Theta^i{}_{jk}(x, a)\theta^j \wedge \theta^k.
\end{aligned} \tag{247}$$

Agora há duas classes de funções de estrutura. Em geral $A^i{}_{k\lambda}$ são constantes, determinadas pela ação G.[54] As funções de estrutura $\Theta^i{}_{jk}(x, a)$ são chamadas *coeficientes de torção*, e em geral não são G-invariantes. Para descobrir quais coeficientes de torção podem ser normalizados introduzimos as *formas de Maurer-Cartan modificadas*

$$\pi^\lambda = \alpha^\lambda - \zeta^\lambda_j(x, a)\theta^j, \tag{248}$$

onde as funções $\zeta^\lambda_j(x, a)$ estão para ser determinadas. Em termos das formas de Maurer-Cartan modificadas as derivadas exteriores do *coframe* modificado são

$$\mathrm{d}\theta^i = A^i{}_{k\lambda}\pi^\lambda \wedge \theta^k + \left[\tfrac{1}{2}\Theta^i{}_{jk} + \zeta^\lambda_j A^i{}_{k\lambda}\right]\theta^j \wedge \theta^k. \tag{249}$$

Observando as novas funções de estrutura vemos que a escolha das mr funções ζ^λ_j é mais

[54] Em alguns casos extraordinários estas funções não são constantes. Isto ocorre quando o resultado de alguma normalização não é um subgrupo de Lie. Estes casos requerem algumas modificações no Método de Cartan e não serão necessários neste texto, portanto serão ignorados.

clara: elas são escolhidas de forma a zerar o maior número possível de torções. Este processo é chamado de *absorção de torções*, e por isto as equações

$$\Theta^i{}_{jk} + 2\zeta^\lambda_{[j} A^i{}_{k]\lambda} = \Theta^i{}_{jk} + \zeta^\lambda_j A^i{}_{k\lambda} - \zeta^\lambda_k A^i{}_{j\lambda} = 0 \tag{250}$$

são chamadas *equações de absorção das torções.*

Nem todas as torções poderão ser zeradas. Dependendo da forma dos coeficientes $A^i{}_{k\lambda}$ será impossível eliminar algumas das torções. Além disto, nem todas as funções ζ^λ_j podem ser univocamente determinadas, pois as equações de absorção das torções podem ter algum grau de indeterminação. Estes importantes fatos são parte crucial da teoria, mas serão explorados depois para não perdermos o foco em assuntos mais imediatos.

As torções que podem ser eliminadas pela absorção são ditas *torções não-essenciais*, enquanto aquelas que não podem ser zeradas são chamadas *torções essenciais*[55] e serão denotadas por $U^i{}_{jk}(x,a)$. A forma final das equações de estrutura é

$$\mathrm{d}\theta^i = A^i{}_{k\lambda}\theta^k \wedge \pi^\lambda + \tfrac{1}{2} U^i{}_{jk}(x,a)\theta^j \wedge \theta^k. \tag{251}$$

Como as formas π são linearmente independentes das formas θ, e junto com nossa condição de equivalência $\Psi^*\mathrm{d}\overline{\theta} - \mathrm{d}\theta = 0$, as equações de estruturas são separadas em

$$A^i{}_{k\lambda}(\Psi^*\overline{\pi}^\lambda - \pi^\lambda) \wedge \theta^k = 0, \qquad \overline{U}^i{}_{jk}(\overline{x},\overline{a}) = U^i{}_{jk}(x,a). \tag{252}$$

Ou seja, as torções essenciais são os G-invariantes que procuramos.

Para entender a outra componente das equações de estrutura, suponha que hajam r' (possivelmente zero) parâmetros indeterminados z^λ_k nas soluções de absorção das torções, sendo $z^\lambda_k \equiv 0$ para as componentes que são completamente determinadas. As outras componentes das equações de estrutura (253) implicam

$$\Psi^*\left(\overline{\pi}^\lambda + \overline{z}^\lambda_k \overline{\theta}^k\right) = \pi^\lambda + z^\lambda_k \theta^k. \tag{253}$$

Vamos mostrar que a equação acima, junto com a equivalência dos *coframes* modificados, $\Psi^*\overline{\theta}^i = \theta^i$, é suficiente para garantir a solução do problema de G-equivalência. Seja o difeomorfismo $(\overline{x},\overline{a}) = \Psi(x,a) = (\Phi(x,a),\psi(x,a))$ a solução para as equações acima. Escrevemos a função ψ como $\overline{a} = \psi(x,a) = ab(x,a)$ para alguma $\mathbb{G}$-função b cuja matriz correspondente é h, o que implica $\overline{g} = g \cdot h(x,a)$. Calculando o difeomorfismo entre

[55] Na prática, a diferença entre os dois tipos de torções é que ao escolhermos alguma seção $a = f(x)$ do fibrado as torções essenciais não dependerão das derivadas das funções f. Também é possível que uma combinação linear de torções não-essenciais seja uma torção essencial.

as formas de Maurer-Cartan temos

$$\Psi^*\left(\mathrm{d}\overline{g}\cdot\overline{g}^{-1}\right) = (\mathrm{d}g\cdot h + g\cdot\mathrm{d}h)\cdot(g\cdot h)^{-1} = \mathrm{d}g\cdot g^{-1} + (g\cdot\mathrm{d}h\cdot h^{-1}\cdot g^{-1}). \tag{254}$$

A segunda parcela é a diferença entre as formas de Maurer-Cartan.

Por outro lado, as equações (246) e (253) implicam que as equações entre as formas de Maurer-Cartan podem ser escritas como

$$\Psi^*\alpha = \alpha + \eta_a(x,a)\mathrm{d}x^a. \tag{255}$$

Logo a diferença entre as formas de Maurer-Cartan é linearmente dependente das diferenciais das coordenadas. Juntas, ambas as equações implicam $\mathrm{d}h \equiv h_a\mathrm{d}x^a \implies h = h(x)$. Usando esta resposta na igualdade dos *coframes* modificados temos

$$\Psi^*\overline{\theta} = \theta \implies \overline{g}(\psi(x,a))\cdot\Psi^*\overline{\omega} = (g\cdot h(x))\cdot\Psi^*\overline{\omega} = g\cdot\omega \implies \Psi^*\overline{\omega} = h^{-1}(x)\cdot\omega.$$

Por fim, a equação acima implica que podemos escrever as diferenciais $\mathrm{d}\overline{x}^a$ como combinações lineares das diferenciais $\mathrm{d}x^a$. Integrando estas diferenciais obtemos o mapa $\overline{x} = \Phi(x)$. Portanto a solução para o difeomorfismo $\Psi : P(M,\mathbb{G}) \to P(\overline{M},\mathbb{G})$ é

$$(\overline{x},\overline{a}) = \Psi(x,a) = (\Phi(x), ab(x)) \iff (\overline{x},\overline{g}) = \Psi(x,g) = (\Phi(x), g\cdot h(x)). \tag{256}$$

Logo as soluções do problema de G-equivalência $\Phi^*\omega = h^{-1}(x)\omega$ e do problema de equivalência descrito por

$$\Psi^*\overline{\theta}^i = \theta^i, \qquad \Psi^*\left(\overline{\pi}^\lambda + \overline{z}^\lambda_k\overline{\theta}^k\right) = \pi^\lambda + z^\lambda_k\theta^k \tag{257}$$

no fundo são a mesma solução. Agora podemos formular o principal teorema sobre problemas de G-equivalência.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Equivalência de Cartan)

Sejam ω e $\overline{\omega}$ dois coframes definidos em duas variedades m-dimensionais M e $\overline{M}$, e seja $\mathbb{G}$ um grupo de Lie cuja ação sobre as 1-formas é dada por um subgrupo $G \subset GL(m,\mathbb{R})$. Considere os coframes modificados $(\theta, \pi + z\theta)$ e $(\overline{\theta}, \overline{\pi} + \overline{z}\overline{\theta})$ definidos respectivamente em dois subconjuntos abertos de $P(M,\mathbb{G})$ e $P(\overline{M},\mathbb{G})$, construídos através da absorção das torções não-essenciais.

Os dois coframes ω e $\overline{\omega}$ são G-equivalentes se e somente os coframes modificados forem equivalentes para alguma escolha de z e $\overline{z}$.

Estabelecida a suficiência do difeomorfismo Ψ, devemos nos perguntar como obtê-lo. Há quatro possíveis caminhos para encontrá-lo, dependendo da forma da ação G.

Voltemos às torções essenciais ${U^i}_{jk}$, que sabemos serem G-invariantes. Portanto podemos usá-las para normalizar alguns dos parâmetros do grupo, escolhendo algum valor constante ${U^i}_{jk}(x, a) \equiv {c^i}_{jk}$. Após normalizarmos todas as torções essenciais teremos eliminado alguns parâmetros do grupo $\mathbb{G}$. Se não restarem parâmetros indeterminados encontramos o nosso *coframe* ω_0 determinado univocamente a partir da ação G. Basta testar se os *coframes* normalizados são equivalentes.

Se ainda sobrarem parâmetros a_1 não-normalizados temos um novo problema de G_1-equivalência $\theta_1^i = (g_1)^i_j(\omega_1)^j$, onde G_1 é a ação do subgrupo próprio $\mathbb{G}_1$ de $\mathbb{G}$ e g_1 a matriz que representa esta ação. Neste caso repetimos o procedimento para tentar normalizar os parâmetros restantes de $\mathbb{G}_1$ usando as (novas) torções essenciais.

Após um número n de normalizações, suponha que cheguemos numa situação onde todas as torções essenciais são independentes dos parâmetros a_n do subgrupo $\mathbb{G}_n$. Então as torções ${U^i}_{jk}(x)$ são invariantes do grupo, idênticas para todas as seções $a = a(x)$. Logo os *coframes* são G_n-equivalentes somente se houver soluções para as equações

$$\overline{U}^i{}_{jk}(\overline{x}) = {U^i}_{jk}(x). \tag{258}$$

Porém, sabemos que a invariância das derivadas absolutas também são necessárias para a equivalência dos *coframes*. Para comparar simultaneamente as derivadas absolutas de todas as seções, introduzimos as derivadas absolutas $\widehat{\mathrm{D}}$ dos *coframes* modificados em $M \times \mathbb{G}$. Dada uma função $F(x)$ definida no fibrado produto, temos

$$\mathrm{d}F = (\mathrm{D}_j F)\omega^j = \mathrm{D}_j F[(g^{-1})^j_i \theta^i] = \left[(g^{-1})^j_i \mathrm{D}_j F\right] \theta^i \equiv \left(\widehat{\mathrm{D}}_i F\right) \theta^i. \tag{259}$$

As derivadas absolutas do *coframe* modificado são projetadas nas derivadas absolutas dos *coframes* na variedade base para qualquer seção $a = a(x)$,[56] e portanto são G_n-invariantes. Se algumas destas derivadas dependem dos parâmetros de G_n, podemos normalizá-las.

Ainda que as nenhuma das derivadas dependam dos parâmetros do grupo, é possível que derivadas de ordem superior possam ser normalizadas. Se nenhuma derivada de qualquer ordem depende dos parâmetros de $\mathbb{G}_n$, sabemos da seção anterior poderemos encerrar a computação de derivadas: se as torções essenciais e suas derivadas dependem apenas das coordenadas de M só pode haver $s \leq m$ invariantes funcionalmente independentes entre elas, que serão todos computados até uma ordem σ tal que todas as derivadas de ordem $\sigma + 1$ são funcionalmente dependente das derivadas de ordem inferior.

Após um certo número de iterações deste *loop*, se for possível normalizar todos os parâmetros de $\mathbb{G}$ temos a primeira solução para o problema de G-equivalência.

Teorema 4.2.2

Considere dois coframes $\overline{\omega}$ e ω e uma ação G definida por um grupo $\mathbb{G}$, tal que

[56] Esta afirmação não é válida para funções que dependam dos parâmetros do grupo.

seja possível normalizar todos os parâmetros do grupo usando as torções essenciais e suas derivadas, e sejam $g = g(x)$ e $\overline{g} = \overline{g}(\overline{x})$ as seções obtidas pelas normalizações.

Os coframes $\overline{\omega}$ e ω são G-equivalentes se e somente os coframes normalizados $g(x) \cdot \omega$ e $\overline{g}(\overline{x}) \cdot \overline{\omega}$ forem equivalentes.

Porém, mesmo que normalizemos todas as torções e derivadas disponíveis, é possível que não possamos eliminar todos os parâmetros do grupo. Por economia de linguagem, renomearemos o subgrupo restante $\mathbb{G}_n$ como $\mathbb{G}$. Relembrando as equações (257),

$$\Psi^*\overline{\theta}^i = \theta^i, \qquad \Psi^*\left(\overline{\pi}^\lambda + \overline{z}_k^\lambda\overline{\theta}^k\right) = \pi^\lambda + z_k^\lambda\theta^k,$$

os casos mais imediatos são aqueles para que a absorção de torções é unívoca, $\overline{z}_k^\lambda \equiv z_k^\lambda \equiv 0$, e os *coframes* cuja equivalência devemos testar nos fibrados produtos estão determinados.

Nestes casos é fácil obter novas funções G-invariantes: elas são obtidas das equações de estrutura para das formas de Maurer-Cartan π^λ,

$$\mathrm{d}\pi^\lambda = C^\lambda{}_{\mu\nu}\pi^\mu \wedge \pi^\nu + V^\lambda{}_{\mu k}(x,a)\pi^\mu \wedge \theta^k + W^\lambda{}_{jk}(x,a)\theta^j \wedge \theta^k, \tag{260}$$

onde $C^\lambda{}_{\mu\nu}$ são as constantes de estrutura do grupo. Este método é chamado *prolongamento*, por estender a computação das funções de estrutura para a variedade $P(M, \mathbb{G})$.

Além das novas funções de estrutura $V^\lambda{}_{\mu k}$ e $W^\lambda{}_{jk}$ devemos considerar suas derivadas absolutas até alguma ordem $\sigma + 1$ tal que elas sejam funcionalmente dependentes das derivadas inferiores (note que a dimensão do grupo de simetria do *coframe* é menor ou igual a $m + r$). Se não pudermos determinar todos os parâmetros de $\mathbb{G}$ apenas normalizando as funções $V^\lambda{}_{\mu k}$ e $W^\lambda{}_{jk}$ poderíamos, em princípio, usar a nova normalização parcial no *coframe* modificado e calcular novas torções essenciais. Porém se fizermos isto temos grandes chances de precisarmos prolongar novamente o problema, então é mais prático calcular as derivadas das novas funções de estrutura e normalizá-las.[57]

Resolvidos os casos em que a absorção tem solução única, o que fazer com aqueles tais que a resposta geral dependa de r' parâmetros z_k^λ? Reescrevemos as equações (253) como $\Psi^*\overline{\Pi} = \Pi$, onde $\Pi = \pi + z \cdot \theta$ e $\overline{\Pi} = \overline{\pi} + \overline{z} \cdot \overline{\theta}$, a relação entre os *coframes* é

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \Pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ Z & \mathrm{I}_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix}, \tag{261}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem $n \times n$.

[57] Voltamos ao problema de equivalência original apenas para evitar a computação das equações de estruturas das formas de Maurer-Cartan modificadas, que podem ser muito trabalhosas e desnecessárias. A normalização de todos os parâmetros possíveis também é necessária para o teste de involução de Cartan, que será estudado mais adiante.

Temos um novo problema de Z-equivalência, onde Z é a ação do grupo (abeliano) r'-dimensional $\mathbb{R}^{r'}$ sobre o *coframe* (θ, π). Este problema é chamado *segundo prolongamento*, por aumentar novamente a dimensão da variedade estudada para discernir novos G-invariantes, que não puderam ser obtidos com um prolongamento. Daqui devemos seguir o mesmo roteiro usado para a normalização do grupo inicial: definido o novo *coframe* modificado (θ, Π) devemos absorver as torções possíveis e normalizar as torções essenciais e suas derivadas na esperança de obter um determinado *coframe* (θ, Π_0) em $P(M, \mathbb{G})$.

Entre todas a possibilidades para normalizar os novos parâmetros, uma chama a atenção: a possibilidade de um novo prolongamento. Um novo prolongamento pode não parecer um grande desafio, mas como podemos ter certeza que podemos resolver o problema com um número finito de prolongamentos?

De fato é possível encontrarmos uma situação em que prolonguemos infinitamente um problema de G-equivalência sem obter conclusões. Estes casos ocorrem quando há funções arbitrárias de algumas variáveis entre as simetrias dos *coframes* ou seja, há um "grupo" infinito de simetrias entre as auto-equivalências.[58] Os espaços prolongados possuem dimensão finita, por isto nunca nos darão um número suficiente de condições para normalizar o "grupo". Um exemplo é a equivalência pelo grupo linear geral, cuja solução é óbvia: todos os *coframes* (de mesma dimensão) são equivalentes sob estas transformações. Para estudar as simetrias deste problema escolhemos os *coframes* holônomos, e facilmente concluímos que qualquer difeomorfismo $\overline{x} = \Phi(x)$ é auto-equivalente, pois

$$\mathrm{d}\overline{x}^a = \frac{\partial \Phi^a}{\partial x^b} \mathrm{d}x^b,$$

e podemos preservar o *coframe* $\overline{\omega}^i = \mathrm{d}\overline{x}^i$ multiplicando-o pela inversa da matriz jacobiana. Portanto as simetrias deste *coframe* sob as transformações lineares gerais incluem m funções arbitrárias Φ^a de m variáveis x^b.

Este comportamento é chamado *involução*, e por isto estes problemas são ditos involutivos. Felizmente Cartan encontrou uma maneira de descobrir se um *coframe* é involutivo, chamado *Teste de Involução de Cartan*.

O primeiro passo para o teste é descobrir o grau de indeterminação $r' > 0$ na solução das equações de absorção das torções.[59] Depois precisamos obter um conjunto de m números inteiros $q_1, \ldots, q_m$ chamados *características reduzidas de Cartan*, que são obtidos dos coeficientes ${A^i}_{k\lambda}$ presentes nas equações de estrutura do *coframe* modificado.

O valor do primeiro coeficiente q_1 é obtido construindo matrizes $A[v]$ de ordem

[58] Na verdade estas transformações não formam um grupo pois não tem formulação algébrica independente dos difeomorfismos. Porém elas seguem todas as propriedades que as ações dos grupos possuem.

[59] Um *coframe* com $r' = 0$ pode ser resolvido no primeiro prolongamento, logo não pode estar em involução.

$m \times r$ definidas por

$$A[v] = (A^i{}_{k\lambda}v^k) = \begin{pmatrix} A^1{}_{k1}v^k & \dots & A^1{}_{kr}v^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m{}_{k1}v^k & \dots & A^m{}_{kr}v^k \end{pmatrix}, \tag{262}$$

onde v é um vetor qualquer (note a soma em k). A primeira característica reduzida de Cartan q_1 é definida pelo maior posto possível entre as matrizes $A[v]$,

$$q_1 = \max\left(\text{posto}\left(A[v]\right)\right). \tag{263}$$

Como supomos que $\mathbb{G}$ não é trivial, há ao menos uma forma de Maurer-Cartan e o posto máximo é maior que zero. Por outro lado o maior posto possível de uma matriz é dado pelo menor valor entre seus números de linhas e colunas, logo $1 \leq q_1 \leq \min(m, r) \leq r$.

As características de Cartan $q_n, n \leq m-1$, são obtidas calculando o maior posto possível de uma matriz de ordem $nm \times r$ construída por blocos de matrizes $A[v_1], \dots, A[v_n]$, e depois subtraindo deste posto a soma das características de ordem menor,

$$q_1 + \dots + q_n = \max\left(\text{posto}\begin{pmatrix} A[v_1] \\ \vdots \\ A[v_n] \end{pmatrix}\right), 2 \leq n \leq m-1. \tag{264}$$

A última característica de Cartan q_m é obtida subtraindo a soma das características de ordem menor da dimensão r do grupo $\mathbb{G}$,

$$q_1 + \dots + q_m = r. \tag{265}$$

Como o posto da n-ésima matriz deve ser ao menos igual ao posto da matriz inferior e todos são necessariamente menores ou iguais ao número de colunas r, então temos necessariamente $0 \leq q_n \leq r$, e que $q_n = 0 \implies q_{n'} = 0, n \leq n' \leq m$.

Agora estamos em condições de resolver o último caso de G-equivalência.

Teorema 4.2.3 (Teste de Cartan, Equivalência de Coframes Involutivos) *Seja ω um coframe analítico regular definido numa variedade m-dimensional M, G a ação de um grupo $\mathbb{G}$ sob as formas de M, (θ, π) o coframe modificado obtido pela absorção das torções não-essenciais, r' o grau de indeterminação na solução das equações de absorção das torções, e $q_1, \dots, q_m$ suas características reduzidas de Cartan. Suponha também que as torções essenciais e suas derivadas independam dos parâmetros de $\mathbb{G}$.*

O coframe modificado é involutivo se satisfizer o teste de involução de Cartan,

$$q_1 + 2q_2 + \dots + mq_m = r'. \tag{266}$$

Seja q_n a última característica de Cartan não-nula de um coframe em involução. Neste caso as simetrias do coframes dependem de q_n funções arbitrárias de n variáveis.

Suponha que θ seja involutivo, e considere outro coframe involutivo $\overline{\theta} = \overline{g} \cdot \overline{\omega}$ definido em $\overline{M} \times \mathbb{G}$, ambos de ordem σ. Os coframes ω e $\overline{\omega}$ são localmente G-equivalentes se e somente houver uma solução $\overline{x} = \Phi(x)$, para as equações

$$\overline{U}^i{}_{jk}(\overline{x}) = U^i{}_{jk}(x),\ \overline{\widehat{\mathrm{D}}}_l\overline{U}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \widehat{\mathrm{D}}_l U^i{}_{jk}(x),\ \overline{\widehat{\mathrm{D}}}_m\overline{\widehat{\mathrm{D}}}_l\overline{U}^i{}_{jk}(\overline{x}) = \widehat{\mathrm{D}}_m\widehat{\mathrm{D}}_l U^i{}_{jk}(x), \ldots. \tag{267}$$

A solução de problemas involutivos só depende das torções essenciais, não sendo necessário calcular as funções de estrutura das formas de Maurer-Cartan modificadas. Isto não é surpreendente, pois prolongamentos são inefetivos para *coframes* involutivos.

Mostraremos agora alguns exemplo para ilustrar todo o procedimento, e que tem importância direta para esta tese.

Exemplo 3.2.1 Equivalência de superfícies (métricas bidimensionais)

Seja g uma métrica definida positivamente numa variedade bidimensional, que podemos escrever como $g = \delta_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$, para algum *coframe* ω ortonormal. Este *coframe* não é único: podemos fazer uma rotação por um ângulo ϕ (que em geral pode ser uma função das coordenadas) e obter outro *coframe* ortonormal. Se os *coframes* forem G-equivalentes as métricas serão equivalentes. Nosso problema de G-equivalência é

$$\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ \sin(\phi) & \cos(\phi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\phi)\omega^1 - \sin(\phi)\omega^2\\ \sin(\phi)\omega^1 + \cos(\phi)\omega^2\end{pmatrix}. \tag{268}$$

Note que vale $\theta^1 \wedge \theta^2 = \omega^1 \wedge \omega^2$. Calculando as equações de estrutura temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^1 &= \mathrm{d}\phi \wedge (-\sin(\phi)\omega^1 - \cos(\phi)\omega^2) + (\cos(\phi)\Omega^1{}_{12} - \sin(\phi)\Omega^2{}_{12})\omega^1 \wedge \omega^2\\ &= \mathrm{d}\phi \wedge (-\theta^2) + \Theta^1{}_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 = -(\mathrm{d}\phi - \Theta^1{}_{12}\theta^1 - \Theta^2{}_{12}\theta^2) \wedge \theta^2 \equiv -\pi \wedge \theta^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta^2 &= \mathrm{d}\phi \wedge (\cos(\phi)\omega^1 - \sin(\phi)\omega^2) + (\sin(\phi)\Omega^1{}_{12} + \cos(\phi)\Omega^2{}_{12})\omega^1 \wedge \omega^2\\ &= \mathrm{d}\phi \wedge \theta^1 + \Theta^2{}_{12}\theta^1 \wedge \theta^2 = (\mathrm{d}\phi - \Theta^1{}_{12}\theta^1 - \Theta^2{}_{12}\theta^2) \wedge \theta^1 \equiv \pi \wedge \theta^1.\end{aligned} \tag{269}$$

Todas as torções essenciais são zero e não há indeterminação na absorção das torções, portanto precisamos computar $\mathrm{d}\pi$. Explicitamente temos

$$\mathrm{d}\pi = \kappa\theta^1 \wedge \theta^2 = \Big(\mathrm{D}_2\Omega^1{}_{12} - \mathrm{D}_1\Omega^2{}_{12} - (\Omega^1{}_{12})^2 - (\Omega^2{}_{12})^2\Big)\,\theta^1 \wedge \theta^2, \tag{270}$$

onde κ (curvatura gaussiana) não depende do ângulo ϕ, e portanto não pode ser usada para normalizar ϕ.

Se κ for constante temos um espaço de curvatura constante, com geometria elíptica, hiperbólica ou plana dependendo se κ é maior, menor ou igual a zero. Basta verificar se as constantes são as mesmas para saber se os *coframes* são G-equivalentes.

Se κ não é constante sua diferencial não é zero e portanto pode ser normalizada. Explicitamente temos

$$\widehat{\kappa}_1 \equiv \widehat{\mathrm{D}}_1\kappa = \cos(\phi)\mathrm{D}_1\kappa - \sin(\phi)\mathrm{D}_2\kappa, \qquad \widehat{\kappa}_2 \equiv \widehat{\mathrm{D}}_2\kappa = \sin(\phi)\mathrm{D}_1\kappa + \cos(\phi)\mathrm{D}_2\kappa. \tag{271}$$

Portanto podemos normalizar $\widehat{\kappa}_1 \equiv 0$, e obteremos um *coframe* único tal que $\mathrm{D}_1\kappa = 0$.

O caso de métricas com assinatura lorentziana é similar, mas devemos usar o grupo de Lorentz em vez da rotação. A grande diferença é a normalização da curvatura. Se a diferencial é uma forma nula (não-zero) então não podemos zerar nenhuma componente, mas podemos normalizar a diferencial com $|\kappa_1| = |\kappa_2|$. Não vamos tratar este caso separadamente, pois analisaremos a equivalência geral de métricas no próximo capítulo.

Exemplo 3.2.2 Equivalência Conforme

Como generalização do caso anterior, queremos saber quando duas métricas não são relacionadas diretamente por um difeomorfismo mas são proporcionais, ou seja, $\Phi^*\overline{g} \propto g$. Obviamente o problema de G-equivalência adequado é

$$\begin{pmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^w\cos(\phi) & -\mathrm{e}^w\sin(\phi)\\ \mathrm{e}^w\sin(\phi) & \mathrm{e}^w\cos(\phi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^w & 0\\ 0 & \mathrm{e}^w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^w\theta^1\\ \mathrm{e}^w\theta^2\end{pmatrix}, \tag{272}$$

onde θ^i é o *coframe* modificado do problema de equivalência de superfícies. As equações de estrutura são

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma^1 &= \mathrm{d}w\wedge(\mathrm{e}^w\theta^1) + \mathrm{e}^w\mathrm{d}\theta^1 = \mathrm{d}w\wedge\sigma^1 - \pi\wedge\sigma^2\\ &= (\mathrm{d}w + z_1\sigma^1 + z_2\sigma^2)\wedge\sigma^1 - (\pi - z_2\sigma^1 + z_1\sigma^2)\wedge\sigma^2 \equiv \pi^w\wedge\sigma^1 - \pi^\phi\wedge\sigma^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma^2 &= \mathrm{d}w\wedge(\mathrm{e}^w\theta^2) + \mathrm{e}^w\mathrm{d}\theta^2 = \mathrm{d}w\wedge\sigma^2 + \pi\wedge\sigma^1\\ &= (\mathrm{d}w + z_1\sigma^1 + z_2\sigma^2)\wedge\sigma^2 + (\pi - z_2\sigma^1 + z_1\sigma^2)\wedge\sigma^1 \equiv \pi^w\wedge\sigma^2 + \pi^\phi\wedge\sigma^1.\end{aligned} \tag{273}$$

Não há torção essencial para ser normalizada, e devemos testar a involução. O grau de indeterminação é $r' = 2$, e a matriz $A[v]$ é

$$A[v] = \begin{pmatrix}v^1 & -v^2\\ v^2 & v^1\end{pmatrix}, \tag{274}$$

logo $q_1 = 2$, q_2=0, o problema é involutivo e todos os *coframes* são equivalentes a um *coframe* holônomo $(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2)$. Portanto todas as métricas bidimensionais positivamente definidas são conformalmente planas. Um resultado idêntico vale para métricas bidimensionais com assinatura lorentziana, mas não é correto para dimensões maiores.

5 EQUIVALÊNCIAS DE MÉTRICAS

Neste capítulo vamos resolver o problema central desta tese: a equivalência conforme de métricas.

A primeira seção é dedicada ao problema de equivalência entre métricas: em termos simples, descobrir se duas métricas definem a mesma geometria em diferentes coordenadas. Tanto (OLVER, 1995) quanto (GARDNER, 1989) resolvem este problema para métricas positivamente definidas. Nesta seção resolveremos o problema para métricas de qualquer assinatura.

Usaremos o resultado obtido para resolver, na segunda seção, o problema conforme. Soluções parciais deste problema foram encontradas em (SZEKERES, 1968), que obteve uma solução para geometrias que tivesse ao menos um invariante escalar não-zero; (GARDNER, 1989) conseguiu obter as torções essenciais dos *coframes* modificados, mas não calculou as derivadas; e (KOUTRAS; SKEA, 1998), onde foram encontradas condições para espaços-tempos possuírem um campo de Killing homotético.

Nesta seção teremos a oportunidade de usar todo o conhecimento obtido até agora na tese para obter uma nova, e completa, solução para o problema.

5.1 Equivalência de Geometrias Riemannianas

Nesta seção estamos interessados em descobrir quando duas geometrias pseudo-riemannianas são equivalentes, ou seja, $\Phi^*\overline{g} = g$. Para isto devemos encontrar *coframes* e um grupo adequado para descrever este problema e suas soluções.

Escolhendo um *coframe* ω, escrevemos a métrica como $g = g_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$ onde as componentes g_{ij} são (por enquanto) arbitrárias. Começamos reescrevendo as funções de estrutura dos comutadores em termos dos coeficientes da conexão de Levi-Civita,

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{jk} = &\ \frac{g^{il}}{2}(\mathrm{D}_j g_{lk} + \mathrm{D}_k g_{jl} - \mathrm{D}_l g_{jk} + g_{jm}\gamma^m{}_{lk} + g_{km}\gamma^m{}_{lj} - g_{lm}\gamma^m{}_{jk}) \\ \Longrightarrow \Gamma^i{}_{[jk]} = &\ -\tfrac{1}{2}\gamma^i{}_{jk}. \end{aligned} \tag{275}$$

As equações de estrutura para o *coframe* são

$$\mathrm{d}\omega^i = -\tfrac{1}{2}\gamma^i{}_{jk}\omega^j \wedge \omega^k = \omega^j \wedge (\Gamma^i{}_{jk}\omega^k) \equiv \omega^j \wedge \omega^i{}_j, \tag{276}$$

onde $\omega^i{}_j = \Gamma^i{}_{jk}\omega^k$ são as m^2 *1-formas de conexão.*

Nesta linguagem a curvatura é descrita pelas *2-formas de curvatura* dadas por[60]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}^i{}_j &= \mathrm{d}\omega^i{}_j + \omega^i{}_k \wedge \omega^k{}_j = (\mathrm{D}_l \Gamma^i{}_{jk})\omega^l \wedge \omega^k - \Gamma^i{}_{jk}\frac{\gamma^k{}_{lm}}{2}\omega^l \wedge \omega^m + \Gamma^i{}_{kl}\Gamma^k{}_{jm}\omega^l \wedge \omega^m \\
&= -(\mathrm{D}_{[l}\Gamma^i{}_{|j|k]})\omega^k \wedge \omega^l - \Gamma^i{}_{m[l}\Gamma^m{}_{|j|k]}\omega^k \wedge \omega^l - \frac{1}{2}\Gamma^i{}_{jm}\gamma^m{}_{kl}\omega^k \wedge \omega^l \\
&= -\frac{1}{2}(\mathrm{D}_l \Gamma^i{}_{jk} - \mathrm{D}_k \Gamma^i{}_{jl} + \Gamma^i{}_{ml}\Gamma^m{}_{jk} - \Gamma^i{}_{mk}\Gamma^m{}_{jl} + \Gamma^i{}_{jm}\gamma^m{}_{kl})\omega^k \wedge \omega^l \\
&= -\tfrac{1}{2}R^i{}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l. \qquad (277)
\end{aligned}
$$

Normalmente usa-se *coframes* cujas componentes da métrica são constantes, portanto $\mathrm{d}g_{ij} = 0$. Lembrando que a derivada covariante da métrica é zero temos

$$
\mathrm{d}g_{ij} = (\mathrm{D}_k g_{ij})\omega^k = -(\Gamma^l{}_{ik}g_{lj} + \Gamma^l{}_{jk}g_{il})\omega^k = 0 \implies g_{il}\omega^l{}_j + g_{jl}\omega^l{}_i = 0, \qquad (278)
$$

que podemos reescrever como $\omega_{(ij)} = 0$ se definirmos $\omega_{ij} \equiv g_{il}\omega^l{}_j$. Nestes *coframes* há apenas $\frac{1}{2}m(m-1)$ formas de conexão linearmente independentes.

Usando o lema de Poincaré podemos reobter as outras identidades algébricas da Geometria Riemanniana. Explicitamente temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 g_{ij} = 0 &\implies g_{il}\mathcal{R}^l{}_j + g_{jl}\mathcal{R}^l{}_i \equiv 0, \\
\mathrm{d}^2 \omega^i = 0 &\implies \mathcal{R}^i{}_j \wedge \omega^j \equiv 0, \\
\mathrm{d}^2 \omega^i{}_j = 0 &\implies \mathrm{d}\mathcal{R}^i{}_j \equiv \mathcal{R}^i{}_k \wedge \omega^k{}_j - \omega^i{}_k \wedge \mathcal{R}^k{}_j, \qquad (279)
\end{aligned}
$$

que são a simetria da curvatura no primeiro par de índices e as Identidades de Bianchi.

Na maioria dos casos, *coframes* ortonormais são preferidos, mas outras possibilidades são usadas ocasionalmente (e serão usadas nesta tese).

Suponha que o *coframe* tenha sido escolhido para obtermos componentes constantes específicas η_{ij}: $g_{ij} = \eta_{ij}$. Este *coframe* não é único, pois qualquer *coframe* relacionado a ele por $\omega'^i = r^i{}_j(x)\omega^j$, onde r é uma matriz do grupo ortogonal $O(p,q)$ e p e q caracterizam a assinatura da métrica, preservará a normalização da métrica,[61]

$$
r^k{}_i\, \eta_{kl}\, r^l{}_j = \eta_{ij}. \qquad (280)
$$

Escolhidas as (mesmas) componentes para as métricas, se os *coframes* são relacionados por uma transformação ortogonal, então garantimos que as métricas são equivalentes. Ou seja, a solução do problema de equivalência entre geometrias riemannianas é a mesma

[60] Note que os sinais nestas definições e fórmulas dependem das convenções de cada autor.

[61] A forma precisa das matrizes depende da normalização escolhida, mas elas são relacionadas pelas transformações de similaridade adequadas.

do problema de G-equivalência para o grupo ortogonal apropriado.

Uma dificuldade na formulação do problema de equivalência geral de métricas é a parametrização dos grupos ortogonais, que é muito diferente para cada grupo. A solução é escrever o problema em termos das componentes ${r^i}_j$ das matrizes ortogonais e considerar os vínculos entre as componentes dados pela invariância da métrica (280).

Começamos invertendo a definição das formas de Maurer-Cartan ${\rho^i}_j$

$$ {\rho^i}_j = \mathrm{d}{r^i}_k {r_j}^k \implies \mathrm{d}{r^i}_j = {\rho^i}_k {r^k}_j, \tag{281} $$

A equação (280) implica que as matrizes inversas ${r_j}^i$ são dadas por ${r_j}^i = \eta_{jl}{r^l}_k\eta^{ki}$. Calculando as formas de Maurer-Cartan dadas pelas matrizes inversas

$$ \mathrm{d}{r_i}^k {r^j}_k = (\eta_{il}\eta^{km}\mathrm{d}{r^l}_m){r^j}_k = (\eta_{il}\eta^{km}{\rho^l}_n{r^n}_m){r^j}_k = \eta_{il}{\rho^l}_n\eta^{jn} \equiv {\rho_i}^j. \tag{282} $$

A derivada exterior das equações (280) é

$$ \begin{aligned} (\mathrm{d}{r^k}_i)\eta_{kl}{r^l}_j + {r^k}_i\eta_{kl}\mathrm{d}{r^l}_j &= ({\rho^k}_m{r^m}_i)\eta_{kl}{r^l}_j + {r^k}_i\eta_{kl}({\rho^l}_m{r^m}_j) \\ &= {r^m}_i{r^l}_j({\rho^k}_m\eta_{kl} + \eta_{mk}{\rho^k}_l) \equiv 0, \end{aligned} \tag{283} $$

de onde podemos concluir o vínculo

$$ \eta_{ik}{\rho^k}_j + \eta_{jk}{\rho^k}_i \equiv 0 \Longleftrightarrow {\rho^i}_j = -\eta^{il}\eta_{jk}{\rho^k}_l, \tag{284} $$

que é consistente com a definição das formas de Maurer-Cartan das matrizes inversas.

Este vínculo reduz o número de formas de Maurer-Cartan linearmente independentes de m^2 para $\frac{1}{2}m(m-1)$ (a dimensão dos grupos ortogonais de dimensão m) e será necessário para a solução do problema. Vale ressaltar que ele pode ser reescrito como

$$ \rho_{ij} \equiv \eta_{ik}{\rho^k}_j \implies \rho_{(ij)} = 0. \tag{285} $$

Por fim, as equações de estrutura para as formas de Maurer-Cartan ${\rho^i}_j$ são

$$ \mathrm{d}{\rho^i}_j = -\mathrm{d}{r^i}_k \wedge \mathrm{d}{r_j}^k = -({\rho^i}_l{r^l}_k) \wedge ({\rho_j}^m{r_m}^k) = -\delta^l_m{\rho^i}_l \wedge {\rho_j}^m = {\rho^i}_k \wedge {\rho^k}_j. \tag{286} $$

Com as equações de estrutura do grupo podemos começar a resolver o problema de G-equivalência. Seja $\theta^i = {r^i}_j\omega^j$ o *coframe* modificado, sua derivada exterior é

$$ \begin{aligned} \mathrm{d}\theta^i &= \mathrm{d}{r^i}_k \wedge \omega^k + {r^i}_k\mathrm{d}\omega^k = \mathrm{d}{r^i}_k \wedge ({r_j}^k\theta^j) + {r^i}_k\omega^m \wedge {\omega^k}_m \\ &= {\rho^i}_j \wedge \theta^j + {r^i}_k({r_j}^m\theta^j) \wedge {\omega^k}_m = ({\rho^i}_j - {r^i}_k{r_j}^m{\omega^k}_m) \wedge \theta^j \equiv {\pi^i}_j \wedge \theta^j, \end{aligned} \tag{287} $$

onde ${\pi^i}_j = {\rho^i}_j - {r^i}_k{r_j}^m{\omega^k}_m$ são as formas de Maurer-Cartan modificadas. A absorção das torções é possível pois as formas ${\rho^i}_j$ e ${\omega^i}_j$ possuem a mesma simetria em seus índices. Não há torções essenciais para normalizar, portanto devemos testar a involutividade. A unicidade da solução pode ser testada exigindo a invariância de ${\Pi^i}_j = {\pi^i}_j + {z^i}_{jk}\theta^k$,

$$ {\Pi^i}_j \wedge \theta^j = ({\pi^i}_j + {z^i}_{jk}\theta^k) \wedge \theta^j \equiv {\pi^i}_j \wedge \theta^j \implies {z^i}_{jk} = {z^i}_{(jk)}, \tag{288} $$

onde ${z^i}_{jk}$ deve satisfazer a condição $z_{ijk} = z_{[ij]k}$. Juntas, ambas as simetrias implicam

$$ z_{ijk} \equiv -z_{jik} = -z_{jki} = z_{kji} = z_{kij} = -z_{ikj} = -z_{ijk} = 0 \implies {z^i}_{jk} \equiv 0, \tag{289} $$

e portanto as soluções são unívocas, o problema não pode ser involutivo e devemos calcular as equações de estrutura das formas de Maurer-Cartan modificadas.

$$ \begin{aligned} \mathrm{d}{\pi^i}_j &= \mathrm{d}({\rho^i}_j - {r^i}_m {r_j}^n {\omega^m}_n) = \mathrm{d}{\rho^i}_j - (\mathrm{d}{r^i}_m) \wedge {r_j}^n {\omega^m}_n - {r^i}_m (\mathrm{d}{r_j}^n) \wedge {\omega^m}_n - {r^i}_m {r_j}^n (\mathrm{d}{\omega^m}_n) \\ &= {\rho^i}_k \wedge {\rho^k}_j - ({\rho^i}_k {r^k}_m) \wedge ({r_j}^n {\omega^m}_n) - {r^i}_m ({\rho_j}^k {r_k}^n) \wedge {\omega^m}_n - {r^i}_m {r_j}^n ({\mathcal{R}^m}_n - {\omega^m}_o \wedge {\omega^o}_n) \\ &= ({\rho^i}_k - {r^i}_m {r_k}^l {\omega^m}_l) \wedge ({\rho^k}_j - {r^k}_n {r_j}^o {\omega^n}_o) - {r^i}_m {r_j}^n {\mathcal{R}^m}_n \equiv {\pi^i}_k \wedge {\pi^k}_j - {\widehat{\mathcal{R}}^i}_j, \end{aligned} \tag{290} $$

onde as torções essenciais estão nas novas formas

$$ \begin{aligned} {\widehat{\mathcal{R}}^i}_k &= {r^i}_m {r_j}^n {\mathcal{R}^m}_n = -\frac{1}{2}({r^i}_m {r_j}^n) {R^m}_{mkl} \omega^k \wedge \omega^l \\ &= -\tfrac{1}{2}({r^i}_m {r_j}^n {r_k}^o {r_l}^p {R^m}_{nop}) \theta^k \wedge \theta^l = -\tfrac{1}{2} {\widehat{R}^i}_{jkl} \theta^k \wedge \theta^l, \end{aligned} \tag{291} $$

que representam as componentes do tensor de Riemann em todos os coframes relacionados por transformações ortogonais, bastando escolher uma seção ${r^i}_j = {r^i}_j(x)$. Estas equações são chamadas *equações de estrutura de Cartan para geometria riemanniana.*

Concluímos que as torções essenciais são as próprias componentes do tensor de Riemann, e a normalização destas torções equivale a escolha de uma forma particular do tensor de curvatura, num *coframe* que elimine ou iguale algumas dessas componentes.

Além das torções essenciais, precisamos calcular suas derivadas. Primeiramente reescrevemos as diferenciais das matrizes ortogonais em termos do *coframe* modificado

$$ \begin{aligned} \mathrm{d}{r^i}_j &= {\rho^i}_k {r^k}_j \equiv ({\mathrm{D}^l}_k {r^i}_j) {\rho^k}_l = (\delta^i_k {r^l}_j) {\rho^k}_l, \\ \mathrm{d}{r_j}^i &= {\rho_j}^k {r_k}^i \equiv {\rho^k}_l ({\mathrm{D}^l}_k {r_j}^i) = -(\delta^l_j {r_k}^i) {\rho^k}_l. \end{aligned} \tag{292} $$

As derivadas absolutas do *coframe* modificado são

$$ \begin{aligned} \mathrm{d} &= \omega^i \mathrm{D}_i + {\rho^i}_j {\mathrm{D}^j}_i = \theta^k ({r_k}^i \mathrm{D}_i) + ({\pi^i}_j + {r^i}_m {r_j}^n {r_k}^o {\Gamma^m}_{no} \theta^k) {\mathrm{D}^j}_i \\ &= \theta^k \left({r_k}^l \mathrm{D}_l + {r^i}_m {r_j}^n {r_k}^o {\Gamma^m}_{no} {\mathrm{D}^j}_i \right) + {\pi^i}_j {\mathrm{D}^j}_i \equiv \theta^k \widehat{\mathrm{D}}_k + {\pi^i}_j {\widehat{\mathrm{D}}^j}_i. \end{aligned} \tag{293} $$

Felizmente não precisamos calcular as derivadas de funções arbitrárias no fibrado

$M\times O(p,q)$. Precisamos calcular apenas as derivadas de $\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} = r^{i_1}{}_{m_1}r_{j_1}{}^{n_1}\ldots T^{m_1\ldots}_{n_1\ldots}(x)$, ou seja, das componentes de tensores (em M) após transformações ortogonais. As derivadas absolutas em relação as formas de Maurer-Cartan modificadas são

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{D}}^k{}_l\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} &= \mathrm{D}^k{}_l(r^{i_1}{}_{m_1}r_{j_1}{}^{n_1}\ldots T^{m_1\ldots}_{n_1\ldots}) = [(\delta^{i_1}_l r^k{}_{m_1})r_{j_1}{}^{n_1}\ldots - r^{i_1}{}_{m_1}(\delta^k_{j_1}r_l{}^{n_1})\ldots+\ldots]T^{m_1\ldots}_{n_1\ldots}\\ &= \delta^{i_1}_l\widehat{T}^{k\ldots}_{j_1\ldots} - \delta^k_{j_1}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots}+\ldots,\end{aligned} \tag{294}$$

ou seja, combinações lineares dos derivandos. Portanto estas derivadas são incapazes de gerar novos invariantes funcionalmente independentes.

As derivadas das componentes dos tensores relativas ao *coframe* modificado são

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{D}}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} &= \left(r_k{}^{k'}\mathrm{D}_{k'} + r^o{}_{o'}r_p{}^{p'}r_k{}^{k'}\Gamma^{o'}{}_{p'k'}\mathrm{D}^p{}_o\right)(r^{i_1}{}_{m_1}r_{j_1}{}^{n_1}\ldots T^{m_1\ldots}_{n_1\ldots})\\ &= (r_k{}^{k'}r^{i_1}{}_{m_1}r_{j_1}{}^{n_1}\ldots\mathrm{D}_{k'}T^{m_1\ldots}_{n_1\ldots}) + r^o{}_{o'}r_p{}^{p'}r_k{}^{k'}\Gamma^{o'}{}_{p'k'}(\delta^{i_1}_o\widehat{T}^{p\ldots}_{j_1\ldots} - \delta^p_{j_1}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{o\ldots}+\ldots)\\ &= (r_k{}^{k'}r^{i_1}{}_{m_1}r_{j_1}{}^{n_1}\ldots)(\mathrm{D}_{k'}T^{m_1\ldots}_{n_1\ldots} + \Gamma^{m_1}{}_{pk'}T^{p\ldots}_{n_1\ldots} - \Gamma^p{}_{n_1k'}T^{m_1\ldots}_{p\ldots})\\ &= (r_k{}^{k'}r^{i_1}{}_{m_1}r_{j_1}{}^{n_1}\ldots)\nabla_{k'}T^{m_1\ldots}_{n_1} \equiv \widehat{\nabla}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}.\end{aligned} \tag{295}$$

Portanto estas derivadas absolutas são as derivadas covariantes do tensor na base θ^i.

Temos agora a solução do problema de equivalência de geometrias riemannianas.

Teorema 5.1.1 (Equivalência de Geometrias Riemannianas)

Sejam duas variedades M e $\overline{M}$ de dimensão m e duas métricas g e $\overline{g}$ definidas em subconjuntos abertos nestas variedades. As duas métricas são equivalentes se e somente se existirem coframes ω e $\overline{\omega}$ tais que as componentes dos tensores de Riemann $R^i{}_{jkl}(x)$ e $\overline{R}^i{}_{jkl}(\overline{x})$ e suas derivadas covariantes sejam iguais para uma solução $\overline{x}=\Phi(x)$.

Na prática, sabemos do capítulo anterior que será necessário calcular derivadas apenas até uma certa ordem $\sigma+1$ tal que suas componentes sejam funcionalmente dependentes das derivadas de ordem menor e que seja impossível novas normalizações.

Uma das consequências desta demonstração é o limite da dimensionalidade do grupo de isometrias das métricas: como o fibrado $M\times SO(p,q)$ possui dimensão $\frac{1}{2}m(m+1)$ então esta é a máxima dimensão do grupo de isometria. Para obter uma métrica com esta isometria é preciso que o tensor de Riemann seja invariante a qualquer transformação ortogonal e suas componentes sejam todas constantes. A única possibilidade que permite a isometria máxima são

$$C^i{}_{jkl}=0,\ R_{ij}=\frac{R}{m}\eta_{ij},\ \mathrm{D}_iR=0, \tag{296}$$

que são os chamados *espaços de curvatura constante*.

Note que o subgrupo de $SO(p,q)$ que permanecer indeterminado (incluindo o trivial) forma o subgrupo de isotropia local de um ponto, pois nestes casos podemos transformar o *coframe* sem mudar as coordenadas x de um ponto da variedade M.

As outras coordenadas que permanecerem indeterminadas mudam os pontos em M conforme as variamos, mas o faz sem alterar a métrica, e portanto são as coordenadas ao longo das órbitas de M. Portanto a dimensão das órbitas é a diferença entre as dimensões dos grupos de isometria e de isotropia.

5.2 Equivalência Conforme de Geometrias Riemannianas

Na seção anterior resolvemos o problema de equivalência isométrica de geometrias riemannianas. Esta solução foi uma preparação para obter o principal resultado deste trabalho: a solução do problema de equivalência conforme entre geometrias riemannianas, ou seja, queremos saber quando duas métricas g e $\overline{g}$ são relacionadas por $\Phi^*\overline{g} \propto g$.

O início da solução do problema é idêntico ao anterior. Escolhemos um *coframe* ω^i tal que as componentes da métrica tenham uma forma normalizada η_{ij}. Então construímos o *coframe* modificado σ^i, mas agora usaremos o grupo dado por $O(p,q) \times \mathbb{R}$,

$$\sigma^i = \mathrm{e}^w r^i{}_j \omega^j \equiv \mathrm{e}^w \theta^i. \tag{297}$$

Escrevemos o *coframe* modificado conforme em termos do *coframe* modificado isométrico para usarmos os resultados da seção anterior e agilizar os cálculos. As equações de estrutura para o novo *coframe* modificado são

$$\mathrm{d}\sigma^i = \mathrm{e}^w \mathrm{d}w \wedge \theta^i + \mathrm{e}^w \mathrm{d}\theta^i = \mathrm{d}w \wedge \sigma^i + \pi^i{}_j \wedge \sigma^j = (\delta^i_j \mathrm{d}w + \pi^i{}_j) \wedge \sigma^j \equiv (\delta^i_j \Omega + \Pi^i{}_j) \wedge \sigma^j, \tag{298}$$

onde os termos entre parênteses são as novas formas de conexão, e as novas formas de Mauer-Cartan modificadas são definidas por

$$\Omega = \mathrm{d}w + z_k \sigma^k, \qquad \Pi^i{}_j = \pi^i{}_j + z^i{}_{jk} \sigma^k. \tag{299}$$

Para testar a unicidade na solução das equações de absorção das torções devemos saber se há soluções distintas de zero para

$$\delta^i_{[j} z_{k]} + z^i{}_{[jk]} \equiv 0 \implies z^i{}_{jk} = \delta^i_k z_j - \eta_{jk}(\eta^{il} z_l) \implies z^i{}_{jk} = z_l(\delta^i_k \delta^l_j - \eta^{il}\eta_{kj}) \equiv z_l g^{li}{}_{kj}. \tag{300}$$

Novamente não há torção essencial para normalizar. Diferente do problema isométrico os parâmetros z_k não são determinados, e o grau de indeterminação é $r' = m$. No fim do capítulo anterior resolvemos o problema de equivalência conforme para variedades bidimensionais, e vimos que o problema era involutivo e todas as métricas eram conformalmente equivalentes. Não podemos realizar o teste de Cartan para o caso atual, pois não temos uma parametrização explícita para o grupo conforme, então vamos prolongar o problema de equivalência e testar se podemos resolvê-lo em seu segundo prolongamento.

A equação de estrutura para Ω, junto com a nova forma de Maurer-Cartan Σ, é

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}z_i \wedge \sigma^i + z_j \mathrm{d}\sigma^j = [\mathrm{d}z_j + z_i(\delta^i_j \Omega + \Pi^i{}_j)] \wedge \sigma^j \equiv \Sigma_j \wedge \sigma^j, \\
&\Sigma_j = \mathrm{d}z_j + z_i(\delta^i_j \Omega + \Pi^i{}_j) + s_{jk}\sigma^k, \;\; s_{jk} \equiv s_{(jk)}.
\end{aligned} \tag{301}$$

As equações de estrutura para $\Pi^i{}_j$ são

$$\mathrm{d}\Pi^i{}_j = \mathrm{d}\pi^i{}_j + g^{li}{}_{kj}\mathrm{d}(z_l\sigma^k) = \pi^i{}_m \wedge \pi^m{}_j - \widehat{\mathcal{R}}^i{}_j + g^{li}{}_{kj}[\mathrm{d}z_l \wedge \sigma^k + z_l \mathrm{d}\sigma^k] \tag{302}$$

Reescrevendo o produto exterior entre as formas $\pi^i{}_j$ temos

$$\begin{aligned}
\pi^i{}_m \wedge \pi^m{}_j &= (\Pi^i{}_m - z^i{}_{mk}\sigma^k) \wedge (\Pi^m{}_j - z^m{}_{jl}\sigma^l) \\
&= \Pi^i{}_m \wedge \Pi^m{}_j + z^i{}_{mk}\Pi^m{}_j \wedge \sigma^k - z^m{}_{jl}\Pi^i{}_m \wedge \sigma^l + z^i{}_{mk}z^m{}_{jl}\sigma^k \wedge \sigma^l \\
&= \Pi^i{}_m \wedge \Pi^m{}_j + z_k[g^{ki}{}_{lm}\Pi^m{}_j - g^{km}{}_{lj}\Pi^i{}_m] \wedge \sigma^l + z^i{}_{mk}z^m{}_{jl}\sigma^k \wedge \sigma^l,
\end{aligned} \tag{303}$$

enquanto a derivada exterior do último termo de (302) vale

$$\begin{aligned}
g^{li}{}_{kj}\mathrm{d}(z_l\sigma^k) &= g^{li}{}_{kj}[\mathrm{d}z_l \wedge \sigma^k + z_l(\Omega \wedge \sigma^k + \Pi^k{}_m \wedge \sigma^m)] \\
&= g^{li}{}_{kj}[\Sigma_l - z_m\Pi^m{}_l - s_{lm}\sigma^m] \wedge \sigma^k + z_l g^{li}{}_{kj}\Pi^k{}_m \wedge \sigma^m \\
&= g^{ki}{}_{lj}\Sigma_k \wedge \sigma^l + z_k(g^{ki}{}_{mj}\Pi^m{}_l - g^{mi}{}_{lj}\Pi^k{}_m) \wedge \sigma^l + g^{mi}{}_{kj}s_{ml}\sigma^k \wedge \sigma^l.
\end{aligned} \tag{304}$$

Vamos focar nossa atenção inicial nas componentes $\Pi^k{}_l \wedge \sigma^m$. Juntando todos os termos destas componentes em ambas as parcelas temos

$$\begin{aligned}
Z^{ki}{}_{lj} &= g^{ki}{}_{lm}\Pi^m{}_j - g^{km}{}_{lj}\Pi^i{}_m + g^{ki}{}_{mj}\Pi^m{}_l - g^{mi}{}_{lj}\Pi^k{}_m \\
&= (\delta^k_m\delta^i_l - \eta^{ki}\eta_{ml})\Pi^m{}_j - (\delta^k_j\delta^m_l - \eta^{km}\eta_{jl})\Pi^i{}_m \\
&\quad + (\delta^k_j\delta^i_m - \eta^{ki}\eta_{jm})\Pi^m{}_l - (\delta^m_j\delta^i_l - \eta^{mi}\eta_{jl})\Pi^k{}_m \\
&= \; - \eta^{ki}(\eta_{lm}\Pi^m{}_j + \eta_{jm}\Pi^m{}_l) + \eta_{jl}(\eta^{km}\Pi^i{}_m + \eta^{im}\Pi^k{}_m) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{305}$$

As componentes $\sigma^k \wedge \sigma^l$ na primeira parcela de (302) valem

$$\begin{aligned}
z^i{}_{mk}z^m{}_{jl}\sigma^k \wedge \sigma^l &= (\delta^i_k z_m - \eta^{in}z_n\eta_{mk})(\delta^m_l z_j - \eta^{mo}z_o\eta_{jl})\sigma^k \wedge \sigma^l \\
&= [\delta^i_k z_j z_l + \eta^{im}z_m z_k \eta_{jl} - (\eta^{mn}z_m z_n)\delta^i_k\eta_{jl}]\sigma^k \wedge \sigma^l \\
&= (\delta^i_k\delta^m_j - \eta^{im}\eta_{kj})[z_m z_l - \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_o z_p)\eta_{ml}]\sigma^k \wedge \sigma^l \\
&= g^{mi}{}_{kj}[z_m z_l - \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_o z_p)\eta_{ml}]\sigma^k \wedge \sigma^l.
\end{aligned} \tag{306}$$

Separando os tensores de Weyl e de Schouten, reescrevemos as formas de curvatura como

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}}^i{}_j =& -\tfrac{1}{2}\widehat{R}^i{}_{jkl}\theta^k\wedge\theta^l = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2w}(\widehat{C}^i{}_{jkl} + 2\delta^i_k\widehat{S}_{lj} - 2\eta_{jk}\widehat{S}_l{}^i)\sigma^k\wedge\sigma^l\\ &= \mathcal{C}^i{}_j - \mathrm{e}^{-2w}(\delta^i_k\delta^m_j - \eta^{im}\eta_{kj})\widehat{S}_{ml}\sigma^k\wedge\sigma^l = \mathcal{C}^i{}_j - \mathrm{e}^{-2w}g^{mi}{}_{kj}\widehat{S}_{ml}\sigma^k\wedge\sigma^l,\end{aligned} \tag{307}$$

onde as formas $\mathcal{C}^i{}_j$ são o tensor de Weyl. Juntando todas as parcelas de (302) temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi^i{}_j =& \Pi^i{}_k\wedge\Pi^k{}_j + (\delta^k_j\delta^i_l - \eta^{ki}\eta_{jl})\Sigma_k\wedge\sigma^l - \mathcal{C}^i{}_j\\ &+ (\delta^i_k\delta^m_j - \eta^{im}\eta_{kj})[z_m z_l - \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_o z_p)\eta_{ml} + s_{ml} + \mathrm{e}^{-2w}\widehat{S}_{ml}]\sigma^k\wedge\sigma^l.\end{aligned} \tag{308}$$

O termo na segunda linha pode ser igualado a zero se escolhermos

$$s_{ij} = -\mathrm{e}^{-2w}\widehat{S}_{ij} - z_i z_j + \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_o z_p)\eta_{ij}. \tag{309}$$

As variáveis s_{ik} são completamente determinadas. O resultado final da normalização é

$$\mathrm{d}\Pi^i{}_j = \Pi^i{}_k\wedge\Pi^k{}_j + (\delta^i_k\delta^l_j - \eta^{il}\eta_{jl})\Sigma_l\wedge\sigma^k - \mathcal{C}^i{}_j,\ \mathcal{C}^i{}_j = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2w}\widehat{C}^i{}_{jkl}\,\sigma^k\wedge\sigma^l. \tag{310}$$

As torções essenciais são as componentes do tensor de Weyl. Aqui não há novidades. A única informação nova é a possibilidade de normalizar as componentes do tensor de Weyl para obter um conjunto de *coframes* privilegiados que simplifique sua forma.

Além do tensor de Weyl devemos estudar suas derivadas absolutas. Para interpretá-las adequadamente, começamos escrevendo as componentes da métrica no *coframe* σ,

$$g = \eta_{ij}\omega^i\otimes\omega^j = \eta_{ij}\theta^i\otimes\theta^j \equiv \widetilde{g}_{ij}\sigma^i\otimes\sigma^j \implies \widetilde{g}_{ij} = \mathrm{e}^{-2w}\eta_{ij}. \tag{311}$$

A derivada exterior da métrica é dada por

$$\mathrm{d}(\widetilde{g}_{ij}) = -2\mathrm{e}^{-2w}\eta_{ij}\mathrm{d}w = (2z_k\widetilde{g}_{ij})\sigma^k - 2\widetilde{g}_{ij}\Omega. \tag{312}$$

A componente Ω da derivada exterior não traz novas informações, ao contrário da componente σ^k. Escolhendo uma seção $\zeta = (r, w, z) \equiv \zeta(x)$ e seja $\sigma^i|_{\zeta(x)} = \omega_0$, temos uma derivada de Weyl (veja eq. (166)) da métrica com $W = z_i(x)\omega^i_0$. Portanto os parâmetros z representam todas as derivadas de Weyl possíveis.

Voltando ao fibrado, para futuras comparações será útil definir as componentes[62]

$$W \equiv \widetilde{W}_i\sigma^i = z_i\sigma^i \equiv \widehat{W}_i\theta^i = (\mathrm{e}^{-w}z_i)\theta^i. \tag{313}$$

[62] Na verdade esta definição é uma mudança de coordenadas $z_i \to \widehat{W}_i = \mathrm{e}^{-w}z_i$ no fibrado prolongado $(M\times O(p,q)\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^m$.

Também é útil saber a equação $\mathrm{d}(\widetilde{g}^{il}\widetilde{g}_{kj}) = \mathrm{d}(\eta^{il}\eta_{kj}) = 0$, que permite ignorar o produto de métricas contravariante e covariante nas derivadas. Outra equação útil será a relação entre as formas de conexão,

$$
\begin{aligned}
\delta^i_j\Omega + \Pi^i{}_j &= (\delta^i_j\mathrm{d}w + \pi^i{}_j) + (\delta^i_j z_k + \delta^i_k z_j - \eta_{jk}\eta^{il}z_l)\sigma^k \equiv (\delta^i_j\mathrm{d}w + \pi^i{}_j) + \widetilde{W}^i{}_{jk}\sigma^k \\
&= (\delta^i_j\mathrm{d}w + \pi^i{}_j) + \mathrm{e}^{-w}(\delta^i_j\widehat{W}_k + \delta^i_k\widehat{W}_j - \widetilde{g}_{jk}\widetilde{g}^{il}\widehat{W}_l)\sigma^k \\
&\equiv (\delta^i_j\mathrm{d}w + \pi^i{}_j) + \mathrm{e}^{-w}\widehat{W}^i{}_{jk}\sigma^k.
\end{aligned} \tag{314}
$$

Para um tensor $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, sua derivada vale

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right) &= \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right) \\
&= (p-q)\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\mathrm{d}w \\
&\quad + \mathrm{e}^{(p-q)w}\left[\left(\widehat{\nabla}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right)\theta^k + \left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{k\ldots}_{j_1\ldots}\right)\pi^{i_1}{}_k - \left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{k\ldots}\right)\pi^k{}_{j_1} + \ldots\right] \\
&= \mathrm{e}^{(p-q-1)w}\left(\widehat{\nabla}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right)\sigma^k + \left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{k\ldots}_{j_1\ldots}\right)(\delta^{i_1}_k\mathrm{d}w + \pi^{i_1}{}_k) \\
&\quad - \left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{k\ldots}\right)(\delta^k_{j_1}\mathrm{d}w + \pi^k{}_{j_1}) + \ldots \\
&= \mathrm{e}^{(p-q-1)w}\left(\widehat{\nabla}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right)\sigma^k + \left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{l\ldots}_{j_1\ldots}\right)\left[(\delta^{i_1}_l\Omega + \Pi^{i_1}{}_l) - \mathrm{e}^{-w}\widehat{W}^{i_1}{}_{lk}\sigma^k\right] \\
&\quad - \left(\mathrm{e}^{(p-q)w}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots}\right)\left[(\delta^l_{j_1}\Omega + \Pi^l{}_{j_1}) - \mathrm{e}^{-w}\widehat{W}^l{}_{j_1k}\sigma^k\right] + \ldots.
\end{aligned} \tag{315}
$$

As componentes Ω e $\Pi^i{}_j$ da derivada não trazem nova informação. Agregando as componentes σ^i temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} &= \mathrm{e}^{(p-q-1)w}\left[\widehat{\nabla}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \widehat{W}^{i_1}{}_{lk}\widehat{T}^{l\ldots}_{j_1\ldots} + \widehat{W}^l{}_{j_1k}\widehat{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots} + \ldots\right] \\
&\equiv \mathrm{e}^{(p-q-1)w}\mathring{\widehat{\nabla}}_k\widehat{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} \equiv \mathring{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} \\
&= \widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{lk}\widetilde{T}^{l\ldots}_{j_1\ldots} + \widetilde{W}^l{}_{j_1k}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots} + \ldots,
\end{aligned} \tag{316}
$$

e portanto esta derivada é uma derivada de Weyl mesmo no caso de um tensor geral. O resultado geral da derivada exterior de um tensor $\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}$ é

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right) &= \left[\mathring{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right]\sigma^k + \left[(p-q)\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right]\Omega + \left[\widetilde{T}^{l\ldots}_{j_1\ldots}\right]\Pi^{i_1}{}_l - \left[\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots}\right]\Pi^l{}_{j_1} + \ldots \\
&= \left[\mathring{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right]\sigma^k + \left[(p-q)\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right]\Omega + \left[\delta^{i_1}_m\widetilde{T}^{n\ldots}_{j_1\ldots} - \delta^n_{j_1}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots\right]\Pi^m{}_n.
\end{aligned} \tag{317}
$$

A ausência das formas Σ_j (veja eq. (301)) na equação acima mostra que há algo faltando. De fato, elas só poderiam surgir se derivarmos uma função que envolve as formas de Weyl, e só podemos construir tensores com as formas de Weyl através de uma derivada de Weyl. Ou seja, estas componentes devem surgir nas derivadas absolutas de segunda ordem.

Começamos computando a derivada de $\widetilde{W}^i{}_{jk}$, que usaremos bastante adiante,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\widetilde{W}^i{}_{jk}\right) &= (\delta^i_k\delta^l_j + \delta^i_j\delta^l_k - \eta^{il}\eta_{kj})\mathrm{d}z_l \\
&= (\delta^i_k\delta^l_j + \delta^i_j\delta^l_k - \eta^{il}\eta_{kj})[\Sigma_l - z_l\Omega - z_m\Pi^m{}_l - s_{lm}\sigma^m] \\
&= (\delta^i_k\delta^l_j + \delta^i_j\delta^l_k - \eta^{il}\eta_{kj})[\Sigma_l - z_m\Pi^m{}_l - s_{lm}\sigma^m] - \widetilde{W}^i{}_{jk}\Omega.
\end{aligned} \tag{318}$$

As componentes Π's podem ser simplificadas nas 1-formas $c^i{}_{jk}$ dadas por

$$\begin{aligned}
c^i{}_{jk} &= (\delta^i_k\delta^l_j + \delta^i_j\delta^l_k - \eta^{il}\eta_{kj})z_m\Pi^m{}_l \\
&= \delta^i_k\delta^n_j z_m\Pi^m{}_n + \delta^i_j\delta^n_k z_m\Pi^m{}_n + \eta_{kj}\delta^i_m\eta^{nl}z_l\Pi^m{}_n \\
&= [\delta^n_j(\delta^i_k z_m + \delta^i_m z_k - \eta_{km}\eta^{il}z_l) + \delta^n_k(\delta^i_j z_m + \delta^i_m z_j - \eta_{jm}\eta^{il}z_l) \\
&\quad - \delta^i_m(\delta^n_j z_k + \delta^n_k z_j - \eta_{kj}\eta^{nl}z_l)]\Pi^m{}_n \\
&= \left[\delta^n_j\widetilde{W}^i{}_{km} + \delta^n_k\widetilde{W}^i{}_{jm} - \delta^i_m\widetilde{W}^n{}_{jk}\right]\Pi^m{}_n,
\end{aligned} \tag{319}$$

onde usamos $\eta_{km}\Pi^m{}_j + \eta_{jm}\Pi^m{}_k = 0$. O resultado final é

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{W}^i{}_{jk} &= (\delta^i_k\delta^l_j + \delta^i_j\delta^l_k - \eta^{il}\eta_{kj})[\Sigma_l - s_{lm}\sigma^m] - \widetilde{W}^i{}_{jk}\Omega \\
&\quad + \left(\delta^i_m\widetilde{W}^n{}_{jk} - \delta^n_j\widetilde{W}^i{}_{km} - \delta^n_k\widetilde{W}^i{}_{jm}\right)\Pi^m{}_n.
\end{aligned} \tag{320}$$

Escrevendo a derivada de Weyl em termos da derivada de Levi-Civita e do tensor, a derivada exterior das derivadas primeiras vale

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right) &= \mathrm{d}\left(\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right) - \left[\widetilde{W}^{i_1}{}_{lk}\mathrm{d}(\widetilde{T}^{l\cdots}_{j_1\cdots}) + \mathrm{d}\left(\widetilde{W}^{i_1}{}_{lk}\right)\widetilde{T}^{l\cdots}_{j_1\cdots}\right] \\
&\quad + \left[\widetilde{W}^l{}_{j_1k}\mathrm{d}\left(\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{l\cdots}\right) + \mathrm{d}\left(\widetilde{W}^l{}_{j_1k}\right)\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{l\cdots}\right] + \cdots .
\end{aligned} \tag{321}$$

Devido ao tamanho das expressões, é melhor computar cada componente separadamente. Começamos pelas componentes Σ (as mais simples). Para elas temos

$$\widetilde{\mathrm{D}}^m_\Sigma\left(\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right) = -(\delta^{i_1}_l\delta^m_k + \delta^{i_1}_k\delta^m_l - \eta^{i_1m}\eta_{lk})\widetilde{T}^{l\cdots}_{j_1\cdots} + (\delta^l_{j_1}\delta^m_k + \delta^l_k\delta^m_{j_1} - \eta^{lm}\eta_{j_1k})\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{l\cdots} + \ldots, \tag{322}$$

portanto uma combinação linear do tensor original. A componente Ω da derivada vale

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}_\Omega\left(\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right) &= (p-q-1)\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots} - \left[\widetilde{W}^i{}_{lk}\left((p-q)\widetilde{T}^{l\cdots}_{j_1\cdots}\right) + \left(-\widetilde{W}^i{}_{lk}\right)\widetilde{T}^{l\cdots}_{j_1\cdots}\right] \\
&\quad + \left[\widetilde{W}^l{}_{j_1k}\left((p-q)\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{l\cdots}\right) + \left(-\widetilde{W}^l{}_{j_1k}\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{l\cdots}\right)\right] + \ldots \\
&= (p-q-1)\left[\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{lk}\widetilde{T}^{l\cdots}_{j_1\cdots} + \widetilde{W}^l{}_{j_1k}\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{l\cdots}\right] \\
&= (p-q-1)\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots},
\end{aligned} \tag{323}$$

e novamente ela é proporcional ao derivando.

As componentes Π da derivada exterior são

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}^n{}_m\left(\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right) = {} & \left[\delta^{i_1}_m\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{n\ldots}_{j_1\ldots} - \delta^n_{j_1}\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} - \delta^n_k\widetilde{\nabla}_m\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} + \ldots\right] \\
& - \Big[\widetilde{W}^{i_1}{}_{lk}(\delta^l_m\widetilde{T}^{n\ldots}_{j_1\ldots} - \delta^n_{j_1}\widetilde{T}^{l\ldots}_{m\ldots} + \ldots) \\
& \qquad + (\delta^{i_1}_m\widetilde{W}^n{}_{lk} - \delta^n_l\widetilde{W}^{i_1}{}_{km} - \delta^n_k\widetilde{W}^{i_1}{}_{lm})\widetilde{T}^{l\ldots}_{j_1\ldots}\Big] \\
& + \Big[\widetilde{W}^l{}_{j_1k}(\delta^{i_1}_m\widetilde{T}^{n\ldots}_{l\ldots} - \delta^n_l\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots) \\
& \qquad + (\delta^l_m\widetilde{W}^n{}_{j_1k} - \delta^n_{j_1}\widetilde{W}^l{}_{km} - \delta^n_k\widetilde{W}^l{}_{j_1m})\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots}\Big] \\
= {} & \delta^{i_1}_m\left[\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{n\ldots}_{j_1\ldots} - \widetilde{W}^n{}_{lk}\widetilde{T}^{l\ldots}_{j_1\ldots} + \widetilde{W}^l{}_{j_1k}\widetilde{T}^{n\ldots}_{l\ldots} + \ldots\right] \\
& - \delta^n_{j_1}\left[\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{lk}\widetilde{T}^{l\ldots}_{m\ldots} + \widetilde{W}^l{}_{mk}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots} + \ldots\right] \\
& - \delta^n_k\left[\widetilde{\nabla}_m\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{lm}\widetilde{T}^{l\ldots}_{m\ldots} + \widetilde{W}^l{}_{j_1m}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{l\ldots} + \ldots\right] \qquad (324)
\end{aligned}
$$

Portando o resultado final é o mesmo que a derivada absoluta de tensores usuais

$$
\mathrm{D}^n{}_m\left(\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}\right) = \delta^{i_1}_m\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{n\ldots}_{j_1\ldots} - \delta^n_{j_1}\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} - \delta^n_k\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_m\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} + \ldots. \qquad (325)
$$

Restam as derivadas relativas ao *coframe* σ. Agregando as componentes temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}_l\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} &= \widetilde{\mathrm{D}}_l\left(\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{mk}\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} + \widetilde{W}^m{}_{j_1k}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots\right) \\
&= \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \left[\widetilde{W}^{i_1}{}_{mk}\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} - (\delta^{i_1}_k\delta^n_m + \delta^{i_1}_m\delta^n_k - \eta^{i_1n}\eta_{km})s_{nl}\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots}\right] \\
&\quad + \left[\widetilde{W}^m{}_{j_1k}\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} - (\delta^m_k\delta^n_{j_1} + \delta^m_{j_1}\delta^n_k - \eta^{mn}\eta_{kj_1})s_{nl}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots}\right] + \ldots, \qquad (326)
\end{aligned}
$$

e vemos que há uma diferença: as funções s_{ij} estão presentes nestas derivadas.

Precisamos agora interpretá-las adequadamente. Calculando a derivada de Weyl da própria forma de Weyl e invertendo-a, escrevemos a derivada de Levi-Civita como

$$
\begin{aligned}
\overset{\circ}{\nabla}_jW_i &= \nabla_jW_i + W^k{}_{ij}W_k = \nabla_jW_i + (\delta^k_iW_j + \delta^k_jW_i - W^kg_{ij})W_k \\
&= \nabla_jW_i + 2(W_jW_i - \tfrac{1}{2}W^kW_kg_{ij}) \implies \\
\nabla_jW_i &= \overset{\circ}{\nabla}_jW_i - 2(W_jW_i - \tfrac{1}{2}W^kW_kg_{ij}). \qquad (327)
\end{aligned}
$$

Escrevendo o tensor de Schouten da geometria de Weyl em termos do tensor de Schouten da geometria riemanniana, e usando a equação acima temos

$$
\overset{\circ}{S}_{ji} = S_{ji} - \nabla_jW_i - W_jW_i + \tfrac{1}{2}(g^{kl}W^kW_l)g_{ij} = S_{ji} - \overset{\circ}{\nabla}_jW_i + W_jW_i - \tfrac{1}{2}(g^{kl}W^kW_l)g_{ij}. \quad (328)
$$

Relembrando a definição das funções s_{ij},

$$
s_{ij} = -\widetilde{S}_{ij} - z_iz_j + \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_oz_p)\eta_{ij},
$$

vemos que os termos nesta solução, para uma seção $z_i = \widetilde{W}_i(x,w) = \mathrm{e}^{-w}W_i(x)$, valem

$$s_{ij}|_{\widetilde{W}} = -\mathrm{e}^{-2w}\left(\mathring{\widehat{\nabla}}_j \widehat{W}_i + \mathring{\widehat{S}}_{ji}\right) = -\left(\mathring{\widetilde{\nabla}}_i \widetilde{W}_j + \mathring{\widetilde{S}}_{ij}\right). \tag{329}$$

(que não são invariantes conformes por causa da transformação da forma de Weyl).

Substituindo estes termos nas derivadas absolutas (326) temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}_l\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots}|_{z=\mathrm{e}^{-w}W(x)} = {} & \left[\mathring{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{mk}\mathring{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} + \widetilde{W}^{m}{}_{j_1k}\mathring{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots\right] \\
& + (\delta^{i_1}_k\delta^n_m + \delta^{i_1}_m\delta^n_k - \eta^{i_1n}\eta_{km})\left(-\mathring{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{W}_n - \mathring{\widetilde{S}}_{ln}\right)\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} \\
& - (\delta^m_k\delta^n_{j_1} + \delta^m_{j_1}\delta^n_k - \eta^{mn}\eta_{kj_1})\left(-\mathring{\widetilde{\nabla}}_l\widetilde{W}_n - \mathring{\widetilde{S}}_{ln}\right)\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots \\
= {} & \mathring{\widetilde{\nabla}}_l\left(\widetilde{\nabla}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - \widetilde{W}^{i_1}{}_{mk}\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} + \widetilde{W}^{m}{}_{j_1k}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots\right) \\
& - (\delta^{i_1}_k\delta^n_m + \delta^{i_1}_m\delta^n_k - \eta^{i_1n}\eta_{km})\mathring{\widetilde{S}}_{ln}\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} \\
& + (\delta^m_k\delta^n_{j_1} + \delta^m_{j_1}\delta^n_k - \eta^{mn}\eta_{kj_1})\mathring{\widetilde{S}}_{ln}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots,
\end{aligned} \tag{330}$$

que enfim implicam

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{D}}_l\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} = {} & \mathring{\widetilde{\nabla}}_l\mathring{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{j_1\ldots} - (\delta^{i_1}_k\delta^n_m + \delta^{i_1}_m\delta^n_k - \eta^{i_1n}\eta_{km})\mathring{\widetilde{S}}_{ln}\widetilde{T}^{m\ldots}_{j_1\ldots} \\
& + (\delta^m_k\delta^n_{j_1} + \delta^m_{j_1}\delta^n_k - \eta^{mn}\eta_{kj_1})\mathring{\widetilde{S}}_{ln}\widetilde{T}^{i_1\ldots}_{m\ldots} + \ldots.
\end{aligned} \tag{331}$$

Aqui temos os novos invariantes conformes, mas ao contrário dos casos anteriores a derivada absoluta segunda de um tensor não é apenas sua derivada covariante: a derivada absoluta de segunda ordem é uma combinação da segunda derivada de Weyl, e do tensor de Schouten, tal que as derivadas da forma de Weyl sejam canceladas. A aparição desta combinação faz sentido, pois incluir as derivadas $\mathring{\nabla}_i W_j$ exigiria a presença de m^2 novas coordenadas Z_{ij} e portanto um fibrado de dimensão maior. Também podemos concluir que o mesmo fenômeno ocorrerá nas derivadas maiores: as derivadas de uma certa ordem incluem o tensor de Schouten da geometria de Weyl (e suas derivadas de Weyl) de forma que apenas a forma de Weyl esteja presente no resultado final.

É crucial notar que mesmo que possamos escolher $\mathring{\nabla}_m C^i{}_{jkl} = 0$, a derivada em (331) em geral *não* será zero se o tensor de Schouten da geometria de Weyl não for zero. Este encerramento prematuro do Método de Cartan pode levar a resultados incorretos.[63]

Para completar o cálculo das derivadas precisamos computar as derivadas de s_{ij},

[63] Esta possibilidade não estava prevista em (OLVER, 1995), embora pudesse ser evitada se houvéssemos retornado ao fibrado $M \times SO(p,q) \times \mathbb{R}$ após termos escolhido nossa 1-forma de Weyl.

necessárias para as derivadas de ordem maiores que dois.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_{ij} =& -\mathrm{d}\widetilde{S}_{ij} - 2z_{(i}\mathrm{d}z_{j)} + \eta_{ij}(\eta^{kl}z_l\mathrm{d}z_k) \\
=& -\mathrm{d}\widetilde{S}_{ij} - (\delta_i^k\delta_j^l + \delta_j^k\delta_j^k - \eta^{lk}\eta_{ij})z_l\mathrm{d}z_k \\
=& -\left[\left(\widetilde{\overset{\circ}{\nabla}}_k\widetilde{S}_{ij}\right)\sigma^k - 2\widetilde{S}_{ij}\Omega - \widetilde{S}_{mj}\Pi^m{}_i - \widetilde{S}_{im}\Pi^m{}_j\right] \\
& - (\delta_i^k\delta_j^l + \delta_j^k\delta_i^l - \eta^{lk}\eta_{ij})z_l(\Sigma_k - z_k\Omega - z_m\Pi^m{}_k - s_{km}\sigma^m) \\
& - \left[\widetilde{\overset{\circ}{\nabla}}_k\widetilde{S}_{ij} - s_{kl}\widetilde{W}^l{}_{ij}\right]\sigma^k - 2s_{ij}\Omega - \left[-\widetilde{S}_{mj} - z_mz_j + \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_oz_p)\eta_{mj}\right]\Pi^m{}_i \\
& - \left[-\widetilde{S}_{im} - z_iz_m + \tfrac{1}{2}(\eta^{op}z_oz_p)\eta_{im}\right]\Pi^m{}_j - \widetilde{W}^k{}_{ij}\Sigma_k,
\end{aligned} \tag{332}$$

onde usamos $\eta^{lk}z_lz_m\Pi^m{}_k = 0$ e somamos $0 = -(\eta^{op}z_oz_p)(\eta_{im}\Pi^m{}_j + \eta_{jm}\Pi^m{}_i)$. Portanto o resultado final é

$$\mathrm{d}s_{ij} = -\left[\widetilde{\overset{\circ}{\nabla}}_k\widetilde{S}_{ij} - \widetilde{W}^l{}_{ij}s_{lk}\right]\sigma^k - 2s_{ij}\Omega - s_{ik}\Pi^k{}_j - s_{kj}\Pi^k{}_i - \widetilde{W}^k{}_{ij}\Sigma_k. \tag{333}$$

Com este resultado, podemos calcular as derivadas maiores.

Embora o problema de equivalência conforme pareça resolvido, há uma possibilidade que não exploramos. Se o tensor de Weyl for zero não há torção essencial para ser normalizada na equação de estrutura dos *coframes* modificados, e portanto precisamos resolver o segundo prolongamento calculando as funções de estrutura das formas Σ_j.

Se a dimensão da variedade for maior que três sabemos que o espaço é conformalmente plano e este cálculo será apenas uma formalidade, mas para espaços tridimensionais o tensor de Weyl pode ser zero sem implicar que a variedade é conformalmente plana.

Voltando à forma $\Sigma_j = \mathrm{d}z_j + z_j\Omega + z_i\Pi^i{}_j + s_{ji}\sigma^i$, sua derivada exterior é

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Sigma_j =& \mathrm{d}z_j \wedge \Omega + z_j\mathrm{d}\Omega + \mathrm{d}z_i \wedge \Pi^i{}_j + z_i\mathrm{d}\Pi^i{}_j + \mathrm{d}s_{ji} \wedge \sigma^i + s_{ji}\mathrm{d}\sigma^i \\
=& (\Sigma_j - z_i\Pi^i{}_j - s_{jl}\sigma^l) \wedge \Omega + z_j(\Sigma_i \wedge \sigma^i) + (\Sigma_i - z_i\Omega - z_k\Pi^k{}_i - s_{il}\sigma^l) \wedge \Pi^i{}_j \\
& + z_i(\Pi^i{}_k \wedge \Pi^k{}_j + \Sigma_j \wedge \sigma^i - \eta^{il}\Sigma_l \wedge \sigma^k\eta_{kj} - \mathcal{C}^i{}_j) + \mathrm{d}s_{ji} \wedge \sigma^i \\
& + s_{ji}(\Omega \wedge \sigma^i + \Pi^i{}_k \wedge \sigma^k),
\end{aligned} \tag{334}$$

que pode ser reorganizada como

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Sigma_j =& \Sigma_j \wedge \Omega + \Sigma_i \wedge \Pi^i{}_j + \\
& \left[\mathrm{d}s_{jl} + \tfrac{1}{2}z_i\widetilde{C}^i{}_{jkl}\sigma^k + 2s_{jl}\Omega + 2s_{k(l}\Pi^k{}_{j)} + 2z_{(l}\Sigma_{j)} - \eta_{lj}(\eta^{ki}z_k\Sigma_i)\right] \wedge \sigma^l.
\end{aligned} \tag{335}$$

Ao substituir a derivada de s_{jl} todas as componentes entre colchetes, com exceção daquela referente ao *coframe* modificado, são zeradas. Restam

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Sigma_j = & -\Omega\wedge\Sigma_j - \Pi^i{}_j\wedge\Sigma_i + \left[\tfrac{1}{2}z_i\widetilde{C}^i{}_{jkl} - (\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{S}_{jl} - \widetilde{W}^i{}_{jl}s_{ik})\right]\sigma^k\wedge\sigma^l \\
= & -\Omega\wedge\Sigma_j - \Pi^i{}_j\wedge\Sigma_i \\
& + \left[\tfrac{1}{2}z_i\widetilde{C}^i{}_{jkl} - \left(\widetilde{\nabla}_{[k}\widetilde{S}_{l]j} - \widetilde{W}^i{}_{lk}\widetilde{S}_{ji} - \widetilde{W}^i{}_{jk}\widetilde{S}_{il}\right) + \widetilde{W}^i{}_{jl}s_{ik}\right]\sigma^k\wedge\sigma^l \\
= & -\Omega\wedge\Sigma_j - \Pi^i{}_j\wedge\Sigma_i + \left(\tfrac{1}{2}z_i\widetilde{C}^i{}_{jkl} + \widetilde{\nabla}_{[l}\widetilde{S}_{k]j}\right)\sigma^k\wedge\sigma^l.
\end{aligned} \tag{336}$$

Lembrando da definição do tensor de Cotton, $\widetilde{C}_{jkl} = 2(m-2)\widetilde{\nabla}_{[l}\widetilde{S}_{k]j}$, o resultado final é

$$\mathrm{d}\Sigma_j = -\Omega\wedge\Sigma_j - \Pi^i{}_j\wedge\Sigma_i + \frac{1}{2(m-2)}\left[\widetilde{C}_{jkl} + (m-2)z_i\widetilde{C}^i{}_{jkl}\right]\sigma^k\wedge\sigma^l. \tag{337}$$

Para dimensões maiores que três o tensor de Cotton é proporcional à divergência do tensor de Weyl, portanto se o tensor de Weyl for zero o tensor de Cotton será zero e estas geometrias são equivalentes à geometria plana. Para variedades tridimensionais o tensor de Cotton não será identicamente nulo, e o reobtemos como invariante conforme. Nestes casos ele e suas derivadas farão o papel do tensor de Weyl na solução do problema.

Por conveniência vamos recapitular os resultados. Os *coframes* modificados são dados pelas equações (297), (299), (300), (301) e (309):

$$\begin{aligned}
\sigma^i &= \mathrm{e}^w\theta^i = \mathrm{e}^w r^i{}_j\omega^j, \\
\Omega &= \mathrm{d}w + z_k\sigma^k, \\
\Pi^i{}_j &= \pi^i{}_j + (\delta^i_k\delta^l_j - \eta^{il}\eta_{jk})z_l\sigma^k, \\
\Sigma_j &= \mathrm{d}z_j + z_i(\Omega\delta^i_j + \Pi^i{}_j) - \left(\widetilde{S}_{jl} + z_jz_l - \tfrac{1}{2}\eta_{jl}\eta^{op}z_oz_p\right)\sigma^l,
\end{aligned} \tag{338}$$

enquanto as equações de estrutura são dadas por (298), (301), (310) e (337):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma^i &= (\Omega\delta^i_j + \Pi^i{}_j)\wedge\sigma^j, \\
\mathrm{d}\Omega &= \Sigma_k\wedge\sigma^k, \\
\mathrm{d}\Pi^i{}_j &= \Pi^i{}_k\wedge\Pi^k{}_j + (\delta^i_k\delta^l_j - \eta^{il}\eta_{jk})\Sigma_l\wedge\sigma^k + \tfrac{1}{2}\widetilde{C}^i{}_{jkl}\sigma^k\wedge\sigma^l, \\
\mathrm{d}\Sigma_j &= -(\Omega\delta^i_j + \Pi^i{}_j)\wedge\Sigma_i + \frac{1}{2(m-2)}\left[\widetilde{C}_{jkl} + (m-2)z_i\widetilde{C}^i{}_{jkl}\right]\sigma^k\wedge\sigma^l.
\end{aligned} \tag{339}$$

A derivada exterior de um tensor arbitrário de ordem (p,q) é dada pela equação (317),

$$\mathrm{d}\left[\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right] = \left[\overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right]\sigma^k + \left[(p-q)\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}\right]\Omega + \left[\delta^{i_1}_m\widetilde{T}^{n\cdots}_{j_1\cdots} - \delta^n_{j_1}\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{m\cdots} + \ldots\right]\Pi^m{}_n, \tag{340}$$

enquanto a derivada exterior de sua derivada de Weyl, $\widetilde{\mathrm{D}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots} = \overset{\circ}{\widetilde{\nabla}}_k\widetilde{T}^{i_1\cdots}_{j_1\cdots}$, foi calculada nas equações (322), (323), (325) e (331):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left[\widetilde{\mathrm{D}}_k \widetilde{T}^{i_1\dots}_{j_1\dots}\right] = & \Big[\mathring{\widetilde{\nabla}}_l \mathring{\widetilde{\nabla}}_k \widetilde{T}^{i_1\dots}_{j_1\dots} - (\delta^{i_1}_k \delta^n_m + \delta^{i_1}_m \delta^n_k - \eta^{i_1 n}\eta_{km})\mathring{\widetilde{S}}_{ln}\widetilde{T}^{m\dots}_{j_1\dots} \\
& \quad + (\delta^m_k \delta^n_{j_1} + \delta^m_{j_1}\delta^n_k - \eta^{mn}\eta_{kj_1})\mathring{\widetilde{S}}_{ln}\widetilde{T}^{i_1\dots}_{m\dots} + \dots\Big]\sigma^l \\
& + \left[(p-q-1)\mathring{\widetilde{\nabla}}_k \widetilde{T}^{i_1\dots}_{j_1\dots}\right]\Omega \\
& + \left[\delta^{i_1}_m \mathring{\widetilde{\nabla}}_k \widetilde{T}^{n\dots}_{j_1\dots} - \delta^n_{j_1}\mathring{\widetilde{\nabla}}_k \widetilde{T}^{i_1\dots}_{m\dots} - \delta^n_k \mathring{\widetilde{\nabla}}_m \widetilde{T}^{i_1\dots}_{j_1\dots} + \dots\right]\Pi^m{}_n, \\
& - [(\delta^{i_1}_m \delta^l_k + \delta^{i_1}_k \delta^l_m - \eta^{i_1 l}\eta_{mk})\widetilde{T}^{m\dots}_{j_1\dots} \\
& \quad - (\delta^m_{j_1}\delta^l_k + \delta^m_k \delta^l_{j_1} - \eta^{ml}\eta_{j_1 k})\widetilde{T}^{i_1\dots}_{m\dots} + \dots]\Sigma_l.
\end{aligned}
\tag{341}
$$

Com estas equações resolvemos qualquer problema de equivalência conforme de métricas.

Embora os invariantes sejam uma combinação das derivadas do tensor de Weyl (ou de Cotton) e do tensor de Schouten, a igualdade dos invariantes implica a equivalência conforme, que implica a igualdade das parcelas separadamente.

Em vez de resolver as equações do difeomorfismo para os invariantes podemos resolvê-las para os tensores de Weyl/Cotton e Schouten e suas derivadas de Weyl, com a desvantagem de envolver as derivadas da forma de Weyl nas equações. Temos então a forma final da solução do problema de equivalência conforme.

Teorema 5.2.1 (Equivalência Conforme de Geometrias Riemannianas)

Sejam duas variedades M e $\overline{M}$ de dimensão $m > 3$ e duas métricas g e $\overline{g}$ definidas em subconjuntos abertos nestas variedades. As duas métricas são equivalentes se e somente se existirem coframes ω e $\overline{\omega}$ e 1-formas de Weyl W e $\overline{W}$ tais que as componentes dos tensores de Weyl $C^i{}_{jkl}(x)$ e $\overline{C}^i{}_{jkl}(\overline{x})$, de Schouten $\mathring{S}_{ij}(x)$ e $\mathring{\overline{S}}_{ij}(\overline{x})$ e suas derivadas de Weyl sejam iguais para uma solução $\overline{x} = \Phi(x)$.

Para variedades de dimensão $m = 3$ substituímos o tensor de Weyl pelo tensor de Cotton nas afirmações acima.

Note que a igualdade do tensor de Schouten e suas derivadas podem ser substituídas pelo tensor de Ricci. Também poderíamos trocar todos os tensores pelo tensor de Riemann (da geometria de Weyl) e suas derivadas, embora isto resulte em equações diferenciais difíceis de resolver. Por outro lado, o Método de Equivalência de Cartan obtém uma ordem ótima para a solução do problema: primeiro normalizamos o tensor de Weyl; depois a sua derivada de Weyl, que nos permite escolher a 1-forma de Weyl; depois a derivada segunda do tensor Weyl e o tensor de Ricci/Schouten; e em seguida as próximas derivadas destes dois tensores.

Antes de encerramos esta seção faremos algumas observações sobre a unicidade da normalização dos novos parâmetros do grupo.

Se o tensor de Weyl (ou Cotton) for diferente de zero sempre haverão componentes $\mathrm{e}^{-2w}\widehat{C}^i{}_{jkl}(x,r) \neq 0$, e podemos normalizar uma delas escolhendo $\widetilde{C}^i{}_{jkl} = 1$. Em particular se a componente escolhida não depende dos parâmetros do grupo a normalização de $w = w(x)$ equivale a normalização da própria métrica, ou seja, a escolha de uma única métrica canônica g_0 tal que

$$g_0 = g_{ij}\left(\mathrm{e}^{w(x)}\omega^i\right) \otimes \left(\mathrm{e}^{w(x)}\omega^j\right) = \left(\mathrm{e}^{2w(x)}g_{ij}\right)\omega^i \otimes \omega^j. \tag{342}$$

Nestes casos temos a opção de normalizar a métrica e resolver a equivalência conforme por outro caminho: duas geometrias riemannianas são equivalentes se e somente se suas (únicas) métricas normalizadas são isometricamente equivalentes.

Quanto às formas de Weyl z_i, é possível mostrar que cada escolha para a forma da derivada é única. Para mostrar isto, considere um tensor de Weyl não-zero e duas conexões de Weyl tais que suas derivadas sejam idênticas,

$$\Delta C^i{}_{jklm} \equiv \overset{\circ}{\nabla}{}^1_m C^i{}_{jkl} - \overset{\circ}{\nabla}{}^2_m C^i{}_{jkl} \equiv 0. \tag{343}$$

Escrevendo a equação em termos de $v^i{}_{jk} = (W^1)^i{}_{jk} - (W^2)^i{}_{jk}$ e $v_i = W^1_i - W^2_i$, temos

$$\begin{aligned}\Delta C^i{}_{jklm} = & -v^i{}_{nm}C^n{}_{jkl} + v^n{}_{jm}C^i{}_{nkl} + v^n{}_{km}C^i{}_{jnl} + v^n{}_{lm}C^i{}_{jkn} \\ = & -(\delta^i_m v_n + \delta^i_n v_m - v^i g_{mn})C^n{}_{jkl} + (\delta^n_m v_j + \delta^n_j v_m - v^n g_{jm})C^i{}_{nkl} \\ & + (\delta^n_m v_k + \delta^n_k v_m - v^n g_{km})C^i{}_{jnl} + (\delta^n_m v_l + \delta^n_l v_m - v^n g_{lm})C^i{}_{jkn} \equiv 0.\end{aligned} \tag{344}$$

Abaixando o primeiro índice e simplificando,

$$\begin{aligned}g_{in}\Delta C^n{}_{jklm} = & \, 2v_m C_{ijkl} + (v_i C_{mjkl} + v_j C_{imkl} + v_k C_{ijml} + v_l C_{ijkm}) \\ & - (g_{mi}C_{njkl} + g_{mj}C_{inkl} + g_{mk}C_{ijnl} + g_{ml}C_{ijkn})v^n = 0.\end{aligned} \tag{345}$$

Por outro lado, contraindo o primeiro e o último índice temos

$$\begin{aligned}\Delta C^m{}_{jklm} = & \, 2v^m C_{mjkl} + v_m C^m{}_{jkl} - (mC_{njkl} + C_{jnkl} + C_{kjnl} + C_{ljkn})v^n = 0 \\ = & -(m-3)v_m C^m{}_{jkl} - (C_{njkl} + C_{nljk} + C_{nklj})v^n \\ = & -(m-3)v_m C^m{}_{jkl} - 3v_n C^n{}_{[jkl]} = 0 \implies v_m C^m{}_{jkl} = 0,\end{aligned} \tag{346}$$

logo as contrações de v com o tensor de Weyl devem ser zero, o que elimina a segunda linha na fórmula de $g_{in}\Delta C^n{}_{jklm}$. Simetrizando os índices j, k e m temos

$$\begin{aligned}g_{ni}\Delta C^n{}_{(jk|l|m)} = & \, 2v_{(m}C_{|i|jk)l} + v_i C_{(mjk)l} + v_{(j}C_{|i|mk)l} + v_{(k}C_{|i|jm)l} + v_l C_{i(jkm)} \\ = & \, 4v_{(m}C_{|i|jk)l} = 0 \implies v_m = 0 \implies W^1_m = W^2_m.\end{aligned} \tag{347}$$

Portanto cada normalização da forma de Weyl é única. Podemos usá-la para escolher, sem ambiguidades, m componentes da derivada do tensor de Weyl iguais a zero.

Por outro lado, para o tensor de Cotton, temos uma equação parecida,

$$\begin{aligned}\Delta C_{jklm} &= v^n{}_{jm}C_{nkl} + v^n{}_{km}C_{jnl} + v^n{}_{lm}C_{jkn} \equiv 0\\ &= (\delta^n_m v_j + \delta^n_j v_m - v^n g_{jm})C_{nkl} + (\delta^n_m v_k + \delta^n_k v_m - v^n g_{km})C_{jnl}\\ &\quad + (\delta^n_m v_l + \delta^n_l v_m - v^n g_{lm})C_{jkn}\\ &= 3v_m C_{jkl} + (v_j C_{mkl} + v_k C_{jml} + v_l C_{jkm})\\ &\quad - (g_{mj}C_{nkl} + g_{mk}C_{jnl} + g_{ml}C_{jkn})v^n = 0.\end{aligned} \tag{348}$$

Contraindo o primeiro e último índice temos

$$\begin{aligned}\Delta C_{mkl}{}^m &= 3v^m C_{mkl} + v_m C^m{}_{kl} - (mC_{nkl} + C_{knl} + C_{lkn})v^n\\ &\quad 4v^m C_{mkl} - (m+1)v^n C_{nkl} - v^n C_{[nlk]} = -(m-3)v^m C_{mkl} = 0,\end{aligned} \tag{349}$$

mas não podemos usar esta equação se $m = 3$ (o resultado é o mesmo para outras contrações). Felizmente há outro caminho. Calculando $v^m \Delta C_{jklm}$ temos

$$\begin{aligned}v^m \Delta C_{jklm} &= 3(v^m v_m)C_{jkl} + v^m(v_j C_{mkl} + v_k C_{jml} + v_l C_{jkm})\\ &\quad - (v_j C_{nkl} + v_k C_{jnl} + v_l C_{jkn})v^n = 3(v^m v_m)C_{jkl} = 0 \implies v^m v_m = 0,\end{aligned} \tag{350}$$

e portanto o vetor v deve ser nulo. Com o resultado acima voltamos à equação original e contraímos com $v^j v^k$, que implica

$$\begin{aligned}v^j v^k \Delta C_{jklm} &= 3v_m(v^j v^k C_{jkl}) + v_l(v^j v^k C_{jkm}) - (v_m v^k C_{nkl} + v_m v^j C_{jnl})v^n = 0\\ &= 2v^j v^k C_{jk(l}v_{m)} = 0 \implies v^j v^k C_{jkl} = -v^j v^k C_{jlk} = 0.\end{aligned} \tag{351}$$

Usaremos este resultado para obter outro mais forte. Calculando $v^j \Delta C_{jk(lm)}$ temos

$$\begin{aligned}&v^j \Delta C_{jk(lm)} = 3v^j C_{jk(l}v_{m)} + v^j C_{jk(m}v_{l)} - v_{(m}C_{|nk|l)}v^n = 3v^j C_{jk(l}v_{m)} = 0\\ &\implies v^j C_{jkl} = 0,\end{aligned} \tag{352}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}v^k \Delta C_{(j|k|lm)} &= 3v_{(m}v^k C_{j|k|l)} + v^k C_{(m|k|l}v_{j)} + v^k C_{(j|k|m}v_{l)} - v_{(m}C_{j|n|l)}v^n = 0\\ &= 4v^k C_{(j|k|l}v_{m)} = 0 \implies v^k C_{jkl} = -v^k C_{jlk} = 0.\end{aligned} \tag{353}$$

Por fim, simetrizamos os índices j, k e m e usamos os dois resultados acima, obtendo

$$\Delta C_{(jk|l|m)} = 3v_{(m}C_{jk)l} + v_{(j}C_{mk)l} + v_{(k}C_{jm)l} = 5v_{(m}C_{jk)l} = 0 \implies v_m = 0. \tag{354}$$

Também no caso do tensor de Cotton cada escolha de sua derivada de Weyl é única, e poderemos escolher três de suas componentes iguais a zero.

Se a variedade não for conformalmente plana sempre poderemos normalizar $w = w(x, r)$ usando o tensor de Weyl (Cotton) e as m componentes $z_i = z_i(x, r)$ da forma de Weyl usando a derivada daquele tensor.

Feitas estas observações, em teoria o limite superior do número de derivadas necessário para resolver o problema de equivalência conforme é $\frac{1}{2}m(m+1)$. Na prática o limite será menor pois mesmo nos piores casos muitos parâmetros de $O(p, q)$ serão simultaneamente normalizados ao escolher a forma do tensor de Weyl.

6 EQUIVALÊNCIA DE ESPAÇOS-TEMPOS

Estabelecidos os principais teoremas de equivalência para métricas arbitrárias, vamos focar nos casos de nosso maior interesse: espaços lorentzianos quadridimensionais. Os estudos específicos destas geometrias começaram com Brans (BRANS, 1965), quem primeiro conjecturou a solução de Cartan para resolver o problema de equivalência entre espaços-tempos, mas apenas quinze anos depois grande progresso foi obtido por Karlhede (KARLHEDE, 1980), que encontrou uma maneira prática de normalizar os tensores de curvatura.

Um estudo completo para a solução do problema de equivalência isométrica de espaços-tempos pode ser encontrada em três artigos de Pollney, Skea e d'Inverno, (POLLNEY; SKEA; D'INVERNO, 2000a), (POLLNEY; SKEA J. E. F. AND D'INVERNO, 2000), e (POLLNEY; SKEA; D'INVERNO, 2000b). Aqui só nos ocuparemos de alguns de seus aspectos mais interessantes.

Mas para compreender a solução de Karlhede é necessário o conhecimento da formulação espinorial da geometria lorentziana, que veremos a seguir.

6.1 Espinores

As duas próximas seções são dedicados ao estudo dos espinores covariantes do grupo de Lorentz. Estes espinores são vitais para entender o formalismo de Newman-Penrose e oferecem um método natural para decompor e classificar os tensores de curvatura.

Esta e a próxima seções são baseadas nos textos de Pirani (PIRANI, 1964), Stewart (STEWART, 1991) e a dissertação do próprio autor (SOUZA, 2014). Uma abordagem mais detalhada do assunto é encontrada nos dois volumes escritos por Penrose e Rindler, (PENROSE; RINDLER, 1984) e (PENROSE; RINDLER, 1986).

Nesta primeira seção nos ocuparemos apenas com a álgebra que estes espinores obedecem, deixando questões relacionadas as derivadas e curvatura para a próxima seção.

O grupo de Lorentz L é o conjunto de todas as transformações que deixam invariante a métrica de Minkowski,

$$g_{ab} = \eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{355}$$

o que equivale a preservar a norma lorentziana $\eta_{ab}v^a v^b$ de todos os vetores v^a. Este grupo não é simplesmente conexo, mas é conexo por partes, o que mostraremos a seguir.

Escrevemos a transformação das componentes de v^a numa forma matricial, $v' = \Lambda v$, onde v, v' são as componentes originais e transformadas do vetor e Λ é uma matriz 4×4

que representa a transformação. Podemos escrever a norma de v^a como $v^t\eta v$, onde t indica a transposição de matrizes e $\eta = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ é a matriz que representa a métrica de Minkowski. A condição para que Λ pertença ao grupo de Lorentz é

$$v'^t\eta v' = (v^t\Lambda^t)\eta(\Lambda v) \equiv v^t\eta v, \tag{356}$$

e como o vetor é totalmente arbitrário obtemos a condição:

$$\Lambda^t\eta\Lambda = \eta. \tag{357}$$

Calculando os determinantes dos dois lados da equação, concluímos que

$$\det(\Lambda) = \pm 1. \tag{358}$$

As transformações com $\det(\Lambda) = 1$ são ditas próprias, enquanto aquelas com $\det(\Lambda) = -1$ são chamadas impróprias. As primeiras preservam a orientação das bases, enquanto as últimas a invertem. Estas duas partes do grupo L são desconexas. Apenas o subconjunto de transformações próprias forma um subgrupo, pois apenas ele contém a identidade.

Para a transformação da componente η_{00} temos

$$\eta'_{00} = ({\Lambda_0}^0)^2 - ({\Lambda_0}^1)^2 - ({\Lambda_0}^2)^2 - ({\Lambda_0}^3)^2 = 1, \tag{359}$$

o que requer $({\Lambda_0}^0)^2 \geq 1$. Se ${\Lambda_0}^0 \geq 1$ a transformação é dita ortócrona, enquanto no caso ${\Lambda_0}^0 \leq -1$ temos uma transformação não-ortócrona. As primeiras preservam o sentido do tempo, enquanto as últimas o invertem. Apenas as primeiras formam um subgrupo.

De acordo com a preservação da orientação da base e do sentido do tempo, podemos dividir o grupo de Lorentz em quatro partes conexas. Somente uma destas partes constitui um subgrupo, o *subgrupo de transformações de Lorentz próprias e ortócronas*, denotado por $\mathrm{L}_+^\uparrow$. Nosso interesse está neste subgrupo.

Considere agora as seguintes matrizes:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{360}$$

ou seja, σ_0 é proporcional a identidade e as outras são proporcionais as *matrizes de Pauli*. Usaremos estas matrizes para associar a cada vetor v^a uma matriz hermitiana Q através de (somatório aplicável)

$$Q = v^a\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix}. \tag{361}$$

Vemos facilmente que $\det(Q)$ é metade da norma lorentziana de v^a. Logo qualquer transformação linear que preserve $\det(Q)$ é uma transformação de Lorentz.

Considere a transformação de similaridade: $Q \to Q' = MQM^\dagger$, onde M pertence ao grupo das matrizes complexas de 2ª ordem com determinante unitário, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Estas transformações preservam o determinante de Q, logo são transformações de Lorentz.

Como o grupo $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ é simplesmente conexo, não pode ser associado a todas as transformações de Lorentz. Seus elementos podem apenas ser associados ao subgrupo conexo $\mathrm{L}_+^\uparrow$. Por fim vemos que as matrizes M e $-M$ são associadas à mesma transformação de Lorentz. O mapa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{L}_+^\uparrow$ é portanto um homomorfismo dois-para-um.

Explicitamente, as matrizes M podem ser escritas como

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{362}$$

onde A, b e c são funções complexos dos pontos do espaço-tempo. Explicaremos a interpretação destas transformações de Lorentz na seção 6.3.

As transformações lineares M operam sobre um espaço linear complexo bidimensional, o *espaço espinorial de* $\mathrm{L}_+^\uparrow$ e denotado por S. Seus elementos são chamados *espinores.*

Seja ς_A uma base de espinores, onde A e demais índices latinos maiúsculos podem assumir os valores 0 e 1. Dado um espinor ξ, denotaremos suas componentes com relação a esta base como $\xi^A = (\xi^0, \xi^1)$, de forma que podemos usar a convenção de somatório para escrever $\xi = \xi^A \varsigma_A$. Seguindo a terminologia da álgebra tensorial, estas componentes são chamadas de contravariantes. Ideias análogas se aplicaram ao espaço dual S^*. As componentes dos operadores lineares em relação à base dual também são denominadas covariantes e denotadas por subíndices, como em ω_A.

Estes dois espaços lineares não bastarão aos nossos propósitos. Para diferenciar quantidades reais, precisaremos de uma operação de conjugação de espinores, mas os complexos conjugados das componentes de um espinor não são componentes de outro espinor. Se mudarmos a base dos espinores de forma que as componentes ξ^A se transformem como $\xi^A \to \xi'^A = T^A{}_B \xi^B$, onde $T^A{}_B$ é uma transformação linear complexa qualquer, as componentes conjugadas se transformam como

$$\overline{\xi^A} \to \overline{\xi'^A} = \overline{T^A{}_B}\; \overline{\xi^B}. \tag{363}$$

É preciso definir um espaço linear $\overline{S}$, o *espaço conjugado à* S, para abrigar objetos cujas componentes tenham estas transformações. Para eles adotaremos duas convenções: os índices referentes a estes espaços serão letras latinas maiúsculas com um apóstrofo, e os espinores conjugados a um certo elemento de S serão denotadas pela mesma letra, mas com um traço acima. Por exemplo, o espinor em $\overline{S}$ conjugado ao espinor ξ é denotado por $\overline{\xi}$, e terá componentes $\overline{\xi}^{A'}$ em relação a base $\overline{\varsigma}_{A'}$ composta dos conjugados aos ς_A.

Embora haja uma bijeção entre os dois espaços, esta relação não é isomorfa pois ela não é linear $\left(\overline{\alpha^A + c\beta^A} \neq \overline{\alpha}^{A'} + \overline{c}\overline{\beta}^{A'}\right)$. Por este motivo S e $\overline{S}$ não podem ser vistos como o mesmo espaço. Pelo mesmo raciocínio, precisaremos de um espaço $\overline{S}^*$ conjugado a S^* e dual a $\overline{S}$, cujas componentes serão indicadas por índices covariantes com apóstrofo.

De posse desses quatro espaços, construímos espaços de espinores de ordens maiores de forma quase totalmente análoga ao caso de tensores, ou seja, através de mapas lineares que atuam num conjunto de espinores de 1ª ordem. A diferença neste caso é a presença dos espaços conjugados, que permitem construir espinores com 4 tipos de índices. Podemos por exemplo construir um espinor $\Sigma_{AA'}$ através de um mapa linear $\Sigma : S \times \overline{S} \to \mathbb{C}$.

Entre os espinores há um subconjunto, os *espinores hermitianos*, que formam um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e tem papel essencial para a teoria.

Definição 6.1.1 (Espinores Hermitianos)

Um espinor é dito hermitiano se é igual ao seu conjugado

$$\overline{\Omega}_{A_1 \ldots A_n A'_1 \ldots A'_n} = \overline{\Omega_{A'_1 \ldots A'_n A_1 \ldots A_n}} \equiv \Omega_{A_1 \ldots A_n A'_1 \ldots A'_n}. \tag{364}$$

Obviamente apenas espinores com o mesmo número de índices usuais e conjugados podem ser hermitianos.

Voltando à equação (361) e lembrando que a matriz Q sofre uma transformação de similaridade, concluímos que esta matriz deve ser um espinor $Q^{AA'}$. Como há um isomorfismo entre os vetores e estes espinores de segunda ordem, consideraremos ambos os mesmos objetos geométricos. Reescreveremos a equação (361) como

$$v^{AA'} = v^a \sigma_a{}^{AA'}. \tag{365}$$

Dado um espinor hermitiano $v^{AA'}$ o vetor correspondente é dado por

$$v^0 = \frac{v^{00'} + v^{11'}}{\sqrt{2}}, \qquad v^1 = \frac{v^{01'} + v^{10'}}{\sqrt{2}}, \qquad v^2 = \frac{i(v^{01'} - v^{10'})}{\sqrt{2}}, \qquad v^3 = \frac{v^{00'} - v^{11'}}{\sqrt{2}}. \tag{366}$$

Reescrevemos as equações acima como $v^a = \sigma^a{}_{AA'} v^{AA'}$, onde as matrizes inversas são

$$[\sigma^a{}_{AA'}] = [\sigma_a{}^{AA'}], \text{ se } a \neq 2 \text{ e } [\sigma^2{}_{AA'}] = -[\sigma_2{}^{AA'}]. \tag{367}$$

As matrizes $\sigma_a{}^{AA'}$ e $\sigma^a{}_{AA'}$ são chamadas *símbolos de Infeld-van der Warden* e satisfazem

$$\overline{\sigma}_a{}^{AA'} = \sigma_a{}^{AA'}, \qquad \overline{\sigma}^a{}_{AA'} = \sigma^a{}_{AA'}, \qquad \sigma^a{}_{AA'} \sigma_b{}^{AA'} = \delta^a_b, \qquad \sigma_a{}^{AA'} \sigma^a{}_{BB'} = \delta^A_B \overline{\delta}^{A'}_{B'}. \tag{368}$$

O isomorfismo entre vetores e espinores contravariantes induz um isomorfismo entre as 1-formas e espinores covariantes através de

$$\alpha_a v^a = \alpha_a \sigma^a{}_{AA'} v^{AA'} \equiv \alpha_{AA'} v^{AA'} \Longleftrightarrow \alpha_{AA'} = \alpha_a \sigma^a{}_{AA'}. \tag{369}$$

Por fim, o produto tensorial permite permite obter um *equivalente espinorial* para qualquer tensor, e um *equivalente tensorial* para qualquer espinor hermitiano

$$T^{AA'\dots}{}_{BB'\dots} = T^{a\dots}{}_{b\dots} \sigma_a{}^{AA'} \sigma^b{}_{BB'} \dots, \qquad T^{a\dots}{}_{b\dots} = T^{AA'\dots}{}_{BB'\dots} \sigma^a{}_{AA'} \sigma_b{}^{BB'} \dots. \tag{370}$$

As equações acima também são válidas para espinores não-hermitianos, mas seus equivalentes tensoriais são tensores complexos, $T^{a\cdots}{}_{b\dots} + A^{a\cdots}{}_{b\dots} + iB^{a\cdots}{}_{b\dots}$.

Na prática raramente usaremos os símbolos de Infeld-van der Warden, sendo mais prático realizar cálculos e obter componentes através de contrações, como em

$$T^{A_1 A_1' \dots A_n A_n'}{}_{A_1 A_1' \dots A_n A_n'} = T^{a_1 \dots a_n}{}_{a_1 \dots a_n}. \tag{371}$$

Também não é comum usá-los em cálculos abstratos, preferindo-se escrever diretamente as equações espinorias ou tensoriais correspondentes.

Obviamente a métrica possui um equivalente espinorial. Ele pode ser obtido através da relação entre a norma lorentziana de um vetor e o determinante do espinor,

$$||v||^2 = g_{AA'BB'} v^{AA'} v^{BB'} \equiv 2\det(v) = \varepsilon_{AB} \bar{\varepsilon}_{A'B'} v^{AA'} v^{BB'}, \tag{372}$$

onde ε_{AB} é o 2-espinor antissimétrico[64] cujas componentes são dadas por

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0,\ \varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1, \tag{373}$$

e $\bar{\varepsilon}_{A'B'}$ é o seu conjugado. Portanto o equivalente da métrica é

$$g_{AA'BB'} = \varepsilon_{AB} \bar{\varepsilon}_{A'B'}. \tag{374}$$

Só há uma componente não-zero única no espinor ε_{AB}, que se transforma como

$$\varepsilon_{01} \to \varepsilon'_{01} = M_0{}^A M_1{}^B \varepsilon_{AB} = M_0{}^0 M_1{}^1 - M_0{}^1 M_1{}^0 = \det(M) \equiv 1, \tag{375}$$

sobre uma transformação dada por uma matriz $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Logo o espinor é invariante as transformações de Lorentz.

[64] Esta equação é consequência da definição de determinante, $\det(A) v^1 \wedge \dots \wedge v^n = A(v^1) \wedge \dots \wedge A(v^n)$, onde $A : V \to V'$ é uma transformação linear, $\dim(V) = \dim(V') = n$ e $\wedge$ são os produtos exteriores definidos em V e V'. Em termos de componentes podemos obter $n! \det(A) = E'_{i_1 \dots i_n} E^{j_1 \cdots j_n} A^{i_1}_{j_1} \dots A^{i_n}_{j_n}$, onde $E'_{i_1 \dots i_n}$ e $E^{j_1 \cdots j_n}$ são os símbolos de permutação totalmente antissimétricos.

A equação (374) sugere usar os 2-espinores do lado direito para abaixar índices espinoriais. Para isto definiremos um produto escalar entre dois espinores, cuja existência será a base de todo o nosso estudo posterior.

Definição 6.1.2 (Estrutura Simplética)

Sejam α, β dois espinores e c um escalar complexo. O produto simplético entre os dois espinores $[\alpha, \beta]$ é um mapa $[\ ,\ ] : S \times S \to \mathbb{C}$ que satisfaz

$$
\begin{aligned}
[c\alpha + \gamma, \beta] &= c[\alpha, \beta] + [\gamma, \beta], \\
[\alpha, \beta] &= -[\beta, \alpha], \\
[\alpha, \beta] &= 0\ \forall\ \alpha \Longleftrightarrow \beta = 0.
\end{aligned} \tag{376}
$$

A definição é semelhante à de um produto interno, apenas trocando o sinal da segunda propriedade, que implica $[\xi, \xi] = 0$ para qualquer 1-espinor. A maior consequência da definição acima é que a estrutura simplética define nosso 2-espinor ε antissimétrico.

Dado um espinor o, a terceira propriedade da definição implica que há espinores ξ tais que $[o, \xi] \neq 0$, e a primeira propriedade permite dividi-los por este valor e obter espinores $\iota = \xi/[o, \xi]$ que satisfazem $[o, \iota] = 1$. Este espinor não é único, pois para qualquer escalar c temos que $\iota + co$ satisfaz a mesma condição. Doravante usaremos como base espinores $\varsigma_0 = o$ e $\varsigma_1 = \iota$ que satisfaçam $[o, \iota] = 1$. Estas são chamadas *bases simpléticas*, *bases espinoriais* ou *díada espinorial*, e são análogas às bases ortonormais de um espaço com produto interno. Em termos de componentes a condição acima é escrita como

$$\varepsilon_{AB} o^A \iota^B = 1. \tag{377}$$

Deve-se tomar cuidado ao escrever as componentes de um espinor nesta base em termos de contrações com os espinores da díada. Para $\xi = \xi^0 o + \xi^1 \iota$ vale

$$\xi^0 = -\varepsilon_{AB} \iota^A \xi^B,\ \xi^1 = \varepsilon_{AB} o^A \xi^B. \tag{378}$$

A estrutura simplética pode ser escrita em termos das bases espinoriais como

$$\varepsilon_{AB} = o_A \iota_B - \iota_A o_B. \tag{379}$$

Com a estrutura simplética, associamos a cada espinor $\xi^A \in S$ o co-espinor

$$\xi_A = \xi^B \varepsilon_{BA}. \tag{380}$$

Note que a ordem dos índices é importante, pois a estrutura simplética é antissimétrica.

A não degenerescência da estrutura simplética implica que podemos usá-la para induzir outra estrutura no espaço dual S^* e, como no caso da métrica, ambas são consideradas o mesmo objeto. As componentes contravariantes de ε são definidas por:[65]

$$\varepsilon^{BC}\varepsilon_{BA} = \delta_A^C \iff \varepsilon^{00} = \varepsilon^{11} = 0, \varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1. \tag{381}$$

De posse da estrutura simplética em S^* podemos definir

$$\xi^A = \varepsilon^{AB}\xi_B. \tag{382}$$

Novamente note que a ordem dos índices é importante. Ressaltamos que as equações para levantar e abaixar índices são definidas com sinal positivo se os índices adjacentes forem dispostos de modo que a contração ocorra no sentido ${}^B\searrow_B$.

A conjugação de S para $\overline{S}$ nos permite mapear a estrutura simplética em S numa estrutura simplética em $\overline{S}$, que denotaremos por $\bar{\varepsilon}$, e possui propriedades idênticas a ε (portanto não faremos nenhuma demonstração para as propriedades de $\bar{\varepsilon}$).

Com estas definições podemos mostrar facilmente que o equivalente da métrica contravariante é o (único) espinor

$$g^{AA'BB'} = \varepsilon^{AB}\bar{\varepsilon}^{A'B'}. \tag{383}$$

Como no caso de um tensor métrico, com a estrutura simplética a ordem dos índices contravariantes e covariantes importa. Mas como não há isomorfismo entre S e S^* a ordem de índices com e sem linha não importa, pois não haverá ambiguidades,

$$\Omega_{AA'}{}^B = \Omega_{A'A}{}^B = \Omega_A{}^B{}_{A'} \neq \Omega^B{}_{AA'}. \tag{384}$$

Contrário ao caso de uma métrica, a antissimetria de ε implica que trocar os índices de uma contração altera o sinal do resultado. Como exemplo temos

$$\Xi_A{}^A{}_B = \varepsilon^{AC}\Xi_{ACB} = -\varepsilon^{CA}\Xi_{ACB} = -\Xi^C{}_{CB}. \tag{385}$$

O fato do espaço de espinores ser bidimensional e ter uma geometria simplética resulta numa álgebra simples, com identidades que facilitam os cálculos. A primeira delas, às vezes chamada *Identidade de Jacobi*, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{A[B}\varepsilon_{CD]} \equiv 0 &\iff \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC}\varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC} \equiv 0 \\ &\iff \varepsilon_{AB}\varepsilon^{CD} = \varepsilon_A{}^C\varepsilon_B{}^D - \varepsilon_A{}^D\varepsilon_B{}^C = \delta_A^C\delta_B^D - \delta_A^D\delta_B^C.\end{aligned} \tag{386}$$

[65] A matriz equivalente a ε^{AB} é a negativa da inversa da matriz de ε_{AB}, pois não somamos os índices adjacentes na definição da estrutura contravariante.

Considere a contração com um espinor $\theta_{\ldots CD\ldots}$. Temos

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CD}\theta_{\ldots CD\ldots} = \theta_{\ldots AB\ldots} - \theta_{\ldots BA\ldots} \implies \theta_{\ldots[AB]\ldots} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{AB}\theta_{\ldots C}{}^{C}{}_{\ldots}. \tag{387}$$

O caso dos espinores de ordem 2 é interessante. Para eles é válido escrever

$$\theta_{AB} = \theta_{(AB)} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{AB}\theta_C{}^C, \tag{388}$$

ou seja, decompomos o espinor numa parte simétrica e num escalar (multiplicado por ε). Este é um resultado geral: todo espinor pode ser decomposto em espinores totalmente simétricos de ordem igual ou menor (multiplicados por fatores adequados de ε). Esta é a *decomposição das partes antissimétricas de um espinor*. A exata forma da decomposição depende da ordem e das simetrias dos índices do espinor. Se o espinor tiver os índices usuais e conjugados a decomposição pode ser efetuada em cada tipo de índice.

Outra decomposição é obtida se $\xi^A\Omega_{AB\ldots A'B'\ldots} = 0$. Nestes casos vale

$$\xi^A\Omega_{AB\ldots A'B'\ldots} = 0 \iff \Omega_{AB\ldots A'B'\ldots} = \xi_A\chi_{BC\ldots A'B'\ldots}, \tag{389}$$

para algum espinor $\chi_{BC\ldots A'B'\ldots}$. A prova é obtida completando a base espinorial com μ^A tal que $\xi_A\mu^A = 1$ e separando as componentes do espinor nas direções ξ_A e μ_A.

Espinores com mesmo o número de índices não-conjugados e conjugados são diretamente mapeados em tensores pelos símbolos de Infeld-van der Warden. Por outro lado espinores com um número distinto destes índices, mas cuja ordem total seja par, podem ser mapeados em tensores com a ajuda da estrutura simplética.

Por exemplo, seja $\phi_{AB} = \phi_{BA}$ um espinor simétrico, podemos definir

$$H_{AA'BB'} = \phi_{AB}\bar{\varepsilon}_{A'B'} = -\phi_{BA}\bar{\varepsilon}_{B'A'} = -H_{BB'AA'}. \tag{390}$$

Logo o equivalente tensorial de ϕ_{AB} é uma 2-forma (complexa) H_{ab}. Podemos reobter o espinor a partir dela através de $\phi_{AB} = \frac{1}{2}H_{AC'B}{}^{C'}$. Daqui é fácil ver que se F_{ab} é uma 2-forma real seu equivalente espinorial é dado por

$$F_{ABA'B'} = \phi_{AB}\bar{\varepsilon}_{A'B'} + \overline{\phi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}. \tag{391}$$

Espinores com número ímpar de índices não podem ser facilmente interpretados em termos de um tensor, mas podemos obter um equivalente para seus quadrados. Para um espinor ξ^A podemos construir um vetor real $\xi^{AA'} \equiv \xi^A\overline{\xi}^{A'}$, que deve ser nulo pois

$$\xi_a\xi^a = (\xi_A\overline{\xi}_{A'})(\xi^A\overline{\xi}^{A'}) = (\xi_A\xi^A)(\overline{\xi}_{A'}\overline{\xi}^{A'}) \equiv 0. \tag{392}$$

Logo cada espinor ξ^A corresponde a um vetor nulo ξ^a.[66]

Por fim, mostraremos que também há uma decomposição para as partes simétricas dos espinores. Considere um espinor $\Omega_{AB\ldots N}$ totalmente simétrico e sua contração com n espinores ξ^A. Se $\xi^0 \neq 0$ podemos escrever

$$\Omega_{(AB\ldots N)}\xi^A\xi^B\ldots\xi^N \equiv P(\xi^0,\xi^1) = (\xi^0)^n P(1,\xi^1/\xi^0), \tag{393}$$

onde P é um polinômio complexo de grau n em duas variáveis. O Teorema Fundamental da Álgebra garante que ele possui n raízes r_a complexas, portanto vale

$$P(\xi^0,\xi^1) = (\xi^0)^n P(1,\xi^1/\xi^0) = \Omega_{11\ldots1}(\xi^1 - r_1\xi^0)(\xi^1 - r_2\xi^0)\ldots(\xi^1 - r_n\xi^0). \tag{394}$$

Definido espinores cujas componentes nesta base tenham estes valores podemos escrever

$$P(\xi^0,\xi^1) = (\alpha_A\xi^A)(\beta_B\xi^B)\ldots(\nu_N\xi^N) = \alpha_{(A}\beta_B\ldots\nu_{N)}\xi^A\xi^B\ldots\xi^N, \tag{395}$$

e como o espinor ξ é arbitrário obtemos

$$\Omega_{(AB\ldots N)} \equiv \alpha_{(A}\beta_B\ldots\nu_{N)}. \tag{396}$$

Todo espinor totalmente simétrico pode ser decomposto em um produto simetrizado de 1-espinores.[67] Estes espinores são determinados a menos da ordem e de fatores multiplicativos, e são chamados *espinores principais de* $\Omega_{(AB\ldots N)}$. Cada um deles determina uma direção nula no espaço-tempo chamadas *direções nulas principais de* $\Omega_{(AB\ldots N)}$. Esta decomposição é chamada *decomposição canônica de* $\Omega_{(AB\ldots N)}$.

A decomposição canônica permite classificar aos espinores de acordo com o número de direções principais distintas e suas multiplicidades. Mais à frente, teremos a chance de usar esta classificação para estudar os tensores de Weyl das geometrias lorentzianas.

Até aqui todos os resultados forma obtidos para a métrica de Minkowski usando as bases holônomas das coordenadas retangulares. Porém, os resultados podem ser facilmente generalizados para qualquer métrica g definindo os símbolos de Infeld-van der Warden num *frame* e *coframe* ortonormal $g = \eta_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$. Sejam $\sigma_i{}^{AA'}$ e $\sigma^i{}_{AA'}$ os símbolos de Infeld-van der Warden definidos no *frame* ortonormal (os mesmos do espaço de

[66] O contrário não é verdade pois $e^{i\theta}\xi^A$ corresponde ao mesmo vetor nulo. Também vale observar que $-\xi^A\bar{\xi}^{A'}$, que representa uma reflexão total de ξ^a, não pode ser obtida do produto de um espinor. Apenas vetores nulos que apontam para o futuro podem ser representados pelo produto de um espinor.

[67] Ao contrário da decomposição das partes aintissimétricas, em geral não há decomposição para espinores com amos os índices não-conjugados e conjugados, ainda que seja totalmente simétrico em ambos.

Minkwoski) a relação num *frame* holônomo é

$$\sigma_a{}^{AA'} = \omega_a^i(x)\sigma_i{}^{AA'},\ \sigma^a{}_{AA'} = e_i^a(x)\sigma^i{}_{AA'}. \tag{397}$$

Para defini-los num *frame* e_i' qualquer, seja $e_i' = B_i^j(x)e_j$ a relação com um *frame* nulo e $(B^{-1})_j^i(x)$ a transformação inversa, definimos

$$\sigma_i'^{AA'} = B_i^j(x)\sigma_j{}^{AA'},\ \sigma'^i{}_{AA'} = (B^{-1})_j^i(x)\sigma^j{}_{AA'}. \tag{398}$$

Com as definições acima somos capazes de construir o isomorfismo entre tensores e espinores para um amplo conjuntos de métricas.[68]

6.2 Curvatura na Forma Espinorial

Nesta seção aprenderemos a calcular a derivada de Levi-Civita de espinores e a decompor o espinor de Riemann. Começamos definido a derivada covariante.

Definição 6.2.1 (Derivada Covariante de Espinores)
A derivada de Levi-Civita de espinores é o operador diferencial ∇_i com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
&\nabla_i(\Xi_{BB'C\ldots} + \Omega_{BB'C\ldots}) = \nabla_i\Xi_{BB'C\ldots} + \nabla_i\Omega_{BB'C\ldots},\\
&\nabla_i(\Xi_{BB'C\ldots}\Omega_{DD'E\ldots}) = (\nabla_i\Xi_{BB'C\ldots})\Omega_{DD'E\ldots} + \Xi_{BB'C\ldots}(\nabla_i\Omega_{DD'E\ldots}),\\
&\nabla_i\overline{\Xi}_{B'BC'\ldots} = \overline{\nabla_i\Xi_{BB'C\ldots}},\\
&\nabla_{[i}\nabla_{j]}f = 0,\\
&\nabla_j\sigma^i{}_{AA'} = 0,\\
&\nabla_j\varepsilon_{AB} = 0.
\end{aligned} \tag{399}$$

As duas primeiras propriedades são a linearidade e a regra de Leibniz, usuais nos operadores de derivação. A terceira propriedade é a hermiticidade do operador de derivação, e garante que derivadas de espinores hermitianos também serão hermitianas. A quarta propriedade garante que esta derivada covariante é livre de torção. A quinta garante que a derivada de espinores e tensores equivalentes também serão equivalentes. A sexta diz que a estrutura simplética será paralelamente transportada ao longo de qualquer curva.

[68] Há uma exigência topológica para a definição consistente de espinores em toda a variedade: a orientabilidade global da mesma.

Usando as equações (399), é fácil mostrar que temos a conexão de Levi-Civita,

$$\nabla_k g_{ij} = \nabla_k ({\sigma_i}^{AA'} {\sigma_j}^{BB'} g_{AA'BB'}) = {\sigma_i}^{AA'} {\sigma_j}^{BB'} \nabla_k (\varepsilon_{AB} \bar{\varepsilon}_{A'B'}) = 0. \tag{400}$$

Explicitamente as componentes da derivada covariante de um espinor ξ^A são

$$\nabla_i \xi^A = \mathrm{D}_i \xi^A + {\Gamma^A}_{Bi} \xi^B, \tag{401}$$

onde ${\Gamma^A}_{Bi}$ são os coeficientes de conexão no espaço de espinores, dados por

$${\Gamma^A}_{Bk} = \tfrac{1}{2} {\sigma_i}^{AC'} ({\sigma^j}_{BC'} {\Gamma^i}_{jk} + \mathrm{D}_k {\sigma^i}_{BC'}). \tag{402}$$

Para espinores com outros tipos de índices temos

$$\begin{aligned} \nabla_i \xi_A =& \mathrm{D}_i \xi_A - {\Gamma^B}_{Aa} \xi_B, \\ \nabla_i \bar{\xi}^{A'} =& \mathrm{D}_i \bar{\xi}^{A'} + {\overline{\Gamma}^{A'}}_{B'a} \bar{\xi}^{B'}, \\ \nabla_i \bar{\xi}_{A'} =& \mathrm{D}_i \bar{\xi}_{A'} - {\overline{\Gamma}^{B'}}_{A'a} \bar{\xi}_{B'}. \end{aligned} \tag{403}$$

Espinores de ordem maior se comportam como derivadas do produto de 1-espinores.

Em geral é inconveniente ter um único índice tensorial no meio das fórmulas espinoriais, mas podemos substituí-lo por dois índices espinorias através da definição

$$\nabla_{AA'} = {\sigma^i}_{AA'} \nabla_i. \tag{404}$$

Explicada a derivada covariante de espinores, vamos estudar o equivalente espinorial do tensor de Riemann, $R_{AA'BB'CC'DD'}$. A demonstração da decomposição completa de suas partes antissimétricas é extensa, e pode ser encontrada nas referências dadas no começo da seção anterior. O resultado final é

$$\begin{aligned} R_{AA'BB'CC'DD'} = & \Psi_{ABCD} \bar{\varepsilon}_{A'B'} \bar{\varepsilon}_{C'D'} + \overline{\Psi}_{A'B'C'D'} \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \\ & + \Phi_{ABC'D'} \bar{\varepsilon}_{A'B'} \varepsilon_{CD} + \Phi_{CDA'B'} \varepsilon_{AB} \bar{\varepsilon}_{C'D'} \\ & + \bar{\varepsilon}_{A'B'} \bar{\varepsilon}_{C'D'} (\varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} + \varepsilon_{AD} \varepsilon_{BC}) \Lambda \\ & + \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} (\bar{\varepsilon}_{A'C'} \bar{\varepsilon}_{B'D'} + \bar{\varepsilon}_{A'D'} \bar{\varepsilon}_{B'C'}) \Lambda, \end{aligned} \tag{405}$$

onde o espinores são totalmente simétricos, $\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}$ e $\Phi_{AA'BB'} = \Phi_{(AB)(A'B')}$, $\Phi_{AA'BB'}$ é hermitiano, e Λ é um escalar real. Podemos provar estas simetrias usando

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = -R_{BB'AA'CC'DD'} = -R_{AA'BB'DD'CC'} = R_{CC'DD'AA'BB'}, \tag{406}$$

ou seja, as simetrias do tensor de Riemann, junto com as equações

$$\Psi_{ABCD} = \tfrac{1}{4}\bar{\varepsilon}^{A'B'}\bar{\varepsilon}^{C'D'}R_{AA'BB'CC'DD'}, \ \Phi_{AC'BD'} = \tfrac{1}{4}\bar{\varepsilon}^{A'B'}\varepsilon^{CD}R_{AA'BB'CC'DD'}. \tag{407}$$

Calculando o equivalente do tensor de Ricci temos

$$R_{AA'BB'} = 6\varepsilon_{AB}\bar{\varepsilon}_{A'B'}\Lambda - 2\Phi_{ABA'B'}, \tag{408}$$

e calculando o escalar de Ricci descobrimos quem é Λ:

$$R = 24\Lambda. \tag{409}$$

As parcelas que envolvem o espinor Ψ_{ABCD}, que desapareceram ao tomar o traço do espinor de Riemann, só podem ser o equivalente ao tensor de Weyl. Logo temos

$$C_{AA'BB'CC'DD'} = \Psi_{ABCD}\bar{\varepsilon}_{A'B'}\bar{\varepsilon}_{C'D'} + \overline{\Psi}_{A'B'C'D'}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}. \tag{410}$$

Por este fato, o espinor totalmente simétrico Ψ_{ABCD} é chamado *espinor de Weyl*.

Resta apenas entender o espinor simétrico e hermitiano Φ. Escrevendo a expressão tensorial de (408) temos

$$\Phi_{ij} = -\tfrac{1}{2}(R_{ij} - \tfrac{1}{4}Rg_{ij}), \tag{411}$$

ou seja, Φ_{ij} é proporcional ao *tensor de Ricci livre de traço*, e o espinor $\Phi_{AA'BB'}$ é chamado *espinor de Ricci*. A equação (405) é a forma espinorial da decomposição de Ricci.

O próximo objetivo desta seção é obter as identidades de Ricci espinoriais. Podemos tentar computá-las através de força bruta usando a equação (401), porém é mais fácil usar uma 2-forma complexa para obtê-las.

Começamos decompondo o operador equivalente a $\nabla_{[i}\nabla_{j]}$. Escrevemos

$$\begin{aligned}\nabla_{AA'}\nabla_{BB'} - \nabla_{BB'}\nabla_{AA'} &= \nabla_{AA'}\nabla_{BB'} - \nabla_{AB'}\nabla_{BA'} + \nabla_{AB'}\nabla_{BA'} - \nabla_{BB'}\nabla_{AA'} \\ &= \bar{\varepsilon}_{A'B'}\nabla_{AC'}\nabla_{B}{}^{C'} + \varepsilon_{AB}\nabla_{CA'}\nabla^{C}{}_{B'},\end{aligned} \tag{412}$$

que também pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\nabla_{AA'}\nabla_{BB'} - \nabla_{BB'}\nabla_{AA'} &= -(\nabla_{BB'}\nabla_{AA'} - \nabla_{AA'}\nabla_{BB'}) \\ &= -(\bar{\varepsilon}_{B'A'}\nabla_{BC'}\nabla_{A}{}^{C'} + \varepsilon_{BA}\nabla_{CB'}\nabla^{C}{}_{A'}) \\ &= \bar{\varepsilon}_{A'B'}\nabla_{BC'}\nabla_{A}{}^{C'} + \varepsilon_{AB}\nabla_{CB'}\nabla^{C}{}_{A'}.\end{aligned} \tag{413}$$

Somando ambas e dividindo por 2 temos

$$\nabla_{AA'}\nabla_{BB'} - \nabla_{BB'}\nabla_{AA'} = \varepsilon_{AB}\square_{A'B'} + \bar{\varepsilon}_{A'B'}\square_{AB}, \tag{414}$$

onde definimos os operadores simétricos $\square_{AB}$ e $\square_{A'B'}$ por

$$\square_{AB} \equiv \nabla_{C'(A}\nabla_{B)}{}^{C'},\ \square_{A'B'} \equiv \nabla_{C(A'}\nabla_{B')}{}^{C} = \overline{\square_{AB}}. \tag{415}$$

Como a identidade de Ricci (106) é válida para tensores complexos (pois vale para as partes real e imaginária) e a derivada da estrutura simplética é zero aplicaremos a identidade à 2-forma complexa $X_{CC'DD'} = \xi_C\xi_D\bar{\varepsilon}_{C'D'}$. Para este tensor temos

$$(\varepsilon_{AB}\square_{A'B'} + \bar{\varepsilon}_{A'B'}\square_{AB})X_{CC'DD'} = -R^{EE'}{}_{CC'BB'AA'}X_{EE'DD'} - R^{EE'}{}_{DD'BB'AA'}X_{CC'EE'}. \tag{416}$$

Contraindo com $\bar{\varepsilon}^{A'B'}\bar{\varepsilon}^{C'D'}$ e $\varepsilon^{AB}\bar{\varepsilon}^{C'D'}$ temos duas equações independentes

$$\begin{aligned} 4\,\square_{AB}(\xi_C\xi_D) &= -R^{EE'}{}_{CE'B}{}^{A'}{}_{AA'}\xi_E\xi_D - R^{EE'}{}_{DE'B}{}^{A'}{}_{AA'}\xi_C\xi_E, \\ 4\,\square_{A'B'}(\xi_C\xi_D) &= -R^{EE'}{}_{CE'}{}^{A}{}_{B'AA'}\xi_E\xi_D - R^{EE'}{}_{DE'}{}^{A}{}_{B'AA'}\xi_C\xi_E. \end{aligned} \tag{417}$$

Usando a decomposição do espinor de Riemann (405), as equações acima são

$$\begin{aligned} 2\xi_{(C}\square_{|AB|}\xi_{D)} &= 2\xi^E[\Psi_{EAB(D}\xi_{C)} - \Lambda\varepsilon_{EB}\varepsilon_{A(D}\xi_{C)} - \Lambda\varepsilon_{EA}\varepsilon_{B(D}\xi_{C)}], \\ 2\xi_{(C}\square_{|A'B'|}\xi_{D)} &= 2\xi^E\Phi_{A'B'E(D}\xi_{C)}. \end{aligned} \tag{418}$$

Por fim escolhemos uma base espinorial (ξ, μ) tal que $\xi_E\mu^E = 1$, e contraindo a equação acima com μ^D temos a forma espinorial das identidades de Ricci,

$$\square_{AB}\xi_C = \Psi_{ABCD}\xi^D - 2\Lambda\xi_{(A}\varepsilon_{B)C}, \quad \square_{A'B'}\xi_C = \xi^D\Phi_{DCA'B'}. \tag{419}$$

No formalismo espinorial a Segunda Identidade de Bianchi tem a forma

$$\nabla^D{}_{C'}\Psi_{ABCD} = \nabla_{(C}{}^{D'}\Phi_{AB)C'D'},\ \nabla^{BB'}\Phi_{ABA'B'} = -3\nabla_{AA'}\Lambda. \tag{420}$$

A demonstração será omitida, mas pode ser encontradas nas referências. A segunda equação é a Identidade de Bianchi contraída, enquanto a primeira é a versão espinorial de (163), e relaciona a divergência do espinor de Weyl com o espinor de Cotton.

Encerramos esta seção com um breve estudo sobre a forma espinorial da teoria eletromagnética. Relembrando a equação (391), o espinor eletromagnético é dado por $F_{AA'BB'} = \frac{1}{2}\phi_{AB}\bar{\varepsilon}_{A'B'} + \frac{1}{2}\overline{\phi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}$. O equivalente da quadricorrente J_i é um espinor hermitiano $J_{AA'}$. As equações de Maxwell espinoriais para as fontes são dadas por

$$\tfrac{1}{2}\nabla^{AA'}(\phi_{AB}\bar{\varepsilon}_{A'B'} + \overline{\phi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}) = \tfrac{1}{2}\nabla^{A}{}_{B'}\phi_{AB} + \tfrac{1}{2}\nabla_{B}{}^{A'}\overline{\phi}_{A'B'} = J_{BB'}. \tag{421}$$

Quanto as equações homogêneas, sabendo que $\bar{\varepsilon}^{A'B'}F_{AA'BB} = 2\phi_{AB}$ podemos obter

$$\begin{aligned}0 &= 2\varepsilon^{AC}\bar{\varepsilon}^{A'B'}(\nabla_{CC'}F_{AA'BB'} + \nabla_{AA'}F_{BB'CC'} + \nabla_{BB'}F_{CC'AA'})\\ &= 2\nabla^{A}{}_{C'}\phi_{AB} + \nabla^{CB'}(\phi_{BC}\bar{\varepsilon}_{B'C'} + \overline{\phi}_{B'C'}\varepsilon_{BC}) - 2\nabla_{B}{}^{A'}\overline{\phi}_{C'A'}\\ &= 3\nabla^{A}{}_{C'}\phi_{AB} - 3\nabla^{A'}{}_{B}\overline{\phi}_{A'C'}.\end{aligned} \tag{422}$$

Portanto podemos juntar ambas as equações de Maxwell numa única equação espinorial

$$\nabla^{A}{}_{B'}\phi_{AB} = J_{BB'}. \tag{423}$$

Não é difícil mostrar que o equivalente do tensor energia-momento é dado por

$$T_{AA'BB'} = \frac{1}{8\pi}\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}. \tag{424}$$

Encerramos discutindo brevemente a classificação canônica do espinor de Maxwell, que é relacionado com o problema de autovetores do tensor eletromagnético. Um campo eletromagnético é dito *nulo* se ambas as direções nulas são repetidas, $\phi_{AB} \equiv \alpha_A\alpha_B$. Seja $\alpha^{AA'} = \alpha^{A}\overline{\alpha}^{A'}$, a equação tensorial correspondente é

$$F^{a}{}_{b}\alpha^{b} = 0. \tag{425}$$

Um campo eletromagnético é dito *não-nulo* se ambas as direções nulas são distintas, $\phi_{AB} \equiv 2\alpha_{(A}\beta_{B)}$. Sendo $\beta^{AA'} = \beta^{B}\overline{\beta}^{B'}$, as equações tensoriais correspondentes são

$$F^{a}{}_{b}\alpha^{b} = \lambda\alpha^{a}, \quad F^{a}{}_{b}\beta^{b} = -\lambda\beta^{a}. \tag{426}$$

6.3 Formalismo de Newman-Penrose

Na seção 5.1 ressaltamos a possibilidade de usarmos *coframes* não-holônomos e não-ortogonais. Agora teremos a oportunidade de trabalhar com *coframes nulos*. O motivo de usarmos estes *coframes* é sua relação simples com uma base espinorial.

Definição 6.3.1 *Coframe Nulo*

Um coframe nulo numa geometria lorentziana quadridimensional é um coframe tal *que as componentes da métrica distintas de zero são dadas por*

$$\eta_{01} = -\eta_{23} = 1. \tag{427}$$

Uma base espinorial define um *coframe* nulo ${\omega^i}_a = (l_a, n_a, m_a, \overline{m}_a)$ através de

$$l_a = {\sigma_a}^{AA'} o_A \bar{o}_{A'}, \qquad n_a = {\sigma_a}^{AA'} \iota_A \bar{\iota}_{A'}, \qquad m_a = {\sigma_a}^{AA'} o_A \bar{\iota}_{A'}, \qquad \overline{m}_a = {\sigma_a}^{AA'} \iota_A \bar{o}_{A'}. \tag{428}$$

Note que m_a é um vetor complexo pois não há (numa geometria lorentziana) quatro vetores reais que satisfaçam as condições acima. Há uma relação explícita entre o *coframe* nulo e um *coframe* ortonormal (t_a, x_a, y_a, z_a), dada por

$$l_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_a - z_a), \quad n_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_a + z_a), \quad m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_a + iy_a), \quad \overline{m}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_a - iy_a), \tag{429}$$

cuja inversa é

$$t_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_a - n_a), \; x_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(m_a + \overline{m}_a), \; y_a = \frac{1}{\sqrt{2}i}(m_a - \overline{m}_a), \; z_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_a + n_a). \tag{430}$$

Junto com o *coframe* nulo também temos um *frame* nulo dado por $(l^a, n^a, m^a, \overline{m}^a)$, mas é importante notar que este não é o *frame* dual ao *coframe* nulo, que é dado por

$${e_i}^a = (n^a, l^a, -\overline{m}^a, -m^a). \tag{431}$$

Apesar desta distinção formal vamos trabalhar com o *frame* nulo em vez do *frame* dual, já que a relação entre eles é não complicada.

Como o *coframe* é nulo os produtos internos diferentes de zero entre as formas da base são dados por $l^a n_a = -m^a \overline{m}_a = 1$. Então podemos escrever a métrica como

$$g_{ab} = 2l_{(a}n_{b)} - 2m_{(a}\overline{m}_{b)}. \tag{432}$$

A forma mais eficiente de usar os espinores é o *formalismo de Newman-Penrose*. Nele não trabalhamos com componentes de tensores ou espinores, mas com escalares obtidos pelas contrações de espinores e tensores com as bases espinoriais e o *frame* nulo.

Para um espinor e seu equivalente tensorial estes escalares são indexados pelo número de espinores ι necessários para eliminar todos os índices espinoriais. Não há ambiguidade pois trabalhamos apenas com espinores totalmente simétricos (decompomos as partes antissimétricas dos espinores). Por exemplo, para um vetor V^a usamos[69]

$$V_{00} = V_{AA'}o^A\overline{o}^{A'} = V_a l^a, \qquad V_{01} = V_{AA'}o^A\overline{\iota}^{A'} = V_a m^a,$$
$$V_{10} = V_{AA'}\iota^A\overline{o}^{A'} = V_a\overline{m}^a = \overline{V_{01}}, \qquad V_{11} = V_{AA'}\iota^A\overline{\iota}^{A'} = V_a n^a. \tag{433}$$

Para uma 2-forma real $F_{AA'BB'} = \phi_{AB}\bar{\varepsilon}_{A'B'} + \overline{\phi}_{A'B'}\varepsilon_{AB}$, vale

$$\phi_0 = \phi_{AB}o^A o^B = F_{ab}l^a m^b, \qquad \phi_1 = \phi_{AB}o^A\iota^B = F_{ab}(l^a n^b + m^a\overline{m}^b)/2,$$
$$\phi_2 = \phi_{AB}\iota^A\iota^B = F_{ab}\overline{m}^a n^b, \tag{434}$$

que permite escrever o espinor ϕ_{AB} como

$$\phi_{AB} = \phi_2 o_A o_B - 2\phi_1 o_{(A}\iota_{B)} + \phi_0\iota_A\iota_B. \tag{435}$$

A vantagem deste formalismo é permitir que computemos quantidades espinoriais e tensoriais simultaneamente, sem a necessidade de usar os símbolos de Infeld-van der Warden ou a conexão espinorial.

Em vez da notação usual, as derivadas covariantes (relativas aos vetores do *frame*) recebem símbolos especiais,

$$D = l^a\nabla_a = o^A\overline{o}^{A'}\nabla_{AA'}, \qquad \delta = m^a\nabla_a = o^A\overline{\iota}^{A'}\nabla_{AA'},$$
$$\Delta = n^a\nabla_a = \iota^A\overline{\iota}^{A'}\nabla_{AA'}, \qquad \overline{\delta} = \overline{m}^a\nabla_a = \iota^A\overline{o}^{A'}\nabla_{AA'}. \tag{436}$$

Se escrevermos a delta de Kronecker em termos do *frame* e do *coframe* obtemos uma nova expressão para a derivada covariante

$$\nabla_a = g_a{}^b\nabla_b = l_a\Delta + n_a D - m_a\overline{\delta} - \overline{m}_a\delta. \tag{437}$$

Vimos na seção (3.1) que a conexão nos *frames* nulos é descrita pelos coeficientes de rotação de Ricci. O análogo dos espinores são os *coeficientes de rotação de Ricci espinoriais*. Para obtê-los definiremos formalmente a díada $\varsigma_{(I)} = (o, \iota)$. Em termos da díada os coeficientes são

$$\Gamma_{(I)(J)(K)(K')} \equiv \varsigma_{(I)}{}^A\varsigma_{(K)}{}^B\bar{\varsigma}_{(K')}{}^{B'}\nabla_{BB'}\varsigma_{(J)A}. \tag{438}$$

Usando contrações podemos escrever os coeficientes da conexão tensorial em termos dos

[69] Deve se tomar cuidado (e analisar o contexto) para não confundir estes escalares com as componentes usuais.

Tabela 1 - Coeficientes de Spin

${}_{(K)(K')}{}^{(I)(J)}$	00	11	01
$00'$	κ	π	ϵ
$11'$	τ	ν	γ
$01'$	σ	μ	β
$10'$	ρ	λ	α

Fonte: O autor, 2019.

coeficientes da conexão espinorial. Por exemplo

$$n^a n^b \nabla_b l_a = \iota^A \bar{\iota}^{A'} \iota^B \bar{\iota}^{B'} \nabla_{BB'}(o_A \bar{o}_{A'}) = \iota^A \iota^B \bar{\iota}^{B'} \nabla_{BB'} o_A + \bar{\iota}^{A'} \iota^B \bar{\iota}^{B'} \nabla_{BB'} \bar{o}_{A'}. \tag{439}$$

Para evitar o uso de índices costuma-se adotar uma notação escalar para os coeficientes de rotação espinoriais. Neste formalismo, eles são conhecidos como *escalares de Newman-Penrose* ou *coeficientes de spin*, e são nomeados de acordo com a tabela 1.

A aplicação mais simples do formalismo de Newman-Penrose é o estudo da propagação da luz num campo gravitacional. Considere um feixe de raios de luz que se propaga livremente no espaço-tempo. Sabemos que as linhas de universo destes raios devem ser geodésicas e que podemos usar uma parametrização afim para estas curvas. Os vetores l^a tangentes a estas geodésicas satisfazem

$$l^b \nabla_b l^a \equiv D l^a = 0. \tag{440}$$

Em algum ponto qualquer das geodésicas escolhemos um espinor o^A tal que $l^{AA'} = o^A \bar{o}^{A'}$ sejam tangentes a geodésicas, e completamos a base espinorial escolhendo algum espinor ι^A que satisfaz $o_A \iota^A = 1$. Em seguida propagamos paralelamente ambos os espinores ao longo das geodésicas, obtendo campos espinoriais que satisfazem

$$D o^A = D \iota^A = 0 \Longleftrightarrow l^b \nabla_b o^A = l^b \nabla_b \iota^A = 0. \tag{441}$$

Por outro lado, as equações espinoriais acima implicam que l^a é o campo de vetores tangentes às geodésicas nulas com uma parametrização afim e, além disto, que todo o *frame* nulo é propagado paralelamente ao longo das geodésicas,

$$D l^a = D n^a = D m^a = D \overline{m}^a = 0. \tag{442}$$

Considere uma 2-superfície suave formada pelas geodésicas nulas acima e definida pelas equações $x^a = x^a(u, w)$, onde u é o parâmetro afim das geodésicas, $l = \partial/\partial u$. Seja $s = \partial/\partial w$ o outro campo vetorial tangente à superfície. A comutação das derivadas parciais dos parâmetros u e w implica que o comutador entre os campos deve ser zero,

$$[l,s]^a = l^b\partial_b s^a - s^b\partial l^a = l^b\nabla_b s^a - s^b\nabla_b l^a = 0. \tag{443}$$

Por outro lado se um campo vetorial s^a satisfaz esta condição, o teorema de Frobenius garante que há uma superfície que pode ser descrita (localmente) pela parametrização acima. O vetor s^a é chamado de vetor *conector* entre as geodésicas.

Calculando a variação do produto escalar $l_a s^a$ ao longo da geodésica temos

$$D(l_a s^a) = l_a D s^a = l_a l^b \nabla_b s^a = l_a s^b \nabla_b l^a = \tfrac{1}{2} s^b \nabla_b (l_a l^a) = 0. \tag{444}$$

Portanto se escolhermos um vetor conector ortogonal a l^a num ponto, os vetores serão ortogonais em todos os pontos. Logo podemos escrever o vetor conector em termos do *frame* nulo como

$$s^a = U l^a + \overline{z} m^a + z \overline{m}^a, \tag{445}$$

onde U é real e z é complexo. Temos interesse na função z, a projeção do vetor conector s^a no plano definido pelas partes real e imaginária de m^a, que define um plano de Argand com coordenadas $z = x + iy$.

Para calcular a variação do vetor conector ao longo das geodésicas usamos novamente a equação (443) obtendo

$$D s^a = l^b \nabla_b s^a = s^b \nabla_b l^a = (U l^b + \overline{z} m^b + z \overline{m}^b) \nabla_b l^a. \tag{446}$$

Lembrando que o *frame* nulo é propagado paralelamente ao longo das geodésicas e escrevendo a última igualdade em termos de espinores temos

$$o^A \overline{o}^{A'} DU + o^A \overline{\iota}^{A'} D\overline{z} + \iota^A \overline{o}^{A'} Dz = (\overline{z} o^B \overline{\iota}^{B'} + z \iota^B \overline{o}^{B'})(o^A \nabla_{BB'} \overline{o}^{A'} + \overline{o}^{A'} \nabla_{BB'} o^A). \tag{447}$$

Contraído com $o_A \overline{\iota}_{A'}$ obtemos a variação de z ao longo das geodésicas em termos dos escalares de Newman-Penrose,

$$Dz = -\rho z - \sigma \overline{z}. \tag{448}$$

Para entender o significado desta equação, estudamos os efeitos dos escalares ρ e σ separadamente. Se ρ é real e $\sigma = 0$ temos

$$Dx = -\rho x \quad \text{e} \quad Dy = -\rho y, \tag{449}$$

então qualquer figura no plano xy é aumentada numa razão $-\rho$. Para o caso $\rho = -i\omega$ e

$\sigma = 0$ as equações para x e y são

$$Dx = -\omega y \quad \text{e} \quad Dy = \omega x, \tag{450}$$

e os pontos na plano xy giram com velocidade angular ω. Se $\rho = 0$ e σ é real temos

$$Dx = -\sigma x \quad \text{e} \quad Dy = \sigma y, \tag{451}$$

que representa uma deformação de qualquer figura no plano por uma fator σ tal que $D(xy) = 0$, ou seja, as áreas são preservadas. Se $\sigma = |\sigma|\mathrm{e}^{2i\phi}$ os eixos principais de deformação sofrem uma rotação por um fator ϕ.

Como a equação (448) é linear o efeito geral é a combinação dos efeitos individuais. Os escalares ρ e σ são chamados *escalares óticos*, pois nos dizem como uma figura, formada por feixes de luz incidindo perpendicularmente numa tela, será afetada pela gravidade ao observamos uma segunda tela colocada perpendicularmente noutro ponto do feixe.

Para outro exemplo do uso dos escalares de Newman-Penrose, reescrevemos as equações de Maxwell (423) numa região sem cargas como

$$\varsigma_{(I)}{}^{B}\overline{\varsigma}_{(I')}{}^{A'}\nabla^{A}{}_{B'}\phi_{AB} = \varsigma_{(I)}{}^{B}\overline{\varsigma}_{(I')}{}^{A'}(o^{A}\iota^{C} - \iota^{A}o^{C})\nabla_{CB'}\phi_{AB} = 0. \tag{452}$$

Usando a regra de Leibniz e os escalares definidos em (434), as equações de Maxwell podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
&D\phi_1 - \overline{\delta}\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2,\\
&D\phi_2 - \overline{\delta}\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\epsilon)\phi_2,\\
&\Delta\phi_0 - \delta\phi_1 = (2\gamma - \mu)\phi_0 - 2\tau\phi_1 + \sigma\phi_2,\\
&\Delta\phi_1 - \delta\phi_2 = \nu\phi_0 - 2\mu\phi_1 + (2\beta - \tau)\phi_2.
\end{aligned} \tag{453}$$

Voltando nossa atenção para a curvatura, as componentes do espinor de Weyl são escritas como

$$\begin{aligned}
&\Psi_0 = \Psi_{ABCD}o^{A}o^{B}o^{C}o^{D}, \qquad \Psi_1 = \Psi_{ABCD}\iota^{A}o^{B}o^{C}o^{D}, \qquad \Psi_2 = \Psi_{ABCD}\iota^{A}\iota^{B}o^{C}o^{D},\\
&\Psi_3 = \Psi_{ABCD}\iota^{A}\iota^{B}\iota^{C}o^{D}, \qquad \Psi_4 = \Psi_{ABCD}\iota^{A}\iota^{B}\iota^{C}\iota^{D}.
\end{aligned} \tag{454}$$

Para o espinor de Ricci temos

$$\begin{aligned}
&\Phi_{00} = \Phi_{ABC'D'}o^{A}o^{B}\overline{o}^{C'}\overline{o}^{D'}, \quad \Phi_{01} = \Phi_{ABC'D'}o^{A}o^{B}\overline{o}^{C'}\overline{\iota}^{D'}, \quad \Phi_{02} = \Phi_{ABC'D'}o^{A}o^{B}\overline{\iota}^{C'}\overline{\iota}^{D'},\\
&\Phi_{11} = \Phi_{ABC'D'}o^{A}\iota^{B}\overline{o}^{C'}\overline{\iota}^{D'}, \quad \Phi_{12} = \Phi_{ABC'D'}o^{A}\iota^{B}\overline{\iota}^{C'}\overline{\iota}^{D'}, \quad \Phi_{22} = \Phi_{ABC'D'}\iota^{A}\iota^{B}\overline{\iota}^{C'}\overline{\iota}^{D'}.
\end{aligned} \tag{455}$$

junto com $\Phi_{nl} = \overline{\Phi_{ln}}$ para componentes conjugadas.

Os coeficientes de comutação serão escritos em termos dos coeficientes de Newman-Penrose. As equações resultantes são chamadas apenas de *comutadores*, e dadas por

$$\begin{aligned}
(\Delta D - D\Delta)\phi &= (\gamma + \bar{\gamma})D\phi + (\epsilon + \bar{\epsilon})\Delta\phi - (\bar{\tau} + \pi)\delta\phi - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta}\phi, \\
(\delta D - D\delta)\phi &= (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D\phi + \kappa\Delta\phi - (\bar{\rho} + \epsilon - \bar{\epsilon})\delta\phi - \sigma\bar{\delta}\phi, \\
(\delta\Delta - \Delta\delta)\phi &= -\bar{\nu}D\phi + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta\phi + (\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta\phi + \bar{\lambda}\bar{\delta}\phi, \\
(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\phi &= (\bar{\mu} - \mu)D\phi + (\bar{\rho} - \rho)\Delta\phi + (\alpha - \bar{\beta})\delta\phi - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{\delta}\phi. \qquad (456)
\end{aligned}$$

Estas equações nos dão condições algébricas sobre as derivadas absolutas de uma função escalar, e constituem condições de integrabilidade para a existência de uma função ϕ que tenha tais derivadas. Como no formalismo de Newman-Penrose só trabalhamos com funções escalares, não precisamos de qualquer outra equação.

Para trabalhar o formalismo de Newman-Penrose é necessário reescrever as identidades de Ricci (419) em termos dos escalares de Newman-Penrose. As equações resultantes, chamadas *equações de Newman-Penrose*, são dadas abaixo[70]

$$
\begin{aligned}
D\rho - \bar{\delta}\kappa &= (\rho + \epsilon + \bar{\epsilon})\rho + \sigma\bar{\sigma} - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00} \\
D\sigma - \delta\kappa &= (\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0 \\
D\alpha - \bar{\delta}\epsilon &= (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\rho + \epsilon)\pi + \Phi_{10} \\
D\tau - \Delta\kappa &= (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01} \\
\delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= (\bar{\alpha} + \beta)\rho - (3\alpha - \bar{\beta})\sigma + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{01} \\
D\beta - \delta\epsilon &= (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1 \\
D\lambda - \bar{\delta}\pi &= (\rho - 3\epsilon + \bar{\epsilon})\lambda + \bar{\sigma}\mu + (\pi + \alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} + \Phi_{20} \\
\Delta\sigma - \delta\tau &= -(\mu - 3\gamma + \bar{\gamma})\sigma - \bar{\lambda}\rho - (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau + \kappa\bar{\nu} - \Phi_{02} \\
D\gamma - \Delta\epsilon &= (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \\
&\quad \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11} \\
\delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + (\rho - \bar{\rho})\gamma + (\mu - \bar{\mu})\epsilon - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11} \\
D\mu - \delta\pi &= (\bar{\rho} - \epsilon - \bar{\epsilon})\mu + \sigma\lambda + (\bar{\pi} - \bar{\alpha} + \beta)\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda \\
\Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\rho - \sigma\lambda + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda \\
\Delta\beta - \delta\gamma &= (\bar{\alpha} + \beta - \tau)\gamma - \mu\tau + \sigma\nu + \epsilon\bar{\nu} + (\gamma - \bar{\gamma} - \mu)\beta - \alpha\bar{\lambda} - \Phi_{12} \\
D\nu - \Delta\pi &= (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3 + \Phi_{21} \\
\delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + (\alpha + \bar{\beta})\mu + (\bar{\alpha} - 3\beta)\lambda - \Psi_3 + \Phi_{21} \\
\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \Psi_3 \\
\Delta\mu - \delta\nu &= -(\mu + \gamma + \bar{\gamma})\mu - \lambda\bar{\lambda} + \bar{\nu}\pi + (\bar{\alpha} + 3\beta - \tau)\nu - \Phi_{22} \\
\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= -(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4.
\end{aligned} \tag{457}
$$

O grupo $\mathrm{L}_+^\uparrow$ atuando sobre *coframes* nulos pode ser decomposto em três sub-grupos: *rotações nula* em torno das direções dadas por o e ι, e um conjunto de transformações chamadas *spin-boost*. Cada um destes subgrupos possui dois parâmetros reais, totalizando os seis parâmetros de uma transformação de $\mathrm{L}_+^\uparrow$.

Uma rotação nula em torno da direção o é dada por:

$$(o^A, \iota^A) \to (\hat{o}^A, \hat{\iota}^A) = (o^A, \iota^A + co^A), \tag{458}$$

[70] Além dos comutadores e das equações de Newman-Penrose, ainda podemos reescrever a Segunda Identidade de Bianchi. Não a incluímos na tese pois não trabalharemos diretamente com elas, mas elas são encontradas nas referências dadas no início da seção anterior.

onde c é uma função complexa qualquer, ou analogamente[71]

$$(l^a, n^a, m^a, \overline{m}^a) \to (\widehat{l}^a, \widehat{n}^a, \widehat{m}^a, \widehat{\overline{m}}^a) = (l^a, n^a + cm^a + \overline{c}\overline{m}^a + c\bar{c}l^a, m^a + \bar{c}l^a, \overline{m}^a + cl^a). \quad (459)$$

Para provar que esta é uma transformação de Lorentz basta mostrar que os produtos entre as formas do *coframe* nulo são invariantes, e portanto estas transformações preservam a métrica de Minkowski (no *coframe* nulo). Por exemplo

$$\widehat{m}_a\widehat{\overline{m}}^a = (m_a + \bar{c}l_a)(\overline{m}^a + cl^a) = m_a\overline{m}^a = -1. \quad (460)$$

Sobre este tipo de transformação as quantidades do formalismo de Newman-Penrose se transformam como

$$\begin{aligned}
\widehat{\kappa} &= \kappa,\\
\widehat{\epsilon} &= \epsilon + c\kappa,\\
\widehat{\sigma} &= \sigma + \bar{c}\kappa,\\
\widehat{\rho} &= \rho + c\kappa,\\
\widehat{\tau} &= \tau + c\sigma + \bar{c}\rho + c\bar{c}\kappa,\\
\widehat{\alpha} &= \alpha + c\epsilon + c\rho + c^2\kappa,\\
\widehat{\beta} &= \beta + c\sigma + \bar{c}\epsilon + c\bar{c}\kappa,\\
\widehat{\gamma} &= \gamma + \bar{c}\alpha + c(\tau + \beta) + c\bar{c}(\rho + \epsilon) + c^2\sigma + c^2\bar{c}\kappa,\\
\widehat{\pi} &= \pi + 2c\epsilon + c^2\kappa + Dc,\\
\widehat{\lambda} &= \lambda + c\pi + 2c\alpha + c^2(\rho + 2\epsilon) + c^3\kappa + cDc + \overline{\delta}c,\\
\widehat{\mu} &= \mu + 2c\beta + \bar{c}\pi + c^2\sigma + 2c\bar{c}\epsilon + c^2\bar{c}\kappa + \bar{c}Dc + \delta c,\\
\widehat{\nu} &= \nu + c(2\gamma + \mu) + \bar{c}\lambda + c^2(\tau + 2\beta) + c\bar{c}(\pi + 2\alpha) +\\
&\quad c^3\sigma + c^2\bar{c}(\rho + 2\epsilon) + c^3\bar{c}\kappa + \Delta c + c\delta c + \bar{c}\overline{\delta}c + c\bar{c}Dc.
\end{aligned} \quad (461)$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\Psi}_0 &= \Psi_0,\\
\widehat{\Psi}_1 &= \Psi_1 + c\Psi_0,\\
\widehat{\Psi}_2 &= \Psi_2 + 2c\Psi_1 + c^2\Psi_0,\\
\widehat{\Psi}_3 &= \Psi_3 + 3c\Psi_2 + 3c^2\Psi_1 + c^3\Psi_0,\\
\widehat{\Psi}_4 &= \Psi_4 + 4c\Psi_3 + 6c^2\Psi_2 + 4c^3\Psi_1 + c^4\Psi_0.
\end{aligned} \quad (462)$$

[71] O nome aqui se justifica, pois são transformações de Lorentz que deixam invariante o vetor nulo l^a.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Phi}_{00} &= \Phi_{00}, \\
\widehat{\Phi}_{01} &= \Phi_{01} + \bar{c}\Phi_{00}, \\
\widehat{\Phi}_{02} &= \Phi_{02} + 2\bar{c}\Phi_{01} + \bar{c}^2\Phi_{00}, \\
\widehat{\Phi}_{11} &= \Phi_{11} + c\Phi_{01} + \bar{c}\Phi_{10} + c\bar{c}\Phi_{00}, \\
\widehat{\Phi}_{12} &= \Phi_{12} + c\Phi_{02} + 2\bar{c}\Phi_{11} + 2c\bar{c}\Phi_{01} + \bar{c}^2\Phi_{10} + c\bar{c}^2\Phi_{00}, \\
\widehat{\Phi}_{22} &= \Phi_{22} + 2c\Phi_{12} + 2\bar{c}\Phi_{21} + c^2\Phi_{02} + 4c\bar{c}\Phi_{11} + \\
&\quad \bar{c}^2\Phi_{20} + 2c^2\bar{c}\Phi_{01} + 2c\bar{c}^2\Phi_{10} + c^2\bar{c}^2\Phi_{00}.
\end{aligned} \tag{463}
$$

Uma *rotação nula* em torno da direção ι é dada por

$$
(o^A, \iota^A) \to (\hat{o}^A, \hat{\iota}^A) = (o^A + b\iota^A, \iota^A), \tag{464}
$$

onde b é uma função qualquer.

As transformações para as variáveis podem ser obtidas da rotação em torno da direção o através de

$$
o^A \leftrightarrow \iota^A \Longleftrightarrow l^a \leftrightarrow n^a,\ m^a \leftrightarrow \overline{m}^a. \tag{465}
$$

As transformações para as variáveis de Newman-Penrose são

$$
\begin{array}{lllll}
D \leftrightarrow \Delta, & \kappa \leftrightarrow -\nu, & \sigma \leftrightarrow -\lambda, & \epsilon \leftrightarrow -\gamma, & \Psi_n \leftrightarrow \Psi_{(4-n)}, \\
\delta \leftrightarrow \overline{\delta}, & \tau \leftrightarrow -\pi, & \rho \leftrightarrow -\mu, & \alpha \leftrightarrow -\beta, & \Phi_{nl} \leftrightarrow \Phi_{(2-n)(2-l)}
\end{array} \tag{466}
$$

(a mudança no sinal da conexão é consequência da contração na equação (438)).

Por fim um *spin-boost* é uma transformação do tipo

$$
(o^A, \iota^A) \to (\hat{o}^A, \hat{\iota}^A) = (a\mathrm{e}^{i\theta}o^A, a^{-1}\mathrm{e}^{-i\theta}\iota^A), \tag{467}
$$

onde a e θ são funções reais. Também podemos escrever[72]

$$
(l^a, n^a, m^a, \overline{m}^a) \to (\hat{l}^a, \hat{n}^a, \widehat{m}^a, \widehat{\overline{m}}^a) = (a^2 l^a, a^{-2} n^a, \mathrm{e}^{2i\theta} m^a, \mathrm{e}^{-2i\theta}\overline{m}^a). \tag{468}
$$

[72] Esta transformação causa uma rotação rígida no plano de m^a e $\overline{m}^a$ e um *boost* no plano de l^a e n^a.

Sob um *spin-boost* as variáveis Newman-Penrose se transformam como

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\kappa}=a^4\mathrm{e}^{2i\theta}\kappa, && \widehat{\pi}=\mathrm{e}^{-2i\theta}\pi, && \widehat{\epsilon}=a^2[\epsilon+D(\ln a+i\theta)],\\
&\widehat{\tau}=\mathrm{e}^{2i\theta}\tau, && \widehat{\nu}=a^{-4}\mathrm{e}^{-2i\theta}\nu, && \widehat{\gamma}=a^{-2}[\gamma+\Delta(\ln a+i\theta)],\\
&\widehat{\sigma}=a^2\mathrm{e}^{4i\theta}\sigma, && \widehat{\mu}=a^{-2}\mu, && \widehat{\beta}=\mathrm{e}^{2i\theta}[\beta+\delta(\ln a+i\theta)],\\
&\widehat{\rho}=a^2\rho, && \widehat{\lambda}=a^{-2}\mathrm{e}^{-4i\theta}\lambda, && \widehat{\alpha}=A^{-1}\bar{A}[\alpha+\overline{\delta}(\ln a+i\theta)].
\end{aligned}
\tag{469}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\Psi}_0=a^4\mathrm{e}^{4i\theta}\Psi_0, && \widehat{\Psi}_1=a^2\mathrm{e}^{2i\theta}\Psi_1, && \widehat{\Psi}_2=\Psi_2,\\
&\widehat{\Psi}_3=a^{-2}\mathrm{e}^{-2i\theta}\Psi_3, && \widehat{\Psi}_4=a^{-4}\mathrm{e}^{-4i\theta}\Psi_4.
\end{aligned}
\tag{470}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\Phi}_{00}=a^4\Phi_{00}, && \widehat{\Phi}_{01}=a^2\mathrm{e}^{2i\theta}\Phi_{01}, && \widehat{\Phi}_{02}=\mathrm{e}^{4i\theta}\Phi_{02},\\
&\widehat{\Phi}_{11}=\Phi_{11}, && \widehat{\Phi}_{12}=a^{-2}\mathrm{e}^{-2i\theta}\Phi_{12}, && \widehat{\Phi}_{22}=a^{-4}\Phi_{22}.
\end{aligned}
\tag{471}
$$

6.4 Algoritmo de Karlhede - Tensor de Weyl

Na solução encontrada por Karlhede para resolver os problemas de equivalências de espaços-tempos usamos os espinores covariantes para escolher *coframes* nulos privilegiados, usando as transformações de Lorentz dos espaços espinoriais para normalizar os espinores, e portanto os tensores, de curvatura.

Devemos lembrar que as transformações simpléticas incluem apenas a parte conexa do grupo de Lorentz. As transformações discretas impróprias devem ser analisadas separadamente. Em termos do *coframe* nulo as reflexões das formas ortonormais t_a, z_a, x_a, y_a são[73]

$$
\begin{aligned}
&(l_a,n_a,m_a,\overline{m}_a)\to(-n_a,-l_a,m_a,\overline{m}_a),\\
&(l_a,n_a,m_a,\overline{m}_a)\to(n_a,l_a,m_a,\overline{m}_a),\\
&(l_a,n_a,m_a,\overline{m}_a)\to(l_a,n_a,\overline{m}_a,m_a),\\
&(l_a,n_a,m_a,\overline{m}_a)\to(l_a,n_a,-\overline{m}_a,-m_a).
\end{aligned}
\tag{472}
$$

As composições destas transformações são próprias e possuem equivalentes em $SL(2,\mathbb{C})$. Em algumas situações a normalização dos parâmetros resulta num subgrupo desconexo

[73] Conforme discutido na página 169 de (PENROSE; RINDLER, 1984), se $L^a{}_b$ é uma transformação de Lorentz qualquer seus análogos espinoriais $L^{AA'}{}_{BB'}$ podem ser escritos como $\pm L^A{}_B\overline{L}^{A'}{}_{B'}$ ou $\pm L^A{}_{B'}\overline{L}^{A'}{}_B$. Aquelas com a primeira forma são próprias, enquanto aquelas com a segunda forma são impróprias. Aquelas cujo sinal é positivo são ortócronas. Apenas as transformações em $\mathrm{L}_+^\uparrow$ definem isomorfismos para 1-espinores.

de $SL(2,\mathbb{C})$. Nestes casos as composição das reflexões especiais são simetrias do espinor (mesmo que as transformações impróprias não o sejam),

$$\begin{aligned}
(o_A, \iota_A) &\to (\pm\iota_A, \ \ \mp o_A) \implies (l_a, n_a, m_a, \overline{m}_a) \to (n_a, l_a, -\overline{m}_a, -m_a),\\
(o_A, \iota_A) &\to (\pm i\iota_A, \pm i o_A) \implies (l_a, n_a, m_a, \overline{m}_a) \to (n_a, l_a, \overline{m}_a, m_a),\\
(o_A, \iota_A) &\to (\pm i o_A, \mp i\iota_A) \implies (l_a, n_a, m_a, \overline{m}_a) \to (l_a, n_a, -m_a, -\overline{m}_a).
\end{aligned} \tag{473}$$

A ideia de Karlhede para normalizar o grupo de simetria é escolher uma base espinorial tal que um certo conjunto de escalares de Newman-Penrose (e/ou suas derivadas) sejam zero e, consequentemente, o *coframe* equivalente simplifique as formas dos tensores de curvatura. Estas formas são chamadas *formas padrão* ou *formas canônicas*.

O primeiro passo para o algoritmo de Karlhede é normalizar o tensor de Weyl, cujas transformações são as mais simples. Se ainda sobrarem parâmetros indeterminados, eles poderão ser normalizados pelo tensor de Ricci e, se a isotropia persistir, pelas derivadas dos espinores e do escalar de Ricci. Enquanto normalizamos os parâmetros do grupo, colecionamos invariantes de Cartan. Ao atingirmos uma ordem tal que nenhum novo invariante independente ou nova normalização apareça, encerramos a computação.

A forma padrão do tensor de Weyl depende de seu *tipo de Petrov*, que é classe assinalada de acordo com a decomposição canônica deste espinor.

O tipo de Petrov não-trivial mais simples é o tipo N, quando o espinor de Weyl possui uma direção nula principal (que deve ter multiplicidade quatro), $\Psi_{ABCD} = \alpha_A\alpha_B\alpha_C\alpha_D$. Para estes tipos de Petrov escolhemos $o_A = \alpha_A$ e qualquer outro espinor linearmente independente para ι_A. Usando as definições (454), a forma padrão é

$$\Psi_{ABCD} = o_A o_B o_C o_D \implies \Psi_4 = 1, \ \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0. \tag{474}$$

A forma do espinor de Weyl não restringe a escolha do espinor ι_A. Portanto ainda temos uma isometria continua não-normalizada, dada pela rotação nula $\iota_A \to \iota_A + c o_A$. Para obter a forma do tensor de Weyl correspondente calculamos

$$\begin{aligned}
\Psi_{ABCD}\bar{\varepsilon}_{A'B'}\bar{\varepsilon}_{C'D'} &= o_A o_B o_C o_D(\overline{o}_{A'}\bar{\iota}_{B'} - \bar{\iota}_{A'}\overline{o}_{B'})(\overline{o}_{C'}\bar{\iota}_{D'} - \bar{\iota}_{C'}\overline{o}_{D'}),\\
&= (l_{AA'}m_{BB'} - m_{AA'}l_{BB'})(l_{CC'}m_{DD'} - m_{CC'}l_{DD'}).
\end{aligned} \tag{475}$$

Relembrando a equação (414), somamos o resultado acima com seu conjugado para obter o equivalente do tensor de Weyl. O resultado para o tensor de Weyl é

$$C_{abcd} = 4l_{[a}m_{b]}l_{[c}m_{d]} + 4l_{[a}\overline{m}_{b]}l_{[c}\overline{m}_{d]}. \tag{476}$$

O tensor de Weyl é simétrico com respeito às duas últimas reflexões em (472), e o espinor também é invariante à sua composição, dada pela última transformação em (473).

Para o tipo Petrov III há duas direções nulas principais e uma delas possui multiplicidade três, $\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\alpha_C\beta_{D)}$. Escolhendo os espinores $o_A = \frac{1}{2}i(\alpha_B\beta^B)^{1/2}\alpha_A$ e $\iota_A = -2i\beta_A/(\alpha_B\beta^B)^{3/2}$ como base, temos os escalares

$$\Psi_{ABCD} = -4o_{(A}o_Bo_C\iota_{D)} \implies \Psi_3 = 1, \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0. \tag{477}$$

A forma do tensor de Weyl correspondente é

$$\begin{aligned} C_{abcd} = & -4l_{[a}m_{b]}(l_{[c}n_{d]} - m_{[c}\overline{m}_{d]}) - 4(l_{[a}n_{b]} - m_{[a}\overline{m}_{b]})l_{[c}m_{d]} \\ & -4l_{[a}\overline{m}_{b]}(l_{[c}n_{d]} - \overline{m}_{[c}m_{d]}) - 4(l_{[a}n_{b]} - \overline{m}_{[a}m_{b]})l_{[c}\overline{m}_{d]}. \end{aligned} \tag{478}$$

Neste caso todos os parâmetros são normalizados. A única simetria deste tensor é a terceira reflexão do conjunto (472).

No tipo Petrov D há duas direções principais nulas, ambas de multiplicidade dois, $\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\beta_C\beta_{D)}$. Neste caso escolhemos $o_A = \alpha_A$ e $\iota_A = \beta_A/(\alpha_B\beta^B)$, obtendo

$$\Psi_{ABCD} = 6\Psi_2 o_{(A}o_B\iota_C\iota_{D)} \implies \Psi_2 \neq 0, \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0. \tag{479}$$

Neste caso obtemos nossos dois primeiros invariantes de Cartan, Ψ_2. A forma tensorial é

$$\begin{aligned} C_{abcd} = & \, 4\Psi_2(l_{[a}m_{b]}n_{[c}\overline{m}_{d]} + n_{[a}\overline{m}_{b]}l_{[c}m_{d]}) + 4\overline{\Psi}_2(l_{[a}\overline{m}_{b]}n_{[c}m_{d]} + n_{[a}m_{b]}l_{[c}\overline{m}_{d]}) \\ & + 4(\Psi_2 + \overline{\Psi}_2)(l_{[a}n_{b]}l_{[c}n_{d]} + m_{[a}\overline{m}_{b]}m_{[c}\overline{m}_{d]}) \\ & - 4(\Psi_2 - \overline{\Psi}_2)(l_{[a}n_{b]}m_{[c}\overline{m}_{d]} + m_{[a}\overline{m}_{b]}l_{[c}n_{d]}). \end{aligned} \tag{480}$$

Estes tipos são invariantes a transformação de *spin-boost*, $(o_A, \iota_A) \to (Ao_A, \iota_A/A)$, e a todas as transformações em (473) (só precisamos da primeira transformação, as outras podem ser obtidas pelo *spin-boost*). O tensor de Weyl possui simetrias impróprias se e somente se Ψ_2 for real. Nestes casos o tensor é invariante a todas as transformações em (472).

Para o tipo Petrov II há três direções principais nulas, sendo uma delas dupla:[74] $\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\beta_C\gamma_{D)}$. Poderíamos escolher para a base o espinor repetido e uma das outras direções, mas não estaríamos aproveitando toda a simetria do espinor. Outra possibilidade seria escolher as direções nulas não-repetidas como base, mas não eliminaríamos o maior número possível de escalares. Preferimos um base menos óbvia: alinharemos o primeiro espinor com a direção repetida, $o_A \propto \alpha_A$, que implica $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$. Usando uma rotação nula em torno de o_A, o novo valor de Ψ_3, de acordo com as transformações

[74] Para os tipos de Petrov II e I há uma maior liberdade na escolha das formas canônicas. A forma exata depende da convenção dos autores. Aqui usamos a convenção de (PENROSE; RINDLER, 1986).

(462), é

$$\widehat{\Psi}_3 = \Psi_3 + 3c\Psi_2, \tag{481}$$

e podemos escolher $\widehat{\Psi}_3 = 0$. Em seguida fazemos um *spin-boost* e usamos as equações (462) para escolher $\widehat{\Psi}_4 = a^{-4}\mathrm{e}^{-4i\theta}\Psi_4 = 6\Psi_2$. Omitindo os chapéus, o resultado final é

$$\Psi_{ABCD} = 6\Psi_2(o_{(A}o_B\iota_C\iota_{D)} + o_Ao_Bo_Co_D). \tag{482}$$

Novamente Ψ_2 é um invariante de Cartan. Comparando as expressões para Ψ_{ABCD},

$$\beta_{(C}\gamma_{D)} \propto o_Co_D + \iota_C\iota_D \implies \beta_C \propto o_C \pm i\iota_C, \gamma_D \propto o_D \mp i\iota_D. \tag{483}$$

A forma tensorial pode ser facilmente obtida somando o tensor de Weyl tipo D, dado pela equação (480), com o tensor tipo N, dado por (476), multiplicado por $6\Psi_2$. Não há simetrias contínuas. Quanto às simetrias discretas, em geral temos apenas a última transformação de (473), mas se Ψ_2 for real as duas últimas transformações de (472) também deixam o tensor de Weyl invariante.

Para o tipo Petrov I há quatro direções principais nulas, $\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\chi_{D)}$. Novamente poderíamos usar duas das direções principais nulas do espinor como díada, mas há uma base mais interessante: usando as duas rotações nulas escolhemos $\Psi_1 = \Psi_3 = 0$, depois com um *spin-boost* escolhemos $\Psi_0 = \Psi_4 \neq 0$. Obtemos

$$\Psi_{ABCD} = 6\Psi_2 o_{(A}o_B\iota_C\iota_{D)} + \Psi_4(o_Ao_Bo_Co_D + \iota_A\iota_B\iota_C\iota_D). \tag{484}$$

As direções principais nulas são $\zeta_A = o_A + Z\iota_A$, onde Z é qualquer uma das raízes de

$$\Psi_{ABCD}\zeta^A\zeta^B\zeta^C\zeta^D = 6\Psi_2 Z^2 + \Psi_4(Z^4 + 1) = 0. \tag{485}$$

Há quatro invariantes de Cartan, Ψ_2 e Ψ_4. Não há simetrias contínuas. O espinor é invariante a todas as transformações próprias (473), mas o tensor será simétrico às transformações impróprias (472) se e somente se ambos Ψ_2 e Ψ_4 forem reais.

Também há o tipo Petrov O, nome dado ao caso conformalmente plano, $C_{ijkl} = 0$. Nestes casos temos apenas o tensor de Ricci para normalizar o grupo de Lorentz.

Os diferentes tipos de Petrov podem ser parcialmente caracterizados por dois

Tabela 2 - Normalizações do espinor de Weyl.

Tipo	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Isotropia
I	F	0	G	0	F	—
II	0	0	F	0	$6F$	—
D	0	0	F	0	0	*Spin-boost*
III	0	0	0	1	0	—
N	0	0	0	0	1	Rot. nula
O	0	0	0	0	0	$SL(2,\mathbb{C})$

Fonte: O autor, 2019.

invariantes escalares do tensor/espinor de Weyl, definidos por[75]

$$I = \Psi_{ABCD}\Psi^{ABCD} \equiv 2\Psi_0\Psi_4 - 8\Psi_1\Psi_3 + 6{\Psi_2}^2, \tag{486}$$

$$J = \Psi_{ABCD}\Psi^{CDEF}\Psi_{EF}{}^{AB} \equiv 6\det\begin{pmatrix}\Psi_0 & \Psi_1 & \Psi_2\\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3\\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4\end{pmatrix}. \tag{487}$$

Estudando as formas canônicas vemos que para os tipos Petrov N e III vale $I = J = 0$, para os tipos Petrov II e D vale $I^3 - 6J^2 = 0 \neq I$, e para o tipo I vale $I^3 - 6J^2 \neq 0$. Um estudo extensivo destes invariantes e da classificação de Petrov pode ser encontrado em (PENROSE; RINDLER, 1986). Uma abordagem tensorial da classificação de Petrov pode ser encontrada em (HALL, 2004) ou (STEPHANI et al., 2003).

Para resumir, colocamos todas as normalizações e isotropias na tabela 2, onde G e $F \neq 0$ são funções complexas arbitrárias.

A interpretação física dos tipos de Petrov foi explicada por Szekres em (SZEKERES, 1965). O tipo Petrov N representa uma onda gravitacional transversal puramente transversal; o tipo Petrov III representa uma onda gravitacional longitudinal; o tipo Petrov D representa um termo coulombiano, relacionado a fontes não-locais do campo gravitacional; o tipo Petrov II representa um campo coulombiano superposto a uma onda longitudinal; e o tipo Petrov I representa um campo coulombiano superposto a duas ondas longitudinais que se propagam em direções (espaciais) opostos.

Quanto a normalização das derivadas, apenas para os tipos N e D precisamos normalizar as derivadas.

Para o tipo N derivamos a forma padrão $\Psi_{ABCD} = o_A o_B o_C o_D$, obtendo

$$\nabla_{EE'}\Psi_{ABCD} = (\nabla_{EE'}o_A)o_B o_C o_D + \ldots = 4o_{(A}o_B o_C\nabla_{|EE'|}o_{D)}. \tag{488}$$

[75] É possível demonstrar que outros invariantes são funcionalmente dependentes desta dupla.

Portanto as derivadas de o_A são os invariantes de Cartan de primeira ordem,

$$\begin{aligned}\nabla_{EE'}o_A &= (\gamma o_E\bar{o}_{E'} + \epsilon\iota_E\bar{\iota}_{E'} - \alpha o_E\bar{\iota}_{E'} - \beta\iota_E\bar{o}_{E'})o_A \\ &\quad - (\tau o_E\bar{o}_{E'} + \kappa\iota_E\bar{\iota}_{E'} - \rho o_E\bar{\iota}_{E'} - \sigma\iota_E\bar{o}_{E'})\iota_A. \end{aligned} \tag{489}$$

Relembrando as transformações (461) para os coeficientes de spin, vemos que há cinco casos distintos para a normalização dos parâmetros da rotação nula:
N1) Se $\kappa \neq 0$, podemos normalizar ϵ, ρ ou σ escolhendo um deles igual a zero;

N2) Se $\kappa = 0$, então ϵ, ρ e σ são invariantes e α, β e τ se transformam como

$$\widehat{\alpha} = \alpha + c(\rho + \epsilon), \ \widehat{\beta} = \beta + c\sigma + \bar{c}\epsilon, \ \widehat{\tau} = \tau + c\sigma + \bar{c}\rho. \tag{490}$$

Se $(\epsilon, \rho, \sigma) \neq (0, 0, 0)$ podemos escolher α, τ, β, ou $\tau \pm \beta$ igual a zero;

N3) Se $\kappa = \epsilon = \rho = \sigma = 0$ então α, β e τ são invariantes e devemos tentar normalizar

$$\widehat{\gamma} = \gamma + c(\tau + \beta) + \bar{c}\alpha. \tag{491}$$

Para tentar normalizar completamente o parâmetro c, calculamos

$$(\overline{\tau} + \overline{\beta})\widehat{\gamma} - \alpha\widehat{\overline{\gamma}} = (\overline{\tau} + \overline{\beta})\gamma - \alpha\overline{\gamma} + c(|\tau + \beta|^2 - |\alpha|^2). \tag{492}$$

Podemos normalizar c completamente se as normas de α e $\tau + \beta$ forem diferentes. Neste caso, substituindo a solução de c na transformação de γ vemos que o novo $\widehat{\gamma}$ é zero;

N4) Se $\kappa = \epsilon = \rho = \sigma = 0 \neq \tau + \beta \equiv \overline{\alpha}\mathrm{e}^{2i\psi}$ reescrevemos $\widehat{\gamma}$ como

$$\widehat{\gamma} = \gamma + \mathrm{e}^{i\psi}(c\overline{\alpha}\mathrm{e}^{i\psi} + \bar{c}\alpha\mathrm{e}^{-i\psi}). \tag{493}$$

O termo entre parênteses é real, e podemos zerar apenas parte de $\widehat{\gamma}$. Considere

$$\gamma = \frac{\mathrm{e}^{-i\psi}\gamma + \mathrm{e}^{i\psi}\overline{\gamma}}{2}\mathrm{e}^{i\psi} + \frac{\mathrm{e}^{-i\psi}\gamma - \mathrm{e}^{i\psi}\overline{\gamma}}{2i}i\mathrm{e}^{i\psi} \equiv \gamma_\psi\mathrm{e}^{i\psi} + \gamma'_\psi i\mathrm{e}^{i\psi}, \tag{494}$$

e vemos que só podemos zerar γ_ψ.[76] A normalização e a isotropia nestes casos são

$$\gamma = \gamma'_\psi i\mathrm{e}^{i\psi} \equiv \frac{\gamma - (\tau+\beta)\overline{\gamma}/\overline{\alpha}}{2},\ \overline{\alpha}\gamma + (\tau+\beta)\overline{\gamma} = \mathrm{e}^{-i\psi}\gamma + \mathrm{e}^{i\psi}\overline{\gamma} = 0,$$
$$c = ir\alpha\mathrm{e}^{-i\psi} = ir(\overline{\tau}+\overline{\beta})\mathrm{e}^{i\psi},\ \overline{r} = r; \tag{495}$$

N5) O último caso é $\kappa = \epsilon = \rho = \sigma = \alpha = \tau + \beta = 0$, que implica γ invariante. Nestes casos não podemos normalizar c usando a primeira derivada do espinor de Weyl.

Os dois últimos casos requerem a computação das derivadas segundas para tentar normalizar completamente $\mathrm{L}_+^\uparrow$. O caso N5 é mais simples, por isto começaremos por ele.

Para os casos N5 a derivada do espinor de Weyl é, essencialmente,

$$\nabla_{EE'}o_A = (\gamma o_A o_E + \tau\varepsilon_{AE})\overline{o}_{E'}, \tag{496}$$

e a derivada segunda é composta pelas derivadas de τ e γ. Ambos são invariantes à rotação nula, portanto suas derivadas se transformam como a diferencial de uma função,

$$\widehat{D}f = Df,\quad \widehat{\delta}f = \delta f + \overline{c}Df,\quad \widehat{\overline{\delta}}f = \overline{\delta}f + cDf,\quad \widehat{\Delta}f = \Delta f + c\delta f + \overline{c}\overline{\delta}f + c\overline{c}Df. \tag{497}$$

e podemos usá-las para normalizar c. É possível manter toda a isotropia se

$$D\gamma = \delta\gamma = \overline{\delta}\gamma = D\tau = \delta\tau = \overline{\delta}\tau = 0. \tag{498}$$

Por outro lado será possível normalizar apenas uma parte de c se

$$\mathrm{D}\gamma = \mathrm{D}\tau = |\delta\gamma|^2 - |\delta\overline{\gamma}|^2 = |\delta\tau|^2 - |\delta\overline{\tau}|^2 = \delta\gamma\delta\overline{\tau} - \delta\overline{\gamma}\delta\tau = 0, \tag{499}$$

mas ao menos uma das derivadas $(\delta\gamma, \delta\tau, \overline{\delta}\gamma, \overline{\delta}\tau)$ for distinta de zero. Então precisaríamos computar a terceira derivada, e usá-la para tentar normalizar c.

Voltando ao caso N4, a derivada de o_A tem a forma

$$\nabla_{EE'}o_A = i\gamma'_\psi\mathrm{e}^{i\psi}o_E\overline{o}_{E'}o_A - (\mathrm{e}^{-i\psi}\alpha o_E\overline{\iota}_{E'} + \mathrm{e}^{i\psi}\overline{\alpha}\iota_E\overline{o}_{E'})\mathrm{e}^{i\psi}o_A - \tau\varepsilon_{EA}\overline{o}_{E'}. \tag{500}$$

Novos invariantes independentes devem vir das derivadas dos coeficientes de spin ou das derivadas de ι_A. Por exemplo, calculando a derivada e considerando a contração

$$\iota^A\iota^E\overline{o}^{E'}\nabla_{FF'}\nabla_{EE'}o_A = \nabla_{FF'}\alpha - \alpha\overline{o}^{E'}\nabla_{FF'}\overline{\iota}_{E'} + \ldots = \nabla_{FF'}\alpha - \alpha\overline{\iota}^{E'}\nabla_{FF'}\overline{o}_{E'} + \ldots \tag{501}$$

[76] A normalização escolhida aqui difere da usual. Em geral prefere-se normalizar a parte imaginária de γ sempre que possível, ou a parte real de γ se não for possível normalizar a parte imaginária. A normalização escolhida aqui sempre pode ser feita, e facilita a descrição do subgrupo de isotropia.

e portanto o novo invariante é apenas a derivada de α (um resultado intuitivo).[77] Os últimos invariantes na derivada segunda são obtidos com a contração

$$\begin{aligned}
&\iota^A \iota^E \bar{\iota}^{E'} \nabla_{FF'} \nabla_{EE'} o_A = \mathrm{e}^{i\psi} \chi_{FF'} o_A + \dots, \\
&\qquad \chi_{FF'} \equiv i\nabla_{FF'} \gamma'_\psi - \gamma'_\psi \nabla_{FF'} \psi - \mathrm{e}^{-i\psi} \alpha \bar{\iota}^{E'} \nabla_{FF'} \bar{\iota}_{E'} - \mathrm{e}^{i\psi} \overline{\alpha} \iota^E \nabla_{FF'} \iota_E.
\end{aligned} \tag{502}$$

O termo com a derivada de ι_A é

$$\iota^A \nabla_{FF'} \iota_A = \nu o_F \bar{o}_{F'} + \pi \iota_F \bar{\iota}_{F'} - \lambda o_F \bar{\iota}_{F'} - \mu \iota_F \bar{o}_{F'}, \tag{503}$$

portanto as contrações com o espinor $\chi_{AA'}$ são dadas por

$$\begin{aligned}
&\chi_{00} = iD\gamma'_\psi - \gamma'_\psi D\psi - \mathrm{e}^{-i\psi} \alpha \overline{\pi} - \mathrm{e}^{i\psi} \overline{\alpha} \pi, \qquad \chi_{01} = i\delta\gamma'_\psi - \gamma'_\psi \delta\psi - \mathrm{e}^{-i\psi} \alpha \overline{\lambda} - \mathrm{e}^{i\psi} \overline{\alpha} \mu, \\
&\chi_{11} = i\Delta\gamma'_\psi - \gamma'_\psi \Delta\psi - \mathrm{e}^{-i\psi} \alpha \overline{\nu} - \mathrm{e}^{i\psi} \overline{\alpha} \nu, \qquad \chi_{10} = i\bar{\delta}\gamma'_\psi - \gamma'_\psi \bar{\delta}\psi - \mathrm{e}^{-i\psi} \alpha \overline{\mu} - \mathrm{e}^{i\psi} \overline{\alpha} \lambda.
\end{aligned} \tag{504}$$

Após a rotação nula $c = ir\alpha\mathrm{e}^{-i\psi}$, os invariantes de Cartan tem a forma[78]

$$\begin{aligned}
&\widehat{\chi}_{00} = \chi_{00}, \qquad && \widehat{\chi}_{11} = \chi_{11} + ir\alpha\mathrm{e}^{-i\psi}\chi_{01} - ir\overline{\alpha}\mathrm{e}^{i\psi}\chi_{10} + r^2|\alpha|^2\chi_{00}, \\
&\widehat{\chi}_{01} = \chi_{01} - ir\overline{\alpha}\mathrm{e}^{i\psi}\chi_{00}, \qquad && \widehat{\chi}_{10} = \chi_{10} + ir\alpha\mathrm{e}^{-i\psi}\chi_{00}.
\end{aligned} \tag{505}$$

Manter a isotropia unidimensional neste caso requer

$$\chi_{00} = \alpha\mathrm{e}^{-i\psi}\chi_{01} - \overline{\alpha}\mathrm{e}^{i\psi}\chi_{10} = Df = \alpha\mathrm{e}^{-i\psi}\delta f - \overline{\alpha}\mathrm{e}^{i\psi}\ \bar{\delta} f = 0,\ f = (\alpha, \tau, \psi). \tag{506}$$

Ainda que a isotropia seja mantida, precisaremos testá-la para as derivadas ds novos invariantes (ou seja, tentar normalizar a terceira derivada deste tensor de Weyl).

Quanto aos espaços tipos Petrov D, a derivada do espinor de Weyl $\Psi_{ABCD} = 6\Psi_2 o_{(A} o_B \iota_C \iota_{D)}$ é dada por

$$\begin{aligned}
&\nabla_{EE'} \Psi_{ABCD} = 6 o_{(A} \iota_B \chi_{CD)EE'}, \\
&\qquad \chi_{CDEE'} = o_{(C} \iota_{D)} \nabla_{EE'} \Psi_2 + 2\Psi_2 [\iota_{(C} \nabla_{|EE'|} o_{D)} + o_{(C} \nabla_{|EE'|} \iota_{D)}]
\end{aligned} \tag{507}$$

[77] No fundo, este resultado equivale a completar um loop do problema de G-equivalência, e reiniciar o cálculo com o subgrupo G_1 de rotação nulas. Os coeficientes de conexão invariantes são torções essenciais do novo *coframe* modificado portanto, suas derivadas absolutas são G_1-invariantes.

[78] As transformações são óbvias pois estamos calculando uma 1-forma, mas elas podem ser demonstradas pela formulas de transformação para γ, $\nabla_{AA'}$, π, λ, μ e ν e pelas equações de Newman-Penrose.

As componentes mais simples de obter são as contrações com pares de espinores da base

$$\begin{aligned} o^C o^D \chi_{CDEE'} &= -\Psi_2 o^D \nabla_{EE'} o_D = -2\Psi_2(\tau o_E \bar{o}_{E'} + \kappa \iota_E \bar{\iota}_{E'} - \rho o_E \bar{\iota}_{E'} - \sigma \iota_E \bar{o}_{E'}), \\ \iota^C \iota^D \chi_{CDEE'} &= \Psi_2 \iota^D \nabla_{EE'} \iota_D = 2\Psi_2(\nu o_F \bar{o}_{F'} + \pi \iota_F \bar{\iota}_{F'} - \lambda o_F \bar{\iota}_{F'} - \mu \iota_F \bar{o}_{F'}). \end{aligned} \tag{508}$$

Contraído $\chi_{CDEE'}$ com um par de espinores distintos da base temos

$$o^C \iota^D \chi_{CDEE'} = -\tfrac{1}{2}\nabla_{EE'}\Psi_2 + \Psi_2[-\iota^D \nabla_{EE'} o_D + o^C \nabla_{EE'} \iota_C] = -\tfrac{1}{2}\nabla_{EE'}\Psi_2. \tag{509}$$

Estes G-invariantes são dados por

$$\begin{array}{llll} \widehat{D}\Psi_2 = a^2 D\Psi_2, & \widehat{\Delta}\Psi_2 = a^{-2}\Delta\Psi_2, & \widehat{\delta}\Psi_2 = \mathrm{e}^{2i\theta}\delta\Psi_2, & \widehat{\bar{\delta}}\Psi_2 = \mathrm{e}^{-2i\theta}\bar{\delta}\Psi_2, \\ \widehat{\rho} = a^2\rho, & \widehat{\mu} = a^{-2}\mu, & \widehat{\tau} = \mathrm{e}^{2i\theta}\tau, & \widehat{\pi} = \mathrm{e}^{-2i\theta}\pi, \\ \widehat{\sigma} = a^2\mathrm{e}^{4i\theta}\sigma, & \widehat{\lambda} = a^{-2}\mathrm{e}^{-4i\theta}\lambda & \widehat{\kappa} = a^4\mathrm{e}^{2i\theta}\kappa, & \widehat{\nu} = a^{-4}\mathrm{e}^{-2i\theta}\nu. \end{array} \tag{510}$$

Em geral, os invariantes são produtos e frações dos G-invariantes acima. O estudo das normalizações é bem mais simples que os tipos Petrov N, pois aqui há menos possibilidades, e é mais fácil começar pelo caso de maior isotropia. Há 4 casos distintos:

D1) A única possibilidade de manter toda a isotropia é zerar todos os coeficientes,

$$\kappa = \tau = \sigma = \rho = \nu = \pi = \lambda = \mu = 0,\ D\Psi_2 = \Delta\Psi_2 = \delta\Psi_2 = \bar{\delta}\Psi_2 = 0. \tag{511}$$

D2) Para manter apenas a rotação precisamos que os coeficientes que envolvem θ sejam zero, e ao menos um dos coeficientes que depende apenas de a seja não-zero. Logo

$$\kappa = \sigma = \nu = \lambda = \tau = \pi = 0,\ \delta\Psi_2 = \bar{\delta}\Psi_2 = 0,\ (\rho, \mu, D\Psi_2, \Delta\Psi_2) \neq (0,0,0,0). \tag{512}$$

D3) Para manter apenas o boost, é necessário zerar os coeficientes que dependam de a e que ao menos um dos coeficientes que dependam apenas de θ seja não-zero,

$$\kappa = \sigma = \nu = \lambda = \rho = \mu = 0,\ D\Psi_2 = \Delta\Psi_2 = 0,\ (\tau, \pi, \Delta\Psi_2, \bar{\delta}\Psi_2) \neq (0,0,0,0). \tag{513}$$

D4) Um tipo Petrov D que não satisfaz as condições acima não tem isotropia. Podemos normalizar completamente o grupo $\mathrm{L}_+^\uparrow$ na primeira derivada do tensor de Weyl.

Para manter as isotropia nos dois primeiros casos as mesmas condições devem ser impostas nas derivadas adequadas dos coeficientes invariantes à transformação.

Esta análise não levou em consideração o tensor de Ricci. Na prática, várias das condições impostas aqui implicam, através das equações de Newman-Penrose, que muitas das componentes do tensor de Ricci são zero.

6.5 Algoritmo de Karlhede - Tensor de Ricci

Embora o tensor de Ricci não seja o foco inicial do problema conforme, salvo nos casos conformalmente planos, ele fará parte da solução do problema de equivalência conforme. No caso do tensor de Ricci livre de traço a classificação é mais complicada pois (ao contrário do espinor de Weyl) não há uma decomposição completa do espinor.

A classificação mais útil do espinor de Ricci é a classificação de Segrè.[79] Esta classificação é baseada nos autovalores (incluindo os complexos) e autovetores dos tensores de Ricci com um índice covariante e outro contravariante

$$R^a{}_b v^b = \lambda v^a \equiv (-2\Phi^a{}_b + \tfrac{1}{4}R\delta^a_b)v^b = (-2\lambda' + \tfrac{1}{4}R)v^a. \tag{514}$$

Adaptaremos a abordagem em (SANTOS; REBOUÇAS; TEIXEIRA, 1995), que encontrou as formas canônicas para todos os tipos de Segrè para todas as dimensões possíveis. Um breve estudo especializado para o caso de Relatividade Geral pode ser encontrado em (STEPHANI et al., 2003). Um algoritmo completo para a classificação de Segrè pode ser encontrado em (ZAKHARY; CARMINATI, 2004).

A tipo de Segrè depende da *forma canônica de Jordan* da matriz $R^a{}_b$. Chamaremos de matriz de Jordan $J_{n\times n}(\lambda)$ de ordem $n \times n$ do autovalor λ uma matriz dada por $J_{\alpha\alpha} = \lambda$, $J_{\beta\beta+1} = 1$ para $1 \leq \alpha \leq n$ e $1 \leq \beta \leq n-1$, com os outros elementos iguais a zero,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{515}$$

Uma matriz quadrada está na forma canônica de Jordan se for escrita em termos de N

[79] A classificação de Petrov-Plebanski usa a decomposição do espinor $\Phi_{E'F'(AB}\Phi_{CD)}{}^{E'F'}$ para uma classificação parcial do espinor de Ricci, porém a classificação de Segrè permite uma maior separação dos tensores de Ricci.
Uma classificação alternativa para todos os espinores simétricos com os dois tipos de índices, feita através dos gráficos da equação $\Omega_{A_1\ldots A_p B'_1\ldots B'_q}\xi^{A_1}\ldots\xi^{A_p}\chi^{B'_1}\ldots\chi^{B'_q} = 0$, pode ser encontrada na seção 8.2 de (PENROSE; RINDLER, 1986).

blocos diagonalizados de matrizes de Jordan,

$$\begin{pmatrix} J_{n_1\times n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2\times n_2}(\lambda_2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_{N-1}\times n_{N-1}}(\lambda_{N-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{n_N\times n_N}(\lambda_N) \end{pmatrix}. \tag{516}$$

Os autovalores λ_n são completamente independentes (podendo inclusive serem zero ou repetidos). As formas de Jordan incluem as matrizes diagonais, que são aquelas com $n_1 = n_2 = \ldots = 1$. A forma canônica de Jordan de uma matriz é única a menos da ordem das matrizes de Jordan.[80]

Para estudar quais formas de Jordan são consistentes com um tensor simétrico (de acordo com uma métrica) começamos estudando os autovetores complexos de uma matriz real. Obviamente o autovetor $Z^b = X^a + iY^a$ não pode ser real, pois teríamos

$$T^a{}_b Z^b = \overline{T^a{}_b Z^b} = T^a{}_b \ \overline{Z}^b \implies \lambda Z^a = \overline{\lambda} \ \overline{Z}^a = \overline{\lambda} Z^a, \tag{517}$$

que implicaria λ real. Contraindo o tensor com o autovetor e seu conjugado temos

$$T_{ab} Z^a \overline{Z}^b = \lambda Z_a \overline{Z}^a = \overline{\lambda} Z^a \overline{Z}_a \implies Z_a \overline{Z}^a = X_a X^a + Y_a Y^a = 0. \tag{518}$$

As normas das partes real e imaginária devem ser opostas, portanto temos um par de direções tipo-tempo e tipo-espaço (que podemos normalizar) ou um par de direções nulas, o que só é possível em métricas indefinidas. Na verdade ambas representam o mesmo plano real, o que podemos compreender estudando o autovetor $\mathrm{e}^{i\theta} Z^a$,

$$\mathrm{e}^{i\theta} Z^a = (X^a \cos\theta - Y^a \sin\theta) + i(X^a \sin\theta + Y^a \cos\theta) \equiv X'^a + iY'^a. \tag{519}$$

[80] A forma canônica de Jordan é relacionada com a diferença entre a multiplicidade algébrica e geométrica de um autovalor λ. O primeiro é a multiplicidade de λ como solução da equação de autovalores, enquanto a segunda é a dimensão do auto-espaço de λ. Se há K matrizes de Jordan com autovalor λ a multiplicidade geométrica de λ é K e a multiplicidade algébrica de λ é $n_1 + \ldots + n_K$. Cada bloco de uma matriz na forma de Jordan possui apenas um autovetor.

Calculando as normas das partes reais e imaginárias e o produto escalar entre elas temos

$$\begin{aligned}
X'_a X'^a =& X_a X^a \cos^2\theta + Y_a Y^a \sin^2\theta - 2X_a Y^a \sin\theta\cos\theta \\
=& X_a X^a \cos(2\theta) - X_a Y^a \sin(2\theta), \\
Y'_a Y'^a =& X_a X^a \sin^2\theta + Y_a Y^a \cos^2\theta + 2X_a Y^a \sin\theta\cos\theta \\
=& -(X_a X^a \cos(2\theta) - X_a Y^a \sin(2\theta)), \\
X'_a Y'^a =& (X_a X^a - Y_a Y^a)\cos\theta\sin\theta + X_a Y^a(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
=& X_a X^a \sin(2\theta) + X_a Y^a \cos(2\theta).
\end{aligned} \tag{520}$$

Com uma escolha adequada de θ podemos obter $X_a X^a = 0 \neq X_a Y^a$ (duas direções nulas não-ortogonais l^a, n^a) ou $X_a X^a \neq 0 = X_a Y^a$ (duas direções não-nulas ortogonais t^a, z^a).

Dois autovetores de autovalores distintos são necessariamente ortogonais. Este conhecido resultado da Álgebra Linear também é válido para autovetores complexos de uma matriz real. Separando os autovetores em suas partes reais e imaginárias e calculando o produto escalar temos

$$\begin{aligned}
Z_a W^a =& (t_a + iz_a)(\tau^a + i\zeta^a) = (t_a\tau^a - z_a\zeta^a) + i(t_a\zeta^a + z_a\tau^a) = 0, \\
\overline{Z}_a W^a =& (t_a - iz_a)(\tau^a + i\zeta^a) = (t_a\tau^a + z_a\zeta^a) + i(t_a\zeta^a - z_a\tau^a) = 0,
\end{aligned} \tag{521}$$

Nestes casos as partes real e imaginária de um autovetor são ortogonais as partes real e imaginária do outro autovetor.

Terminadas as observações sobre os autovalores complexos, vamos estudar as matrizes de Jordan de ordem n. Suponha que $v^a, V_2^a, V_3^a, \ldots, V_n^a$ seja a base de um dos blocos de Jordan, sendo $V_1 = v$ o autovetor. Para $2 \leq N \leq n$ temos

$$T^a{}_b v^b = \lambda v^a,\ T^a{}_b V_N^a = \lambda V_N^a + V_{N-1}^a. \tag{522}$$

Das equações acima podemos facilmente mostrar que v deve ser um vetor nulo

$$T_{ab} v^a V_2^b = \lambda v_a V_2^a = [\lambda (V_2)_a + v_a] v^a \implies v^a v_a = 0. \tag{523}$$

Portanto, se a métrica for positivamente definida a forma canônica de Jordan para $T^a{}_b$ sempre é diagonal. Para uma matriz de ordem $n = 2$, termina aqui as informações que podemos obter da matriz de Jordan.

Para $n > 2$, contraindo o tensor com v e os outros vetores da base,

$$T_{ab} v^a V_N^b = [\lambda (V_N)_a + (V_{N-1})_a] v^a = \lambda v_a V_N^a \implies (V_{N-1})_a v^a = 0. \tag{524}$$

Portanto todos os vetores da base, com exceção do último, são ortogonais a v. Contraindo o tensor com V_2 e um dos outros vetores das base temos

$$T_{ab}V_2^aV_N^b = [\lambda(V_2)_a + v_a]V_N^a = [\lambda(V_N)_a + (V_{N-1})_a]V_2^a \implies v_aV_N^a = (V_{N-1})_aV_2^a. \tag{525}$$

Para $n = 3$ as duas equações acima implicam

$$v_aV_2^a = v_aV_3^a - (V_2)_aV_2^a = 0. \tag{526}$$

Por fim, contraímos o tensor com dois dos vetores da base de Jordan, obtendo

$$\begin{aligned} T_{ab}V_N^aV_M^b &= [\lambda(V_N)_a + (V_{N-1})_a]V_M^a = [\lambda(V_M)_a + (V_{M-1})_a]V_N^a \\ &\implies (V_{N-1})_aV_M^a = (V_N)_aV_{M-1}^a, \end{aligned} \tag{527}$$

Para $n = 4$ (último caso de nosso interesse neste texto) vale

$$v_aV_2^a = v_aV_3^a = (V_2)_aV_2^a = (V_2)_aV_3^a - v_aV_4^a = (V_3)_aV_3^a - (V_4)_aV_2^a = 0. \tag{528}$$

Vamos agora as possibilidades para espaços quadridimensionais lorentzianos. Para uma matriz completamente diagonal com autovalores reais sabemos que autovetores de autovalores distintos são ortogonais e que podemos escolher uma base ortonormal para auto-espaços de autovalores com multiplicidades maiores. A forma de Jordan é

$$T^a{}_b = \lambda_0 t^a t_b - \lambda_3 z^a z_b - \lambda_2 y^a y_b - \lambda_1 x^a x_b, \tag{529}$$

e a base de Jordan é (t^a, z^a, y^a, x^a) (ou qualquer de suas permutações).

Se a forma de Jordan possui autovetores complexos sabemos que há um par conjugado que pode ser escrito como $l^a \pm in^a$. Não há outra direção (real) que seja simultaneamente nula e ortogonal a ambas l^a e n^a, portanto não podemos ter outros autovetores complexos ou um bloco de Jordan de ordem 2. A única forma de Jordan possível é

$$\begin{aligned} T^a{}_b =& \frac{\lambda}{2i}(l^a + in^a)(l_b + in_b) - \frac{\overline{\lambda}}{2i}(l^a - in^a)(l_b - in_b) - \lambda_2 y^a y_b - \lambda_1 x^a x_b \\ =& \lambda_r(l^a n_b + n^a l_b) + \lambda_i(l^a l_b - n^a n_b) - \lambda_2 y^a y_b - \lambda_1 x^a x_b, \end{aligned} \tag{530}$$

e a base de Jordan é $(l^a + in^a, l^a - in^a, y^a, x^a)$.

Não podemos ter dois blocos de matrizes de Jordan com ordem 2, pois nestes casos precisaríamos encontrar duas direções nulas, ortogonais e linearmente independentes, e numa métrica lorentziana duas direções nulas ortogonais são sempre proporcionais.

Pelo parágrafo anterior, se a forma canônica possui um bloco com uma matriz de Jordan de ordem 2 o resto da matriz deve ser diagonal. Seja l^a o autovetor do bloco, os outros dois autovetores devem ser tipo-espaço, pois numa métrica lorentziana não há vetores tipo-tempo e nulo ortogonais. A forma de Jordan é

$$T^a{}_b = \lambda_0(l^a n_b + n^a l_b) \pm l^a l_b - \lambda_2 y^a y_b - \lambda_1 x^a x_b, \tag{531}$$

e a base de Jordan correspondente é $(l^a, \pm n^a, y^a, x^a)$.

Para uma forma de Jordan com um bloco de ordem 3 chamamos de l^a o autovetor nulo do bloco e y^a o outro autovetor tipo-espaço. Sabemos que o segundo vetor da base de Jordan deve ser normal a l^a, portanto só pode ser x^a. Juntando com condições de simetria, a forma canônica de Jordan é

$$T^a{}_b = \lambda_0(l^a n_b + n^a l_b) - (l^a x_b + x^a l_b) - \lambda_2 y^a y_b - \lambda_0 x^a x_b, \tag{532}$$

e a base de Jordan é $(l^a, x^a, -n^a, y^a)$.[81]

Por fim, uma forma canônica não pode ter uma matriz de Jordan de ordem 4 pois elas requerem dois vetores nulos ortogonais linearmente independentes, e sabemos que isto não é possível com uma métrica lorentziana.

Além da forma canônica de Jordan, o outro elemento da classificação de Segrè é a coincidência de autovalores, pois nestes casos o auto-espaço associado possui simetrias dadas por transformações ortogonais.

Na classificação de Segrè indicamos o tipo de Segrè escrevendo uma sequência de números que descreve as ordens das matrizes de Jordan, colocando entre parênteses estes números quando os autovalores destas matrizes são coincidentes, e separando com vírgulas os números referentes aos autovetores tipo-espaço. Se os autovalores são complexos, os representamos como um par $Z\overline{Z}$.

Por exemplo, um tipo Segrè $[1,3]$ quer dizer que a forma de Jordan possui um bloco de ordem 3 e outro de ordem 1, mas seus autovalores são distintos. Por outro lado um tipo Segrè $[(1,3)]$ possui a mesma estrutura que o anterior, mas seus autovalores são coincidentes. Um tipo Segrè $[111(1,1)]$ tem sua forma canônica na forma de uma matriz diagonal de quinta ordem, mas uma dos autovetores tipo-espaço possui o mesmo autovalor que o autovetor tipo-tempo.

Os quinze tipos de Segrè possíveis para uma métrica quadridimensional lorentziana são: $[111,1]$; $[11(1,1)]$; $[1(11,1)]$; $[(11)1,1]$; $[(11)(1,1)]$; $[(111),1]$; $[(111,1)]$; $[11,Z\overline{Z}]$; $[(11),Z\overline{Z}]$; $[11,2]$; $[(11);2]$; $[1(1,2)]$; $[(11,2)]$; $[1,3]$; $[(1,3)]$.

Para usar os tipos de Segrè na normalização do tensor Φ_{ab} (e do espinor $\Phi_{ABA'B'}$) devemos reescrevê-los em termos dos *frames* nulos e lembrar que o traço é zero.

Para facilitar, vamos colocar uma matriz diagonal gerada pelo subespaço $[t_a, z_a]$

[81] Há um erro na equação (5.3d) de (STEPHANI et al., 2003). Os autovalores λ_1 e λ_3 devem ser coincidentes.

em termos de (l_a, n_a)

$$\begin{aligned}\lambda_0 t_a t_b - \lambda_3 z_a z_b &= \frac{\lambda_0}{2}(l_a + n_a)(l_b + n_b) - \frac{\lambda_3}{2}(n_a - l_a)(n_b - l_b)\\ &= \frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_3)(l_a l_b + n_a n_b) + (\lambda_0 + \lambda_3) l_{(a} n_{b)}.\end{aligned} \tag{533}$$

e o mesmo para uma matriz diagonal gerada por $[x_a, y_a]$,

$$\begin{aligned}-\lambda_1 x_a x_b - \lambda_2 y_a y_b &= -\frac{\lambda_1}{2}(m_a + \overline{m}_a)(m_b + \overline{m}_b) + \frac{\lambda_2}{2}(m_a - \overline{m}_a)(m_b - \overline{m}_b)\\ &= -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(m_a m_b + \overline{m}_a \overline{m}_b) - (\lambda_1 + \lambda_2) m_{(a} \overline{m}_{b)}.\end{aligned} \tag{534}$$

Para o tipo $[111, 1]$ e seus casos algebricamente especiais temos

$$\begin{aligned}\Phi_{ab} &= \lambda_0 t_a t_b - \lambda_3 z_a z_b - \lambda_2 y_a y_b - \lambda_1 x_a x_b\\ &= \frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_3)(l_a l_b + n_a n_b) + \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_3)(l_a n_b + n_a l_b)\\ &\quad - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(m_a m_b + \overline{m}_a \overline{m}_b) - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(m_a \overline{m}_b + \overline{m}_a m_b).\end{aligned} \tag{535}$$

Da forma acima vemos que o tensor é invariante a todas as reflexões em (472). Lembrando que o traço é zero, as componentes de $\Phi_{ABA'B'}$ são

$$\begin{aligned}&\Phi_{00} = \Phi_{22} = \tfrac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_3), &&\Phi_{11} = \tfrac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_3) = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2),\\ &\Phi_{02} = \Phi_{20} = \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1), &&\Phi_{01} = \Phi_{12} = 0.\end{aligned} \tag{536}$$

O tensor é invariante a todas as reflexões. Para o tipo de Segrè $[111, 1]$ não há isotropia restante. Isto não é verdade para os tipos mais especiais.

Para os tipos algebricamente especiais obtemos as formas canônicas e a isotropia escolhendo adequadamente os eixos espaciais. Para o tipo $[11(1, 1)]$ escolhemos $\lambda_3 = \lambda_0$. Quanto ao tipo de Segrè $[(11)1, 1]$ a melhor opção é $\lambda_2 = \lambda_1$. Para $[(11)(1, 1)]$ combinamos as simplificações acima. Para $[(111), 1]$ temos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. O tipo de Segrè $[1(11, 1)]$ é mais simplificado pela escolha $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0$. O último tipo, $[(111, 1)]$ deve ser zero pois todos os autovalores são coincidentes mas o traço é zero.

Alguns destes tipos possuem interpretação física simples para o tensor de energia-momento. Relembrando a expressão (424) para o tensor energia-momento do campo eletromagnético, é fácil mostrar que o tipo Segrè $[(11)(1, 1)]$ representa um fluído eletromagnético não-nulo. O tipo Segrè $[(111), 1]$ representa o tensor energia-momento de um fluído perfeito, dado por (125), onde o autovalor distinto é a densidade de energia ρ e os autovalores repetidos são a pressão P. O tipo Segrè $[(111, 1)]$, com todos os autovalores repetidos, deve ser proporcional à métrica e portanto representa uma constante cosmológica.

Para o tipo de Segrè $[11, Z\overline{Z}]$ o traço nulo implica $2\lambda_r + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Logo

$$\begin{aligned}\Phi_{ab} &= \lambda_r(l_a n_b + n_a l_b) + \lambda_i(l_a l_b - n_a n_b) - \lambda_2 y_a y_b - \lambda_1 x_a x_b \\ &= \lambda_r(l_a n_b + n_a l_b) + \lambda_i(l_a l_b - n_a n_b) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(m_a m_b + \overline{m}_a\overline{m}_b) - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(m_a\overline{m}_b + \overline{m}_a m_b). \end{aligned} \tag{537}$$

As únicas simetrias impróprias são as reflexões de x^a e y^a (outras reflexões trocam o sinal de $G = -\lambda_i$). Em termos dos escalares de Newman-Penrose as formas canônicas são

$$\begin{aligned} &\Phi_{00} = -\Phi_{22} = -\lambda_i, && \Phi_{11} = \lambda_r = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \\ &\Phi_{01} = \Phi_{12} = 0, && \Phi_{02} = \Phi_{20} = \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned} \tag{538}$$

Para o tipo de Segrè $[11, 2]$ o traço é $2\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, e obteremos

$$\begin{aligned}\Phi_{ab} &= \lambda_0(l_a n_b + n_a l_b) \pm l_a l_b - \lambda_2 y_a y_b - \lambda_1 x_a x_b, \\ &= \lambda_0(l_a n_b + n_a l_b) \pm l_a l_b \\ &\quad - \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)(m_a m_b + \overline{m}_a\overline{m}_b) - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(m_a\overline{m}_b + \overline{m}_a m_b). \end{aligned} \tag{539}$$

Novamente as únicas simetrias impróprias são as reflexões em x^a e y^a. A forma canônica é

$$\begin{aligned} &\Phi_{00} = \Phi_{01} = \Phi_{12} = 0, && \Phi_{11} = \lambda_0 = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \\ &\Phi_{22} = \pm 1 && \Phi_{02} = \Phi_{20} = \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned} \tag{540}$$

Apenas o tipo $[(112)]$ possui uma interpretação física simples: representa radiação pura.

Para o tipo de Segrè $[13]$ obtemos para a forma tensorial

$$\begin{aligned}\Phi_{ab} &= \lambda_0(l_a n_b + n_a l_b) - (l_a x_b + x_a l_b) - \lambda_2 y_a y_b - \lambda_0 x^a x_b \\ &= \lambda_0(l_a n_b + n_a l_b) - (l_a m_b + m_a l_b)/\sqrt{2} - (l_a\overline{m}_b + \overline{m}_a l_b)/\sqrt{2} \\ &\quad - \frac{1}{2}(\lambda_0 - \lambda_2)(m_a m_b + \overline{m}_a\overline{m}_b) - \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_2)(m_a\overline{m}_b + \overline{m}_a m_b). \end{aligned} \tag{541}$$

As única simetria imprópria é a reflexão de y^a. A base de Jordan simplifica as componentes numa base semi-nula, então faremos um *boost* para evitar o fator $\sqrt{2}$ e deixar as componentes no *frame* nulo mais simples. O traço é $3\lambda_0 + \lambda_2 = 0$, a forma canônica é

$$\Phi_{00} = \Phi_{01} = \Phi_{22} = 0, \qquad \Phi_{02} = -2\Phi_{11} = -2\lambda_0, \qquad \Phi_{12} = 1. \tag{542}$$

Todas as normalizações junto com a isotropia estão na tabela 3.

Obviamente precisaríamos calcular as derivadas dos casos especiais para tentar terminar a normalização, mas como o problema conforme (não-trivial) envolve necessari-

Tabela 3 - Normalizações para os tipos de Segrè

Tipo	Φ_{00}	Φ_{01}	Φ_{02}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{22}	Isotropia
$[111,1]$	G	0	H	F	0	G	—
$[11(1,1)]$	0	0	H	F	0	0	Boost
$[(11)1,1]$	G	0	0	F	0	G	Rotação
$[(11)(1,1)]$	0	0	0	F	0	0	Spin-boost
$[(111),1]$	$2F$	0	0	F	0	$2F$	$SO(3)$
$[1(11,1)]$	$-2F$	0	0	F	0	$-2F$	$SO(1,2)$
$[(111,1)]$	0	0	0	0	0	0	$SL(2,\mathbb{C})$
$[11Z\overline{Z}]$	G	0	H	F	0	$-G$	—
$[(11)Z\overline{Z}]$	G	0	0	F	0	$-G$	Rotação
$[112]$	0	0	H	F	0	± 1	—
$[1(12)]$	0	0	$-2F$	F	0	± 1	Rot. nula 1D
$[(11)2]$	0	0	0	F	0	± 1	Rotação
$[(112)]$	0	0	0	0	0	± 1	Rotação, rot. nula
$[13]$	0	0	$-2F$	F	1	0	—
$[(13)]$	0	0	0	0	1	0	Rot. nula 1D

Fonte: O autor, 2019.

amente um tensor de Weyl não-zero, devemos usá-lo para escolher os parâmetros restantes. Portanto, não estudaremos as derivadas do espinor de Ricci em detalhes.

6.6 Algoritimo de Karlhede - Casos Conformes

Agora vamos estudar as normalizações possíveis no problema de equivalência conforme. Na prática a maioria das normalizações das seções anteriores serão preservadas.

O primeiro ponto a ser relembrado é que transformações conformes não alteram as direções. Portanto todas as escolhas relacionadas ao alinhamento das direções privilegiadas do espinor de Weyl, as rotações nulas, permanecem válidas. Além destas normalizações, a rotação presente na transformação de *spin-boost* não sofre interferência da transformação conforme, e as escolhas relacionadas a sua normalização permanecem idênticas. A única normalização que precisa ser refeita é aquela relacionada ao *boost*.

Escrevemos a nova transformação dos espinores da base espinorial como

$$\widetilde{o}_A = \mathrm{e}^{w/2+a} o_A, \qquad \widetilde{\iota}_A = \mathrm{e}^{w/2-a} \iota_A, \qquad \widetilde{o}^A = \mathrm{e}^{-w/2+a} o^A, \qquad \widetilde{\iota}^A = \mathrm{e}^{-w/2-a} \iota^A. \tag{543}$$

que implicam

$$\widetilde{l}_a = \mathrm{e}^{w+2a} l_a, \qquad \widetilde{n}_a = \mathrm{e}^{w-2a} n_a, \qquad \widetilde{m}_a = \mathrm{e}^{w} m_a, \qquad \widetilde{\overline{m}}_a = \mathrm{e}^{w} \overline{m}_a,$$
$$\widetilde{l}^a = \mathrm{e}^{-w+2a} l^a, \qquad \widetilde{n}^a = \mathrm{e}^{-w-2a} n^a, \qquad \widetilde{m}^a = \mathrm{e}^{-w} m^a, \qquad \widetilde{\overline{m}}^a = \mathrm{e}^{-w} \overline{m}^a. \tag{544}$$

As componentes da estrutura simplética na nova díada são

$$\varepsilon_{AB} = o_A \iota_B - \iota_A o_B = \mathrm{e}^{-w}(\widetilde{o}_A \widetilde{\iota}_B - \widetilde{\iota}_A \widetilde{o}_B) \implies \widetilde{\varepsilon}_{01} = \varepsilon_{AB} \widetilde{o}^A \widetilde{\iota}^B = \mathrm{e}^{-w},$$
$$\varepsilon^{AB} = o^A \iota^B - \iota^A o^B = \mathrm{e}^{w}(\widetilde{o}^A \widetilde{\iota}^B - \widetilde{\iota}^A \widetilde{o}^A) \implies \widetilde{\varepsilon}^{01} = \varepsilon^{AB} \widetilde{o}_A \widetilde{\iota}_B = \mathrm{e}^{w}. \tag{545}$$

que equivalem a $\widetilde{g}_{ij} = \mathrm{e}^{-2w}\eta_{ij}$ e $\widetilde{g}^{ij} = \mathrm{e}^{2w}\eta^{ij}$, onde η_{ij} e η^{ij} são as componentes da métrica num *frame* nulo.

Não é difícil obter as novas componentes do espinor de Weyl. Elas são dadas por

$$(\widetilde{\Psi}_0, \widetilde{\Psi}_1, \widetilde{\Psi}_2, \widetilde{\Psi}_3, \widetilde{\Psi}_4) = (\mathrm{e}^{-2w+4a}\Psi_0, \mathrm{e}^{-2w+2a}\Psi_1, \mathrm{e}^{-2w}\Psi_2, \mathrm{e}^{-2w-2a}\Psi_3, \mathrm{e}^{-2w-4a}\Psi_4). \tag{546}$$

Agora podemos normalizar o espinor de Weyl. Começamos das formas padrão, e depois vamos transformá-las e normalizá-las de acordo com as transformações acima.

Para o tipo Petrov I temos $\Psi_0 = \Psi_4 \neq 0$, além de Ψ_2 podendo assumir qualquer valor. As normalizações aqui serão dadas por

$$|\widetilde{\Psi}_0| = |\widetilde{\Psi}_4| = 1 \implies \mathrm{e}^{-2w+4a}|\Psi_4| = \mathrm{e}^{-2w-4a}|\Psi_4| = 1 \implies \mathrm{e}^{w} = \sqrt{|\Psi_4|},\ \mathrm{e}^{a} = 1. \tag{547}$$

Portanto o resultado final é

$$\widetilde{\Psi}_{ABCD} = \mathrm{e}^{i\psi}(\widetilde{o}_A\widetilde{o}_B\widetilde{o}_C\widetilde{o}_D + \widetilde{\iota}_A\widetilde{\iota}_B\widetilde{\iota}_C\widetilde{\iota}_D) + 6\widetilde{\Psi}_2\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_B\widetilde{\iota}_C\widetilde{\iota}_{D)}, \tag{548}$$

onde ψ é a fase da função complexa Ψ_4 original (que não podemos normalizar).

Para o tipo Petrov II temos $\Psi_4 = 6\Psi_2 \neq 0$. Normalizamos os parâmetros com

$$|\widetilde{\Psi}_2| = \tfrac{1}{6}|\widetilde{\Psi}_4| = 1 \implies \mathrm{e}^{-2w}|\Psi_2| = \mathrm{e}^{-2w-4a}|\Psi_2| = 1 \implies \mathrm{e}^{w} = \sqrt{|\Psi_2|},\ \mathrm{e}^{a} = 1. \tag{549}$$

O espinor de Weyl tipo Petrov II agora é

$$\widetilde{\Psi}_{ABCD} = 6\mathrm{e}^{i\psi}(\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_B\widetilde{\iota}_C\widetilde{\iota}_{D)} + \widetilde{o}_A\widetilde{o}_B\widetilde{o}_C\widetilde{o}_D). \tag{550}$$

Para o tipo Petrov D a normalização é óbvia. Apenas $\Psi_2 \neq 0$ logo escolhemos

$$|\widetilde{\Psi}_2| = \mathrm{e}^{-2w}|\Psi_2| = 1 \implies \mathrm{e}^{w} = \sqrt{|\Psi_2|}. \tag{551}$$

A forma final do espinor de Weyl é

$$\widetilde{\Psi}_{ABCD} = 6\mathrm{e}^{i\psi}\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_{B}\widetilde{\iota}_{C}\widetilde{\iota}_{D)}. \tag{552}$$

Não podemos normalizar o *boost*. A isotropia neste caso é idêntica ao caso isométrico.

Nestes três casos podemos normalizar o parâmetro conforme w. Não precisamos usar as derivadas de Weyl se não quisermos. Podemos simplesmente fazer a classificação isométrica das métricas normalizadas.[82] As maiores diferenças são nos outros dois casos.

Para tipo Petrov III temos $\Psi_3 = 1$. Logo nossa normalização é

$$\widetilde{\Psi}_3 = \mathrm{e}^{-2w-2a} = 1 \implies w = -a. \tag{553}$$

A forma do espinor de Weyl é idêntica ao caso isométrico,

$$\widetilde{\Psi}_{ABCD} = -4\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_{B}\widetilde{o}_{C}\widetilde{\iota}_{D)}. \tag{554}$$

Há uma simetria extra nos *coframes* possíveis dos tipos Petrov III. Diferente do caso isométrico, o *coframe* aqui não está completamente determinado. A isotropia é dada por

$$\widetilde{o}_A = \mathrm{e}^{a/2}o_A, \qquad \widetilde{\iota}_A = \mathrm{e}^{-3a/2}\iota_A, \qquad \widetilde{o}^A = \mathrm{e}^{3a/2}o^A \qquad \widetilde{\iota}^A = \mathrm{e}^{-a/2}\iota^A. \tag{555}$$

Para o tipo N temos apenas $\Psi_4 = 1$. Neste caso a normalização é

$$\widetilde{\Psi}_4 = \mathrm{e}^{-2w-4a} = 1 \implies w = -2a. \tag{556}$$

Novamente temos uma forma idêntica ao caso isométrico

$$\widetilde{\Psi}_{ABCD} = \widetilde{o}_A\widetilde{o}_B\widetilde{o}_C\widetilde{o}_D, \tag{557}$$

e novamente temos uma simetria extra, que deve ser considerada junto com as rotações nulas características dos tensores de Weyl tipo N.

$$\widetilde{o}_A = o_A, \qquad \widetilde{\iota}_A = \mathrm{e}^{-2a}\iota_A, \qquad \widetilde{o}^A = \mathrm{e}^{2a}o^A \qquad \widetilde{\iota}^A = \iota^A. \tag{558}$$

Para continuar com as normalizações precisamos definir a derivada de Weyl de espinores. Suponha que a derivada de Weyl espinorial seja hermitiana e que as derivadas de tensores e espinores equivalentes também sejam equivalentes,

$$\mathring{\nabla}_{EE'}\overline{\xi}_{A'} = \overline{\mathring{\nabla}_{EE'}\xi_A}, \; \mathring{\nabla}_{EE'}\sigma^a{}_{AA'} = 0. \tag{559}$$

[82] Ou ainda, usar as funções de estrutura do *coframe* normalizados.

Considere um vetor nulo complexo definido por $v_{AA'} = \xi_A \zeta_{A'}$. A relação entre sua derivada de Weyl espinorial e o espinor equivalente da derivada de Weyl tensorial é

$$\begin{aligned}
\mathring{\nabla}_{CC'} v_{AA'} &= \xi_A \mathring{\nabla}_{CC'} \zeta_{A'} + \zeta_{A'} \mathring{\nabla}_{CC'} \xi_A \\
&= \xi_A \left(\nabla_{CC'} \zeta_{A'} + \overline{W}^{B'}{}_{A'C'C} \zeta_{B'} \right) + \zeta_{A'} \left(\nabla_{CC'} \xi_A + W^B{}_{ACC'} \xi_B \right) \\
&= \nabla_{CC'} (\xi_A \zeta_{A'}) + \left(\delta^B_A \overline{W}^{B'}{}_{A'C'C} + \delta^{B'}_{A'} W^B{}_{ACC'} \right) (\xi_B \zeta_{B'}) \\
&\equiv \nabla_{CC'} v_{AA'} + W^{BB'}{}_{AA'CC'} v_{BB'}. \qquad (560)
\end{aligned}$$

Como o vetor $v_{BB'}$ é arbitrário vale

$$\varepsilon_{AB} \overline{W}_{B'A'C'C} + \bar{\varepsilon}_{A'B'} W_{BACC'} = \varepsilon_{CB} \bar{\varepsilon}_{C'B'} W_{AA'} + \varepsilon_{AB} \bar{\varepsilon}_{A'B'} W_{CC'} - \varepsilon_{AC} \bar{\varepsilon}_{A'C'} W_{BB'}. \qquad (561)$$

Simetrizando nos índices AB e contraindo os índices $A'B'$ obtemos

$$2W_{(BA)CC'} = \varepsilon_{C(B} W_{A)C'} + \varepsilon_{C(A} W_{B)C'} \implies W_{(BA)CC'} = \varepsilon_{C(B} W_{A)C'}. \qquad (562)$$

Portanto a parte simétrica da conexão espinorial é

$$W_{(BA)CC'} = \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{CA} W_{BC'} + \varepsilon_{CB} W_{AC'}). \qquad (563)$$

Contraindo a equação entre as conexões nos índices AB e $A'B'$ temos

$$2(\overline{W}^{A'}{}_{A'C'C} + W^A{}_{ACC'}) = 4W_{CC'} \implies W_{[BA]CC'} \equiv \varepsilon_{AB} (\tfrac{1}{2} W_{CC'} + iH_{CC'}). \qquad (564)$$

Juntando ambas as partes e reorganizando alguns termos reescrevemos a conexão como

$$\begin{aligned}
W_{BACC'} &= \tfrac{1}{2} (\varepsilon_{CA} W_{BC'} + \varepsilon_{CB} W_{AC'}) - \varepsilon_{BA} (\tfrac{1}{2} W_{CC'} + iH_{CC'}) \\
&= \varepsilon_{A[B} W_{C]C'} + \tfrac{1}{2} \varepsilon_{CB} W_{AC'} + i\varepsilon_{AB} H_{CC'} \\
&= \varepsilon_{CB} W_{AC'} + i\varepsilon_{AB} H_{CC'}, \qquad (565)
\end{aligned}$$

onde $H_{CC'}$ é um espinor hermitiano.

Para a transformação conforme da estrutura simplética, $\epsilon_{AB} \to \mathrm{e}^{\omega(x) + ih(x)} \epsilon_{AB}$, que implica a transformação da díada $(o_A, \iota_A) \to (\mathrm{e}^{\omega} o_A, \mathrm{e}^{\omega} \iota_A)$. A conexão de Levi-Civita espinorial se transforma como

$$\Gamma^B{}_{ACC'} \to \Gamma^B{}_{ACC'} - \delta^B_C \nabla_{AC'}(\omega) - i\delta^B_A \nabla_{CC'}(h). \qquad (566)$$

Ambos $H_{CC'}$ e h não afetam as conexões tensoriais, e por isto serão considerados zero.

Precisamos normalizar a derivada $\mathring{\nabla}_e C^a{}_{bcd}$, ou equivalentemente o espinor

$$\mathring{\nabla}_{EE'}(\Psi^A{}_{BCD}\bar{\varepsilon}^{A'}{}_{B'}\bar{\varepsilon}_{C'D'}) = \bar{\varepsilon}^{A'}{}_{B'}\bar{\varepsilon}_{C'D'}\epsilon^{AF}\mathring{\nabla}_{EE'}\Psi_{FBCD}. \tag{567}$$

Portanto basta normalizar as derivadas do espinor totalmente covariante.

Calculando a derivada de Weyl do espinor de Weyl temos

$$\mathring{\nabla}_{EE'}\Psi_{ABCD} = \nabla_{EE'}\Psi_{ABCD} + 4\Psi_{F(ABC}W^F{}_{D)EE'} = \nabla_{EE'}\Psi_{ABCD} + 4\Psi_{E(BCD}W_{A)E'}, \tag{568}$$

um expressão bastante simples quando comparada com a equivalente tensorial.

Exatamente como ocorre com a conexão de Levi-Civita (equação (488)), a derivada de Weyl de um espinor do tipo Petrov N na forma canônica vale

$$\mathring{\nabla}_{EE'}\Psi_{ABCD} = 4\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_B\widetilde{o}_C\mathring{\nabla}_{|EE'|}\widetilde{o}_{D)}, \tag{569}$$

e portanto, basta normalizar a derivada de $\widetilde{o}_A$, que escrita por extenso é

$$\begin{aligned}
\mathring{\nabla}_{EE'}\widetilde{o}_A &= \nabla_{EE'}\widetilde{o}_A + \widetilde{o}_E\widetilde{W}_{AE'}\\
&= (\widetilde{\gamma}\widetilde{o}_E\widetilde{\bar{o}}_{E'} + \widetilde{\epsilon}\widetilde{\iota}_E\widetilde{\bar{\iota}}_{E'} - \widetilde{\alpha}\widetilde{o}_E\widetilde{\bar{\iota}}_{E'} - \widetilde{\beta}\widetilde{\iota}_E\widetilde{\bar{o}}_{E'})\widetilde{o}_A\\
&\quad - (\widetilde{\tau}\widetilde{o}_E\widetilde{\bar{o}}_{E'} + \widetilde{\kappa}\widetilde{\iota}_E\widetilde{\bar{\iota}}_{E'} - \widetilde{\rho}\widetilde{o}_E\widetilde{\bar{\iota}}_{E'} - \widetilde{\sigma}\widetilde{\iota}_E\widetilde{\bar{o}}_{E'})\widetilde{\iota}_A\\
&\quad + \widetilde{o}_E(\widetilde{W}_{11}\widetilde{o}_A\widetilde{\bar{o}}_{E'} + \widetilde{W}_{00}\widetilde{\iota}_A\widetilde{\bar{\iota}}_{E'} - \widetilde{W}_{10}\widetilde{o}_A\widetilde{\bar{\iota}}_{E'} - \widetilde{W}_{01}\widetilde{\iota}_A\widetilde{\bar{o}}_{E'}).
\end{aligned} \tag{570}$$

Lembrando a transformação (558) da base, contraindo com a base contravariante e executando uma rotação nula relacionamos os coeficientes das conexões. Por exemplo

$$\mathring{\rho} = \widetilde{o}^A\widetilde{\iota}^E\widetilde{\bar{o}}^{E'}\mathring{\nabla}_{EE'}\widetilde{o}_A = \widetilde{\rho} + \widetilde{W}_{00} = \mathrm{e}^{4a}(\widehat{\rho} + W_{00}) = \mathrm{e}^{4a}(\rho + c\kappa + W_{00}). \tag{571}$$

Computando todos os coeficientes temos

$$\begin{aligned}
\mathring{\kappa} &= \mathrm{e}^{6a}\kappa,\\
\mathring{\epsilon} &= \mathrm{e}^{4a}(\epsilon + c\kappa),\\
\mathring{\rho} &= \mathrm{e}^{4a}(\rho + W_{00} + c\kappa),\\
\mathring{\sigma} &= \mathrm{e}^{4a}(\sigma + \bar{c}\kappa),\\
\mathring{\alpha} &= \mathrm{e}^{2a}[\alpha + W_{10} + c(\rho + \epsilon) + c^2\kappa],\\
\mathring{\beta} &= \mathrm{e}^{2a}[\beta + c\sigma + \bar{c}\epsilon + c\bar{c}\kappa],\\
\mathring{\tau} &= \mathrm{e}^{2a}[\tau + W_{01} + c\sigma + \bar{c}\rho + c\bar{c}\kappa],\\
\mathring{\gamma} &= \gamma + W_{11} + c(\tau + \beta) + \bar{c}\alpha + c^2\sigma + c\bar{c}(\rho + \epsilon) + c^2\bar{c}\kappa.
\end{aligned} \tag{572}$$

Independende dos valores escolhidos para os parâmetros c e a e dos coeficientes de conexão, podemos usar a forma de Weyl para escolher[83]

$$\Re(\mathring{\rho}) = \Re(\mathring{\gamma}) = \mathring{\alpha} = 0, \tag{573}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} W_{00} =& -\tfrac{1}{2}(\rho + \overline{\rho} + c\kappa + \overline{c\kappa}), \\ W_{01} =& -[\overline{\alpha} + \overline{c}(\overline{\rho} + \overline{\epsilon}) + \overline{c}^2\overline{\kappa}], \\ W_{11} =& -\tfrac{1}{2}[\gamma + \overline{\gamma} + c(\tau + \beta + \overline{\alpha}) + \overline{c}(\overline{\tau} + \overline{\beta} + \alpha) + c^2\sigma + \overline{c}^2\overline{\sigma} + c\overline{c}(c\kappa + \overline{c\kappa})]. \end{aligned} \tag{574}$$

Substituindo a normalização de $\mathring{\alpha}$ na equação de $\mathring{\tau}$ temos

$$\mathring{\tau} = \mathrm{e}^{2a}[(\tau - \overline{\alpha}) + c\sigma + \overline{c}(\rho - \overline{\rho} - \overline{\epsilon}) + \overline{c}(c\kappa - \overline{c\kappa})]. \tag{575}$$

Por fim, precisaremos de uma última equação,

$$\mathring{\beta} - \mathring{\tau} = \mathrm{e}^{2a}[(\beta - \tau + \overline{\alpha}) + \overline{c}(\epsilon + \overline{\epsilon} - \rho + \overline{\rho}) + \overline{c}^2\overline{\kappa}]. \tag{576}$$

Podemos agora prosseguir com as normalizações. Há oito casos a considerar:

CN1) Se $\kappa \neq 0$ podemos usá-lo para normalizar a escolhendo $|\mathring{\kappa}| \equiv 1$, e normalizar c escolhendo $\mathring{\sigma} = \mathrm{e}^{4a}(\sigma + \overline{c}\kappa) \equiv 0$. Neste *coframe* os invariantes conformes são

$$\mathring{\kappa} = \mathrm{e}^{i\psi},\ \mathring{\epsilon} = \widetilde{\epsilon},\ \mathring{\rho} = i\widetilde{\rho}_i,\ \mathring{\sigma} = 0,\ \mathring{\alpha} = 0,\ \mathring{\beta} = \widetilde{\beta},\ \mathring{\tau} = \widetilde{\tau} - \widetilde{\overline{\alpha}},\ \mathring{\gamma} = i\widetilde{\gamma}_i. \tag{577}$$

CN2) Se $\kappa = 0 \neq \epsilon + \overline{\epsilon} - \rho + \overline{\rho}$ podemos normalizar c escolhendo $\mathring{\beta} = \mathring{\tau}$, e normalizar a escolhendo a parte imaginária de ρ ou a norma de ϵ. Os invariantes conformes são

$$\mathring{\kappa} = 0,\ \mathring{\epsilon} = |f|\epsilon,\ \mathring{\rho} = i|f|\rho_i,\ \mathring{\sigma} = \widetilde{\sigma},\ \mathring{\alpha} = 0,\ \mathring{\beta} = \mathring{\tau} = \widetilde{\beta},\ \mathring{\gamma} = i\widetilde{\gamma}_i, \tag{578}$$

onde escolhemos $\mathrm{e}^{4a} = |f|$ para normalizar um dos dois invariantes.

CN3) Se $\kappa = \rho - \overline{\rho} = \epsilon + \overline{\epsilon} = 0$, mas $|\sigma| \neq \epsilon_i$ podemos normalizar c completamente escolhendo $\mathring{\beta} = 0$. Neste caso temos os invariantes

$$\mathring{\kappa} = 0,\ \mathring{\epsilon} = i|f|\epsilon_i,\ \mathring{\rho} = 0,\ \mathring{\sigma} = |f|\sigma,\ \mathring{\alpha} = 0,\ \mathring{\beta} = 0,\ \mathring{\tau} = \widetilde{\tau} - \widetilde{\overline{\alpha}},\ \mathring{\gamma} = i\widetilde{\gamma}_i, \tag{579}$$

onde novamente escolhemos $|f|$ para normalizar um dos dois invariantes.

[83] Há outras opções para normalizar W_{01}, mas $\mathring{\tau} - \overline{\mathring{\alpha}}$ é independente da forma de Weyl.

Se $\kappa = \rho_i = \epsilon_r = |\sigma| - |\epsilon_i| = 0$, mas $\epsilon_i \neq 0$ não poderemos zerar β completamente. Escrevendo $\sigma = i\epsilon_i \mathrm{e}^{2i\psi}$, a equação da transformação de $\mathring{\beta}$ é

$$\mathring{\beta} = \mathrm{e}^{2a}[\beta + i\epsilon_i c\mathrm{e}^{2i\psi} + i\epsilon_i \overline{c}] = \mathrm{e}^{2a}[\beta + i\epsilon_i \mathrm{e}^{i\psi}(c\mathrm{e}^{i\psi} + \overline{c}\mathrm{e}^{-i\psi})] \tag{580}$$

e podemos zerar apenas uma parte do invariante escolhendo $\mathring{\beta} = \mathrm{e}^{2a}\beta_\psi \mathrm{e}^{i\psi}$. Para preservar esta normalização nos restringimos as rotações nulas com $c = ir\mathrm{e}^{-i\psi}$. Com estas escolhas os termos quadráticos na equação para a parte imaginária de $\mathring{\gamma}$ se cancelam, e temos

$$\mathring{\gamma} - \overline{\mathring{\gamma}} = \gamma - \overline{\gamma} + ir[\mathrm{e}^{-i\psi}(\tau + \beta - \overline{\alpha}) - \mathrm{e}^{i\psi}(\overline{\tau} + \overline{\beta} - \alpha)] = \gamma - \overline{\gamma} + ir[\mathrm{e}^{-i\psi}(\tau - \overline{\alpha}) - \mathrm{e}^{i\psi}(\overline{\tau} - \alpha)]. \tag{581}$$

Podemos normalizar a escolhendo $\widetilde{\epsilon} = \pm i$. Se $\tau - \overline{\alpha} = q\mathrm{e}^{i\psi}$ não é possível normalizar c completamente. Do contrário poderemos escolher $\mathring{\gamma} = 0$. Estes dois casos são:

CN4) Se $\kappa = \rho_i = \epsilon_r = \sigma - i\epsilon_i \mathrm{e}^{2i\psi} = 0$, mas $\epsilon_i \neq 0$ e $\tau - \overline{\alpha} \neq q\mathrm{e}^{i\psi}$. Podemos normalizar c escolhendo $\widetilde{\beta} = \beta_\psi \mathrm{e}^{i\psi}$ e $\widetilde{\gamma}_i = 0$. Invariantes são

$$\mathring{\kappa} = 0,\ \mathring{\epsilon} = \pm i,\ \mathring{\rho} = 0,\ \mathring{\sigma} = i\mathrm{e}^{2i\psi},\ \mathring{\alpha} = 0,\ \mathring{\beta} = \widetilde{\beta}_\psi \mathrm{e}^{i\psi},\ \mathring{\tau} = \widetilde{\tau} - \overline{\widetilde{\alpha}},\ \mathring{\gamma} = 0. \tag{582}$$

CN5) Se $\kappa = \rho_i = \epsilon_r = \sigma - i\epsilon_i \mathrm{e}^{2i\psi} = \tau - \overline{\alpha} - q\mathrm{e}^{i\psi} = 0$, mas $\epsilon_i \neq 0$ ainda sobra uma isotropia unidimensional $c = ir\mathrm{e}^{-i\psi}$. Escolhemos[84]

$$\mathring{\kappa} = 0,\ \mathring{\epsilon} = \pm i,\ \mathring{\rho} = 0,\ \mathring{\sigma} = i\mathrm{e}^{2i\psi},\ \mathring{\alpha} = 0,\ \mathring{\beta} = \widetilde{\beta}_\psi \mathrm{e}^{i\psi},\ \mathring{\tau} = q\mathrm{e}^{i\psi},\ \mathring{\gamma} = i\widetilde{\gamma}_i. \tag{583}$$

Os últimos casos são aqueles tais que $\kappa = \rho_i = \epsilon = \sigma = 0$, e portanto $\mathring{\beta}$ e $\mathring{\tau}$ são invariantes à rotação nula. Agora temos para o último invariante

$$\mathring{\gamma} - \overline{\mathring{\gamma}} = \gamma - \overline{\gamma} + [c(\beta + \tau - \overline{\alpha}) - \overline{c}(\overline{\beta} + \overline{\tau} - \alpha)]. \tag{584}$$

Se $\beta + \tau - \overline{\alpha} \neq 0$ podemos escolher $\mathring{\gamma} = 0$ e normalizar a escolhendo $|\mathring{\beta} + \mathring{\tau}| = 1$, e ainda restará uma isotropia unidimensional. Se $\beta + \tau - \overline{\alpha} = 0$ não podemos escolher $\mathring{\gamma}_i$, e poderemos normalizar a somente se $\beta \neq 0 \Longleftrightarrow \tau - \overline{\alpha} \neq 0$. Os três últimos casos são:

CN6) Se $\kappa = \rho_i = \epsilon = \sigma$ mas $\beta + \tau - \overline{\alpha} \neq 0$ podemos normalizar $\mathring{\gamma} = |\mathring{\beta} + \mathring{\tau}| - 1 = 0$, sobra uma isotropia unidimensional $c = ir\mathrm{e}^{-i\psi}$

$$\mathring{\kappa} = 0,\ \mathring{\epsilon} = 0,\ \mathring{\rho} = 0,\ \mathring{\sigma} = 0, \mathring{\alpha} = 0,\ \mathring{\beta} = \widetilde{\beta},\ \mathring{\tau} = i\mathrm{e}^{i\psi} - \widetilde{\beta},\ \mathring{\gamma} = 0. \tag{585}$$

[84] Usando as equações de Newman-Penrose é possível mostrar que $q = \widetilde{\beta}_\psi = \mathrm{e}^{i\psi}\pi + \mathrm{e}^{-i\psi}\overline{\pi} \equiv 2\pi_\psi$, mas esta equação não faz parte do procedimento de normalização.

Tabela 4 - Normalizações da derivada de Weyl para o tipo Petrov N

Caso	$\mathring{\kappa}$	$\mathring{\epsilon}$	$\mathring{\rho}$	$\mathring{\sigma}$	$\mathring{\beta}$	$\mathring{\tau}$	$\mathring{\gamma}$	Isotropia
CN1	$\mathrm{e}^{i\psi}$	$\widetilde{\epsilon}$	$i\widetilde{\rho}_i$	0	$\widetilde{\beta}$	$\widetilde{\tau} - \widetilde{\overline{\alpha}}$	$i\widetilde{\gamma}_i$	—
CN2	0	$\|f\|\epsilon$	$i\|f\|\rho_i$	$\widetilde{\sigma}$	$\widetilde{\beta}$	$\widetilde{\beta}$	$i\widetilde{\gamma}_i$	—
CN3	0	$i\|f\|\epsilon_i$	0	$\|f\|\sigma$	0	$\widetilde{\tau} - \widetilde{\overline{\alpha}}$	$i\widetilde{\gamma}_i$	—
CN4	0	$\pm i$	0	$i\mathrm{e}^{2i\psi}$	$\widetilde{\beta}_\psi \mathrm{e}^{i\psi}$	$\widetilde{\tau} - \widetilde{\overline{\alpha}}$	0	—
CN5	0	$\pm i$	0	$i\mathrm{e}^{2i\psi}$	$\widetilde{\beta}_\psi \mathrm{e}^{i\psi}$	$q\mathrm{e}^{i\psi}$	$i\widetilde{\gamma}_i$	$ir\mathrm{e}^{-i\psi}$
CN6	0	0	0	0	$\widetilde{\beta}$	$i\mathrm{e}^{i\psi} - \widetilde{\beta}$	0	$ir\mathrm{e}^{-i\psi}$
CN7	0	0	0	0	$\mathrm{e}^{i\psi}$	$-\mathrm{e}^{i\psi}$	$i\widetilde{\gamma}_i$	$c_r + ic_i$
CN8	0	0	0	0	0	0	$i\widetilde{\gamma}_i$	$w = -2a, c_r + ic_i$

Fonte: O autor, 2019.

CN7) Se $\kappa = \rho_i = \epsilon = \sigma = \beta + \tau - \overline{\alpha} = 0$ mas $\beta \neq 0 \neq \tau - \overline{\alpha}$, poderemos escolher $|\mathring{\beta}| = |\mathring{\tau}| = 1$, mas não podemos normalizar c

$$\mathring{\kappa} = 0, \mathring{\epsilon} = 0, \mathring{\rho} = 0, \mathring{\sigma} = 0, \mathring{\alpha} = 0, \mathring{\beta} = \mathrm{e}^{i\psi}, \mathring{\tau} = -\mathrm{e}^{i\psi}, \mathring{\gamma} = 0. \tag{586}$$

CN8) Se $\kappa = \rho_i = \epsilon = \sigma = \beta = \tau - \overline{\alpha} = 0$ então $\mathring{\gamma}_i$ é completamente invariante às três transformações, e toda isotropia restante é preservada.

$$\mathring{\kappa} = 0, \mathring{\epsilon} = 0, \mathring{\rho} = 0, \mathring{\sigma} = 0, \mathring{\alpha} = 0, \mathring{\beta} = 0, \mathring{\tau} = 0, \mathring{\gamma} = i\widetilde{\gamma}_i. \tag{587}$$

Todas as diferentes normalizações e isotropias foram colocadas na tabela 4, onde f deve ser escolhida de forma que iguale a norma de um dos invariantes à unidade. Independente da normalização, como escolhemos a forma de Weyl precisaremos computar a derivada segunda e o tensor de Ricci, *inclusive se for possível escolher* $\mathring{\nabla}_{EE'}\Psi_{ABCD} = 0$.

Quanto às derivadas para os tipos Petrov III, temos:

$$\mathring{\nabla}_{EE'}\Psi_{ABCD} = -12\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_B\widetilde{\iota}_C\mathring{\nabla}_{|EE'|}\widetilde{o}_{D)} - 4\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_B\widetilde{o}_C\mathring{\nabla}_{|EE'|}\widetilde{\iota}_{D)} \equiv -4\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_B\widetilde{\chi}_{CD)EE'}, \tag{588}$$

onde o novo espinor $\widetilde{\chi}$, vale

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}_{CDEE'} &= 3\widetilde{\iota}_{(C}\mathring{\nabla}_{|EE'|}\widetilde{o}_{D)} + \widetilde{o}_{(C}\mathring{\nabla}_{|EE'|}\widetilde{\iota}_{D)} \\
&= 3\widetilde{\iota}_{(C}\nabla_{|EE'|}\widetilde{o}_{D)} + 3\widetilde{\iota}_{(C}\widetilde{W}_{D)E'}\widetilde{o}_E + \widetilde{o}_{(C}\nabla_{|EE'|}\widetilde{\iota}_{D)} + \widetilde{o}_{(C}\widetilde{W}_{D)E'}\widetilde{\iota}_E \\
&= [\widetilde{\nu}\widetilde{o}_E\widetilde{\overline{o}}_{E'} + (\widetilde{\pi} - \widetilde{W}_{10})\widetilde{\iota}_E\widetilde{\overline{\iota}}_{E'} - \widetilde{\lambda}\widetilde{o}_E\widetilde{\overline{\iota}}_{E'} - (\widetilde{\mu} - \widetilde{W}_{11})\widetilde{\iota}_E\widetilde{\overline{o}}_{E'}]\widetilde{o}_C\widetilde{o}_D \\
&\quad - 3[(\widetilde{\tau} + \widetilde{W}_{01})\widetilde{o}_E\widetilde{\overline{o}}_{E'} + \widetilde{\kappa}\widetilde{\iota}_E\widetilde{\overline{\iota}}_{E'} - (\widetilde{\rho} + \widetilde{W}_{00})\widetilde{o}_E\widetilde{\overline{\iota}}_{E'} - \widetilde{\sigma}\widetilde{\iota}_E\widetilde{\overline{o}}_{E'}]\widetilde{\iota}_C\widetilde{\iota}_D \\
&\quad + [(2\widetilde{\gamma} + 3\widetilde{W}_{11})\widetilde{o}_E\widetilde{\overline{o}}_{E'} + (2\widetilde{\epsilon} + \widetilde{W}_{00})\widetilde{\iota}_E\widetilde{\overline{\iota}}_{E'} \\
&\quad - (2\widetilde{\alpha} + 3W_{10})\widetilde{o}_E\widetilde{\overline{\iota}}_{E'} - (2\widetilde{\beta} + W_{01})\widetilde{\iota}_E\widetilde{\overline{o}}_{E'}]\widetilde{o}_{(C}\widetilde{\iota}_{D)}.
\end{aligned} \tag{589}$$

Vamos escolher zerar prioritariamente as componentes com maior número de ι's, em particular, nos índices simétricos. A normalização escolhida é:

$$\widetilde{W}_{00} + \tfrac{1}{2}(\widetilde{\rho} + \widetilde{\overline{\rho}}) = \widetilde{W}_{01} + \widetilde{\tau} = 3\widetilde{W}_{11} + \widetilde{\gamma} + \widetilde{\overline{\gamma}} = 0. \tag{590}$$

Quanto à normalização de a, devemos lembrar que $\widetilde{\chi}$ é definido relativamente aos espinores de base o. Portanto ele se transforma como

$$\widetilde{o}_{(A}\widetilde{o}_{B}\widetilde{\chi}_{CDE)E'} = \mathrm{e}^{a} o_{(A} o_{B} \widetilde{\chi}_{CDE)E'} \implies \chi_{CDEE'} = e^{a}\widetilde{\chi}_{CDEE'}. \tag{591}$$

Juntando com as transformações das componentes de $\widetilde{\chi}$, os invariantes conformes são:

$$\begin{aligned}
&\mathring{\alpha} = \mathrm{e}^{a}(\alpha - 3\overline{\tau}/2),\\
&\mathring{\beta} = \mathrm{e}^{a}(\beta - \tau/2),\\
&\mathring{\gamma} = \mathrm{e}^{-a}(\gamma - \overline{\gamma})/2 = i\gamma_i,\\
&\mathring{\epsilon} = \mathrm{e}^{3a}(\epsilon - \rho/4 - \overline{\rho}/4),\\
&\mathring{\kappa} = \mathrm{e}^{5a}\kappa,\\
&\mathring{\lambda} = \mathrm{e}^{-a}\lambda,\\
&\mathring{\mu} = \mathrm{e}^{-a}(\mu + \gamma/3 + \overline{\gamma}/3),\\
&\mathring{\nu} = \mathrm{e}^{-3a}\nu,\\
&\mathring{\pi} = \mathrm{e}^{a}(\pi + \overline{\tau}),\\
&\mathring{\rho} = \mathrm{e}^{3a}(\rho - \overline{\rho})/2 = \mathrm{e}^{3a} i\rho_i,\\
&\mathring{\sigma} = \mathrm{e}^{3a}\sigma,\\
&\mathring{\tau} = 0.
\end{aligned} \tag{592}$$

Será impossível normalizar a apenas se todos estes invariantes forem zero,

$$\alpha = \frac{3\overline{\tau}}{2},\ \beta = \frac{\tau}{2},\ \pi = -\overline{\tau},\ \overline{\gamma} = \gamma,\ \overline{\rho} = \rho,\ \epsilon = \frac{\rho}{2},\ \mu = -\frac{2\gamma}{3},\ \kappa = \lambda = \nu = \sigma = 0. \tag{593}$$

Usando as equações (457) de Newman-Penrose podemos mostrar que não há espaço-tempo tipo III que satisfaça estas condições. Mais precisamente, as equações 14, 15 e 16 do conjunto agora são escritas como

$$\begin{aligned}
&\Delta\overline{\tau} = \Phi_{21} + 1,\\
&\frac{2}{3}\overline{\delta}\gamma = \Phi_{21} - 1 - \frac{4}{3}\overline{\tau}\gamma,\\
&\frac{3}{2}\Delta\overline{\tau} - \overline{\delta}\gamma = 2\overline{\tau}\gamma - 1.
\end{aligned} \tag{594}$$

Subtraindo a segunda equação e dois terços da terceira equação da primeira obtemos $0 = 8/3$. É impossível satisfazer as equações de Newman-Penrose com esta conexão, logo não há espaço-tempo tipo Petrov III com simetria conforme de dimensão cinco e sempre poderemos normalizar completamente os *coframes* dos espaços tipo Petrov III.[85]

Para testar a solução obtida para o problema de equivalência conforme de métricas foi desenvolvido pelo autor um programa (em Maple) para calcular os tensores de curvatura das conexões de Levi-Civita e de Weyl, e suas derivadas covariantes. Este programa é composto por quatro arquivos: *TensorAlgebra* (2954 linhas/73 KB), faz alguns cálculos básicos de Álgebra Linear (incluindo levantamento e abaixamento de índices); *IdxFncs* (1371 linhas/28 KB) define funções indexadoras, usadas por Maple para implementar as simetrias pelas permutações de índices dos tensores; *Manifolds* (1062 linhas/28 KB) usa os dois arquivos anteriores para executar cálculos com campos tensoriais numa variedade diferenciável arbitrária (incluindo as derivadas absolutas, de Lie, e derivadas covariantes quaisquer); e *RiemannWeyl* (754 linhas/25 KB), que usa os três arquivos acima para calcular a conexão e a curvatura das respectivas geometrias, além das componentes dos espinores de Weyl e Ricci para os casos quadridimensionais. Os resultados deste programa para geometria riemanniana foram verificados de forma independente por CLASSI (MACCALLUM et al., 1994), um programa de classificação invariante desenvolvido por Jan Åman (ÅMAN; KARLHEDE, 1980) especificamente para geometrias lorentzianas quadridimensionais.

Um quinto arquivo, *Comandos4* (1639 linhas/48 KB), foi desenvolvido para executar cálculos no formalismo de Newman-Penrose, sem a necessidade de especificar uma métrica.[86]

6.7 **Espaços Tipo Petrov III com simetria máxima**

Usando o conhecimento adquirido na seção anterior, tentaremos encontrar as condições para que um espaço tipo III tenha o maior grupo de simetria conforme possível. Escolhemos o tipo Petrov III pois neste caso temos apenas um parâmetro a ser normalizado, e porque soluções deste tipo são mais raras na literatura do que as de tipo N e D.

Sabemos que o parâmetro a deverá ser normalizado em qualquer métrica tipo Petrov III, e a maior dimensão possível do grupo conforme para este tipo Petrov é quatro. Para alcançar esta dimensão é preciso que todos os invariantes conformes sejam constantes.

[85] Este resultado concorda com a análise feita em (HALL, 2004), usando as equações diferenciais para a Álgebra de Killing conforme.

[86] Estes programas, junto com sessões de Maple que implementam os cálculos, podem ser encontrados em <http://bit.ly/ConformalEquivalence>.

Voltando às equações (592), após a normalização de algum dos coeficientes todos os invariantes devem ser constantes. Adicionando um subíndice 0 para elas, temos:

$$
\begin{aligned}
&\alpha = A_0 \mathrm{e}^{-f(x)} + 3\overline{\tau}(x)/2, && \beta = B_0 \mathrm{e}^{-f(x)} + \tau(x)/2, && \gamma = \gamma_r(x) + iG_{i0}\mathrm{e}^{f(x)},\\
&\epsilon = \rho_r(x)/2 + E_0 \mathrm{e}^{-3f(x)}, && \kappa = \kappa_0 \mathrm{e}^{-5f(x)}, && \lambda = \lambda_0 \mathrm{e}^{f(x)},\\
&\mu = M_0 \mathrm{e}^{f(x)} - 2\gamma_r(x)/3, && \nu = \nu_0 \mathrm{e}^{3f(x)}, && \pi = P_0 \mathrm{e}^{-f(x)} - \overline{\tau}(x),\\
&\rho = \rho_r(x) + iR_{i0}\mathrm{e}^{-3f(x)}, && \sigma = \sigma_0 \mathrm{e}^{-3f(x)}, &&
\end{aligned} \tag{595}
$$

onde G_{i0} e R_{i0} são reais e as outras são complexas.

Como podemos executar transformações conformes faremos as contas nas métricas já normalizadas, ou seja, aquelas onde $f(x) = 1$ (e a norma de uma das constantes é um) para estudar as equações de Newman-Penrose. Nestas métricas podemos combinar algumas das equações de Newman-Penrose para obter um sistema de onze equações independentes das componentes da curvatura e das derivadas dos coeficientes indeterminados.

Por exemplo, para estes casos, a sétima e a oitava equação do conjunto são:

$$
\begin{aligned}
\overline{\delta}\overline{\tau} &= (P_0 + A_0 - \overline{B}_0)(P_0 - \overline{\tau}) - \lambda_0(3E_0 - \overline{E}_0 - iR_{i0}) + \overline{\sigma}_0(M_0 - 2\gamma_r/3) - \nu_0\overline{\kappa}_0 + \Phi_{20},\\
-\delta\tau &= \sigma_0(8\gamma_r/3 + 4iG_{i0} - M_0) + \tau(\overline{A}_0 - B_0) - \overline{\lambda}_0(\rho_r - iR_{i0}) + \kappa_0\overline{\nu}_0 - \Phi_{02}.
\end{aligned} \tag{596}
$$

Somando a segunda destas equações com a conjugada da primeira temos

$$
\overline{\lambda}_0(E_0 + 3\overline{E}_0 - 2iR_{i0} - \rho_r) - \sigma_0(M_0 - \overline{M} - 4iG_{i0} - 2\gamma_r) + \overline{P}_0(\overline{P}_0 + \overline{A}_0 - B_0 - \tau) = 0. \tag{597}
$$

O conjunto completo de equações é

$$
\begin{aligned}
&3\sigma_0\rho_r - 5\kappa_0\tau + C_1 = 0,\\
&-2\lambda_0\gamma_r + 9\nu_0\overline{\tau} + C_2 = 0,\\
&6iR_{i0}\rho_r + 5\overline{\kappa}_0\tau - 5\kappa_0\overline{\tau} + C_3 = 0,\\
&-2(M_0 - \overline{M}_0)\gamma_r + 9\nu_0\tau - 9\overline{\nu}_0\overline{\tau} + C_4 = 0,\\
&-6B_0\rho_r - 10\kappa_0\gamma_r + 9(2E_0 - iR_{i0})\tau + 9\sigma_0\overline{\tau} + C_5 = 0,\\
&(\overline{A}_0 - 3B_0)\rho_r + 3(3E_0 - \overline{E}_0 - iR_{i0})\tau + 3\sigma_0\overline{\tau} + C_6 = 0,\\
&-\overline{\lambda}_0\rho_r + 2\sigma_0\gamma_r - \overline{P}_0\tau + C_7 = 0,\\
&-2iG_{i0}\rho_r - 2(E_0 - \overline{E}_0)\gamma_r + C_8 = 0,\\
&(3M_0 + 2iG_{i0})\rho_r + 2(2E_0 - iR_{i0})\gamma_r + (3P_0 + 2A_0)\tau - 2\overline{B}_0\overline{\tau} + C_9 = 0,\\
&-27\nu_0\rho_r - 2(3P_0 + 2A_0)\gamma_r + 9\lambda_0\tau - 3(3M_0 + 2iG_{i0})\overline{\tau} + C_{10} = 0,\\
&-2(A_0 - 3\overline{B}_0)\gamma_r - 9\lambda_0\tau + 3(3M_0 - 4iG_{i0})\overline{\tau} + C_{11} = 0,
\end{aligned} \tag{598}
$$

onde as onze constante C's são dadas por

$$
\begin{aligned}
C_1 =& \,\sigma_0(3E_0-\overline{E}_0)+\kappa_0(\overline{P}_0-\overline{A}_0-3B_0),\\
C_2 =& -3\lambda_0(M_0+\overline{M}_0+4iG_{i0})+3\nu_0(P_0+3A_0+\overline{B}_0),\\
C_3 =& \,2iR_{i0}(E_0+\overline{E}_0)+\overline{\kappa}_0(3\overline{A}_0+B_0-\overline{P}_0)-\kappa_0(3A_0+\overline{B}_0-P_0),\\
C_4 =& -3(M_0^2-\overline{M}_0^2)+3\nu_0(\overline{A}_0+3B_0-\overline{P}_0)-3\overline{\nu}_0(\overline{A}_0-3\overline{B}_0+P_0),\\
C_5 =& \,3B_0(2\overline{E}_0+iR_{i0})+3\kappa_0(M_0+\overline{M}_0)-3(2E_0-iR_{i0})\overline{P}_0+3\sigma_0(A_0-\overline{B}_0-P_0),\\
C_6 =& \,2\overline{A}_0(2E_0-\overline{E}_0-iR_{i0})+2B_0(\overline{E}_0+iR_{i0})-(3E_0-\overline{E}_0+iR_{i0})\overline{P}_0-3\sigma_0P_0\\
&+\kappa_0(2M_0+\overline{M}_0+4iG_{i0})-\overline{\kappa}_0\overline{\lambda}_0,\\
C_7 =& \,\overline{\lambda}_0(E_0-3\overline{E}_0-2iR_{i0})-\sigma_0(M_0-\overline{M}_0-4iG_{i0})+\overline{P}_0(\overline{A}_0-B_0+\overline{P}),\\
C_8 =& -2iG_{i0}(E_0+\overline{E}_0)+(A_0-\overline{B}_0)\overline{P}_0-(\overline{A}_0-B_0)P_0+\overline{\kappa}_0\overline{\nu}_0-\kappa\nu,\\
C_9 =& \,3P_0(\overline{A}_0-\overline{P}_0-5B_0)-2A_0(\overline{P}_0+2B_0-\overline{A}_0)+2\overline{B}_0B_0+E_0(5M_0-2\overline{M}_0+2iG_{i0})\\
&+iR_{i0}(5M_0+\overline{M}_0)+\overline{E}_0(3M_0-2\overline{M}_0+2iG_{i0})-4R_{i0}G_{i0}+4(\kappa_0\nu_0-\sigma_0\lambda_0)\\
C_{10} =& -3\nu_0(11E_0+3\overline{E}_0+8iR_{i0})+3\lambda_0(11B_0+3\overline{P}_0-3\overline{A}_0)\\
&-3A_0(3M_0-2\overline{M}_0-2iG_{i0})-3\overline{B}_0(3M_0+2iG_{i0})-18iG_{i0}P_0+24,\\
C_{11} =& \,3A_0(3M_0+\overline{M}_0-2iG_{i0})+3\overline{B}_0(3M_0-3\overline{M}_0-10iG_{i0})+9P_0(M_0-\overline{M}_0)\\
&-24\lambda_0B_0-3\nu_0(E_0-3\overline{E}_0-5iR_{i0})+9\overline{\nu}_0\overline{\sigma}_0-6.
\end{aligned}
\tag{599}
$$

O conjunto de equações (598) e (599) é muito complicado para ser resolvido diretamente, mas pode ser compreendido estudando primeiramente suas diferenciais e depois usando as soluções no sistema original. O objetivo é descobrir se há alguma solução cujas coeficientes ρ_r, γ_r ou τ não são constantes, para determinar o lado esquerdo das equações de Newman-Penrose. Estas equações são

$$
\begin{aligned}
&3\sigma_0\mathrm{d}\rho_r-5\kappa_0\mathrm{d}\tau=0,\\
&-2\lambda_0\mathrm{d}\gamma_r+9\nu_0\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&6iR_{i0}\mathrm{d}\rho_r+5\overline{\kappa}_0\mathrm{d}\tau-5\kappa_0\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&-2(M_0-\overline{M}_0)\mathrm{d}\gamma_r+9\nu_0\mathrm{d}\tau-9\overline{\nu}_0\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&-6B_0\mathrm{d}\rho_r-10\kappa_0\mathrm{d}\gamma_r+9(2E_0-iR_{i0})\mathrm{d}\tau+9\sigma_0\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&(\overline{A}_0-3B_0)\mathrm{d}\rho_r+3(3E_0-\overline{E}_0-iR_{i0})\mathrm{d}\tau+3\sigma_0\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&-\overline{\lambda}_0\mathrm{d}\rho_r+2\sigma_0\mathrm{d}\gamma_r-\overline{P}_0\mathrm{d}\tau=0,\\
&-2iG_{i0}\mathrm{d}\rho_r-2(E_0-\overline{E}_0)\mathrm{d}\gamma_r=0,\\
&(3M_0+2iG_{i0})\mathrm{d}\rho_r+2(2E_0-iR_{i0})\mathrm{d}\gamma_r+(3P_0+2A_0)\mathrm{d}\tau-2\overline{B}_0\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&-27\nu_0\mathrm{d}\rho_r-2(3P_0+2A_0)\mathrm{d}\gamma_r+9\lambda_0\mathrm{d}\tau-3(3M_0+2iG_{i0})\mathrm{d}\overline{\tau}=0,\\
&-2(A_0-3\overline{B}_0)\mathrm{d}\gamma_r-9\lambda_0\mathrm{d}\tau+3(3M_0-4iG_{i0})\mathrm{d}\overline{\tau}=0.
\end{aligned}
\tag{600}
$$

Primeiramente devemos notar que não há soluções com dois coeficientes funcionalmente independentes. Para mostrar isto vamos supor que d $\rho_r \ \wedge$ d $\tau \ \neq \ 0$. Esta condição implica $\sigma_0 = \kappa_0 = 0$ na primeira equação. Usando esta resposta parcial nas outras equações e impondo a independência funcional obteremos novas soluções parciais, por exemplo $R_{i0} = \lambda_0 = P_0 = 0$. A solução completa do sistema é que todas as constantes devem ser necessariamente zero para satisfazer simultaneamente as equações diferenciais e a independência funcional. Porém, sabemos do final da seção anterior que esta solução não satisfaz o sistema completo das equações de Newman-Penrose. Portanto devemos descartar todas as soluções de (600) que não satisfaçam $\mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\tau = 0$.

Da mesma forma, se impormos $\mathrm{d}\gamma_0 \wedge \mathrm{d}\tau \neq 0$ a segunda equação requer $\lambda_0 = \nu_0 = 0$, e começando daqui podemos chegar na mesma conclusão: todas as constantes devem ser zero e não vão satisfazer o conjunto completo das equações de Newman-Penrose.

Sabendo que $\mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\gamma_r \wedge \mathrm{d}\tau = 0$ podemos mostrar que os outros produtos exteriores também devem ser zero. Por exemplo, supondo $\mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\gamma_r \neq 0$ podemos mostrar que os produtos exteriores

$$\sigma_0 \mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\gamma_r = \lambda_0 \mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\gamma_r = R_{i0} \mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\gamma_r = B_0 \mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\gamma_r = G_{i0} \mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\gamma_r = 0, \tag{601}$$

que implica todos estas constantes iguais a zero. Voltando às equações diferenciais, usando este resultado parcial e calculando os outros produtos exteriores chegamos à mesma conclusão: todas as constantes devem ser zero e novamente não podemos satisfazer as equações de Newman-Penrose. Um resultado análogo pode ser obtido supondo $\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} \neq 0$.

Concluímos que todos os produtos exteriores dos coeficientes são zero

$$\mathrm{d}\rho_0 \wedge \mathrm{d}\gamma_0 = \mathrm{d}\rho_r \wedge \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\gamma_0 \wedge \tau = \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\overline{\tau} = 0, \tag{602}$$

e portanto todos os coeficientes são funcionalmente dependentes de uma única variável x, que poderemos escolher igual a algum dos coeficientes (se soubermos que ele não é constante). As equações diferenciais são simplificadas em equações algébricas, substituindo as diferenciais pelas derivadas $\rho_r'(x)$, $\gamma_r'(x)$ e $\tau'(x)$ em (600).

As equações (600) possuem uma implicação ainda mais forte: todos os coeficientes são relacionadas por funções afins (possivelmente constantes).

Para mostrar isto considere primeiro que $\mathrm{d}\rho_r \neq 0$ e escolhemos $x = \rho_r$. Queremos uma solução tal que $\tau'(x)$ e $\gamma_r'(x)$ não sejam simultaneamente constantes. Se $\tau'(x)$ não é constante a primeira equação implica $\kappa_0 = \sigma_0 = 0$ e a sétima implica $\lambda_0 = P_0 = 0$. Usando estes resultados nas outras equações obtemos novamente que todas as constantes devem ser zero, e portanto não há espaço-tempo que satisfaça as equações de Newman-Penrose.

Se τ' é constante então $\gamma_r'(x)$ necessariamente não é constante. Nestes casos todos os coeficientes que multiplicam $\gamma_r'(x)$ devem ser zero, e em particular, $\lambda_0 = \kappa_0 = \sigma_0 = E_0 = R_{i0} = 0$. Novamente usando estes resultados nas equações (600) obtermos novamente que todas as constantes devem ser zero.

Se $\mathrm{d}\rho_r = 0 \neq \mathrm{d}\gamma_r$ podemos escolher $x = \gamma_r$. Para satisfazer nossas condições nestes casos todos os coeficientes de $\tau'(x)$ nas equações precisam ser zero, e portanto $\kappa_0 = \nu_0 = \sigma_0 = E_0 = R_{i0} = P_0 = 0$. Reavaliando as equações após estes resultados vamos obter de novo que todas as constantes devem ser zero.

O último caso é aquele onde $\mathrm{d}\rho_r = \mathrm{d}\gamma_r = 0$ e podemos escolher alguma das partes de τ como coordenada x, embora não faça diferença na prática. Nestes casos necessariamente $\kappa_0 = \nu_0 = P_0 = 0$, e se queremos evitar que a razão $\tau'/\overline{\tau}'$ não seja constante será preciso que as constantes sejam todas zero novamente.

Portanto as únicas soluções possíveis das equações diferenciais (600) que satisfazem o sistema completo de equações Newman-Penrose são dadas por

$$\rho_r(x) = \rho_r' x + \rho_{r0},\ \gamma_r(x) = \gamma_r' x + \gamma_{r0},\ \tau(x) = \tau' x + \tau_0,\ \mathrm{d}\rho_r' = \mathrm{d}\gamma_r' = \mathrm{d}\tau' = 0. \tag{603}$$

Usando esta solução e escrevendo o sistema em termos de matrizes temos

$$X \cdot \begin{pmatrix} \rho_r' x + \rho_{r0} \\ \gamma_r' x + \gamma_{r0} \\ \tau' x + \tau_0 \\ \overline{\tau}' x + \overline{\tau}_0 \end{pmatrix} = C \implies X \cdot \begin{pmatrix} \rho_r' \\ \gamma_r' \\ \tau' \\ \overline{\tau}' \end{pmatrix} x + X \cdot \begin{pmatrix} \rho_{r0} \\ \gamma_{r0} \\ \tau_0 \\ \overline{\tau}_0 \end{pmatrix} = C, \tag{604}$$

e lembrando a solução das equações diferenciais dividimos as equações em dois sistemas

$$X \cdot \begin{pmatrix} \rho_r' \\ \gamma_r' \\ \tau' \\ \overline{\tau}' \end{pmatrix} = 0,\ X \cdot \begin{pmatrix} \rho_{r0} \\ \gamma_{r0} \\ \tau_0 \\ \overline{\tau}_0 \end{pmatrix} = C. \tag{605}$$

Para encontrar as soluções separamos as partes reais e imaginárias, supomos que algum dos coeficientes não é constante e o escolhemos como função x, resolvemos as equações homogêneas primeiro e usamos esta solução para resolver o outro conjunto de equações não-homogêneas. Na prática usaremos Maple para resolver este sistema.

Dividimos o sistema em cinco casos: $x = \rho_r$; $\rho_r' = 0$ e $x = \gamma_r$; $\rho_r' = \gamma_r' = \tau_i' = 0$ e $x = \tau_r$; $\rho_r' = \gamma_r' = 0 \neq \tau_i'$ e $x = \tau_r$; e $\rho_r' = \gamma_r' = \tau_r' = 0$ e $x = \tau_i$. Mesmo com estas simplificações os dois primeiros casos são complicados demais para Maple resolver diretamente, mas podemos usar o comando Basis do pacote Groebner para obter as soluções.

Dos cinco casos que separamos apenas o último possui uma solução, dada por

$$
\begin{aligned}
&\alpha = 2B_{r0}(1 + 6iB_{r0}M_{i0}) - 3i\tau_i/2, && \beta = 2B_{r0}(1 - 6iB_{r0}M_{i0}) + i\tau_i/2,\\
&\gamma = -3/4B_{r0}, && \epsilon = 0,\\
&\kappa = 0, && \lambda = -1/4B_{r0} - iM_{i0},\\
&\mu = 3/4B_{r0} + iM_{i0}, && \nu = 0,\\
&\pi = -2B_{r0} + i\tau_i, && \rho = 0,\\
&\sigma = 0, && \tau = 2B_{r0} + i\tau_i.
\end{aligned} \tag{606}
$$

Porém ao usar esta solução no conjunto completo das equações e Newman-Penrose concluímos que elas não podem ser satisfeitas. Especificamente, a décima terceira, décima quarta e décima quinta equações são

$$
\begin{aligned}
&\frac{i}{2}\Delta(\tau_i) = -4 - \Phi_{12} + 24iM_{i0}B_{r0} - \frac{9i}{4}\frac{\tau_i}{B_{r0}},\\
&-i\Delta(\tau_i) = \Phi_{21} + 1,\\
&\qquad\quad 0 = 3 + \Phi_{21} + 16iB_{r0}M_{i0} - \frac{3i}{2}\frac{\tau_i}{B_{r0}},
\end{aligned} \tag{607}
$$

que só possuiria solução se $\Delta(\tau_i)$ fosse complexo.

Em todas as métricas acima que resolvem as equações de Newman-Penrose os coeficientes de conexão nos *frames* canônicos são constantes. Logo, o lado esquerdo das equações são zero e, mais importante, as componentes do tensor de Ricci também o são.

Portanto todas as métricas tipo Petrov III com simetria conforme quadridimensional são conformalmente equivalentes a métricas com simetria isométrica quadridimensional. Resta saber quais são estas métricas.

Usando o pacote Groebner podemos obter algumas das soluções das equações de Newman-Penrose. Fomos capazes de resolver todos os casos com três componentes do tensor de Ricci diferentes de zero, além de três casos mais gerais com quatro componentes do tensor de Ricci diferentes de zero,

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{12} = 0, \tag{608}$$

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{12} + \Phi_{21} = \Phi_{11} = 0, \tag{609}$$

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{12} + \Phi_{21} = \Phi_{22} = 0. \tag{610}$$

Estudando as equações também fomos capazes de obter de forma independente outras cinco soluções. No total obtivemos vinte e duas soluções distintas, que foram separadas em três grupos de acordo com o número de parâmetros livres na solução.

Por fim fomos capazes de integrar algumas das equações de estrutura para obter os *coframes* (e portanto as métricas) destas soluções. Para conseguir isto escrevemos as equações de estrutura em termos dos coeficientes de conexão,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}l = & -(\epsilon+\overline{\epsilon})l\wedge n-(\overline{\tau}-\overline{\beta}-\alpha)l\wedge m-(\tau-\beta-\overline{\alpha})l\wedge\overline{m}\\
& -\overline{\kappa}n\wedge m-\kappa n\wedge\overline{m}+(\rho-\overline{\rho})m\wedge\overline{m}, \qquad (611)\\
\mathrm{d}n = & -(\gamma+\overline{\gamma})l\wedge n+\nu l\wedge m+\overline{\nu}l\wedge\overline{m}\\
& +(\pi-\overline{\beta}-\alpha)n\wedge m+(\overline{\pi}-\beta-\overline{\alpha})n\wedge\overline{m}+(\mu-\overline{\mu})m\wedge\overline{m}, \qquad (612)\\
\mathrm{d}m = & -(\tau+\overline{\pi})l\wedge n+(\overline{\mu}+\gamma-\overline{\gamma})l\wedge m+\overline{\lambda}l\wedge\overline{m}\\
& -(\rho-\epsilon+\overline{\epsilon})n\wedge m-\sigma n\wedge\overline{m}+(\beta-\overline{\alpha})m\wedge\overline{m}. \qquad (613)
\end{aligned}
$$

Dados os coeficientes de conexão, se conseguirmos integrar estas equações podemos obtemos o *coframe* e a métrica. Como não há coordenada canônica (invariante não-constante) temos muita liberdade para escolher um sistema de coordenadas conveniente.

Uma solução interessante que obtivemos é:

$$
\begin{aligned}
&\alpha=-2iL, \qquad \beta=\pi=\tau=iL, \qquad \gamma=\frac{i}{2L}, \qquad \lambda=-\frac{5i(L^2\Phi_{22}-1)}{4L},\\
&\mu=\frac{i(5L^2\Phi_{22}-1)}{4L}, \qquad \nu=\frac{i(L^2\Phi_{22}-1)}{L^3}, \qquad \Lambda=-L^2, \qquad (614)
\end{aligned}
$$

onde omitimos os coeficientes que são zero. Esta solução é importante pois o tensor de Ricci representa uma solução física. Nominalmente, temos uma solução tipo Petrov III com constante cosmológica e radiação nula (neste caso o tensor de Ricci também está na forma canônica de Segrè).

Esta solução implica as equações de estrutura

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}l = & -2iLl\wedge(m-\overline{m}),\\
\mathrm{d}n = & \frac{i(L^2\Phi_{22}-1)}{2L^3}l\wedge(m-\overline{m})+4iLn\wedge(m-\overline{m})+\frac{i(5L^2\Phi_{22}-1)}{2L}m\wedge\overline{m},\\
\mathrm{d}m = & -\frac{5i(L^2\Phi_{22}-1)}{4L}l\wedge(m-\overline{m})-iLm\wedge\overline{m}. \qquad (615)
\end{aligned}
$$

A primeira consequência das equações acima é

$$\mathrm{d}m-\mathrm{d}\overline{m}=\mathrm{d}(m-\overline{m})=0 \implies m-\overline{m}=-i\mathrm{d}y/L, \qquad (616)$$

para alguma função/coordenada y. Para a primeira equação de estrutura temos

$$\mathrm{d}l=-2iLl\wedge(-i\mathrm{d}y/L)=2\mathrm{d}y\wedge l \implies l=3L^2\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}u, \qquad (617)$$

para outra coordenada u (obviamente funcionalmente independente de y).

A equação para a parte real de m é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{d}m + \mathrm{d}\overline{m} = \mathrm{d}(m+\overline{m}) &= -\frac{5i(L^2\Phi_{22}-1)}{2L} l \wedge (m-\overline{m}) - iL(m-\overline{m}) \wedge (m+\overline{m}) \\ &= -\frac{5(L^2\Phi_{22}-1)e^{2y}}{2} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}y \wedge (m+\overline{m}),\end{aligned} \tag{618}$$

cuja solução, para alguma coordenada x, é

$$m + \overline{m} = 2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x + \frac{5(L^2\Phi_{22}-1)\mathrm{e}^{2y}}{2}\mathrm{d}u. \tag{619}$$

A última equação diferencial é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{d}n = &\frac{3(L^2\Phi_{22}-1)\mathrm{e}^{2y}}{2L^2}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}y + 4n \wedge \mathrm{d}y \\ &- \frac{(5L^2\Phi_{22}-1)}{2L^2}\left(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x + \frac{5(L^2\Phi_{22}-1)\mathrm{e}^{2y}}{4}\mathrm{d}u\right) \wedge \mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{620}$$

cuja solução é

$$n = \mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}v + \frac{(25L^4\Phi_{22}^2 - 42L^2\Phi_{22} + 17)\mathrm{e}^{2y}}{48L^2}\mathrm{d}u + \frac{(5L^2\Phi_{22}-1)\mathrm{e}^{-y}}{6L^2}\mathrm{d}x. \tag{621}$$

O *coframe* final é

$$\begin{aligned}l &= 3L^2\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}u, \\ n &= \mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}v + \frac{(25L^4\Phi_{22}^2 - 42L^2\Phi_{22} + 17)\mathrm{e}^{2y}}{48L^2}\mathrm{d}u + \frac{(5L^2\Phi_{22}-1)\mathrm{e}^{-y}}{6L^2}\mathrm{d}x, \\ m &= \left(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x + \frac{5(L^2\Phi_{22}-1)\mathrm{e}^{2y}}{4}\mathrm{d}u\right) - i\frac{\mathrm{d}y}{2L},\end{aligned} \tag{622}$$

e podemos obter a métrica através de $g = 2l \otimes n - 2m \otimes \overline{m}$. Esta solução é importante pois o tensor de Ricci representa uma solução física.

Outras soluções também foram integradas, sempre de forma similar: procuramos combinações lineares das 1-formas do *coframe* que sejam fechadas (e linearmente independentes) e as integramos. Em seguida procuramos por formas ξ que admitem um fator integrante, $\mathrm{d}\xi = \eta \wedge \xi$, e que η seja uma combinação de diferenciais das coordenadas já encontradas, e as integramos também. Por fim tentamos resolver os sistemas de equações diferenciais para as formas restantes (lembrando que podemos fazer mudanças de coordenadas para simplificar algumas funções/formas).

Uma das soluções que integramos possui três parâmetros livres, $\gamma = i\gamma_i$ e $\tau =$

$\tau_r + i\tau_i$. O resto da solução é

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\gamma_i\overline{\tau} - i}{2\gamma_i}, & \beta &= \frac{\gamma_i\tau + i}{2\gamma_i}, & \mu &= 2i\gamma_i, & \pi &= -\overline{\tau}, \\
\Phi_{11} &= -\Lambda = \frac{\tau\overline{\tau}}{2}, & \Phi_{02} &= -\tau^2, & \Phi_{12} &= -2i\gamma_i\tau - 1, & \Phi_{22} &= 4\gamma_i^2,
\end{aligned} \tag{623}$$

onde novamente, omitimos os coeficientes que são zero. Se $\tau_r = 0$ o *coframe* obtido após a integração é

$$l = \mathrm{e}^{-2y/\gamma_i}\mathrm{d}u,\ n = \mathrm{e}^{(4\tau_i + 2/\gamma_i)y}\mathrm{d}v + 8\gamma_i x\mathrm{d}y,\ m = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \tag{624}$$

enquanto para $\tau_r \neq 0$ obtemos o *coframe*

$$l = \mathrm{e}^{-2y/\gamma_i}\mathrm{d}u,\ n = \mathrm{e}^{4\tau_r x + (4\tau_i + 2/\gamma_i)y}\mathrm{d}v + (\mathrm{e}^{4\tau_r x} - 2\gamma_i/\tau_r)\mathrm{d}y,\ m = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y. \tag{625}$$

Outra solução que conseguimos integrar, esta com dois parâmetros $\alpha = i\alpha_i$ e $\tau = i\tau_i$, é dada por

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{i\alpha_i\tau_i}{4}(\tau_i - 2\alpha_i), & \beta &= i(\alpha_i - \tau_i), & \gamma &= -\frac{i}{2\tau_i}, & \mu &= -\frac{i}{\tau_i}, \\
\rho &= \frac{i\alpha_i\tau_i}{2}(\tau_i - 2\alpha_i), & \pi &= i\tau_i, & \Lambda &= -\tau_i^2, & \Phi_{22} &= \frac{1}{\tau_i^2}, \\
\Phi_{00} &= \frac{\alpha_i^2\tau_i^2}{4}(\tau_i - 2\alpha_i)^2, & \Phi_{02} &= 2\alpha_i\tau_i, & \Phi_{12} &= -2, \\
\Phi_{01} &= \frac{\alpha_i\tau_i^2}{2}(\tau_i - 2\alpha_i), & \Phi_{11} &= \frac{\alpha_i}{2}(5\tau_i - 2\alpha_i).
\end{aligned} \tag{626}$$

Se $\alpha_i = \tau_i/2$ podemos obter o *coframe*

$$l = \mathrm{e}^{4\tau_i y}\mathrm{d}u,\ n = \mathrm{d}v - \frac{4x}{\tau_i}\mathrm{d}y,\ m = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y. \tag{627}$$

Se $\alpha_i \neq \tau_i/2$ a solução das equações de estrutura é

$$\begin{aligned}
l &= \mathrm{e}^{4\tau_i y}\mathrm{d}u + 2\alpha_i\tau_i(\tau_i - 2\alpha_i)x\mathrm{e}^{2(\tau_i - 2\alpha_i)y}\mathrm{d}y, \\
n &= \mathrm{d}v + \frac{2\mathrm{e}^{2(\tau_i - 2\alpha_i)y}}{\tau_i(\tau_i - 2\alpha_i)}\mathrm{d}y,\ m = \mathrm{e}^{2(\tau_i - 2\alpha_i)y}\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{628}$$

A última solução que integramos tem um parâmetro livre, $\mu = \mu_r$, e é dada por

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{\mu_r}, & \beta &= \frac{5}{3\mu_r}, & \epsilon &= -\frac{32}{9\mu_r^3}, & \pi &= \frac{2}{3\mu_r}, & \tau &= -\frac{2}{\mu_r}, \\
\Lambda &= -\frac{14}{3\mu_i^2}, & \Phi_{02} &= \frac{4}{3\mu_r^2}, & \Phi_{11} &= -\frac{22}{9\mu_r^2}, & \Phi_{12} &= \frac{1}{3}, & \Phi_{22} &= -\mu_r^2.
\end{aligned} \tag{629}$$

O *coframe* correspondente pode ser escrito como

$$l = \mathrm{e}^{x-v}\mathrm{d}u,\ n = \frac{9\mu_r^3}{64}\mathrm{d}v,\ m = \frac{3\mu_r}{16}(\mu_r \mathrm{e}^{x-v}\mathrm{d}u - \mathrm{d}x) + i\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}y. \tag{630}$$

Todas as soluções que integramos foram verificadas de forma independente por CLASSI. Embora nenhuma destas soluções tenham um tipo de Segrè compatível com soluções físicas simples, pode ser possível transformá-las em soluções físicas através de transformações conformes.

Por fim, as soluções sem métrica das equações de Newman-Penrose obtidas estão no apêndice A, agrupadas pelo número de parâmetros livres.

CONCLUSÃO

Nesta tese procuramos as condições necessárias para determinar quando dois espaços-tempos são conformalmente equivalentes. Foi feito um estudo de toda a teoria matemática necessária para compreender e investigar o problema e encontrar sua solução.

Revisamos a Geometria Diferencial, numa abordagem independente de sistemas de coordenadas. Em seguida introduzimos o conceito de conexão e curvatura. A Geometria Riemanniana e seu tensor métrico foram discutidos e as transformações conformes entre estas geometrias foram explicadas. A Geometria de Weyl, que desempenha papel vital na solução e a relação de sua curvatura com a da Geometria Riemanniana foi estudada.

Depois estudamos a solução do problema de equivalência de *coframes* e como usá-la para resolver o problema de G-equivalência de *coframes*. O Método de Equivalência de Cartan foi usado para resolver o problema de equivalência entre métricas.

Terminada toda essa preparação teórica, podemos finalmente resolver o problema de equivalência conforme, tema central da tese. O objetivo foi alcançado com sucesso, não apenas para os casos de interesse, mas também para todas as geometrias dadas por tensores métricos de qualquer assinatura. Também aplicamos esta solução para a busca de geometrias tipo Petrov III com máxima simetria conforme, obtendo várias soluções, uma das quais possui um significado físico simples em termos de um fluído eletromagnético nulo com constante cosmológica.

Paralelamente com a resolução do problema de equivalência, foi desenvolvido um conjunto de programas para calcular ambas as curvaturas, riemanniana e de Weyl, e suas derivadas, para testar o método na prática. O funcionamento do método e os programas associados foram verificados de forma independente pelo programa de classificação invariante CLASSI.

A solução do problema de equivalência encontrada pode ser usada para obter uma classificação conforme invariante de qualquer geometria riemanniana e descobrir se duas destas variedades são conformalmente equivalentes. Além disto, podemos usá-la para extrair algumas informações sobre a Álgebra de Killing conforme da geometria, em particular sua dimensão e a dimensão de seu subgrupo de isotropia. Não foi possível explorar a relação entre a classificação conforme e essas simetrias, assunto que deverá ser investigado posteriormente. A aplicação da classificação conforme para obter soluções das Equações de Einstein (ou qualquer outra métrica), seja ela obtida diretamente da classificação invariante ou de transformações conformes de métricas obtidas por ela, foi investigada apenas para um caso específico, e também deverá ser objeto de pesquisas futuras. Um conjunto de soluções para espaços tipo Petrov III com máxima simetrias isométrica e conforme foi obtido, mas apenas um pequeno número destas soluções foram integradas e tiveram suas métricas calculadas. As demais soluções deverão ser alvo de estudos posteriores.

REFERÊNCIAS

ÅMAN, J. E.; KARLHEDE, A. A Computer-aided Complete Classification of Geometries in General Relativity. First Results . *Physics Letters A*, Amsterdam, v. 80, n. 4, p. 229–231, December 1980.

BRANS, C. H. Invariant Approach to the Geometry of Spaces in General Relativity. *Journal of Mathematical Physics*, Maryland, v. 6, n. 1, p. 94–102, January 1965.

DEBNATH, L.; MIKUSIŃSKI, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. San Diego: Academic Press, 2005.

GARCÍA, A. A. et al. The Cotton tensor in Riemannian spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, Bristol, v. 21, n. 4, p. 1099–1118, January 2004.

GARDNER, R. B. *The Method of Equivalence and its Applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.

HALL, G. S. *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*. Singapore: World Scientific Publishing, 2004.

JIMÉNEZ, J. B.; HEISENBERG, L.; KOIVISTO, T. S. Cosmology for quadratic gravity in generalized Weyl geometry. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, Bristol, v. 2016, n. 04, p. 046, April 2016.

JOHANNESEN, S. *Smooth Manifolds and Fibre Bundles with Applications to Theoretical Physics*. Boca Raton: CRC Press, 2016.

KARLHEDE, A. A Review of the Geometrical Equivalence of Metrics in General Relativity. *General Relativity and Gravitation*, Berlin, v. 12, n. 9, p. 693–707, September 1980.

KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. New York: Interscience, 1963. v. I.

KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of Differential Geometry*. New York: Interscience, 1963. v. II.

KOUTRAS, A.; SKEA, J. E. F. An Algorithm for Determining Whether a Space-time is Homothetic. *Computer Physics Communications*, Amsterdam, v. 115, n. 2, p. 350–362, 1998.

LEE, J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. New York: Springer-Verlag, 2010.

MACCALLUM, M. A. H. et al. *Algebraic Computing in General Relativity: Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra*. Oxford: Oxford University Press, 1994. v. II.

NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. 2. ed. Bristol: IOP Publishing, 2003.

OLVER, P. J. *Equivalence, Invariance and Symmetry*. New York: Cambridge University Press, 1995.

PENROSE, R.; RINDLER, W. *Spinors and space-time Volume 1: Two-spinor calculus and relativistic fields*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

PENROSE, R.; RINDLER, W. *Spinors and space-time Volume 2: Spinor and twistor methods in space-time geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

PIRANI, F. A. E. Introduction to gravitational radiation theory. In: *Lectures on general relativity*. Brandeis: Prentice-Hall, 1964.

POLLNEY, D.; SKEA, J. E. F.; D'INVERNO, R.A. Classifying geometries in general relativity: I. standard forms for symmetric spinors. *Classical and Quantum Gravity*, Bristol, v. 17, n. 3, p. 643–663, February 2000.

POLLNEY, D.; SKEA, J. E. F.; D'INVERNO, R. A. Classifying geometries in general relativity: III. Classification in practice. *Classical and Quantum Gravity*, Bristol, v. 17, n. 15, p. 2885–2902, July 2000.

POLLNEY, D.; SKEA J. E. F. AND D'INVERNO, R. A. Classifying geometries in general relativity: II. Spinor tools. *Classical and Quantum Gravity*, Bristol, v. 17, n. 11, p. 2267–2280, May 2000.

POULIS, F. P.; SALIM, J. M. Weyl geometry and gauge-invariant gravitation. *International Journal of Modern Physics D*, Singapore, v. 23, n. 11, p. 1450091, October 2014.

ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General Relativity and Weyl Geometry. *Classical and Quantum Gravity*, Bristol, v. 29, n. 15, p. 155015, July 2012.

SANTOS, J.; REBOUÇAS, M. J.; TEIXEIRA, A. F. F. Segre types of symmetric two-tensors in n-dimensional spacetimes. *General Relativity and Gravitation*, Berlin, v. 27, n. 9, p. 989–999, 1995.

SCHOLZ, E. Weyl geometry in late 20th century physics. *arXiv preprint arXiv:1111.3220*, [S.l.], November 2011.

SCHOLZ, E. The unexpected resurgence of Weyl geometry in late 20-th century physics. *arXiv preprint arXiv:1703.03187*, [S.l.], March 2017.

SOUZA, F. J. L. *Uso de espinores na investigação do limite de Karlhede para ondas pp.* 2014. 137 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade do Estado de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares, Rio de Janeiro, 2014.

STEPHANI, H. et al. *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2003.

STEWART, J. *Advanced General Relativity*. New York: Cambridge University Press, 1991.

SZEKERES, P. The Gravitational Compass. *Journal of Mathematical Physics*, Maryland, v. 6, n. 9, p. 1387–1391, September 1965.

SZEKERES, P. Conformal tensors. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, London, v. 304, n. 1476, p. 113–122, 1968.

WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

WHEELER, J. T. Weyl geometry. *General Relativity and Gravitation*, Berlin, v. 50, n. 7, June 2018.

ZAKHARY, E.; CARMINATI, J. A New Algorithm for the Segre Classification of the Trace-Free Ricci Tensor. *General Relativity and Gravitation*, Berlin, v. 36, n. 5, p. 1015–1038, May 2004.

APÊNDICE A – Soluções Tipo Petrov III com Simetria Conforme Quadridimensional

A.1 Soluções com um parâmetro

1. Solução com $\rho = i\rho_i$

$$\epsilon = \frac{i\rho_i}{2},\ \nu = -\frac{2i}{3\rho_i},\ \Phi_{00} = \rho_i^2,\ \Phi_{12} = -\frac{1}{3}; \tag{631}$$

2. Solução com $\gamma = \gamma_r$

$$\begin{aligned} &\beta = \pi = \frac{1}{32\gamma_r}, && \lambda = -11\gamma_r, && \mu = -\gamma_r, \\ &\epsilon = \sigma = -\rho = \frac{1}{4096\gamma_r^3}, && \nu = -128\gamma_r^3, && \tau = \frac{1}{16\gamma_r}, \\ &\Phi_{02} = -\frac{1}{128\gamma_r^2}, && \Phi_{11} = -\frac{1}{256\gamma_r^2}, && \Phi_{22} = -128\gamma_r^2; \end{aligned} \tag{632}$$

3. Primeira solução com $\gamma = i\gamma_i$

$$\beta = \frac{i}{\gamma_r},\ \lambda = -\mu = \frac{i\gamma_i}{3},\ \nu = -\frac{4i\gamma_i^3}{7},\ \tau = \frac{2i}{\gamma_i},\ \Phi_{02} = \frac{4}{\gamma_r^2},\ \Phi_{12} = \frac{1}{3}; \tag{633}$$

4. Segunda solução com $\gamma = i\gamma_i$

$$\begin{aligned} &\alpha = \beta = -\frac{1}{8\gamma_i}, && \epsilon = \frac{i}{64\gamma_i^3}, && \lambda = 2i\gamma_i, && \nu = -32i\gamma_i^3, \\ &\rho = \frac{i}{32\gamma_i^3}, && \Phi_{00} = \frac{1}{1024\gamma_i^6}, && \Phi_{02} = -\frac{1}{16\gamma_i^2}, && \Phi_{22} = -12\gamma_i^2; \end{aligned} \tag{634}$$

5. Terceira solução com $\gamma = i\gamma_i$

$$\alpha = \frac{7i}{3\gamma_i},\ \lambda = -\frac{9i\gamma_i}{49},\ \mu = -\frac{i\gamma_i}{7},\ \nu = -\frac{108i\gamma_i^3}{2401},\ \pi = \frac{14i}{3\gamma_i},\ \Phi_{12} = \frac{1}{3}; \tag{635}$$

6. Quarta solução com $\gamma = i\gamma_i$

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{7i}{2\gamma_i}, && \beta = \frac{21i}{2\gamma_i}, && \epsilon = \frac{112i}{\gamma_i^3}, && \kappa = \frac{1568i}{\gamma_i^5}, && \lambda = i\gamma_i, \\ &\mu = i\gamma_i, && \nu = \frac{i\gamma_i^3}{7}, && \pi = \frac{14i}{\gamma_i}, && \rho = \frac{28i}{\gamma_i^3}, && \sigma = \frac{196i}{\gamma_i^3}, \\ &\tau = \frac{14i}{\gamma_i}, && \Lambda = -\frac{28}{\gamma_i^2}, && \Phi_{00} = \frac{6272}{\gamma_i^6}, && \Phi_{11} = -\frac{56}{\gamma_i^2}, && \Phi_{12} = -5; \end{aligned} \tag{636}$$

7. Quinta solução com $\gamma = i\gamma_i$

$$\begin{aligned}
&\alpha = -\frac{i}{64\gamma_i}, && \beta = -\frac{3i}{64\gamma_i}, && \epsilon = \frac{7i}{9216\gamma_i^3}, && \kappa = -\frac{7i}{884736\gamma_i^5}, \\
&\lambda = \frac{7i\gamma_i}{2}, && \mu = -\frac{3i\gamma_i}{2}, && \nu = -672i\gamma_i^3, && \pi = \tau = -\frac{i}{96\gamma_i}, \\
&\rho = \frac{7i}{6144\gamma_i^3}, && \sigma = \frac{7i}{18432\gamma_i^3}, \\
&\Lambda = -\frac{1}{1152\gamma_i^2}, && \Phi_{00} = \frac{7}{5308416\gamma_i^6}, && \Phi_{11} = -\frac{7}{1152\gamma_i^2}, && \Phi_{22} = -80\gamma_i^2.
\end{aligned} \tag{637}$$

A.2 Soluções com dois parâmetros

1. Solução com $\mu = i\mu_i$ e $\nu = \nu_r$

$$\beta = -\frac{i}{3\mu_i},\ \lambda = -i\mu_i,\ \tau = -\frac{2i}{3\mu_i},\ \Phi_{02} = \frac{4}{3\mu_i^2},\ \Phi_{12} = -1; \tag{638}$$

2. Solução com $\mu = i\mu_i$, $\lambda = \lambda_r - i\mu_i$

$$\alpha = -\frac{i}{\mu_i},\ \pi = -\frac{2i}{3\mu_i},\ \Phi_{12} = -1; \tag{639}$$

3. Primeira solução com $\gamma = \gamma_r$ e $\nu = \nu_r$

$$\beta = -\frac{1}{\gamma_r},\ \lambda = -\mu = \frac{\gamma_r}{3},\ \tau = -\frac{2}{\gamma_r},\ \Phi_{02} = -\frac{4}{\gamma_r^2},\ \Phi_{12} = \frac{1}{3}; \tag{640}$$

4. Primeira solução com $\gamma = \gamma_r$ e $\mu = \mu_r$

$$\alpha = -\frac{1}{2\gamma_r},\ \beta = \frac{2\gamma_r + \mu_r}{2\gamma_r\mu_r},\ \lambda = -\mu_r,\ \tau = \frac{2}{\mu_r},\ \Phi_{02} = -\frac{4}{\mu_r^2},\ \Phi_{12} = -1; \tag{641}$$

5. Segunda solução com $\gamma = \gamma_r$ e $\nu = \nu_r$

$$\alpha = -\frac{7}{3\gamma_r},\ \lambda = -\frac{49}{12}\frac{\nu_r}{\gamma_r^2},\ \mu = -\frac{\gamma_r}{7},\ \pi = -\frac{14}{3\gamma_r},\ \Phi_{12} = \frac{1}{3}; \tag{642}$$

6. Segunda solução com $\gamma = \gamma_r$ e $\mu = \mu_r$

$$\alpha = \frac{\mu_r}{2\gamma_r(\mu_r + 2\gamma_r)},\ \beta = -\frac{1}{2\gamma_r},\ \lambda = -\mu_r, \pi = \frac{2}{\mu_r + 2\gamma_r},\ \Phi_{12} = -1; \tag{643}$$

7. Primeira solução com $\gamma = i\gamma_i$ e $\nu = \nu_r - 320i\gamma_i^3/891$

$$\beta = \frac{3i}{2\gamma_i},\ \lambda = \frac{2i\gamma_i}{9},\ \mu = -\frac{4i\gamma_i}{9},\ \tau = \frac{3i}{\gamma_i},\ \Phi_{02} = \frac{9}{\gamma_i^2},\ \Phi_{12} = -\frac{1}{3}; \tag{644}$$

8. Segunda solução com $\gamma = i\gamma_i$ e $\nu = \nu_r + 2880i\gamma_i^3/75449$

$$\alpha = \frac{19i}{6\gamma_i},\ \lambda = \frac{75449\nu_r + 2880i\gamma_i^3}{12540\gamma_i^2},\ \mu = -\frac{4i\gamma_i}{19}, \pi = \frac{19i}{3\gamma_i},\ \Phi_{12} = \frac{1}{3}; \tag{645}$$

9. Solução com $\gamma = i\gamma_i$ e $\mu = i\mu_i$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{3i}{2\gamma_i - 3\mu_i}, & \beta &= \frac{i}{2\gamma_i - 3\mu_i}, \\
\epsilon &= \frac{12i}{(2\gamma_i + 3\mu_i)(2\gamma_i - 3\mu_i)^2}, & \pi = \tau &= \frac{2i}{2\gamma_i - 3\mu_i}, \\
\rho &= \frac{24i}{(2\gamma_i + 3\mu_i)(2\gamma_i - 3\mu_i)^2}, & \Lambda &= \frac{2}{4\gamma_i^2 - 9\mu_i^2}, \\
\Phi_{00} &= \frac{576}{(2\gamma_i + 3\mu_i)^2(2\gamma_i - 3\mu_i^3)^4}, & \Phi_{02} &= \frac{12}{(2\gamma_i - 3\mu_i)^2}, \\
\Phi_{01} &= \frac{48}{(2\gamma_i - 3\mu_i)^3(2\gamma_i + 3\mu_i)}, & \Phi_{12} &= \frac{2\gamma_i + 3\mu_i}{2\gamma_i - 3\mu_i}, \\
\Phi_{11} &= \frac{6(2\gamma_i + \mu_i)}{(2\gamma_i + 3\mu_i)(2\gamma_i - 3\mu_i)^2}, & \Phi_{22} &= \mu_i^2.
\end{aligned} \tag{646}$$

A.3 Soluções com três parâmetros

1. Solução com $\gamma = 0$, $\rho = i\rho_i$, $\mu = i\mu_i$ e $\tau = i\tau_i$

$$\begin{aligned}
&\alpha = -\frac{3i\tau_i}{4}, \quad \beta = -\frac{i\tau_i}{4}, \quad \lambda = -i\mu_i, \quad \nu = -\frac{i}{\rho_i}, \quad \sigma = -i\rho_i, \\
&\pi = i\tau_i, \quad \Lambda = -\tau_i^2, \quad \Phi_{12} = -1, \quad \Phi_{22} = -\frac{2\tau_i}{\rho_i};
\end{aligned} \tag{647}$$

2. Solução com $\gamma = i\gamma_i$ e $\nu = \nu_r + i\nu_i$

$$\begin{aligned}
&\alpha = \frac{3i}{2\gamma_i}, \quad \beta = \frac{i}{2\gamma_i}, \quad \mu = 2i\gamma_i, \quad \pi = \tau = -\frac{2i}{\gamma_i}, \\
&\Lambda = -\frac{4}{\gamma_i^2}, \quad \Phi_{12} = -5, \quad \Phi_{22} = \frac{4(\gamma_i^3 - \nu_i)}{\gamma_i};
\end{aligned} \tag{648}$$

3. Solução com $\gamma = i\gamma_i$, $\mu = i\mu_i$ e $\tau = i\tau_i$ (generalização da solução física)

$$\alpha = -\frac{i}{2}\frac{1+2\gamma_i\tau_i}{\gamma_i}, \qquad \beta = \frac{i}{2\gamma_i}, \qquad \lambda = i(2\gamma_i - \mu_i),$$
$$\pi = i\tau_i, \qquad \nu = -\frac{4i\gamma_i^2(2\gamma_i - \mu_i)}{2+\gamma_i\tau_i},$$
$$\Lambda = -\tau_i^2, \qquad \Phi_{12} = 2\gamma_i\tau_i - 1, \qquad \Phi_{22} = -\frac{4\gamma_i^2(3\gamma_i\tau_i - 2\mu_i\tau_i - 2)}{2+\gamma_i\tau_i}. \tag{649}$$