



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Breno Almeida da Silveira Dultra Chrispim

**Condições de contorno em AdS CFT: campos escalares e
vetoriais**

Rio de Janeiro

2017

Breno Almeida da Silveira Dultra Chrispim

Condições de contorno em AdS CFT: campos escalares e vetoriais



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães

Rio de Janeiro

2017

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

C555 Chrispim, Breno Almeida da Silveira Dultra.
Condições de contorno em AdS CFT: campos escalares e
vetoriais / Breno Almeida da Silveira Dultra Chrispim. - 2017.
160 f.

Orientador: Marcelo Santos Guimarães.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1.Teoria de campos (Física) - Teses. 2. Holografia - Teses.
3.Cromodinâmica quântica - Teses.4. Física matemática -
Teses.I. Guimarães, Marcelo Santos. I. Universidade do
Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias
Tavares.III.Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Breno Almeida da Silveira Dultra Chrispim

Condições de contorno em AdS CFT: campos escalares e vetoriais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 29 de Agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcio André Lopes Capri
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Henrique Boschi Filho
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2017

RESUMO

CHRISPIM, B. A. S. D. *Condições de contorno em AdS CFT: campos escalares e vetoriais*. 2017. 160 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

A correspondência AdS/CFT (anti-de Sitter/conformal field theory), proposta por Juan Maldacena em 1997, representa uma mudança no entendimento entre sistemas gravitacionais e teorias de campos. Precisamente ela foi proposta entre uma teoria de corda tipo *IIB* em baixas energias (supergravidade) vivendo no espaço-tempo $AdS_5 \times S^5$ e uma teoria de campos conforme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em 4 dimensões. Neste trabalho iremos explorar essa dualidade de forma simplificada. Vamos trabalhar com a afirmação de que qualquer teoria quântica de gravitação em um espaço-tempo assintótico anti-de Sitter com $d + 1$ dimensões pode ser mapeada em uma teoria de campos conforme na sua borda. O mapa holográfico (pois relaciona duas teorias, uma no interior do espaço e outra na borda) está intrinsecamente ligado às condições de contorno. Isso se deve ao fato de que para se definir a dinâmica do campo em um espaço com borda é necessário impor condições de contorno. Existe mais de uma forma de fazermos isso de modo que essa escolha deve refletir na teoria da borda. Estamos interessados em entender como o mapa holográfico funciona e para isso vamos estudar dois casos simples, o campo escalar massivo e o campo da calibre massivo. Iremos desenvolver os conceitos básicos da correspondência holográfica e então abordar cada um dos casos separadamente. Em cada um deles será desenvolvido o mapa para diferentes escolha de condições de contorno e ,por último, faremos uma comparação entre os resultados.

Palavras-chave: Correspondência AdS/CFT. Holografia. Teoria de Campos. Condições de Contorno.

ABSTRACT

CHRISPIM, B. A. S. D. *Boundary conditions in AdS CFT: scalar and vector fields.* 2017. 160 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

The AdS/CFT (anti-de Sitter/conformal field theory) correspondence, proposed by Juan Maldacena in 1997, changes the way we understand gravitational systems and field theory. Precisely it was proposed that a type *IIB* string theory in low energy (supergravity) defined in $AdS_5 \times S^5$ spacetime is equivalent to a conformal field theory $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ in 4 dimensions. In this work we will explore this correspondence in a simplified way, any quantum field theory in an asymptotically anti-de Sitter $d + 1$ spacetime can be mapped to a conformal field theory in its boundary. This map is holographic, it relates the bulk theory with a boundary theory. To define the bulk theory dynamics we need to impose boundary conditions, and because there is more than one way to do it, this information is mapped to the boundary theory. The holographic map can access the information of the boundary conditions. Using this feature we will try to understand this map studying two well known cases, the massive scalar field and the massive gauge field. The first step of this study will be to understand the basic concepts of the holographic correspondence. After that we will apply the map to each theory using distinct boundary conditions and, in the end, we will compare them.

Keywords: AdS/CFT Correspondence. Holography. Field theory. Boundary Conditions.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AdS	Anti-de Sitter
CFT	Conformal Field Theory
QCD	Quantum Chromodynamics
TQC	Teoria Quântica de Campos

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	ESPAÇO-TEMPO ANTI-DE SITTER E A TEORIA CONFORME DE CAMPOS	15
1.1	Espaço-tempo AdS_{d+1}	16
1.1.1	<u>Definição do espaço Anti-de Sitter</u>	18
1.1.2	<u>Coordenadas de Poincaré</u>	19
1.1.2.1	AdS_{d+1} Euclidiano	20
1.1.2.2	Comportamento da borda	21
1.2	Grupo conforme e AdS_{d+1}	22
1.2.1	<u>Restrições da função de 2 pontos na CFT</u>	25
2	CAMPO ESCALAR	27
2.1	Motivando a ação do campo escalar ϕ	28
2.2	Fixando a ação na borda	29
2.2.1	<u>Condições de Dirichlet</u>	31
2.2.2	<u>Condições de Neumann</u>	31
2.2.3	<u>Condições Mistas</u>	32
2.3	Correspondência AdS_{d+1}/CFT_d e o campo escalar massivo	33
2.3.1	<u>Equação de Movimento</u>	34
2.3.2	<u>Solução simplificada da equação de movimento</u>	34
2.3.3	<u>Funções de Correlação</u>	37
2.3.4	<u>Função de 1-ponto $\langle \mathcal{O}(x) \rangle$</u>	39
2.3.5	<u>Espectro de Massas e Dimensão dos Operadores</u>	41
2.3.6	<u>Extensão de operadores para Δ_-</u>	43
2.4	Diferentes condições de contorno e funções de 2-pontos $\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle$	46
2.4.1	<u>Solução completa da equação de movimento</u>	47
2.4.2	<u>Condições de Dirichlet para o campo escalar massivo</u>	51
2.4.2.1	Ação na camada de massas	51
2.4.2.2	Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu \neq 0$	56
2.4.2.3	Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = d/2$	57
2.4.2.4	Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = 0$	58
2.4.2.5	Resumo das funções de 2 pontos para condições de Dirichlet	59
2.4.3	<u>Condições de Neumann para o campo escalar massivo</u>	60
2.4.3.1	Ação na camada de massas	61
2.4.3.2	Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu \neq 0$	64
2.4.3.3	Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = 0$	65
2.4.3.4	Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = d/2$	66

2.4.3.5	Análise das funções de 2 pontos para condições de Neumann	67
2.4.4	<u>Condições Mistas para o campo escalar massivo</u>	68
2.4.4.1	Ação na camada de massas	69
2.4.4.2	Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta = 0$ com $\nu \neq 0$	76
2.4.4.3	Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta = 0$ com $\nu = 0$	78
2.4.4.4	Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta = 0$ com $\nu = d/2$	79
2.4.4.5	Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta \neq 0$ com $\nu \neq 0$	79
2.4.4.6	Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta \neq 0$ com $\nu = 0$	80
2.4.4.7	Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta \neq 0$ com $\nu = d/2$	81
2.4.4.8	Análise das funções de 2 pontos para condições Mistas	81
2.5	Conclusão e análise das funções de 2 pontos	83
3	CAMPO VETORIAL	93
3.1	Ação do campo massivo A_μ	93
3.2	Fixando a ação na borda	94
3.2.1	<u>Condições de Dirichlet</u>	95
3.2.2	<u>Condições de Neumann</u>	96
3.3	Comportamento do campo vetorial A_μ em AdS_{d+1}	96
3.3.1	<u>Solução de A_0</u>	98
3.3.2	<u>Solução de A_i</u>	99
3.3.2.1	Solução Geral	99
3.3.2.2	Solução Particular	100
3.3.2.3	Solução Completa	102
3.4	Diferentes condições de contorno e funções de 2-pontos $\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle$ 103	
3.4.1	<u>Condição de Dirichlet para o campo vetorial massivo</u>	104
3.4.1.1	Ação na camada de massas	104
3.4.1.2	Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu \neq 0$	110
3.4.1.3	Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = 0$	112
3.4.1.4	Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = d/2 - 1$	113
3.4.1.5	Análise das funções de 2 pontos para condições de Dirichlet	115
3.4.2	<u>Condição de Neumann para o campo vetorial massivo</u>	116
3.4.2.1	Ação na camada de massas	117
3.4.2.2	Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu \neq 0$	121
3.4.2.3	Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = 0$	123
3.4.2.4	Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = d/2 - 1$	124
3.4.2.5	Análise das funções de 2 pontos para condições de Neumann	125
3.5	Conclusão e análise das funções de 2 pontos	126
	CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	133
	REFERÊNCIAS	136
	APÊNDICE A – Conceitos básicos de geometria	139

APÊNDICE B – Contas auxiliares do campo escalar massivo	143
APÊNDICE C – Breve revisão do Eletromagnetismo	145
APÊNDICE D – Contas auxiliares do campo vetorial massivo	148
APÊNDICE E – Formulário	155

INTRODUÇÃO

A correspondência *AdS/CFT* relaciona uma teoria de campos quântica e a gravidade. Isso significa que um estado físico pode ser descrito por qualquer uma das teorias. Esse mapa holográfico é pouco entendido e iremos tentar entendê-lo estudando alguns casos onde a correspondência é conhecida. Mas antes vamos voltar um pouco e entender como a natureza é descrita matematicamente. A seguinte afirmação (LANCASTER; BLUNDELL, 2014) é aceita por grande parte dos físicos

Every particle and every wave in the Universe is simply an excitation of a quantum field that is defined over all space and time.

ou em tradução livre

Cada partícula e onda no Universo é simplesmente a excitação de um campo quântico que é definido em todo o espaço e tempo.

As consequências dessa ideia são vastas de modo que devemos nos focar em algumas partes importantes. Todos os sistemas, por mais complicados que sejam, podem ser descritos por campos. Esses campos, quando excitados, descrevem as partículas que são idênticas entre si. Cada elétron é excitação do mesmo campo, por isso elas são idênticas e possuem as mesmas propriedades. Um campo pode ser entendido como um tipo de mapa (ou relação) que pega uma posição no espaço tempo, descrita por coordenada x^μ ($\mu = 1, \dots, d$ onde d é a dimensão do espaço-tempo), e a transforma em um objeto que pode representar alguma amplitude ou algo que “aponte” para algum lugar. O exemplo mais simples seria o campo $\phi(x^\mu)$ que representa o valor de algum campo escalar ϕ tomado no ponto x^μ . Não podemos “enxergar” os campos, apenas medir (direta ou indiretamente) suas excitações. Essas excitações descrevem todas partículas observáveis e suas interações. A teoria quântica de campos (TQC) do modelo padrão descreve com precisão as interações eletromagnéticas, fraca e forte. No entanto existem problemas para descrever os sistemas físicos onde a interação (constante de acoplamento) é forte. Neles o calculo dos diagramas de Feynman usando expansões perturbativas perde o sentido físico. Além disso a constante de acoplamento geralmente depende das características do processo físico. Na QCD (*Quantum Chromodynamics*), que procura descrever a interação de quarks na interação forte, é possível usar abordagens perturbativas em altas energias devido a liberdade assintótica da teoria. Isso significa que pode-se usar métodos perturbativos em altas energias mas não em baixas pois ela é fortemente acoplada. Quando a escala de energia é suficientemente alta a QCD se torna aproximadamente invariante por transformações de escala. Uma teoria de campos invariante de escala é chamada de teoria de campos conforme (CFT) e elas constituem uma parte importante do estudo da teoria de campos.

Diferente do caso das CFT a física de um certo fenômeno depende da escala de energia. Quando se acessa maiores energias (distâncias menores) a física pode mudar radicalmente. Um exemplo disso é a teoria de Fermi do decaimento beta. Essa teoria procura explicar o decaimento em raios *beta* de nêutrons (MANDL; SHAW, 1993; KAPLAN,) e possui uma constante de acoplamento G_F dada por

$$G_F \sim \frac{1}{(293 \text{ GeV})^2} \sim (7 \times 10^{-17} \text{ m})^2 \quad (1)$$

Essa teoria é válida até energia de aproximadamente 293 GeV. Acima disso ela deve ser substituída pela teoria eletro-frac e que, novamente, é válida dentro de uma certa escala de energia. Cada escala de energia pede por uma teoria de campos específica para descrever as partículas interagentes, isso dificulta a descrição unificada da física por uma teoria de campos.

A descrição das interações gravitacionais proporciona outro problema para uma teoria unificada da natureza. Uma teoria de campos quânticos para descrever a gravitação parece ser impossível. Tal teoria é não-normalizável de modo que não se pode quantizar os campos gravitacionais de forma perturbativa. Isso se deve a gravitação apresentar algumas características bastante singulares. Se tentarmos acessar escalas de distância da ordem do comprimento de Planck $\ell_{pl} \sim 10^{-35}$ metros, o que necessita de energias da ordem da massa de Planck \hbar/ℓ_{pl} , inevitavelmente iremos criar buracos negros. Se tentarmos “adicionar” mais energia ao sistema iremos obter um buraco negro maior. Outro ponto vem da termodinâmica de um buraco negro (BEKENSTEIN, 2003; JACOBSON, 1996). A entropia dele se comporta como

$$S_{BH} = \frac{A}{4\ell_{pl}^2} \quad (2)$$

onde A é a área da superfície do horizonte de eventos do buraco negro. Essa relação é conhecida como entropia de Bekenstein–Hawking. Na termodinâmica, descrita por *QFT*, espera-se que a entropia seja extensiva (proporcional ao volume). No entanto se levarmos em conta os efeitos da gravidade ela é sub extensiva (proporcionalmente a área). Como entropia esta relacionada a informação então essa quantidade também é proporcional à área. No entanto uma teoria gravitacional de campos quânticos não parece ser possível. Tal teoria sempre será não renormalizável pois o espectro de energia dessa teoria, em altas energias, não se comporta como a de uma teoria de campos conforme.

Essas peculiaridades levaram ao entendimento de que o espaço-tempo deve ser reentendido sob uma nova abordagem de teoria de cordas (POLCHINSKI, 2001). A teoria de cordas consiste no entendimento de que os objetos fundamentais são extensos de modo que não podemos mais considerar as partículas fundamentais. Essas partículas pontuais seriam excitações de objetos unidimensionais chamados de cordas. Essas oscilações

permitem descrever um espectro de massas (ou energia), isso é, uma corda pode gerar um estado diferente dependendo do seu modo de oscilação. Um desses modos é o graviton que funciona como o mediador da interação gravitacional. Nesse aspecto a teoria de cordas procura explicar todas as interações fundamentais além da gravitação quântica. Um dos problemas dessa abordagem é que para que a teoria seja consistente é necessário que o espaço-tempo tenha dimensão superior à 4 (no caso de cordas supersimétricas, ou supercordas, deve-se ter 10 dimensões).

Uma conexão feita por 't Hooft deu início a uma nova forma de se entender a relação entre uma teoria de cordas e uma teoria de campos. Em 1973 (HOOFT, 1974) ele sugeriu que a QCD, com o parâmetro N do $SU(N)$ grande, deveria se comportar como uma teoria de cordas livre com constante de acoplamento $1/N$. Isso significa que uma teoria de campos e uma de cordas estão, de certa forma, ligadas uma a outra no limite $N \rightarrow \infty$. Maldacena (MALDACENA, 1999) usou isso (junto com o estudo de D -branas e buracos negros) para propor que uma teoria de corda tipo IIB em baixas energias (supergravidade) vivendo no espaço-tempo $AdS_5 \times S^5$ é equivalente a uma teoria de campos conforme $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills $SU(N)$ em 4 dimensões. Essa conjectura ficou conhecida como correspondência AdS/CFT , pois ela relaciona uma teoria de cordas no espaço AdS com uma teoria conforme de campos CFT . Essa relação pode ser entendida como um mapa que relaciona todas as simetrias (físicas ou “globais”) das duas teorias, isso é, o espaço de Hilbert delas é idêntico. Essa ideia é uma consequência do princípio holográfico que relaciona duas teorias, uma gravitacional em $d + 1$ dimensões, com outra teoria de campos em d dimensões (no caso anterior pode-se fazer uma redução dimensional e obter uma teoria de cordas em AdS_5). Esse conceito começa a surgir com 't Hooft em (HOOFT, 1993). Nele é especulado que os graus de liberdade de um certo volume do espaço-tempo é proporcional a área do horizonte de eventos. Esse conceito foi estendido por Susskind no seu trabalho (SUSSKIND, 1995) onde ele define o Princípio Holográfico. Esse princípio pode ser entendido como: A informação (ou graus de liberdade) de uma teoria de gravitação quântica em um determinado volume V_{d+1} (em $(d + 1)$ dimensões) está contida na borda desse volume $\partial V_{d+1} \equiv A_d$ (∂V_{d+1} denomina a fronteira de V_{d+1}).

A correspondência AdS/CFT , que surgiu do estudo da teoria de cordas, também se mostrou uma poderosa ferramenta. Ela permite analisar sistemas fortemente acoplados através do estudo de um sistema dual fracamente acoplado. Apesar da correspondência prover resultados aproximados, pois as teorias estudadas não representam o mundo real, ainda sim são resultados de sistemas fortemente acoplados. Esses resultados são importantes para se construir a “ideia” da física do experimento. Um exemplo disso seria o *plasma de quarks e gluons* (NATSUUME, 2015). Experimentos de colisores indicam que esse plasma se comporta como um fluido com uma pequena viscosidade de cisalhamento. Esse sistema é fortemente acoplado, o que dificulta a análise perturbativa. No entanto resultados próximos podem ser obtidos através da correspondência partindo de um bu-

raco negro e estudando a sua “viscosidade”. Outros tópicos onde aplica-se essa dualidade holográfica são sistemas com buracos negros e gravitação quântica (problema de perda de informação e não unitariedade), matéria condensada (supercondutores holográficos), entre outros (ver (RAMALLO, 2015; NATSUUME, 2015) para algumas referências).

Na correspondência *AdS/CFT* o entanto o mapa holográfico é complicado e pouco entendido. Esse mapa seria a forma no qual dois estados físicos são descritos por duas teorias em dimensões diferentes. Vamos procurar entender o mapa holográfico assim iremos tomar uma abordagem mais “simples”. Essa abordagem consiste em escrever o mínimo teórico antes de entrarmos no estudo do mapa holográfico. Isso significa que não estaremos desenvolvendo os argumentos para corroborar a dualidade *AdS/CFT*, estes podem ser vistos em trabalhos como (RAMALLO, 2015; PETERSEN, 1999). Para o propósito desse estudo a correspondência *AdS/CFT* consiste na observação que qualquer teoria quântica de gravitação em um espaço-tempo assintótico anti-de Sitter define uma teoria de campos conforme na sua borda. Podemos pensar no *AdS* como “gravidade” em uma caixa. A gravitação quântica que estamos interessados é dada por qualquer teoria que possa ser aproximada pela relatividade geral acoplada com matéria (escalar, fermion, campos de calibre e até coisas exóticas como cordas).

O mapa holográfico diz que toda a informação sobre a teoria de campos conforme que vive na borda de *AdS* está codificada pela teoria gravitacional que está no interior de *AdS*. A forma como essa informação é codificada é pouco entendida mas existem alguns pontos que mostram certos indícios de como isso ocorre.

- A formulação da teoria gravitacional é feita pela determinação da sua dinâmica através da ação junto com condições de contorno. Essas condições fixem sua variação na borda para que o princípio variacional precisa ser satisfeito. Essa fixação é feita com a adição de um termo de borda apropriado que cancela a variação não-trivial. Existe mais de uma condição de contorno que fixa a ação. Toda a informação do interior de *AdS* está codificada na sua borda por isso a teoria da borda deve ser sensível a escolha de condição de contorno. A importância desse termo foi primeiro observada em (HENNEAUX, 1998) para o caso dos campos de espinor e outros estudos procuraram entender melhor essa característica usando abordagens diferentes (ANDRADE; BANADOS; ROJAS, 2007; BOSCHI-FILHO; BRAGA, 1999; MINCES; RIVELLES, 2000).
- A correspondência permite escrever a dimensão conforme dos operadores da *CFT* em termos da massa dos campos que vivem na teoria gravitacional no interior do espaço Anti-de Sitter. No caso do campo escalar o intervalo dado por $-d^2/4 < m^2 < -d^2/4 + 1$ permite duas possíveis quantizações de campos (BREITENLOHNER; FREEDMAN, 1982b) e, devido a correspondência holográfica, duas *CFT* com dimensões conformes diferentes. O problema surge do fato que a maneira “usual” de

se obter a teoria conforme dual só leva a uma delas. Esse problema foi abordado em (KLEBANOV; WITTEN, 1999). Alguns trabalhos também procuram entender campos escalares com massa fora desse intervalo. Em especial se essa massa está fora do intervalo permitido pelo limite unitário da teoria conforme então existem soluções com *ghost* de massa. Isso é explorado em trabalhos como (ANDRADE; MAROLF, 2012; ANDRADE; FAULKNER; MAROLF, 2012).

- Outra abordagem ao entendimento do mapa holográfico consiste em montar *toy models* com o proposto em (POLCHINSKI; SUSSKIND; TOUMBAS, 1999). Nesse sistema uma bomba é detonada na origem do espaço AdS de modo a criar uma onda esférica. A informação sobre a explosão é carregada até a borda por meio dessa onda. Isso é consequência que os campos no interior de AdS (em especial os próximos da borda) são locais e só “sentem” a onda quando ela de fato atinge a borda. No entanto a correspondência holográfica afirma que os campos na proximidade da borda contem toda a informação sob o interior de AdS . Esse sistema procura entender os *precursores* que levam essa informação. Isso é abordado em trabalhos como (FREIVOGEL; GIDDINGS; LIPPERT, 2002).

Estamos interessados em entender como o mapa holográfico funciona. Para isso vamos estudar dois casos simples, o campo escalar massivo e o campo da calibre massivo e focar em desenvolver esses dois tópicos para cada um deles.

A estrutura desse trabalho será a seguinte. Vamos começar fazendo uma revisão sucinta dos tópicos importantes para o entendimento básico da correspondência holográfica no capítulo 1. A primeira parcela 1.1 será dedicada a definição do espaço Anti-de Sitter. Também será obtida as parametrizações que usaremos ao longo desse trabalho. Já na segunda parte em 1.2 faremos uma introdução rápida a simetria conforme e como ela influencia as funções de correlação que serão calculadas.

Na seção 2 iremos abordar o campo escalar na correspondência holográfica. Iremos começar motivando a ação do campo escalar em um espaço curvo em 2.1. Depois trataremos de entender a importância de fixarmos a ação na borda. Isso é especialmente importante na obtenção das equações de movimento. Depois desses pontos, em 2.3, iremos abordar o campo escalar massivo como um ponto de partida para obter informações sobre a teoria conforme na borda. Esse desenvolvimento é bastante padrão na literatura dessa área. Depois de entendermos isso passaremos ao processo de obter as diferentes funções de correlação em 2.4. Cada uma delas está associada à uma condição de contorno diferente. Finalmente na seção 2.5 faremos uma análise comparativa dos resultados obtidos e concluiremos a parte sobre o campo escalar massivo.

Na seção 3 faremos um desenvolvimento parecido ao anterior mas voltado para o campo vetorial massivo. Iremos começar com a ação que o descreve em um espaço curvo em 3.1. Depois desenvolver, de maneira similar ao campo escalar, as condições

de contorno que fixam a ação na borda. Com isso feito poderemos obter as equações de movimento e suas respectivas soluções em 3.3. Depois desse ponto iremos calcular as funções de correlação associadas a cada uma das condições de contorno em 3.4. Por último faremos uma análise comparativa em 3.5 onde também abordaremos os resultados obtidos no campo escalar.

1 ESPAÇO-TEMPO ANTI-DE SITTER E A TEORIA CONFORME DE CAMPOS

O estudo sobre a correspondência entre uma teoria de campos conforme (*CFT* em inglês) e uma teoria gravitacional vivendo no espaço Anti-de Sitter (*AdS*) é bastante vasto e o seu desenvolvimento varia dependendo do objetivo de cada trabalho. Os pontos que iremos abordar nesse trabalho são, de certa forma, os mínimos necessários para se desenvolver o mapa holográfico. Esses pontos são baseados principalmente em (AMMON; ERDMENGER, 2015). Alguns trabalho como (DOSCH, 2009; KAPLAN, ; NASTASE, 2007; NATSUUME, 2015; PETERSEN, 1999; RAMALLO, 2015) são mais apropriados para uma leitura introdutória.

Vamos começar abordando em 1.1 os conceitos básicos da relatividade geral que permitem descrever o espaço Anti-de Sitter como uma solução das equações de Einstein no vácuo e com constante cosmológica negativa. O espaço tempo Anti-de Sitter foi originalmente estudado em (SITTER, 1917b; SITTER, 1917a) e primeiramente visto no contexto correspondência da holográfica em (MALDACENA, 1999; GUBSER; KLEBANOV; POLYAKOV, 1998; WITTEN, 1998). Depois disse iremos descrever o espaço tempo *AdS* através da definição de uma hipersuperfície embutida no espaço tempo de Minkowski com d dimensões tipo espaço e 2 tipo tempo. Isso será desenvolvido na seção 1.1.1. Depois iremos abordar a parametrização (ou sistema de coordenadas) de Poincaré, junto como a sua representação Euclidiana em 1.1.2 e por último as propriedades do horizonte.

Depois de tratarmos do espaço tempo *AdS* abordaremos a teoria de campos conforme em 1.2. Um trabalho que apresenta a *CFT* (além dos citados anteriormente) com bastante precisão é (GINSPARG, 1988). Iremos expor apenas alguns tópicos apropriados e necessários para o entendimento do desenvolvimento dos próximos capítulos. Vamos começar com alguns conceitos básicos da simetria conforme sem nos preocupar em definir os geradores do grupo de Lie. Estamos interessados em desenvolver o conceito de dimensão conforme. Além disso essa simetria impõe condições bastante restritas sob a forma da função de correlação. Veremos isso em 1.2.1.

1.1 Espaço-tempo AdS_{d+1}

A ação que define a dinâmica¹ do espaço-tempo com matéria é

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + S_{\text{Matéria}}[g_{\mu\nu}, \phi] \quad (3)$$

A ação $S_{\text{Matéria}}[g_{\mu\nu}, \phi]$ leva em consideração o acoplamento do campo ϕ (que não precisa ser o campo escalar necessariamente) com a métrica do espaço-tempo. A outra ação $S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}]$ é chamada de ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica Λ . Para $d+1$ dimensões ela é²

$$S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - \Lambda) \quad (4)$$

com g , o determinante da métrica, e R é o escalar de Ricci (definido como a contração do tensor de Ricci com a métrica $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$).

A equação de Einstein, que descreve a relação entre a energia e curvatura (ou geometria), é obtida pelo princípio variacional. Fazendo a variação em relação a métrica $g_{\mu\nu}$ permite escrever

$$\frac{\delta S_{\text{EH}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa^2} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \quad (5)$$

e junto com a definição do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ como

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{Matéria}}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (6)$$

leva às equações de Einstein dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (7)$$

Essa equação relaciona um certo conteúdo de energia (lado direito dada por $T_{\mu\nu}$) com a geometria do espaço tempo (no lado esquerdo dado pelos termos relacionados a métrica). Também pode-se extrair a lei de Newton da gravitação de maneira aproximada³ com $\kappa = 8\pi G_{d+1}$ sendo G_{d+1} a constante de Newton para $d+1$ dimensões. Para descrever um sistema gravitacional sem matéria, ou soluções de vácuo, devemos tomar $T_{\mu\nu} = 0$. Isso

¹ Os conceitos mais básicos sobre geometria são abordados no apêndice A.

² Na convenção $g = \text{diag}(+, -, \dots, -)$ há um sinal negativo na frente da ação.

³ Isso pode ser feito supondo que o espaço é aproximadamente plano e que o conteúdo de matéria de não-relativístico. Esse desenvolvimento pode ser visto em (CARROLL, 1997)

leva a seguinte equação de Einstein sem massa

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (8)$$

Essa equação nos permite obter o escalar de Ricci através da definição $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$

$$R = \frac{2(d+1)}{d-1}\Lambda \quad (9)$$

e, voltando com esse resultado para a equação de movimento, obtermos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \frac{2\Lambda}{d-1}g_{\mu\nu} \quad (10)$$

O espaço tempo que satisfaz essa equação é chamado de espaço de Einstein (PETERSEN, 1999). Uma outra quantidade importante é o tensor de Riemann. Em um espaço sem torção ele mede a derivada do comutador das derivadas covariantes em relação ao seu valor no espaço plano, em outras palavras, ele mede a curvatura do espaço tempo. Ele é dado por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{d(d+1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (11)$$

Espaços que obedecem a essa relação são chamados de espaços Riemannianos. Eles também possuem o número máximo de simetrias de um espaço e por isso são ditos maximamente simétricos. Um exemplo seria o espaço de Minkowski com d dimensões. Esse espaço obedece as transformações de Lorentz e translações no espaço-tempo, essas transformações constituem o grupo de Poincaré. A relatividade especial (no qual a métrica de Minkowski é usada) obedece a esse grupo de transformações. Também sabemos da relatividade que existem d translações e $d(d-1)/2$ rotações (que incluem os *boosts*) totalizando $d(d+1)/2$ transformações possíveis. Esse é o número máximo de simetrias para um espaço de d dimensões. O tensor de Riemann indica que os espaços maximamente simétricos dependem do sinal do escalar de Ricci. Os possíveis espaços que satisfazem essas relações são (PETERSEN, 1999; AMMON; ERDMENGER, 2015)⁴.

- Variedade de Riemann
 - Euclidiano \mathbb{E}^d ($R = 0$);
 - esférico \mathbb{S}_d ($R > 0$);
 - Hiperbólico \mathbb{H}_d ($R < 0$).
- Variedade de Lorentz (pseudo-Riemann)

⁴ Outras convenções são usadas em (PETERSEN, 1999; WITTEN, 1998)

- Minkowski $\mathbb{R}^{d-1,1}$ ($R = 0$);
- de Sitter $dS^{d-1,1}$ ($R > 0$);
- Anti-de Sitter $AdS^{d-1,1}$ ($R < 0$).

1.1.1 Definição do espaço Anti-de Sitter

O espaço-tempo Anti-de Sitter é uma solução das equações de Einstein no vácuo e com constante cosmológica negativa maximamente simétrico. Podemos construir (ou definir) um espaço não-Euclidiano maximamente simétrico partindo de um espaço com $d+1$ dimensões e eliminando uma dimensão através da imposição de um condição invariante de escala (DOSCH, 2009). Isso resulta em um espaço com d dimensões que ainda possui as $d(d+1)/2$ simetrias do espaço original de $d+1$ dimensões. Essa ideia pode ser expandida da seguinte forma: o espaço AdS_{d+1} pode ser tomado como um hiperboloide dentro de um espaço plano $\mathbb{R}^{2,d}$. Esse é o espaço de Minkowski com d dimensões tipo espaço e 2 tipo tempo com coordenadas $(X^0, X^1, \dots, X^d, X^{d+1})$. A métrica desse espaço é dada por

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1), \quad \alpha, \beta = 0, \dots, d+1 \quad (12)$$

de modo que o elemento de linha fica

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{d-1} (dX^i)^2 - (dX^{d+1})^2 \quad (13)$$

Esse é o espaço plano $\mathbb{R}^{2,d}$. O hiperboloide definido nessas coordenadas que representa o espaço AdS_{d+1} é

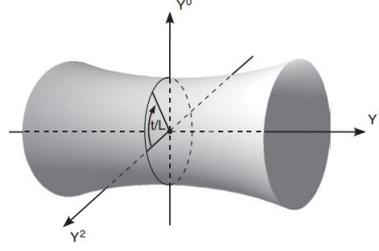
$$\eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = -(X^0)^2 - (X^{d+1})^2 + \sum_{i=1}^d (X^i)^2 = -L^2 \quad (14)$$

onde L é o raio de curvatura. A métrica induzida por esse vínculo sob as coordenadas X define o espaço-tempo Anti-de Sitter e possui as simetrias do espaço $\mathbb{R}^{2,d}$ de modo que ele obedece as transformações

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu \quad (15)$$

tal que $\Lambda^\mu{}_\nu$ são as transformações $SO(2, d)$. Uma teoria que seja construída nesse espaço deve ser invariante sob o grupo $SO(2, d)$ por construção. Uma representação pictográfica seria o espaço AdS_2 dentro do $\mathbb{R}^{1,2}$ com coordenadas X^0, X^1 e X^2 . É conveniente utilizarmos parametrizações para representar o espaço AdS . Isso facilita o desenvolvimento das contas e simplifica a observação de dois fatos. As descrições mais usuais são: Estereográ-

Figura 1 - Representação de AdS_2 com coordenadas Y^1, Y^2 e Y^3



Legenda: Grafico do hiperboloide

$$-(Y^0)^2 - (Y^3)^2 + (Y^1)^2 = -L^2.$$

Fonte: FREEDMAN; PROEYEN, 2012, p.

490

ficas (polares), Globais, Poincaré. Trataremos somente das coordenadas de Poincaré nas próximas seções e as outras podem ser encontradas em (PETERSEN, 1999; AMMON; ERDMENGER, 2015).

1.1.2 Coordenadas de Poincaré

Iremos começar introduzindo uma parametrização do hiperboloide. Definindo as novas coordenadas $t \in \mathbb{R}$ e $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ junto com $z \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$X^0 = \frac{1}{2z}(z^2 + L^2 + \mathbf{x}^2 - t^2) \quad (16)$$

$$X^i = \frac{Lx^i}{z} \quad (17)$$

$$X^d = -\frac{1}{2z}(z^2 - L^2 + \mathbf{x}^2 - t^2) \quad (18)$$

$$X^{d+1} = \frac{Lt}{z} \quad (19)$$

A restrição $z > 0$ faz com que essa parametrização cubra somente metade do espaço-tempo AdS_{d+1} . Essas mudanças resultam em uma métrica induzida dada por

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dz^2 + d\mathbf{x}^2 - dt^2) \quad (20)$$

A parte do espaço coberta por essa parametrização é ligada por uma transformação conforme com o espaço-tempo plano de Minkowski. Podemos pensar no espaço AdS_{d+1} como um espaço plano, descrito por t, \mathbf{x} mais uma direção extra distorcida dada por z . Para valores fixos de z o espaço tempo transversal é o espaço plano de Minkowski com d di-

mensões $\mathbb{R}^{1,d-1}$. Nesse sistema de coordenadas a borda do AdS_{d+1} é dada pelo espaço de Minkowski com d dimensões ($\mathbb{R}^{1,d-1}$ com coordenadas (t, \mathbf{x}) e $z = 0$) mais um ponto P em $z \rightarrow \infty$ (isso vem do fato de que $ds^2 = 0$ quando $z \rightarrow \infty$). Isso corresponde à $\mathbb{R}^{1,d-1} \cup \{\infty\}$. É possível mostrar nesse sistema de coordenadas que o escalar de curvatura e a constante cosmologia são dados por

$$R = -\frac{d(d+1)}{L^2} \quad (21)$$

$$\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2} \quad (22)$$

1.1.2.1 AdS_{d+1} Euclidiano

A métrica que foi utilizada possuía assinatura tipo Lorentz. Vamos definir agora o espaço AdS_{d+1} com assinatura Euclidiana. Para isso vamos precisar aplicar uma rotação de Wick.

Rotação de Wick:

A mudança do tempo “real” para o tempo “imaginário” é conhecida como rotação de Wick devido ao fato de estarmos realizando uma rotação de $\pi/2$, ou $i = e^{i\pi/2}$, no plano complexo do tempo. Essa transformação permite a passagem da métrica de Minkowski

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d\mathbf{x}^2 \quad (23)$$

para métrica Euclidiana

$$ds_E^2 = \delta_{\mu\nu} dx_E^\mu dx_E^\nu = dt^2 + d\mathbf{x}^2 \quad (24)$$

A ação se torna

$$S = \int d^d x \mathcal{L} = -i \int d^d x_E \mathcal{L} = i \int d^d x_E \mathcal{L}_E = iS_E \quad (25)$$

de modo que

$$S = iS_E, \quad \mathcal{L} = -\mathcal{L}_E, \quad Z = \int d\phi e^{iS} = \int d\phi e^{-S_E} \quad (26)$$

Representação Euclidiana:

Fazendo a rotação de Wick na métrica 20 e fazendo as identificações $x^0 \equiv z$ e $x^1 \equiv t$ obtemos

$$ds^2 = \frac{L^2}{(x^0)^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (27)$$

com $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d$. Essa métrica pode ser vista como o semi-plano superior $x^0 > 0$ no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{d+1} com coordenadas $x^i \in \mathbb{R}^{d+1}$. Essa definição da métrica leva as seguintes quantidades que serão usadas com frequência

$$g_{\mu\nu} = \frac{L^2}{(x^0)^2} \delta_{\mu\nu} \quad (28a)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{(x^0)^2}{L^2} \delta^{\mu\nu} \quad (28b)$$

$$\sqrt{g} = \left(\frac{L}{x^0} \right)^{-(d+1)} \quad (28c)$$

No decorrer desse trabalho usaremos essas definições com $L = 1$.

1.1.2.2 Comportamento da borda

Podemos utilizar a representação Euclidiana para explorar as características da borda do espaço Anti-de Sitter. Um desenvolvimento realizado em (WITTEN, 1998) se mostra bastante intuitivo. Seguiremos ele por hora. Vamos começar definindo uma bola aberta unitária B_{d+1} no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{d+1} com coordenadas y_0, \dots, y_d tal que

$$y^2 < 1 \quad (29)$$

Podemos compactar essa bola aberta de modo a obter uma bola fechada, \bar{B}_{d+1} , definida por

$$y^2 \leq 1 \quad (30)$$

A maneira de fazer isso é “somar” a esfera \mathbb{S}^d definida por $y^2 = 1$. Desse modo estamos somando os pontos que estão faltando para se obter a bola fechada. Essa analogia pode ser aplicada para o AdS_{d+1} . De fato os dois espaços, tanto o Anti-de Sitter quanto a bola aberta, podem ser definido pela métrica

$$ds^2 = \frac{4dy_i^2}{(1 - y^2)^2} \quad (31)$$

Essa métrica, assim como a bola aberta B_{d+1} , não se estendem até a borda ou definem uma métrica para tal. Essa definição é singular na borda em $y = 1$. Para obtermos uma métrica na borda devemos escolher uma função f definida em \bar{B}_{d+1} e que seja positiva em B_{d+1} e possua um zero de primeira ordem na borda. A escolha nesse caso seria $f = 1 - y^2$. Isso leva á seguinte métrica na borda

$$d\tilde{s}^2 = f^2 ds^2 \quad (32)$$

Essa métrica é restrita para a borda \mathbb{S}^d . Podemos notar que a escolha de f não é modificada por uma transformação conforme. Isso significa que se fizermos

$$f \rightarrow fe^w \quad (33)$$

iremos obter

$$d\tilde{s}^2 \rightarrow e^{2w} d\tilde{s}^2 \quad (34)$$

Aqui w deve ser uma função real em \bar{B}_{d+1} . O ponto que devemos adicionar no infinito para obtermos uma borda conforme, que foi comentado anteriormente, é equivalente à adição de \mathbb{S}^d para obtermos \bar{B}_{d+1} . Assim, a fronteira do AdS_{d+1} é composta pela superfície $z = 0$ mais o ponto no infinito.

1.2 Grupo conforme e AdS_{d+1}

As transformações de coordenadas, ou mapa $x \rightarrow x'$, permitidas pelo grupo conforme são tais que deixam a métrica $g_{\mu\nu}$ invariante a menos de um fator de escala positivo local. Isso é, as transformações permitidas obedecem à

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (35)$$

Esse grupo contém as transformações de Poincaré, usuais da relatividade geral, junto com a transformação de escala e as conformes especiais. Essas duas últimas são:

- Dilatações ou transformações de escala: Essa transformação é definida como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (36)$$

Como exemplo podemos fazer essa mudança na métrica definida em 31 de modo a

obter

$$ds'^2 = \frac{4dy_i'^2}{(1 - y'^2)^2} \quad (37)$$

$$= \frac{4\lambda^2 dy_i^2}{(1 - \lambda^2 y^2)^2} \quad (38)$$

Devido ao fato da métrica ser conforme podemos novamente definir uma nova função f que satisfaz $d\tilde{s}^2 = f^2 ds^2$. Isso leva à uma mesma métrica na borda. O operador que, uma vez aplicado aos elementos desse espaço, gera essa transformação é dado por $D = -ix^\mu \partial_\mu$.

- Transformações conformes especiais: Essa transformação preserva os ângulos entre dois vetores x^μ , y^μ quaisquer. A mudança sob as coordenadas é dada por

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad (39)$$

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} + \lambda^\mu \quad (40)$$

De forma equivalente podemos escrever ⁵

$$x'^\mu = \frac{x^\mu + \lambda^\mu x^2}{1 + 2\lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda^2 x^2} \quad (42)$$

Preservar ângulos significa que a quantidade $x \cdot y / \sqrt{x \cdot x y \cdot y}$ não é modificada. Podemos entender melhor essa relação se considerarmos três pontos próximos

$$\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}_1, \mathbf{x} + d\mathbf{x}_2 \quad (43)$$

e suas imagens

$$\mathbf{x}', \mathbf{x}' + d\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}' + d\mathbf{x}'_2 \quad (44)$$

O fato de uma transformação ser conforme está ligado a preservação dos ângulos no espaço-tempo, podemos escrever isso da seguinte forma

$$\frac{d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2}{\sqrt{dx_1^2 dx_2^2}} = \frac{d\mathbf{x}'_1 \cdot d\mathbf{x}'_2}{\sqrt{dx_1'^2 dx_2'^2}} \quad (45)$$

⁵ A relação entre as duas definições 39 e 42 se da por

$$x'^2 = \frac{x^2}{1 + 2\lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda^2 x^2} \quad (41)$$

mas levando em conta 39

$$\frac{x'^2 dx'^\mu - 2\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' x'^\mu}{(x'^2)^2} = \frac{x^2 dx^\mu - 2\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} x^\mu}{(x^2)^2} \quad (46)$$

$$\frac{d\mathbf{x}'_i \cdot d\mathbf{x}'_j}{x'^4} = \frac{d\mathbf{x}_i \cdot d\mathbf{x}_j}{x^4}, \quad i, j = 1, 2 \quad (47)$$

que está de acordo com o esperado. Essa transformação também pode ser entendida como uma sucessão de transformações, primeiro se toma uma inversão seguida de uma translação e por fim outra translação. O operador associado a ela é $K_\mu = 2x_\mu D - x^2 P_\mu$.

Essas transformações introduzem novas formas de representar os elementos desse espaço. Objetos definidos sob transformações de Poincaré podem ser chamados de escalares, vetores, tensores etc. Se uma certa quantidade é invariante sob transformações ela é chamada de escalar, por exemplo. Os campos que estaremos estudando nesse trabalho são autofunções do operador de escala D e com autovalor $-i\Delta$. Essa quantidade é chamada de dimensão conforme do campo e é uma nova propriedade dos objetos que vivem no espaço conforme. Essa transformação pode ser escrita como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \lambda^\Delta \phi(\lambda x) \quad (48)$$

As transformações do grupo conforme atuam sob esse elemento. Em especial o operador de translação espacial aumenta a dimensão conforme enquanto que o de transformação conforme especial diminui-o. O campo não pode ter a sua dimensão diminuída infinitamente, ele deve possuir uma dimensão mínima para que seja unitário. Para o campo escalar livre essa dimensão é

$$\Delta \geq \frac{d-2}{2} \quad (49)$$

Atuar com o operador que diminui a dimensão conforme nesse caso leva à um resultado nulo. Operadores que são aniquilados dessa forma são chamados de primários. Esse operadores primários são classificados pela sua representação no grupo de Lorentz (escalar, vetor etc) junto com a sua dimensão de escala Δ (e todas as dimensões que podem ser obtidas subindo/diminuindo ela). Nesse sentido um campo escalar é um campo que se transforma como um escalar sob as transformações de Poincaré e possui uma certa dimensão Δ . O mesmo ocorre para um campo vetorial e assim por diante.

1.2.1 Restrições da função de 2 pontos na *CFT*

A teoria de campos conforme definida na borda de AdS_{d+1} impõe restrições sobre a forma da função de correlação (AMMON; ERDMENGER, 2015; FRANCESCO; MATHIEU; SÉNÉCHAL, 1997). Essas restrições determinam a forma das funções de 2- e 3-pontos a menos de alguns parâmetros. Vamos ver como isso ocorre.

A invariância da ação, $\delta S = 0$, sob transformações conforme em nível clássico levam as identidades de Ward para as funções de correlação da forma

$$\sum_{i=1}^n \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \cdots \delta \phi_i(x_i) \cdots \phi_n(x_n) \rangle = 0 \quad (50)$$

onde $\delta \phi$ é uma transformação infinitesimal conforme. Em particular pode-se escrever a identidade de Ward para dilatações

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i^\mu \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + \Delta_i \right) \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \cdots \phi_i(x_i) \cdots \phi_n(x_n) \rangle = 0 \quad (51)$$

onde Δ_i é a dimensão de escala do campo ϕ_i . Essa identidade de Ward associada a dilatações impõe restrições sob a forma da dependência da função de correlação. Essa relação se traduz em ⁶

$$\langle \phi_1(\lambda x_1) \cdots \phi_n(\lambda x_n) \rangle = \lambda^{-\Delta_1} \cdots \lambda^{-\Delta_n} \langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \rangle \quad (52)$$

Se usamos essa relação a função de 2 pontos para dois operadores escalares ϕ_1 e ϕ_2 com

⁶ Podemos ver através de um exemplo que essas relações são idênticas. Seja $f(x, y)$ uma função homogênea de ordem n

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Agora fazendo a derivada em relação à t temos

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx, ty) = nt^{n-1} f(x, y)$$

definindo $x' = xt$ e $y' = yt$

$$nt^{n-1} f = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} = x \frac{\partial f}{\partial x'} + y \frac{\partial f}{\partial y'} = x \frac{\partial f}{\partial xt} + y \frac{\partial f}{\partial yt}$$

tomando $t = 1$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$$

dimensão escalar Δ_1 e Δ_2 se transformam como

$$\langle \phi_1(\lambda x_1) \phi_2(\lambda x_2) \rangle = \lambda^{-\Delta_1 - \Delta_2} \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle \quad (53)$$

ou de outra forma

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \phi_1(\lambda x_1) \phi_2(\lambda x_2) \rangle \quad (54)$$

Agora como a função de correlação $\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle$ só pode depender de $(x_1 - x_2)^2$ devido a invariância de Poincaré (invariância sob rotação e translação), ou seja

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|) \quad (55)$$

comparando com o resultado anterior tem-se que $f(x) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\lambda x)$. Isso leva à

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{C_{\phi_1 \phi_2}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad (56)$$

onde $|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}$ é a abreviação de $((x_1 - x_2)^2)^{(\Delta_1 + \Delta_2)/2}$. Além dessa limitação quando se leva em conta a invariância sob transformações de escala especiais tem-se que essa função de 2 pontos é nula para $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Assim operadores escalares com dimensão $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ devem possuir a seguinte forma para a função de 2 pontos:

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{C}{|x - y|^{2\Delta}} \quad (57)$$

Agora que temos o resultado esperado podemos comprar com os obtidos. O operador dual no caso do campo vetorial é uma corrente na teoria conforme, isso impõem condições extras sobre a função de 2 pontos. Não iremos deduzir essa relação. No caso do campo vetorial têm-se

$$\langle J_i(x) J_j(y) \rangle = \frac{C'}{|x - y|^{2\Delta'}} \left(\delta_{ij} - 2 \frac{(x - y)_i (x - y)_j}{|x - y|^2} \right) \quad (58)$$

Onde Δ' é a dimensão do operador $J_i(x)$. Devido a simetria de calibre essa corrente deve ser conservada na borda o que implica que $\Delta' = d - 1$. Isso pode ser visto de forma simples com

$$\left\langle \frac{\partial J_i(x)}{\partial x_i} J_j(y) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle J_i(x) J_j(y) \rangle \quad (59)$$

$$= 2(\Delta' - d + 1) C' \frac{(x - y)_j}{|x - y|^{2\Delta' + 2}} \quad (60)$$

Para que isso seja nulo devemos impor $\Delta' = d - 1$.

2 CAMPO ESCALAR

O campo escalar é um exemplo útil no estudo da correspondência AdS_{d+1}/CFT_d . Isso se deve ao fato de que o entendimento matemático de como a correspondência pode ser utilizada para se obter informação sobre a teoria de campos conforme na borda é bastante direta. Além disso o operador da teoria dual na borda é bem entendido dentro da CFT como vimos no capítulo anterior. Até esse ponto não especificamos como a correspondência é aplicada matematicamente, isso é, qual a prescrição exata da dualidade holográfica. Vamos ver que isso é feito de maneira relativamente intuitiva no decorrer do desenvolvimento desse capítulo. Mas antes disso vamos definir precisamente o sistema gravitacional que iremos estudar.

O sistema que estamos interessados em estudar é dado por um campo escalar massivo dentro do Anti-de Sitter. Vamos começar desenvolvendo a ação que o define no espaço curvo (seção 2.1) para depois utilizar o princípio variacional (iremos fazer uma análise dele voltada para a fixação da ação através das diferentes condições de contorno no AdS_{d+1} na seção 2.2). Na seção 2.3 iremos solucionar as equações de movimento de forma aproximada e utiliza-la para entender a prescrição holográfica, como se obtêm funções de correlação e o espectro de massas permitido. Depois desse desenvolvimento introdutório usaremos esses conceitos em 2.4 para se obter as diferentes funções de correlação associadas as diferentes condições de contorno. As condições abordadas são Dirichlet (seção 2.4.2), Neumann (seção 2.4.3) e uma combinação linear dessas ultimas duas chamada de condições mistas (seção 2.4.4). Isso permitirá a análise comparativa das funções de correlação na seção 2.5.

O desenvolvimento desse capítulo será feito considerando a representação em coordenadas de Poincaré na sua versão Euclidiana do espaço Anti-de Sitter com $d + 1$ dimensões que abrange somente o semi-plano superior. Vamos tomar o raio de curvatura $L = 1$ pois não há vantagens em carregá-lo nas contas. Também tomaremos $x^0 = z$ quando for conveniente. Isso faz com que o elemento de linha que havíamos definido na equação 27 fique como

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dz^2 + (dx^i)^2) \quad (61)$$

e as definições da métrica dadas por 28 tomem a forma

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{z^2}\delta_{\mu\nu} \quad (62a)$$

$$g^{\mu\nu} = z^2\delta^{\mu\nu} \quad (62b)$$

$$\sqrt{g} = z^{-(d+1)} \quad (62c)$$

É importante ressaltar que usaremos com bastante frequência as definições 62 e que muitas das passagens que utilizarem elas serão deixadas implícitas para não estenderem as contas. Também deve-se notar que será comum escrever $x^i = \mathbf{x}$ com $i = 1, 2, \dots, d$ para evitar de carregar muitos índices nas contas.

2.1 Motivando a ação do campo escalar ϕ

O campo que estudaremos nessa seção é definido como um objeto que se comporta como um escalar sob as transformações de Poincaré e possui uma dimensão de escala Δ . Esse conceito foi explorado em 1.2 e iremos nos limitar a chamá-lo de campo escalar nesse sentido mais geral.

Uma forma de se motivar uma ação em um espaço curvo é iniciar com a ação em um espaço plano e modifica-la. Iremos seguir (DOSCH, 2009) nesse sentido. A ação que descrever um campo escalar com massa m no espaço plano de Minkowski ($d + 1$) é

$$I[\phi, \partial\phi] = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 \right) \quad (63)$$

Aqui escrevemos $I[\phi, \partial\phi]$ para deixar claro a dependência da ação no campo e sua derivada primeira. No decorrer do capítulo escreveremos simplesmente $I[\phi]$ ou I . A ação é definida como a integral em todo o espaço-tempo da Lagrangiana $\mathcal{L}[\phi]$. As seguintes modificações permitem que a ação leve em conta a geometria não-Euclidiana

- $\eta^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}(x^\mu)$, a métrica com dependência no espaço tempo permite descrever efeitos de curvatura;
- $d^d x \rightarrow d^d x \sqrt{g}$ (raiz quadrada do determinante da métrica) Esse é um elemento de volume invariante sob transformações no espaço não-Euclidiano⁷;
- $\partial \rightarrow D$ (derivada covariante) Aqui, felizmente, não precisamos nos preocupar pois um escalar não é afetado pelos termos extras da derivada covariante.

Fazendo essas modificações na ação 63 obtemos

$$I[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2 \right) \quad (64)$$

Essa ação descreve um campo escalar massivo $\phi(x^\mu)$, onde $x^\mu = (x^0 \equiv z, \mathbf{x} \equiv x^i)$ ($i = 1, \dots, d$) em AdS_{d+1} uma vez que definimos a métrica na representação do AdS_{d+1} Euclidiano do semi-plano superior.

⁷ No caso $\det g_{\mu\nu} < 0$ tem-se $d^d x \sqrt{-g}$

2.2 Fixando a ação na borda

A dinâmica de um campo é definida pela sua equação de movimento. Para se obter tais equações é necessário aplicar o princípio variacional. Vamos ver como isso ocorre resumidamente. A ação para um campo escalar $\phi(z, \mathbf{x})$ pode ser escrita de maneira geral como

$$I = \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Aqui \mathcal{M} se refere a uma variedade (ou espaço-tempo) onde a integral é realizada. No caso do espaço-tempo $\mathcal{M} = AdS_{d+1}$ o intervalo de integração é $-\infty \leq x^i \leq \infty$ e $z > 0$ e o elemento infinitesimal dado por $d^{d+1}x = dz d\mathbf{x} = dz dx^1 dx^2 \cdots dx^d$. Essa definições são consequência da escolha de parametrização com coordenadas de Poincaré na versão Euclidiana feita em 1.1.2. Quando tratamos da variedade $\partial\mathcal{M} = \partial AdS_{d+1}$ estamos nos referindo a borda do espaço anti-De Sitter que possui d dimensões de modo que $d^d x = d\mathbf{x} = dx^1 dx^2 \cdots dx^d$. É importante ressaltar que a métrica é divergente na borda de modo que será necessário tomar um cuidado especial. Variando essa ação sob valores infinitesimais do campo ϕ obtemos

$$\delta I = \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta(\partial_\mu \phi) \right) \quad (65)$$

Usando o que $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta \phi)$ permite realizar uma derivação por partes e escrever

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu(\delta \phi) \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi \right) \end{aligned} \quad (66)$$

Organizando os termos leva à

$$\delta I = \underbrace{\int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right)}_{\text{Euler-Lagrange}} \delta \phi + \underbrace{\int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right)}_{\text{Termo de Borda}} \quad (67)$$

A primeira parte é chamada de equações de Euler-Lagrange e o segundo termo é conhecido de forma geral como termo de borda. Podemos ver isso do fato de que ele é a integral de uma derivada total. Usualmente ele seria nulo pois o seu resultado seria simplesmente o valor dos campos no infinito. Mas esse não é o caso para um espaço com borda. Vamos

desenvolver esse argumento com

$$\begin{aligned}\delta B &= \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \left[\partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \delta \phi \right) + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \phi} \delta \phi \right) \right]\end{aligned}\quad (68)$$

onde $\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial z}$ e $i = 1, 2, \dots, d$. Os termos com derivadas espaciais ∂_i são nulas pois o nosso espaço não tem limite nessas direções espaciais. Vamos definir um vetor normal à ∂AdS_{d+1} que será útil como $n^\mu(x_0) = (-x_0, \mathbf{0})$ ⁸. Esse vetor, como a métrica, é singular em $z = 0$. O termo de borda pode ser escrito da seguinte forma

$$\delta B = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \left(n_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \delta \phi \right) \Big|_{x^0=0} \quad (69)$$

onde indicamos que os valores devem ser tomados em $z = 0$. O processo exato de como isso ocorre será visto no decorrer do desenvolvimento do texto. Podemos ver aqui que se o nosso espaço não possui borda então esse termo seria trivialmente nulo pois apenas os termos ligados a coordenada da borda $x^0 = z$ aparecem. Se esse termo for nulo então podemos escrever o princípio variacional como

$$\frac{\delta I}{\delta \phi} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) = 0 \quad (70)$$

e obter as equações de Euler-Lagrange que, uma vez solucionada, resulta na equação de movimento para o campo escalar massivo no interior do espaço Anti-de Sitter. O termo de borda B deve ser nulo para que o princípio variacional $\delta I = 0$ seja satisfeito. Normalmente podemos tratar desse termo de duas formas diferentes. Primeiro é dizer que esse termo é nulo no infinito impondo condições de contorno. O outro seria subtrair esse termo da nossa ação como um contra termo. A escolha de qual método usar depende da ação em si e de qual condição de contorno queremos usar. Por exemplo a ação 64 leva à um termo de borda dado por

$$\begin{aligned}\delta B &= \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \left(\sqrt{g} n_0 \partial^0 \phi \delta \phi \right) \Big|_{x^0=0} \\ &= - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \left(z^{-d+1} \partial_0 \phi \delta \phi \right) \Big|_{z=0}\end{aligned}\quad (71)$$

⁸ De forma geral esse vetor normal unitária é dado por

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu}}} \partial_\nu \rightarrow n^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \partial_0 = \frac{z}{L} \partial_0$$

onde estamos tomando esse valores na borda em $x^0 \equiv z = 0$. Podemos ver aqui que se o nosso espaço não possui borda então esse termo seria trivialmente nulo pois apenas os termos ligados a coordenada da borda $x^0 = z$ aparecem. Vamos entender como é possível fixar essa variação impondo diferentes condições de contorno para depois calcularmos a equação de movimento na próxima seção.

2.2.1 Condições de Dirichlet

A maneira mais intuitiva é impor condições de Dirichlet sob o campo ϕ . Essa condição é descrita como

$$\delta\phi\Big|_{z=0} = 0 \tag{72}$$

Isso significa que o campo é fixo na borda de AdS_{d+1} em $z = 0$ e o termo B é naturalmente zero sem nenhuma modificação na ação. Desse modo podemos definir um sistema consistente com a ação 64 junto com a condição $\delta\phi\Big|_{z=0} = 0$. O fato de termos fixado a ação na borda não significa que ela é nula. De fato essa ação na borda será de suma importância para a correspondência AdS/CFT como será visto a frente.

2.2.2 Condições de Neumann

Outra forma de fixar as condições de contorno na borda é impor condições de Neumann. Essa imposição diz sob a variação da derivada do campo. Primeiro vamos considerar um vetor unitário que é perpendicular a borda apontando para dentro, $n^\mu(x_0) = (-x_0, \mathbf{0})$, que foi definido anteriormente. A projeção da derivada do campo na borda $x_0 = \epsilon$ pode ser escrita como

$$n^\mu(\epsilon)\partial_\mu\phi \equiv \partial_n\phi \tag{73}$$

e fixar o seu valor significa

$$\delta(\partial_n\phi)\Big|_{z=0} = 0 \tag{74}$$

Essa condição não torna o termo de borda δB nulo de modo que a nossa variação da ação $\delta I \neq 0$. Para se obter uma ação estacionária temos que subtrair um termo que compense o termo de borda. Esse termo é tal que ele deve cancelar a variação da ação 64. Vamos começar dividindo essa nova ação em duas partes, uma a ação dada por I em 64, outra

pela parte que deve ser acrescida para tornar I estacionaria

$$I_N = I + I_S \quad (75)$$

Fazendo a variação obtemos

$$\delta I_N = \delta I + \delta I_S \quad (76)$$

Colocando $\delta I_N = 0$ leva à

$$\delta I_S = -\delta I \quad (77)$$

A parte que sobrevive em δI em ∂AdS_{d+1} é dada por δB . Isso significa que se redefinir a ação como

$$\begin{aligned} I_N &= I + B \\ &= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} \phi n_0 \partial^0 \phi \end{aligned} \quad (78)$$

iremos obter $\delta I_N = 0$. É importante notar que o termo adicional é tomada estritamente na borda ∂AdS_{d+1} de modo que ele não altera a equação de movimento.

2.2.3 Condições Mistas

Também é possível introduzir condições de contorno que consistem de uma combinação linear das condições de Dirichlet e Neumann (MINCES; RIVELLES, 2000). Essa combinação é dada por

$$\phi(x) + \alpha n^\mu \partial_\mu \phi(x) \equiv \psi^\alpha(x) \rightarrow \delta[\psi^\alpha(x)] = 0 \quad (79)$$

Temos que α não é um índice da convenção de somatório, ele é um coeficiente real arbitrário não nulo. Essa condição de contorno, como na caso das condições de Neumann, não torna a ação 64 estacionaria. Para que isso aconteça temos de fazer um processo similar ao feito no caso anterior e adicionar um termo a nossa ação. Vamos olhar novamente para a variação da ação e do termo que devemos adicionar I_S

$$\delta I_M \equiv \delta(I + I_S) = \underbrace{\int_{\mathcal{M}} d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \right)}_{\text{Euler-Lagrange}} \delta\phi + \underbrace{\int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi \right)}_{\text{Termo de Borda}} + \delta I_S \quad (80)$$

A condição de contorno 79 é imposta sob uma combinação, isso é $\delta\phi + \alpha\delta(n^\mu\partial_\mu\phi) = 0$, de modo que a melhor maneira de impor essa condição é escolher I_S tal que essa combinação apareça.

$$\begin{aligned}\delta I_M^{on-shell} &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\rho \phi \delta\phi) + \delta I_S \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu [\sqrt{g} \partial^\rho \phi (\delta\phi + \alpha\delta(n^\mu\partial_\mu\phi))] \\ &= \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu [\sqrt{g} \partial^\rho \phi \delta\psi^\alpha] \\ &= 0\end{aligned}$$

onde escolhemos

$$I_S^\alpha = \frac{\alpha}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi n^\rho \partial_\rho \phi) \quad (81)$$

A nova ação fica

$$I_M[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \frac{\alpha}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi n^\rho \partial_\rho \phi) \quad (82)$$

Essa ação junto com as condições mistas definem uma ação estacionária na borda.

2.3 Correspondência AdS_{d+1}/CFT_d e o campo escalar massivo

Nessa seção iremos introduzir os conceitos básicos da correspondência holográfica utilizando o campo escalar massivo. O primeiro passo que iremos abordar é a obtenção da equação de movimento utilizando as equações de Euler-Lagrange. As diferentes formas de se fixar a ação para que o princípio variacional seja válido foram vistos na seção anterior. Depois de obtermos a equação de movimento partiremos para a sua solução através das funções de Bessel modificadas. Isso permitirá definir os conceitos básicos da prescrição holográfica na seção 2.3.3. Além disso iremos desenvolver a relação entre a dimensão conforme dos operadores da CFT e a massa dos campos do interior de AdS obtida da dualidade holográfica. Alguns trabalhos importantes nessa seção são (RAMALLO, 2015; DOSCH, 2009; BREITENLOHNER; FREEDMAN, 1982b; KLEBANOV; WITTEN, 1999; AMMON; ERDMENGER, 2015; PETERSEN, 1999).

2.3.1 Equação de Movimento

Vimos na seção 2.2 que o princípio variacional pode ser aplicado desde que seja levado em conta as condições de contorno e possíveis modificações na ação. Essa modificação não altera a forma da equação de movimento pois todos os termos adicionados são tomados na borda do sistema. As equações de Euler-Lagrange na Lagrangiana definida em 64 podem ser utilizadas sem problemas. A equação de Euler-Lagrange para o campo escalar ϕ dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) = 0 \quad (83)$$

resulta na seguinte equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\rho [\sqrt{g} \partial^\rho \phi] - m^2 \phi = 0 \quad (84)$$

que usando $\nabla_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu$ e $\nabla^\mu \equiv \sqrt{g} \partial^\mu$ fica na forma

$$(\nabla_\rho \nabla^\rho - m^2) \phi = 0 \quad (85)$$

Uma comparação que pode ser feita é entre essa equação (que é válida para espaços curvos) e a equação de movimento para o campo escalar em espaço plano (DOSCH, 2009). No caso plano utilizamos 83 em 63 para obter

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2 = 0 \quad (86)$$

Escrevendo 84 de uma forma similar a esta

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu}) \partial_\nu \phi \quad (87)$$

permite entender que a modificação que a interação com a gravidade faz na equação de movimento é a adição do termo $-\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu}) \partial_\nu \phi$. Se a métrica for plana esse termo é trivialmente nulo.

2.3.2 Solução simplificada da equação de movimento

O comportamento do campo escalar nas proximidades da fronteira de AdS_{d+1} é bastante importante no estudo da correspondência pois estamos interessados em relacionar os campos perto da borda com os operadores que vivem na borda. No capítulo 2.3.1 foi calculado a equação de movimento para o campo escalar massivo 84 dada por $(\nabla_\rho \nabla^\rho -$

$m^2\phi = 0$. Usando as definições 62 e lembrando que $\partial_\mu \equiv (\partial_0 \equiv \partial_z, \partial_i)$ onde $i = 1, \dots, d$ podemos escrever essa equação na forma

$$z^{d+1}\partial_z[z^{-d+1}\partial_z\phi] + z^2\partial_i\partial_i\phi - m^2\phi = 0 \quad (88)$$

$$z^2\partial_z\partial_z\phi + (1-d)z\partial_z\phi + z^2\partial_i\partial_i\phi - m^2\phi = 0 \quad (89)$$

O primeiro passo é fazer a transformada de Fourier do campo $\phi = \phi(z, x^i)$ em sua coordenada x^i dada por

$$\phi(z, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \phi_k(z) \quad (90)$$

onde usamos $\phi(k, x^i) \equiv \phi_z(x^i)$ e $k \cdot x = k_i x^i$. Isso significa que estamos expandindo o nosso campo em modos normais k e depois somando (integrando) sob todos os modos. A equação de movimento para $\phi_k(z)$ é fica como

$$z^2\partial_z\partial_z\phi_k(z) + (1-d)z\partial_z\phi_k(z) - z^2k^2\phi_k(z) - m^2\phi_k(z) = 0 \quad (91)$$

onde $k^2 = k_i k_i$. É importante notar que fizemos apenas a transformação da coordenada x^i para $i = 1, 2, \dots$, isso é, deixamos de fora a coordenada z que é a que leva a borda de AdS_{d+1} . Podemos usar o seguinte ansatz

$$\phi_k(z) \sim z^\Delta \quad (92)$$

para obtermos o comportamento do campo $\phi_k(z)$ nas proximidades da borda $z = 0$ (a forma exata da solução será estudada em 2.4.1). Substituindo na equação de movimento 152 obtemos

$$\Delta(\Delta - d)z^\Delta - k^2 z^{\Delta+2} - m^2 z^\Delta = 0 \quad (93)$$

O termo $z^{\Delta+2}$ vai a zero mais rapidamente que z^Δ quando $z \rightarrow 0$. Isso significa que o termo z^Δ é dominante e que podemos descartar o termo $z^{\Delta+2}$ pois estamos interessados no comportamento assintótico. Isso leva a seguinte equação para Δ

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 \quad (94)$$

onde as soluções são

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2} \quad (95)$$

É conveniente definir o seguinte parâmetro

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2} \quad (96)$$

de modo que as soluções Δ_{\pm} ficam na forma simplificada

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \nu \quad (97)$$

Com isso podemos escrever a solução para o campo $\phi_k(z)$ nas proximidades da borda em $z = 0$ como

$$\phi_k(z) \approx A(k)z^{\Delta_+} + B(k)z^{\Delta_-} \quad (98)$$

Usando o fato de que $\Delta_+ + \Delta_- = d$ e a definição 96 podemos escrever

$$\phi_k(z) \approx A(k)z^{\Delta_+} + B(k)z^{d-\Delta_+} \quad (99)$$

Essas diferentes formas de se escrever a potencia em z são uteis quando analisarmos os diferentes domínios de ν . Fazendo a transformação de Fourier inversa em $\phi_k(z)$ nos leva à

$$\phi(z, x) \approx A(x)z^{\Delta_+} + B(x)z^{d-\Delta_+} \quad (100)$$

A nossa solução é composta de duas contribuições, uma vinda de $z^{\Delta_- = d - \Delta_+ = \frac{d}{2} - \nu}$ e outra de $z^{\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu}$ para $\nu \neq 0$. Como $\Delta_- = d - \Delta_+ < \Delta_+$ pode-se dizer que os termos ligados à Δ_- possuem um decaimento lento quando comparado com o decaimento de Δ_+ . Isso é $\lim_{z \rightarrow 0} z^{\frac{d}{2} + \nu}$ decai mais rapidamente do que $\lim_{z \rightarrow 0} z^{\frac{d}{2} - \nu}$. Esse fato faz com que seja usual a seguinte nomenclatura

$$\begin{array}{l} \text{Decaimento Rápido} \\ \text{Decaimento Lento} \end{array} \left| \begin{array}{l} z^{\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu} \quad A(x) \\ z^{\Delta_- = \frac{d}{2} - \nu} \quad B(x) \end{array} \right.$$

Precisamos entender como esse campo está relacionado com o operador na borda dentro da correspondência AdS_{d+1}/CFT_d e para isso vamos desenvolver a prescrição holográfica na próxima seção.

2.3.3 Funções de Correlação

A relação conhecida como prescrição GKP-Witten (WITTEN, 1998; GUBSER; KLEBANOV; POLYAKOV, 1998) é

$$Z_{CFT_d} = Z_{AdS_{d+1}} \quad (101)$$

Vamos entender o que cada lado dessa relação significa e como podemos obter funções de correlação Euclidianas

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle. \quad (102)$$

Z_{CFT_d}:

Uma teoria de campos pode-se dizer "resolvida" se todas as funções de correlação (ou funções de N pontos) forem obtidas. Isso se deve ao fato de que através dessas funções é possível obter informações físicas mensuráveis como as propriedades de espalhamento de partículas fundamentais. Essas funções são calculadas partindo-se da função geradora que é obtida fazendo-se uma perturbação na lagrangiana

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + J(x)\mathcal{O}(x) \equiv \mathcal{L} + \mathcal{L}_J \quad (103)$$

onde $J(x)$ são funções arbitrárias (chamadas de "fontes") e $\mathcal{O}(x)$ são os operadores locais. O funcional gerador fica na forma

$$Z_{CFT}[J] = \left\langle \exp \left[\int \mathcal{L}_J \right] \right\rangle_{CFT} \quad (104)$$

As funções de correlação são obtidas fazendo-se a derivada funcional de Z e depois tomando $J = 0$

$$\left\langle \prod_i \mathcal{O}(x_i) \right\rangle = \prod_i \frac{1}{J(x_i)} \log Z_{CFT}[J] \Big|_{J=0} \quad (105)$$

Z_{AdS_{d+1}}:

Vamos considerar um campo qualquer $\phi(z, x)$ vivendo em AdS_{d+1} . Esse campo possui um valor $\phi_0(x)$ na borda tal que

$$\phi_0(x) = \phi(z = 0, x) = \phi \Big|_{\partial AdS_{d+1}}(x) \quad (106)$$

Um problema surge do fato de que a métrica é divergente na borda (basta tomar $z = 0$ em 61) de modo que o valor do campo ϕ é tipicamente diverge nesse ponto. Podemos contornar esse problema tomando o limite no campo na borda

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} z^{\Delta-d} \phi(z, x) \quad (107)$$

A função de partição é tomada sob todas as funções que possuem o valor de campo ϕ_0 na borda de AdS_{d+1}

$$Z_{AdS_{d+1}}[\phi \rightarrow \phi_0] = \sum_{\phi \rightarrow \phi_0} e^{S_{AdS_{d+1}}} \quad (108)$$

Essa função de partição pode ser escrita como uma integral funcional

$$Z_{AdS_{d+1}}[\phi_0] = \int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-I[\phi]} \quad (109)$$

onde todas as configurações de campos cujo valor na fronteira seja ϕ_0 são levados em conta. No limite onde a gravitação clássica é dominante (aproximação de ponto de cela) pode-se escrever esse funcional gerador como a solução clássica da teoria gravitacional. Nesse caso a função geradora se torna

$$Z_{AdS_{d+1}}[\phi_0] = e^{S_{AdS_{d+1}}^{on-shell}[\phi \rightarrow \phi_0]} \quad (110)$$

onde $S^{on-shell}$ é a ação tomada na camada de massas (*on-shell*). Para se obter essa quantidade primeiro deve-se solucionar a equação de movimento para o campo ϕ com as devidas condições de contorno. Depois deve-se substituir a solução na ação. Como o campo obedece a solução clássica (equação de movimento) a ação na camada de massas se reduz ao termo de borda. Esse termo de borda deve ser dado por (a menos de um sinal)

$$S_{AdS_{d+1}}^{on-shell}[\phi \rightarrow \phi_0] \sim B \sim \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x z^{-d+1} \phi \partial_0 \phi \Big|_{x^0=0} \quad (111)$$

Interpretação:

Se olharmos somente para o lado da teoria conforme podemos afirmar que o campo ϕ_0 funciona como uma fonte externa, olhando para o lado gravitacional do interior de AdS_{d+1} o campo ϕ é um campo se propagando em um espaço curvo de $d + 1$ dimensões. Essa dualidade pode ser escrita como

$$\left\langle \exp \left(\int d^d x \phi_0 \mathcal{O} \right) \right\rangle = e^{-S^{on-shell}} \quad (112)$$

Essa relação permite obter informações como a função de n-pontos de operadores na teoria de campos conforme.

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \frac{\delta^n I[\phi_0]}{\delta \phi_0(x_1) \cdots \delta \phi_0(x_n)} \Big|_{\phi_0=0} \quad (113)$$

2.3.4 Função de 1-ponto $\langle \mathcal{O}(x) \rangle$

Vamos calcular a função de 1-ponto, ou valor esperado, do operador da teoria de campos conforme através do método proposto pela prescrição holográfica. Isso servirá para exemplificar o processo que será aplicado no restante desse trabalho. A equação 113 para $n = 1$ se resume à

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \frac{\delta I[\phi_0]}{\delta \phi_0(x)} \Big|_{\phi_0=0} \quad (114)$$

A solução da equação de movimento do campo $\phi(x^0 = z, x^i)$ obtida em 100 diz que existem duas soluções linearmente independentes para o nosso campo $\phi(z, x)$. Dessas duas parcelas apenas uma pode ser relevante nas proximidades da borda $z = 0$. O termo com $z^{\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu}$ é nulo quando $z \rightarrow 0$ enquanto que o termo $z^{\frac{d}{2} - \nu}$ é divergente. Podemos ver isso em

$$\frac{d}{2} - \nu = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2} \quad (115)$$

$$= \frac{d}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2}{d^2}} \right] < 0 \quad (116)$$

onde $m^2 > 0$. Essa divergência implica que devemos tomar $z = \epsilon$ (onde ϵ é um valor próximo de zero) e depois tomar $z = \epsilon \rightarrow 0$ no final das contas. Desse modo o comportamento do campo nas proximidades da fronteira em $z = \epsilon$ é dado por

$$\phi(\epsilon, x) \approx \epsilon^{d - \Delta_+} B(x) \quad (117)$$

Estamos procurando um campo $\phi(0, x) \equiv \phi_0(x)$ regular na borda para servir de fonte da teoria de campos dual no entanto o nosso campo $\phi(\epsilon, x^i)$ diverge por um fator $\epsilon^{d - \Delta_+ = \frac{d}{2} - \nu}$. Podemos remover essa divergência redefinir o campo na borda como o limite dado por

$$\phi(0, x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\Delta_+ - d} \phi(\epsilon, x) \quad (118)$$

$$= B(x) \quad (119)$$

Isso nos leva ao seguinte resultado

$$\phi(0, x) \equiv \phi_0(x) = B(x) \quad (120)$$

A parte da solução com decaimento lento está relacionada com a fonte dos operadores da teoria da borda. O fator $B(x) = \phi_0(x)$ pode ser calculado através da solução exata da equação de movimento junto com as condições de contorno. O comportamento sob transformação de escala do campo ϕ é dado por

$$\phi(\epsilon, x) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{d-\Delta_+=\frac{d}{2}-\nu} \phi_0(x) \quad (121)$$

isso segue como consequência de 118. Agora que obtemos o comportamento do campo na borda podemos voltar para a ação tomada na camada de massas 111. Para o termo $\partial_0\phi$ usaremos $\left. \frac{\partial\phi(z,x)}{\partial z} \right|_{z=\epsilon}$. Feito isso obtemos

$$I^{on-shell} \sim \int_{z=\epsilon} d^d x \left[(d - \Delta_+) \epsilon^{-2\nu} \phi_0(x) \phi_0(x) + \Delta_+ A(x) \phi_0(x) \right] \quad (122)$$

No limite de $z = \epsilon \rightarrow 0$ leva o primeiro termo a divergir e o segundo termo não é afetado pois não há potências em ϵ . O processo da extração dos termos divergentes, dentro da holografia, é chamado de renormalização holográfica (HENNINGSON; SKENDERIS, 2000; HARO; SOLODUKHIN; SKENDERIS, 2001). Nesse caso o termo que devemos adicionar na ação (obtido em (RAMALLO, 2015)) é

$$S_{ct} \propto \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{\gamma} \phi^2 \quad (123)$$

onde $\gamma \equiv g|_{\partial AdS_{d+1}}$ é o determinante da métrica tomada na borda. A adição desse termo consiste de uma modificação do termo de borda. Desse modo a ação renormalizada $S^{ren} = S^{on-shell} + S_{ct}$ fica como

$$I^{ren} \sim \Delta_+ \int_{z=\epsilon} d^d x A(x) \phi_0(x) \quad (124)$$

Finalmente com essa quantidade em mãos pode-se calcular a função de um ponto onde a fonte do nosso operador da teoria dual é ϕ_0 . Isso leva ao seguinte valor

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle \sim \Delta_+ A(x) \quad (125)$$

Isso leva a uma conclusão bastante peculiar sobre o comportamento do campo escalar no interior do espaço Anti-de Sitter. A valor esperado do operador da teoria de campos conforme está relacionado com a parte da solução do campo escalar massivo com decaimento lento. Desse modo $\phi_0(x)$ é a “fonte” das flutuações descritas por $A(x)$. Podemos

obter a dimensão conforme de $A(x)$ da solução da equação de movimento. Separando essa equação em parte da “fonte” e “operador”

$$\phi(z, x) \sim z^{d-\Delta_+=\Delta_-} \left(\phi_0(x) + \mathcal{O}(z^2) \right) \quad (126)$$

$$A(z, x) \sim z^{\Delta_+} \left(A(x) + \mathcal{O}(z^2) \right) \quad (127)$$

podemos ver que o comportamento sob transformação de escala é

$$\phi(z, x) \approx z^{d-\Delta_+} \phi_0(x) \quad (128)$$

$$A(z, x) \approx z^{\Delta_+} A(x) \quad (129)$$

Segue desse desenvolvimento que a fonte $\phi_0(x)$ possui a dimensão de escala $d - \Delta_+ = \Delta_-$ (condizente com o encontrado em 121) e o valor esperado do operador dual $A(x)$ dimensão $\nu + d/2 = \Delta_+$. Vamos entender melhor o significado desse resultado na próxima seção.

2.3.5 Espectro de Massas e Dimensão dos Operadores

A correspondência AdS_{d+1}/CFT_d nos dá uma relação entre a massa m do campo escalar em AdS_{d+1} e a dimensão conforme Δ dos operadores correspondentes da CFT . Essa relação é dada por 94

$$\Delta(\Delta - d) = m^2$$

no qual as duas soluções soluções são 95

$$\Delta_{\pm} = \frac{d}{2} \pm \nu = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}$$

Esse resultado coincide com o obtido em (GUBSER; KLEBANOV; POLYAKOV, 1998; WITTEN, 1998). Vamos tentar entender o que isso significa do ponto de vista da teoria da borda. A condição sob os valores de Δ que foram vistas em 1.2 diziam que, para campos unitários, existia um limite mínimo dado por 49. Vamos reescrevê-lo aqui por comodidade

$$\Delta \geq \frac{d}{2} - 1 \quad (130)$$

Se aplicarmos essa condição em Δ_- iremos obter que $\nu \leq 1$ que traduzido em uma relação entre a massa e a dimensão é

$$\nu = 1 \rightarrow m^2 = 1 - \frac{d^2}{4} \quad (131)$$

Aplicando essa condição para Δ_+ teremos $\nu \geq -1$ que é sempre obedecida pois $\nu \in \mathbb{R}^+$. Esse fato também implica que a massa do campo escalar deve obedecer a desigualdade

$$m^2 \geq -\frac{d^2}{4} \quad (132)$$

que é conhecida como limite de Breitenlohner-Freedman (BREITENLOHNER; FREEDMAN, 1982a; BREITENLOHNER; FREEDMAN, 1982b). Breitenlohner e Freedman (BREITENLOHNER; FREEDMAN, 1982b) estudaram um sistema composto de um campo escalar livre em AdS^9 e mostraram que existe duas soluções quantizáveis possíveis para o intervalo de massas

$$-\frac{d^2}{4} < m^2 < 1 - \frac{d^2}{4} \quad (133)$$

Segundo a correspondência AdS_{d+1}/CFT_d qualquer teoria quântica de campos em AdS é equivalente a uma teoria de campos conforme na borda de modo que nesse intervalo devem existir duas CFT possíveis. Como a equação de movimento permite duas soluções, uma com Δ_+ e outra com Δ_- então uma dessas teorias na borda deve possuir operadores com dimensão Δ_+ e a outra com Δ_- . Podemos usar o parâmetro ν para entender melhor o regime de possibilidades. Lembrando que $\nu \in \mathbb{R}^+$ as possibilidades são

- O menor valor permitido é $\nu = 0$ que corresponde à $\Delta_{\pm} = \frac{d}{2}$, isso significa que só existe uma solução para ϕ . Podemos esperar que só seja possível obter operadores com uma dimensão na borda;
- A relação 133 se traduz em

$$0 < \nu < 1 \quad (134)$$

Nesse intervalo ambos Δ_{\pm} são permitidos. O Δ_- possui uma condição $\nu \leq 1$ imposta pelo limite unitário 130 das teorias conformes. Essa solução permite diferentes condições de contorno que levam à diferentes operadores na borda. Além disso deve-se tratar com cuidado a expansão da função especial de Bessel pois existem duas possibilidades, ν inteiro e não nulo, ν fracionário e não nulo.

⁹ Breitenlohner e Freedman obtiveram esse resultado com o formalismo Hamiltoniano procurando por condições de contorno que tornavam a energia finita.

- O campo não massivo $m = 0$ leva a condição

$$\nu \Big|_{m^2=0} = \frac{d}{2} \quad (135)$$

Como a dimensão deve ser $d > 2$ nesse intervalo só permite uma teoria conforme dual na borda.

Na seção anterior foi calculado que o operador possuía dimensão $\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu$. Esse resultado coincide com o esperado. O problema surge no fato de que ambas as teorias devem existir. O desenvolvimento feito utilizou que o campo nas proximidades da borda deve ser descrito pelo seu termo dominante. Esse fato é consequência das equações de movimento, que como vimos, são obedecidas desde que condições de contorno apropriadas sejam impostas. Qual das condições é imposta não influencia a equação de movimento, apenas o termo de borda. É entendido (KLEBANOV; WITTEN, 1999) que as condições de contorno impostas devem tomar nulos metade dos modos do campo nas proximidades da borda de modo que deve existir uma relação entre a condição de contorno e a dimensão da teoria conforme dual. Vamos ver uma maneira proposta para se obter operadores duas com dimensão Δ_- .

2.3.6 Extensão de operadores para Δ_-

Um método para obter operadores com dimensão conforme dado por Δ_- foi proposta em (KLEBANOV; WITTEN, 1999) baseado em (KLEBANOV, 2000). Nele é argumentado que deve ser possível definir uma teoria onde o operador correspondente na borda possuem dimensão Δ_- . A teoria Δ_- não é independente da teoria de Δ_+ , elas se relacionam através de uma transformação canônica que troca os papéis das fontes com os operadores. Vamos ver como isso ocorre.

O comportamento do campo escalar ϕ dado por 100 pode ser escrito da seguinte forma simplificada para z pequeno

$$\phi(z, x) \rightarrow z^{d-\Delta}[\phi_0(x) + \mathcal{O}(z^2)] + z^\Delta[A(x) + \mathcal{O}(z^2)] \quad (136)$$

onde Δ é uma das raízes de

$$\Delta(\Delta - d) = m^2 \quad (137)$$

Aqui $\phi_0(x)$ é considerado como a função “fonte” e $A(x)$ descreve a flutuação física (função de 1-ponto) que podem ser obtidas da solução completa da equação de movimento. Esse desenvolvimento será visto em detalhes em 2.4. Iremos adiantar alguns resultados nesse ponto para desenvolver os argumentos de (KLEBANOV; WITTEN, 1999). É possível

regularizar a ação 64 através do método do Witten¹⁰ para obter a seguinte quantidade

$$I[\phi_0] = -\frac{(\Delta - (d/2))}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta)}{\Gamma(\Delta - (d/2))} \int d^d x d^d y \frac{\phi_0(x)\phi_0(y)}{|x - y|^{2\Delta}} \quad (138)$$

Variando duas vezes em relação à fonte ϕ_0 é possível encontrar a função de 2 pontos para o operador correspondente.

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle = \frac{(2\Delta - d)\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta - (d/2))} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta}} \quad (139)$$

Aqui Δ é a dimensão do operador \mathcal{O} , mas qual das raízes deve ser escolhida? Parece natural escolher sempre a raiz maior $\Delta = \Delta_+$ pois, como vimos na seção 2.3.4, o termo ϕ_0 é dominante sob o termo A . Mas, como vimos em 2.3.5, no intervalo de massas 133 existem duas possíveis teorias conformes; em uma delas o operador correspondente possui dimensão Δ_+ e na outra Δ_- . Vamos voltar para a interpretação física. Foi sugerido em (BALASUBRAMANIAN; KRAUS; LAWRENCE, 1999) que $A(x)$ está ligado ao valor esperado do operador \mathcal{O} . Essa relação, que se mantém mesmo com termos de interação, é (KLEBANOV; WITTEN, 1999)

$$A(x) = \frac{1}{2\Delta - d} \langle \mathcal{O}(x) \rangle \quad (140)$$

Isso significa que do ponto de vista da teoria conforme na borda de d -dimensões $(2\Delta - d)A(x)$ é a variável conjugada de $\phi_0(x)$. Essa transformação canônica a nível de árvore (*tree-level*) corresponde à uma transformação de Legendre. Isso significa que o funcional gerador das funções de correlação na teoria Δ_- pode ser obtido pela transformação de Legendre do funcional gerador das funções de correlação na teoria Δ_+ . Essa transformação de Legendre é feita através da definição (KLEBANOV; WITTEN, 1999)

$$J(\phi_0, A) = I(\phi_0) + (2\Delta - d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_0(k) A(-k) \quad (141)$$

onde estamos trabalhando no espaço de Fourier por conveniência e o fator $(2\Delta - d)$ foi incluído com base na ideia de que o conjugado de ϕ_0 é $(2\Delta - d)A$. Aqui $I(\phi_0)$ é a ação

¹⁰ Esse método, introduzido em (WITTEN, 1998), consiste em resolver o problema usando a função de Green aplicando as simetrias do espaço AdS_{d+1} . Esse caminho não será utilizado nesse trabalho mas pode ser visto com mais detalhes em (PETERSEN, 1999). Nas próximas seções iremos encontrar esse resultado de modo similar ao feito na função de 1-ponto.

do campo escalar massivo 64 representada no espaço de Fourier¹¹

$$I(\phi_0) = \nu \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_0(k) \phi_0(-k) \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} \quad (142)$$

O funcional transformado de Legendre $\tilde{I}(A)$ é o mínimo de $J(\phi_0, A)$ com respeito à ϕ_0 para A fixo. Isso significa que

$$\tilde{I}(\phi) = \left. \frac{\delta J[\phi_0, A]}{\delta \phi_0} \right|_{\phi_0 \text{ mínimo}} \quad (143)$$

Isso leva à

$$\tilde{I}[A] = -\nu \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} A(k) A(-k) \left(\frac{k}{2}\right)^{-2\nu} \quad (144)$$

O que permite calcular a função de 2 pontos como

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{(2\Delta_- - d)\Gamma(\Delta_-)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta_- - (d/2))} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_-}} \quad (145)$$

que é positiva para todas as dimensões dadas por Δ_- dentro de

$$-\frac{d^2}{4} \leq m^2 < 1 - \frac{d^2}{4} \quad (146)$$

Além disso podemos ver que essa é de fato a equação 139 quando $\Delta = \Delta_-$. Isso indica que as duas teorias também devem possuir os mesmo fatores de modo que deve existir uma relação entre a transformada de Fourier das funções de 2 pontos. Se $f_+(k)$, dado por

$$f_+(k) = -2\nu \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \quad (147)$$

¹¹ Podemos mostrar que esse é de fato a transformada de Fourier de maneira simples, basta tomar a transformada inversa

$$\begin{aligned} I(\phi_0) &= \nu \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi_0(k) \phi_0(-k) \left(\frac{k}{2}\right)^{2\nu} \\ &= -\nu 2^{-2\nu} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} d^d x d^d y \phi_0(x) \phi_0(y) e^{ik \cdot (x-y)} k^{2\nu} \\ &= -\frac{\nu}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\nu + d/2)}{\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \frac{\phi_0(x) \phi_0(y)}{|x-y|^{2(\nu+d/2)}} \end{aligned}$$

A integral em k é

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot (x-y)} k^{2\nu} = \frac{2^{2\nu}}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\nu + d/2)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2(\nu+d/2)}}$$

é a transformada da função de 2 pontos com dimensão Δ_+ ¹² e $f_-(k)$

$$f_-(k) = 2\nu \left(\frac{k}{2}\right)^{-2\nu} \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \quad (148)$$

a transformada da função de 2 pontos de Δ_- então a relação entre elas é

$$f_-(|k|) = -\frac{(2\Delta - d)^2}{f_+(|k|)} \quad (149)$$

Pode-se transformar f_+ em f_- se fizermos $\nu \rightarrow -\nu$. Um ponto que se deve notar é que não se faz menção de condições de contorno para a teoria Δ_- no entanto associa-se ela a condições de Neumann.

2.4 Diferentes condições de contorno e funções de 2-pontos $\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y) \rangle$

A relação entre a condição de contorno que se impõe sob o sistema é de extrema importância na correspondência AdS_{d+1}/CFT_d como foi descrito em (HENNEAUX, 1998; BOSCHI-FILHO; BRAGA, 1999; MINCES; RIVELLES, 2000). Como foi visto em 2.3.3 a correspondência depende da ação tomada na borda de AdS_{d+1} que, por sua vez, depende das condições de contorno escolhidas. Isso vem do fato de que o princípio variacional deve ser definido de forma apropriada e é sensível a existência de uma borda no espaço-tempo. Na seção 2.2 foi definido as seguintes condições de contorno:

1. Condições de Dirichlet $\delta\phi|_{z=0} = 0$ na seção 2.2.1. Nesse caso a ação não necessita de modificação;
2. Condições de Neumann $\delta(\partial_n\phi_\epsilon) = 0$ em 2.2.2. A ação precisa de um termo adicional tal que δI_N com $I_N = I + B$ (equação 78)

$$B = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] - \int_{\partial\mathcal{M}} d^d x \sqrt{g} \phi n_0 \partial^0 \phi \quad (150)$$

3. Condições Mistas $\delta[\psi^\alpha(x)] = 0$ descrita em 2.2.3. Analogamente ao caso de Neumann precisamos adicionar um contra termo

$$I_S^\alpha = \frac{\alpha}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi n^\rho \partial_\rho \phi) \quad (151)$$

que garante que o princípio variacional $I_M = I + I_S$ seja satisfeito.

¹² A transformada de Fourier de $|x|^{-\Delta_+}$ é divergente no regime UV e quando definida de maneira apropriada possui o coeficiente negativo (KLEBANOV; WITTEN, 1999)

Nessa seção vamos estudar em detalhes como as diferentes condições de contorno levam a correspondências distintas para os operadores na teoria conforme da borda de AdS_{d+1} . As próximas seções irão decorrer da seguinte forma:

Na seção 2.3.2 foi tratada a solução simplificada da equação de movimento para o campo escalar massivo. Isso se deve ao fato que o resultado foi expressos em termos de $A(x)$ (equação 100). O calculo correto da função de correlação necessita da definição dessa quantidade em termos de transformadas de Fourier dos campos na borda. Iremos fazer isso em 2.4.1.

Depois de obtermos a solução exata da equação de movimento trataremos de calcular a função de correlação referente a cada uma das condições. Os passos necessários serão similares aos realizados na obtenção da função de 1-ponto em 2.3.4. Para cada uma das condições será necessário obter a ação tomada na camada de massas. Também devemos tomar cuidado em escrever essa ação em termos das fontes escolhidas. A fonte depende da condição de contorno. Feito isso iremos realizar os passos que permitiram a integração sob os momentos para então calcular a função de correlação. Todo esse desenvolvimento será feito para cada uma das três condições de contorno.

No final de cada uma dessas seção será feito um pequeno resumo dos resultados obtidos. Isso servirá para facilitar a leitura. Na próxima 2.5 faremos uma análise de todos os resultados juntos.

2.4.1 Solução completa da equação de movimento

No capítulo 2.3.1 foi calculado a equação de movimento para o campo escalar massivo 84, dada por $(\nabla_\rho \nabla^\rho - m^2)\phi = 0$. Depois disso em 2.3.2 foi realizada uma transformada de Fourier¹³ para obter uma equação para $\phi_k(z)$ dada por

$$z^2 \partial_z \partial_z \phi_k(z) + (1-d)z \partial_z \phi_k(z) - z^2 k^2 \phi_k(z) - m^2 \phi_k(z) = 0 \quad (152)$$

com $k^2 = k_i k_i$. Essa equação possui uma forma geral dada por¹⁴

$$z^2 u'' + (1-2\alpha)z u' + (z^2 \beta^2 + \alpha^2 - \nu^2)u = 0 \quad (153)$$

¹³ Transformação de $\phi = \phi(z, x^i)$ em x^i tal que

$$\phi(z, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \phi_k(z)$$

com $\phi(k, x^i) \equiv \phi_z(x^i)$ e $k \cdot x = k_i x^i$

¹⁴ Ver (JEFFREY; ZWILLINGER, 2000) seção (8.491) equação 6.

onde sua solução é conhecida como

$$u = z^\alpha Z_\nu(\beta z) \quad (154)$$

Aqui Z_ν é a função de Bessel. O parâmetro ν determina a ordem da função de Bessel e somente pode ser um número real positivo. A solução da equação de Bessel para um argumento z complexo é

$$Z_\nu(z) = AJ_\nu(iz) + BY_\nu(iz) \quad (155)$$

aqui A e B são constantes que dependem das condições iniciais. Essa solução depende da função de Bessel J_ν e Y_ν que são, respectivamente, a função de Bessel do primeiro tipo e do segundo tipo. Um ponto importante é que essas duas funções são oscilatórias. Se escolhermos escrever a solução como

$$Z_\nu(z) = CI_\nu(z) + DK_\nu(z) \quad (156)$$

teremos I_ν (função de Bessel modificada do primeiro tipo) e K_ν (função de Bessel modificada do segundo tipo) que são funções exponencialmente crescente e decrescente, respectivamente. É mais conveniente trabalhar com essas funções modificadas devido a esse comportamento exponencial.

Precisamos fazer as devidas identificações para escrevermos a nossa solução. Comparando 153 e 152 temos

$$2\alpha = d \rightarrow \alpha = \frac{d}{2} \quad (157)$$

$$\alpha^2 - \nu^2 = -m^2 \rightarrow \nu = \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}} \quad (158)$$

$$\beta = k \quad (159)$$

Desse modo a solução geral para a equação de movimento têm a forma

$$\phi_k(z) = z^{\frac{d}{2}}(A(k)K_\nu(z) + B(k)I_\nu(z)) \quad (160)$$

A nossa solução deve ser regular em $z \rightarrow \infty$ (interior de AdS_{d+1}). Podemos ver que as funções K_ν e I_ν tem o seguinte comportamento assintótico no interior de AdS_{d+1}

$$\lim_{z \rightarrow \infty} K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{\sqrt{2z}} e^{-z} \rightarrow 0 \quad (161)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \rightarrow \infty \quad (162)$$

Como o campo escalar deve ser regular temos que $B(k)$ deve ser nulo. Isso leva à seguinte solução para o transformada $\phi_k(z)$

$$\phi_k(z) = z^{\frac{d}{2}} A(k) K_\nu(kz) \quad (163)$$

Vamos continuar esse desenvolvimento com o intuito de definir o parâmetro $A(k)$ de forma a permitir que seja obtido a função de dois pontos nas próximas seções. Vamos começar fazendo a transformada de Fourier inversa dessa quantidade

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} A(k) z^{\frac{d}{2}} K_\nu(kz) \quad (164)$$

O ponto principal do próximo passo é o fato de que o campo $\phi(z, \mathbf{x})$ deve possuir um valor bem definido na borda para que este sirva de fonte para o operador na teoria de campos conforme dual. Por isso vamos tomar $z \rightarrow \epsilon$ nessa equação e obter

$$\phi(\epsilon, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} K_\nu(k\epsilon) \quad (165)$$

O campo $\phi(\epsilon, x)$, lembrando que ϵ é tomado perto dos valores de $z = 0$, deve ser bem comportado na borda de modo que é possível definir sua transformada de Fourier em \mathbf{x}

$$\phi(\epsilon, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \phi(\epsilon, k) \quad (166)$$

Comparando as últimas duas equações podemos escrever

$$A(k) = \epsilon^{-\frac{d}{2}} \frac{\phi(\epsilon, k)}{K_\nu(k\epsilon)} \quad (167)$$

Agora voltando para a expressão original 164

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} \phi(\epsilon, k) \epsilon^{-\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}} \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \quad (168)$$

Essa expressão é obviamente satisfeita visto que se tomarmos $z = \epsilon$ iremos obter a definição de transformação de Fourier. O último passo consiste em fazer a transformada inversa¹⁵ do campo $\phi(\epsilon, k)$ tomando o devido cuidado de introduzir uma nova variável

¹⁵ A transformada inversa de Fourier é

$$\phi(\epsilon, k) = \int d^d y e^{ik \cdot y} \phi(\epsilon, y) \quad (169)$$

para o espaço. Isso leva à

$$\phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}} \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \quad (170)$$

Essa equação parece trivial em primeira análise mas ela serve para escrever a ação, tomada na camada de massa em $z = \epsilon$, em termos do campo ϕ na borda.

Derivada de $\phi(z, x)$:

No desenvolvimento desse capítulo será necessário a derivada em $x^0 = z$ de $\phi(z, x)$ de modo que é conveniente calculá-la. Vamos começar derivando em $x^0 = z$ a expressão

$$\partial_z \phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \partial_z \left[z^{\frac{d}{2}} K_\nu(kz) \right]$$

fazendo a derivada (usando 694)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{\frac{d}{2}} K_\nu(kz) \right] &= \frac{d}{2} z^{\frac{d}{2}-1} K_\nu(kz) + z^{\frac{d}{2}} k \left[\frac{\nu}{kz} K_\nu(kz) - K_{\nu+1}(kz) \right] \\ &= z^{\frac{d}{2}-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - zk K_{\nu+1}(kz) \right] \end{aligned}$$

voltando para a expressão

$$\partial_z \phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) z^{\frac{d}{2}-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - zk K_{\nu+1}(kz) \right] \quad (171)$$

agora usando o valor de $A(k)$ dada por 167

$$\partial_z \phi(z, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-\frac{d}{2}} z^{\frac{d}{2}-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) \frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} - kz \frac{K_{\nu+1}(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \right] \quad (172)$$

onde podemos tomar $z = \epsilon$ para obter

$$\partial_z \phi(z, x) \Big|_{z=\epsilon} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-ik \cdot (x-y)} \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) - kz \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right] \quad (173)$$

2.4.2 Condições de Dirichlet para o campo escalar massivo

A condição de Dirichlet, como foi vista em 2.2.1, é tal que a variação do campo é nula nos extremos

$$\delta\phi|_{x^0=\epsilon} = 0 \quad (174)$$

Essa condição fixa a variação da ação 64 pois o termo de borda é nulo como foi visto na seção 2.2. O campo que fixamos na borda deve servir de fonte da teoria dual de modo que a prescrição holográfica para esse caso é

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_D(x) \phi_0(x) \right) \right\rangle \quad (175)$$

2.4.2.1 Ação na camada de massas

Vamos reescrever a ação para o campo escalar massivo, equação 64

$$I = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \sqrt{g} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] \quad (176)$$

usando de uma derivação por partes¹⁶ podemos realizar uma integração por partes

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \phi [-\partial^\mu (\sqrt{g} \partial_\mu \phi) + m^2 \sqrt{g} \phi] + \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \partial^\mu [\sqrt{g} \phi \partial_\mu \phi] \\ &= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \sqrt{g} \phi [-\nabla^\mu \nabla_\mu + m^2] \phi + \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} x \partial^\mu [\sqrt{g} \phi \partial_\mu \phi] \end{aligned} \quad (177)$$

Na camada de massas tem-se que o primeiro termo é nulo (ele é exatamente a equação de movimento 84). Devemos introduzir um corte na nossa integração em $z = 0$, pois se tomarmos esse valor sem cuidado iremos obter um valor divergente. Esse corte será primeiro tomar $z = \epsilon$ para depois, no final das contas, tomar o limite $\epsilon \rightarrow 0$. Assim

$$I_D^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \phi(\epsilon, x^i) (n^0 \partial_0) \phi(\epsilon, x^i) \quad (178)$$

onde $\gamma_\epsilon = \epsilon^{-2d}$ é o determinante da métrica induzida na borda e $n^\mu \partial_\mu$ é o operador derivada na direção da borda pois $n^\mu(z) = (-z, \mathbf{0})$ é o vetor normal para fora da superfície. Isso

¹⁶ Especificamente $\partial^\mu [\sqrt{g} \phi \partial_\mu \phi] = \sqrt{g} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + \phi \partial^\mu [\sqrt{g} \partial_\mu \phi]$

leva à

$$I_D^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \epsilon^{1-d} \phi(\epsilon, x^i) \partial_z \phi(\epsilon, x^i) \quad (179)$$

onde fizemos

$$(n^0 \partial_0) \phi(\epsilon, x^i) = -z \partial_z \phi(z, x) \Big|_{z=\epsilon} \equiv -\epsilon \partial_z \phi(\epsilon, x) \quad (180)$$

Agora usando os valores de $\phi(z, x)|_{z=\epsilon}$ e $\partial_z \phi(z, x)|_{z=\epsilon}$ (equações 170 e 172 respectivamente) obtemos

$$I_D^{on-shell}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right] \quad (181)$$

Aqui é conveniente definir a seguinte quantidade

$$\mathcal{D}^\nu \equiv \left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \quad (182)$$

Estamos procurando os termos dominantes da ação nas proximidades da borda $z = 0$. Para obtermos isso precisaremos expandir \mathcal{D}^ν e separar os termos dominantes quando $\epsilon \equiv z \rightarrow 0$. Assim quando realizarmos a integral em k teremos como resultado a ação dominante na borda. Todo esse processo depende dos intervalos de ν definidos em 2.3.5 pois a expansão da função de Bessel depende do intervalo de ν . Faremos esses cálculos em detalhes nessa seção pois eles serão utilizadas novamente no caso de Neumann e misto.

Expandindo com $\nu \neq 0$:

Aqui temos duas possibilidades distintas para ν , inteiro e não inteiro. Se o parâmetro ν for inteiro deve-se utilizar a expansão 690, se ele for fracionário então usa-se 689. Ambos os casos devem ser positivos. A expansão para ν fracionário é mais simples de se trabalhar mas ambas o mesmo resultado pois possuem o mesmo comportamento assintótico. Vamos começar a expansão de $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ escrevendo $K_\nu(k\epsilon)$ com $n = 1$ em 689. Isso leva à

$$K_\nu(k\epsilon) = \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu) \left\{ \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{-\nu} \left[\frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} + \frac{\left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^2}{\Gamma(2 - \nu)} + \dots \right] - \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \nu)} + \frac{\left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^2}{\Gamma(2 + \nu)} + \dots \right] \right\} \quad (183)$$

Colocando $\propto \epsilon^{-\nu}$ e usando as propriedades de recorrência de Γ ¹⁷ obtêm-se

$$K_\nu(k\epsilon) = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-\nu} \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2}{1-\nu} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu+2} \frac{\Gamma(-\nu)}{(\nu+1)\Gamma(\nu)} + \dots \right\} \quad (185)$$

O fator $\propto \epsilon^{-\nu}$ vai para infinito pois $\epsilon \rightarrow 0$ e isso dificulta a expansão de K_ν^{-1} . A expansão que devemos calcular é

$$K_\nu^{-1}(k\epsilon) = \frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^\nu \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2}{1-\nu} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu+2} \frac{\Gamma(-\nu)}{(\nu+1)\Gamma(\nu)} + \dots \right\}^{-1} \quad (186)$$

O fato de que $\epsilon \rightarrow 0$ permite fazer a aproximação $(1+a)^{-1} \approx 1-a$ que é válida quando $a \ll 1$, isso leva à

$$K_\nu^{-1}(k\epsilon) = \frac{2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^\nu \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2}{1-\nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu+2} \frac{\Gamma(-\nu)}{(\nu+1)\Gamma(\nu)} - \dots \right\} \quad (187)$$

Agora para expandirmos $K_{\nu+1}(k\epsilon)$ utilizamos 689 com $\nu \rightarrow \nu+1$. Depois de realizar as mesmas simplificações feitas em K_ν obtêm-se

$$K_{\nu+1}(k\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-\nu} \left[\left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-1} \nu \Gamma(\nu) - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right) \Gamma(\nu) - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu+1} \frac{\Gamma(-\nu)}{\nu+1} + \dots \right]$$

Voltando para a expressão original e fazendo a distributiva temos

$$k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \approx 2\nu - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{2}{1-\nu} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2(\nu+1)} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(\nu+1)\Gamma(\nu)} + \dots$$

¹⁷ Essas propriedades são obtidas de $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. As principais que usaremos são

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu+1) &= \nu\Gamma(\nu) \\ \Gamma(\nu+2) &= \nu(\nu+1)\Gamma(\nu) \\ &\vdots \\ \Gamma(1-\nu) &= -\nu\Gamma(-\nu) \\ \Gamma(2-\nu) &= -\nu(1-\nu)\Gamma(-\nu) \end{aligned}$$

Vamos carregar o termo $\propto \epsilon^{2(\nu+1)}$ para demonstrar o cancelamento dos termos em ordem superior em ϵ . O resultado final dessa expansão é

$$\mathcal{D}^{\nu \neq 0} \approx \frac{d}{2} - \nu + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{2}{1-\nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2(\nu+1)} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(\nu+1)\Gamma(\nu)} + \dots \quad (188)$$

Não é difícil de notar que no intervalo $0 < \nu < 1$ o termo de “menor potencia” (ou termo dominante) é $\propto \epsilon^{2\nu}$. Já para valores $\nu > 1$ esse termo seria dado por $\propto \epsilon^2$. Veremos que isso não reflete em uma mudança na função de 2 pontos.

Caso especial $\nu = d/2$

O resultado obtido em $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ é consistente com o valor de $\nu = d/2$. Aplicando esse valor obtermos a expansão

$$\mathcal{D}^{\nu=d/2} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{1-d/2} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d+2} \frac{d\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} + \dots \quad (189)$$

Como $d > 3$ temos que o fator com menor potencia em ϵ é $\propto \epsilon^2$. No entanto veremos que esse não é o comportamento dominante na borda de AdS_{d+1} devido a integração sob os momentos k .

Expandindo com $\nu = 0$

O caso $\nu = 0$ deve ser tratado em separado do caso $\nu \neq 0$. Esses dois valores para ν não são compatíveis entre si, isso é, não podemos obter um resultado do outro. O termo que devemos expandir em 181 é

$$\mathcal{D}^{\nu=0} = \frac{d}{2} - k\epsilon \frac{K_1(k\epsilon)}{K_0(k\epsilon)} \quad (190)$$

O fator $\frac{d}{2}$ continua a não contribuir de modo similar ao caso $\nu \neq 0$ mas, diferentemente do caso anterior, as expansões do $K_1(k\epsilon)$ e $K_0(k\epsilon)$ devem ser feitas com cuidado. Devemos usar a expansão apropriada para $K_0(k\epsilon)$ dada por 693 e para $K_1(k\epsilon)$ usaremos a expansão da função de Bessel para o parâmetro ν inteiro e não-nulo 690. No $K_1(k\epsilon)$ obtemos a

seguinte quantidade

$$K_1(k\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-1} \Gamma(1) + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^1 \left[\ln\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - \frac{\lambda(1) + \lambda(2)}{2} \right] \frac{1}{\Gamma(2)} + \dots \quad (191)$$

$$= \frac{1}{k\epsilon} \left[1 + \frac{(k\epsilon)^2}{2} (\ln k + \ln \epsilon) \right] + \dots \quad (192)$$

onde temos $\Gamma(n) = (n-1)!$ (não esquecendo que $0! = 1$). Os fatores numéricos foram deixados de lado também. No termo $K_0(k\epsilon)$ possui uma expansão específica 693

$$K_0(k\epsilon) = - \left[\ln\left(\frac{k\epsilon}{2}\right) - \lambda(1) \right] \frac{1}{\Gamma(1)} + \dots \quad (193)$$

$$= - \ln \epsilon \left(1 + \frac{\ln k}{\ln \epsilon} \right) + \dots \quad (194)$$

Usando novamente a aproximação $(1+a)^{-1} \approx 1-a$ do caso anterior obtemos

$$K_0^{-1}(k\epsilon) = - \frac{1}{\ln \epsilon} \left(1 - \frac{\ln k}{\ln \epsilon} \right) + \dots \quad (195)$$

Juntando esse termos obtemos e fazendo a distributiva

$$\mathcal{D}^{\nu=0} = + \frac{1}{\ln \epsilon} \left[1 + \frac{(k\epsilon)^2}{2} (\ln k + \ln \epsilon) + \dots \right] \left[1 - \frac{\ln k}{\ln \epsilon} + \dots \right] \quad (196)$$

$$= \frac{1}{\ln \epsilon} - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \frac{(k\epsilon)^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{k\epsilon \ln k}{\ln \epsilon} \right)^2 + \dots \quad (197)$$

O primeiro termo é nulo pois ele não possui fator em k e, como veremos, isso faz com que a integral sob os momentos seja nula. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ o segundo termo é infinito de modo que ele é o termo mais relevante nessa expansão. Os termos $\propto \epsilon^2$ e $\propto \epsilon \ln^{-1} \epsilon$ são nulos nesse limite. Isso vale para todos os resultados de ordem superior. Isso faz com que o termo relevante nessa expansão seja

$$\mathcal{D}^{\nu=0} \approx - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} \quad (198)$$

2.4.2.2 Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu \neq 0$

Fazendo a substituição da expansão das funções de Bessel com $\nu \neq 0$, obtida em 188, na ação 181 temos

$$I_D^{on-shell} = - \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \times \left[\frac{d}{2} - \nu + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^2 \frac{1}{1-\nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2(\nu+1)} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(\nu+1)\Gamma(\nu)} + \dots \right] \quad (199)$$

Vamos utilizar a integral sob os momentos descrita em E.2 (especificamente 704) para analisar cada um desses termos. A integral sob os momentos do primeiro termo resulta em uma *delta* na borda dada por

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \propto \delta^d(x - y) \quad (200)$$

Esse resultado é um termo de contato que pode ser extraído através de um contra termo (mesmo processo realizado na função de 1-ponto em 2.3.4). Qualquer termo que seja proporcional à k^0 pode ser ignorado pois ele sempre será um termo de contato. A integral sob o fator $\propto k^2$ também não contribui para o resultado final pois

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} k^2 \propto \frac{1}{\Gamma(-1)} \quad (201)$$

onde $\Gamma(-1) = \tilde{\infty}$ (infinito complexo). Os termos restantes são

$$I_D^{on-shell} = -\nu \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} 2^{-2\nu} \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d+2\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[k^{2\nu} + \frac{k^{2(\nu+1)} \epsilon^2}{\nu(\nu+1)} \right]$$

Foi visto no desenvolvimento da função de 1-ponto em 2.3.4 que é necessário tomar o campo na borda através de uma redefinição. Essa mudança do campo no interior de AdS_{d+1} , dado por $\phi(\epsilon, x)$, para o campo na borda, $\phi(0, x) \equiv \phi_0(x)$, é feita através de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\frac{d}{2} + \nu} \phi(\epsilon, x) = \phi_0(x) \quad (202)$$

Essa é a mesma transformação feita na função de 1-ponto. Isso leva à seguinte ação em termos de ϕ_0

$$I_D^{on-shell} = -\nu \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} 2^{-2\nu} \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi_0(x) \phi_0(y) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[k^{2\nu} + \frac{k^{2(\nu+1)} \epsilon^2}{\nu(\nu+1)} \right]_{\epsilon \rightarrow 0} \quad (203)$$

Depois de tomarmos o campo na borda precisamos fazer $\epsilon \rightarrow 0$. Os termos com potencia superior em ϵ são nulo como podemos ver de $\propto \epsilon^2$. Agora podemos realizar a integral nos momentos k usando 704

$$I_D^{on-shell} = -\frac{\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \phi_0(x) \phi_0(y) \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (204)$$

Usando a prescrição 175 obtemos

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (205)$$

essa relação pode ser escrita em termos de $\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu$

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = \frac{(2\Delta_+ - d)}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta_+)}{\Gamma\left(\Delta_+ - \frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_+}} \quad (206)$$

Isso indica que o operador $\mathcal{O}^{\nu \neq 0}$ tem dimensão conforme na borda igual à $\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu$. O comportamento na direção da borda (equação 202) é $x_0^{\Delta_- = d/2 - \nu} \phi_0(x)$.

2.4.2.3 Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = d/2$

A expansão que realizamos em 189 resultou na seguinte expressão

$$\mathcal{D}^{\nu=d/2} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{1-d/2} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d+2} \frac{d\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} + \dots \quad (207)$$

O termo dominante deveria ser $\propto (k\epsilon)^2$ no entanto vimos em 201 que esse termo diverge. Isso faz com que o resultado com $\nu = d/2$ coincida com o caso obtido em $\nu \neq 0$. Essa expansão é valida para qualquer valor positivo de ν . Isso permite usar o resultado 205 e tomando $\nu = d/2$ (ou $m = 0$) obtendo assim

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(y) \rangle = \frac{d}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (208)$$

onde temos que o operador $\mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}$ tem dimensão conforme d e a fonte se comporta com dimensão conforme zero, isso é $\phi(\epsilon, x) = \phi_0(x)$. Esse resultado bate se ao invés de usar a ação 64 tivéssemos usado a ação de Klein-Gordon

$$I_{KG} = \frac{1}{2} \int d^{d+1} x \sqrt{g} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (209)$$

Com ela obteríamos a equação de movimento $\partial_\rho[\sqrt{g}\partial^\rho\phi] = 0$ (basta tomar $m = 0$ em 84). A solução dessa equação de movimento continua sendo 170 mas agora ao invés da condição $\nu = \sqrt{m^2 + \frac{d^2}{4}}$ teremos $\nu = \frac{d}{2}$ que resultaria nessa mesma função de 2 pontos.

2.4.2.4 Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = 0$

Aplicando o resultado 198, obtido da expansão da função de Bessel com $\nu = 0$, na ação 181 temos

$$I_D^{\nu=0} = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{-d}}{\ln^2 \epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \ln k + \dots \quad (210)$$

Para realizar essa integral precisamos usar a formula 706 tomando $\rho = 0$, isso leva à

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \ln k = -C_\rho \Big|_{\rho=0} \frac{\ln |x|}{|x|^d} + \frac{dC_\rho}{d\rho} \Big|_{\rho=0} \frac{1}{|x|^d} \quad (211)$$

O primeiro termo é calculado em 709 e é nulo. O segundo é calculado em 718 e é dado por

$$\frac{dC_\rho}{d\rho} \Big|_{\rho=0} \approx -\frac{1}{2\pi^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \quad (212)$$

Isso leva ao seguinte resultado

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \ln k = -\frac{1}{2\pi^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \frac{1}{|x|^d} \quad (213)$$

Assim a integral original é dada por

$$I_D^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{-d}}{\ln^2 \epsilon} \frac{1}{|x-y|^d} + \dots \quad (214)$$

Aqui novamente temos de fazer a regularização do campo $\phi(\epsilon, x)$ mas diferentemente do caso anterior teremos de usar o fator $\ln \epsilon$ ¹⁸

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{\frac{d}{2}} \ln \epsilon)^{-1} \phi(\epsilon, x) = \phi(0, x) \quad (215)$$

¹⁸ Isso será melhor explicado quando fizermos a análises comparativas das diferentes condições de contorno.

Fazendo uso da correspondência *AdS/CFT* podemos calcular a seguinte função de dois pontos

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (216)$$

O operador conforme $\mathcal{O}_D^{\nu=0}$ na teoria conforme na borda possui dimensão de escalar $\frac{d}{2}$. O campo escalar se aproxima da borda com um comportamento dado por 215, isso é, como $x_0^{\frac{d}{2}} \ln x_0 \phi(x_0, x)$.

2.4.2.5 Resumo das funções de 2 pontos para condições de Dirichlet

Vamos resumir os resultado obtidos até esse ponto no caso das condições de Dirichlet

Intervalo: $\nu = 0$ ou $m^2 = -d^2/4$:

Dentro dessas condições foi obtido uma função de 2-pontos 216 dada por

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (217)$$

onde o operador $\mathcal{O}_D^{\nu=0}$ da teoria conforme na borda possui dimensão $\frac{d}{2}$. Esse é a menor dimensão que se pode obter com condições de Dirichlet. O comportamento da fonte pode ser obtido da equação 215 e é dado por $z^{d/2} \ln z \phi_0(x)$. Vamos abordar o fator logarítmico quando fizermos a análise comparativa. Esse resultado não pode ser obtido simplesmente tomando $\nu = 0$ no resultado $\nu \neq 0$.

Intervalo: $\nu \neq 0$ ou $m^2 \neq -d^2/4$:

Aplicando condições de Dirichlet e supondo $\nu \in \mathbb{R}^+$ na expansão da função de Bessel levam a função de correlação 206 e 205

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (218)$$

$$= \frac{(2\Delta_+ - d)}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta_+)}{\Gamma\left(\Delta_+ - \frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_+}} \quad (219)$$

Nesse caso o operador $\mathcal{O}^{\nu \neq 0}$ tem dimensão conforme na borda igual à $\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu$ e o campo escalar se comporta como $x_0^{\Delta_- = \frac{d}{2} - \nu} \phi_0$. Isso pode ser obtido de 202.

Caso não massivo $\nu = d/2$ ou $m^2 = 0$:

O valor especial de $\nu = d/2$, que reflete no caso de um campo escalar não massivo, é consistente com o resultado obtido anterior. Tomando esse valor, ou usando a expansão, a função de correlação obtida é 208

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(y) \right\rangle = \frac{d}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (220)$$

onde a fonte possui dimensão conforme d e o campo dimensão zero.

Todos os resultados coincidem com os obtidos em (MINCES; RIVELLES, 2000; FREEDMAN *et al.*, 1999)

2.4.3 Condições de Neumann para o campo escalar massivo

A condição de Neumann, vista em 2.2.2, tem como ponto principal

$$\delta(\partial_n \phi) \Big|_{z=0} = 0$$

Isso leva a necessidade da seguinte modificação na ação 78

$$I_N = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} \phi (n^0 \partial_0) \phi$$

Fazendo uma integração por partes similar a feita no caso de Dirichlet obtemos a seguinte ação

$$I_N = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \phi \sqrt{g} [m^2 \phi - \nabla^\mu \nabla_\mu \phi] - \frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \left[\frac{1}{2} \sqrt{g} \phi (n^0 \partial_0) \phi \right] \quad (221)$$

Iremos usar essa ação para obter as funções de correlação na teoria de campos dual. A fonte dos operadores duais será o campo cuja variação foi fixada na borda, que nesse caso, é dado por $\partial_n \phi$. Isso significa que a correspondência que devemos usar é

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_N(x) \partial_n \phi(0, x) \right) \right\rangle \quad (222)$$

2.4.3.1 Ação na camada de massas

Para escrever a ação 221 na camada de massa vamos impor as equações de movimento para o campo escalar massivo (equação 84). Isso leva ao primeiro termo ser nulo e obtemos a seguinte ação na camada de massas

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} \phi (n^0 \partial_0) \phi = \frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^n x \epsilon^{-d} \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, x) \quad (223)$$

onde $g|_{z=\epsilon} = \gamma_\epsilon = \epsilon^{-2d}$ é o determinante da métrica induzida na borda e $n^0 \partial_0 \equiv \partial_n$ é o operador derivada na direção da borda pois $n^\mu(z) = (-z, \mathbf{0})$ é o vetor normal para fora da superfície.

Aqui ϕ deve ser obtido usando as condições impostas sob $\partial_n \phi$. No caso das condições de contorno de Dirichlet na seção 2.4.2 isso foi feito usando as equações 170 e 172 que levaram a ação na camada de massas do tipo $I \sim \int d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y)$. Se usarmos esse mesmo caminho aqui não teremos como impor as condições de Neumann pois a nossa ação tomada na camada de massas não possuiria a fonte $\partial_n \phi$. Podemos contornar isso voltando para 171 e escrever a transformada de Fourier de $\partial_z \phi(\epsilon, x^i)$

$$\partial_n \phi(\epsilon, x^i) = \int d^d k e^{-ik \cdot x} \partial_n \phi(\epsilon, k) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right] \quad (224)$$

Aqui usamos a definição $\partial_n \phi(\epsilon, x^i) = \epsilon \partial_z \phi(\epsilon, x^i)$. Isolando $A(k)$ obtemos

$$A(k) = \frac{\epsilon^{\frac{d}{2}} \partial_n \phi(\epsilon, k)}{(d/2 + \nu) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \quad (225)$$

usando isso na equação para o campo $\phi(\epsilon, x)$ 170 leva a

$$\phi(\epsilon, x) = \int d^d y \partial_n \phi(\epsilon, y) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{d/2 + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (226)$$

A equação que foi obtida permite escrever a ação na camada de massas em termos das fontes apropriadas para as condições de Neumann que foram impostas

$$I_N^{on-shell} = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{d/2 + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (227)$$

O próximo passo é trabalhar a expansão das funções de Bessel para que seja possível realizar a integração dos momentos. As contas realizadas no caso do campo escalar massivo com condições de contorno de Dirichlet serão uteis nessa expansão. De fato será necessário

realizar apenas mais uma expansão pois

$$\mathcal{N}^\nu \equiv \frac{1}{d/2 + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} = \frac{1}{\mathcal{D}^\nu} \quad (228)$$

onde \mathcal{D}^ν é definido em 182.

Expandindo com $\nu \neq 0$:

A parte que devemos expandir é dada por

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} = \frac{1}{\mathcal{D}^{\nu \neq 0}}$$

Vamos usar o resultado de $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ obtido em 188

$$\mathcal{D}^{\nu \neq 0} = \frac{d}{2} - \nu + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{1-\nu} + \dots \quad (229)$$

e substituir em $\mathcal{N}^{\nu \neq 0}$ e colocando $d/2 - \nu$ em evidencia

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} = \frac{(d/2 - \nu)^{-1}}{1 + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{(1-\nu)(d/2 - \nu)} + \dots}$$

A expansão com $(1+a)^{-1} \approx 1 - a$ que é valida quando $a \ll 1$ pois $\epsilon \rightarrow 0$. Todos os termo com ϵ são muito menores que 1. Isso leva à

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} = \frac{1}{d/2 - \nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)^2\Gamma(\nu)} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{(1-\nu)(d/2 - \nu)^2} + \dots$$

O primeiro termo é nulo (pois não possui fatores ϵ). O termo $\propto (k\epsilon)^2$ é divergente como sabemos do resultado 201. O fator $\propto (k\epsilon)^{2\nu}$ deve ser limitar ao intervalo $\nu \neq d/2$ devido a divergência no denominador nesse valor. O resultado final fica

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)^2\Gamma(\nu)} \quad (230)$$

Vamos trabalhar essa expansão com $\nu = d/2$ em separado na próxima seção.

Caso especial $\nu = d/2$:

Vamos trabalhar a expansão do termo

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2} = \frac{1}{d - k\epsilon \frac{K_{d/2+1}(k\epsilon)}{K_{d/2}(k\epsilon)}} = \frac{1}{\mathcal{D}^{\nu=d/2}} \quad (231)$$

Usando o resulta de $\mathcal{D}^{\nu=d/2}$ obtido em 189

$$\mathcal{D}^{\nu=d/2} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{1-d/2} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d+2} \frac{d\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} + \dots \quad (232)$$

Substituindo em $\mathcal{N}^{\nu=d/2}$ e colocando todo o fator $\propto (k\epsilon)^2$ (como $d > 2$ essa é a menor potencia, ou maior fator quando $\epsilon \rightarrow 0$) obtemos

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2} = \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-2} \frac{1-d/2}{1 - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{(1-d/2)d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{(1-d/2)d\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} + \dots} \quad (233)$$

Como $d > 2$ todos os fatores no denominador decrescem¹⁹. Usando a expansão $(1+a)^{-1} \approx 1 - a$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\nu=d/2} &= \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{-2} (1-d/2) \left[1 + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{(1-d/2)d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{(1-d/2)d\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} + \dots \right] \\ &= (2-d)(k\epsilon)^{-2} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-4} \frac{(1-d/2)^2 d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} \\ &\quad + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{(1-d/2)^2 d\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} + \dots \end{aligned} \quad (234)$$

Os termos $\propto (k\epsilon)^{d-4}$ e $\propto (k\epsilon)^{d-2}$ vão à zero quando $\epsilon \rightarrow 0$. Isso faz com que o termo dominante seja

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2} = (2-d)(k\epsilon)^{-2} + \dots \quad (235)$$

Podemos ver que esse resultado difere bastante do anterior. Esse resultado pode ser obtido seguindo passos alternativos como foi realizado em B.1.

¹⁹ Para $d = 3$ teríamos algo como $1 + ax^1 + bx^3 + dx^4 + \dots$ que tende a 1 com $x \rightarrow 0$

Expandindo com $\nu = 0$:

A expansão de

$$\mathcal{N}^{\nu=0} = \frac{1}{d/2 - k\epsilon \frac{K_1(k\epsilon)}{K_0(k\epsilon)}} = \frac{1}{\mathcal{D}^{\nu=0}}$$

deve ser feita com cuidado. Devemos usar a expansão apropriada para $K_0(k\epsilon)$ dada por 693 e para $K_1(k\epsilon)$ usaremos a expansão da função de Bessel para o parâmetro ν inteiro e não-nulo 690. Esse desenvolvimento foi feito na seção das condições de Dirichlet, aqui iremos pegar o resultado de $\mathcal{D}^{\nu=0}$ calculado em 198. Substituindo isso no termo que devemos trabalhar obtemos

$$\mathcal{N}^{\nu=0} = \frac{1}{d/2 - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots}$$

Expandido esse termo usando o fato de que $1/\ln \epsilon \ll 1$ pois $\epsilon \rightarrow 0$ podemos expandir para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\nu=0} &= \frac{2}{d} \left[1 - \frac{2 \ln k}{d \ln^2 \epsilon} + \dots \right]^{-1} \\ &= \frac{2}{d} + \frac{4 \ln k}{d^2 \ln^2 \epsilon} + \dots \end{aligned}$$

o primeiro termo contribui apenas com termos de contato de modo que podemos escrever

$$\mathcal{N}^{\nu=0} \approx \frac{4 \ln k}{d^2 \ln^2 \epsilon} \quad (236)$$

2.4.3.2 Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu \neq 0$

Voltando para a ação 227 e usando o resultado com $\nu \neq 0$ 230 temos

$$I_N^{\nu \neq 0} = -\frac{2^{-2\nu} \nu \Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)^2 \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d+2\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{2\nu} \quad (237)$$

A integral sob os momentos é feita usando 704 leva à

$$I_N^{\nu \neq 0} = -\frac{\nu \Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} (d/2 - \nu)^2 \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d+2\nu} \frac{1}{|x - y|^{d+2\nu}} \quad (238)$$

Agora precisamos tomar a nossa fonte na borda, isso é, escrever o limite dessa ação quando $z = 0$. Para que essa ação seja finita na borda precisamos tomar a seguinte valor do campo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\nu - \frac{d}{2}} \partial_n \phi(\epsilon, x^i) = \partial_n \phi(0, x^i) \quad (239)$$

o que leva à

$$I_N^{\nu \neq 0} = -\frac{\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(0, x^i) \partial_n \phi(0, y^i) \frac{1}{|x - y|^{2(d/2 + \nu)}} \quad (240)$$

e usando da correspondência 222 obtemos a seguinte função de dois pontos

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{1}{(d/2 - \nu)^2} \frac{\Gamma(d/2 + \nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x - y|^{2(d/2 + \nu)}} \quad (241)$$

o que escrito em termos de Δ_- fica

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{(d - 2\Delta_-)}{\pi^{d/2} \Delta_-^2} \frac{\Gamma(d - \Delta_-)}{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \Delta_-\right)} \frac{1}{|x - y|^{2(d - \Delta_-)}} \quad (242)$$

Isso significa que o operador $\mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i)$ possui dimensão conforme $\Delta_+ = d - \Delta_- = d/2 + \nu$ e a fonte $\partial_n \phi$ se comporta como $z^{\Delta_- = d/2 - \nu} \partial_n \phi(0, x)$ nas proximidades da borda.

2.4.3.3 Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = 0$

O valor da expansão com $\nu = 0$ obtido em 236 deve ser substituído na ação 227. Isso leva a seguinte ação na camada de massas para condições de Neumann para o campo escalar massivo

$$I_N^{\nu=0} = \frac{2}{d^2} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \ln^{-2} \epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \ln k \quad (243)$$

Essa integral sob os momentos é a mesma da realizada nas condições de Dirichlet no caso $\nu = 0$ e leva a seguinte resultado

$$I_N^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \ln^{-2} \epsilon \frac{1}{|x - y|^d} \quad (244)$$

Agora só precisamos tomar a a nossa fonte na borda utilizando

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{d/2} \ln \epsilon)^{-1} \partial_n \phi(\epsilon, x) = \partial_n \phi(0, x) \quad (245)$$

o que leva a seguinte ação

$$I_N^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{d^2\pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(0, x) \partial_n \phi(0, y) \frac{1}{|x - y|^d} \quad (246)$$

Usando da correspondência 222 iremos encontrar a seguinte função de dois pontos

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{2\Gamma(d/2)}{d^2\pi^{d/2}} \frac{1}{|x - y|^d} \quad (247)$$

Aqui o operador $\mathcal{O}_N^{\nu=0}$ possui dimensão conforme $d/2$ enquanto que a fonte $\partial_n \phi$ se comporta como $x_0^{d/2} \ln x_0 \partial_n \phi$.

2.4.3.4 Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = d/2$

Novamente vamos usar a expansão que realizamos em 235 na ação 227 leva a uma ação dada po

$$I_N^{\nu=d/2} = \frac{(2-d)}{2} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d-2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{-2} \quad (248)$$

A integração sob os momentos (usando 704) junto com as propriedades de *Gamma*²⁰ permite escrever

$$I_N^{\nu=d/2} = -\frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d-2} \frac{1}{|x - y|^{d-2}} \quad (249)$$

Aqui a transformação da fonte para o seu valor na borda deve ser dada por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-d/2-1} \partial_n \phi(\epsilon, x) = \partial_n \phi_0(x) \quad (250)$$

Feito isso obtemos uma ação na borda dada por

$$I_N^{\nu=d/2} = -\frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n \phi_0(x) \partial_n \phi_0(y) \frac{1}{|x - y|^{d-2}} \quad (251)$$

²⁰ Foi usado as propriedades $\Gamma(1) = 0! = 1$ e $\Gamma(d/2) = (d/2 - 1)\Gamma(d/2 - 1)$ ($n = d/2 - 1$ em $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$) descritas em E.1.5.

A prescrição holográfica condizente com as condições de contorno de Neumann (descrita em 222) leva à seguinte função de 2-pontos

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^{2(\frac{d}{2}-1)}} \quad (252)$$

A dimensão do operador conforme $\mathcal{O}_N^{\nu=d/2}$ é $d/2 - 1$. Esse é o limite mínimo de dimensão permitida pela teoria de campos conforme dual. A fonte se comporta como $z^{d/2+1} \partial_n \phi_0(x)$ (obtida de 250) nas proximidades da borda de AdS_{d+1} .

2.4.3.5 Análise das funções de 2 pontos para condições de Neumann

Vamos analisar os resultados para o campo escalar massivo utilizando condições de Neumann que foram obtidos ao longe dessa seção de forma similar ao realizado para o caso das condições de Dirichlet.

Intervalo: $\nu = 0$ ou $m^2 = -d^2/4$:

A função de correlação obtido com essa condição é 247, especificamente

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{2\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (253)$$

, dela podemos obter que $\mathcal{O}_N^{\nu=0}$ possui dimensão conforme $d/2$ enquanto que a fonte $\partial_n \phi$ se comporta como $x_0^{d/2} \ln x_0 \partial_n \phi$ (obtido da equação 245). Esse comportamento é o mesmo encontrado no caso $\nu = 0$ com condições de Dirichlet para o operador $\mathcal{O}_D^{\nu=0}$ e a fonte ϕ_0 . No entanto o valor da função de 2-pontos não é o mesmo por um fator $4/d^2$. Veremos isso em mais detalhes em 2.5.

Intervalo: $\nu \neq 0, d/2$ ou $m^2 \neq -d^2/4, 0$:

Os resultados nesse caso são descritos por 241 e 242

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{1}{(d/2 - \nu)^2} \frac{\Gamma(d/2 + \nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (254)$$

$$= \frac{(2\Delta_+ - d)}{\pi^{d/2}} \frac{1}{\Delta_-^2} \frac{\Gamma(d - \Delta_-)}{\Gamma(d/2 - \Delta_-)} \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (255)$$

A fonte de operador têm o comportamento descrito por $x_0^{\frac{d}{2}-\nu} \partial_n \phi$ (obtido de 239). Já o operador possui dimensão conforme $\Delta_+ = d/2 + \nu$.

Caso não massivo $\nu = d/2$ ou $m^2 = 0$:

O processo utilizado nesse intervalo é o mesmo dos casos anteriores. A ação na camada de massas obtida com condições de contorno de Neumann foi expandida em 235 de modo a obter 251. Esse resultado permitiu obter uma função de 2-pontos em 252 dada por

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^{2(\frac{d}{2}-1)}}$$

Esse resultado indica que o operador possui a menor dimensão conforme permitida pela teoria na borda. Essa dimensão é $d/2 - 1$ e corresponde ao limite unitário. A fonte possui o comportamento dado por $z^{d/2+1} \partial_n \phi_0(x)$.

2.4.4 Condições Mistas para o campo escalar massivo

A condição de contorno mista, como foi definidas em (MINCES; RIVELLES, 2000), consiste em impor condições de contorno sob a seguinte quantidade

$$\psi^\alpha(x) \equiv \phi(x) + \alpha n^\mu \partial_\mu \phi(x) \quad (256)$$

de modo que

$$\delta[\psi^\alpha(x)] = 0 \quad (257)$$

Como foi visto em 2.2.3 essa condição leva a seguinte ação

$$I_M[\phi] = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2] + \frac{\alpha}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi n^\rho \partial_\rho \phi) \quad (258)$$

Novamente o campo que fixamos na borda serve como fonte, isso leva a seguinte prescrição

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_M(x) \psi(0, x) \right) \right\rangle \quad (259)$$

2.4.4.1 Ação na camada de massas

Vamos começar fazendo uma integração por partes em na nossa ação

$$\begin{aligned} I_M[\phi] &= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left[m^2 \sqrt{g} \phi^2 - \phi \partial^\mu (\sqrt{g} \partial_\mu \phi) \right] - \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu [\sqrt{g} \partial^\mu \phi (\phi + \alpha n^\rho \partial_\rho \phi)] \\ &= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left[m^2 \sqrt{g} \phi^2 - \phi \partial^\mu (\sqrt{g} \partial_\mu \phi) \right] - \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu [\sqrt{g} \partial^\mu \phi \psi^\alpha] \end{aligned}$$

tomado na camada de massa (usando a equação de movimento 84) obtêm-se

$$\begin{aligned} I_M^{on-shell}[\phi] &= -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \partial_\mu [\sqrt{g} \partial^\mu \phi \psi^\alpha] \\ &= -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \psi^\alpha(\epsilon, x) (n^\mu \partial_\mu) \phi(\epsilon, x) \end{aligned}$$

onde novamente usaremos $(n^\mu \partial_\mu) \phi(\epsilon, x) = -\epsilon \partial_z \phi(\epsilon, x)$ e $\sqrt{\gamma_\epsilon} = \epsilon^{-d}$

$$I_M^{on-shell}[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \epsilon^{-d+1} \psi^\alpha(\epsilon, x) \partial_z \phi(\epsilon, x) \quad (260)$$

O fato de que a nossa ação na camada de massas possuir uma dependência em α faz com que existam uma família de possíveis soluções (não ha condições em α). No caso das condições de Neumann 2.4.3 tivemos de realizar alguns passo extras para escrever o termo de borda em função da fonte escolhida. Nesse caso teremos de fazer o mesmo para escrever a ação em termos de ψ . O primeiro passo para isso é reescrever 165

$$\phi(\epsilon, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} K_\nu(k\epsilon)$$

e sua derivada 171 temos

$$\partial_0 \phi(\epsilon, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right]$$

Usando essas duas equações na definição de ψ^α em 256

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon, x^i) + \alpha n^\mu \partial_\mu \phi(\epsilon, x^i) &= \phi(\epsilon, x^i) - \alpha \epsilon \partial_z \phi(\epsilon, x^i) \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} \left\{ K_\nu(k\epsilon) \right. \\ &\quad \left. - \alpha \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right] \right\} \end{aligned}$$

onde podemos escrever

$$K_\nu(k\epsilon) - \alpha \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right] = \left[1 - \alpha \left(\frac{d}{2} + \nu \right) \right] K_\nu(k\epsilon) + \alpha k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \quad (261)$$

de modo que podemos simplificar usando expressão se definirmos²¹ $\beta(\alpha, \nu) = 1 - \alpha(d/2 - \nu)$ pois

$$1 - \alpha \left(\frac{d}{2} + \nu \right) = \beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu \quad (263)$$

Assim

$$\psi^\alpha(\epsilon, x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} \{ [\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu] K_\nu(k\epsilon) + \alpha k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \} \quad (264)$$

Fazendo a transformada de Fourier dessa quantidade com

$$\psi^\alpha(\epsilon, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \psi^\alpha(\epsilon, k) \quad (265)$$

obtemos

$$A(k) \epsilon^{\frac{d}{2}} \{ [\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu] K_\nu(k\epsilon) + \alpha k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \} = \psi^\alpha(\epsilon, k) \quad (266)$$

Isolando o coeficiente $A(k)$ permite escrever

$$A(k) = \frac{\epsilon^{-\frac{d}{2}} \psi^\alpha(\epsilon, k)}{[\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu] K_\nu(k\epsilon) + \alpha k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \quad (267)$$

Desse modo podemos escrever 171 em termos da nossa fonte

$$\partial_0 \phi(\epsilon, x^i) = \int d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \epsilon^{-1} \frac{\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu + \alpha k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (268)$$

²¹ Essa é uma adaptação da escolha feita em (MINCES; RIVELLES, 2000) para levar em conta a definição do vetor normal. A condição utilizada é

$$\beta(\alpha, \nu) = 1 + \alpha(d/2 - \nu) \quad (262)$$

Finalmente voltando para a ação 260

$$I_M^{on-shell}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu + \alpha k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (269)$$

Novamente devemos analisar os intervalos importantes para que possamos tratar corretamente a expansão das funções de Bessel. Vamos separa primeiramente em dois casos, $\beta = 0$ e $\beta \neq 0$. O primeiro caso leva a valores de com $\alpha = (d/2 - \nu)^{-1}$ e o segundo a $\alpha \neq (d/2 - \nu)^{-1}$. Dentro de cada caso devemos considerar os mesmos regimes das condições utilizados em Dirichlet/Neumann para ν . Vamos escrever o termo que devemos expandir da seguinte forma

$$\mathcal{M}^{\nu, \beta} = \frac{\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu + \alpha k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (270)$$

Antes de começarmos a expansão desse termo é conveniente escreve-lo da seguinte forma

$$\mathcal{M}^{\nu, \beta} = \frac{\mathcal{D}^\nu}{\beta(\alpha, \nu) + \alpha \left(\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^\nu \right)} \quad (271)$$

pois isso facilita o uso dos resultados já obtidos para \mathcal{D}^ν .

Expandindo $\beta = 0$:

A condição de $\beta = 0$ leva à $\alpha = \frac{1}{\frac{d}{2} - \nu}$ de modo que o termo que devemos expandir é

$$\mathcal{M}^{\nu, 0} = \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \frac{\mathcal{D}^\nu}{\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^\nu} \quad (272)$$

Vamos tomar essa relação nos mesmos regimes de ν que foram vistos nas seções anteriores. A expansão desse termo será simplificada do mesmo modo que ocorreu no caso de Neumann.

Caso $\nu \neq 0$:

Vamos trabalhar a expansão do seguinte termo

$$\mathcal{M}^{\nu \neq 0,0} = \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \frac{\mathcal{D}^{\nu \neq 0}}{\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0}} \quad (273)$$

A expansão dele pode ser simplificada se notarmos que o numerador dessa expressão é simplesmente $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ descrito por 188

$$\mathcal{D}^{\nu \neq 0} \approx \frac{d}{2} - \nu + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^2 \frac{2}{1-\nu} + \dots \quad (274)$$

No denominador podemos usar essa mesma expressão que fica na forma

$$\frac{\frac{d}{2} - \nu}{\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0}} = - \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \left(\left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^2 \frac{2}{1-\nu} + \dots \right)^{-1} \quad (275)$$

A expansão desse termo precisa ser realizada da seguinte maneira. Primeiro precisamos analisar qual o termo dominante (ou de menor potencial em ϵ). O segundo passo consiste em colocar esse termo em evidencia para que o restante da expressão fique na forma $(1+a)^{-1}$ e realizar a expansão com $a \ll 1$. Se considerarmos o intervalo $0 < \nu < 1$ o termo com menor potencia em ϵ é $\propto \epsilon^{2\nu}$. Colocando esse fator em evidencia e realizando a expansão do numerador obtemos

$$\frac{\frac{d}{2} - \nu}{\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0}} \Big|^{0 < \nu < 1} = - \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{-2\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{2\nu\Gamma(-\nu)} \left[1 - \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2-2\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{\nu(1-\nu)\Gamma(-\nu)} + \dots \right]$$

Isso leva ao fator final como

$$\mathcal{M}^{0 < \nu < 1,0} = - \left(\frac{d}{2} - \nu \right)^2 \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{-2\nu} \frac{\Gamma(\nu)}{2\nu\Gamma(-\nu)} + \dots \quad (276)$$

Se o parâmetro ν estiver no intervalo $\nu > 1$ então o termo com menor potencia em ϵ é o ϵ^2 . Colocando esse fator em evidencia obtêm-se

$$\frac{\frac{d}{2} - \nu}{\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0}} \Big|^{> 1} = - \left(\frac{d}{2} - \nu \right) \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{-2} \frac{(1-\nu)}{2} \left[1 - \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu-2} \frac{\nu(1-\nu)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \dots \right]$$

usando essa expansão o termo resultante é

$$\mathcal{M}^{\nu > 1,0} = -2(1-\nu) \left(\frac{d}{2} - \nu \right)^2 (k\epsilon)^{-2} + \dots \quad (277)$$

Caso $\nu = 0$:

O valo de $\nu = 0$ leva à $\alpha = \frac{2}{d}$. O termo de devemos expandir se torna

$$\mathcal{M}^{0,0} = \frac{d \frac{d}{2} - k\epsilon \frac{K_{0+1}(k\epsilon)}{K_0(k\epsilon)}}{2 \quad k\epsilon \frac{K_{0+1}(k\epsilon)}{K_0(k\epsilon)}} \quad (278)$$

Diferentemente dos casos anteriores vamos trabalhar a expansão diretamente para evitar problemas com os fatores $\ln \epsilon$. O termo que devemos expandir pode ser escrito como

$$\mathcal{M}^{0,0} = \frac{d^2}{4} \frac{d}{2} \frac{K_0(k\epsilon)}{k\epsilon K_1(k\epsilon)} - \frac{d}{2} \quad (279)$$

Podemos usar as expansões de K_1 e K_0 feitas no desenvolvimento 2.4.2.1. Esses resultados são

$$K_0(k\epsilon) = -\ln \epsilon \left(1 + \frac{\ln k}{\ln \epsilon} \right) + \dots$$

$$K_1^{-1}(k\epsilon) = k\epsilon \left[1 + \frac{(k\epsilon)^2}{2} (\ln k + \ln \epsilon) + \dots \right]^{-1}$$

Esse último resultado deve ser expandido novamente com a aproximação $(1+a)^{-1} \approx 1-a$ valida $a \ll 1$

$$K_1^{-1}(k\epsilon) = k\epsilon \left[1 - \frac{(k\epsilon)^2}{2} (\ln k + \ln \epsilon) \right] + \dots \quad (280)$$

Voltando para o termo original obtemos

$$\mathcal{M}^{0,0} = \frac{d^2}{4} \left[\ln \epsilon + \ln k - \frac{(k\epsilon)^2 \ln^2 \epsilon}{2} - \frac{(k\epsilon)^2 \ln^2 k}{2} - (k\epsilon)^2 \ln k \ln \epsilon \right] - \frac{d}{2} \quad (281)$$

Aqui o termo $d/2$ leva à uma contribuição do tipo de contato no função de correlação. No limite de $\epsilon \rightarrow 0$ os termos $\frac{(k\epsilon)^2 \ln^2 \epsilon}{2}$, $\frac{(k\epsilon)^2 \ln^2 k}{2}$ e $(k\epsilon)^2 \ln k \ln \epsilon$ vão a zero. O único termo que sobrevive é $\ln k$. Isso significa que podemos escrever

$$\mathcal{M}^{0,0} = \frac{d^2}{4} \ln k + \dots \quad (282)$$

Caso $\nu = d/2$:

O caso $\nu = d/2$ é divergente em $\alpha = 1/(d/2 - \nu)$. Podemos ver que isso leva à um valor nulo da seguinte forma. Se tomarmos $\nu = d/2$ em α só no final das contas podemos

escrever

$$\mathcal{M}^{\nu=d/2,0} = \alpha^{-1} \frac{D^{\nu=d/2}}{-D^{\nu=d/2}} \quad (283)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \quad (284)$$

que vai a zero com $\alpha \rightarrow \infty$. Iremos analisar esse resultado no final dessa seção.

Expandindo $\beta \neq 0$:

Vamos expandir os casos onde β não é nulo de modo que iremos carregá-lo até o final das contas.

$$\mathcal{M}^{\nu,\beta \neq 0} = \frac{\mathcal{D}^\nu}{\beta(\alpha, \nu) + \alpha \left(\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^\nu \right)} \quad (285)$$

Caso $\nu \neq 0$:

Vamos começar calculando o seguinte termo

$$\mathcal{M}^{\nu \neq 0, \beta \neq 0} = \frac{\mathcal{D}^{\nu \neq 0}}{\beta(\alpha, \nu) + \alpha \left(\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0} \right)}$$

A expansão do numerador não precisa ser calculada novamente, ele é dada por 188. O denominador precisa ser calculado e para isso vamos começar escrevendo-o da seguinte forma

$$\frac{1}{\beta(\alpha, \nu) + \alpha \left(\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0} \right)} = \frac{1}{\beta(\alpha, \nu)} \left[1 + \frac{\alpha}{\beta(\alpha, \nu)} \left(\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0} \right) \right]^{-1} \quad (286)$$

Agora usando $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ em primeira ordem e depois expandindo o resultado temos

$$\frac{1}{\beta(\alpha, \nu) + \alpha \left(\frac{d}{2} - \nu - \mathcal{D}^{\nu \neq 0} \right)} = \frac{1}{\beta(\alpha, \nu)} \left[1 + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \frac{2\nu\alpha\Gamma(-\nu)}{\beta(\alpha, \nu)\Gamma(\nu)} + \dots \right] \quad (287)$$

O resultado final fica

$$\mathcal{M}^{\nu \neq 0, \beta \neq 0} = \frac{1}{\beta(\alpha, \nu)} \left[\left(\frac{d}{2} - \nu \right) + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \dots \right] \left[1 + \left(\frac{k\epsilon}{2} \right)^{2\nu} \frac{2\nu\alpha\Gamma(-\nu)}{\beta(\alpha, \nu)\Gamma(\nu)} + \dots \right] \quad (288)$$

fazendo o produto e escrevendo apenas os termos relevantes obtemos²²

$$\mathcal{M}^{\nu \neq 0, \beta \neq 0} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\beta^2\Gamma(\nu)} \quad (289)$$

Essa expansão não é idêntica para ν não nulo inteiro e não nulo fracionário, mas o resultado final coincide (MINCES; RIVELLES, 2000).

Caso $\nu = 0$:

Vamos trabalhar a expansão de

$$\mathcal{M}^{0, \beta \neq 0} = \frac{\mathcal{D}^{\nu=0}}{\beta(\alpha, 0) + \alpha \left(\frac{d}{2} - \mathcal{D}^{\nu=0}\right)} \quad (290)$$

mas como $\beta(\alpha, 0) = 1 - \frac{d\alpha}{2}$

$$\mathcal{M}^{0, \beta \neq 0} = \frac{\mathcal{D}^{\nu=0}}{1 - \alpha\mathcal{D}^{\nu=0}} \quad (291)$$

Aqui devemos novamente utilizar a expansão que já foi calculada em 198 para o nominador

$$\mathcal{D}^{\nu=0} = \frac{d}{2} - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots \quad (292)$$

o denominador fica

$$\left[1 - \alpha\mathcal{D}^{\nu=0}\right]^{-1} = \left[1 - \frac{d\alpha}{2} - \frac{\alpha \ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots\right] \quad (293)$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha, 0)} \left[1 - \frac{\alpha \ln k}{\beta(\alpha, 0) \ln^2 \epsilon} + \dots\right] \quad (294)$$

onde usamos novamente a definição de $\beta(\alpha, 0)$ e a expansão $(1 + a)^{-1} \approx 1 - a$. Voltando para o termo original e fazendo o produto temos

$$\mathcal{M}^{0, \beta \neq 0} = \frac{1}{\beta(\alpha, 0)} \left[\frac{d}{2} - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots\right] \left[1 - \frac{\alpha \ln k}{\beta(\alpha, 0) \ln^2 \epsilon} + \dots\right] \quad (295)$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha, 0)} \left[\frac{d}{2} - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} \left(\frac{d\alpha}{2\beta(\alpha, 0)} + 1\right)\right] \quad (296)$$

²² Também é necessarios usar a definição de β para escrever $\frac{(\frac{d}{2}-\nu)\alpha}{\beta} + 1 = \frac{1}{\beta}$.

novamente usando a definição de $\beta(\alpha, 0)$ para obter que $1 + \alpha d/2\beta(\alpha, 0) = 1/\beta(\alpha, 0)$ temos

$$\mathcal{M}^{0, \beta \neq 0} \approx -\frac{\ln k}{\beta^2(\alpha, 0) \ln^2 \epsilon} \quad (297)$$

onde o termo $\propto d/2$ foi omitido pois ele não possui potencia em k e portanto será nulo na integral sob os momentos.

Caso $\nu = d/2$:

Nesse caso temos $\beta(\alpha, d/2) = 1$, substituindo isso obtemos

$$\mathcal{M}^{\nu=d/2, \beta \neq 0} = \frac{\mathcal{D}^{\nu=d/2}}{1 - \alpha \mathcal{D}^{\nu=d/2}} \quad (298)$$

O numerador pode ser obtido de $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ (calculado em 188) escrito em segunda ordem

$$\mathcal{D}^{\nu=d/2} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d+2} \frac{2\Gamma(-d/2)}{(d/2+1)\Gamma(d/2)} \quad (299)$$

Já o denominador fica como

$$\left[1 - \alpha \mathcal{D}^{\nu=d/2}\right]^{-1} \approx 1 + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\alpha\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} + \dots \quad (300)$$

Voltando para a expressão original temos

$$\mathcal{M}^{\nu=d/2, \beta \neq 0} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\Gamma(-d/2)}{2\Gamma(d/2)} \quad (301)$$

Podemos notar que esse resultado também pode ser obtido tomando $\alpha = 0$.

2.4.4.2 Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta = 0$ com $\nu \neq 0$

O valor de $\beta = 0$ permite duas soluções. Essas soluções dependem do intervalo do parâmetro ν . Precisamos calcular a ação 269 em cada um desses intervalos. A primeira expansão obtida é válida para $0 < \nu < 1$ 276. Esse resultado leva à uma ação na borda

dada por

$$I_M^{\beta=0,0<\nu<1} = \frac{2^{2\nu} \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(\nu)}{4 \nu \Gamma(-\nu)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d-2\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{-2\nu} \quad (302)$$

A integração em k usando 704 leva ao seguinte resultado

$$I_M^{\beta=0,0<\nu<1} = \frac{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(d/2 - \nu)}{4\pi^{\frac{d}{2}} \nu \Gamma(-\nu)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d-2\nu} \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2}-\nu\right)}} \quad (303)$$

A transformação que leva a fonte $\psi(\epsilon, x^i)$ para o seu valor na borda $\psi(0, x^i)$ é dada por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon^{-\frac{d}{2}-\nu} \psi(\epsilon, x^i) = \psi_0(x^i) \quad (304)$$

Isso leva à seguinte ação finita em ∂AdS_{d+1}

$$I_M^{\beta=0,0<\nu<1} = \frac{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(d/2 - \nu)}{4\pi^{\frac{d}{2}} \nu \Gamma(-\nu)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(0, y^i) \psi^\alpha(0, x^i) \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2}-\nu\right)}} \quad (305)$$

Finalmente podemos usar a correspondência AdS_{d+1}/CFT_d da forma 259 para obter a função correlação

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(y^i) \rangle = -\frac{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(d/2 - \nu)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \nu \Gamma(-\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2}-\nu\right)}} \quad (306)$$

onde podemos usar a propriedade $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$ e escrever

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(y^i) \rangle = \frac{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(d/2 - \nu)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 - \nu)} \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2}-\nu\right)}} \quad (307)$$

$$= \frac{\Delta_-^2 \Gamma(\Delta_-)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 + \Delta_- - d/2)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_-}} \quad (308)$$

Nesse caso a fonte se comporta como $z^{\Delta_+ = d/2 + \nu} \psi_0(x)$ e o operador correspondente possui dimensão conforme $\Delta_- = d/2 - \nu$. O outro resultado obtido da expansão de $\mathcal{M}^{\nu \neq 0,0}$ em 277 é válido para $\nu > 1$. Esse valor leva a uma ação na borda dada por

$$I_M^{\beta=0,\nu>1} = (1 - \nu) \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d-2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{-2} \quad (309)$$

Novamente usando a integração em 704 obtemos

$$I_M^{\beta=0, \nu>1} = \frac{(1-\nu)\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}} \left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2 \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d-2} \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \quad (310)$$

Nesse caso a transformação da fonte do interior para a borda é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon^{-\frac{d}{2}-1} \psi(\epsilon, x^i) = \psi_0(x^i) \quad (311)$$

o que resulta em

$$I_M^{\beta=0, \nu>1} = \frac{(1-\nu)\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}} \left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2 \int d^d x d^d y \psi_0^\alpha(y^i) \psi_0^\alpha(x^i) \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \quad (312)$$

Mais uma vez usando a prescrição apropriada permite calcular a função de 2 pontos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu>1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu>1}(y^i) \rangle = \frac{(\nu-1)\Gamma(d/2-1)}{4\pi^{d/2}} \left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2 \frac{1}{|x-y|^{2(\frac{d}{2}-1)}} \quad (313)$$

O operador da teoria dual $\mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu>1}$ possui dimensão conforme $d/2-1$. Isso é consistente com o limite unitária. O comportamento da fonte é $z^{d/2+1}\psi_0(x)$. Esses resultados coincidem com os obtidos em (MINCES; RIVELLES, 2000).

2.4.4.3 Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta = 0$ com $\nu = 0$

Para esse caso temos $m^2 = -\frac{d^2}{4}$ junto com $\alpha = -\frac{2}{d}$. Usando esse valores obtemos obtemos a expansão 282, substituindo na ação 269 temos

$$I_M^{\beta=0, \nu=0} = -\frac{d^2}{8} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \ln k \quad (314)$$

Fazendo o limite do campo indo para borda

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\frac{d}{2}} \psi(\epsilon, x^i) = \psi(0, x^i) \quad (315)$$

obtemos

$$I_M^{\beta=0, \nu=0} = \frac{d^2}{8} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(0, y^i) \psi^\alpha(0, x^i) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \ln k \quad (316)$$

Essa integral já foi resolvida em 213 e leva ao resultado

$$I_M^{\beta=0, \nu=0} = \frac{d^2 \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{16\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x d^d y \psi(0, x^i) \psi(0, y^i) \frac{1}{|x - y|^d} \quad (317)$$

Agora podemos usar da correspondência 259 e obter a seguinte função de dois pontos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(y^i) \rangle = \frac{d^2 \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{8\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x - y|^d} \quad (318)$$

Esse é o mesmo resultado obtido em (MINCES; RIVELLES, 2000).

2.4.4.4 Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta = 0$ com $\nu = d/2$

Esse resultado é nulo pois quando tomamos $\beta = 0$ e fazemos $\nu \rightarrow d/2$ obtemos $\alpha \rightarrow 0$. Isso significa que o termo que devemos expandir da ação 269 se comporta como 283

$$\frac{\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_{\nu}(k\epsilon)}}{\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu + \alpha k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_{\nu}(k\epsilon)}} \sim -\frac{1}{\alpha} \quad (319)$$

2.4.4.5 Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta \neq 0$ com $\nu \neq 0$

Usando 289 na integral da ação 269 temos

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0} = -\frac{2^{-2\nu} \nu \Gamma(-\nu)}{\beta^2(\alpha, \nu) \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d+2\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{2\nu} \quad (320)$$

O campo na borda deve se relacionar ao campo na interior de *AdS* através de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{\nu - \frac{d}{2}} \psi^\alpha(\epsilon, x^i) = \psi(0, x) \quad (321)$$

levando à

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0} = -\frac{2^{-2\nu} \nu \Gamma(-\nu)}{\beta^2(\alpha, \nu) \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \psi(0, y) \psi(0, x) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^{2\nu} \quad (322)$$

Essa integral sob os momentos já foi realizada no caso de Dirichlet e possui solução

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0} = -\frac{\nu \Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^2(\alpha, \nu) \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \psi(0, y) \psi(0, x) \frac{1}{|x - y|^{d+2\nu}} \quad (323)$$

Usando a correspondência 259 obtêm-se a seguinte função de 2 pontos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu \Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^2(\alpha, \nu) \Gamma(\nu)} \frac{1}{|x - y|^{d+2\nu}} \quad (324)$$

Mais uma vez esse resultado coincide com (MINCES; RIVELLES, 2000). Aqui o operador possui dimensão conforme $\Delta_+ = d/2 + \nu$ e a fonte se comporta como $z^{\Delta_- = d/2 - \nu} \psi_0(x)$.

2.4.4.6 Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta \neq 0$ com $\nu = 0$

Usando 297 na integral da ação 269

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu = 0} = \frac{1}{2\beta^2(\alpha, 0)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d} \ln^{-2} \epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \ln k \quad (325)$$

O campo deve possuir o seguinte comportamento

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{\frac{d}{2}} \ln \epsilon)^{-1} \psi(\epsilon, x) = \psi(0, x) \quad (326)$$

que leva à

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu = 0} = \frac{1}{2\beta^2(\alpha, 0)} \int d^d x d^d y \psi(0, y) \psi(0, x) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \ln k \quad (327)$$

a integral sob os momentos é idêntica a feita em 213 e tem solução

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu = 0} = -\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4\beta^2(\alpha, 0) \pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \psi(0, y) \psi(0, x) \frac{1}{|x - y|^d} \quad (328)$$

Novamente usando a correspondência 259 obtêm-se

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}(y^i) \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\beta^2(\alpha, 0) \pi^{d/2}} \frac{1}{|x - y|^d} \quad (329)$$

que coincide com (MINCES; RIVELLES, 2000). A fonte se comporta como $z^{d/2} \psi_0(x) \ln z$ e o operador dual possui dimensão conforme $d/2$.

2.4.4.7 Função de 2 pontos com condições mistas para $\beta \neq 0$ com $\nu = d/2$

Usando o resultado obtido em 301 na ação 269 temos

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu = d/2} = -\frac{d2^{-d-1}\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} k^d \quad (330)$$

Fazendo essa integral usando 704 temos

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu = d/2} = -\frac{d\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (331)$$

tomando o limite do campo na borda

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(\epsilon, x) = \psi(0, x) \quad (332)$$

temos

$$I_M^{\beta \neq 0, \nu = d/2} = -\frac{d\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(0, y^i) \psi^\alpha(0, x^i) \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (333)$$

usando a 259 obtemos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(y^i) \rangle = \frac{d\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (334)$$

que também coincide com (MINCES; RIVELLES, 2000). A fonte possui dimensão zero e o operador dimensão conforme d .

2.4.4.8 Análise das funções de 2 pontos para condições Mistas

Vamos resumir os resultado obtidos do campo escalar massivo sob condições de contorno mistas.

Intervalo: $\nu = 0$ ou $m^2 = -d^2/4$:

Dentro desse range de ν obtemos os seguintes resultados, com $\beta = 0$ foi encontrado 318, dada por

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(y^i) \rangle = \frac{d^2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{8\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (335)$$

, onde o operador $\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}$ possui dimensão $d/2$ e a fonte se comporta como $x_0^{\frac{d}{2}}\psi(0, x) = \psi(x_0, x^i)$. Para $\beta \neq 0$ o resultado é descrito em 329, especificamente

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu=0}(y^i) \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\beta^2(\alpha, 0)\pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (336)$$

, com a dimensão conforme de $\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}$ dada por $d/2$ e a fonte com o comportamento $z^{\frac{d}{2}} \ln z \psi(0, x) = \psi(z, x)$. Ambos os casos levam a operadores na borda com dimensão $d/2$ mas as funções de 2-pontos possuem normalizações diferentes e a fonte do segundo possui um fator log extra.

Intervalo: $\nu \neq 0$ ou $m^2 \neq -d^2/4$:

Nesse intervalo foram encontrado vários resultados distintos. Vamos começar enunciando os resultados com $\beta = 0$. Com esse valor foi encontrado uma função de 2-pontos válida para $0 < \nu < 1$ dada por 307

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}(y^i) \rangle = \frac{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(d/2 - \nu)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 - \nu)} \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2} - \nu\right)}} \quad (337)$$

$$= \frac{\Delta_-^2 \Gamma(\Delta_-)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 + \Delta_- - d/2)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_-}} \quad (338)$$

onde o operador $\mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}$ possui dimensão $\Delta_- = d/2 - \nu$ e a fonte se comporta como $z^{\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu} \psi(0, x) = \psi(z, x)$. O outro resultado encontrado em 313

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(y^i) \rangle = \frac{(\nu - 1)\Gamma(d/2 - 1)}{4\pi^{d/2}} \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2} - 1\right)}} \quad (339)$$

O operador aqui possui dimensão conforme $d/2 - 1$ e a fonte se comporta como $z^{d/2+1} \psi_0(x)$. Agora para $\beta \neq 0$ foi obtido 324

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^2(\alpha, \nu)\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} \quad (340)$$

$$= \frac{(2\Delta_+ - d)\Gamma(\Delta_+)}{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^2(\alpha, \nu)\Gamma(\Delta_+ - d/2)} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta_+}} \quad (341)$$

onde o operador $\mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}$ possui dimensão $\Delta_+ = d/2 + \nu$ e a fonte o comportamento $z^{\Delta_- = \frac{d}{2} - \nu} \psi^\alpha(0, x) = \psi(z, x)$.

Intervalo: $\nu = d/2$ ou $m^2 = 0$:

A função de 2 pontos para $\beta = 0$ com $\nu = d/2$ é nula como foi visto 319. Para $\beta \neq 0$ foi obtido 334 que é dada por

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(y^i) \rangle = \frac{d\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (342)$$

onde o operador $\mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}$ possui dimensão d e a fonte se comporta como $\psi(z, x) = \psi(0, x)$. Esse resultado é um caso especial do obtido com $\beta \neq 0$ e $\nu \neq 0$ da mesma forma que ocorreu no caso das condições de Dirichlet.

2.5 Conclusão e análise das funções de 2 pontos

Começamos o estudo do campo escalar massivo definindo uma ação apropriada para o espaço Anti-de Sitter 2.1. O princípio variacional, que permite obter as equações de Euler-Lagrange, foi estudado com cuidado em 2.2. Foram vistas três maneiras de se fixar a variação da ação: Dirichlet, Neumann e mistas. Essas condições de contorno (mais o termo de borda apropriado) levam à $\delta I = 0$ sem modificar as equações de movimento. A solução assintótica foi usada para desenvolver o entendimento da correspondência holográfica em 2.3. Essa solução é escrita como a soma de dois termos, um com decaimento rápido com Δ_+ e outro com decaimento lento com Δ_- . Usando a a prescrição GKP-Witten obtemos a função de 1-ponto (ou valor esperado) do operador da teoria conforme de campos dual. Isso serviu como exemplo do processo matemático da correspondência *AdS/CFT*. Além disso ele permitiu identificar a “fonte” como a parte com decaimento lento e o valor esperado do operador como a parte com decaimento rápido. A relação obtida entre a massa do campo e a dimensão do operador na teoria dual mostrou que ele não abrange todo o espectro permitido pela teoria conforme na borda. Isso é, esse resultado é limitado por $\Delta \geq d/2$ enquanto que a teoria permite $\Delta \geq d/2 - 1$. Esse problema levou ao desenvolvimento de 2.3.6 onde procura-se expandir o resultado para obter todo o espectro de Δ permitido. Segundo (KLEBANOV; WITTEN, 1999; KLEBANOV, 2000) a forma genérica da função de 2-pontos é 139

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle = \frac{(2\Delta - d)\Gamma(\Delta)}{\pi^{d/2}\Gamma(\Delta - (d/2))} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}} \quad (343)$$

Nela ambos os resultados possíveis podem ser obtidos, basta tomar $\Delta = \Delta_+, \Delta_-$. Além disso foi visto que é possível fazer uma transformação de Legendre, trocando fonte e valor

esperado do operador, para obter a outra teoria permitida. Essa transformação é 140

$$A(x) = \frac{1}{2\Delta - d} \langle \mathcal{O}(x) \rangle \quad (344)$$

Na seção seguinte 2.4 procuramos obter todos os valores de Δ permitidos pela teoria na borda usando como base o desenvolvimento de (MINCES; RIVELLES, 2000). Nele as funções de correlação são obtidas usando diferentes condições de contorno. Elas são:

- Dirichlet $\delta\phi|_{z=0} = 0$, que leva a seguinte ação na camada de massas

$$I_D^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} \partial_\mu (\sqrt{g} \phi \partial^\mu \phi)$$

que escrito em termos das fontes fica

$$I_D^{on-shell}[\phi] = -\frac{1}{2} \int_{z=\epsilon} d^d x d^d y \phi(\epsilon, x) \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \times \\ \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right] \quad (345)$$

A prescrição, com ϕ como fonte, é

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_D(x) \phi(0, x) \right) \right\rangle$$

- Neumann $\delta(\partial_n \phi_\epsilon) = 0$, com

$$I_D^{on-shell} = -I_N^{on-shell} \\ = -\frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1} \partial_\mu (\sqrt{g} \phi \partial^\mu \phi)$$

essa ação em termos das fontes fica como

$$I_N^{on-shell} = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \partial_n \phi(\epsilon, x) \partial_n \phi(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{d/2 + \nu - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}$$

e, como a fonte é $\partial_n \phi$, a prescrição fica

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_N(x) \partial_n \phi(0, x) \right) \right\rangle$$

- Mistas $\delta[\psi^\alpha(x)] = 0$ (com $\phi + \alpha n^\mu \partial_\mu \phi = \psi^\alpha$ proposto em (MINCES; RIVELLES, 2000)) que leva a ação na camada de massas

$$I_M^{on-shell} = \frac{1}{2} \int d^d x \epsilon^{-d+1} \psi^\alpha(\epsilon, x) \partial_z \phi(\epsilon, x)$$

escrita em termos da fonte como

$$I_M^{on-shell}[\phi] = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \psi^\alpha(\epsilon, y^i) \psi^\alpha(\epsilon, x^i) \epsilon^{-d} \times \\ \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{\frac{d}{2} + \nu - k \epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\beta(\alpha, \nu) - 2\alpha\nu + \alpha k \epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (346)$$

onde foi definido $\beta(\alpha, \nu) = 1 - \alpha(d/2 - \nu)$. A prescrição nesse caso é dada por

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_M(x) \psi(0, x) \right) \right\rangle$$

para a fonte ψ^α .

Vamos analisar as funções de correlação obtidas dessas teorias.

Intervalo $\nu = 0$:

Esse valor se traduz na condição para Δ e massa

$$\Delta_- = \Delta_+ = \frac{d}{2}, \quad m^2 = -\frac{d^2}{4} \quad (347)$$

Vamos escrever os resultados em termos de $\Delta_\pm|_{\nu=0} \equiv \Delta = d/2$. A solução para o campo escalar 170 em $\nu = 0$ não possui duas partes linearmente independentes. Isso significa que existe apenas possibilidade de teoria dual como foi entendido em 2.3.5. Os resultados que obtemos nesse intervalo são: Usando condições de contorno de Dirichlet obtemos uma função de 2-pontos dada por

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (348)$$

$$= \frac{\Gamma(\Delta)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}} \quad (349)$$

onde $\mathcal{O}_D^{\nu=0}$ possui dimensão $\Delta = \frac{d}{2}$ e a fonte se comporta como $z^\Delta \ln z \phi_0(x)$. O resultado obtido usando condições de Neumann para a função de correlação é

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{2\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (350)$$

$$= \frac{\Gamma(\Delta)}{2\Delta^2 \pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}} \quad (351)$$

com $\mathcal{O}_N^{\nu=0}$ possuindo dimensão conforme $\Delta = d/2$ e a fonte possui o comportamento dado por $z^{d/2} \ln z \partial_n \phi$. Em $\nu = 0$ deve existir apenas uma solução das equações de movimento

para o campo escalar massivo. O comportamento da fonte em cada caso possui um fator log e esse ponto é explicado em (KLEBANOV; WITTEN, 1999). A solução clássica para z pequeno no caso $\nu = 0$ possui dois comportamentos distintos, um dado por $z^{d/2} \ln(z/z_0)$ e outro $z^{d/2}$. Nesse caso existe apenas uma condição de contorno invariante conformalmente aceitável. Em outras palavras pode-se escolher condições que levem o campo a se comportar como $z^{d/2}$ sem termos de $z^{d/2} \ln(z/z_0)$. Mas não se pode escolher o comportamento $z^{d/2} \ln(z/z_0)$ sem termos $z^{d/2}$. Essa condição dependeria da escolha de z_0 e isso viola a invariância conforme. A função de correlação obtida com Dirichlet e Neumann são ligadas por

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle = \Delta^2 \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle \quad (352)$$

onde função de 2-pontos obtida em Neumann possui um fator $\Delta^2 = d^2/4$ extra comparada a Dirichlet. Agora vamos ver os resultados obtidos com condições de contorno mistas. Para $\beta = 0$ foi obtido

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(y^i) \rangle = \frac{d^2 \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{8\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (353)$$

$$= \frac{\Delta^2 \Gamma(\Delta)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x-y|^{2\Delta}} \quad (354)$$

onde $\mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}$ possui dimensão $d/2$ e a fonte se comporta como $z^{\frac{d}{2}} \psi(0, x)$. Podemos comparar esse resultado com os obtidos com Dirichlet/Neumann

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(y^i) \rangle = \Delta^2 \langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle \quad (355)$$

$$= \Delta^4 \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle \quad (356)$$

Essa relação é peculiar pois o fator Δ também está relacionado com α . Isso pode ser visto de

$$\beta = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\frac{d}{2} - \nu} \quad (357)$$

mas como $\nu = 0$ nesse caso temos $\alpha = \frac{2}{d}$ ou $\alpha = \frac{1}{\Delta}$. Isso faz com que essa relação possa ser entendida como

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(y^i) \rangle = \frac{1}{\alpha^2} \langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle \quad (358)$$

$$= \frac{1}{\alpha^4} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle \quad (359)$$

O outro valor permitido para condições mistas, com $\beta \neq 0$ e $\nu = 0$, leva à

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}(y^i) \rangle = \frac{\Gamma(\Delta)}{2\beta^2(\alpha, 0)\pi^{d/2}} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta}} \quad (360)$$

onde a dimensão conforme de $\mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}$ é $\Delta = d/2$ e a fonte com o comportamento $\psi_0(x)z^\Delta \ln z$. Se compararmos esse resultado com o obtido em Dirichlet/Neumann temos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu = 0}(y^i) \rangle = \frac{1}{\beta(\alpha, 0)} \langle \mathcal{O}_D^{\nu = 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu = 0}(y) \rangle \quad (361)$$

$$= \frac{\Delta^2}{\beta^2(\alpha, 0)} \langle \mathcal{O}_N^{\nu = 0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu = 0}(y) \rangle \quad (362)$$

A relação entre condições mistas ($\beta \neq 0, \nu = 0$) e Dirichlet coincide com o fato de que quando $\beta \rightarrow 1$ o caso misto recai em Dirichlet. Isso pode ser entendido da definição $\beta(\alpha, \nu) = 1 - \alpha(d/2 - \nu)$. Quando $\beta = 1$ então $\alpha = 0$ ou $\nu = d/2$. A primeira condição faz com que $\psi^\alpha = \phi + \alpha \partial_n \phi$ fique como $\psi^0 = \phi$. Esse segundo caso é o caso não-massivo e ele leva à uma condição diferente para Δ_\pm , vamos trata-lo em separado depois.

Intervalo $\nu \neq 0$:

Nesse intervalo foram feitas expansões da função de Bessel suponto que $\nu \neq 0$ (positivo e inteiro ou fracionário). A condição que surge sob a massa do campo escalar é

$$-\frac{d^2}{4} < m^2 < 1 - \frac{d^2}{4} \quad (363)$$

que coincide com (BREITENLOHNER; FREEDMAN, 1982b). Também sabemos que nesse intervalo existem duas soluções quantizáveis (KLEBANOV; WITTEN, 1999; KLEBANOV, 2000). Para tentar analisar os resultados vamos escreve-los em termos de $\Delta_+ = d/2 + \nu$ e $\Delta_- = d/2 - \nu$. O resultado obtido em usando condições de Dirichlet e $\nu \neq 0$ é

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x - y|^{2(d/2 + \nu)}} \quad (364)$$

$$= \frac{(2\Delta_+ - d)}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\Delta_+)}{\Gamma\left(\Delta_+ - \frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta_+}} \quad (365)$$

de modo que o operador possui dimensão Δ_+ e a fonte ϕ se comporta como $x_0^{\Delta_- = d/2 - \nu} \phi_0(x)$. Esse resultado coincide com o resultado geral esperado em 343 se tomarmos $\Delta = \Delta_+$. Já

para as condições de Neumann o resultado foi

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{1}{(d/2 - \nu)^2} \frac{\Gamma(d/2 + \nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x - y|^{2(d/2 + \nu)}} \quad (366)$$

$$= \frac{(2\Delta_+ - d)}{\pi^{d/2}} \frac{1}{\Delta_-^2} \frac{\Gamma(\Delta_+)}{\Gamma(\Delta_+ - d/2)} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta_+}} \quad (367)$$

de modo que o operador possui dimensão $\Delta_+ = d/2 + \nu$ e a fonte $\partial_n \phi$ se comporta como $z^{\Delta_- = \frac{d}{2} - \nu} \partial_n \phi_0(x)$. Esse caso não pode ser obtido tomando $\Delta = \Delta_-$ no resultado geral obtido em 343. Isso significa que o campo escalar com condições de Neumann não permitem obter os operadores com dimensão Δ_- na teoria dual. Ambos os casos possuem as mesmas dimensões de campos na borda e o mesmo comportamento da fonte, no entanto a forma da função de correlação é diferente

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = \Delta_-^2 \langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle \quad (368)$$

Podemos ver que ha um fator Δ_-^2 extra de modo similar ao caso anterior com $\nu = 0$. O resultado obtido com condições mistas são, para $\beta = 0$

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}(y^i) \rangle = \frac{\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \Gamma(d/2 - \nu)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 - \nu)} \frac{1}{|x - y|^{2\left(\frac{d}{2} - \nu\right)}} \quad (369)$$

$$= \frac{\Delta_-^2 \Gamma(\Delta_-)}{2\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(1 + \Delta_- - d/2)} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta_-}} \quad (370)$$

com operador de dimensão $\Delta_- = d/2 - \nu$ e a fonte se comportando como $z^{\Delta_+ = \frac{d}{2} + \nu} \psi_0(x) = \psi(z, x)$. Esse resultado é bastante peculiar. Primeiro ele leva à operadores na teoria conforme da borda com dimensão Δ_- , esse fato só foi atingido usando a transformada de Legendre em 2.3.6. O problema é que ele não possui a mesma normalização esperada pelo resultado obtido com $\Delta = \Delta_-$ em 139

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle \Big|_{\Delta = \Delta_-} = \frac{(2\Delta_- - d) \Gamma(\Delta_-)}{\pi^{d/2} \Gamma(\Delta_- - (d/2))} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta_-}} \quad (371)$$

No entanto a normalização de $\mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu \neq 0}$ parece mais apropriada pois ela recai no caso $\nu = 0$ ($\Delta = d/2$ e $\Gamma(1) = 1$)

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, 0 < \nu < 1}(y^i) \rangle \Big|_{\Delta = d/2} = \frac{\Delta^2 \Gamma(\Delta)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta}} = \langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=0}(y^i) \rangle \quad (372)$$

O segundo ponto importante sobre esse resultado é o fato dele ser valido somente para o intervalo $\nu \in (0, 1)$. Isso vêm da expansão dos termos de Bessel da ação em 275. O outro

intervalo leva à seguinte função de 2-pontos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(y^i) \rangle = \frac{(\nu - 1)\Gamma(d/2 - 1)}{4\pi^{d/2}} \left(\frac{d}{2} - \nu \right)^2 \frac{1}{|x - y|^{2(\frac{d}{2}-1)}} \quad (373)$$

onde o operador na borda $\mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}$ possui dimensão conforme $d/2 - 1$ e a fonte se comporta como $z^{d/2+1}\psi_0(x)$. Esses dois comportamentos não possuem uma dependência no fator ν e são dados pelo limite unitário permitido pela teoria conforme na borda. Esse limite foi discutido no capítulo 1.2 e depois abordado novamente em 2.3.5. O caso $\beta \neq 0$ leva ao seguinte resultado à seguinte função de 2-pontos é

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu\Gamma\left(\frac{d}{2} + \nu\right)}{\pi^{\frac{d}{2}}\beta^2(\alpha, \nu)\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x - y|^{d+2\nu}} \quad (374)$$

$$= \frac{(2\Delta_+ - d)\Gamma(\Delta_+)}{\pi^{\frac{d}{2}}\beta^2(\alpha, \nu)\Gamma(\Delta_+ - d/2)} \frac{1}{|x - y|^{2\Delta_+}} \quad (375)$$

com operador de dimensão $\Delta_+ = d/2 + \nu$ e a fonte com o comportamento de $z^{\Delta_- = \frac{d}{2} - \nu}\psi_0^\alpha(x)$. Novamente esse caso possui uma ligação com o obtido através das condições de Dirichlet dado por

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{1}{\beta^2(\alpha, \nu)} \langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle \quad (376)$$

reforçando a ideia de que quando $\beta \rightarrow 1$ o caso misto recai no de Dirichlet. E se escrevermos isso em relação ao resultado de Neumann obtemos

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{\Delta_-^2}{\beta^2(\alpha, \nu)} \langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle \quad (377)$$

Intervalo $\nu = d/2$:

Esse caso se traduz nos seguintes valor para Δ_\pm

$$\Delta_+ \Big|_{\nu=d/2} = d \quad (378)$$

$$\Delta_- \Big|_{\nu=d/2} = 0 \quad (379)$$

com massa nula. Essa massa encontra-se fora do intervalo onde é permitido duas soluções distintas. A função de correlação obtida com condições de contorno de Dirichlet é

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(y) \rangle = \frac{d}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x - y|^{2d}} \quad (380)$$

o que mostra que o operador possui a dimensão conforme d e a fonte dimensão zero. O resultado com condições de Neumann levam a seguinte função de 2-pontos

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^{2(\frac{d}{2}-1)}} \quad (381)$$

A dimensão do operador conforme $\mathcal{O}_N^{\nu=d/2}$ é $d/2 - 1$ e a fonte possui o comportamento $z^{d/2+1} \partial_n \phi_0(x)$. A dimensão do operador dual é dada pelo limite mínimo de dimensão permitida pela teoria de campos conforme dual. Aqui não temos como escrever uma relação entre esses dois resultados pelo fato da dimensão do operador na borda serem diferentes. O resultado com condições de contorno mistas e $\beta = 0$ é nulo enquanto que para $\beta \neq 0$

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(y^i) \rangle = \frac{d\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (382)$$

onde o operador possui dimensão d e a fonte se comporta como $\psi(z, x) = \psi(0, x)$ (dimensão de escala nula). Novamente o resultado obtido com $\beta \neq 0$ se relaciona com o de Dirichlet, nesse caso a relação é direta

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(y) \rangle = \langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu=d/2}(y^i) \rangle \quad (383)$$

pois, como havíamos visto, se $\beta = 1$ então $\alpha = 0$ ou $\nu = d/2$ e aqui estamos no segundo caso.

Condições Mistas como condições “generalizadas”:

Uma questão interessante sob as condições de contorno de Dirichlet/Neumann é que não podemos aplica-las simultaneamente. Esse fato foi primeiramente entendido em para o campo *espinorial* em (HENNEAUX, 1998) e depois abordado para o campo escalar em (BOSCHI-FILHO; BRAGA, 1999). O ponto principal, e relevante aqui, é que não se pode impor ambas as condições simultaneamente. Isso é, não se pode exigir que $\delta\phi$ e $\delta(\partial\phi)$ sejam fixos. Essas duas quantidades são entendidas como operadores quânticos canonicamente conjugados, eles não podem ser ambos “fixos” sem violar o princípio de incerteza. No entanto podemos tentar contornar esse problema construindo uma condição de contorno geral onde ambos os casos são descritos. Vamos analisar a condição Mista nesse sentido.

Os resultados anteriores indicam que se tomarmos $\beta = 1$ nas funções de correlação com $\beta \neq 0$ acabamos obtendo os mesmos resultados de Dirichlet. Esse fato pode ser entendido partindo da definição de $\phi + \alpha n^\mu \partial_\mu \phi = \psi^\alpha$ junto com a definição de $\beta(\alpha, \nu) =$

$1 - \alpha(d/2 - \nu)$. O caso $\beta = 1$ pode ser obtido com $\alpha = 0$ ou $\nu = d/2$. O primeiro valor leva à $\psi^0 = \phi$ de modo que tanto a ação quanto a prescrição recaem no caso de Dirichlet. O segundo valor parece indicar que nesse ponto só é possível impormos condições de Dirichlet. Também podemos descrever os resultados de Neumann com a condição mista. Segundo a definição de ψ se α for muito maior que 1 o termo dominante em $\psi = \alpha n^\mu \partial_\mu \phi \equiv \alpha \partial_n \phi$. Para β isso levaria à $\beta = -\alpha(d/2 - \nu)$. Vamos revisar a relação entre os resultados obtidos com condições mistas e de Neumann. Para $\nu = 0$ temos (com $\beta = -\frac{\alpha d}{2} = -\alpha \Delta$)

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu=0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu=0}(y^i) \rangle = \frac{\Delta^2}{\beta^2(\alpha, 0)} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle \quad (384)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle \quad (385)$$

Agora para $\nu \neq 0$ (com $\beta = -\alpha \Delta_-$)

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta \neq 0, \nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{\Delta_-^2}{\beta^2(\alpha, \nu)} \langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle \quad (386)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i) \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle \quad (387)$$

O fator $1/\alpha^2$ é entendido do fator extra que surge na prescrição holográfica das condições mistas

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x \mathcal{O}_M(x) \alpha \partial_n \phi(0, x) \right) \right\rangle \quad (388)$$

esse fator cancela o termo extra de modo que esses resultados coincidem. Um dos problemas surge que o resultado com $\nu = d/2$ não permite esse tipo de análise pois ele recai diretamente das condições mistas nas de Dirichlet. O resultado obtido com Neumann nesse intervalo é importante pois o campo na borda possui a dimensão unitária $\frac{1}{2}(d-2)$. Esse resultado também foi obtido nas condições mistas mas com $\beta = 0$. Vamos analisar novamente esse resultado. Tomando $\nu = d/2$ mas deixando $\Delta_- = d/2 - \nu$ até o final das contas permite escrever

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(y^i) \rangle = \Delta_-^2 \Big|_{\nu=d/2} \frac{(d/2 - 1)\Gamma(d/2 - 1)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x - y|^{2(\frac{d}{2}-1)}} \quad (389)$$

usando a propriedade $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(y^i) \rangle = \Delta_-^2 \Big|_{\nu=d/2} \frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x - y|^{2(\frac{d}{2}-1)}} \quad (390)$$

Agora comparando com o resultado de Neumann para $\nu = d/2$

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(y^i) \rangle = \Delta_-^2 \Big|_{\nu=d/2} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(y) \rangle \quad (391)$$

Essa relação está de acordo com as anteriores pois esse valor de β leva à $\alpha = \frac{1}{d/2-\nu}$ ou $\alpha = \frac{1}{\Delta_-}$. Isso significa que podemos escrever

$$\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(x^i) \mathcal{O}_M^{\beta=0, \nu > 1}(y^i) \rangle = \frac{1}{\alpha^2} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(y) \rangle \quad (392)$$

O fato de que as condições de contorno mistas recaem nas de Neumann para α grande é condizente com Δ_- ser pequeno pois $\alpha \Delta_- = 1$.

Desse modo podemos ver que as condições de contorno mistas permitem obter todos os valores das condições de Dirichlet e Neumann. Um ponto que deve ser abordado nesse contexto no futuro é se a introdução de correções devido a efeitos quânticos impõem condições sobre os parâmetros de $\beta(\alpha, \nu)$. Isso é de certa forma esperado pois devem existir imposições para que essas condições mistas não violem o principio de incerteza.

3 CAMPO VETORIAL

O campo escalar, estudado na capítulo anterior, serve de base para estudar a correspondência holográfica no caso do campo vetorial. Veremos no decorrer das contas que podemos simplificar o desenvolvimento dessa correspondência se utilizarmos os resultados já obtidos. Com isso em mente, quando for necessário, faremos uma pequena revisão dos resultados do campo escalar para facilitar a comparação entre eles.

A estrutura do desenvolvimento para o campo vetorial será bastante similar ao caso escalar. No capítulo 3.1 iremos definir a ação do campo vetorial no espaço curvo anti-De Sitter com $d + 1$ dimensões. Na seção seguinte, 3.2, será tratado o princípio variacional com foco nas condições de contorno necessárias para fixar sua variação em um espaço com borda. Depois disso iremos obter as equações de movimento para o campo vetorial 3.3. No decorrer desse desenvolvimento ficará claro a semelhança entre as equações de movimento das componentes do campo vetorial e do campo escalar. Com isso em mãos partiremos para o desenvolvimento das funções de correlação para o campo vetorial na seção 3.4. Esse desenvolvimento será dividido em duas partes, uma referente a utilização das equações obtidas com as condições de Dirichlet, e outra através das de Neumann. Finalmente na seção 3.5 faremos uma análise geral comparando os resultados das diferentes condições de contorno do campo vetorial e as do campo escalar.

3.1 Ação do campo massivo A_μ

O sistema que iremos estudar é descrito por campos vetoriais A_μ com $\mu = 0, 1, \dots, d+1$ vivendo no espaço-tempo Anti-de Sitter com $d + 1$ dimensões. Uma maneira de se definir isso seria começar com um sistema eletromagnético massivo em d dimensões planas (Minkowski) para depois fazer as modificações para um espaço curvo. Esse foi o caminho adotado no caso do campo escalar massivo. Não iremos fazer esse desenvolvimento novamente mas uma breve revisão do eletromagnetismo clássico foi feito no apêndice C.

A ação que descreve a dinâmica de um campo vetorial $A^\mu(x^\nu)$ onde $x^\nu = (x^0 \equiv z, x^i)$ ($i = 1, \dots, d$) com massa m_A vivendo no espaço tempo AdS_{d+1} é

$$I[A, \partial A] = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \right] \quad (393)$$

Aqui o tensor $F^{\mu\nu}$ é o tensor de “força” definido²³ como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (394)$$

O espaço AdS_{d+1} é definido como o semi-plano superior com $x^0 = z > 0$ no espaço Euclidiano. Essas definições (com $L = 1$) levam à métrica

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dz^2 + (dx^i)^2) \quad (395)$$

que se traduz nas seguintes relações

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{z^2}\delta_{\mu\nu} \quad (396a)$$

$$g^{\mu\nu} = z^2\delta^{\mu\nu} \quad (396b)$$

$$\sqrt{g} = z^{-(d+1)} \quad (396c)$$

que serão usadas no decorrer dos cálculos. Essas são as mesmas definições utilizadas no caso do campo escalar.

3.2 Fixando a ação na borda

A ação geral para o campo A_μ é escrita como

$$I[A, \partial A] = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$$

Uma variação infinitesimal das configurações dos campos junto com uma integração por partes (mesmo passos da seção 2.2) levam a seguinte equação

$$\delta I = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \right) \right) \delta A_\nu + \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} \delta A_\nu \right) \quad (397)$$

O primeiro termo são as equações Euler-Lagrange. O segundo é o termo de borda e precisamos escolher condições de contorno apropriadas para que ele seja nulo de modo

²³ A modificação da derivada parcial para a derivada covariante não modifica o tensor do campo eletromagnético pois

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma) A_\sigma \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{aligned}$$

que é válido pois $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ em um espaço sem torção.

que o princípio variacional $\delta I = 0$ seja satisfeito. Escrevendo ele com a definição do vetor normal à borda de AdS_{d+1} , dado por $n^\mu(z) = (-z, \mathbf{0})$, permite encontrar um termo análogo ao obtido no campo escalar em 69. Esse termo é

$$\delta B = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x n_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} \delta A_\nu \quad (398)$$

Se tomarmos a ação do campo vetorial descrita por 2.2 esse termo fica

$$\delta B = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} n_0 F^{0\nu} \delta A_\nu \quad (399)$$

A anti-simetria do tensor $F^{\mu\nu}$ impõe que F^{00} seja nulo e isso faz com que o campo A_0 não influencie no termo de borda de modo que para que $B = 0$ é necessário impor $i = 1, \dots, d$ condições de contorno. Isso difere do caso do campo escalar massivo onde o termo de borda envolvia apenas uma condição para o campo escalar ϕ , aqui devemos fixar todos os i termos de borda pois

$$\delta B = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} n_0 (F^{01} \delta A_1 + F^{02} \delta A_2 + \dots) \quad (400)$$

Vamos fazer uma análise similar a feita no caso do campo escalar e definir duas condições de contorno, Dirichlet e Neumann, que fixam o termo de borda. A condição mista não será abordada pois não há um entendimento completo de como essa condição interfere na fixação do calibre quando tomarmos a massa nula no final.

3.2.1 Condições de Dirichlet

A condição de Dirichlet para o campo escalar consiste em fixar a variação do campo ϕ na borda, isso é, $\delta\phi|_{z=0} = 0$. Vamos estender esse conceito aqui para todas as componentes $i = 1, \dots, d$ do campo A_i . Isso significa que devemos impor

$$\delta A_i|_{z=0} = 0 \left\{ \begin{array}{l} \delta A_1|_{z=0} = 0 \\ \delta A_2|_{z=0} = 0 \\ \vdots \\ \delta A_d|_{z=0} = 0 \end{array} \right. \quad (401)$$

para que δB nulo o que garante que $\delta I = 0$. Não é necessário a adição de termos extras.

3.2.2 Condições de Neumann

A condição de Neumann fixa a variação da derivada do campo na borda. Usando o vetor normal a superfície de AdS_{d+1} , dado por $n^\mu(z)$, podemos definir essa condição como

$$\delta(\partial_n A_i) = 0 \begin{cases} \delta(\partial_n A_1)|_{z=0} = 0 \\ \delta(\partial_n A_2)|_{z=0} = 0 \\ \vdots \\ \delta(\partial_n A_d)|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (402)$$

onde definimos $n^\mu(\epsilon)\partial_\mu A_i|_{z=\epsilon} \equiv \partial_n A_i$. Isso é análogo ao feito para o campo escalar em 2.2.2. Essa condição não torna δB nulo de modo que precisamos adicionar um termo extra na ação para que ela obedeça ao princípio variacional. Seguindo o mesmo desenvolvimento de 2.2.2 temos uma nova ação dada por

$$I_N = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \right] - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x n_0 F^{0i} A_i \quad (403)$$

Iremos utilizar essa ação quando calcularmos a função de correlação associada a condições de contorno de Neumann.

3.3 Comportamento do campo vetorial A_μ em AdS_{d+1}

Vamos trabalhar nessa seção a resolução das equações de movimento para o campo vetorial massivo no espaço-tempo Anti-de Sitter. Para isso será necessário tratar separadamente as componentes de A_μ . A componente zero é a mais simples de ser resolvida visto que a sua equação de movimento é similar a tratada no campo escalar massivo. Isso significa que o comportamento do campo A_0 se assemelha a de um campo ϕ . As outras componentes apresentam passos adicionais pois elas se encontram acopladas. Nesses passos teremos de dividir a equação em uma parcela homogênea e outra particular. Na parte homogênea teremos um resultado similar ao obtido em A_0 , já na particular será preciso supor uma forma de solução e aplicar as equações corretas para se encontrar o resultado final. Os principais passos serão realizados no decorrer desse capítulo e algumas passagens serão feitas no apêndice B.

O cálculo em detalhes da equação de movimento é feito no apêndice D.1 e leva a seguinte

equação de movimento

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - m_A^2 A^\nu = 0 \quad (404)$$

onde $\nabla_\mu V_\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} V_\mu)$. Essa equação se traduz em duas partes, uma para a componente do campo A_μ com $\mu = 0$ e outra $\mu = i$ onde $i = 1, 2, \dots, d$. Isso, usando a anti-simetria de $F^{\mu\nu}$, leva à

$$\partial_i F^{i0} - m_A^2 A^0 = 0 \quad (405)$$

$$z^{d+1} \partial_0 [z^{-(d+1)} F^{0i}] - m_A^2 A^i = 0 \quad (406)$$

Antes de solucionar essas equações precisamos escrevê-las na forma de uma equação diferencial. Esses passos são feitos em detalhes em D.3 e para A_0 têm-se

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - (1-d+m_A^2)] A_0 = 0 \quad (407)$$

Podemos ver que se $M^2 = m_A^2 - d + 1$ a equação obtida, dada por

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - M^2] A_0 = 0$$

possui a mesma forma da equação de movimento para um campo escalar de massa M . Isso permite utilizar a solução obtida em 2.4.1 com $m = M$. Esse mesmo fato não ocorre para a equação de movimento de A_i . As passagens para a sua forma diferencial estão no apêndice D.4 e levam à

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (3-d)z \partial_0 A_i - m^2] A_i = 2z^{-1} \partial_i A_0 \quad (408)$$

Como podemos ver essa equação não tem a mesma forma da obtida para o campo A_0 , no entanto, se introduzirmos campos com índices de Lorentz tal que

$$\mathbf{A}_a = e_a^\mu A_\mu \quad (409)$$

onde $e_a^\mu = x_0 \delta_a^\mu$ é o *vielbein* ($a = 0, 1, \dots, d$) podemos escrever

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - M^2] \mathbf{A}_i = 2z \partial_i \mathbf{A}_0 \quad (410)$$

Apesar dessa equação possuir uma parte acoplada com A_0 temos que a sua parte homogênea possui a mesma forma da equação do campo escalar com massa M . Para solucionarmos a parte particular iremos precisar de uma outra relação entre as componentes de

A_μ . Aplicando o operador da derivada covariante em 404 leva à

$$\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} - m^2 \nabla_\nu A^\nu = 0 \quad (411)$$

O primeiro termo é identicamente nulo²⁴ o que leva²⁵ a seguinte condição para o campo vetorial

$$\partial_i A_i = -(1-d)z^{-1}A_0 - \partial_0 A_0 \quad (412)$$

Essa relação será útil quando calcularmos a equação de movimento para o campo A_i .

3.3.1 Solução de A_0

A equação de movimento para a componente zero do campo vetorial A_μ possui a mesma forma da obtida no caso do campo escalar de modo que podemos seguir o mesmo desenvolvimento de 2.3.2. Isso leva ao seguinte resultado

$$A_0(x_0, x^i) = x_0^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} a_0(k) K_\nu(kx_0) \quad (413)$$

²⁴ Para ver isso basta notar que $\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \partial_\mu \sqrt{g} F^{\mu\nu}$, trocando a ordem das derivadas no lado direito

$$\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu \partial_\nu \sqrt{g} F^{\mu\nu}$$

fazendo a renomeação de índices $\mu \leftrightarrow \nu$ no lado direito

$$\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \partial_\mu \sqrt{g} F^{\nu\mu}$$

e usar $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ (anti-simetria)

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \partial_\mu \sqrt{g} F^{\mu\nu} \\ &= -\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Isso só pode ser satisfeito se $\nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$.

²⁵ Ver contas extras D.2

onde $a_0(k)$ são os modos normais de oscilação²⁶ do sistema. O índice ν no caso do campo vetorial é dado por

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + M^2} = \sqrt{\frac{(d-2)^2}{4} + m_A^2} \quad (414)$$

Esse resultado é obtido considerando que solução da equação para A_0 é dada por um campo escalar com massa M . Usaremos essa relação para adaptar os limites dos valores de ν na próxima seção.

3.3.2 Solução de A_i

O primeiro passo para encontrar a solução da equação de movimento para $\mathbf{A}_i = zA_i$ é escrevendo a solução como a soma de duas parcelas

$$\mathbf{A}_i(z, x^i) = \mathbf{A}_i^{(g)}(z, x^i) + \mathbf{A}_i^{(p)}(z, x^i) \quad (415)$$

onde $\mathbf{A}_i^{(g)}$ é a solução geral, ou solução da equação

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - M^2] \mathbf{A}_i^{(g)} = 0 \quad (416)$$

e $\mathbf{A}_i^{(p)}$ é a solução da equação particular dada por

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - M^2] \mathbf{A}_i^{(p)} = 2z \partial_i \mathbf{A}_0 \quad (417)$$

3.3.2.1 Solução Geral

A solução geral deve ter a mesma forma da solução para A_0 com a devida modificação dos modos normais. Isso leva à

$$\mathbf{A}_i^{(g)}(x_0, x^i) = x_0^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} a_i(k) K_\nu(kx_0) \quad (418)$$

onde $a_i(\mathbf{k})$ são os modos normais da solução geral. Podemos notar que o parâmetro ν é definido pela parte geral de modo que ele é o mesmo usado em A_0 .

²⁶ No caso do campo escalar só havia a necessidade de um, dado por A , aqui possuímos outras componentes de modo que iremos precisar do índice extra.

3.3.2.2 Solução Particular

Estamos procurando a solução da seguinte equação de movimento

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - M^2] \mathbf{A}_i^{(p)} = 2z \partial_i \mathbf{A}_0 \quad (419)$$

Podemos supor que a solução deve ter a seguinte forma

$$\mathbf{A}_i^{(p)}(z, x^i) = -2iz^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} H(kz) \quad (420)$$

onde $H(kz)$ é uma função que precisamos calcular e $a_0(\mathbf{k})$ é o modo normal definido no campo A_0 . Se substituirmos essa solução proposta em 419 iremos obter uma equação complicada para $H(kz)$. Ao invés de fazermos isso podemos usar a condição 412 para escrever $H(kz)$. Passando 412 para os índices de Lorentz temos

$$-\frac{d}{z} \mathbf{A}_0 + \partial_0 \mathbf{A}_0 + \partial_i \mathbf{A}_i = 0 \quad (421)$$

Agora substituindo a decomposição das soluções 415 temos

$$-\frac{d}{z} \mathbf{A}_0 + \partial_0 \mathbf{A}_0 + \partial_i \mathbf{A}_i^{(g)} + \partial_i \mathbf{A}_i^{(p)} = 0 \quad (422)$$

Podemos imaginar que essa relação pode ser separada em duas partes, uma relacionada a solução geral que não tem nenhum termo vindo de A_0 e outra particular que esta relacionada à A_0 . Isso se traduz em

$$\partial_i \mathbf{A}_i^{(g)} = 0 \quad (423)$$

que pode ser escrita em termo dos modos normais se substituirmos a solução geral 418

$$z^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} k_i a_i(\mathbf{k}) K_\nu(kz) = 0 \quad (424)$$

e isso leva à

$$k_i a_i(\mathbf{k}) = 0 \quad (425)$$

A outra relação que podemos retirar é sobre a solução particular

$$-\frac{d}{z} \mathbf{A}_0 + \partial_0 \mathbf{A}_0 + \partial_i \mathbf{A}_i^{(p)} = 0 \quad (426)$$

Vamos usar a solução particular proposta para $\mathbf{A}_i^{(p)}$ 420 e a solução de A_0 413. O campo A_0 com índices de Lorentz fica

$$\mathbf{A}_0 = z^{d/2+1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_0(\mathbf{k}) K_\nu(kz) \quad (427)$$

Com isso podemos obter $\partial_0 \mathbf{A}_0$ como²⁷

$$\partial_0 \mathbf{A}_0 = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\left(\frac{d}{2} + 1 \right) K_\nu(kz) + z \partial_0 K_\nu \right] z^{d/2} a_0(\mathbf{k}) \quad (428)$$

O termo com a derivada em relação as coordenadas i é

$$\partial_i \mathbf{A}_i^{(p)} = -2z^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_0(\mathbf{k}) H(kz) \quad (429)$$

Finalmente a nossa condição sob $\mathbf{A}_i^{(p)}$ é

$$-2H + \left(\frac{d}{2} + 1 \right) K_\nu + z \partial_0 K_\nu - dK_\nu = 0 \quad (430)$$

Reorganizando²⁸ essa expressão obtemos

$$H(kz) = \frac{1}{2} \left[kz \frac{\partial K_\nu(kz)}{\partial(kz)} + \left(1 - \frac{d}{2} \right) K_\nu(kz) \right] \quad (431)$$

Essa equação pode ser solucionada se utilizarmos a expansão 694. Isso leva à

$$H(kz) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) \right] \quad (432)$$

Com isso em mãos podemos escrever a nossa solução proposta 420 como

$$\mathbf{A}_i^{(p)}(z, x^i) = -iz^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) \right] \quad (433)$$

²⁷ O calculo dessa derivada é idêntico ao realizado na equação 171.

²⁸ Também foi usado que $z\partial_0 \equiv z \frac{\partial}{\partial z} = zk \frac{\partial}{\partial(kz)}$.

3.3.2.3 Solução Completa

Juntando as duas soluções, equação 418 e 433, em 415 temos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(z, x^i) = z^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \times \\ \times \left[a_i(\mathbf{k}) K_\nu(kz) - ia_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left\{ \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) \right\} \right] \end{aligned} \quad (434)$$

Esse é a solução completa para \mathbf{A}_i mas ela ainda está escrita em termos dos modos normais a_i e a_0 . O caminho para se resolver isso é realizar a transformada de Fourier do campo tomado na borda de modo a obter

$$\mathbf{A}_i(\epsilon, k) = \epsilon^{d/2} \left[a_i(\mathbf{k}) K_\nu(k\epsilon) - ia_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left\{ \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right\} \right] \quad (435)$$

Precisamos isolar cada modo normal a_i e a_0 . Para isso vamos usar a seguinte identidade²⁹

$$\mathbf{A}_i = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \mathbf{A}_j + \frac{k_i k_j}{k^2} \mathbf{A}_j \quad (436)$$

Podemos multiplicar essa equação por k_i

$$k_i \mathbf{A}_i = \underbrace{(k_j - k_j)}_{=0} \mathbf{A}_j + k_j \mathbf{A}_j \quad (437)$$

o primeiro termo deve ser $a_i(\mathbf{k})$ pois $k_i a_i(\mathbf{k}) = 0$. Isso leva à

$$\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \mathbf{A}_j(\epsilon, k) = \epsilon^{d/2} a_i(\mathbf{k}) K_\nu(k\epsilon) \quad (438)$$

o que leva à

$$a_i(\mathbf{k}) = \frac{\epsilon^{-d/2}}{K_\nu(k\epsilon)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \mathbf{A}_j(\epsilon, k) \quad (439)$$

a outra parcela fica

$$\frac{k_i k_j}{k^2} \mathbf{A}_j(\epsilon, k) = -i\epsilon^{d/2} a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left\{ \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right\} \quad (440)$$

²⁹ Essa identidade é uma decomposição, para ver que de fato ela é verdadeira basta realizar a multiplicação no lado direito e encontrar $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i$.

assim

$$a_0(\mathbf{k}) = i\epsilon^{-d/2} k_i \mathbf{A}_i(\epsilon, k) \left\{ \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right\}^{-1} \quad (441)$$

Finalmente podemos escrever a solução na borda de $\mathbf{A}_i(z, x^i)$ como (trocando $k_i \mathbf{A}_i$ por $k_j \mathbf{A}_j$ para que não estejamos escolhendo um valor específico)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(z, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} z^{d/2} \epsilon^{-d/2} \left[\frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \right] \mathbf{A}_j(\epsilon, k) \end{aligned} \quad (442)$$

Fazendo a transformada inversa de Fourier obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(z, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} z^{d/2} \epsilon^{-d/2} \left[\frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \right] \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \end{aligned} \quad (443)$$

3.4 Diferentes condições de contorno e funções de 2-pontos $\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle$

Vimos na seção anterior que existe uma relação entre as equações de movimento das componentes do campo vetorial e as do campo escalar. Isso é esperado pois o campo escalar é uma representação mínima dos campos com simetria conforme. Vamos usar esse fato para adaptar os regimes de valores para ν . Se escrevemos os resultados para o campo escalar com massa M e depois usarmos que $M^2 = m_A^2 - d + 1$ obtemos

$$-\frac{d^2}{4} + d - 1 < m_A^2 < -\frac{d^2}{4} + d \quad (444)$$

Esse é o limite de Breitenlohner-Freedman para o campo vetorial massivo. A solução com $M^2 = 0$ leva à $m_A^2 = d - 1$ com

$$\nu^2 = (d/2 - 1)^2 \quad (445)$$

Aqui temos duas possibilidades para ν , uma sendo $\nu = d/2 - 1$ e a outra $\nu = 1 - d/2$. O valor mais apropriado seria o primeiro pois, como $d > 3$, os valores de ν são positivos.

Antes de começarmos os cálculos dessa seção é conveniente reescrever os resultados das expansões feitas para o campo escalar. Veremos mais a frente que várias dessas expansões são similares às que encontraremos de modo que não será necessário recalculá-

las. Os resultados obtidos nas seções 2.4.2 e 2.4.3 são

- Para $\mathcal{D}^\nu = \left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}$ temos 188, 189 e 198

$$\mathcal{D}^{\nu \neq 0} \approx \frac{d}{2} - \nu + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{2}{1-\nu} + \dots \quad (446a)$$

$$\mathcal{D}^{\nu=d/2} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{d\Gamma(-d/2)}{\Gamma(d/2)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{1-d/2} + \dots \quad (446b)$$

$$\mathcal{D}^{\nu=0} \approx \frac{d}{2} - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots \quad (446c)$$

- Para $\mathcal{N}^\nu = \frac{1}{\mathcal{D}^\nu}$ foi obtido 230, 235 e 236

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} \approx \frac{1}{d/2 - \nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)^2\Gamma(\nu)} + \dots \quad (447a)$$

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2} = (2-d)(k\epsilon)^{-2} + \dots \quad (447b)$$

$$\mathcal{N}^{\nu=0} \approx \frac{2}{d} + \frac{4 \ln k}{d^2 \ln^2 \epsilon} + \dots \quad (447c)$$

Esses resultados serão utilizados para simplificar as contas que faremos na próxima seção.

3.4.1 Condição de Dirichlet para o campo vetorial massivo

A condições de Dirichlet para o campo $A_i(z, x)$, como vista em 3.2.1, é dada por

$$\delta A_i(0, x) = 0 \quad (448)$$

Essa condição reflete na forma da correspondência que fica como

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp\left(\int d^d x J_i(x) A_i(0, x)\right) \right\rangle \quad (449)$$

3.4.1.1 Ação na camada de massas

Para se obter a ação do campo vetorial massivo, definida em 393, na camada de massas é necessário realizar uma integração por partes. Antes disso vamos reescrever a

ação

$$I[A, \partial A] = \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right] \quad (450)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \left[(\partial_\mu A_\nu) \sqrt{g} F^{\mu\nu} + m^2 \sqrt{g} A_\mu A^\mu \right] \quad (451)$$

onde usamos a definição do tensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Feito isso podemos usar uma derivação por partes ³⁰ para escrever

$$I = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x \left\{ A_\nu \sqrt{g} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) \right] + \partial_\mu (A_\nu \sqrt{g} F^{\mu\nu}) \right\} \quad (452)$$

Tomar a nossa ação na camada de massa consiste em aplicar a equação de movimento $\nabla_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0$. Isso faz com o primeiro termo seja nulo. O segundo termo é um termo de borda pois

$$I_D^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{AdS_{d+1}} d^{d+1}x [\partial_0 (A_\nu \sqrt{g} F^{0\nu}) + \partial_i (A_\nu \sqrt{g} F^{i\nu})] \quad (453)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} A_i(\epsilon, x) n_0(\epsilon) F^{i0}(\epsilon, x) \quad (454)$$

onde usamos o fato que $F^{00} = 0$. Aqui $\gamma_\epsilon = \epsilon^{-2d}$ é o determinante da métrica tomada na borda induzida em $z = \epsilon$ e $n^0(\epsilon) = (-\epsilon, 0)$ é o vetor normal que tem direção para fora da borda induzida. Isso junto com as definições da métrica em 28 leva à

$$I_D^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \epsilon^{-1-d} A_i(\epsilon, x) F^{i0}(\epsilon, x) \quad (455)$$

A passagem para os índices de Lorentz é feita em D.7 e leva a ação

$$I_D^{on-shell} = - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i \partial_i \mathbf{A}_0 - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{-d}}{2} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i + \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i \partial_0 \mathbf{A}_i \quad (456)$$

que pode ser dividido em três parcelas dadas por

$$\text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D = - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \partial_i \mathbf{A}_0(\epsilon, x) \quad (457a)$$

$$\text{Termo}(A_i A_i)_D = - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{-d}}{2} \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \quad (457b)$$

$$\text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \partial_0 \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \quad (457c)$$

³⁰ especificamente $\partial_\mu [A_\nu \sqrt{g} F^{\mu\nu}] = (\partial_\mu A_\nu) \sqrt{g} F^{\mu\nu} + A_\nu \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu})$.

Com isso em mãos podemos usar as soluções das equações de movimento para escrevermos a ação na borda em função da fonte. Antes de tratarmos disso podemos notar que o termo $A_i A_i$ não contribui para a função de correlação. Isso pode ser visto de duas formas, primeiro ele não é análogo a nenhum termo que vimos no campo escalar massivo, segundo que ele pode ser retirado da ação na camada de massas através de uma redefinição do termo de borda (como foi feito na função de 1-ponto em 2.3.4). Também podemos ver isso diretamente, esse desenvolvimento foi feito no apêndice D.8. Assim só precisamos escrever os termos $A_i \partial_i A_0$ e $A_i \partial_0 A_i$ em função da fonte na borda.

Termo $(A_i \partial_i A_0)$:

Vamos trabalhar o termo dado por

$$\text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \partial_i \mathbf{A}_0(\epsilon, x) \quad (458)$$

Precisamos escrever esse termo em função da fonte A_i . Isso é similar ao caso do campo escalar com condições de Neumann. Esse calculo é feito no apêndice D.5 e leva ao resultado 667 que leva à

$$\text{Termo}(A_i \partial_i A_0) = \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x^i) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{2-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_i k_j \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (459)$$

A parte que devemos expandir dessa ação pode ser escrito como

$$(A_i \partial_i A_0)_D = \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} = \frac{1}{1 - d + \mathcal{D}^\nu} \quad (460)$$

Ele é similar ao obtido no campo escalar com condições de Neumann dado por $\frac{1}{\mathcal{D}^\nu}$. Isso significa que podemos obter os resultados de maneira rápida se utilizarmos os mesmos passos.

Expandindo com $\nu \neq 0$:

O termo obtido no caso de Neumann é 447a, dado por

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} \approx \frac{1}{d/2 - \nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu \Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)^2 \Gamma(\nu)} + \dots \quad (461)$$

Podemos usar esse resultado com a modificação $d/2 - \nu \rightarrow d/2 - \nu + 1 - d = 1 - d/2 - \nu$ e obter

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu \neq 0} \approx \frac{1}{1 - \nu - d/2} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu \Gamma(-\nu)}{(1 - \nu - d/2)^2 \Gamma(\nu)} + \dots \quad (462)$$

Podemos ver que, de forma similar ao campo escalar com condições de Neumann, esse resultado não é válido para $\nu \neq d/2 - 1$ (caso do campo vetorial não massivo). Vamos trabalhar essa expansão na próxima seção.

Expandindo com $\nu = d/2 - 1$:

Vamos começar escrevendo o resultado $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$, dado em 446a, tomando $\nu = d/2 - 1$. Isso leva à

$$\mathcal{D}^{\nu=d/2-1} = 1 - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{(d-2)\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2-1)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{4}{d} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{2(d-2)\Gamma(1-d/2)}{d\Gamma(d/2-1)} + \dots \quad (463)$$

onde os termos contraídos são $\propto (k\epsilon)^{d+2}$. Voltando para o termo que devemos expandir obtemos

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} = \frac{1}{2-d} \left[1 - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2-1)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{\Gamma(1-d/2)}{d/2\Gamma(d/2-1)} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{4}{d(2-d)} + \dots \right]^{-1} \quad (464)$$

Como todos os termos possuem potências positivas em ϵ podemos fazer a expansão com $(1+a)^{-1} \approx 1 - a$ e escrever

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} = \frac{1}{2-d} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(2-d)\Gamma(d/2-1)} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{\Gamma(1-d/2)}{d/2(2-d)\Gamma(d/2-1)} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^2 \frac{4}{d(2-d)^2} + \dots \quad (465)$$

O termo dominante nesse caso é o com menor potência em ϵ de modo que

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} \approx \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(2-d)\Gamma(d/2-1)} \quad (466)$$

Não precisamos escrever o termo proporcional à ϵ^0 pois sabemos, do caso do campo escalar, que ele não irá contribuir para a função de correlação.

Expandindo com $\nu = 0$:

Novamente podemos usar o caso de Neumann para facilitar as contas. Fazendo $d/2 \rightarrow 1 - d/2$ em 447c temos que o resultado é

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=0} \approx \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} + \frac{\ln k}{(1 - d/2)^2 \ln^2 \epsilon} + \dots \quad (467)$$

Termo $(A_i \partial_0 A_i)$:

Devemos desenvolver o termo dado por

$$\text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \partial_0 \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \quad (468)$$

Para isso precisamos escrever $\partial_0 \mathbf{A}_i(\epsilon, x)$ em termos de $\mathbf{A}_i(\epsilon, x)$. Esse calculo é feito no apêndice D.6. Tomando $z = \epsilon$ no resultado 677 permite escrever a ação como

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D = & - \int d^d x d^d y \frac{\epsilon^{-d}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \times \\ & \times \left[\left\{ \left(\frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} \right\} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) + k^2 \epsilon^2 - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \right] \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \end{aligned} \quad (469)$$

Esse termo pode ser simplificado tal que

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D = & - \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left[D^\nu \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(\nu - \frac{d}{2} \right) \left(\nu + \frac{d}{2} \right) + D^\nu + k^2 \epsilon^2}{1 - d + D^\nu} \right] \end{aligned} \quad (470)$$

O primeiro termo é dado pela expansão de D^ν (os resultados são dado em 446). O segundo termo possui o mesmo denominador do caso $A_i \partial_i A_0$. Isso significa que precisamos tratar somente do numerador do segundo termo e fazer o produto para obter o resultado final. Vamos chamar esse segundo fator de

$$(A_i \partial_0 A_i)_D^\nu \equiv \left[\nu^2 - d^2/4 + (k\epsilon)^2 + D^\nu \right] (A_i \partial_i A_0)_D^\nu \quad (471)$$

Expandindo com $\nu \neq 0$:

O resultado do primeiro fator já é conhecido. Ele é dado por $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$

$$\mathcal{D}^{\nu \neq 0} = \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \dots \quad (472)$$

Usando novamente $\mathcal{D}^{\nu \neq 0}$ (com os primeiros termos) temos que o numerador da segunda parte fica

$$\nu^2 - d^2/4 + (k\epsilon)^2 + \mathcal{D}^{\nu \neq 0} = (\nu - d/2)(\nu + d/2 - 1) + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \dots \quad (473)$$

o denominador desse termo já foi calculado e é dado por

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu \neq 0} \approx \frac{1}{1 - \nu - d/2} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(1 - \nu - d/2)^2 \Gamma(\nu)} + \dots \quad (474)$$

Multiplicando esses últimos dois resultados permite escrever

$$(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu \neq 0} = \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1 - d/2 + \nu}{1 - d/2 - \nu} + \dots \quad (475)$$

Expandindo com $\nu = 0$:

Novamente o valor da primeira parcela é conhecido e dado por

$$\mathcal{D}^{\nu=0} \approx -\frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots \quad (476)$$

Usando esse resultado, tomando o cuidado de escrever todos os fatores, leva ao seguinte numerador para o segundo termo

$$-d^2/4 + (k\epsilon)^2 + \mathcal{D}^{\nu} = \frac{d}{2}(2 - d/2) - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots \quad (477)$$

juntando com o resultado que já foi calculado, dado por

$$(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=0} = \frac{1}{1 - \frac{d}{2}} + \frac{\ln k}{(1 - d/2)^2 \ln^2 \epsilon} + \dots \quad (478)$$

leva ao seguinte segundo termo

$$(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=0} = -\frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} + \dots \quad (479)$$

Expandindo com $\nu = d/2 - 1$:

A primeira parcela desse termo já foi calculada em 463. O segundo termo pode ser simplificado pois tomando o valor $\nu = d/2 - 1$ nele permite escrever-lo como

$$(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=d/2-1} = \frac{1 - d + \mathcal{D}^{\nu=d/2-1} + (k\epsilon)^2}{1 - d + \mathcal{D}^{\nu=d/2-1}} \quad (480)$$

$$= 1 + \frac{(k\epsilon)^2}{1 - d + \mathcal{D}^{\nu=d/2-1}} \quad (481)$$

$$= 1 + (k\epsilon)^2 (A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} \quad (482)$$

Assim utilizando o resultado 466 temos

$$(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=d/2-1} = \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^d \frac{4\Gamma(1 - d/2)}{(2 - d)\Gamma(d/2 - 1)} \quad (483)$$

onde suprimimos os valores que não irão contribuir no final das contas.

3.4.1.2 Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu \neq 0$

A ação que devemos calcular com $\nu \neq 0$ é

$$I_D^{\nu \neq 0} = \text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu \neq 0} + \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu \neq 0}$$

Vamos calcular cada uma dessas integrais em separado. A primeira integral é obtida substituindo o resultado 462 em 459

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu \neq 0} &= -\frac{\nu 2^{-2\nu} \Gamma(-\nu)}{(1 - \nu - d/2)^2 \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(z, x^i) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{2-d+2\nu} \times \\ &\times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_i k_j}{k^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} k^{2\nu+2} \end{aligned} \quad (484)$$

Essa integral pode ser feita usando 707 o que leva ao resultado

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu \neq 0} &= -\frac{2\nu \Gamma(d/2 + \nu + 1)}{\pi^{d/2} (1 - \nu - d/2)^2 \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(z, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{2-d+2\nu} \times \\ &\times \left\{ \delta_{ij} - (2\nu + 2 + d) \frac{(x - y)_i (x - y)_j}{|x - y|^2} \right\} \frac{1}{|x - y|^{d+2\nu+2}} \end{aligned} \quad (485)$$

Antes de tomar a fonte na borda vamos calcular a segunda integral. Esse termo é obtido usando 470 e 475

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu \neq 0} &= -\frac{2^{-2\nu} \nu \Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{-d+2\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} k^{2\nu} \times \\ &\quad \times \left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1-d/2+\nu}{1-d/2-\nu} \right] \end{aligned} \quad (486)$$

que pode ser simplificado para

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu \neq 0} &= -\frac{2^{-2\nu} \nu \Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{-d+2\nu} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} k^{2\nu} \times \\ &\quad \times \left[\delta_{ij} + \frac{2\nu}{1-d/2-\nu} \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \end{aligned} \quad (487)$$

fazendo a integração sob os momentos temos

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu \neq 0} &= \frac{d/2+\nu}{1-d/2-\nu} \frac{\nu \Gamma(d/2+\nu)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{-d+2\nu} \times \\ &\quad \times \left[\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} \end{aligned} \quad (488)$$

O próximo passo é tomar essa ação na borda. Antes de escrevermos a transformação que leva a fonte para a borda vamos escrever a ação em termos dos campos A do interior de AdS_{d+1} . Esses termos ficam

$$\text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu \neq 0} \propto \int d^d x d^d y A_i(z, x) A_j(\epsilon, y) \epsilon^{4-d+2\nu} \dots \quad (489)$$

$$\text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu \neq 0} \propto \int d^d x d^d y A_i(\epsilon, x) A_j(\epsilon, y) \epsilon^{2-d+2\nu} \dots \quad (490)$$

Precisamos escrever a transformação que leva a fonte em $z = \epsilon$ para $z = 0$. Os dois termos da nossa ação não possuem a mesma potencia em ϵ de modo que um deles vai ser nulo na borda. O termo com menor potencia leva a seguinte transformação de escala

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-\frac{d}{2}+\nu} A_i(\epsilon, x) = A_i(0, x) \quad (491)$$

Essa transformação faz com que somente o termo $A_i \partial_0 A_i$ sobreviva. Desse modo a ação tomada na borda de AdS_{d+1} fica como

$$\begin{aligned} I_D^{\nu \neq 0} &= \frac{d/2+\nu}{1-d/2-\nu} \frac{\nu \Gamma(d/2+\nu)}{\pi^{d/2} \Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y A_i(0, x) A_j(0, y) \\ &\quad \left[\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} \end{aligned} \quad (492)$$

Isso leva a seguinte função de 2-pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = -\frac{d/2 + \nu}{1 - d/2 - \nu} \frac{2\nu\Gamma(d/2 + \nu)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x - y|^{d+2\nu}} - \frac{2(x - y)_i(x - y)_j}{|x - y|^{d+2\nu+2}} \right) \quad (493)$$

mas usando as propriedades de Γ descritas em E.1.5 podemos escrever

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = \frac{2\nu(d/2 + \nu)\Gamma(d/2 + \nu - 1)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \left(\delta_{ij} - 2\frac{(x - y)_i(x - y)_j}{|x - y|^2} \right) \frac{1}{|x - y|^{2(d/2 + \nu)}} \quad (494)$$

onde o operador dual na borda possui dimensão conforme $d/2 + \nu$. A fonte nesse caso possui o comportamento dado por $z^{d/2-1-\nu}A_i(0, x)$ nas proximidades da borda.

3.4.1.3 Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = 0$

A ação que devemos calcular com $\nu = 0$ é

$$I_D^{\nu=0} = \text{Termo}(A_i\partial_i A_0)_D^{\nu=0} + \text{Termo}(A_i\partial_0 A_i)_D^{\nu=0} \quad (495)$$

onde o primeiro termo é obtido substituindo a expansão 467 em 459

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i\partial_i A_0)_D^{\nu=0} &= \frac{1}{2(1 - d/2)^2} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(z, x^i) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{2-d}}{\ln^2 \epsilon} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_i k_j}{k^2} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} k^2 \ln k \end{aligned} \quad (496)$$

Já o segundo é calculado juntando o resultado 479 e 470

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i\partial_0 A_i)_D^{\nu=0} &= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{-d}}{\ln^2 \epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \\ &\quad \left[-\ln k \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) - \ln k \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \end{aligned} \quad (497)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{-d}}{\ln^2 \epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \delta_{ij} \ln k \quad (498)$$

Antes de fazermos a integração sob os momentos vamos tomar a ação na borda. Isso é conveniente pois como vimos no caso $\nu \neq 0$ apenas uma das parcelas sobrevive. Voltando

para os índices do espaço AdS temos

$$\text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=0} \propto \int d^d x d^d y A_i(z, x^i) A_j(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{4-d}}{\ln^2 \epsilon} \cdots \quad (499)$$

$$\text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=0} \propto \int d^d x d^d y A_i(\epsilon, x) A_j(\epsilon, y) \frac{\epsilon^{2-d}}{\ln^2 \epsilon} \cdots \quad (500)$$

A transformação de escala que precisamos fazer nesse caso é

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{\frac{d}{2}-1} \ln \epsilon)^{-1} A_i(\epsilon, x) = A_i(0, x) \quad (501)$$

Novamente apenas o termo $A_i \partial_0 A_i$ sobrevive. A integral sob o momento já foi feita no caso do campo escalar e leva à

$$I_D^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x d^d y A_i(0, x) A_j(0, y) \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} \quad (502)$$

Usando a correspondência obtemos a seguinte função de 2 pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} \quad (503)$$

Nesse caso a fonte se comporta como $(z^{d/2-1} \ln z) A_i(0, x)$ e o operador dual possui dimensão conforme $d/2$.

3.4.1.4 Função de 2 pontos com condições de Dirichlet para $\nu = d/2 - 1$

A ação na borda nesse caso é dada por

$$I_D^{\nu=d/2-1} = \text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} + \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=d/2-1} \quad (504)$$

Novamente vamos calcular os termos separadamente antes de tomarmos a fonte na borda. O primeiro termo é obtida com a expansão 466 em 459

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} &= \frac{\Gamma(1-d/2)}{2^d(1-d/2)\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(z, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{k_i k_j}{k^2} k^d \end{aligned} \quad (505)$$

Fazendo a integração sob os momentos usando 707 e usando as propriedades do *Gamma* dadas em E.1.5 leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} &= -\frac{1}{2\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d/2)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(z, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \times \\ &\quad \times \left[\delta_{ij} - 2d \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d}} \end{aligned} \quad (506)$$

O segundo termo é obtido substituindo a expansões 483 e 463 em 470 de modo a obter

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=d/2-1} &= -\frac{(d/2-1)\Gamma(1-d/2)}{2^{d-2}\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{-2} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[\delta_{ij} k^{d-2} - \frac{k_i k_j}{k^2} k^{d-2} \right] \end{aligned} \quad (507)$$

Realizando a integração sob os momentos usando 704 e 707 leva à

$$\begin{aligned} \text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D &= -\frac{\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \epsilon^{-2} \times \\ &\quad \times \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \end{aligned} \quad (508)$$

Antes de tomarmos a nossa fonte na borda vamos escreve-las em termos dos índices do espaço AdS_{d+1} . Isso leva à

$$\text{Termo}(A_i \partial_i A_0)_D^{\nu=d/2-1} \propto \int d^d x d^d y A_i(\epsilon, x) A_j(\epsilon, y) \epsilon^2 \dots \quad (509)$$

$$\text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D^{\nu=d/2-1} \propto \int d^d x d^d y A_i(\epsilon, x) A_j(\epsilon, y) \dots \quad (510)$$

Desse modo podemos ver que a transformação das fontes deve ser dado por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_i(\epsilon, x) = A_i(0, x) \quad (511)$$

Isso faz com que somente as contribuições do termo $A_i \partial_0 A_i$ sobrevivam na borda. Isso leva a seguinte ação

$$\begin{aligned} I_D^{\nu=d/2-1} &= -\frac{\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y A_i(0, x) A_j(0, y) \times \\ &\quad \times \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \end{aligned} \quad (512)$$

Agora a prescrição dada por 449 leva a seguinte função de 2-pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} = \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left[\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \quad (513)$$

Aqui o operador da *CFT* dual possui dimensão $d - 1$ e a fonte possui o comportamento dado por $A_i(0, x)$ (dimensão conforme nula).

3.4.1.5 Análise das funções de 2 pontos para condições de Dirichlet

Vamos resumir os resultados obtidos quando se aplica condições de contorno de Dirichlet no campo vetorial.

Intervalo: $\nu \neq 0$ ou $m_A^2 \neq -d^2/4 + d - 1$:

Nesse intervalo foi encontrado uma função de 2-pontos em 494 dado por

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = \frac{2\nu(d/2 + \nu)\Gamma(d/2 + \nu - 1)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \left(\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (514)$$

onde o operador da teoria da borda possui dimensão conforme $d/2 + \nu$ e a fonte possui um comportamento dado por $z^{d/2-1-\nu} A_i(0, x)$.

Intervalo: $\nu = 0$ ou $m_A^2 = -d^2/4 + d - 1$:

As expansões das funções de Bessel levaram a uma função de 2-pontos 503

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} \quad (515)$$

O operador dual possui dimensão conforme $d/2$. A fonte nesse caso se comporta como $(z^{d/2-1} \ln z) A_i(0, x)$. O comportamento logarítmico é esperado se compararmos esse resultado com o obtido no caso do campo escalar massivo com $\nu = 0$.

Intervalo: $\nu = d/2 - 1$ ou $m_A^2 = 0$:

O resultado obtido nesse caso foi descrito em 513 e é dado por

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} = \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2 - 1)} \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (516)$$

onde o operador possui dimensão $d - 1$ e a fonte dimensão conforme zero (se comporta como $A_i(0, x)$). Podemos notar que esse resultado pode ser obtido tomando o valor de $d/2 - 1$ no resultado com $\nu \neq 0$. Tomando esse valor e usando as propriedades de *Gamma* descritas em E.1.5 permite escrever

$$\begin{aligned} \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} \Big|_{\nu=d/2-1} &= \frac{(d-2)(d-1)\Gamma(d-2)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left(\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \\ &= \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left(\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \\ &= \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} \end{aligned}$$

3.4.2 Condição de Neumann para o campo vetorial massivo

Podemos impor condições de Neumann sob os campos na borda como foi descrito em 3.2.2. Isso significa impor que

$$\delta(\partial_n A_i) \Big|_{z=0} = 0 \quad (517)$$

onde $n^\mu(x_0) = (x_0, \mathbf{0})$ de modo que $n^\mu(\epsilon)\partial_\mu A_i \equiv \partial_n A_i$. Essa condição não cancela a variação da ação 393 assim devemos adicionar um contra termo de borda. Isso foi calculado em 3.2.2 e a ação que devemos utilizar é

$$I_N = \int_{AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right] - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} n_0 F^{0i} A_i \quad (518)$$

Tomando essa ação na camada de massa leva à

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} A_\nu(\epsilon, x) n_0(\epsilon) F^{\nu 0}(\epsilon, x) \quad (519)$$

O sinal negativo não é o ponto principal, o importante é notar que a nossa fonte passa a ser $\partial_n A_i(z, x) \Big|_{z=0}$ de modo que a prescrição holográfica fica como

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x J_i(x) \partial_n A_i(0, x) \right) \right\rangle \quad (520)$$

3.4.2.1 Ação na camada de massas

Não é difícil notar que a única modificação necessária nessa parte vem do sinal negativo, isso é, $I_D^{on-shell} = -I_N^{on-shell}$. Assim temos

$$I_N^{on-shell} = \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i \partial_i \mathbf{A}_0 + \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{-d}}{2} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{2} \mathbf{A}_i \partial_0 \mathbf{A}_i \quad (521)$$

Vimos na seção 3.4.1, onde tratamos das condições de Dirichlet para o campo vetorial, que somente o termo $A_i \partial_0 A_i$ contribui para a função de correlação. Podemos utilizar essa informação para simplificar a nossa ação para

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \epsilon^{1-d} \mathbf{A}_i \partial_0 \mathbf{A}_i \quad (522)$$

Essa ação precisa ser escrita em termos da fonte $\partial_n A_i$. Isso significa que devemos obter uma relação entre $a_i(\mathbf{k})$ e $a_0(\mathbf{k})$ com a derivada $\partial_n A_i$. Vamos começar com 434

$$\mathbf{A}_i(z, x^i) = z^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[a_i(\mathbf{k}) K_\nu(kz) - i a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left\{ \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) \right\} \right] \quad (523)$$

tomando a derivada em z dela

$$\partial_z \mathbf{A}_i(z, x^i) = z^{d/2-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ a_i(\mathbf{k}) \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) \right] - i a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) + (kz)^2 K_\nu(kz) \right] \right\} \quad (524)$$

Agora fazendo $z = \epsilon$ e escrevendo a transformada de Fourier de $\partial_n A_i(\epsilon, x)$ (lembrando que $\partial_n = \epsilon \partial_z$)

$$\begin{aligned} \partial_n \mathbf{A}_i(z, x^i) &= \epsilon^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ a_i(\mathbf{k}) \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right] - i a_0(\mathbf{k}) \frac{k_i}{k^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) + (k\epsilon)^2 K_\nu(k\epsilon) \right] \right\} \\ &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \partial_n A_i(\epsilon, k) \end{aligned}$$

o que indica que

$$\begin{aligned} \partial_n A_i(\epsilon, k) = a_i(\mathbf{k}) \epsilon^{d/2} & \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right] \\ & - i a_0(\mathbf{k}) \epsilon^{d/2} \frac{k_i}{k^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) + (k\epsilon)^2 K_\nu(k\epsilon) \right] \end{aligned}$$

Agora precisamos identificar novamente a_i e a_0 e para isso faremos passos similares aos realizados em 3.3.2. Vamos começar escrevendo a decomposição como

$$\partial_n \mathbf{A}_i = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \partial_n \mathbf{A}_j + \frac{k_i k_j}{k^2} \partial_n \mathbf{A}_j \quad (525)$$

A relação $k_i a_i(\mathbf{k}) = 0$ ainda é valida pois podemos fazer a permutação de k_i com o operador diferencial ∂_n de modo que $k_i \partial_n a_i(\mathbf{k}) = 0$. Isso leva as seguintes relações

$$a_i(\mathbf{k}) \epsilon^{d/2} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right] = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, k)$$

que simplificada fica como

$$-i a_0(\mathbf{k}) \epsilon^{d/2} \frac{k_i}{k^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) + (k\epsilon)^2 K_\nu(k\epsilon) \right] = \frac{k_i k_j}{k^2} \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, k)$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{k}) &= \frac{\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon^{-d/2} \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, k)}{\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \\ a_0(\mathbf{k}) &= \frac{i \epsilon^{-d/2} k_j \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, k)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) + (k\epsilon)^2 K_\nu(k\epsilon)} \end{aligned}$$

Com isso em mãos podemos voltar para $A_i(z, x)$ e escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i(z, x^i) &= z^{d/2} \epsilon^{-d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\frac{\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) K_\nu(kz)}{\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) + (k\epsilon)^2 K_\nu(k\epsilon)} \right] \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, k) \end{aligned}$$

Fazendo a sua transformação inversa de Fourier

$$\mathbf{A}_i(z, x^i) = z^{d/2} \epsilon^{-d/2} \int d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[\frac{\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) K_\nu(kz)}{\left(\frac{d}{2} + \nu\right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) \left(\frac{d}{2} + \nu\right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) + (k\epsilon)^2 K_\nu(k\epsilon)} \right] \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y)$$

Agora tomando esse termo em $z = \epsilon$ e escrevendo ele de uma forma mais familiar

$$\mathbf{A}_i(\epsilon, x^i) = \int d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[\frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) \left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} + (k\epsilon)^2} \right] \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y)$$

Esse é o termo apropriado para calcular a função de 2 pontos utilizando condições de Neumann. Voltando para a ação temos

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[\frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}}{\left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu\right) \left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} + (k\epsilon)^2} \right] \quad (526)$$

Vamos usar as quantidades que já foram calculadas para o caso do campo escalar para reduzir a quantidade de termos que devemos expandir. Escrevendo essa ação com esse proposito leva à

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \epsilon^{-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times \left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \mathcal{N}^\nu + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1 - d + \mathcal{D}^\nu}{(\nu - d/2)(\nu + d/2) + \mathcal{D}^\nu + (k\epsilon)^2} \right] \quad (527)$$

O primeiro fator pode ser obtido diretamente da solução para o campo escalar massivo com condições de Neumann (só iremos precisar calcular o caso não massivo com $\nu = d/2 - 1$). Podemos definir o segundo termo como

$$(A_i \partial_0 A_i)_N^\nu = \frac{1 - d + \mathcal{D}^\nu}{(\nu - d/2)(\nu + d/2) + \mathcal{D}^\nu + (k\epsilon)^2} \quad (528)$$

para facilitar a sua expansão.

Expandindo com $\nu \neq 0$:

O primeiro termo é dado por 447a onde

$$\mathcal{N}^{\nu \neq 0} \approx \frac{1}{d/2 - \nu} - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(d/2 - \nu)^2\Gamma(\nu)} + \dots \quad (529)$$

No segundo fator devemos usar os resultados de 446a de modo que o numerador fica

$$1 - d + D^{\nu \neq 0} = 1 - \frac{d}{2} - \nu + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} + \dots \quad (530)$$

Já o denominador fica como

$$\begin{aligned} [\nu^2 - d^2/4 + (k\epsilon)^2 + D^{\nu \neq 0}]^{-1} &= \frac{1}{(\nu + d/2 - 1)(\nu - d/2)} \\ &\quad - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{(\nu + d/2 - 1)^2(\nu - d/2)^2\Gamma(\nu)} + \dots \end{aligned} \quad (531)$$

O produto deles resulta em

$$(A_i \partial_0 A_i)^{\nu \neq 0}_N = \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{2\nu} \frac{2\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{(\nu + 1 - d/2)}{(\nu + d/2 - 1)(\nu - d/2)^2} + \dots \quad (532)$$

Expandindo com $\nu = 0$:

Novamente o primeiro termo já é conhecido. Ele é dado por 447c

$$\mathcal{N}^{\nu=0} = \frac{\ln k}{\frac{d^2}{4} \ln^2 \epsilon} + \dots \quad (533)$$

O segundo termo deve ser calculado usando 446c. O numerador fica como

$$1 - d + \mathcal{D}^{\nu=0} = 1 - \frac{d}{2} - \frac{\ln k}{\ln^2 \epsilon} \quad (534)$$

já o denominador pode ser escrito como

$$\begin{aligned} [-d^2/4 + (k\epsilon)^2 + D^{\nu=0}]^{-1} &= \frac{1}{d/2(1 - d/2)} + \frac{\ln k}{[d/2(1 - d/2)]^2 \ln^2 \epsilon} - \left[\frac{k\epsilon}{d/2(1 - d/2)}\right]^2 + \dots \end{aligned} \quad (535)$$

Multiplicando os resultados obtemos

$$(A_i \partial_0 A_i)_N^{\nu=0} = \frac{\ln k}{\frac{d^2}{4} \ln^2 \epsilon} + \dots \quad (536)$$

Expandindo com $\nu = d/2 - 1$:

Nesse caso o primeiro termo deve ser obtido do resultado $\nu \neq 0$ que foi calculado em 447a. Tomando o caso desejado obtemos

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2-1} = 1 - \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{(d-2)\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2-1)} + \dots \quad (537)$$

O segundo termo é obtido usando o resultado de $\mathcal{D}^{\nu=d/2-1}$ (calculado em 463) de modo a obter

$$\begin{aligned} (A_i \partial_0 A_i)_N^{\nu=d/2-1} &= \frac{1-d+\mathcal{D}^{\nu=d/2-1}}{1-d+\mathcal{D}^{\nu=d/2-1}+(k\epsilon)^2} \\ &= \left[2-d + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{(d-2)\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2-1)} + \dots \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2-d} + \left(\frac{k\epsilon}{2}\right)^{d-2} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(d-2)\Gamma(d/2-1)} + \dots \right] \\ &= 1 + \dots \end{aligned}$$

O termo $\propto (k\epsilon)^{d-2}$ se cancela de modo que não temos contribuições dessa parcela na função de correlação.

3.4.2.2 Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu \neq 0$

Voltando com os resultados de $\mathcal{N}^{\nu \neq 0}$ e 532 para a ação 527 permite escrever

$$\begin{aligned} I_N^{\nu \neq 0} &= -\frac{\nu\Gamma(-\nu)}{2^{2\nu}(\nu-d/2)^2\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \epsilon^{-d+2\nu} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left[-\delta_{ij} k^{2\nu} + \frac{k_i k_j}{k^2} k^{2\nu} \frac{2\nu}{\nu+d/2-1} \right] \end{aligned} \quad (538)$$

A integração sob os momentos usando 707 e 704 leva ao seguinte termo

$$I_N^{\nu \neq 0} = \frac{\nu(\nu + d/2)\Gamma(d/2 + \nu)}{\pi^{d/2}(\nu - d/2)^2(\nu + d/2 - 1)\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \epsilon^{-d+2\nu} \times \left[\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} \quad (539)$$

Agora escrevendo esse termo usando os índices³¹ de Poincaré do espaço *AdS* e usando as propriedades de *Gamma* leva à

$$I_N^{\nu \neq 0} = \frac{\nu\Gamma(d/2 + \nu + 1)}{\pi^{d/2}(\nu - d/2)^2(\nu + d/2 - 1)\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n A_j(\epsilon, y) \partial_n A_i(\epsilon, x) \epsilon^{2-d+2\nu} \times \left[\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} \quad (540)$$

Para tomar a fonte na borda devemos fazer a seguinte transformação

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{1-d/2+\nu} \partial_n A_i(\epsilon, x) = \partial_n A_i(0, x) \quad (541)$$

o que leva à

$$I_N^{\nu \neq 0} = \frac{\nu\Gamma(d/2 + \nu + 1)}{\pi^{d/2}(\nu - d/2)^2(\nu + d/2 - 1)\Gamma(\nu)} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(0, y) \partial_n \mathbf{A}_i(0, x) \times \left[\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{d+2\nu}} \quad (542)$$

A prescrição holográfica 520 permite obter a seguinte função de 2-pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} = -\frac{2\nu\Gamma(d/2 + \nu + 1)}{\pi^{d/2}(\nu - d/2)^2(\nu + d/2 - 1)\Gamma(\nu)} \left[\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (543)$$

onde o operador possui dimensão conforme $d/2 + \nu$. A fonte nesse caso se comporta como $z^{d/2-1-\nu} \partial_n A_i(0, x)$.

³¹ Qualquer fator extra que aparece pelo mudança para os índices originais não influencia a função de correlação pois esse termo não seria escrito em função das fontes.

3.4.2.3 Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = 0$

Substituindo os resultados de $\mathcal{N}^{\nu=0}$ e 536 em 527 obtemos

$$I_N^{\nu=0} = -\frac{2}{d^2} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) (\epsilon^d \ln^2 \epsilon)^{-1} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \delta_{ij} \ln k \quad (544)$$

onde os termos $\propto \frac{k_i k_j}{k^2}$ se cancelam. Essa integral sob os momentos é a mesma que foi realizada no campo escalar massivo com condições de Dirichlet. Ela leva ao seguinte resultado

$$I_N^{\nu=0} = \frac{\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) (\epsilon^d \ln^2 \epsilon)^{-1} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (545)$$

O próximo passo é escrever esse resultado com os índices de Poincaré do espaço Anti-de Sitter

$$I_N^{\nu=0} = \frac{\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n A_j(\epsilon, y) \partial_n A_i(\epsilon, x) (\epsilon^{d-2} \ln^2 \epsilon)^{-1} \frac{1}{|x-y|^d} \quad (546)$$

e tomar a nossa ação na borda. Isso é feito através de

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon^{d/2-1} \ln \epsilon)^{-1} \partial_n A_i(\epsilon, x) = \partial_n A_i(0, x) \quad (547)$$

que leva à

$$I_N^{\nu=0} = \frac{\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \int d^d x d^d y \partial_n A_j(0, y) \partial_n A_i(0, x) \frac{1}{|x-y|^d} \quad (548)$$

Se utilizarmos a prescrição holográfica dada por 520 iremos obter a seguinte função de 2-pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=0} = -2 \frac{\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^d} \quad (549)$$

A fonte possui um comportamento nas proximidades da borda dada por $(z^{d/2-1} \ln z) \partial_n A_i(0, x)$ e o operador dual dimensão conforme $d/2$.

3.4.2.4 Função de 2 pontos com condições de Neumann para $\nu = d/2 - 1$

Vamos começar substituindo o resultado obtido em 537 na ação 527 (lembrando que o termo $(A_i \partial_0 A_i)_N^{\nu=d/2-1}$ não contribui com termos relevantes). Isso leva à

$$I_N^{on-shell} = \frac{2^{1-d}(d-2)\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \epsilon^{-2} \times \\ \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) k^{d-2} \quad (550)$$

Agora realizando a integração sob os momentos, utilizando 707 e 704, leva ao seguinte resultado

$$I_N^{on-shell} = \frac{\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \partial_n \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \partial_n \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \epsilon^{-2} \times \\ \times \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \quad (551)$$

Escrevendo essa ação com os índices de AdS leva à

$$I_N^{on-shell} = \frac{\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \partial_n A_j(\epsilon, y) \partial_n A_i(\epsilon, x) \times \\ \times \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \quad (552)$$

o que indica que a fonte se comporta como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_i(\epsilon, x) = A_i(0, x) \quad (553)$$

A ação na borda se torna

$$I_N^{on-shell} = \frac{\Gamma(d)}{2\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \int d^d x d^d y \partial_n A_j(0, y) \partial_n A_i(0, x) \times \\ \times \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \quad (554)$$

A prescrição holográfica para a fonte de Neumann, descrita em 520, leva à seguinte função de 2-pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=d/2-1} = - \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i (x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (555)$$

Nesse caso o operador da teoria dual possui dimensão conforme $d-1$ e a fonte se comporta como $A_i(0, x)$ (dimensão nula).

3.4.2.5 Análise das funções de 2 pontos para condições de Neumann

Vamos resumir os resultados obtidos do campo vetorial massivo com condições de contorno de Neumann.

Intervalo: $\nu \neq 0$ ou $m_A^2 \neq -d^2/4 + d - 1$:

A condição de ν positivo e diferente de zero leva a uma função de 2-pontos em 543 dada por

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} = -\frac{2\nu\Gamma(d/2 + \nu + 1)}{\pi^{d/2}(\nu - d/2)^2(\nu + d/2 - 1)\Gamma(\nu)} \left[\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (556)$$

onde a fonte se comporta como $z^{d/2-1-\nu}\partial_n A_i(0, x)$ e o operador dual possui dimensão $d/2 + \nu$.

Intervalo: $\nu = 0$ ou $m_A^2 = -d^2/4 + d - 1$:

Nesse caso foi obtida uma função de correlação em 549 dada por

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{d^2\pi^{d/2}} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} \quad (557)$$

com a fonte possuindo um comportamento dado por $(z^{d/2-1} \ln z)\partial_n A_i(0, x)$ e o operador dual com dimensão conforme $d/2$.

Intervalo: $\nu = d/2 - 1$ ou $m_A^2 = 0$:

O resultado desse caso é descrito por 555, onde

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=d/2-1} = -\frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2 - 1)} \left[\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (558)$$

com a fonte se comporta como $A_i(0, x)$. A dimensão conforme do operador dual é $d - 1$. Podemos ver que esse resultado pode ser encontrado se partirmos do obtido com $\nu \neq 0$

tal que

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} \Big|_{\nu=d/2-1} = -\frac{2(d/2-1)\Gamma(d)}{\pi^{d/2}(d-2)\Gamma(d/2-1)} \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (559)$$

$$= \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=d/2-1} \quad (560)$$

3.5 Conclusão e análise das funções de 2 pontos

Iniciamos essa seção estudando o campo vetorial massivo dentro do espaço Anti-De Sitter. Ele é definido pela ação 393, dada por

$$I = \int d^d x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \right]$$

O próximo ponto foi obter as equações de movimento do campo vetorial no espaço curvo utilizando o principio variacional. De modo similar ao caso do campo escalar esse fato, junto com a existência de uma borda no nosso espaço, leva à necessidade de impor condições de contorno. Esse desenvolvimento foi realizado em 3.2 e leva a definição de duas formas de se fixar a ação na borda.

- Dirichlet $\delta A_i \Big|_{z=0} = 0$. A fonte dos operadores na teoria de campos conforme da borda é $A_i(0, x)$. Isso significa que a prescrição holográfica é da forma

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp \left(\int d^d x J_i(x) A_i(0, x) \right) \right\rangle$$

definida em 449. Essa condição, como foi visto em 3.2.1, não pede à adição de um termo de borda na ação. Desse modo quando tomamos a ação na camada de massas em 3.4.1 obtêm-se

$$I_D^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} A_i(\epsilon, x) n_0(\epsilon) F^{i0}(\epsilon, x)$$

Essa ação pode ser escrita como

$$I_D^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \left[\epsilon^{3-d} A_i(\epsilon, x) \partial_0 A_i(\epsilon, x) - \epsilon^{2-d} A_i(\epsilon, x) A_i(\epsilon, x) - \epsilon^{3-d} A_i(\epsilon, x) \partial_i A_0(\epsilon, x) \right] \quad (561)$$

No final das contas vimos que apenas um desses termos sobrevive. Esse termo é o $\propto A_i \partial_0 A_i$ que é análogo ao obtido no caso do campo escalar dado por $\phi \partial_0 \phi$. Esse

termo escrito em função da fonte leva à 470, que é dado por

$$I_D^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y A_i(\epsilon, x) A_j(\epsilon, y) \epsilon^{2-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times \\ \times \left[D^\nu \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{[\nu^2 - d^2/4 + (k\epsilon)^2 + D^\nu]}{1 - d + \mathcal{D}^\nu} \right]$$

onde $\mathcal{D}^\nu = \left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}$.

- Neumann $\delta(\partial_n A_i) = 0$. Aqui a fonte é $\partial_n A_i(0, x) \equiv (n^0 \partial_0) \phi(0, x)$ de modo a prescrição holográfica, dada por 520, é

$$\exp(-I_{AdS_{d+1}}) \equiv \left\langle \exp\left(\int d^d x J_i(x) \partial_n A_i(0, x)\right) \right\rangle$$

Esse caso exige a adição de um termo de borda na ação para que a sua variação seja nula. Isso leva à

$$I_N = \int_{AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu \right] - \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{g} F^{0i} A_i$$

como foi visto em 3.2.2. Tomando essa ação na camada de massas permite escrever

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} A_\nu(\epsilon, x) n_0(\epsilon) F^{\nu 0}(\epsilon, x)$$

Essa ação difere por um sinal da obtida com condições de Dirichlet. Utilizando isso obtemos

$$I_N^{on-shell} = \frac{1}{2} \int_{\partial AdS_{d+1}} d^d x \left[-\epsilon^{3-d} A_i(\epsilon, x) \partial_0 A_i(\epsilon, x) \right. \\ \left. + \epsilon^{2-d} A_i(\epsilon, x) A_i(\epsilon, x) + \epsilon^{3-d} A_i(\epsilon, x) \partial_i A_0(\epsilon, x) \right]$$

onde novamente somente o termo $A_i \partial_0 A_i$ contribui para a função de correlação. Escrevendo ele em função da fonte resulta em

$$I_N^{on-shell} = -\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \partial_n A_j(\epsilon, y) \partial_n A_i(\epsilon, x) \epsilon^{2-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times \\ \times \left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{1}{\mathcal{D}^\nu} + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1 - d + \mathcal{D}^\nu}{(\nu - d/2)(\nu + d/2) + \mathcal{D}^\nu + (k\epsilon)^2} \right] \quad (562)$$

onde, novamente, $\mathcal{D}^\nu = \left(\frac{d}{2} + \nu\right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}$.

Nos próximos parágrafos vamos analisar os resultados obtidos nas seções 3.4.1 e 3.4.2 com essas condições.

Intervalo $\nu = 0$:

Esse valor leva a seguinte condição sob a massa do campo vetorial

$$m_A^2 = -\frac{d^2}{4} + d - 1 \quad (563)$$

Os resultados obtidos nesse intervalo com condições de Dirichlet levam a seguinte função de 2-pontos

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=0} = -\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} \quad (564)$$

onde o operador dual possui dimensão conforme $d/2$ e a fonte A_i possui o comportamento $(z^{d/2-1} \ln z) A_i(0, x)$ nas proximidades da borda de AdS_{d+1} . O caso com condições de contorno de Neumann levam à um resultado dado por

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=0} = -\frac{2\Gamma(d/2)}{d^2 \pi^{d/2}} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^d} \quad (565)$$

onde a fonte $\partial_n A_i$ possuindo o comportamento $(z^{d/2-1} \ln z) \partial_n A_i(0, x)$ e o operador dual dimensão conforme $d/2$. Podemos ver que a relação entre esses dois resultado é dada por

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=0} = \frac{d^2}{4} \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=0} \quad (566)$$

Essa é a mesma relação encontrada entre os resultados de Dirichlet e Neumann do campo escalar na seção 2.5. Essa relação é dada pela equação 352, especificamente

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle = \frac{d^2}{4} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle$$

Uma outra comparação que pode ser feita é entre o resultado do campo vetorial com o de um campo escalar com massa M^2 . Nesse caso ambos os ν são idênticos o que permite escrever

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=0} = -\delta_{ij} \langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_D^{\nu=0}(y) \rangle \quad (567)$$

$$\langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=0} = -\delta_{ij} \langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(x) \mathcal{O}_N^{\nu=0}(y) \rangle \quad (568)$$

O fato das fontes possuírem no seu comportamento um fator log é esperado segundo (KLEBANOV; WITTEN, 1999)³².

³² esse argumento foi abordado em 2.5 no paragrafo sobre $\nu = 0$.

Intervalo $\nu \neq 0$:

Essa condição leva ao seguinte resultado para Dirichlet

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = \frac{2\nu(d/2 + \nu)\Gamma(d/2 + \nu - 1)}{\pi^{d/2}\Gamma(\nu)} \left(\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (569)$$

Aqui o operador dual possui dimensão conforme $d/2 + \nu$ e a fonte possui um comportamento dado por $z^{d/2-1-\nu}A_i(0, x)$. Já no caso de condições de Neumann o resultado é

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} = -\frac{2\nu\Gamma(d/2 + \nu + 1)}{\pi^{d/2}(\nu - d/2)^2(\nu + d/2 - 1)\Gamma(\nu)} \left[\delta_{ij} - 2 \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}} \quad (570)$$

no qual o operador dual age com dimensão $d/2 + \nu$ e a fonte como $z^{d/2-1-\nu}\partial_n A_i(0, x)$. Novamente vamos comparar esses resultados entre si³³

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = -(d/2 - \nu)^2 \langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} \quad (572)$$

Essa comparação é similar à que ocorre para o campo escalar. Nele a relação é dada por 368

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x)\mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = (d/2 - \nu)^2 \langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i)\mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle$$

Podemos comparar cada um dos resultados com os obtidos no caso do campo escalar (lembrando que aqui a massa é M^2). Esses resultados são: Dirichlet com $\nu \neq 0$ leva à $\langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x)\mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}}$ onde operador possui dimensão $d/2 + \nu$ e a fonte ϕ se comporta como $x_0^{d/2-\nu}\phi_0(x)$; Neumann com $\nu \neq 0$ gera $\langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i)\mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle = \frac{2\nu}{\pi^{d/2}} \frac{1}{(d/2-\nu)^2} \frac{\Gamma(d/2+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{|x-y|^{2(d/2+\nu)}}$ de modo que o operador possui dimensão $d/2 + \nu$ e a fonte $\partial_n \phi$ se comporta como $z^{\frac{d}{2}-\nu}\partial_n \phi_0(x)$. Podemos usar as propriedades de Γ , descritas em E.1.5, para escrever as seguintes equações

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = \frac{\nu(d/2 + \nu)}{2(d/2 + \nu - 1)} \langle \mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(x)\mathcal{O}_D^{\nu \neq 0}(y) \rangle \left(\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \quad (573)$$

³³ Nessa passagem é necessário utilizar as propriedades de *Gamma* dadas por E.1.5 de modo a escrever

$$\frac{\Gamma(d/2 + \nu + 1)}{(\nu + d/2 - 1)} = \frac{(d/2 + \nu)\Gamma(d/2 + \nu)}{(\nu + d/2 - 1)} = (d/2 + \nu)\Gamma(d/2 + \nu - 1) \quad (571)$$

Também foi usado que $(\nu - d/2)^2 = [(-1)(d/2 - \nu)]^2 = (d/2 - \nu)^2$

e para Neumann

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} = \frac{(\nu - d/2)}{2(\nu + d/2 - 1)} \langle \mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(x^i)\mathcal{O}_N^{\nu \neq 0}(y^i) \rangle \left(\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \quad (574)$$

Outro ponto que podemos ver é que o comportamento das fontes no caso do campo vetorial possui um fator em z extra.

Intervalo $\nu = d/2 - 1$:

Esse valor leva ao campo vetorial com massa nula. A função de 2-pontos para o caso do campo vetorial com condições de Dirichlet é dado por

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} = \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left[\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (575)$$

onde o operador possui dimensão $d-1$ e a fonte dimensão conforme zero (se comporta como $A_i(0, x)$). Já se aplicarmos condições de Neumann a função de correlação obtida é

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=d/2-1} = -\frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left[\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (576)$$

onde a fonte se comporta como $A_i(0, x)$. Um fato peculiar é que podemos obter o caso com massa nula partindo do resultado obtido para $\nu \neq 0$. Para condições de Dirichlet esse desenvolvimento é

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} \Big|_{\nu=d/2-1} = \frac{(d-2)(d-1)\Gamma(d-2)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left(\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^{2d-2}} \quad (577)$$

$$= \frac{\Gamma(d)}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2-1)} \left(\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (578)$$

$$= \langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} \quad (579)$$

Já para Neumann temos

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu \neq 0} \Big|_{\nu=d/2-1} = -\frac{2(d/2-1)\Gamma(d)}{\pi^{d/2}(d-2)\Gamma(d/2-1)} \left[\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right] \frac{1}{|x-y|^{2(d-1)}} \quad (580)$$

$$= \langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=d/2-1} \quad (581)$$

Outro ponto que difere do resultado comparativo do campo escalar é que podemos escrever uma relação entre os dois casos. Eles se relacionam por

$$\langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} = - \langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle_N^{\nu=d/2-1} \quad (582)$$

Essa relação não é encontrado entre os resultados para o campo escalar. Nesse caso para Dirichlet tem-se

$$\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(x)\mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(y) \rangle = \frac{d}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{1}{|x-y|^{2d}} \quad (583)$$

onde o operador possui a dimensão conforme d e a fonte dimensão zero. Já para Neumann temos

$$\langle \mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(x)\mathcal{O}_N^{\nu=d/2}(y) \rangle = \frac{\Gamma(d/2)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^{2\left(\frac{d}{2}-1\right)}} \quad (584)$$

com o operador de dimensão $d/2 - 1$ e a fonte comportando-se como $z^{d/2+1}\partial_n\phi_0(x)$. A dimensão desse ultimo resultado é dada pelo limite mínimo permitido pela teoria de campos conforme dual no caso do campo escalar massivo. Nenhum desses dois resultados pode ser comparado com os obtidos no caso vetorial pois não possuem a mesma dimensão na borda.

Conservação de J_i na borda:

Podemos verificar que os resultados anteriores são condizentes com a conservação da corrente esperada em uma teoria de calibre. Isso pode ser feito notando que essa conservação implica em

$$\left. \frac{\partial J_i(x)}{\partial x_i} \right|_{m_A=0} = 0 \rightarrow \left\langle \frac{\partial J_i(x)}{\partial x_i} J_j(y) \right\rangle_{m_A=0} = 0 \quad (585)$$

onde podemos escrever

$$\left\langle \frac{\partial J_i(x)}{\partial x_i} J_j(y) \right\rangle_{m_A=0} = \frac{d}{dx_i} \langle J_i(\mathbf{x})J_j(\mathbf{y}) \rangle^{\nu=d/2-1} \quad (586)$$

Como vimos anteriormente o caso com massa nula pode ser obtido do caso massivo. Isso permite tomar a derivada da função de correlação com $\nu \neq 0$ e fazer $\nu \rightarrow d/2 - 1$ no final.

Essa conta é feita com auxílio do apêndice E.2.1 e leva à

$$\frac{d}{dx_i} \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu \neq 0} = -\frac{4\nu(d/2 - \nu - 1)\Gamma(d/2 + \nu)}{\pi^{d/2}(d/2 + \nu - 1)\Gamma(\nu)} \frac{(x - y)_j}{|x - y|^{d+2+2\nu}} \quad (587)$$

Não é difícil de verificar que o caso com massa nula onde $\nu = d/2 - 1$ ³⁴ leva ao seguinte resultado

$$\frac{d}{dx_i} \langle J_i(\mathbf{x}) J_j(\mathbf{y}) \rangle_D^{\nu=d/2-1} = 0 \quad (588)$$

O mesmo segue se tivéssemos utilizado os resultados com condição de Neumann.

³⁴ O outro valor para ν que leva à $m_A = 0$, dado por $\nu = 1 - d/2$, leva à um resultado divergente no lado direito. Isso parece ser mais um indicio que não podemos considerar esse valor de ν .

CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esse trabalho foi dedicado ao estudo da correspondência AdS_{d+1}/CFT_d com ênfase nos casos do campo escalar e vetorial massivos. Iniciamos esse objetivo com uma revisão básica do espaço tempo Anti-de Sitter com foco nas suas características conformes. Mostramos como o AdS_{d+1} é uma solução pseudo-Riemanniana das equações de Einstein com constante cosmológica negativa maximamente simétrico. A métrica induzida que representa o AdS_{d+1} foi definida como um hiperboloide dentro do espaço de Minkowski com d dimensões tipo espaço e 2 tipo tempo ($\mathbb{R}^{2,d}$). Como consequência ela retém as simetrias $SO(2, d)$ por construção. Depois desse ponto parametrizamos o espaço com coordenadas de Poincaré e, através da rotação de Wick, obtemos sua representação Euclidiana. Isso leva as definições da métrica que são utilizadas no decorrer do texto. Por último tratamos das características conformes do horizonte do espaço Anti-de Sitter. Essas características foram expandidas na seção subsequente onde definimos os principais propriedades do grupo conforme e como elas levam à uma função de correlação definida a menos de uma constante dimensional.

Depois dessa revisão partimos para a correspondência holográfica focada no campo escalar massivo. Começamos por definir sua ação em um espaço tempo curvo partindo da ação usual. O princípio variacional, necessário para obter as equações de movimento, parte de uma ação estacionária no horizonte. Para obter isso precisamos impor condições de contorno apropriadas. No caso abordamos três: Dirichlet, Neumann e uma combinação linear delas chamada de condições mistas. Com exceção das de Dirichlet, todas pedem uma modificação na ação por um termo de borda. Essa mudança não influencia as equações de movimento, a equação de Euler-Lagrange não é sensível à termos de borda. Em seguida desenvolvemos a correspondência holográfica do campo escalar massivo. Começamos por obter as equações de movimento e solucioná-las de forma assintótica. Isso permitiu abordar a prescrição GKP-Witten de forma simplificada, nela o campo escalar na borda é tomado como fonte das perturbações dos operadores da teoria de campos conforme que vive na borda. Como exemplo calculamos a função de 1-ponto, ou valor esperado, desse operador. Aproveitamos esse desenvolvimento para abordar a dimensão desses operadores e como ela se relaciona com a massa dos campos escalares.

Tendo entendido como se obtêm informações da teoria na borda partimos para o desenvolvimento da prescrição holográfica para cada uma das condições de contorno previamente definidas. Diferentemente da obtenção da função de 1-ponto, aqui, precisamos da solução completa da equação de movimento. Além disso é indispensável fixar um intervalo sobre a massa do sistema. O motivo disso é a necessidade de expandir as funções de Bessel que surgem na solução exata. Essa expansão depende do parâmetro que está relacionado à massa do campo escalar. Desenvolvemos isso para três valores distintos:

um correspondente ao parâmetro nulo, outro para valores diferentes de zero e por último o caso onde o campo possui massa nula. Essa mesma abordagem foi realizada para cada uma das condições de contorno distintas.

A condição de contorno está ligada a escolha da fonte das perturbações na borda. Essas perturbações são responsáveis por gerar os operadores na teoria conforme dual. Para cada condição foi tomado o devido cuidado de escrever a ação na camada de massas em função da fonte apropriada. No final das contas comparamos os resultados obtidos. Todos condizem com o esperado pelas condições impostas sob a teoria de campos conforme na borda e, em especial, vimos que as condições de contorno mistas permitem obter ambas as condições de Dirichlet e Neumann.

Na seção seguinte desenvolvemos a dualidade holográfica voltada para o campo vetorial massivo. O primeiro passo para isso foi descrever uma ação para o campo vetorial apropriada para o espaço tempo Anti-de Sitter. Assim como no caso do campo escalar foi necessário aplicar condições de contorno para fixar a variação dessa ação na borda. Isso é essencial para que o princípio variacional seja satisfeito. As condições que estudamos são generalizações das vistas no caso do campo escalar, com exceção da mista que não foi desenvolvida nesse trabalho. Bem como no caso escalar com condições de Neumann é necessário modificar a ação por um termo de borda. Esse termo não modifica as equações de movimento.

O desenvolvimento da solução das equações de movimento para o campo vetorial é mais extensa do que a realizada no caso escalar. Isso é devido a necessidade de tratar da solução para duas componentes distantes, uma das quais é acoplada. Felizmente a semelhança com o campo escalar permite utilizar algumas passagens já realizadas simplesmente modificando a massa. No final das contas quando obtemos a nossa ação podemos ver que ela é composta de três partes distintas. No entanto apenas uma delas contribui para a função de 2-pontos. O termo que o faz é o análogo ao obtido no caso escalar.

O parâmetro da função de Bessel, que está relacionado a massa do sistema, pode ser obtido partindo do resultado do escalar. Como já vimos isso é feito através da modificação da massa. Novamente obtemos três casos distintos: parâmetro nulo, positivo e diferente de zero e o caso não massivo. Cada um deles foi utilizado para expandir os termos obtidos para cada condição de contorno. Como vimos no campo escalar a escolha da condição de contorno reflete na prescrição holográfica de modo que para cada escolha devemos modificar a fonte dos operadores da teoria dual. Por fim comparamos os resultados obtidos entre si e com os do campo escalar. Além disso foi possível demonstrar que a conservação de corrente, esperada de uma teoria de calibre, reflete nos resultados obtidos. Quando tomamos a derivada, em termos das coordenadas da borda, do valor esperado do operador dual encontramos um resultado nulo.

Esses resultados indicam possíveis caminhos para pesquisas futuras. Primeiramente podemos observar que as condições de Dirichlet e Neumann são entendidas como a

fixação de duas variáveis canonicamente conjugadas (BOSCHI-FILHO; BRAGA, 1999). Isso significa que existe uma imposição sob fixar ambas simultaneamente. Além disso vimos que as condições de contorno mistas permitem descrever ambos os resultados de Dirichlet e Neumann. Os fatores relacionados a essa combinação linear não possuem uma interpretação física clara e, possivelmente, existem restrições neles para que sejam consistentes com a mecânica quântica. Outra abordagem que pode ser explorada surge da ideia dos precursores em (POLCHINSKI; SUSSKIND; TOUMBAS, 1999; FREIVOGEL; GIDDINGS; LIPPERT, 2002). Esses artigos exploram o meio com o qual a “informação” é transmitida do interior de AdS_{d+1} para a borda. Segundo a holografia os estados da borda possuem toda a informação sobre qualquer evento no interior do espaço AdS mesmo quando essa informação ainda não esteja acessível aos estados próximos da borda. Os operadores não locais na borda que contêm essa informação antecipada são chamados de precursores. Um melhor entendimento de como essa informação é distribuída talvez permita impor as condições de contorno de Dirichlet/Neumann simultaneamente sem entrar em conflito com a mecânica quântica.

O desenvolvimento da correspondência holográfica no caso do campo vetorial foi direcionada como uma extensão dos resultados obtidos no caso escalar. Isso só pode nos levar até certo ponto pois, como o objetivo final é descrever a física observável, devemos interpretar os resultados em termos de campos elétricos e magnéticos. Essa interpretação é sugerida inicialmente em (WITTEN, 2003). Segundo ele condições de Dirichlet para o campo de calibre A são análogas à condições do campo magnético \vec{B} nulo na borda enquanto que condições de Neumann para o campo A estariam relacionadas com a configurações de \vec{E} nulo. Isso significaria que a dualidade eletromagnética ($\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ e $\vec{E} \rightarrow -\vec{B}$) estaria relacionada com uma mudança de condições de contorno no entanto esses dois sistemas não seriam equivalentes. Uma forma de tentar entender essas questões é estudar diferentes configurações de cargas elétricas e magnéticas junto com as condições de contorno.

REFERÊNCIAS

- AMMON, M.; ERDMENGER, J. *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- ANDRADE, T.; BANADOS, M.; ROJAS, F. Variational Methods in AdS/CFT. *Phys. Rev. D*, Nova York, v. 75, p. 65013–65028, mar. 2007.
- ANDRADE, T.; FAULKNER, T.; MAROLF, D. Banishing AdS Ghosts with a UV Cutoff. *J. High Energ. Phys.*, Berlin, v. 05, p. 011–031, mai. 2012.
- ANDRADE, T.; MAROLF, D. AdS/CFT beyond the unitarity bound. *J. High Energ. Phys.*, Berlin, v. 01, p. 49–73, jan. 2012.
- BALASUBRAMANIAN, V.; KRAUS, P.; LAWRENCE, A. E. Bulk versus boundary dynamics in anti-de Sitter space-time. *Phys. Rev. D.*, Nova York, v. 59, p. 46003–46031, jan. 1999.
- BEKENSTEIN, J. D. Black holes and information theory. *Contemp. Phys.*, [S.l.], v. 45, p. 31–43, fev. 2003.
- BOSCHI-FILHO, H.; BRAGA, N. R. F. Remark on the variational principle in the AdS / CFT correspondence for the scalar field. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 471, p. 162–170, dez. 1999.
- BREITENLOHNER, P.; FREEDMAN, D. Z. Positive Energy in anti-De Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 115, p. 197–201, set. 1982.
- BREITENLOHNER, P.; FREEDMAN, D. Z. Stability in Gauged Extended Supergravity. *Annals Phys.*, Amsterdam, v. 144, p. 249–304, dez. 1982.
- CARROLL, S. M. *Lecture notes on general relativity*. 1997. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- DOSCH, H. G. *A practical guide to AdS/CFT*. Citeseer, 2009. Disponível em: <https://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- FRANCESCO, P.; MATHIEU, P.; SÉNÉCHAL, D. *Conformal Field Theory*. [S.l.]: Springer, 1997. (Graduate Texts in Contemporary Physics). ISBN 9780387947853.
- FREEDMAN, D. Z. *et al.* Correlation functions in the CFT(d) / AdS(d+1) correspondence. *Nucl. Phys. B.*, Nova York, v. 546, p. 96–118, abr. 1999.
- FREIVOGEL, B.; GIDDINGS, S. B.; LIPPERT, M. Toward a theory of precursors. *Phys. Rev. D*, Nova York, v. 66, p. 106002–106025, nov. 2002.
- GINSPARG, P. H. *APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY*. 1988. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9108028>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- GUBSER, S. S.; KLEBANOV, I. R.; POLYAKOV, A. M. Gauge theory correlators from noncritical string theory. *Phys. Lett. B*, Amsterdam, v. 428, p. 105–114, mai. 1998.

- HARO, S.; SOLODUKHIN, S. N.; SKENDERIS, K. Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence. *Commun. Math. Phys.*, Berlin, v. 217, p. 595–622, mar. 2001.
- HENNEAUX, M. *Boundary terms in the AdS / CFT correspondence for spinor fields*. 1998. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/9902137>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- HENNINGSON, M.; SKENDERIS, K. Holography and the Weyl anomaly. *Fortsch. Phys.*, Berlin, v. 48, p. 125–128, mar. 2000.
- HOOFT, G. 't . A Planar Diagram Theory for Strong Interactions. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 72, p. 461–474, abr. 1974.
- HOOFT, G. 't . Dimensional reduction in quantum gravity. *Conf. Proc. C*, Maryland, v. 930308, p. 284–296, out. 1993.
- JACOBSON, T. *Introductory lectures on black hole thermodynamics*. 1996. Disponível em: <http://www.physics.umd.edu/grt/taj/776b/lectures.pdf>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- JEFFREY, A.; ZWILLINGER, D. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Elsevier Science, 2000. ISBN 9780080542225.
- KAPLAN, J. *Lectures on AdS/CFT from the Bottom Up*. Disponível em: <https://sites.krieger.jhu.edu/jared-kaplan/>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- KLEBANOV, I. R. *TASI Lectures: Introduction to the AdS/CFT Correspondence*. 2000. 615-650 p. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0009139>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- KLEBANOV, I. R.; WITTEN, E. AdS / CFT correspondence and symmetry breaking. *Nucl. Phys. B*, Amsterdam, v. 556, p. 89–114, set. 1999.
- LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. [S.l.]: OUP Oxford, 2014. ISBN 9780191510939.
- MALDACENA, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, Heidelberg, v. 38, p. 1113–1133, abr. 1999.
- MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum field theory*. [S.l.]: J. Wiley, 1993. ISBN 9780471941866.
- MINCES, P.; RIVELLES, V. O. Scalar field theory in the AdS / CFT correspondence revisited. *Nucl. Phys. B*, Nova York, v. 572, p. 651–669, abr. 2000.
- NASTASE, H. *Introduction to AdS-CFT*. 2007. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0712.0689>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- NATSUUME, M. *AdS/CFT Duality User Guide*. [S.l.: S.n.], 2015. v. 903. ISBN 978-4-431-55441-7, 978-4-431-55440-0.
- PETERSEN, J. L. Introduction to the Maldacena conjecture on AdS / CFT. *Int. J. Mod. Phys. A*, [S.l.], v. 14, p. 3597–3672, jan. 1999.
- POLCHINSKI, J. *String Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. ISBN 9780521633031.

- POLCHINSKI, J.; SUSSKIND, L.; TOUMBAS, N. Negative energy, superluminality and holography. *Phys. Rev. D.*, Nova York, v. 60, p. 84006–84022, set. 1999.
- RAMALLO, A. V. Introduction to the AdS/CFT correspondence. *Springer Proc. Phys.*, Berlin, v. 161, p. 411–474, dez. 2015.
- SITTER, W. On the curvature of space. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, Amsterdam, v. 20, p. 229–243, jun. 1917.
- SITTER, W. On the relativity of inertia. remarks concerning einstein's latest hypothesis. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, Amsterdam, v. 19, n. 2, p. 1217–1225, mar. 1917.
- SUSSKIND, L. The World as a hologram. *J. Math. Phys.*, Maryland, v. 36, p. 6377–6396, mai. 1995.
- WITTEN, E. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, Somerville, v. 2, p. 253–291, jan. 1998.
- WITTEN, E. *SL(2,Z) action on three-dimensional conformal field theories with Abelian symmetry*. 2003. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0307041>. Acesso em: 14 mai. 2017.
- ZEE, A. *Einstein Gravity in a Nutshell*. [S.l.]: Princeton University Press, 2013. (In a Nutshell). ISBN 9781400847457.

APÊNDICE A – Conceitos básicos de geometria

Vamos introduzir o conceito de métrica e o elemento de linha. Também iremos explicar rapidamente a convenção de notação de Einstein. Por último falaremos sobre a transformação de um vetor e da sua derivada. Esses conceitos servem para o entendimento da relatividade de Einstein que é abordada na seção 1.1.

A.1 Elemento de linha

Iremos desenvolver essa seção seguindo seguindo (DOSCH, 2009; NASTASE, 2007). Um trabalho mais completo pode ser visto em (AMMON; ERDMENGER, 2015) (que é voltado para a correspondência *AdS/CFT*) ou em livros sobre relatividade como (ZEE, 2013).

Vamos começar com o seguinte conceito. O produto escalar contém todas as informações na geometria Euclidiana, eles definem *comprimento* e *ângulo*

$$|\mathbf{a}| \equiv a^2 = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (589)$$

onde a é o módulo $|\mathbf{a}|$ do vetor \mathbf{a} . Esse produto pode ser escrito como a multiplicação das suas componentes, isso é, se $\mathbf{a} = (a^0, a^1, \dots, a^n)$ e $\mathbf{b} = (b^0, b^1, \dots, b^n)$ então o seu produto é

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^0 b^0 + a^1 b^1 + \dots + a^n b^n = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}^E a^\mu b^\nu \quad (590)$$

com esse novo elemento dado por

$$g_{\mu\nu}^E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (591)$$

No caso do produto escalar em três dimensões de dois vetores têm-se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$. A quantidade que definimos como $g_{\mu\nu}^E$ é chamado de tensor métrico e ela possui um papel importante pois com ela pode-se construir conceitos mais gerais sobre a geometria de um espaço. Nesse caso $g_{\mu\nu}^E$ representa o espaço Euclidiano com n coordenadas.

Não podemos trabalhar com quantidades do $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ pois elas dependem da escolha dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} por isso vamos definir o comprimento de linha (chamado simplesmente de

métrica) $(ds)^2$ em termos das componentes $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$ como

$$(ds)^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}^E dx^\mu dx^\nu \quad (592)$$

O elemento de linha expresso em termos de deslocamentos infinitesimais permite a obtenção das transformações de coordenadas que mantêm $(ds)^2$ e isso será importante na relatividade de Einstein. Veremos com mais detalhes sobre isso na próxima seção.

No espaço de Minkowski a o tensor métrico é dado por³⁵

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, 1) \quad (593)$$

ou simplesmente $\text{diag}(-, -, -, +)$. Como $\{\eta_{\mu\nu}\}$ não é positivo definido esse tensor métrico é chamado de tensor métrico pseudo-Euclidiano e sua geometria de espaço pseudo-Euclidiano.

Se $\{e_{\mu\nu}\}$ ou $\{\eta_{\mu\nu}\}$ não são diagonais, mas simétricos, é possível através de uma transformação de coordenadas escreve-los em uma forma diagonal e, com uma transformação de escala, tornar seus elementos ± 1 na diagonal.

Outra quantidade que será importante é o determinante da métrica

$$g = |\det g_{\mu\nu}| \quad (594)$$

que, caso a métrica seja diagonal, é o somatória dos elementos $\sum_{i=1}^d a_{i,i}$ onde $a_{i,i}$ são os elementos da diagonal. Essa quantidade será importante pois iremos tratar de integrais com dimensionalidade diferentes e necessitamos de um elemento de volume da integral que leve em conta isso.

A.2 Índices e convenção de Einstein

A inversa do tensor métrico, $\{g_{\mu\nu}\}^{-1}$ é escrito como $\{g^{\mu\nu}\}$ (com índices superiores),

$$\{g_{\mu\nu}\}^{-1} \cdot \{g_{\mu\nu}\} = \mathbf{1} \rightarrow \sum_{\nu} g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} \equiv g_{\mu}^{\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} \quad (595)$$

onde $\mathbf{1}$ é a identidade matricial e

$$\delta_{\mu}^{\rho} = \begin{cases} 1 & \text{para } \mu = \rho \\ 0 & \end{cases} \quad (596)$$

³⁵ Também pode-se definir $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$.

A convenção de Einstein diz respeito a índices repetidos em expressões com tensores. De modo simples vamos considerar que sempre há um somatória quando existem índices contraídos

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \sum_{\nu} g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} \quad (597)$$

onde o somatória leva em conta todas as coordenadas (d e um espaço tempo de d dimensões).

No espaço Euclidiano e pseudo-Euclidiano a geometria obedece à

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \quad (598)$$

mas isso não ocorre para espaços não-Euclidianos. Um vetor com índices superiores é chamado de vetor covariante enquanto que um com índices inferiores de vetor covariante.

A.3 Vetores covariante e contravariante

Um vetor covariante V^{μ} muda sob uma transformação de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ como

$$V^{\mu}(x) \rightarrow V'^{\mu} = V^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad (599)$$

e um vetor covariante como

$$V_{\mu}(x) \rightarrow V'_{\mu} = V_{\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \quad (600)$$

Uma mudança de um vetor contravariante para um vetor covariante, e vice versa, é feita com o tensor métrico

$$g_{\mu\nu}(x)V^{\nu} = V_{\mu}, \quad g^{\mu\nu}(x)V_{\nu} = V^{\mu} \quad (601)$$

isso é chamado de subir ou descer índices. Cada índice de um tensor covariante, contravariante ou misto, deve obedecer a essas regras de transformação.

A.3.1 Derivada de um vetor

A derivada de um vetor não se comporta como um tensor de grau 2 (objeto com dois índices), isso é $\partial_\mu V_\nu \neq T_{\mu\nu}$. Podemos ver isso da seguinte forma

$$\partial'_\mu V'_\nu(x') = \partial'_\mu (V_\rho(x) \partial'_\nu x^\rho) \quad (602)$$

$$= (\partial'_\mu V_\rho(x')) \partial'_\nu x^\rho + V_\rho(x) \partial'_\mu \partial'_\nu x^\rho \quad (603)$$

$$= \partial_\sigma V_\rho(x) \partial'_\mu x^\sigma \partial'_\nu x^\rho + V_\rho(x) \partial'_\mu \partial'_\nu x^\rho \quad (604)$$

Para que isso se comporte como um tensor de grau 2 seria necessário que o último termo fosse nulo, o que não ocorre de modo geral. Essa é uma consequência do fato de que na geometria não-Euclidiano o vetor muda suas componentes quando se faz um transporte paralelo. Se levarmos um vetor de um ponto x_μ para $x_\mu + \epsilon$ temos

$$V_\nu(x) \rightarrow V_\nu(x + \epsilon) - \epsilon \Gamma_{\nu\mu}^\rho V_\rho(x) \quad (605)$$

onde $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ corrige o transporte paralelo levando em conta a geometria do espaço e é chamado de símbolo de Christoffel. Essa quantidade não é um tensor pois é possível fazer uma transformação de coordenadas e torna-lo nulo, isso só ocorre para um tensor no caso dele ser nulo em todos os sistemas de coordenadas. Para se definir uma quantidade que de fato se transforma como um tensor de grau 2 podemos definir a derivada covariante

$$D_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V_\rho \quad (606)$$

de modo que $D_\mu V_\nu$ é um tensor de grau 2. É possível mostrar usando as regras de transformação de tensores que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\kappa} (\partial_\mu g_{\nu\kappa} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad (607)$$

Essa quantidade também obedece a simetria³⁶

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho \quad (608)$$

³⁶ Para espaços-tempo sem torção.

APÊNDICE B – Contas auxiliares do campo escalar massivo

Essa seção é dedicada para o desenvolvimento de algumas passagens de contas do capítulo 2.

B.1 Expansão de $\mathcal{N}^{\nu=d/2}$ alternativa:

Podemos expandir esse termo de forma alternativa para conferirmos os nossos resultados. Vamos chamar $\frac{d}{2} = \nu \equiv n$ e $k\epsilon = y$ ($\epsilon \rightarrow 0$ então $y \rightarrow 0$) para simplificar as expressões matemáticas. Isso leva à

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2=n} = \frac{1}{2n - y \frac{K_{n+1}(y)}{K_n(y)}} \quad (609)$$

$$= \frac{K_n(y)}{2nK_n(y) - yK_{n+1}(y)} \quad (610)$$

$$= \frac{y^{-1}K_n(y)}{\frac{2n}{y}K_n(y) - K_{n+1}(y)} \quad (611)$$

Agora usando a formula de recorrência 694 dada por

$$K_{n+1}(y) = K_{n-1}(y) + \frac{2n}{y}K_n(y) \rightarrow \frac{2n}{y}K_n(y) - K_{n+1}(y) = -K_{n-1}(y) \quad (612)$$

Assim o termo que obtemos é

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2=n} = -\frac{y^{-1}K_n(y)}{K_{n-1}(y)} \quad (613)$$

Podemos calcular esse termo se usarmos a expansão para n não inteiros positivos (valida para d inteiro). Essa expansão em segunda ordem fica como

$$K_{n-1}(y) = \frac{1}{2}\Gamma(n-1)\Gamma(2-n) \left\{ \left(\frac{y}{2}\right)^{1-n} \left[\frac{1}{\Gamma(2-n)} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(3-n)} + \left(\frac{y}{2}\right)^4 \frac{1}{\Gamma(4-n)} + \dots \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} \left[\frac{1}{\Gamma(n)} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \left(\frac{y}{2}\right)^4 \frac{1}{4\Gamma(n+2)} + \dots \right] \right\} \quad (614)$$

estamos interessados em saber o termo dominante de modo que não vamos nos preocupar com os fatores exatos das constantes

$$K_{n-1}(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{1-n} \left[a_0 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 a_1 + \left(\frac{y}{2}\right)^4 a_2 + \dots \right] - \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} \left[b_0 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 b_2 + \left(\frac{y}{2}\right)^4 b_3 + \dots \right] \quad (615)$$

desse modo as potencias são

$$K_{n-1}(y) = a_0 \left(\frac{y}{2}\right)^{1-n} + a_1 \left(\frac{y}{2}\right)^{3-n} + a_2 \left(\frac{y}{2}\right)^{5-n} - b_0 \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} + b_2 \left(\frac{y}{2}\right)^{n+1} + b_3 \left(\frac{y}{2}\right)^{n+3} + \dots \quad (616)$$

Vamos analisar a potencia dos termos antes de expandirmos essa expressão

d	n	1-n	3-n	n-1	n+1	n+3
3	1,5	-0,5	1,5	0,5	2,5	4,5
4	2	-1	1	1	3	5
5	2,5	-1,5	0,5	1,5	3,5	5,5

o termo com potencia $1-n$ sempre é o mais relevante quando $y \rightarrow 0$. Isso permite escrever

$$K_{n-1}^{-1}(y) \approx \frac{1}{a_0} \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} \approx \frac{2(n-1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} \quad (617)$$

onde foi usado que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$. A expansão de $K_n(y)$ pode ser obtida fazendo as devidas identificações em 185. Isso leva à

$$\mathcal{N}^{\nu=d/2=n} \approx -\frac{1}{2y} \left(\frac{y}{2}\right)^{-n} \left[\Gamma(n) + \left(\frac{y}{2}\right)^{2n} \Gamma(-n) \right] \times \left[\frac{2(n-1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{y}{2}\right)^{n-1} \right] \quad (618)$$

$$\approx -2(n-1)y^{-2} - \left(\frac{y}{2}\right)^{2n-2} \frac{(n-1)\Gamma(-n)}{2\Gamma(n)} \quad (619)$$

APÊNDICE C – Breve revisão do Eletromagnetismo

Vamos fazer uma revisão rápida de alguns conceitos do eletromagnetismo de Maxwell sem cargas (vácuo, ausência de fontes de campos elétricos ou magnéticos).

C.1 Equações de Maxwell

Um ponto bastante importante é entender com clareza a diferença entre o eletromagnetismo em um espaço plano e em um espaço curvo como o AdS_{d+1} (DOSCH, 2009). Vamos começar com o exemplo da ação de Maxwell sem cargas. Para $d = 4$ o campo vetorial que descreve esse sistema pode ser escrito como

$$A^\mu(x) = [A^0(t, \mathbf{x}), A^1(t, \mathbf{x}), A^2(t, \mathbf{x}), A^3(t, \mathbf{x})] \quad (620)$$

ou se introduzirmos os potenciais vetor \mathbf{A} e escalar ϕ , que obedecem às relações

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \quad (621)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (622)$$

temos que o potencial vetor fica como $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Essa maneira de escrever o campo vetorial pode ser utilizado para introduzir um conceito importante de *gauge* (calibre em tradução livre).

Os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} não são definidos univocamente por um par de potenciais. A adição de um gradiente na definição do campo magnético não mudaria a sua forma, isto é

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\alpha \quad (623)$$

assim tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\alpha) \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned}$$

Mas essa mudança afetaria o campo elétrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\alpha) \quad (624)$$

no entanto basta fazer uma mudança simultânea no potencial escalar

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial}{\partial t} \alpha \quad (625)$$

assim

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\left(\phi - \frac{\partial}{\partial t} \alpha\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\alpha) \\ &= -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \end{aligned}$$

O conjunto de transformações, dadas pelas equações (623) e (625), são chamadas de transformações de calibre e elas representam uma liberdade na escolha dos potenciais.

Essas transformações são escritas da seguinte forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Gamma \quad (626)$$

C.2 Ação de Maxwell

A ação que descreve as equações de Maxwell no vácuo é dada por

$$I[\partial A] = \int d^4x \underbrace{\left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right]}_{\mathcal{L}} \quad (627)$$

onde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é o *field strength* ou tensor do campo eletromagnético. Vamos tomar um passo extra que será útil quando calcularmos o caso não Euclidiano. Vamos escrever a Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \eta^{\mu\mu'} \eta^{\nu\nu'} \quad (628)$$

Podemos demonstrar rapidamente que de fato essa ação descreve um sistema de cargas no vácuo. Isso pode ser feito usando o princípio variacional que resulta nas equações de Euler-Lagrange para o campo A

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} - \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho A_\sigma)} \right] = 0 \quad (629)$$

Essa equação será obtida na seção 3.2 quando tratarmos do problema variacional no espaço AdS_{d+1} . Aqui não temos problemas com o termo de borda pois estamos no espaço de Minkowski. A equação de movimento obtida é

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (630)$$

essa equação se traduz em

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (631)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (632)$$

As outras duas equações de Maxwell sem cargas são obtidas da seguinte identidade

$$\partial_\nu {}^* F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho} = 0 \quad (633)$$

Essa relação é identicamente nula pela definição de $F^{\mu\nu}$. Escrevendo essa equação em termos dos campos elétrico e magnético temos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (634)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (635)$$

APÊNDICE D – Contas auxiliares do campo vetorial massivo

Aqui trataremos em detalhes algumas passagens de contas que, por sua similaridade as realizadas no capítulo 2, foram retiradas do texto principal mas que ainda apresentam alguns detalhes que podem causar confusão. Além disso faremos uma breve revisão do eletromagnetismo clássico.

D.1 Equação de movimento para o campo vetorial A_μ

O calculo das equações de movimento para o campo vetorial é similar as realizadas para o campo escalar. A complicação surge do cuidado que se deve ter em tratar os índices de forma correta. Vamos usar a equação de Euler-Lagrange para o campo A_μ (equação 629) para calcular as equações de movimento da ação para o campo vetorial massivo 393. Fazendo as contas com detalhes temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} &= \frac{1}{4} \sqrt{g} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{g} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \frac{\partial}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_{\mu'} A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_{\mu'}) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{g} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\delta_{\mu'}^\rho \delta_{\nu'}^\sigma - \delta_{\nu'}^\rho \delta_{\mu'}^\sigma) + (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma - \delta_\nu^\rho \delta_\mu^\sigma) (\partial_{\mu'} A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_{\mu'})] \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{g} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + \sqrt{g} (\partial_{\mu'} A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_{\mu'}) (g^{\rho\mu'} g^{\sigma\nu'} - g^{\sigma\mu'} g^{\rho\nu'}) \end{aligned}$$

redefinindo $\mu' \rightarrow \mu$ e $\nu' \rightarrow \nu$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{g} F_{\mu\nu} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned}$$

podemos trocar os índices e usar o fato que $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ e escrever

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} = \sqrt{g} F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)} \right] &= \partial_\rho [\sqrt{g} F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}] \\ &= \sqrt{g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \partial_\rho (F_{\mu\nu}) + F_{\mu\nu} \partial_\rho [\sqrt{g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}] \end{aligned}$$

O termo com massa leva à

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\sigma} = \frac{1}{4} m_A^2 A^\sigma$$

Voltando para a equação de Euler-Lagrange e usando $\nabla_\mu V_\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} V_\mu)$ temos

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\rho [\sqrt{g} F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}] = m_A^2 A^\sigma$$

$$\nabla_\rho (F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) = m_A^2 A^\sigma$$

$$\nabla_\rho F^{\rho\sigma} - m_A^2 A^\sigma = 0$$

que é a forma usual da equação de movimento para o campo A_μ .

D.2 Condição sob A_μ

Vamos desenvolver em detalhes a condição $\nabla_\nu A^\nu = 0$.

$$\nabla_\nu A^\nu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} A^\mu) \tag{636a}$$

$$= z^{d+1} \partial_\mu (z^{-(d+1)} z^2 A_\mu) \tag{636b}$$

$$= z^{d+1} \partial_\mu (z^{1-d} A_\mu) \tag{636c}$$

$$= z^{d+1} \partial_0 (z^{1-d} A_0) + z^2 \partial_i A_i \tag{636d}$$

$$= (1-d) z A_0 + z^2 \partial_0 A_0 + z^2 \partial_i A_i = 0 \tag{636e}$$

Essa relação é utilizada para obter a equação de movimento para o campo vetorial.

D.3 Equação de Movimento para A^0

Vamos fazer em detalhes a obtenção da equação de movimento para o campo A^0 na forma de uma equação diferencial. Re-escrever a equação

$$\partial_i F^{i0} - m^2 A^0 = 0 \tag{637}$$

Vamos começar "abaixando" de F^{i0} usando a métrica definida em 62

$$z^4 \partial_i (F_{i0}) - m^2 z^2 A_0 = 0 \tag{638}$$

O termo de derivada fica

$$z^4 \partial_i (F_{i0}) = z^4 \partial_i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) \quad (639)$$

$$= z^4 (\partial_i \partial_i A_0 - \partial_i \partial_0 A_i) \quad (640)$$

Podemos trocar $\partial_i \partial_0$ por $\partial_0 \partial_i$ e usar a condição obtida de $\nabla_\mu A^\mu = 0$ dada por 412

$$\partial_i A_i = -(1-d)z^{-1}A_0 - \partial_0 A_0 \quad (641)$$

o que leva à

$$z^4 \partial_i (F_{i0}) = z^4 (\partial_i \partial_i A_0 - \partial_0 \partial_i A_i) \quad (642)$$

$$= z^4 (\partial_i \partial_i A_0 - \partial_0 [-(1-d)z^{-1}A_0 - \partial_0 A_0]) \quad (643)$$

$$= z^4 (\partial_i \partial_i A_0 - (1-d)z^{-2}A_0 + (1-d)z^{-1}\partial_0 A_0 + \partial_0 \partial_0 A_0) \quad (644)$$

$$= z^4 (\partial_i \partial_i A_0 + \partial_0 \partial_0 A_0) + (1-d)z^3 \partial_0 A_0 - (1-d)z^2 A_0 \quad (645)$$

Juntando com a outra parte temos

$$z^4 (\partial_i \partial_i A_0 + \partial_0 \partial_0 A_0) + (1-d)z^3 \partial_0 A_0 - (1-d)z^2 A_0 - m^2 z^2 A_0 = 0 \quad (646)$$

$$z^2 (\partial_i \partial_i A_0 + \partial_0 \partial_0 A_0) + (1-d)z \partial_0 A_0 - (1-d+m^2)A_0 = 0 \quad (647)$$

ou usando a notação de somatório

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - (1-d+m^2)]A_0 = 0 \quad (648)$$

Essa é a equação de movimento que define a dinâmica do campo A_0 dentro de AdS_{d+1} . Por simplicidade vamos chamar $M^2 = m^2 - d + 1$ o que leva à

$$[z^2 \partial_\mu \partial_\mu + (1-d)z \partial_0 - M^2]A_0 = 0 \quad (649)$$

D.4 Equação de Movimento para A^i

Vamos escrever em detalhes os cálculos necessários para se obter a equação de movimento para A^i . Vamos começar com

$$z^{d+1} \partial_0 [z^{-(d+1)} F^{0i}] - m^2 A^i = 0 \quad (650)$$

Agora precisamos descer os índices usando 62 (métrica)

$$z^{d+1}\partial_0[z^{-(d+1)}F_{0i}z^4] - m^2z^2A_i = 0 \quad (651)$$

$$z^{d+1}\partial_0[z^{3-d}F_{0i}] - m^2z^2A_i = 0 \quad (652)$$

Diferentemente do caso das equações para A_0 não podemos escrever simplesmente $z^4\partial_0F_{0i}$. Precisamos fazer as derivadas em z

$$z^{d+1}[(3-d)z^{2-d}F_{0i} + z^{3-d}\partial_0F_{0i}] - m^2z^2A_i = 0 \quad (653)$$

$$(3-d)z^3F_{0i} + z^4\partial_0F_{0i} - m^2z^2A_i = 0 \quad (654)$$

mas

$$\partial_0F_{0i} = \partial_0(\partial_0A_i - \partial_iA_0) \quad (655)$$

$$= \partial_0\partial_0A_i - \partial_i\partial_0A_0 \quad (656)$$

$$= \partial_0\partial_0A_i - \partial_i[-\partial_iA_i - (1-d)z^{-1}A_0] \quad (657)$$

$$= \partial_0\partial_0A_i + \partial_i\partial_iA_i + (1-d)z^{-1}\partial_iA_0 \quad (658)$$

onde usamos a condição 412 (obtida de $\nabla_\mu A^\mu = 0$). Voltando

$$(3-d)z^3\partial_0A_i - (3-d)z^3\partial_iA_0 + z^4(\partial_0\partial_0A_i + \partial_i\partial_iA_i) + (1-d)z^3\partial_iA_0 - m^2z^2A_i = 0 \quad (659)$$

simplificando obtemos

$$[z^2\partial_\mu\partial_\mu + (3-d)z\partial_0A_i - m^2]A_i = 2z^{-1}\partial_iA_0 \quad (660)$$

Essa equação não possui a mesma forma da obtida para o campo A_0 . Podemos obter uma equação parecida se introduzirmos campos com índices de Lorentz tal que

$$\mathbf{A}_a = e_a^\mu A_\mu = x_0A_a \quad (661)$$

onde e_a^μ é o *vielbein* ($a = 0, 1, \dots, d$). Essa modificação basicamente faz com que $A_\mu \rightarrow z^{-1}\mathbf{A}_\mu$ o que resulta em

$$z^2(\partial_0\partial_0\mathbf{A}_i + \partial_i\partial_i\mathbf{A}_i) + (1-d)z\partial_0\mathbf{A}_i - (m^2 + 1 - d)\mathbf{A}_i = 2z\partial_i\mathbf{A}_0 \quad (662)$$

ou de outra forma

$$[z^2\partial_\mu\partial_\mu + (1-d)z\partial_0 - M^2]\mathbf{A}_i = 2z\partial_i\mathbf{A}_0 \quad (663)$$

D.5 Derivada em x_i de $\mathbf{A}_0(z, x^i)$

Vamos começar tomando a derivada em x_i de $A_0(x_0, x^i)$ definido em 413

$$\partial_i A_0(x_0, x^i) = -ix_0^{d/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} k_i e^{-ik \cdot x} a_0(k) K_\nu(kx_0) \quad (664)$$

Precisamos escrever essa quantidade em termos de A_i . Para isso vamos utilizar a relação 441 dada por

$$a_0(\mathbf{k}) = i\epsilon^{-d/2} k_i \mathbf{A}_i(\epsilon, k) \left\{ \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon) \right\}^{-1} \quad (665)$$

Mudando $i \rightarrow j$ (evitar caso específico de $i = j$) e substituindo em $\partial_i A_0(x_0, x^i)$ temos

$$\partial_i A_0(x_0, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} z^{d/2} \epsilon^{-\frac{d}{2}} k_i k_j \frac{\mathbf{A}_j(\epsilon, k) K_\nu(kz)}{\left(1 - d/2 + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \quad (666)$$

Fazendo a transformada inversa de Fourier e tomando $z = \epsilon$ obtemos

$$\partial_i A_0(\epsilon, x^i) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} k_i k_j \frac{\mathbf{A}_j(\epsilon, k)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) - k\epsilon \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} \quad (667)$$

D.6 Derivada em z de $\mathbf{A}_i(z, x^i)$

Vamos calcular a derivada em z de $\mathbf{A}_i(z, x^i)$. Vamos começar escrevendo

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathbf{A}_i(z, x^i) &= \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} z^{d/2} \epsilon^{-d/2} \left[\frac{K_\nu(kz)}{K_\nu(k\epsilon)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - kz K_{\nu+1}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \right] \mathbf{A}_j(\epsilon, k) \end{aligned} \quad (668)$$

escrevendo os termos da derivada obtemos

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[z^{d/2} K_\nu(kz) \right] = \frac{d}{2} z^{d/2-1} K_\nu(kz) + z^{d/2} k \left[\frac{\nu}{kz} K_\nu(kz) - K_{\nu+1}(kz) \right] \quad (669)$$

$$= z^{d/2-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - zk K_{\nu+1}(kz) \right] \quad (670)$$

o outro termo fica

$$\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{d/2} K_\nu(kz) \right] = \left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) z^{d/2-1} \left[\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_\nu(kz) - zk K_{\nu+1}(kz) \right] \quad (671)$$

o último termo fica

$$k \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{d/2+1} K_{\nu+1}(kz) \right] = \left(\frac{d}{2} + 1 \right) kz^{d/2} K_{\nu+1}(kz) + kz^{d/2+1} \frac{\partial}{\partial z} K_{\nu+1}(kz) \quad (672)$$

$$= kz^{d/2-1} \left[\left(\frac{d}{2} - \nu \right) z K_{\nu+1}(kz) - kz^2 K_{\nu}(kz) \right] \quad (673)$$

Esses últimos dois termos levam à

$$\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{d/2} K_{\nu}(kz) \right] - k \frac{\partial}{\partial z} \left[z^{d/2+1} K_{\nu+1}(kz) \right] = \star \quad (674)$$

$$\star = z^{d/2-1} \left[\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) + k^2 z^2 K_{\nu}(kz) \right] \quad (675)$$

Finalmente podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathbf{A}_i(z, x^i) = & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} z^{d/2-1} \epsilon^{-d/2} \left[\frac{\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(kz) - zk K_{\nu+1}(kz)}{K_{\nu}(k\epsilon)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) + k^2 z^2 K_{\nu}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \right] \mathbf{A}_j(\epsilon, k) \end{aligned} \quad (676)$$

Agora só nos resta fazer a transformada de Fourier inversa de modo que o resultado fica como

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathbf{A}_i(z, x^i) = & \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d y e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} z^{d/2-1} \epsilon^{-d/2} \times \quad (677) \\ & \times \left[\frac{\left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(kz) - zk K_{\nu+1}(kz)}{K_{\nu}(k\epsilon)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) \left(\frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(kz) - kz K_{\nu+1}(kz) + k^2 z^2 K_{\nu}(kz)}{\left(1 - \frac{d}{2} + \nu \right) K_{\nu}(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)} \right] \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \end{aligned} \quad (678)$$

D.7 Mudança de índices na ação *on-shell*

A mudança para os índices de Lorentz de $A_\nu F^{\nu 0}$ é

$$A_\nu F^{\nu 0} = z^4 A_i F_{i0} \quad (679)$$

$$= z^4 A_i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) \quad (680)$$

$$= z^3 \mathbf{A}_i [z^{-1} \partial_\nu \mathbf{A}_0 - \partial_0 (z^{-1} \mathbf{A}_i)] \quad (681)$$

$$= z^3 \mathbf{A}_i [z^{-1} \partial_i \mathbf{A}_0 - z^{-1} \partial_0 \mathbf{A}_i + z^{-2} \mathbf{A}_i] \quad (682)$$

$$= z^2 \mathbf{A}_i \partial_i \mathbf{A}_0 - z^2 \mathbf{A}_i \partial_0 \mathbf{A}_i + z \mathbf{A}_i \mathbf{A}_i \quad (683)$$

D.8 Termo $(A_i A_i)$

Vamos desenvolver

$$\text{Termo}(A_i \partial_0 A_i)_D = \int_{\partial \text{AdS}_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{1-d}}{4} \partial_0 (\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i) \quad (684)$$

Primeiro precisamos tomar 443 na borda, isso leva à

$$\mathbf{A}_i(\epsilon, x^i) = \int d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \quad (685)$$

$$= \int d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \delta_{ij} \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \quad (686)$$

e substituindo no segundo termo obtemos

$$\text{Termo}(A_i A_i) = \int_{\partial \text{AdS}_{d+1}} d^d x \frac{\epsilon^{-d}}{2} \mathbf{A}_i(z, x^i) \mathbf{A}_i(z, x^i) \Big|_{z=\epsilon} \quad (687)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \mathbf{A}_i(\epsilon, x) \mathbf{A}_j(\epsilon, y) \delta_{ij} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \epsilon^{-d} \quad (688)$$

Esse termo não contribui na função de 2 pontos pois a integral sob os momentos possui uma divergência do tipo logarítmica. O mesmo ocorre com o caso da função de 2-pontos do campo escalar massivo com condições de contorno de Neumann (equação 251).

APÊNDICE E – Formulário

Vamos expor as principais relações matemáticas para o desenvolvimento desse trabalho.

E.1 Função de Bessel $K_\nu(z)$

As expansões da função de Bessel que serão utilizadas são.

E.1.1 Parâmetro ν não inteiro

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \left[\sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n + 1 - \nu)} - \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu} \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n + 1 + \nu)} \right] \quad (689)$$

E.1.2 Parâmetro ν inteiro e não-nulo

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} (-1)^n \frac{\Gamma(\nu - n)}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} - (-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n \geq 0} \left[\ln \left(\frac{z}{2}\right) - \frac{\lambda(n+1) + \lambda(\nu + n + 1)}{2} \right] \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(n + 1 + \nu)} \quad (690)$$

onde

$$\lambda(1) = -\gamma \quad (691)$$

e

$$\lambda(n) = -\gamma + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \quad (n \geq 2) \quad (692)$$

aqui γ é a constante de Euler.

E.1.3 Parâmetro $\nu = 0$

$$K_0(z) = - \sum_{n \geq 0} \left[\ln \left(\frac{z}{2} \right) - \lambda(n+1) \right] \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^{2n}}{n! \Gamma(n+1)} \quad (693)$$

E.1.4 Propriedades de $K_\nu(x)$

Algumas propriedades relevantes da função de $K_\nu(x)$

$$\frac{\partial K_\nu(x)}{\partial x} = \frac{\nu}{x} K_\nu(x) - K_{\nu+1}(x) \quad (694a)$$

$$K_{\nu+1}(x) = K_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu}{x} K_\nu(x) \quad (694b)$$

E.1.5 Propriedades da função *Gamma*

Algumas propriedades da função *Gamma* são importantes para o desenvolvimento das contas desse trabalho. Vamos começar com a definição dessa função em termos do fatorial

$$\Gamma(z) = (z-1)! \rightarrow \begin{cases} \Gamma(2) = 1! = 1 \\ \Gamma(1) = 0! = 1 \\ \Gamma(0) = \infty \\ \Gamma(-1) = \infty \end{cases} \quad (695)$$

Esses são alguns valores relevantes. Outra propriedade que devemos destacar são baseadas na seguinte relação de “recorrência”

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (696)$$

Se fizermos sucessivas mudanças do tipo $z \rightarrow z+n$ com n natural e positivos obtemos

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = z(z+1)\Gamma(z) \quad (697)$$

$$\Gamma(z+3) = (z+2)\Gamma(z+2) = z(z+1)(z+2)\Gamma(z) \quad (698)$$

⋮

Agora se tomarmos $z \rightarrow -z$ obtemos

$$\Gamma(1 - z) = -z\Gamma(-z) \quad (699)$$

$$\Gamma(2 - z) = (1 - z)\Gamma(1 - z) = -z(1 - z)\Gamma(-z) \quad (700)$$

$$\Gamma(3 - z) = (2 - z)\Gamma(2 - z) = -z(1 - z)(2 - z)\Gamma(-z) \quad (701)$$

⋮

Aqui podemos ver que não temos como passar de $\Gamma(z)$ para $\Gamma(-z)$. No valor onde eles coincidem, $z = 0$, temos um valor infinito complexo. Uma outra relação que será necessária é obtida pela mudança $z \rightarrow z - 1$. Isso leva à

$$\Gamma(z - 1) = \frac{\Gamma(z)}{(z - 1)} \quad (702)$$

$$\Gamma(z - 2) = \frac{\Gamma(z - 1)}{(z - 1)} = \frac{\Gamma(z)}{(z - 1)(z - 2)} \quad (703)$$

⋮

E.2 Integral sob o Momento

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} k^\rho = C_\rho \frac{1}{|x|^{d+\rho}} \quad \rho \neq -d, -d - 2, \dots \quad (704)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} k^\rho \ln k = \frac{dC_\rho}{d\rho} \frac{1}{|x|^{d+\rho}} + C_\rho \frac{\ln |x|}{|x|^{d+\rho}} \quad \rho \neq -d, -d - 2, \dots \quad (705)$$

onde

$$C_\rho = \frac{2^\rho}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+\rho}{2})}{\Gamma(-\frac{\rho}{2})} \quad (706)$$

Diferenciando em relação à x^i e x^j pode-se obter a seguinte relação

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik \cdot x} \frac{k_i k_j}{k^2} k^\rho = -\frac{1}{\rho} \left[\delta_{ij} - (\rho + d) \frac{x_i x_j}{x^2} \right] \frac{C_\rho}{|x|^{d+\rho}} \quad (707)$$

Alguns valores serão úteis ao longo do desenvolvimento do texto. O primeiro seria $C_{\rho=0}$, expandindo C_ρ em serie de Taylor tem-se

$$\pi^{d/2} C_\rho \approx -\frac{\rho \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2} + \frac{\rho^2 \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4} \left[-\psi^{(0)}\left(\frac{d}{2}\right) + \gamma - \log(4) \right] + \dots \quad (708)$$

tomando $\rho = 0$

$$C_\rho \approx 0 \quad (709)$$

Também podemos calcular algumas derivadas para facilitar as contas. Para a função Γ temos

$$\frac{d\Gamma(x+a)}{dx} = \Gamma(a+x)\psi^{(0)}(a+x) \quad (710)$$

$$\frac{d\Gamma(x/2)}{dx} = \frac{1}{2}\Gamma(x/2)\psi^{(0)}(x/2) \quad (711)$$

$$\frac{d\Gamma(-x/2)^{-1}}{dx} = \frac{\psi^{(0)}(-x/2)}{2\Gamma(-x/2)} \quad (712)$$

onde $\psi^{(n)}(x)$ é a função *Polygamma*. Com isso em mãos podemos calcular

$$\pi^{d/2} \frac{dC_\rho}{d\rho} = \frac{1}{\pi^{d/2}} \left[2^\rho \log 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} + 2^\rho \frac{d\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{d\rho} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} + 2^\rho \Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right) \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} \right] \quad (713)$$

$$= \frac{2^\rho}{\pi^{d/2}} \left[\log 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} \frac{d\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{d\rho} + \Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right) \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} \right] \quad (714)$$

$$= \frac{2^\rho}{\pi^{d/2}} \left[\log 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right) \psi^{(0)}\left(\frac{d+\rho}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right) \frac{\psi^{(0)}\left(-\frac{\rho}{2}\right)}{2\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} \right] \quad (715)$$

$$= \frac{2^\rho}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\rho}{2}\right)} \left[\log 2 + \frac{1}{2} \psi^{(0)}\left(\frac{d+\rho}{2}\right) + \frac{1}{2} \psi^{(0)}\left(-\frac{\rho}{2}\right) \right] \quad (716)$$

Tomando o limite de $\rho = 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \pi^{d/2} \frac{dC_\rho}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = -\frac{1}{2} \Gamma(d/2) + \frac{1}{2} \rho \Gamma(d/2) \left[-\psi^{(0)}(a/2) + \gamma - \log(4) \right] + \mathcal{O}(\rho^2) \quad (717)$$

que em primeira ordem é

$$\pi^{d/2} \frac{dC_\rho}{d\rho} \Big|_{\rho=0} \approx -\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \quad (718)$$

E.2.1 Derivadas

Vamos deduzir algumas derivadas que serão usadas durante o desenvolvimento desse trabalho. Isso serve para simplificar o texto. Vamos começar fazendo, em detalhes, a seguinte derivada

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{P}_{ij} = \frac{d}{dx_i} \left[\left(\delta_{ij} - \frac{2(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^2} \right) \frac{1}{|x-y|^n} \right] \quad (719)$$

começando pela distributiva

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{P}_{ij} = \frac{d}{dx_i} \left[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^n} \right] - 2 \frac{d}{dx_i} \left[\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^{2+n}} \right] \quad (720)$$

$$= \frac{d}{dx_j} \left[\frac{1}{|x-y|^n} \right] - 2 \frac{d}{dx_i} \left[\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^{2+n}} \right] \quad (721)$$

O primeiro termo possui uma derivada direta dada por

$$\frac{d}{dx_j} \left[\frac{1}{|x-y|^n} \right] = - \frac{n(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (722)$$

No segundo termo temos que aplicar a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx_i} \left[\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^{2+n}} \right] = \frac{1}{|x-y|^{2+n}} \frac{d}{dx_i} [(x-y)_i(x-y)_j] + (x-y)_i(x-y)_j \frac{d}{dx_i} \frac{1}{|x-y|^{2+n}} \quad (723)$$

A primeira derivada pode ser feita da seguinte forma. Definindo $z_i = (x-y)_i$ junto com $\frac{dz_i}{dx_k} = \delta_{ik}$ permite escrever

$$\frac{d}{dx_k} z_i z_j = z_i \frac{dz_j}{dx_k} + z_j \frac{dz_i}{dx_k} \quad (724)$$

$$= z_i \delta_{jk} + z_j \delta_{ik} \quad (725)$$

voltando para as coordenadas antigas

$$\frac{d}{dx_k} (x-y)_i (x-y)_j = (x-y)_i \delta_{jk} + (x-y)_j \delta_{ik} \quad (726)$$

tomando $k = i$ e lembrando que $\delta_{ii} = d \times 1$

$$\frac{d}{dx_i} (x-y)_i (x-y)_j = (d+1)(x-y)_j \quad (727)$$

Assim a primeira derivada do nosso segundo termo fica

$$\frac{1}{|x-y|^{2+n}} \frac{d}{dx_i} [(x-y)_i(x-y)_j] = \frac{(d+1)(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (728)$$

Agora o segundo termo pode ser calculado com a derivada do modulo que já escrevermos. Isso leva à

$$(x-y)_i(x-y)_j \frac{d}{dx_i} \frac{1}{|x-y|^{2+n}} = -\frac{(n+2)(x-y)_i(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^{n+4}} \quad (729)$$

$$= -\frac{(n+2)(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (730)$$

Aqui usamos o fato de que $|x-y|^2 = (\sqrt{(x-y)^2})^2 = (x-y)^2$. Finalmente o segundo termo fica como

$$\frac{d}{dx_i} \left[\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|x-y|^{2+n}} \right] = \frac{(d+1)(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} - \frac{(n+2)(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (731)$$

$$= \frac{(d-1-n)(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (732)$$

Voltando para o termo inicial

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{P}_{ij} = -\frac{n(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} - 2\frac{(d-1-n)(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (733)$$

$$= (n-2d+2) \frac{(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \quad (734)$$

Podemos tomar novamente a sua derivada.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \mathcal{P}_{ij} = (n-2d+2) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \right] \quad (735)$$

Usando as relações anteriores temos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \mathcal{P}_{ij} = (n-2d+2) \left[(x-y)_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|x-y|^{n+2}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(x-y)_j}{|x-y|^{n+2}} \right] \quad (736)$$

$$= (n-2d+2) \left[-(x-y)_j(x-y)_j \frac{(n+2)}{|x-y|^{n+4}} + \frac{d}{|x-y|^{n+2}} \right] \quad (737)$$

$$= (n-2d+2)(d-n-2) \frac{1}{|x-y|^{n+2}} \quad (738)$$