



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Apóllo Vitalino da Silva

Explorando a termodinâmica de modelos confinantes

Rio de Janeiro

2018

Apóllo Vitalino da Silva

Explorando a termodinâmica de modelos confinantes



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586e

Silva, Apóllo Vitalino da
Explorando a termodinâmica de modelos confinantes /
Apóllo Vitalino da Silva. - 2018.
83 f.: il.

Orientador: Bruno Werneck Mintz.
Dissertação (Mestrado) - Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares

1. Teoria quântica de campos - Teses. 2. Teoria de campos
escalares - Teses. 3. Termodinâmica - Teses. 4. Confinamento
(Física nuclear) - Teses. I. Mintz, Bruno Werneck. II. Universidade
do Estado do Rio de Janeiro. III. Instituto de Física Armando Dias
Tavares. IV. Título

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Apóllo Vitalino da Silva

Explorando a termodinâmica de modelos confinantes

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 03 de agosto de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Prof. Dr. Carlos Farina de Souza
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2018

DEDICATÓRIA

Dedico à Deus todo esse trabalho.

AGRADECIMENTOS

Em primeiríssimo lugar, agradeço a Deus por ter permitido que tudo isso acontecesse e por ter me sustentado até aqui, pois só Ele sabe todas as dificuldades que passei durante esses dois anos de mestrado.

Agradeço aos meus pais, Apolo e Luciana, pela criação, pelo esforço, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Agradeço a Universidade do Estado do Rio de Janeiro, por ter me proporcionado um grande aprendizado, amigos verdadeiros e grandes experiências.

Agradeço ao meu orientador Dr. Bruno Wernek Mintz pela oportunidade, incentivo e apoio não só na elaboração deste trabalho mas também em todo o decorrer desses dois de curso (disciplinas, eventos, prova da UNIPOSRIO, etc). Pela paciência, pois sei que deixei a desejar em muitos aspectos mas mesmo assim sempre procurou ensinar-me da maneira mais didática possível e tirar o melhor de mim.

Agradeço ao Mario Junior de Oliveira Neves, que me orientou durante a graduação. Muito obrigado pela influência, pois com certeza o senhor é uma das pessoas responsáveis por eu estar terminando essa jornada do mestrado. Levarei sempre comigo os seus ensinamentos.

Agradeço ao Carlos Stivens pela paciência, pois vivia em sua bancada tirando dúvidas.

Agradeço ao Martheus Cerqueira por ter dividido sua bancada comigo durante um semestre.

Agradeço ao Kenion Assunção por me ajudar sempre, pois mesmo quando não sabia as respostas para minhas dúvidas, ajudava-me a encontrá-las.

Agradeço ao Rodrigo Terin pois também sempre esteve disposto a me ajudar.

Agradeço ao Matheus Paganelly por me proporcionar grandes momentos de risadas nessa árdua jornada do mestrado. Enfim, Todos da forma que puderam sempre me ajudaram.

Agradeço aos meus grandes amigos da época de graduação Ana Carolina, Bruno Cecílio e Nayton Claudinei, que mesmo estando longe sempre me apoiaram.

Agradeço aos meus grandes amigos da época de escola, inseparáveis, Laura Benevides, Marcelly Fortes, Rafaella Fortes e Ulisses Lopes que sempre me apoiaram mesmo que indiretamente.

Agradeço a minha Crew, que sempre esteve do meu lado proporcionando grandes momentos de alegria.

Agradeço ao meu pastor João Dias e todos os que fazem parte do ministério que congrego, pela compreensão, força e apoio.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento

de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Agradeço a todos aqueles que fizeram parte direta e indiretamente para o término deste trabalho e da minha formação.

porquanto nele foram criadas todas as coisas nos céus e na terra, as visíveis e as invisíveis, sejam tronos ou dominações, sejam governos ou poderes, tudo foi criado por

Ele e para Ele.

Colossenses 1:16 – KJA

e sem Ele, nada do que existe teria sido feito.

João 1:3 – KJA

RESUMO

SILVA, A. V. *Explorando a termodinâmica de modelos confinantes*. 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Estabelecer uma descrição para o confinamento não é algo simples. Com o intuito de tentar entender um pouco sobre esse fenômeno, exploraremos a termodinâmica de um modelo “de brinquedo” que tenta descrevê-lo em termos do propagador com violação de positividade. Neste trabalho, “confinamento” é sempre entendido no sentido de violação de positividade da função espectral dos campos elementares. Por simplicidade, definiremos um modelo para campos escalares com um termo de massa dependente do momento e não-local. Um de nossos objetivos é, então, verificar as propriedades termodinâmicas da teoria que descreve tal modelo, a fim de analisar possíveis inconsistências. Para isso utilizaremos o formalismo funcional da Teoria Quântica de Campos (TQC) a temperatura finita, de onde obteremos a função de partição e, conseqüentemente, algumas variáveis termodinâmicas tais como pressão e densidade de entropia. Em seguida, obtemos a função de dois pontos a temperatura finita do campo escalar do modelo, a fim de estudar se há ou não restauração da positividade (portanto, desconfinamento, na nossa linguagem).

Palavras-chave: Teoria Quântica de Campos. Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita. Modelos de Campos Confinantes. Teoria de Gribov-Zwanziger.

ABSTRACT

SILVA, A. V. *Exploring the thermodynamics of confining models*. 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

Establishing a description for confinement is not something simple. In order to try to understand a little about this phenomenon, we will explore the thermodynamics of a *toy model* that tries to describe it in terms of propagators with violation of positivity. In this work, “confinement” is always understood in the sense of positivity violation of the spectral function of the elementary fields. For simplicity, we will define a model for scalar fields with a momentum dependent and nonlocal mass term. One of our objectives is to verify the thermodynamic properties of the theory that describes such a model, in order to analyze possible inconsistencies. For this we use the functional formalism of Quantum Field Theory (QFT) at finite temperature, from which we obtain the partition function and, consequently, some thermodynamic variables such as pressure and entropy density. Then, we obtain the two-point function at finite temperature of the scalar field of the model, in order to study whether or not there is a restoration of positivity (hence, deconfinement, in our language).

Keywords: Quantum Field Theory. Quantum Field Theory at Finite Temperature.
Confining Fields Models. Gribov-Zwanziger Theory.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Grupo de Renormalização Funcional.	22
Figura 2	- Divisão do tempo imaginário.	33
Figura 3	- Contorno C	44
Figura 4	- Contorno “deformado”.	45
Figura 5	- Contorno para I_1	46
Figura 6	- Contorno para I_2	46
Figura 7	- Teorema de Wick.	59
Figura 8	- Diagrama conexo e desconexo.	60
Figura 9	- Correção de 1ª ordem para função de partição.	60
Figura 10	- Correção de 1ª ordem para o propagador.	61
Figura 11	- Expansão $1PI$	63
Figura 12	- Propagador.	68
Figura 13	- Derivada 3ª do propagador do modo de Matsubara $n = 1$ em função de p^2	69
Figura 14	- Derivada 4ª do propagador do modo de Matsubara $n = 1$ em função de p^2	70
Figura 15	- Comportamento da pressão para um gás livre	72
Figura 16	- Comportamento da densidade de entropia para um gás livre.	73

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	CROMODINÂMICA QUÂNTICA E ALGUMAS DE SUAS PE- CULIARIDADES	14
1.1	Cromodinâmica Quântica	15
1.2	Grupo de Renormalização	18
1.3	Métodos e Modelos Não Perturbativos	21
1.3.1	<u>Grupo de Renormalização Funcional</u>	21
1.3.2	<u>Equação de Schwinger-Dyson para a QCD</u>	24
1.3.3	<u>Modelos: Gribov-Zwanziger e Gribov-Zwanziger Refinado</u>	25
1.3.3.1	<u>Violação de Positividade e o Confinamento</u>	28
2	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA FI- NITA	31
2.1	Mecânica Quântica Estatística e o formalismo funcional	31
2.2	Formalismo funcional na Mecânica Estatística	37
2.2.1	<u>Um exemplo: Oscilador Harmônico</u>	39
2.3	Campo Escalar Neutro à Temperatura Finita	48
2.3.1	<u>Breve revisão do Teorema de Wick</u>	49
2.3.2	<u>Correções de 1ª ordem para o propagador e para função de partição</u>	57
3	PROPOSTA DE UM MODELO	66
3.1	Descrição do modelo	66
3.2	Resultados Obtidos	67
3.2.1	<u>Propagador Livre a temperatura finita</u>	67
3.2.2	<u>Pressão e densidade de entropia de um gás de partículas com violação de positividade</u>	69
	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	75
	APÊNDICE A – Pressão de um gás bosônico em termos da função de Bessel de segundo tipo	80
	APÊNDICE B – Integrais Gaussianas em Dimensões Superiores	82

INTRODUÇÃO

Embora o mecanismo de Higgs seja considerado como o principal responsável pela massa dos léptons (como o elétron, por exemplo), praticamente toda a massa da matéria visível do Universo (sem contar a Matéria Escura e a Energia Escura) está concentrada nos núcleos atômicos. Os núcleos atômicos são formados por prótons e nêutrons que, por sua vez, são formados por três quarks cada um. Em altas energias, quando a interação nuclear forte é menos relevante, podemos inferir qual é a parcela da massa dos quarks que se deve apenas à interação eletrofraca. O valor obtido para a soma das massas individuais dos três quarks que formam um próton corresponde a menos de 2% da massa total do próton. Assim, cerca de 98% da massa de um próton ou de um nêutron (e, portanto, da matéria visível) têm origem na interação nuclear forte.

O papel exercido pela interação forte é evidente, mas o seu mecanismo detalhado é pouco compreendido. A teoria fundamental das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD), pode ser resolvida por métodos perturbativos de forma confiável apenas em altíssimas energias. A QCD é uma teoria de calibre na qual os quarks (que são férmions) interagem entre si através de bósons de calibre, chamados glúons. Por tratar-se de uma teoria de calibre não-abeliana, os glúons interagem entre si, trazendo enorme riqueza e complexidade à teoria.

Uma das propriedades fundamentais da matéria fortemente interagente é o confinamento, ou seja, não há estados assintóticos de um único quark, nem de um único glúon. Em grandes distâncias (baixas energias), a interação entre quarks e glúons torna-se tão intensa que não é possível isolar uma destas partículas das outras. Uma outra maneira de se entender o confinamento é considerando que a interação forte faz com que qualquer estado de uma partícula com carga de cor não nula seja um estado não físico (por exemplo, com violação da positividade). Esta segunda abordagem tem sido usada como critério de confinamento há muitos anos em análises de geração dinâmica de massa de quarks e de glúons (CORNWALL, 1980; BRAMBILLA et al., 2014; ??; ??; ??; MAAS, 2013), por exemplo. Tal violação de positividade da função espectral pode ser entendida, a grosso modo, como uma probabilidade negativa de propagação, e, deste modo, a ausência do estado de um único quark ou glúon do espectro físico.

Propagadores, que apresentam esta violação, no espaço de momento, podem exibir polos complexos. É desta maneira que o modelo descreve o confinamento de um quark isolado. A interação não local que causa este efeito pode ser entendida como resultado da ação de um background de glúons, sobre os quais movem-se os quarks.

Espera-se que, em altas energias, ocorra o desconfinamento de quarks e glúons, devido ao fenômeno da liberdade assintótica. O confinamento é um fenômeno eminentemente não-perturbativo. Portanto, abordagens não-perturbativas, como aquela do Grupo de Re-

normalização Funcional (BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002; BLAIZOT, 2007), das Equações de Dyson-Schwinger (CLOËT; ROBERTS, 2014), das simulações de Monte Carlo na rede (KARSCH, 2009), de métodos holográficos (BRODSKY et al., 2015) e, finalmente, de modelos efetivos (NAMBU; JONA-LASINIO, 1961; KLEVANSKY, 1992), são preciosas ferramentas no estudo das interações fortes.

Do ponto de vista teórico, a exploração de modelos físicos em um meio material pode também revelar propriedades importantes dos sistemas físicos, assim como possíveis inconsistências do modelo que poderiam não ser muito facilmente percebidas em análises no vácuo. Assim, este trabalho enquadra-se como parte do grande esforço teórico da Física Teórica de Altas Energias em busca de uma melhor compreensão das interações nucleares fortes em regimes extremos. Tal empreendimento exige métodos que consigam ir além da teoria de perturbação e que possuam capacidade de predição de resultados experimentais, assim como capacidade de comparação com outros métodos teóricos. Este é o caso do método dos modelos efetivos, que empregaremos em nossa investigação.

No primeiro capítulo deste trabalho, será apresentada uma breve revisão sobre a teoria responsável por descrever as interações fortes, pois sabemos que hoje a natureza é descrita por quatro interações fundamentais: força gravitacional, força eletromagnética, força nuclear forte e força nuclear fraca. Nele abordaremos, resumidamente, como foi a construção e a evolução da teoria da interação forte, denominada Cromodinâmica Quântica e algumas de suas principais características como: carga fracionária, liberdade assintótica e o confinamento. Esta terceira característica, o confinamento, ainda é um problema em aberto e muitos tentam explicá-lo propondo diversos modelos e métodos. Dessa forma, mencionaremos alguns de maneira resumida. Por fim, falaremos sobre a violação de positividade, que é uma abordagem onde tal fenômeno pode ser visto e que será usada neste trabalho de dissertação.

O segundo capítulo é dedicado a uma revisão sobre a Teoria Quântica de Campos (TQC) a temperatura finita com o objetivo de relembrar ao leitor conceitos de tal teoria, partindo da Mecânica Quântica, apresentando o formalismo funcional e fazendo uma conexão com a função de partição em Mecânica Estatística. Será feita também uma breve menção sobre o Teorema de Wick e para ilustrá-lo, em seguida, apresentaremos o cálculo de correções perturbativas (cálculos a primeira ordem) para uma lagrangiana local.

Já o terceiro capítulo é dedicado aos resultados originais do trabalho. Nele, utilizando o formalismo funcional, será proposto um modelo com uma lagrangiana, euclidiana, para um campo escalar com um termo de massa não local dependente do momento e o mesmo apresentará um propagador com violação de positividade. Veremos que tal proposta assemelha-se (algebricamente) ao modelo da teoria refinada de Gribov-Zwanziger (RGZ) que propõe um propagador para o glúon, onde o mesmo tem um bom acordo com a QCD na rede, podendo então ser visto como um *modelo de brinquedo* do modelo RGZ.

Observaremos também que tal modelo apresentará características vistas no modelo RGZ, sendo assim cabível de se fazer comparações.

Em seguida, investigaremos o comportamento de variáveis termodinâmicas como a pressão e a densidade de entropia com o intuito de fazer possíveis ligações com o confinamento e, conseqüentemente, tentar extrair algo que beneficie o estudo de tal fenômeno; ressaltando que o mesmo será visto como violação de positividade. Toda essa análise será feita para o termo quadrático da ação, obtendo assim o propagador e a função de partição para esta teoria para a análise das variáveis termodinâmicas.

1 CROMODINÂMICA QUÂNTICA E ALGUMAS DE SUAS PECULIARIDADES

A Cromodinâmica Quântica é a teoria mais aceita para explicar as interações nucleares fortes, que é uma das últimas interações a terem uma descrição teórica formulada. Por volta de 1960, a física de partículas experimental descobria um número crescente de partículas chamadas hádrons a todo o tempo, o que trazia uma confusão conceitual ao se tratar das interações fortes. Conseqüentemente, foram propostas várias formulações que conseguiam, em parte, descrever tais partículas (NE'EMAN, 1961; GELL-MANN, 1962).

Por volta de 1964, houve um grande progresso com a formulação do esquema de classificação das partículas que interagiam fortemente. George Zweig (ZWEIG, 1964) e Murray Gell-Mann (GELL-MANN, 1964) apresentaram um esquema lógico de entendimento dos hádrons a partir de três partículas fundamentais denominadas de *quarks* (batizadas por M. Gell-Mann). Tais quarks eram férmions de spin $1/2$ e eram, a princípio, de três tipos (ou sabores): *up*, *down* e *strange*. Sendo assim, subdividindo os hádrons em bárions (formados por três quarks) e mésons (formados por pares de quark-antiquark).

Essa proposta de partículas serviu de base para a montagem de uma teoria estruturada de maneira similar à Eletrodinâmica Quântica (QED) e foi denominada de Cromodinâmica Quântica (QCD). Na QCD, o análogo à carga elétrica (QED) seria o que ficou conhecido de carga de cor (número quântico) (FRITZSCH; GELL-MANN, 1971), ou seja, em vez de carga positiva e carga negativa, haveria três cargas de cor: *vermelho*, *verde* e *azul*. Ressaltamos que são cores puramente ficcionais, sendo apenas uma descrição para os números quânticos associados aos quarks. Outro detalhe é que os hádrons são singletos de cor, isto é, cor-anticor (mésons) ou RGB (bárions)

A definição desse novo número quântico solucionava o problema da violação do Princípio de Exclusão de Pauli que alguns hádrons apresentavam, como por exemplo o bárion Δ^{++} que era formado por quarks do mesmo tipo — três quarks *up*.

A construção dessa teoria, de uma forma similar à QED, conduziu a várias características interessantes e peculiares das interações fortes. A carga fracionária é um exemplo dessas peculiaridades, pois sabia-se por exemplo que o próton (bárion formado por 3 quarks) tinha carga elétrica inteira e positiva, logo se os quarks existissem os mesmos não poderiam ter múltiplo da carga elétrica convencional, necessariamente cada um dos três quarks deveriam ter carga elétrica fracionária por serem constituintes de uma partícula com carga elétrica inteira.

Uma outra particularidade é a chamada liberdade assintótica, que nos diz que a constante de acoplamento da teoria, ou seja, aquela quantidade que nos fornece uma ideia da intensidade da interação, tende a zero para altas energias, isto é, não havendo mais interação (partículas quase livres). Tal característica da teoria foi mostrada por D. Gross,

F. Wilczek (GROSS; WILCZEK, 1973) e D. Politzer (POLITZER, 1973), e permitia que fossem feitas previsões dos resultados de muitos experimentos usando técnicas como Teoria de Perturbação.

Entretanto, apesar dessa teoria apresentar um conjunto de quarks com certos números quânticos para descrever as interações fortes, estas partículas em si não eram (e ainda não são) observadas diretamente, ou seja, observava-se partículas com carga de cor nula. Todas as partículas observadas eram combinações desses quarks, e foram denominado de estados ligados de quarks. Acreditava-se que este fato não deveria ter sido uma mera coincidência.

Passou-se então a esperar que a teoria propiciasse um mecanismo que proibisse que esses quarks livres aparecessem na natureza. Essa propriedade então nos leva a uma terceira característica batizada de confinamento de cor — que não era muito bem compreendido na época e que ainda é um problema em aberto. Supõe-se então que, se os quarks existem, os mesmos são partículas que não vão aparecer na natureza sozinhos (livres), sempre vão aparecer ligados (ou na forma de bárions, ou na forma de mésons).

Em processos de colisões elétron-próton de alta energia — conhecidos como Espalhamentos Profundamente Inelásticos — era observado que o próton possuía uma estrutura interna (BJORKEN; PASCHOS, 1969; HALZEN; MARTIN, 1984). Todavia, apenas a consideração de quarks como constituintes do próton, por exemplo, não era suficiente para explicar os resultados experimentais das suas distribuições de momento. Portanto, para uma teoria mais concisa, as demais observações foram atribuídas a outras partículas, hoje conhecidas como glúons, sendo estes os mediadores da interação forte — análogos aos fótons na QED, com a diferença de que um glúon pode interagir com outro glúon. Evidência dos glúons foi detectada em eventos de três jatos no acelerador PETRA em 1979. Hoje em dia os sabores dos quarks, observados experimentalmente, são: *up* (u), *down* (d), *strange* (s), *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t).

1.1 Cromodinâmica Quântica

Agora, a teoria precisa de uma lagrangiana que descreva os quarks e os glúons (PESKIN; SCHROEDER, 1995) e que seja invariante sob transformações de calibre. Para construí-la, começemos então pelos quarks, que são férmions e portanto obedecem a equação de Dirac e logo podem ser descritos pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi , \tag{1}$$

onde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, sendo γ^μ as matrizes de Dirac, e $\psi(x)$ um espinor. Entretanto, a mesma não é invariante sob transformações de calibre e tal transformação para $\psi(x)$ é dada por

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha^a(x)t^a} \psi(x), \quad (2)$$

onde $\alpha_a(x)$ são os parâmetros da transformação, a o índice de cor e t^a os geradores do grupo, que obedecem à seguinte relação de comutação

$$[t^a, t^b] = if^{abc} t^c, \quad (3)$$

sendo f^{abc} as chamadas constantes de estrutura do grupo $SU(N)^1$, as quais são completamente antissimétricas.

Portanto, para que haja essa invariância, devemos escrever tal lagrangiana em termos da chamada Derivada Covariante (D_μ) e assim incluímos de maneira formal a interação na teoria. Tal derivada é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a, \quad (4)$$

onde g é a constante de acoplamento e A_μ^a são os campos de calibre. Assim, reescrevendo a lagrangiana dos quarks em função da derivada covariante, que inclui o termo de interação que vem do fato de impor a invariância da teoria sob transformação de calibre, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar{\psi} (i\not{D}_\mu - m) \psi \\ &= \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi + g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu^a t^a \psi, \end{aligned} \quad (5)$$

onde o subíndice F indica *férmions*. Mas até o momento, esta lagrangiana só descreve os quarks. Para completá-la, é necessário ter um termo cinético que descreva os glúons, ou seja, os campos de interação A_μ . Tal termo, que será a lagrangiana que descreve os glúons, é definido como

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (6)$$

onde o subíndice g indica *glúon* e $G_{\mu\nu}^a$ é o chamado Tensor de Campo (análogo ao tensor de campo do Eletromagnetismo) dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (7)$$

Assim, juntando a lagrangiana que descreve os quarks e a que descreve os glúons, temos a lagrangiana completa para a QCD que é denominada de Lagrangiana clássica de Yang-

¹ No caso do grupo de simetria $SU(3)$, a simetria atribuída à cor.

Mills para a QCD

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}_{i\alpha} \left[(i\not{D}_\mu - m)^{\alpha\beta} \delta_{ij} \right] \psi_{j\beta}, \quad (8)$$

sendo $\psi_{j\beta}$ o campo fermiônicos, onde α e β são índices de Dirac, e i, j são os índices do grupo de simetria dos quarks (cor). Ressaltando que a primeira parte da lagrangiana acima corresponde a parte bosônica (glúons) e a segunda parte corresponde a parte fermiônica (quarks).

Mas, ainda podemos reescrever a equação (8) como a soma de uma parte livre com uma parte de interação, a saber,

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (9)$$

onde a parte livre (\mathcal{L}_0) da teoria é dada por

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}_{i\alpha} \left[(i\not{\partial} - m)^{\alpha\beta} \delta_{ij} \right] \psi_{j\beta}, \quad (10)$$

em que o tensor $F_{\mu\nu}^a$ corresponde à parte bosônica sem interação, dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a; \quad (11)$$

e a parte de interação (\mathcal{L}_{int}) da teoria é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \bar{\psi}_{i\alpha} A_\mu^a (\gamma^\mu)^{\alpha\beta} t_{ij}^a \psi_{j\beta} - g_s f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e}, \quad (12)$$

onde podemos ver as interações entre o campo do quark (ψ) e do glúon (A_μ), e entre os próprios campos dos glúons.

Para a quantização desta teoria de calibre não abelina, utiliza-se o método funcional de Feynman (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Porém, é necessário fixar o calibre devido à presença de cópias de calibre (estados físicos equivalentes) provindas do ato da integração funcional. O procedimento de Faddeev e Popov (FADDEEV; POPOV, 1967) é utilizado para poder amenizar tais cópias, ou seja, possibilita separar da integral de Feynman para a função de partição da teoria um conjunto dessas cópias de calibre. Mas mesmo assim, veremos mais adiante que tal procedimento não é capaz de eliminar todas as cópias. Dessa maneira veremos de forma resumida alguns métodos e modelos que investigam a lagrangiana clássica de Yang-Mills para a QCD (8) na região infravermelha, ou seja, para baixas energias com o intuito de fazer uma abordagem para o confinamento.

1.2 Grupo de Renormalização

Um questionamento que recorrentemente é feito no ramo da Física é: “quando uma teoria é realmente válida?”. O Grupo de Renormalização (GR) fornece uma possível resposta para esta pergunta. Esse, por sua vez, permite-nos compreender melhor o porquê de uma Teoria Quântica de Campos renormalizada descrever bem a natureza.

Para uma melhor compreensão do que consiste o GR, vamos analisar o caso de uma teoria escalar autointeragente, cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{1}{4!} \lambda_0 \phi_0^4, \quad (13)$$

onde m_0 , λ_0 e ϕ_0 representam, respectivamente, a massa, a constante de acoplamento e o campo da partícula para uma aproximação sem correções, ou seja, grandezas *nuas* (não renormalizadas).

Sabemos que esta lagrangiana apresenta divergências devido ao fato de possuir grandezas não físicas. Para eliminar tais divergências precisamos adicionar parâmetros que forneçam correções para as mesmas, eliminando, assim, as divergências. A escolha canônica para os parâmetros dessa teoria é dada, geralmente (podendo haver pequenas diferenças) por (NETO, 2017; PESKIN; SCHROEDER, 1995)

$$\begin{aligned} \phi_0 &= Z^{1/2} \phi; \\ m_0^2 &= Z^{-1} (m^2 - \delta m^2); \\ \lambda_0 &= Z^{-2} Z_\lambda \lambda, \end{aligned} \quad (14)$$

onde ϕ , m e λ são grandezas renormalizadas, e Z , Z_λ e δm^2 são termos (infinitos) cuja forma depende do método de regularização (Pauli-Villars, regularização dimensional, etc.). Substituindo (14) em (13), temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} Z \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} (m^2 - \delta m^2) \phi^2 - \frac{1}{4!} Z_\lambda \lambda \phi^4, \quad (15)$$

que equivale a²

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 + \frac{1}{2} (Z - 1) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2 \\ - \frac{1}{4!} (Z_\lambda - 1) \lambda \phi^4 \end{aligned} \quad (16)$$

sendo as três últimas parcelas contratermos que irão cancelar os infinitos do cálculo perturbativo. Todavia, a massa m e a constante de acoplamento λ não são necessariamente

² A utilização desta lagrangiana com contratermos é denominada de *Teoria de Perturbação Renormalizada*

físicas, uma vez que não foram definidos em termos da função de Green³. Portanto, é necessário introduzirmos um parâmetro de escala para que tal relação possa ser feita na teoria e, então, encontraremos os valores físicos para essas grandezas.

Seja $G_R^{(2)}(p)$ a função de Green de dois pontos renormalizada. Uma expressão geral para a mesma pode ser dada por

$$G_R^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma_R(p^2)}. \quad (17)$$

Na teoria escalar livre, o polo da função de Green equivale à massa física e renormalizada. O polo em (17) representa a massa física da teoria, porém a mesma é não renormalizada a menos que fixemos um valor para p^2 . Isso consiste em estabelecermos uma escala $p^2 = \mu^2$ (caracterizada pela escala μ) na qual o termo de correção de massa é nulo ($\Sigma_R(\mu^2) = 0$).

Tanto m e λ (grandezas renormalizadas) como Z_λ , Z e δm^2 dependem da escolha de μ , ou seja, mudando-se μ , alteram-se todos esses parâmetros. Porém, felizmente, tal mudança faz com que as grandezas físicas permaneçam invariantes.

Caso queiramos introduzir transformações sobre as grandezas nuas de uma teoria com o intuito de torná-las renormalizadas (como feito em (14)), devemos prosseguir da seguinte maneira

$$\Gamma_R = Z(R)\Gamma_0, \quad (18)$$

onde Γ_R , Γ_0 e $Z(R)$ representam, respectivamente, a grandeza renormalizada, a grandeza nua e o parâmetro de renormalização que depende do ponto onde definimos a escolha da escala μ . Mas se escolhermos outro ponto, teremos outro valor diferente $Z(R')$, logo

$$\Gamma_{R'} = Z(R')\Gamma_0. \quad (19)$$

Consequentemente, há uma relação entre $\Gamma_{R'}$ e Γ_R , que é dada por

$$\Gamma_{R'} = Z(R', R)\Gamma_R. \quad (20)$$

Combinando as três últimas equações escritas anteriormente, temos

$$Z(R', R) = \frac{Z(R')}{Z(R)}. \quad (21)$$

³ Vale ressaltar que o propagador é dado por uma função de Green e que a massa física é definida como a posição de seu polo.

Podemos verificar facilmente que $Z(R', R)$ satisfaz às seguintes propriedades

$$\begin{aligned} Z(R, R) &= 1 \\ Z(R, R') &= Z^{-1}(R', R) \\ Z(R'', R) &= Z(R'', R') Z(R', R) \end{aligned} \tag{22}$$

Tal conjunto de transformações é conhecido como *Grupo de Renormalização*.

Para um desenvolvimento do GR, podemos usar o conhecido método de Callan-Symanzik (NETO, 2017). Vimos até aqui que os parâmetros envolvidos dependem da escala μ , sendo assim a função de Green renormalizada, $G_{n_B, n_F}^R(p_i, \lambda, \mu)$, é introduzida a partir de fatores adimensionais $Z_B(\lambda_0, \Lambda/\mu)$ e $Z_F(\lambda_0, \Lambda/\mu)$ da seguinte forma

$$G_{n_B, n_F}^R(p_i, \lambda, \mu) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z_B^{n_B}(\lambda_0, \Lambda/\mu) Z_F^{n_F}(\lambda_0, \Lambda/\mu) G_{n_B, n_F}(p_i, \lambda_0, \Lambda) \tag{23}$$

em que n_B e n_F são o número de linhas externas de bósons e férmions correspondentes à soma de todos os diagramas de Feynman conectados e $1PI^4$ (PESKIN; SCHROEDER, 1995; LANCASTER; BLUNDELL, 2014); λ é o acoplamento renormalizado; Λ é um parâmetro de corte das divergências (proveniente da regularização de Pauli-Villars); e μ , a escala de massa, já mencionada. Agora, tomando a derivada adimensional $\mu \partial/\partial\mu$ na equação acima, obtemos

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda} + n_B \gamma_B(\lambda) + n_F \gamma_F(\lambda) \right] G_{n_B, n_F}^R(p_i, \lambda, \mu) = 0, \tag{24}$$

sendo

$$\beta(\lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{\partial}{\partial\mu} \lambda(\lambda_0, \Lambda/\mu); \tag{25}$$

$$\gamma_B(\lambda) = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{1}{Z_B} \frac{\partial}{\partial\mu} Z_B(\lambda_0, \Lambda/\mu); \tag{26}$$

$$\gamma_F(\lambda) = - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mu \frac{1}{Z_F} \frac{\partial}{\partial\mu} Z_F(\lambda_0, \Lambda/\mu). \tag{27}$$

A equação (24) é denominada de *equação de Callan-Symanzik*, onde $\beta(\lambda)$ é a denominada *função beta*; $\gamma_F(\lambda)$ e $\gamma_B(\lambda)$ são as *dimensões anômalas*. Vale ressaltar que β e γ 's são quantidades finitas, portanto, independentes de Λ e também do parâmetro de escala μ . Podemos ver também que, pela equação (25), β é a taxa de variação da constante de acoplamento renormalizada na escala μ .

Assim, podemos ver que o GR é um método para estudar o comportamento da constante de acoplamento da teoria em relação a mudança de escala. O mesmo nos fornece

⁴ Um diagrama $1PI$ (diagrama irredutível a uma partícula) é um diagrama que não pode ser dividido em dois diagramas disjuntos pelo simples corte de uma linha interna.

informações sobre muitos fenômenos físicos, como a liberdade de Anderson e a transição de Kosterlitz-Thouless (para mais detalhes ver em: (LANCASTER; BLUNDELL, 2014)).

No entanto, existe uma certa limitação para a equação do grupo de renormalização (nua e renormalizada) e para a equação de Callan-Symanzik: elas são assintóticas, ou seja, são aplicáveis apenas no regime $\mu^2, p^2 \ll \Lambda^2$. Uma abordagem mais completa e livre de tal limitação é descrita pelo *Grupo de Renormalização Funcional*, o qual discutiremos brevemente dentro da próxima seção.

1.3 Métodos e Modelos Não Perturbativos

Após uma breve apresentação sobre a Cromodinâmica Quântica, que é uma teoria de calibre não abeliana, vale salientar que o confinamento ainda é um problema em aberto. Tal fenômeno é “observado” no regime de baixas energias, ou seja, no regime não perturbativo. Com isso, há vários modelos não perturbativos, fenomenológicos, baseados no comportamento dos propagadores da teoria, que tentam explicá-lo. O propagador nada mais é que uma função associada à amplitude de probabilidade da partícula de se movimentar de um ponto a outro no espaço-tempo, onde a mesma é dada por uma função de correlação dos campos em Teoria Quântica de Campos. Por terem um caráter não perturbativo, tais funções podem ser investigadas por simulações na rede.

Faremos então uma breve abordagem de alguns métodos/modelos onde os mesmos trazem a proposta de estudar a QCD no regime não perturbativo.

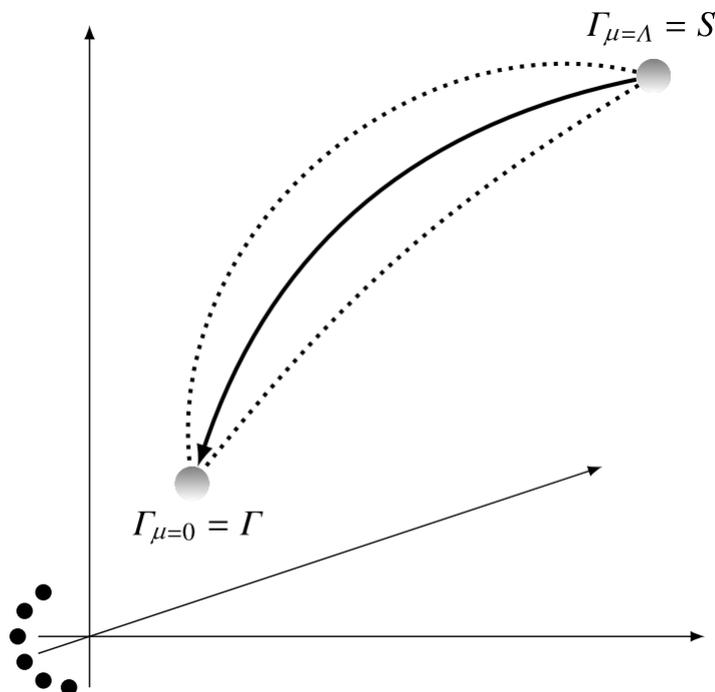
1.3.1 Grupo de Renormalização Funcional

O Grupo de Renormalização Funcional (GRF) é uma implementação particular do conceito de GR no qual combinamos os métodos funcionais da TQC com a ideia de grupo de renormalização de K. Wilson (WIPF, 2013; LANCASTER; BLUNDELL, 2014). O GRF ajusta suavemente as leis macroscópicas conhecidas aos fenômenos microscópicos complexos em sistemas físicos e é uma implementação no espaço dos momenta da ideia de grupo de renormalização, podendo ser formulado diretamente por uma teoria de campos contínua. Na maioria das abordagens, utiliza-se um funcional de Schwinger dependente de uma escala ($W_\mu[j]$) ou uma ação efetiva que também depende de uma escala ($\Gamma_\mu[\varphi]$). O fluxo de escalas microscópicas para macroscópicas é dado por uma equação de fluxo conceitualmente simples, mas tecnicamente exigente para funcionais dependentes de escala, vale ressaltar que tal equação descreve a dependência da energia livre em termos de um corte infravermelho para flutuações quânticas ou térmicas. *A priori*, o método não é perturbativo e não depende de uma expansão em termos de uma constante de acoplamento

pequena (WIPF, 2013).

Nós utilizaremos a equação de fluxo para a ação efetiva dependente de escala, que, a menos de um termo de corte, é apenas uma transformada de Legendre do funcional de Schwinger dependente de escala. Para calcularmos Γ_μ devemos incorporar flutuações quânticas entre uma escala de momentum μ e uma escala de corte Λ grande. Para valores de μ grandes, próximos ao corte, recuperamos a ação clássica $S[\varphi]$. Com o decréscimo da escala⁵, efeitos de longo alcance são incluídos e, para $\mu \rightarrow 0$, recuperamos a ação efetiva completa contendo flutuações quânticas em todas as escalas de momentum, como pode ser visto na figura 1 (WIPF, 2013).

Figura 1 - Grupo de Renormalização Funcional.



Legenda: Esboço do fluxo do grupo de renormalização no espaço teórico. Cada eixo rotula um operador diferente que pode entrar na ação efetiva, por exemplo φ^2 , φ^4 , $(\partial\varphi)^2$, etc. Para uma determinada condição inicial na escala de corte Λ , a equação do grupo de renormalização funcional determina o fluxo de Γ_μ . Diferentes funções reguladoras R_μ levam a diferentes trajetórias no espaço teórico, mas, em princípio, todas as trajetórias terminam em plena ação quântica efetiva.

Fonte: WIPF, 2013, p. 258.

A ação efetiva média é escrita em termos do funcional de Schwinger que, por sua vez, é definido através do funcional gerador das funções de correlação euclidianas de n -

⁵ É importante ressaltarmos que o índice μ , utilizado nesta seção, não representa componentes espaço-temporais, mas sim o parâmetro de escala.

pontos dadas por:

$$Z[j] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-S[\phi] + \int d^d x j(x)\phi(x)\right\}. \quad (28)$$

O funcional de Schwinger é definido como o logaritmo de $Z[j]$, dado por

$$W[j] = \ln Z[j]. \quad (29)$$

Esse funcional gera todas as funções de correlação conexas. De maneira mais formal, a ação efetiva provém da transformada de Legendre do logaritmo do funcional gerador na presença de fontes ou de campos externos ($W[j]$). Com isso,

$$\Gamma[\varphi] = \int d^d x j(x)\varphi(x) - W[j], \text{ onde } \varphi(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}. \quad (30)$$

A ação efetiva gera as funções de correlação *1PI* e conhecê-la é, de certa forma, equivalente a conhecer a “solução” da teoria, uma vez que ela engloba todas as propriedades subjacentes à TQC da maneira mais simples possível.

Para introduzirmos a dependência de escala nos funcionais, vamos adicionar um termo de corte infravermelho ΔS_μ na ação clássica em (28). Então, o funcional gerador com dependência de escala será dado por

$$Z_\mu[j] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-S[\phi] + \int d^d x j(x)\phi(x) - \Delta S_\mu[\phi]\right\} \quad (31)$$

e o funcional de Schwinger com dependência de escala será

$$W_\mu[j] = \ln Z_\mu[j]. \quad (32)$$

Escolheremos um funcional quadrático com massa dependente do momentum para regularizar a equação de fluxo, de maneira que ela possua uma estrutura de um loop. Com isso,

$$\Delta S_\mu[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \phi^*(k) R_\mu(k) \phi(k) \equiv \frac{1}{2} \int_k \phi^*(k) R_\mu(k) \phi(k). \quad (33)$$

Nós impomos as seguintes condições naturais sobre a função de corte $R_\mu(k)$:

- ✓ Para $\mu \rightarrow 0$ e para um momentum k fixo, a função de corte deve desaparecer de maneira que recuperemos a ação efetiva convencional. Portanto, nós queremos que

$$R_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0. \quad (34)$$

- ✓ Quando μ se aproxima de uma escala de corte (Λ) grande devemos recuperar o limite clássico da teoria. Com o auxílio da aproximação de ponto de sela podemos

mostrar que ação efetiva com dependência de escala ($\Gamma_{\mu \rightarrow \Lambda}$) definida abaixo tende à ação clássica se

$$R_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow \Lambda} \infty. \quad (35)$$

✓ A função de corte deve regularizar a teoria no infravermelho, nesse caso

$$R_\mu(k) > 0 \text{ para } k \rightarrow 0. \quad (36)$$

Em muitos casos precisamos que $R_\mu(k) \rightarrow \mu^2$ para pequenos momenta k , o que torna o corte infinito. Os possíveis cortes que satisfazem a essas condições são dados por (WIPF, 2013):

$$\begin{aligned} \text{Regulador exponencial: } R_\mu(k) &= \frac{k^2}{e^{k^2/\mu^2} - 1}; \\ \text{Regulador otimizado: } R_\mu(k) &= (\mu^2 - k^2)\theta(\mu^2 - k^2); \\ \text{Regulador quártico: } R_\mu(k) &= \frac{\mu^2}{k^2}; \\ \text{Regulador fino: } R_\mu(k) &= \frac{k^2}{\theta(\mu^2 - k^2)} - k^2; \\ \text{Regulador de Callan-Symanzik: } R_\mu(k) &= \mu^2. \end{aligned} \quad (37)$$

Após certos cálculos (WIPF, 2013; BERGES; TETRADIS; WETTERICH, 2002), obtém-se a conhecida *equação de fluxo não perturbativa exata*⁶ ou equação de Wetterich

$$\partial_\mu \Gamma_\mu[\varphi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\partial_\mu R_\mu}{\Gamma_\mu^{(2)} + R_\mu} \right). \quad (38)$$

A partir desta equação (devidamente adaptada à QCD), é possível obter, por exemplo, funções de correlação no regime não perturbativo (CYROL et al., 2018b; CYROL et al., 2018a), ou previsões para o diagrama de fases da QCD (BRAUN, 2009).

1.3.2 Equação de Schwinger-Dyson para a QCD

Assim como a Equação de Euler-Lagrange revela-nos as equações para movimentos clássicos, as Equações de Schwinger-Dyson (ESD) podem ser consideradas como equações

⁶ O termo *exata* se dá pelo fato de não ser usada nenhuma aproximação para se obter a equação de fluxo não perturbativa.

de movimento para funções de Green de uma dada teoria quântica de campos. Teoricamente, ao construir as ESD para o propagador do glúon (????), por exemplo, e resolvendo-as podemos então obter uma forma para o propagador do glúon para qualquer quadri-momento p , assim como também para a constante de acoplamento da QCD. Em vista disso, a solução das ESD pode ser uma forma de sondar o comportamento infravermelho (limite de baixas energias da QCD/regime não perturbativo) do propagador do glúon e também da constante de acoplamento e, conseqüentemente, pode-se tentar entender importantes características da QCD, como por exemplo o confinamento.

As ESD são um conjunto infinito de equações integrais acopladas para, por exemplo, propagadores e vértices, que relacionam todas as funções de Green da teoria. Tais equações são obtidas sem qualquer tipo de aproximação, isto é, são equações exatas. Isso implica que, em princípio, tais equações podem ser usadas para estudos em regimes perturbativos e não perturbativos dentro de uma abordagem contínua do espaço-tempo⁷. Sendo assim, obter uma solução para essas equações significaria termos uma teoria totalmente completa onde todas suas funções de Green de n -pontos estariam determinadas.

Entretanto, necessariamente, para obter tais soluções deve-se fazer aproximações a este conjunto de equações integrais, gerando assim várias maneiras possíveis de aproximação, “obrigando” assim que tais equações aproximadas devem obter soluções numéricas. Dessa forma, uma possibilidade para verificar qual solução das ESD tem uma resposta fisicamente mais razoável, é fazer testes fenomenológicos, nos quais são utilizados, por exemplo o propagador do glúon e a constante de acoplamento (fornecidos pelas soluções das ESD) para calcular quantidades físicas sensíveis ao comportamento infravermelho da QCD e, então, fazer comparações das previsões de cada solução com os dados experimentais. Algumas soluções possíveis para as ESD são por exemplo, a solução de Mandelstam (MANDELSTAM, 1979), Alkofer *et al.* (HAUCK; SMEKAL; ALKOFER, 1998) que fez uma melhoria na solução de Mandelstam, e Cornwall (CORNWALL, 1982).

1.3.3 Modelos: Gribov-Zwanziger e Gribov-Zwanziger Refinado

Vimos na seção 1.1 que, na quantização da teoria da QCD, devido à integração funcional, surgem cópias de calibre e que o procedimento de Faddeev e Popov é utilizado para poder “eliminar” tais cópias. Entretanto, foi evidenciado por V. Gribov em seu trabalho de 1978 (GRIBOV, 1978), que tal procedimento não é capaz de eliminar todas as cópias — ainda havia campos equivalentes sendo integrados — relevantes no regime

⁷ Sabe-se que hoje em dia a QCD na rede é uma abordagem discreta de se estudar fenômenos não-perturbativos, ou seja, simulações de Teoria de Calibre numa rede. Entretanto certas dificuldades surgem quando fazemos o limite da rede para um espaço-tempo contínuo.

não perturbativo da teoria.

Para poder retirar tais cópias de calibre da integral de Feynman, e consequentemente ter uma formulação funcional bem definida, Gribov propôs uma restrição da região de integração dos campos. Tal região é chamada de Região de Gribov. Alguns anos depois, em 1989 Zwanziger implementou a ideia de Gribov modificando a região de integração formulando uma ação local para a teoria. Esse modelo ficou então conhecido como Modelo de Gribov-Zwanziger (GZ) (ZWANZIGER, 1989).

Antes de apresentarmos a ação local do modelo de GZ, vejamos a ação não local de Gribov

$$S_{\text{Gribov}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{gf}} + \gamma^2 \int d^4x g f^{abl} A_\mu^b (\mathcal{M}^{-1})^{lm} g f^{akm} A_\mu^k, \quad (39)$$

onde S_{YM} é a ação de Yang-Mills (sem os férmions) dada, no espaço euclidiano, por

$$S_{\text{YM}} = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (40)$$

S_{gf} é o termo da fixação de calibre, dado por

$$S_{\text{gf}} = \int d^4x (\bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b + b^a \partial_\mu A_\mu^a) \quad (41)$$

sendo \bar{c} , c e b campos auxiliares e \mathcal{M} o Operador de Faddeev-Popov dado por

$$\mathcal{M}^{ab} = -\partial^2 \delta^{ab} + g f^{abc} \partial_\mu A_\mu^c. \quad (42)$$

O terceiro termo em S_{Gribov} é a chamada Função Horizonte ($H(A)$), fazendo com que a ação de Gribov seja não local devido à inversa do operador de Faddeev-Popov. Sendo assim, ao introduzirmos campos auxiliares na função de partição, obtemos a ação local de Gribov-Zwanziger

$$S_{\text{GZ}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{gf}} + S_{\varphi,\omega} + ig\gamma^2 \int d^4x f^{abc} A_\mu^a (\varphi_\mu^{bc} + \bar{\varphi}_\mu^{bc}) - \gamma^4 d(N^2 - 1) \int d^4x, \quad (43)$$

onde a ação $S_{\varphi,\omega}$ é dada por

$$S_{\varphi,\omega} = \int d^4x (\bar{\varphi}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \varphi_\mu^{bc} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_\mu^{bc}), \quad (44)$$

onde $(\bar{\varphi}^{ac}, \varphi^{bc})$ são campos auxiliares complexos de natureza bosônica, $(\bar{\omega}^{ac}, \omega^{bc})$ também são campos auxiliares complexos porém de natureza fermiônica e γ é o chamado parâmetro de Gribov.

Entretanto, investigações posteriores (DUDAL et al., 2008b; DUDAL et al., 2008a; DUDAL et al., 2008; DUDAL; OLIVEIRA; VANDERSICKEL, 2010) mostraram que a teoria de GZ possuía instabilidades quanto à formação de condensados de dimensão de massa igual a 2, o que implicava que o propagador do glúon a momento nulo deveria ser

finito, fato que foi comprovado por simulações na rede (CUCCHIERI; MENDES, 2007; CUCCHIERI; MENDES, 2008a; CUCCHIERI; MENDES, 2008b; CUCCHIERI; MENDES, 2010; CUCCHIERI et al., 2012b; BORNIAKOV; MITRUSHKIN; ROGALYOV, 2012) e por cálculos não perturbativos (AGUILAR; NATALE, 2004; AGUILAR; BINOSI; PAPAVALASSILOU, 2008). Portanto, tais condensados foram incorporados na ação de GZ, dando origem ao que se chamou de teoria de Gribov-Zwanziger Refinada (ou RGZ que provem da sigla em inglês para *Refined Gribov-Zwanziger*), onde a ação desse modelo é dada por

$$S_{RGZ} = S_{GZ} + S_m + S_M , \quad (45)$$

onde S_{GZ} nada mais é que a ação anterior (43), S_m e S_M são, respectivamente, dadas por

$$S_m = \frac{m^2}{2} \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a , \quad (46)$$

$$S_M = M^2 \int d^4x \left(\bar{\varphi}_\mu^{ac} \varphi_\mu^{ac} - \bar{\omega}_\mu^{ac} \omega_\mu^{ac} \right) , \quad (47)$$

onde S_m e S_M correspondem, na devida ordem, às contribuições do condensado do glúon e do condensado dos campos auxiliares devido ao refinamento da teoria, que assim sendo dão origem aos novos parâmetros de massa (m, M). Tais parâmetros são indispensáveis para obter um propagador, a momento nulo, finito no infravermelho. A propósito, vale ressaltar que o modelo RGZ consegue reproduzir um propagador obtido em resultados de simulações da rede (OLIVEIRA; SILVA, 2012; DUDAL; OLIVEIRA; SILVA, 2018).

Todavia, podemos reescrever a ação de Gribov-Zwanziger refinada fazendo algumas integrais funcionais na função de partição. Sendo assim, tal função é dada por

$$Z = \int [\mathcal{D}\Phi] e^{-S_{RGZ}} \quad (48)$$

onde Φ é uma notação abreviada para todos os campos da teoria. Ao fazermos as integrações em $\bar{\varphi}, \varphi, \bar{\omega}, \omega$ conseguimos reescrever S_{RGZ} , obtendo

$$S_{RGZ} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu^a \left[\left(-\partial^2 + m^2 + \frac{2g^2 N \gamma^4}{-\partial^2 + M^2} \right) \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right] \delta^{ab} A_\nu^b + \text{t.i.} \right\} , \quad (49)$$

onde α está associada à escolha do calibre e t.i. é a abreviação para termos de interação. Observamos que a ação escrita desta forma apresenta um termo não local, proveniente do operador de Faddeev-Popov. Então, tendo a ação, podemos observar que o propagador livre para o glúon é dado por

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}^{ab}(p) &= \left[\frac{p^2 + M^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2) + 2g^2 N \gamma^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \right] \delta^{ab} \\ &= \left[D(p^2) P_{\mu\nu}(p) + \alpha L_{\mu\nu}(p) \right] \delta^{ab} , \end{aligned} \quad (50)$$

onde o tensor

$$P_{\mu\nu}(p) = \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (51)$$

é conhecido como *projektor transversal*, e o tensor

$$L_{\mu\nu}(p) = \frac{p_\mu p_\nu}{p^4} \quad (52)$$

é conhecido como *projektor longitudinal*.

Tal propagador apresenta uma ótima concordância com os dados obtidos na rede (BICUDO et al., 2015)

Proporemos no capítulo 3 um modelo que tenha uma ação similar a esta para podermos estudar e obter resultados, de maneira mais simples, provenientes desta teoria.

1.3.3.1 Violação de Positividade e o Confinamento

Podemos olhar para o confinamento como sendo a ausência de estados assintóticos com carga de cor não-nula (OEHME, 1995; NISHIJIMA, 1996; ALKOFER R; VON SMEKAL, 2001).

Segundo Le Bellac (BELLAC, 1996), o propagador, ou seja, a função de Green de dois pontos pode aparecer numa variedade de “versões”: tempo imaginário, tempo real, avançada, retardada. Entretanto, todas essas “versões” dependem de uma única função: função espectral. Portanto podemos escrever o propagador em termos desta função.

O propagador escrito na representação espectral de Källén-Lehmann (PESKIN; SCHROEDER, 1995), é dado por

$$D(x, y) = \langle \Omega | \mathcal{T}(\phi(x)\phi(y)) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{d(M^2)}{2\pi} \rho(M^2) D_F(x - y; M^2), \quad (53)$$

onde $|\Omega\rangle$ representa o estado de vácuo e $\rho(M^2)$ é a função espectral dada por

$$\rho(M^2) = \sum_\lambda (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2, \quad (54)$$

sendo $|\lambda_0\rangle$ o estado que obedece

$$\hat{P} |\lambda_0\rangle = 0; \quad \hat{H} |\lambda_0\rangle = m_\lambda |\lambda_0\rangle. \quad (55)$$

Observamos que, *a priori*, a função espectral $\rho(M^2)$ é sempre positiva ($\rho(M^2) > 0$) para todo $M^2 > 0$. Apesar disso, existem casos onde essa positividade da função espectral pode ser violada. Analisemos, por exemplo, o propagador do modelo RGZ (50) no calibre

de Landau, ou seja, $\alpha = 0$. Dessa forma, temos

$$D(p^2) = \frac{p^2 + M^2}{(p^2 + m^2)(p^2 + M^2) + 2g^2N\gamma^4}. \quad (56)$$

Porém, o mesmo, como já foi mencionado, tem uma ótima concordância com os dados obtidos por simulações na rede, como pode ser visto em (CUCCHIERI et al., 2012a). Utilizando frações parciais, tal propagador pode ser escrito como

$$D(p^2) = \frac{R_1}{p^2 + a_1^2} + \frac{R_2}{p^2 + a_2^2} \quad (57)$$

onde

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2N\gamma^4)}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2N\gamma^4)}}; \\ a_1^2 &= \frac{(m^2 + M^2) - \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2N\gamma^4)}}{2}; \\ R_2 &= \frac{(m^2 - M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2N\gamma^4)}}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2N\gamma^4)}}; \\ a_2^2 &= \frac{(m^2 + M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4(2g^2N\gamma^4)}}{2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Sendo assim, supondo que R_1 , R_2 , a_1 e a_2 sejam reais e definindo $\Lambda^4 = 2g^2N\gamma^4$, obtemos:

$$(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4 \geq 0 \implies |m^2 - M^2| \geq 2\Lambda^2 \geq 0. \quad (59)$$

Logo, podemos reescrever R_1 e R_2

$$R_1 = \frac{(m^2 - M^2)}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}} \left\{ -1 + \frac{|m^2 - M^2|}{(m^2 - M^2)} \sqrt{1 - \frac{4\Lambda^4}{(m^2 - M^2)^2}} \right\}; \quad (60)$$

$$R_2 = \frac{(m^2 - M^2)}{2\sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}} \left\{ 1 + \frac{|m^2 - M^2|}{(m^2 - M^2)} \sqrt{1 - \frac{4\Lambda^4}{(m^2 - M^2)^2}} \right\}. \quad (61)$$

No entanto, para $m^2 \geq M^2$, $R_1 \leq 0$ e $R_2 \geq 0$. Podemos também, reescrever $D(p^2)$ utilizando a representação de Källén-Lehmann:

$$D(p^2) = \int_0^\infty \frac{d(M^2)}{2\pi} \frac{\rho(M^2)}{p^2 + M^2}, \quad (62)$$

onde, agora a função espectral é dada por

$$\rho(M^2) = 2\pi R_1 \delta(M^2 - a_1^2) + 2\pi R_2 \delta(M^2 - a_2^2). \quad (63)$$

Logo, sendo R_1 negativo (pelas condições dadas acima) isso implica que a equação acima é negativa entrando em conflito com (54). Então, dizemos que tal propagador (56) viola a positividade da função espectral (63), ou seja, o propagador da RGZ não tem uma representação espectral bem definida. Caso R_1 , R_2 , a_1 e a_2 sejam complexos, então a violação é vista de imediato.

Em outras palavras, dizemos que tais propagadores não apresentam, em seu espectro, estados assintóticos de partículas, ou seja, havendo violação de positividade do propagador de uma partícula, a mesma estará confinada. Será essa abordagem de confinamento que usaremos neste trabalho de dissertação: violação de positividade.

2 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

No estudo de Teoria Quântica de Campos a temperatura finita e/ou potencial químico diferente de zero, há dois formalismos: o formalismo de operadores, que é o mais antigo, e o formalismo de integral de caminho (integral funcional), que representa uma abordagem mais moderna. Na verdade, pode ser esclarecedor olhar para um dado problema a partir de ambos os pontos de vista, embora em alguns casos um formalismo possa demonstrar ser mais “eficiente” que o outro: por exemplo, é muito mais simples usar integrais de caminho para quantizar teorias de calibre. A temperatura finita, ambos os formalismos são úteis, e é intuitivo ser capaz de mudar de uma abordagem para outra. Um caso mais simples da Teoria de Campos em geral é a Teoria de Campos com dimensão espacial nula, que equivale à Mecânica Quântica. Iniciaremos com uma breve descrição da Mecânica Quântica à temperatura finita, ou, equivalentemente, Mecânica Quântica Estatística. Neste caso, trabalharemos com a abordagem de integral de caminho. Estamos particularmente interessados em produtos de operadores de posição em tempo-ordenado, que generalizará os produtos de operadores de campo em tempo-ordenado em Teoria de Campos (BELLAC, 1996). O formalismo funcional já foi mencionado nos capítulos anteriores, demonstrando ser uma ótima ferramenta. Entretanto, neste capítulo, iremos expô-lo de uma maneira mais detalhada.

2.1 Mecânica Quântica Estatística e o formalismo funcional

Percebe-se que geralmente é conveniente, a temperatura zero, realizar uma continuação analítica do tempo real para tempo imaginário:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -i\tau \\ x^0 &\rightarrow -ix^4, \end{aligned} \tag{64}$$

sendo que τ (x^4) é uma grandeza real. Análogo a isso, é ir do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano, uma vez que a métrica de Minkowski se transforma na Euclidiana com uma troca de sinal:

$$t^2 - \vec{x}^2 \rightarrow -(\tau^2 + \vec{x}^2), \tag{65}$$

enquanto a operação correspondente para o espaço dos momentos é: $k^0 \rightarrow -ik^4$. Um ponto importante sobre o uso do espaço Euclidiano, é que o mesmo desempenha um papel muito mais importante à temperatura finita do que à temperatura zero.

Na Mecânica Quântica usual, o movimento de uma partícula sob a ação de um

potencial $V(\hat{q})$ independente do tempo pode ser descrito pela *amplitude de probabilidade*, conhecida também como *propagador* da partícula. Utilizando o sistema de unidades naturais ($\hbar = 1$), por definição a amplitude de probabilidade de encontrar a partícula na posição q' em um tempo t' , quando se sabe que ela estava localizada na posição q em um tempo t , é dada por⁸

$$F(q', t'; q, t) = \langle q' | \exp\{-i\hat{H}(t' - t)\} | q \rangle \quad (66)$$

onde \hat{H} é o conhecido operador Hamiltoniano, independente do tempo, que descreve o sistema e $|q\rangle$ é autoestado do operador \hat{q} : $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$. A continuação analítica de F para tempo imaginário, ou seja,

$$t \rightarrow -i\tau \quad \text{e} \quad t' \rightarrow -i\tau' \quad (67)$$

é dada por

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \langle q' | \exp\{-i\hat{H}(-i\tau' + i\tau)\} | q \rangle \\ &= \langle q' | \exp\{\hat{H}(-\tau' + \tau)\} | q \rangle \\ &= \langle q' | \exp\{-\hat{H}(\tau' - \tau)\} | q \rangle . \end{aligned} \quad (68)$$

Para facilitar a notação usaremos: $\Delta\tau = \tau' - \tau$. Vamos multiplicar e dividir por N o argumento da exponencial da equação acima

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \langle q' | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{H}N} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-\hat{H}(\frac{\Delta\tau}{N} + \frac{\Delta\tau}{N} + \dots + \frac{\Delta\tau}{N})} | q \rangle \\ &= \langle q' | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{H}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{H}} \dots e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{H}} | q \rangle \\ &= \langle q' | \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{H}} \right)^N | q \rangle . \end{aligned} \quad (69)$$

O termo $\Delta\tau/N$, no argumento da exponencial, é visto como uma divisão do tempo (variável independente) em N subintervalos onde cada um tem uma largura constante de tamanho ε

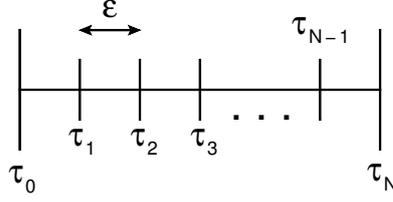
$$\frac{\Delta\tau}{N} = \varepsilon \quad (70)$$

sendo que, quando $N \rightarrow \infty$, temos $\varepsilon \rightarrow 0$. Dessa forma teremos um conjunto de valores τ_i ($i = 1, \dots, N-1$), espaçados entre os valores $\tau = \tau_0$ (tempo inicial) e $\tau' = \tau_N$ (tempo final)

⁸ Uma outra representação para amplitude de probabilidade é: $F(q', t'; q, t) = \langle q', t' | q, t \rangle$.

nas extremidades, separados por ε (figura 2). Como foi dito \hat{H} é o operador Hamiltoniano

Figura 2 - Divisão do tempo imaginário.



Legenda: Divisão de $\Delta\tau$ em N subintervalos.

Fonte: O autor, 2018.

(operador energia do sistema), o qual para grande parte dos sistemas físicos de interesse, é a soma dos operadores de energia cinética e potencial (\hat{T} e \hat{V} respectivamente). Por conveniência, iremos denotar $q' = q_N$ (posição final) e $q = q_0$ (posição inicial). Dessa maneira, temos

$$F(q_N, -i\tau_N; q_0, -i\tau_0) = \left\langle q_N \left| \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V})} \right)^N \right| q_0 \right\rangle. \quad (71)$$

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) para produtos de exponenciais de operadores (HALL, 2015)

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{12} ([\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]) + \dots}, \quad (72)$$

temos

$$e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} = e^{-\frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V}) + \frac{(\Delta\tau)^2}{2N^2} [\hat{T}, \hat{V}] + \dots}$$

e como $\Delta\tau/N$ é pequeno, podemos fazer uma expansão da exponencial do lado direito da equação acima

$$\begin{aligned} e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} &= \mathbb{1} + \left(-\frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V}) + \frac{(\Delta\tau)^2}{2N^2} [\hat{T}, \hat{V}] + \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V}) + \frac{(\Delta\tau)^2}{2N^2} [\hat{T}, \hat{V}] + \dots \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V}) + \frac{(\Delta\tau)^2}{2N^2} [\hat{T}, \hat{V}] + \dots \right)^3 + \dots \\ &= \mathbb{1} - \frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V}) + \frac{(\Delta\tau)^2}{2N^2} [\hat{T}, \hat{V}] + \frac{1}{2} \frac{(\Delta\tau)^2}{N^2} (\hat{T} + \hat{V})^2 + \frac{1}{2} \frac{(\Delta\tau)^4}{4N^4} ([\hat{T}, \hat{V}])^2 - \\ &\quad - \frac{1}{3!} \frac{(\Delta\tau)^3}{N^3} (\hat{T} + \hat{V})^3 + \frac{1}{3!} \frac{(\Delta\tau)^6}{2N^6} ([\hat{T}, \hat{V}])^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\mathbb{1} - \frac{\Delta\tau}{N} (\hat{T} + \hat{V}) + \frac{1}{2} \frac{(\Delta\tau)^2}{N^2} (\hat{T} + \hat{V})^2 - \frac{1}{3!} \frac{(\Delta\tau)^3}{N^3} (\hat{T} + \hat{V})^3 + \dots +}_{\text{série da exponencial}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{(\Delta\tau)^2}{N^2} [\hat{T}, \hat{V}] + \frac{1}{8} \frac{(\Delta\tau)^4}{N^4} ([\hat{T}, \hat{V}])^2 + \frac{1}{12} \frac{(\Delta\tau)^6}{N^6} ([\hat{T}, \hat{V}])^3 + \dots}_{\text{termos com comutadores}}
\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\begin{aligned}
e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} &= e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} + \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta\tau)^2}{N^2}\right) \\
e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} - e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} &= \mathcal{O}\left(\frac{(\Delta\tau)^2}{N^2}\right). \tag{73}
\end{aligned}$$

Logo, para $N \rightarrow \infty$ esta diferença será nula pelo fato do termo a direita em (73) ser de ordem $1/N^2$. Dessa maneira, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} \right)^N - \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right)^N \right] &= 0 \\
\lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} \right)^N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right)^N. \tag{74}
\end{aligned}$$

No passo a passo para obter (69), foi visto que $\left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right)^N = e^{-\Delta\tau(\hat{T}+\hat{V})}$, logo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\Delta\tau(\hat{T}+\hat{V})} = e^{-\Delta\tau(\hat{T}+\hat{V})} = \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right)^N \tag{75}$$

Com isso, (74) fica da seguinte forma

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} \right)^N = \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{N}(\hat{T}+\hat{V})} \right)^N. \tag{76}$$

Este resultado é conhecido como Fórmula de Trotter (ou produto de Lie)⁹, e de maneira mais geral, temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{\hat{A}/N} e^{\hat{B}/N} \right) = e^{\hat{A}+\hat{B}} \tag{77}$$

Substituindo (76) em (71), temos

$$F(q_N, -i\tau_N; q_0, -i\tau_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle q_N \left| \left(e^{-\Delta\tau\hat{T}/N} e^{-\Delta\tau\hat{V}/N} \right)^N \right| q_0 \right\rangle. \tag{78}$$

Agora, introduzindo relação de completeza de autoestado do operador de posição \hat{q}

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_j |q_j\rangle \langle q_j| \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \tag{79}$$

⁹ Para mais detalhes ver (HALL, 2015)

em (78), temos

$$\begin{aligned}
F(q_N, -i\tau_N; q_0, -i\tau_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle q_N | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} \left[\int dq_{N-1} |q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1}| \right] e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} \times \\
&\times \left[\int dq_{N-2} |q_{N-2}\rangle \langle q_{N-2}| \right] e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} \dots e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} \left[\int dq_1 |q_1\rangle \langle q_1| \right] e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_0\rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_{N-1} \dots dq_1 \langle q_N | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_{N-1}\rangle \langle q_{N-1} | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_{N-2}\rangle \langle q_{N-2} | \times \dots \\
&\hspace{20em} \times |q_1\rangle \langle q_1 | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_0\rangle \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \langle q_{j+1} | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_j\rangle . \tag{80}
\end{aligned}$$

Tomando o seguinte Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad \text{e} \quad \hat{V} = V(\hat{q}) \tag{81}$$

temos que

$$e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_j\rangle = e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} |q_j\rangle \tag{82}$$

Agora, para o operador de energia cinética (\hat{T}), precisamos da relação de completeza dos estados de momento linear

$$\mathbb{1} = \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| \tag{83}$$

e lembrar que (ressaltando que $\hbar = 1$)

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{ip \cdot q}}{\sqrt{2\pi}} . \tag{84}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}
\langle q_{j+1} | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} |q_j\rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-\frac{\Delta\tau}{N} \frac{\hat{p}^2}{2m}} |q_j\rangle e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \\
&= \langle q_{j+1} | e^{-\frac{\Delta\tau}{N} \frac{\hat{p}^2}{2m}} \left[\int dp |p\rangle \langle p| \right] |q_j\rangle e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \\
&= \int dp e^{-\frac{\Delta\tau}{N} \frac{p^2}{2m}} \langle q_{j+1} | p\rangle \langle p | q_j\rangle e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \\
&= e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \int dp e^{-\frac{\Delta\tau}{N} \frac{p^2}{2m}} \frac{e^{ip \cdot q_{j+1}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ip \cdot q_j}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \int dp e^{-\frac{\Delta\tau}{N} \frac{p^2}{2m}} e^{ip \cdot (q_{j+1} - q_j)} . \tag{85}
\end{aligned}$$

Em (85) temos uma integral gaussiana com resultado bem conhecido¹⁰

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2+by} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}. \quad (86)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{T}} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}\hat{V}} | q_j \rangle &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\Delta\tau}{2mN}}} \exp\left[\frac{-(q_{j+1}-q_j)^2}{4\frac{\Delta\tau}{2mN}} \right] \right\} \\ &= \sqrt{\frac{mN}{2\pi\Delta\tau}} e^{-\frac{mN}{2\Delta\tau}(q_{j+1}-q_j)^2} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)}. \end{aligned} \quad (87)$$

Substituindo (87) em (80)

$$\begin{aligned} F(q_N, -i\tau_N; q_0, -i\tau_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \prod_{j=0}^{N-1} \left\{ \sqrt{\frac{mN}{2\pi\Delta\tau}} e^{-\frac{mN}{2\Delta\tau}(q_{j+1}-q_j)^2} e^{-\frac{\Delta\tau}{N}V(q_j)} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \left(\frac{mN}{2\pi\Delta\tau} \right)^{N/2} \exp \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \left(-\frac{mN}{2\Delta\tau}(q_{j+1}-q_j)^2 - \frac{\Delta\tau}{N}V(q_j) \right) \right\} \end{aligned} \quad (88)$$

Vimos que $\Delta\tau/N = \varepsilon$. Então, olhando para o argumento da exponencial acima, temos

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[-\frac{m}{2\varepsilon} (q_{j+1} - q_j)^2 - \varepsilon V(q_j) \right] = -\varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\varepsilon} \right)^2 + V(q_j) \right]. \quad (89)$$

Sabemos que quando $N \rightarrow \infty$ temos também que $\varepsilon \rightarrow 0$, então podemos identificar uma soma de Riemann e uma derivada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \implies \int_{\tau}^{\tau'} \quad (\text{Soma da Riemann})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\varepsilon} \right) = \frac{dq}{d\tau} = \dot{q} \quad (\text{Derivada})$$

Portanto, podemos reescrever (88) como uma integral funcional, ou seja,

$$\begin{aligned} F(q', -i\tau'; q, -i\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{N/2} \exp \left\{ - \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2(\tau'') + V(q(\tau'')) \right] \right\} \\ &= \int_{\substack{q(\tau)=q \\ q(\tau')=q'}} \mathcal{D}q e^{-S_E[q; \tau, \tau']}, \end{aligned} \quad (90)$$

sendo que

$$S_E[q; \tau, \tau'] = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2(\tau'') + V(q(\tau'')) \right] \quad (91)$$

¹⁰ Para resolver está integral, basta completar quadrados.

é a chamada ação Euclidiana (S_E), e

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} dq_1 \dots dq_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{N/2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\varepsilon} \right)^{N/2} \prod_{i=1}^{N-1} dq_i \quad (92)$$

é denominada medida funcional.

Vimos então como escrever a amplitude de probabilidade (90) usando o formalismo funcional, que consiste em fazer uma soma sobre todos os caminhos possíveis que tal partícula poderia percorrer estando na posição q e no instante t , conhecidos, indo para a posição q' no instante t'

2.2 Formalismo funcional na Mecânica Estatística

Nesta seção mostraremos a conexão do formalismo funcional com a Mecânica Estatística usando a equação (90) para expressar a função de partição $Z(\beta)$ como uma integral de caminho. Conforme o usual $\beta = 1/T$ no sistema de unidades onde $k_B = 1$ (constante de Boltzmann). Por definição, temos

$$Z(\beta) = \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right). \quad (93)$$

Usando um conjunto completo de autovetores de \hat{H}

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (94)$$

temos

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right) \\ &= \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle \\ &= \sum_n \underbrace{\langle n | n \rangle}_{=1} e^{-\beta E_n} \\ &= \sum_n e^{-\beta E_n}. \end{aligned} \quad (95)$$

No entanto, também podemos escrever o traço usando um conjunto completo de autovetores do operador posição

$$Z(\beta) = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle, \quad (96)$$

onde $e^{-\beta \hat{H}}$ pode ser interpretado formalmente como um operador de evolução em tempo imaginário, ou seja, o integrando em (96) seria a amplitude de probabilidade de encontrar a partícula na posição q em um tempo $-i\beta$ (onde $\beta = (\tau' - \tau) = i(t' - t)$), quando se

sabe que ela estava anteriormente na mesma posição q em um tempo $t = 0$. Portanto, comparando (96) com (68) temos

$$Z(\beta) = \int dq F(q, -i\beta; q, 0) . \quad (97)$$

Logo $Z(\beta)$ pode ser expressada como uma integral de caminho, conforme (90),

$$\begin{aligned} Z(\beta) &= \int \mathcal{D}q(\tau) \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q(\tau))\right)\right\} \\ &= \int_{q(\beta)=q(0)} \mathcal{D}q(\tau) e^{-S_E} , \end{aligned} \quad (98)$$

onde se integra sobre caminhos com a condição de contorno periódica $q(\beta) = q(0)$.

Em Teoria Quântica de Campos (TQC), como de costume, define-se um funcional gerador $Z(\beta; j)$. O mesmo já foi mencionado nos capítulos anteriores e vimos que há uma relação entre o funcional gerador e o propagador. Sendo $Z(\beta) = Z(\beta; j = 0)$, o funcional gerador é dado por

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}q(\tau) e^{-S_E + \int_0^\beta j(\tau)q(\tau)} , \quad (99)$$

onde j são fontes externas. A diferenciação funcional (DAS, 2006) da equação acima fornece-nos o propagador em tempo imaginário

$$\frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \right|_{j=0} = \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{-S_E(\beta)} \quad (100)$$

O lado direito de (100) pode ser identificado como a média térmica do operador posição de tempo ordenado (ou \mathcal{T} -produto)

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{-S_E(\beta)} &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}\left[e^{-\beta\hat{H}} \mathcal{T}\{\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\}\right] \\ &= \left\langle \mathcal{T}\{\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\} \right\rangle_\beta \end{aligned} \quad (101)$$

onde $\hat{q}(-i\tau)$ é o operador posição no quadro de Heisenberg:

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{q} e^{-i\hat{H}t} \\ \hat{q}(-i\tau) &= e^{\hat{H}\tau} \hat{q} e^{-\hat{H}\tau} . \end{aligned} \quad (102)$$

Lembrando que a média térmica $\langle \hat{A} \rangle_\beta$ de um operador \hat{A} é definida por

$$\langle \hat{A} \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr}\left(\hat{A} e^{-\beta\hat{H}}\right) \quad (103)$$

e que o operador posição de tempo ordenado em (101) opera em tempo imaginário

$$\mathcal{T}\{\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\} = \begin{cases} \hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2), & \text{se } \tau_1 > \tau_2 \\ \hat{q}(-i\tau_2)\hat{q}(-i\tau_1), & \text{se } \tau_2 > \tau_1 \end{cases} \quad (104)$$

podemos ver que o lado direito de (100) é de fato a média térmica do operador posição de tempo ordenado. Por exemplo, para $\tau_1 > \tau_2$ temos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}\{\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\} \rangle_\beta &= \frac{1}{Z(\beta)} \int dq \langle q | e^{-\beta\hat{H}} \hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2) | q \rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \int dq \langle q | e^{-\beta\hat{H}} e^{\hat{H}\tau_1} \hat{q} e^{-\hat{H}\tau_1} e^{\hat{H}\tau_2} \hat{q} e^{-\hat{H}\tau_2} | q \rangle . \end{aligned}$$

Fazendo os mesmos passos que fizemos para reescrever (68) em (90), obtemos

$$\langle \mathcal{T}\{\hat{q}(-i\tau_1)\hat{q}(-i\tau_2)\} \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{-S_E(\beta)} . \quad (105)$$

Mostrando assim que de fato o lado direito de (100) pode ser identificado como a média de um operador.

2.2.1 Um exemplo: Oscilador Harmônico

Vamos então, agora, especificar o potencial $V(q)$; vamos particularizar para o análogo da Mecânica Quântica do campo livre, ou seja, o oscilador harmônico, com potencial

$$V(q) = \frac{1}{2} \omega^2 q^2 . \quad (106)$$

Para simplificar as equações, consideramos unidades tais que $m = 1$. Desejamos calcular o produto de tempo ordenado dos operadores de posição (105), que generalizaremos para o propagador do campo livre usando a abordagem de integral de caminho. O funcional gerador $Z(\beta; j)$ é facilmente calculado, uma vez que a integração agora é Gaussiana, após uma integração por partes em $S_E(\beta)$. Portanto temos que

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[-S_E(\beta) + \int_0^\beta j(\tau) q(\tau) d\tau \right] \quad (107)$$

e

$$S_E(\beta) = \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right) . \quad (108)$$

Fazendo uma integração por partes no primeiro termo da ação acima temos

$$\int_0^\beta \frac{1}{2} \dot{q}^2 d\tau = \frac{1}{2} \left[q\dot{q} \Big|_0^\beta - \int_0^\beta q\ddot{q} d\tau \right], \quad (109)$$

mas devido a periodicidade de $q(\tau)$, temos

$$q(0) = q(\beta) \quad \text{e} \quad \dot{q}(0) = \dot{q}(\beta),$$

ou seja,

$$q(\tau)\dot{q}(\tau) \Big|_0^\beta = q(\beta)\dot{q}(\beta) - q(0)\dot{q}(0) = 0.$$

Sendo assim temos

$$\begin{aligned} S_E(\beta) &= \int_0^\beta d\tau \left[-\frac{1}{2} q\ddot{q} + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right] \\ &= \int_0^\beta d\tau \left[-\frac{1}{2} q \left(\frac{d^2}{d\tau^2} q \right) + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right] \\ &= \int_0^\beta d\tau \frac{1}{2} q(\tau) \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right] q(\tau). \end{aligned} \quad (110)$$

Portanto, o funcional gerador pode ser reescrito como

$$Z(\beta; j) = \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q(\tau) \exp \left\{ - \int_0^\beta \left[\frac{1}{2} q(\tau) \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) q(\tau) - j(\tau)q(\tau) \right] d\tau \right\}. \quad (111)$$

Agora temos uma integral tipo Gaussiana (em dimensões superiores). Vamos definir, para esta seção, o operador de flutuações \mathcal{O} , tal que

$$\mathcal{O} := -\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \quad (112)$$

e fazer a seguinte mudança de variável

$$q'(\tau) = q(\tau) - \int_0^\beta d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') \implies \mathcal{D}q'(\tau) = \mathcal{D}q(\tau). \quad (113)$$

Sendo $K(\tau, \tau')$ a inversa do operador \mathcal{O} , tal que

$$\mathcal{O}K(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau'), \quad (114)$$

ou seja, $K(\tau, \tau')$ é uma função de Green. Com isso, o funcional gerador $Z(\beta; j)$ é dado por

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}q'(\tau) \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} \left(q'(\tau) + \int_0^\beta d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') \right) \mathcal{O} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(q'(\tau) + \int_0^\beta d\tau'' K(\tau, \tau'') j(\tau'') \right) - j(\tau) \left(q'(\tau) + \int_0^\beta d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') \right) \right] \right\}. \quad (115)$$

Para um melhor entendimento, vamos agora trabalhar com o expoente da exponencial da equação acima. Portanto, temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) \mathcal{O} q'(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau'' q'(\tau) \underbrace{\mathcal{O} K(\tau, \tau'') j(\tau'')}_{\delta(\tau-\tau'')} + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') \mathcal{O} q'(\tau) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' d\tau'' K(\tau, \tau') j(\tau') \underbrace{\mathcal{O} K(\tau, \tau'') j(\tau'')}_{\delta(\tau-\tau'')} - \int_0^\beta d\tau j(\tau) q'(\tau) \\ & - \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau'') = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) \mathcal{O} q'(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) j(\tau) \\ & + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\beta d\tau d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') \mathcal{O} q'(\tau)}_{(I)} + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') j(\tau) - \int_0^\beta d\tau j(\tau) q'(\tau) \\ & - \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau'). \end{aligned}$$

A integral (I) pode ser vista da seguinte forma

$$(I) : \int_0^\beta d\tau' j(\tau') \left[\int_0^\beta d\tau K(\tau, \tau') \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) q'(\tau) \right] = \\ \int_0^\beta d\tau' j(\tau') \left[\underbrace{\int_0^\beta d\tau K(\tau, \tau') \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} \right) q'(\tau)}_{(II)} + \int_0^\beta d\tau K(\tau, \tau') \omega^2 q'(\tau) \right].$$

Vamos, por um momento, definir $K(\tau, \tau') \equiv K$, $q'(\tau) \equiv q'$ e os limites de integração sempre de zero a β . Fazendo uma integração por partes em (II), temos

$$(II) : - \int d\tau K \left(\frac{d^2}{d\tau^2} \right) q' = - \int d\tau \left[\frac{d}{d\tau} \left(K \frac{dq'}{d\tau} \right) - \frac{dK}{d\tau} \frac{dq'}{d\tau} \right] \\ = - \underbrace{\int d\tau \frac{d}{d\tau} \left(K \frac{dq'}{d\tau} \right)}_{\text{integral de superfície}} + \int d\tau \frac{dK}{d\tau} \frac{dq'}{d\tau} \\ = \underbrace{\int d\tau \frac{dK}{d\tau} \frac{dq'}{d\tau}}_{(III)}.$$

Fazendo o mesmo processo de (II) em (III), temos

$$\begin{aligned} \int d\tau \frac{dK}{d\tau} \frac{dq'}{d\tau} &= \int d\tau \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dK}{d\tau} q' \right) - q' \frac{d^2 K}{d\tau^2} \right] \\ &= - \int d\tau q' \frac{d^2 K}{d\tau^2}. \end{aligned}$$

Então, substituindo (III) em (II) e sucessivamente em (I), temos

$$\begin{aligned} (I) : \int_0^\beta d\tau d\tau' K(\tau, \tau') j(\tau') \mathcal{O} q'(\tau) &= \int_0^\beta d\tau' j(\tau') \left[- \int_0^\beta d\tau q'(\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} K(\tau, \tau') \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\beta d\tau K(\tau, \tau') \omega^2 q'(\tau) \right] \\ &= \int_0^\beta d\tau d\tau' q'(\tau) \left(- \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) K(\tau, \tau') j(\tau') \\ &= \int_0^\beta d\tau d\tau' q'(\tau) \underbrace{\mathcal{O} K(\tau, \tau')}_{\delta(\tau - \tau')} j(\tau') \\ &= \int_0^\beta d\tau q'(\tau) j(\tau). \end{aligned}$$

Por fim, voltando ao expoente, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) \mathcal{O} q'(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) j(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) j(\tau) \\ &- \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') - \int_0^\beta d\tau q'(\tau) j(\tau) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q'(\tau) \mathcal{O} q'(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') \end{aligned}$$

Portanto o funcional gerador (115) (perceba que $q'(\tau)$, é apenas uma variável “muda”, ou seja, podemos voltar a escrever $q(\tau)$) é dado por

$$\begin{aligned} Z(\beta; j) &= \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[- \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q(\tau) \mathcal{O} q(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') \right] \\ &= \underbrace{\int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[- \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau q(\tau) \mathcal{O} q(\tau) \right]}_{Z(\beta; j=0)} \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') \right] \\ &= Z(\beta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') \right]. \end{aligned} \tag{116}$$

Sabemos que $K(\tau, \tau') = \Delta(\tau - \tau')$ (propagador) é a inversa do operador \mathcal{O} , logo

$$\left(- \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \Delta(\tau - \tau') = \delta(\tau - \tau'). \tag{117}$$

Utiliza-se as transformadas de Fourier¹¹

$$\Delta_F(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n), \quad (118)$$

$$\delta(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau}. \quad (119)$$

onde ω_n são denominados frequências de Matsubara e são dadas por

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}. \quad (120)$$

Substituindo-as em (117) e considerando $\tau' = 0$, temos

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2\right) T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n) &= T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \\ -\sum_n (-i\omega_n)^2 e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n) + \sum_n \omega^2 e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n) - \sum_n e^{-i\omega_n \tau} &= 0 \\ \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \left[\tilde{\Delta}_F(i\omega_n)(\omega_n^2 + \omega^2) - 1\right] &= 0, \end{aligned}$$

logo, o propagador no espaço de frequência é dado por

$$\tilde{\Delta}_F(i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \quad (121)$$

Com isso, temos que o propagador (na base τ) será dado por

$$\Delta_F(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}. \quad (122)$$

Precisamos resolver esta soma e, para isso, utilizamos a seguinte relação decorrente do Teorema de Cauchy

$$I = T \sum_n f(z = i\omega_n) = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) \frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2}\beta z\right), \quad (123)$$

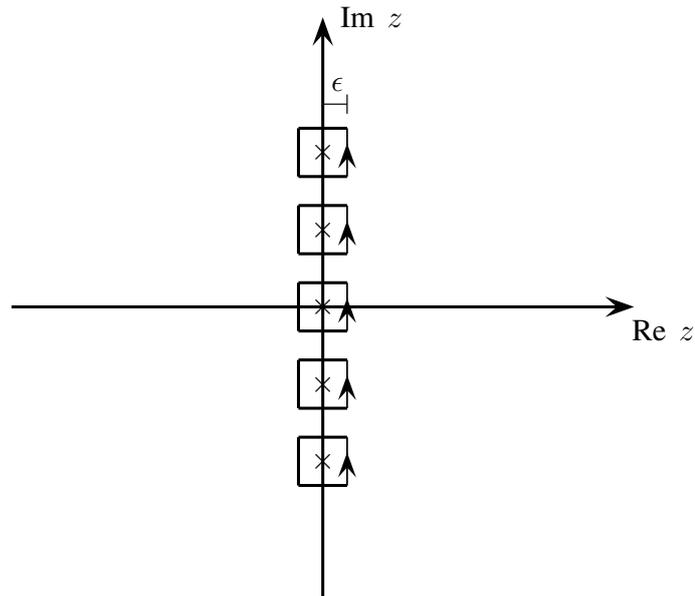
onde

$$f(z) = \frac{e^{-z\tau}}{-z^2 + \omega^2} = -\frac{e^{-z\tau}}{z^2 - \omega^2}. \quad (124)$$

O contorno C em (123), é como mostra a figura 3. Tais pontos são os polos da função cotangente hiperbólica (123) para diferentes n (lembrando que $n \in \mathbb{Z}$), e que os mesmos são os valores correspondentes a soma em (122). Podemos “deformar” este contorno juntando-os em duas retas paralelas ao eixo imaginário a uma distância ϵ como mostra a

¹¹ Como o intervalo de tempo τ é finito, as transformadas de Fourier são dadas por frequências discretas.

Figura 3 - Contorno C.



Legenda: Contorno da integral em (123).

Fonte: O autor, 2018.

figura 4. Sendo assim, temos que (123) será dada por

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{2} \coth\left(\frac{\beta z}{2}\right) + \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z)}{2} \coth\left(\frac{\beta z}{2}\right) \\
 &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z) + f(-z)}{2} \coth\left(\frac{\beta z}{2}\right). \tag{125}
 \end{aligned}$$

Sabemos que a função cotangente hiperbólica pode ser reescrita da seguinte forma

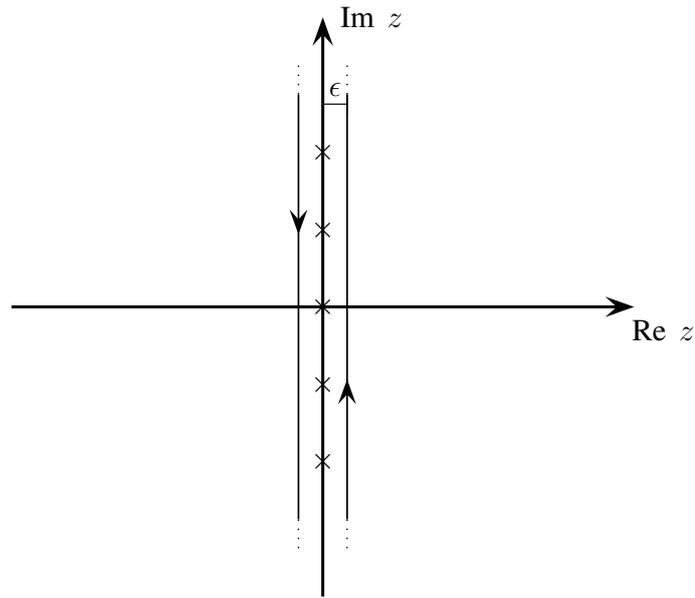
$$\coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} = 1 + \frac{2}{e^x - 1}. \tag{126}$$

Dessa maneira, (125) será dada por

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z) + f(-z)}{2} \left(1 + \frac{2}{e^{\beta z} - 1}\right) \\
 &= \underbrace{\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z) + f(-z)}{2}}_{I_1} + \underbrace{\int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z) + f(-z)}{e^{\beta z} - 1}}_{I_2}. \tag{127}
 \end{aligned}$$

Percebemos que os polos de I_1 , olhando para $f(z)$ (ou $f(-z)$) em (124), estão apenas no eixo real, sendo eles $-\omega$ e ω . Logo, a reta (à direita) paralela ao eixo imaginário na figura

Figura 4 - Contorno “deformado”.



Legenda: Contorno equivalente ao da figura 3.

Fonte: O autor, 2018.

4, pode estar exatamente em cima do eixo imaginário. Portanto

$$I_1 = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f(z) + f(-z)}{2}. \quad (128)$$

Fazendo uma mudança de variável, $y = iz$, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{idy}{2\pi i} \frac{f(iy) + f(-iy)}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{f(iy)}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{f(-iy)}{2}. \end{aligned} \quad (129)$$

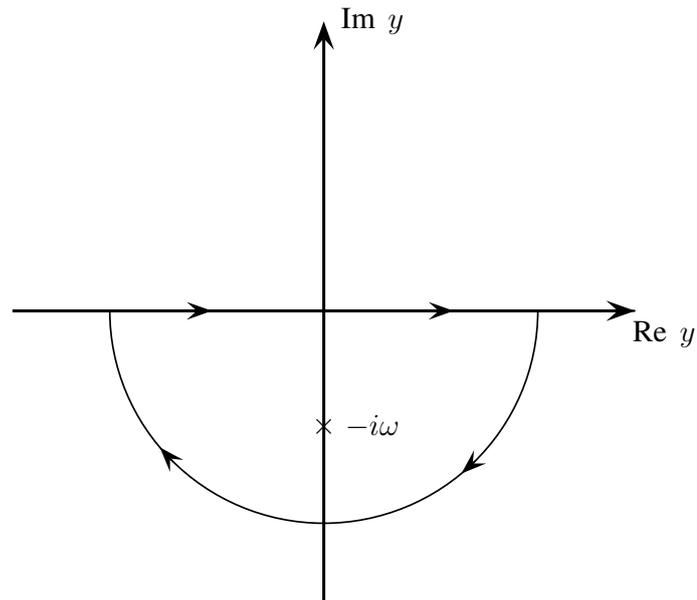
Fazendo novamente uma mudança de variável, $y = -x$, entretanto apenas na segunda integral em I_1 , temos por fim que o mesmo é dado por

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} f(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{e^{-iy\tau}}{y^2 + \omega^2}. \quad (130)$$

Para resolver I_1 , utiliza-se o Teorema dos Resíduos (TR) para o contorno como mostra a figura 5. Sendo assim, por ter polos simples, temos que I_1 será dado por

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} \frac{e^{-iy\tau}}{y^2 + \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -2\pi i \lim_{y \rightarrow -i\omega} \left[(y + i\omega) \frac{e^{-iy\tau}}{(y + i\omega)(y - i\omega)} \right] \right\} = \frac{e^{-\omega\tau}}{2\omega}. \quad (131)$$

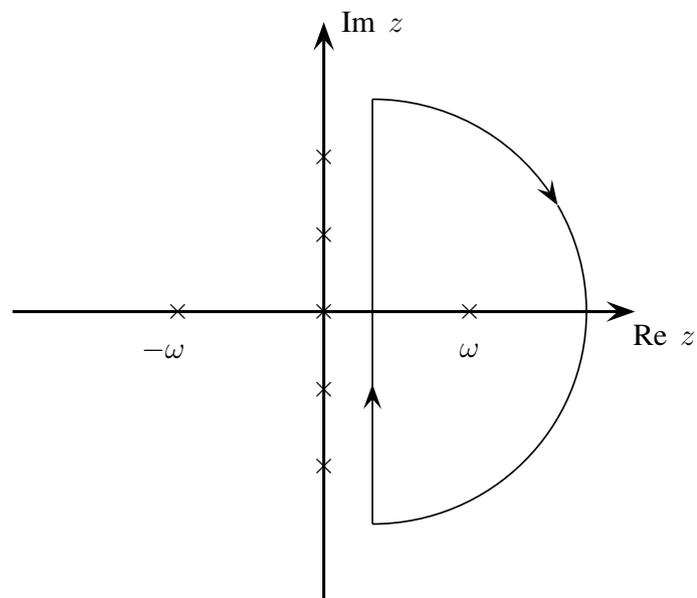
Figura 5 - Contorno para I_1 .



Legenda: Contorno da integral em (130).

Fonte: O autor, 2018.

Figura 6 - Contorno para I_2 .



Legenda: Contorno da integral em (132).

Fonte: O autor, 2018.

Agora, olhando para I_2 em (127) também podemos usar o TR, para o contorno como mostra a figura 6, para resolvê-la. A mesma também apresenta polos simples, logo

temos que

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{-z\tau} + e^{z\tau}}{\omega^2 - z^2} \frac{1}{e^{\beta z} - 1} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ -2\pi i \lim_{z \rightarrow \omega} \left[(z - \omega) \frac{e^{-z\tau} + e^{z\tau}}{(\omega + z)(\omega - z)} \frac{1}{e^{\beta z} - 1} \right] \right\} \\
 &= \frac{e^{-\omega\tau} + e^{\omega\tau}}{2\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}.
 \end{aligned} \tag{132}$$

Por fim, somando I_1 (131) e I_2 (132) obtemos o resultado da soma em (122) e dessa forma encontramos o propagador $\Delta_F(\tau)$

$$\Delta_F(\tau) = \frac{1}{2\omega} \left\{ [1 + n(\omega)] e^{-\omega\tau} + n(\omega) e^{\omega\tau} \right\}, \tag{133}$$

sendo $n(\omega)$ a distribuição de Bose-Einstein dada por

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp(\beta|\omega|) - 1}. \tag{134}$$

Na próxima seção, veremos um resultado análogo a este mas para o caso de um campo escalar neutro.

2.3 Campo Escalar Neutro à Temperatura Finita

Vamos agora ver a quantização, à temperatura finita, do caso mais simples da Teoria de Campos: o campo escalar. Com a inclusão dos graus de liberdade espaciais, os resultados da seção anterior serão generalizados, no entanto a estrutura temporal continuará sendo a mesma explicada na mecânica quântica estatística. Nesta seção então quantizaremos o campo escalar neutro, ou seja, sem carga e, portanto, potencial químico nulo, e falaremos sobre as regras de Feynman da expansão perturbativa.

Começemos então escrevendo, no espaço de Minkowski, a densidade de Lagrangiana correspondente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi), \quad (135)$$

onde $\phi(x)$ é um campo real, m é a massa das partículas correspondentes e $V(\phi)$ é o potencial no qual se encontra a interação. Tal densidade nos leva a seguinte ação Euclidiana

$$S_E(\beta) = \int_0^\beta d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right), \quad (136)$$

onde $x = (\tau, \vec{x})$ e

$$\int_0^\beta d^4x = \int_0^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d^3\vec{x} \quad (137)$$

$$(\partial_\mu)^2 = (\partial_\tau)^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2.$$

Quando $V(\phi) = 0$, corresponde ao campo livre (sem interação). Com o conhecimento obtido na seção anterior, podemos escrever diretamente o funcional gerador

$$Z(\beta, j) = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-S_E(\beta) + \int_0^\beta d^4x j(x)\phi(x)\right). \quad (138)$$

Veja que o funcional gerador da Teoria de Campos sem temperatura ($T = 0$), no espaço Euclidiano, também seria dado pela expressão acima, exceto pelo fato de que a integração em τ seria de $-\infty$ a $+\infty$. Com isso, poderíamos então obter as regras de Feynman a partir da teoria euclidiana a temperatura zero diretamente, mas em vez disso vamos encontrá-las a partir de exemplos elementares. Tais regras estão ligadas ao Teorema de Wick, que lembraremos brevemente.

2.3.1 Breve revisão do Teorema de Wick

Considere uma distribuição de probabilidade gaussiana (não normalizada), definida por uma matriz simétrica positiva A^{-1}

$$\begin{aligned} P(\varphi_1, \dots, \varphi_N) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \varphi_i A_{ij}^{-1} \varphi_j\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi\right), \end{aligned} \quad (139)$$

onde o sobrescrito T significa transposição. Podemos também escrever o funcional gerador

$$\begin{aligned} Z(j_1, \dots, j_N) &= \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi + j^T \varphi\right) \\ &= \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi\right) \exp(j^T \varphi) \\ &= Z(0) \left\langle \exp(j^T \varphi) \right\rangle \\ &= Z(0) \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{kl} j_k A_{kl} j_l\right) \\ &= Z(0) \exp\left(\frac{j^T A j}{2}\right) \end{aligned} \quad (140)$$

Os momentos da distribuição de probabilidade $P(\varphi)$ (valor esperado da variável da distribuição de probabilidade) são obtidos a partir da diferenciação de $Z(j)$

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{2n}} \rangle &= \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial^{2n} Z(j_1, \dots, j_N)}{\partial j_{i_1} \dots \partial j_{i_{2n}}} \Big|_{j=0} \\ &= \frac{\partial^{2n}}{\partial j_{i_1} \dots \partial j_{i_{2n}}} \frac{1}{2^n n!} (j^T A j)^n. \end{aligned} \quad (141)$$

Analisando apenas o segundo momento de $P(\varphi)$, temos

$$\langle \varphi_i \varphi_k \rangle = \frac{\partial^2}{\partial j_i \partial j_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{lm} j_l A_{lm} j_m \right) = A_{ik}. \quad (142)$$

A quantidade $\langle \varphi_i \varphi_j \rangle$ também é denominada de contração de φ_i e φ_j , que pode também ser representadas por: $\overline{\varphi_i \varphi_j}$. As diferenciações em (141) produz $(2n)!$ termos, no entanto, devemos dividir por $2^n n!$, por isso o número total de termos à direita de

(141) é $(2n - 1)!!$ ¹². Mas isso é simplesmente o número de maneiras de escolher os pares $\langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle \langle \varphi_{i_3} \varphi_{i_4} \rangle \dots \langle \varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}} \rangle$. Para conseguir verificar isto, perceba que existem $(2n - 1)$ maneiras de formar o primeiro par $\langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle$, $(2n - 3)$ maneiras de formar o segundo par $\langle \varphi_{i_3} \varphi_{i_4} \rangle$ e assim por diante. Portanto, o teorema de Wick afirma que

$$\langle \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{2n}} \rangle = \langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle \langle \varphi_{i_3} \varphi_{i_4} \rangle \dots \langle \varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}} \rangle + \text{permutações} . \quad (143)$$

Para uma melhor visualização, veja o seguinte exemplo

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \rangle = \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle \langle \varphi_3 \varphi_4 \rangle + \underbrace{\langle \varphi_1 \varphi_3 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_4 \rangle + \langle \varphi_1 \varphi_4 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_3 \rangle}_{\text{permutações}} . \quad (144)$$

Observe que o número total de termos não muda se alguns índices forem idênticos

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_4 \rangle = 2 \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_4 \rangle + \langle \varphi_1 \varphi_4 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_2 \rangle . \quad (145)$$

Mas, também podemos ter todos os índices iguais

$$\langle \varphi^{2n} \rangle = (2n - 1)!! \langle \varphi^2 \rangle^n . \quad (146)$$

Na prática, usa-se bastante este teorema quando $V \neq 0$ (uma teoria com interação) ao calcular as correções perturbativas ao funcional gerador e às funções de correlação da teoria.

Agora, voltando ao caso do campo livre ($V = 0$), temos

$$\begin{aligned} S_E(\beta) &= \frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x [(\partial_\mu \phi)^2 + m^2 \phi^2] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x \left[\underbrace{(\partial_\tau \phi)^2}_i + \underbrace{(\vec{\nabla} \phi)^2}_{ii} + m^2 \phi^2 \right] \end{aligned} \quad (147)$$

Os termos com i e ii em (147), podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} i) \partial_\tau(\phi \partial_\tau \phi) &= \partial_\tau \phi (\partial_\tau \phi) + \phi \partial_\tau (\partial_\tau \phi) \\ &= (\partial \phi)^2 + \phi \partial_\tau^2 \phi \Rightarrow (\partial \phi)^2 = \partial_\tau(\phi \partial_\tau \phi) - \phi \partial_\tau^2 \phi \\ \therefore \int d^3x (\partial \phi)^2 &= \int d^3x \partial_\tau(\phi \partial_\tau \phi) - \int d^3x \phi \partial_\tau^2 \phi \\ &= - \int d^3x \phi \partial_\tau^2 \phi \end{aligned} \quad (148)$$

¹² Duplo fatorial: $(2n)!! = 2n(2n - 2)(2n - 4) \dots$
 $(2n + 1)!! = (2n + 1)(2n - 1)(2n - 3) \dots$

$$\begin{aligned}
ii) \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) &= (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \phi) + \phi \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) \\
&= (\vec{\nabla} \phi)^2 + \phi \nabla^2 \phi \Rightarrow (\vec{\nabla} \phi)^2 = \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) - \phi \nabla^2 \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int d^3x (\vec{\nabla} \phi)^2 &= \int d^3x \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi) - \int d^3x \phi \nabla^2 \phi \\
&= - \int d^3x \phi \nabla^2 \phi
\end{aligned} \tag{149}$$

Logo, substituindo (148) e (149) em (147) temos que

$$\begin{aligned}
S_E(\beta) &= \frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x \left[-\phi \partial_\tau^2 \phi - \phi \vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x \phi \left(-\partial_\tau^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \phi
\end{aligned} \tag{150}$$

Portanto (150) em (138) temos

$$Z_F(\beta, j) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \phi(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x) - j(x) \phi(x) \right] \right\} \tag{151}$$

A integração sobre $\phi(x)$ é realizada de forma análoga quando se obteve a equação (116), logo

$$Z_F(\beta, j) = Z_F(\beta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x d^4y j(x) \Delta_F(x-y) j(y) \right], \tag{152}$$

onde $\Delta_F(x-y)$ é a função de Green de dois pontos e é a solução da equação diferencial parcial

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau_x^2} - \nabla_x^2 + m^2 \right) \Delta_F(x-y) = \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \tag{153}$$

Adicionar a dependência espacial não muda os resultados obtidos na seção anterior onde tinha apenas dependência temporal, logo a solução da equação acima, no espaço dos momentos, é dada por

$$\tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k) = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2}, \tag{154}$$

onde $\omega_k^2 = (\vec{k}^2 + m^2)$. Obtemos então o que denominamos de propagador de Matsubara (154) ou propagador em tempo imaginário para o caso sem interação. Percebemos então que, para obter o propagador no espaço dos momentos basta pegar a inversa de $\Delta(x-y)$, ou seja, o termo que aparece no funcional gerador no espaço dos momentos que nada mais

é que o termo quadrático nos campos em $Z_F(\beta)$

$$Z_F(\beta) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int_0^\beta d^4x \left[\frac{1}{2} \underbrace{\phi(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(x)}_{\text{termo quadrático}} \right] \right\}. \quad (155)$$

Lembrando que $(-\partial^2)$ nos espaço dos momentos corresponde a (k^2) , o propagador no espaço dos momenta será dado por

$$\tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k) = \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (156)$$

Entretanto em TQC a temperatura finita, o quadrimomento $k = (\omega_n, \vec{k})$ é tal que

$$k^2 = \omega_n^2 + \vec{k}^2. \quad (157)$$

Com isso, confirmamos (154)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k) &= \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2}. \end{aligned} \quad (158)$$

Da mesma forma que na seção anterior, porém agora de forma generalizada, podemos obter o propagador na representação mista

$$\begin{aligned} \Delta_F(\tau, k) &= T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k) \\ &= \frac{1}{2\omega_k} \left\{ [1 + n(\omega_k)] e^{-\omega_k \tau} + n(\omega_k) e^{\omega_k \tau} \right\}. \end{aligned} \quad (159)$$

Conseqüentemente, podemos obter o propagador na representação de coordenadas $\Delta_F(x) = \Delta_F(\tau, \vec{x})$ pela transformada inversa de Fourier nas componentes espaciais

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \Delta_F(\tau, k). \quad (160)$$

Tendo obtido o propagador para um campo escalar neutro livre, vamos agora calcular a pressão para o mesmo. Temos que a função de partição será dada por

$$Z_F(\beta) = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x \phi(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x) \right\} \quad (161)$$

e

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x).$$

O campo admite uma expansão em série de Fourier, dada por (KAPUSTA; GALE, 2006)

$$\phi(x) = \phi(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \phi_n(\vec{k}), \quad (162)$$

onde $\omega_n = 2\pi nT$, devido à restrição da periodicidade do campo [$\phi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}, \beta)$], são as frequências de Matsubara como vimos na seção anterior. A normalização $(\sqrt{\beta/V})$ é escolhida de forma que cada amplitude de Fourier seja adimensional. Com isso, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x \left\{ \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_n \sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \phi_n(\vec{k}) \right\} (-\partial^2 + m^2) \left\{ \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_m \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_m \tau)} \phi_m(\vec{p}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{\beta}{V} \left\{ \sum_n \sum_m \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{p}} (\omega_m^2 + p^2 + m^2) e^{i(\vec{k} + \vec{p}) \cdot \vec{x}} e^{i(\omega_n + \omega_m)\tau} \phi_n(\vec{k}) \phi_m(\vec{p}) \right\}. \end{aligned}$$

Utiliza-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{i(\vec{k} + \vec{p}) \cdot \vec{x}} &= V \delta^3(\vec{k} + \vec{p}) \\ \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n - \omega_m)\tau} &= \beta \delta_{nm} \Rightarrow \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n + \omega_{(-m)})\tau} = \beta \delta_{n(-m)} \end{aligned} \quad (163)$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \frac{\beta}{V} \sum_n \sum_m \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{k}} V \delta^3(\vec{k} + \vec{p}) \beta \delta_{n(-m)} (\omega_m^2 + p^2 + m^2) \phi_n(\vec{k}) \phi_m(\vec{p}) \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_{\vec{p}} (\omega_n^2 + k^2 + m^2) \phi_n(\vec{k}) \phi_{(-n)}(-\vec{k}). \end{aligned} \quad (164)$$

Fazendo-se o complexo conjugado de (162), temos

$$\begin{aligned} \phi^*(\vec{x}, \tau) &= \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_n \sum_{\vec{k}} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \phi_n^*(\vec{k}) \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_n \sum_{\vec{k}} e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_n \tau)} \phi_n^*(\vec{k}) \\ &= \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_n \sum_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \phi_{-n}^*(-\vec{k}). \end{aligned} \quad (165)$$

Dessa forma, percebemos que se $\phi(x)$ for um campo real temos que: $\phi_n(\vec{k}) = \phi_{-n}^*(-\vec{k})$.

Sendo assim, temos que (164) será dada por

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_{\vec{k}} (\omega_n^2 + \omega_k^2) \phi_n(\vec{k}) \phi_n^*(\vec{k}) \\
&= \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_{\vec{k}} (\omega_n^2 + \omega_k^2) |\phi_n(\vec{k})|^2 \\
&= \frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_{\vec{k}} (\omega_n^2 + \omega_k^2) A_n^2(\vec{k}), \tag{166}
\end{aligned}$$

onde $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Substituindo (166) em (161), temos¹³

$$\begin{aligned}
Z_F(\beta) &= \prod_n \prod_{\vec{k}} \int \mathcal{D}A_n(\vec{k}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta^2 \sum_n \sum_{\vec{k}} (\omega_n^2 + \omega_k^2) A_n^2(\vec{k}) \right\} \\
&= \prod_n \prod_{\vec{k}} (2\pi)^{1/2} [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega_k^2)]^{-1/2} \tag{167}
\end{aligned}$$

Como o fator $(2\pi)^{1/2}$ independe da temperatura e do volume, o mesmo será ignorado. Portanto, temos que a função logarítmica aplicada à função de partição será dada por

$$\begin{aligned}
\ln Z_F(\beta) &= \ln \left\{ \prod_n \prod_{\vec{k}} [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega_k^2)]^{-1/2} \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_n \ln [\beta^2 (\omega_n^2 + \omega_k^2)]. \tag{168}
\end{aligned}$$

Utiliza-se as seguintes identidades,

$$\ln [(2n\pi)^2 + \beta^2 \omega^2] = \int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n\pi)^2} + \ln [1 + (2n\pi)^2] \tag{169}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (\theta/2\pi)^2} = \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right), \tag{170}$$

e descarta-se o termo independente da temperatura e volume na primeira identidade. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
\ln \left[\beta^2 \left(\frac{2n\pi}{\beta} \right)^2 + \beta^2 \omega_k^2 \right] &= \ln [(2n\pi)^2 + \beta^2 \omega_k^2] \\
&= \int_1^{\beta^2 \omega_k^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n\pi)^2} \\
&= \int_1^{\beta^2 \omega_k^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{(\theta/2\pi)^2 + n^2} \right). \tag{171}
\end{aligned}$$

¹³ Este resultado pode ser obtido de uma outra maneira. Para mais detalhes ver apêndice B.

Logo, podemos reescrever a equação (168) como

$$\begin{aligned}
 \ln Z_F(\beta) &= -\frac{1}{2} \sum_k \int_1^{\beta^2 \omega_k^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \left(\sum_n \frac{1}{(\theta/2\pi)^2 + n^2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_k \int_1^{\beta^2 \omega_k^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \\
 &= -\sum_k \int_1^{\beta^2 \omega_k^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \frac{2\pi^2}{\theta} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right). \tag{172}
 \end{aligned}$$

Todavia, temos que $d\theta^2 = 2\theta d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \ln Z_F(\beta) &= -\frac{2\pi^2}{(2\pi)^2} \sum_k \int_1^{\beta \omega_k} \frac{2\theta d\theta}{\theta} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) \\
 &= -\sum_k \int_1^{\beta \omega_k} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) d\theta \\
 &= -\sum_k \left\{ \frac{1}{2} \beta \omega_k + \int_1^{\beta \omega_k} \frac{d\theta}{e^\theta - 1} \right\}, \tag{173}
 \end{aligned}$$

novamente descartamos o fator independente da temperatura e do volume. A integral do segundo termo da expressão acima terá o seguinte resultado

$$\int_1^{\beta \omega_k} d\theta \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \longrightarrow \begin{cases} \text{chamando} \\ u = 1 - e^{-\theta} \\ du = e^{-\theta} d\theta \end{cases}$$

$$\int_1^{\beta \omega_k} d\theta \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \implies \int \frac{du}{u} = \ln u \implies \ln(1 - e^{-\theta}) \Big|_1^{\beta \omega_k} = \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) - \underbrace{\ln(1 - e)}_{\text{descarta}}.$$

Por fim, temos que

$$\ln Z_F(\beta) = -\sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{1}{2} \beta \omega_k + \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) \right\}. \tag{174}$$

Para o caso contínuo temos que o somatório será dado por

$$\sum_{\vec{k}} \longrightarrow V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}, \tag{175}$$

onde V é o volume. Assim a energia livre $\Omega = -\ln Z_F(\beta)/\beta$ será dada por

$$\Omega = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \omega_k + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta \omega_k}) \right]. \tag{176}$$

O primeiro termo da expressão acima é independente de β e leva a uma integral divergente

pelo fato de termos infinitos modos (ω_k). Este resultado infinito é, naturalmente, nada mais do que a *energia de ponto zero* do vácuo, que pode ser subtraída, uma vez que é uma constante não observável, embora diferenças nestas energias possam ser observadas (por exemplo, o Efeito Casimir). Porém, como estudaremos apenas campos no espaço livre (infinito), a energia de ponto zero será constante e, portanto, pode ser desprezada¹⁴. Sendo assim, temos que a energia livre é reescrita como

$$\Omega = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \right]. \quad (177)$$

Para resolver esta integral de forma analítica, colocamos $m = 0$ e utilizando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned} \Omega &= VT \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d\theta d\phi dk}{(2\pi)^3} k^2 \sin\theta \ln(1 - e^{-\beta k}) \\ &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} VT \int_0^\infty dk k^2 \ln(1 - e^{-\beta k}), \end{aligned}$$

e após uma integral por partes, temos

$$\Omega = -VT \frac{\beta}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{e^{\beta k} - 1}.$$

Fazendo a seguinte mudança de variável: $x = \beta k$, temos

$$\begin{aligned} \Omega &= -VT \frac{\beta}{6\pi^2} \frac{1}{\beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= -\frac{VT^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \end{aligned} \quad (178)$$

Lembrando da Função zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (179)$$

onde $\Gamma(s)$ é a chamada função Gamma, que é dada por

$$\Gamma(s) = (s-1)! \quad (\text{para } s \text{ inteiro positivo}) \quad (180)$$

ou

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{e^x} dx \quad (\text{para } z \text{ complexo}). \quad (181)$$

¹⁴ Tecnicamente, ela será absorvida por um contratermo de densidade de energia durante o processo de renormalização, que será visto na próxima subseção.

Mas para $s = 4$, temos que

$$\begin{aligned}\zeta(4) &= \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^\infty \frac{x^{4-1}}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{\pi^4}{90}.\end{aligned}\tag{182}$$

Portanto a energia livre é dada por

$$\Omega = -\frac{\pi^2 VT^4}{90}\tag{183}$$

resultado que é familiar ao da radiação do corpo negro. A partir deste resultado, podemos obter as quantidades termodinâmicas, por exemplo a pressão

$$P = -\frac{\partial\Omega}{\partial V} = \frac{\pi^2 T^4}{90}.\tag{184}$$

Este resultado para a pressão é o de um gás de partículas escalares no limite de massa nula, sem interação e é a metade da radiação do corpo negro. De fato, considerando-se as duas polarizações do fóton como se fossem dois campos escalares sem massa, chegamos à lei de Stefan-Boltzmann multiplicando o resultado (184) por dois.

Uma pergunta que pode ser feita, nesse momento, é como seria a expressão para o propagador, para a função de partição e para as variáveis termodinâmicas se $V \neq 0$, ou seja, se introduzirmos uma interação? Vejamos na próxima seção a resposta para essa pergunta ao obter as correções de 1ª ordem para uma lagrangiana local.

2.3.2 Correções de 1ª ordem para o propagador e para função de partição

Para uma Lagrangiana como em (135), usaremos um termo de interação do tipo ϕ^4 para exemplificarmos cálculos perturbativos. Portanto, temos que

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4,\tag{185}$$

onde λ é uma constante muito pequena. Como vimos na seção anterior, utilizando o método funcional, o propagador completo é dado por (ver 100)

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{-S_E(\beta)},\tag{186}$$

sendo $\phi(0, \vec{x}) = \phi(\beta, \vec{x})$ as condições de contorno. Sendo assim, a ação euclidiana é dada por

$$S_E(\beta) = \int_0^\beta d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right\}.\tag{187}$$

Expandindo a exponencial em série de Taylor, em (186), para a primeira ordem em λ temos

$$\begin{aligned} e^{-S_E(\beta)} &= \exp\left\{-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right\} \exp\left\{-\frac{\lambda}{4!}\int_0^\beta d^4x\phi^4\right\} \\ &\simeq e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left\{1 - \frac{\lambda}{4!}\int_0^\beta d^4x\phi^4\right\}, \end{aligned} \quad (188)$$

onde $S_E^{(F)}(\beta)$ é a ação livre euclidiana. Com tal expansão, o propagador (no espaço de coordenadas) é dado por

$$\Delta(x-y) \simeq \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left\{1 - \frac{\lambda}{4!}\int_0^\beta d^4x\phi^4\right\}. \quad (189)$$

Vamos agora calcular a quantidade $I(x, y)$

$$I(x, y) = \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left\{1 - \frac{\lambda}{4!}\int_0^\beta d^4z\phi^4(z)\right\} \quad (190)$$

usando o Teorema de Wick. Sendo assim temos

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left\{1 - \frac{\lambda}{4!}\int_0^\beta d^4x\phi^4\right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} - \frac{\lambda}{4!} \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \int_0^\beta d^4z\phi^4(z) \\ &= Z_F(\beta)\Delta_F(x-y) - \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \int \mathcal{D}\phi \phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) e^{-S_E^{(F)}(\beta)}. \end{aligned} \quad (191)$$

No segundo termo acima usaremos o Teorema de Wick, fazendo as contrações entre os campos¹⁵. Para um melhor entendimento, as contrações são dadas por

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} \\ \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} \\ \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} \\ \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} & \overbrace{\phi_x\phi_y\phi_z\phi_z\phi_z\phi_z} \end{array} \quad (192)$$

O número de contrações acima, é igual ao número de contrações de $\phi(x)$, $\phi(y)$ e $\phi^4(z)$. Verifica-se também, como foi visto, a quantidade de contrações: $(6-1)!! = 15$. Agora,

¹⁵ Vale ressaltar que cada contração equivale a um propagador livre: $\overbrace{\phi_x\phi_y} = \Delta(x-y)$.

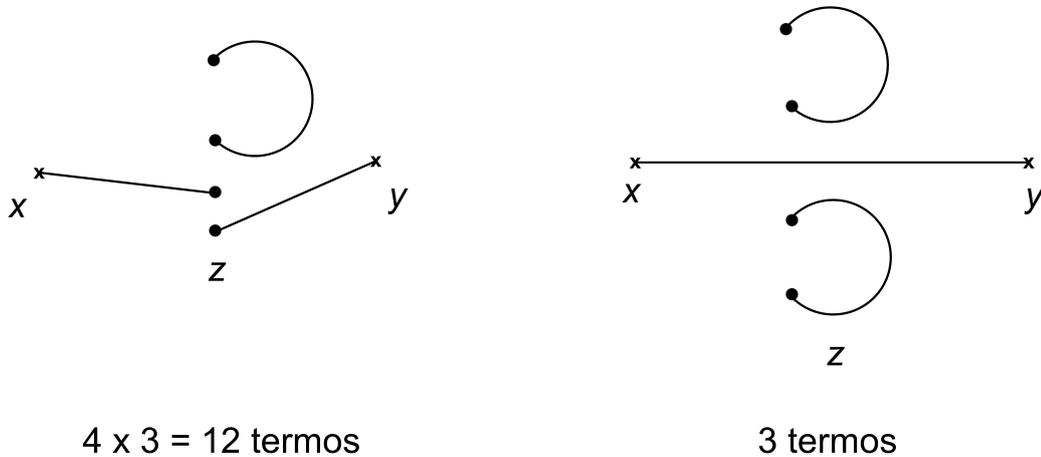
temos que a equação (191) será dada por

$$I(x, y) = Z_F(\beta) \Delta_F(x - y) - \frac{\lambda}{4!} Z_F(\beta) \int_0^\beta d^4 z \left[3 \Delta_F(x - y) \Delta_F^2(z - z) - 12 \Delta_F(x - z) \Delta_F(y - z) \Delta_F(z - z) \right]. \quad (193)$$

Os números 3 e 12 que aparecem no segundo e terceiro termo da equação acima, são, respectivamente, provenientes da primeira linha das comutação e as demais comutações em (192).

É conveniente representar essas contrações num diagrama, desenhando dois pontos ‘externos’ \underline{x} e \underline{y} — onde ‘externo’ significa que eles se referem aos argumentos do propagador, marcados por cruces — e um ponto ‘interno’ (ou ‘vértice’) \underline{z} que surge da expansão em potências de λ e sobre os quais nós devemos integrar. Devido ao fato de $\phi(z)$ possuir uma potência quártica, o ponto \underline{z} é desenhado como quatro pontos separados inicialmente. Cada contração é representada por uma linha ligada aos argumentos de ϕ . Há dois tipos possíveis de termos (como podemos ver na figura 7) e pode-se checar, novamente, que o número de termos correto é: $12 + 3 = (6 - 1)!!$. De maneira a simplificarmos o diagrama, os pontos \underline{z} são aglutinados num único ponto, cujo resultado está mostrado na figura 8.

Figura 7 - Teorema de Wick.



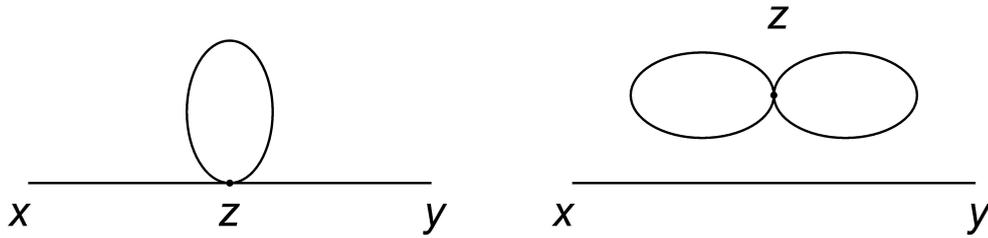
Legenda: Termos que aparecem em (192).

Fonte: BELLAC, 1996, p. 40.

Os diagramas apresentados na figura 8 são denominados de *diagramas de Feynman*, onde os mesmos correspondem a cada grupo de termos da expansão perturbativa. Voltando para equação (193), podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$I(x, y) = Z_F(\beta) \left[\Delta_F(x - y) - \frac{1}{2} \lambda \int_0^\beta d^4 z \Delta_F(x - z) \Delta_F(z = 0) \Delta_F(z - y) - \frac{1}{8} \lambda \int_0^\beta d^4 z \Delta_F(x - y) \Delta_F^2(z = 0) \right], \quad (194)$$

Figura 8 - Diagrama conexo e desconexo.



Legenda: Maneira simplificada dos diagramas mostrados na figura 7.

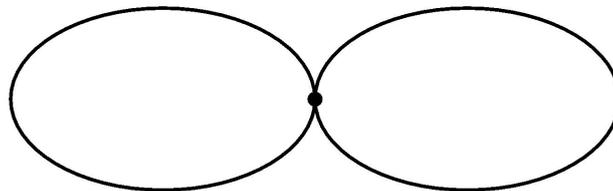
Fonte: BELLAC, 1996, p. 41.

onde $Z_F(\beta)$ é a função de partição livre. Os fatores $1/2$ e $1/8$ são provenientes das contrações do Teorema de Wick e são denominados de *fatores de simetria*. Para obter propagador o completo ($\Delta(x-y)$), precisamos dividi-lo pela função de partição calculada para a mesma ordem de λ . Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\beta)} \\
 &\simeq \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^{(F)}} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) \right\} \\
 &\simeq Z_F(\beta) \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z 3 \Delta_F^2(z-z) \right\} \\
 &\simeq Z_F(\beta) \left\{ 1 - \frac{\lambda}{8} \int_0^\beta d^4z \Delta_F^2(z-z) \right\} \tag{195}
 \end{aligned}$$

onde o segundo termo na expressão acima é representado pelo seguinte diagrama da figura 9

Figura 9 - Correção de 1ª ordem para função de partição.



Legenda: Diagrama associado ao termo $\Delta_F^2(z-z)$.

Fonte: BELLAC, 1996, p. 42.

Por fim, para obter o propagador completo com aproximação a 1ª ordem em λ ,

$$\Delta(x-y) = \Delta_F(x-y) - \frac{1}{2} \lambda \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-z) \Delta_F(z=0) \Delta_F(z-y) + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{196}$$

Tal equação também pode ser representada diagramaticamente, a figura 10 nos mostras

esta representação (a linha em negrito representa o propagador completo). Percebe-se que o fator $-\lambda$ está associado ao vértice (na correção do propagador). Outro fato importante é que o diagrama desconexo da figura 8 desaparece após a divisão por $Z(\beta)$ para obter o propagador completo (figura 10), tal desaparecimento é um resultado geral¹⁶.

Figura 10 - Correção de 1ª ordem para o propagador.



Legenda: Diagrama associado a equação (196).

Fonte: BELLAC, 1996, p. 42.

Podemos reescrever o propagador completo (196) nos espaço dos momenta (como foi visto na seção anterior), ou seja,

$$\tilde{\Delta}(i\omega_n, k) = \tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k) - \frac{\lambda}{2} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k) \left\{ T \sum_m \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{\Delta}_F(i\omega_m, k') \right\} \tilde{\Delta}_F(i\omega_n, k). \quad (197)$$

Sendo assim, geralmente, define-se a auto-energia (Π) que corresponde ao termo de correção, como

$$\Pi(i\omega_n, k) = \tilde{\Delta}^{-1}(i\omega_n, k) - \tilde{\Delta}_F^{-1}(i\omega_n, k). \quad (198)$$

Conseqüentemente, para 1ª ordem em λ , podemos obter a partir de (197) que a auto-energia é independente do momento externo k e utilizando a representação mista do propagador para $\tau = 0$, temos que a mesma será dada por

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\lambda}{2} \Delta_F(z=0) \\ &= \frac{\lambda}{2} T \sum_m \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{\Delta}_F(i\omega_m, k') \\ &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \tilde{\Delta}_F(\tau=0, k'). \end{aligned} \quad (199)$$

Mas, para $\tau = 0$ em (159) temos que a expressão acima é dada por

$$\Pi = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega_k)}{2\omega_k}. \quad (200)$$

Esta auto-energia também pode ser vista como a soma de uma correção oriunda do vácuo ($T = 0$) e uma correção oriunda pelo fato da introdução da temperatura na teoria, ou

¹⁶ Para mais detalhes sobre esse resultado ver (PESKIN; SCHROEDER, 1995)

seja,

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_{\text{v\u00e1cuo (V)}} + \Pi_{\text{meio t\u00e9rmico (MT)}} \\ &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}\end{aligned}\quad (201)$$

Percebemos claramente que o primeiro termo acima \u00e9 divergente, por\u00e9m o segundo \u00e9 convergente e \u00e9 facilmente avaliado analiticamente para o caso de $m = 0$

$$\Pi_{\text{MT}} = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n(k)}{k} = \frac{\lambda T^2}{24} . \quad (202)$$

Vemos ent\u00e3o que ao introduzir temperatura na teoria, a princ\u00edpio, a mesma n\u00e3o gera novas diverg\u00eancias.

Mas se considerarmos todas as corre\u00e7\u00f5es para o propagador, a soma que teremos de diagramas seria algo dif\u00edcil de calcular. No entanto, \u00e9 f\u00e1cil escrever essa grande soma de diagramas em termos de uma soma de um conjunto menor de diagramas, ou seja, o conjunto de *one particle irreducible*, abreviado por *1PI*. Um diagrama *1PI* \u00e9 um diagrama que n\u00e3o pode ser dividido em dois diagramas disjuntos pelo simples corte de uma linha interna. Define-se ent\u00e3o um objeto que coleciona todas as corre\u00e7\u00f5es *1PI*, tal objeto \u00e9 a auto-energia (PESKIN; SCHROEDER, 1995). Sendo assim a fun\u00e7\u00e3o de dois pontos completa com todas as corre\u00e7\u00f5es, pode ser escrita como mostra a figura 11. Logo, tal figura nos diz que

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(i\omega_n, k) &= \frac{1}{k^2 + m^2} + \frac{1}{k^2 + m^2} (-\Pi(i\omega_n, k)) \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &\quad + \frac{1}{k^2 + m^2} (-\Pi(i\omega_n, k)) \frac{1}{k^2 + m^2} (-\Pi(i\omega_n, k)) \frac{1}{k^2 + m^2} - \dots \\ &= \frac{1}{k^2 + m^2} \left(1 - \Pi(i\omega_n, k) \frac{1}{k^2 + m^2} + \Pi(i\omega_n, k) \frac{1}{k^2 + m^2} \Pi(i\omega_n, k) \frac{1}{k^2 + m^2} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{k^2 + m^2} \left(1 + \frac{\Pi(i\omega_n, k)}{k^2 + m^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{k^2 + m^2 + \Pi} .\end{aligned}$$

Portanto a auto-energia (Π) pode ser interpretada como uma simples corre\u00e7\u00e3o para a massa ao quadrado: $m^2 \rightarrow m^2 + \Pi$. No entanto, como j\u00e1 mencionado, a parte para $T = 0$ em (201) \u00e9 uma diverg\u00eancia ultravioleta. Conforme vimos na se\u00e7\u00e3o 1.2, para absorver essa diverg\u00eancia \u00e9 preciso renormalizar a teoria introduzindo contra-termos. Sendo assim, iremos introduzir um contra-termo de massa na a\u00e7\u00e3o euclidiana, e al\u00e9m disso ser\u00e1 necess\u00e1rio introduzir um contra-termo de energia de ponto zero (δE), para absorver o infinito gerado pela energia de ponto zero como vimos na se\u00e7\u00e3o anterior. Portanto, temos que a

Figura 11 - Expansão 1PI.



Legenda: Sequências dos diagramas 1PI.

Fonte: O autor, 2018.

ação euclidiana escrita com esses contra-termos é dada por¹⁷

$$\begin{aligned}
 S_E(\beta) &= \int_0^\beta d^4x \left\{ \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{\delta m^2}{2} \phi^2 - \frac{\delta m^2}{2} \phi^2 + \delta E \right\} \\
 &= \int_0^\beta d^4x \left\{ \frac{(\partial_\mu \phi)^2}{2} + \frac{(m_0^2 - \delta m^2)}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \underbrace{\frac{\delta m^2}{2} \phi^2 + \delta E}_{\text{termos de interação}} \right\}. \quad (203)
 \end{aligned}$$

O contra-termo de massa já é um resultado conhecido (PESKIN; SCHROEDER, 1995), ou seja, $\delta m^2 = -\Pi_V = -\Pi|_{T=0}$. Para obter δE usaremos as seguintes condições de renormalização

$$P|_{T=0} = 0 \implies \left. \frac{\partial \Omega}{\partial V} \right|_{T=0} = 0. \quad (204)$$

Na presença dos contratermos, (195) recebe correções

$$\begin{aligned}
 Z(\beta) &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^{(F)}} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) - \frac{\delta m^2}{2} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) - \delta E \int_0^\beta d^4z \right\} \\
 &= Z^{(1-loop)}(\beta) - \frac{\delta m^2}{2} \int_0^\beta d^4z \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^{(F)}} \phi(z) \phi(z) - \delta E \int_0^\beta d^4z \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E^{(F)}} \\
 &= Z^{(1-loop)}(\beta) - \frac{\delta m^2}{2} Z_F(\beta) \beta V \Delta_F(z=0) - \delta E Z_F(\beta) \beta V \\
 &= Z_F(\beta) \left\{ 1 - \frac{\lambda}{8} \beta V \Delta_F^2(z=0) - \frac{\delta m^2}{2} \beta V \Delta_F(z=0) - \beta V \delta E \right\}. \quad (205)
 \end{aligned}$$

Com isso, a energia livre é dada por

$$\begin{aligned}
 \Omega(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta) \\
 &= -\frac{1}{\beta} \ln Z_F(\beta) - \frac{1}{\beta} \ln \left[1 - \frac{\lambda \beta V}{8} \Delta_F^2(z=0) - \frac{\delta m^2}{2} \beta V \Delta_F(z=0) - V \delta E \right] \\
 &= -\frac{1}{\beta} \ln Z_F(\beta) + \frac{\lambda V}{8} \Delta_F^2(z=0) + \frac{\delta m^2}{2} V \Delta_F(z=0) + V \delta E. \quad (206)
 \end{aligned}$$

¹⁷ Vale ressaltar que os demais contratermos visto na seção 1.2 serão nulos para 1ª ordem de λ (PESKIN; SCHROEDER, 1995)

Na equação acima utilizamos uma expansão de série de Taylor para função logarítmica. Neste momento, é conveniente escrever Δ_F como a seguinte soma

$$\begin{aligned}\Delta_F(z=0) &= \Delta_F^{(T=0)}(z=0) + \Delta_F^T(z=0) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega_k)}{\omega_k}\end{aligned}\quad (207)$$

onde $\Delta_F^T(z=0) = 0$ para $T = 0$. Substituindo o valor de δm^2 na expressão da energia livre, temos

$$\begin{aligned}\Omega(\beta) &= -\frac{1}{\beta} \ln Z_F(\beta) + \frac{\lambda V}{8} (\Delta_F^{(T=0)})^2 + \frac{\lambda V}{8} (\Delta_F^T)^2 + \frac{\lambda V}{4} \Delta_F^{(T=0)} \Delta_F^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[-\frac{\lambda}{2} \Delta_F^{(T=0)} \right] V (\Delta_F^{(T=0)} + \Delta_F^T) + V \delta E \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln Z_F(\beta) + \frac{\lambda V}{8} \left[(\Delta_F^T)^2 - (\Delta_F^{(T=0)})^2 \right] + V \delta E \\ &= V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\omega_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \right] + \frac{\lambda V}{8} \left[(\Delta_F^T)^2 - (\Delta_F^{(T=0)})^2 \right] + V \delta E.\end{aligned}$$

Utilizando as condições de renormalização (204) na equação acima, obtemos

$$\delta E = \frac{\lambda}{8} (\Delta_F^{(T=0)})^2 - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2}.\quad (208)$$

Substituindo δE na energia livre, as divergências na energia de ponto zero e em $\Delta_F^{(T=0)}$ são absorvidas. Portanto, para ordem λ , obtemos a energia livre renormalizada (Ω_R)

$$\Omega_R(\beta) = V \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) + \frac{\lambda V}{8} (\Delta_F^T)^2.\quad (209)$$

Sendo assim, a pressão com sua primeira correção, para o caso de $m = 0$, é dada por

$$\begin{aligned}P &= -\frac{\partial \Omega}{\partial V} \\ &= P_F - \frac{\lambda}{8} (\Delta_F^T)^2 \\ &= \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{\lambda}{8} \left(\frac{T^2}{12} \right)^2 \\ &= \frac{\pi^2 T^4}{90} \left(1 - \frac{5\lambda}{64\pi^2} \right)\end{aligned}\quad (210)$$

Esse seria então o processo para se obter correções perturbativas, para um teoria escalar com uma lagrangiana local, a 1ª ordem em λ (a *1-loop*) para o propagador, função de partição e conseqüentemente para variáveis termodinâmicas (nesse caso a pressão). Um fato curioso, mas que não entraremos em detalhes, é que a próxima ordem de correção

é $\lambda^{3/2}$ e não λ^2 que seria o esperado, isso acontece devido o comportamento singular no infravermelho do propagador (para mais informações ver, por exemplo, (BELLAC, 1996)). Entretanto, tais cálculos de correções perturbativas não serão abordados para o caso de uma lagrangiana que apresente termos não locais (como veremos no próximo capítulo), pois os mesmos serão uma das perspectivas futuras para este trabalho pelo fato de serem cálculos mais delicados. Mas mesmo assim, para a lagrangiana que será apresentada, obteremos para o caso livre o propagador, a função de partição e variáveis termodinâmicas.

3 PROPOSTA DE UM MODELO

Vimos, na seção 1.3, que existem vários métodos e modelos efetivos não perturbativos para a Cromodinâmica Quântica, e apresentamos alguns, que buscam estudar e entendê-la no regime de baixas energias, visando em particular um dos fenômenos mais intrigantes desde o século passado: o confinamento. Sendo assim, neste capítulo faremos a abordagem de um possível modelo efetivo com a finalidade de averiguar tal característica apresentada pela QCD. Essa abordagem será baseada na investigação da termodinâmica procurando possíveis pontes com a física do confinamento em teorias de calibre. Façamos então uma apresentação deste modelo e dos resultados obtidos.

3.1 Descrição do modelo

A construção de modelos efetivos é uma importante ferramenta na análise de teorias complexas e com difícil solução exata, como a QCD. Sendo assim, este modelo efetivo é inspirado na Teoria refinada de Gribov-Zwanziger (que também é um modelo efetivo), podendo ser visto como um *modelo de brinquedo* para RGZ, logo o mesmo apresentará uma certa simplicidade em relação a RGZ.

Do ponto de vista do confinamento como violação de positividade da função de dois pontos (propagador), é possível definir um modelo de campos *escalares* com um termo de massa dependente do momento e não local, tal que os graus de liberdade fundamentais estejam confinados. Sugerimos então a seguinte Lagrangiana (euclidiana), que pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \left[\phi(x) \left(-\partial^2 + m^2 + \frac{\Lambda^4}{-\partial^2 + M^2} \right) \phi(x) \right], \quad (211)$$

onde m , M e Λ são parâmetros de massa (aproximadamente na escala de 0.1 GeV), de modo que dizemos que o campo $\phi(x)$ tem uma massa dependente do momento dada por

$$\mathcal{M}^2(p) = m^2 + \frac{\Lambda^4}{p^2 + M^2}. \quad (212)$$

Observe que esta Lagrangiana pode ser vista como uma versão muito simplificada da Lagrangiana de Gribov-Zwanziger refinada (49), onde o campo de calibre A_μ na representação adjunta de um grupo $SU(N_c)$ foi substituído por um simples campo escalar ϕ sem estrutura interna de cor. Este fato então implicaria em um “simplicidade” do modelo comparado ao modelo RGZ. Nessa teoria efetiva para a QCD em baixas energias, o termo não local em (211) (que dá origem à função de massa não trivial (212)) corresponde à

função horizonte (vista na seção 1.3.3), em sua aproximação quadrática nos campos de calibre. O termo Λ^4 corresponde ao termo $2gN\gamma^4$ na ação da RGZ em (49), ou seja, $\Lambda^4 \sim \gamma^4$. Já os termos m^2 e M^2 estão associados aos condensados da RGZ vistos na seção 1.3.3.

3.2 Resultados Obtidos

3.2.1 Propagador Livre a temperatura finita

Primeiramente, estamos interessados em obter o propagador livre para tal modelo, para que possamos ver se ele é comparável ao propagador do modelo RGZ. A partir do que foi apresentado no capítulo anterior, podemos escrever diretamente o funcional gerador para esta teoria e a derivada do mesmo, com relação a uma fonte escalar, nos fornece as funções de correlação. Portanto, vemos que o propagador livre é dado por

$$\begin{aligned} D_F(\omega_n, \vec{p}^2) &= \frac{p^2 + M^2}{(p^2 + M^2)(p^2 + m^2) + \Lambda^4} \\ &= \frac{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + M^2}{(\omega_n^2 + \vec{p}^2 - \Lambda_1)(\omega_n^2 + \vec{p}^2 - \Lambda_2)}, \end{aligned} \quad (213)$$

onde Λ_1 e Λ_2 são dados por

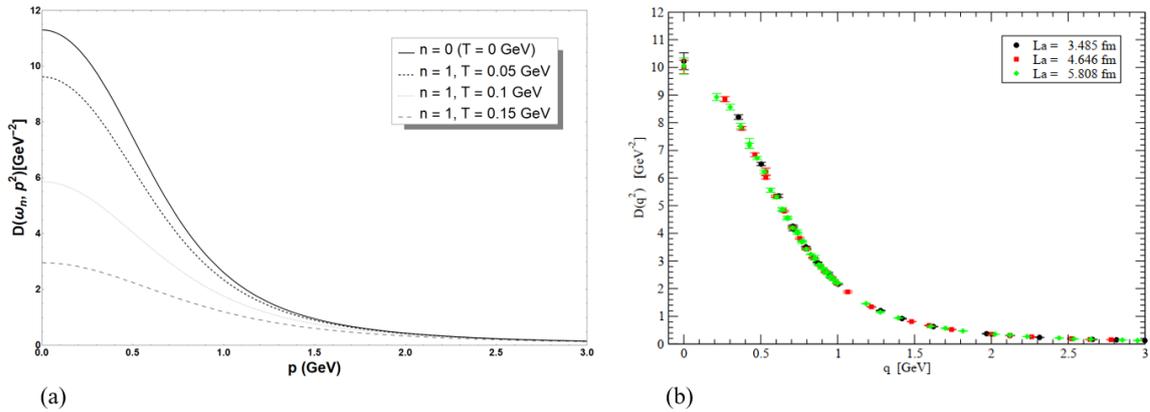
$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{-(m^2 + M^2) + \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}{2} \\ \Lambda_2 &= \frac{-(m^2 + M^2) - \sqrt{(m^2 - M^2)^2 - 4\Lambda^4}}{2}. \end{aligned} \quad (214)$$

Devido à semelhança que há entre a lagrangiana (211) e a do modelo RGZ, podemos ver também a semelhança entre os propagadores (213) e (56). Como já foi dito, $\omega_n = 2\pi nT$ são as frequências de Matsubara, com $n \in \mathbb{Z}$. A figura 12a mostra o comportamento desse propagador em relação ao momento ao quadrado, para $n = 0$ e para o primeiro modo de Matsubara ($n = 1$) em diferentes temperaturas. Já a figura 12b (OLIVEIRA; SILVA, 2012) nos mostra a concordância entre a teoria RGZ e os resultados obtidos com simulações na rede — QCD na rede.

Note que há uma semelhança qualitativa entre a figura 12a, para o modo zero de Matsubara (ou equivalentemente $T = 0$), e a figura 12b. Isso nos mostra que o modelo regido pela lagrangiana (211) realmente assemelha-se com o modelo RGZ, embora o mesmo apresente uma certa simplicidade.

Os valores usados para obter as curvas da figura 12a em relação aos parâmetros de massa e, assim poder observar o comportamento do propagador livre em relação a p , foram

Figura 12 - Propagador.



Legenda: A figura (a) mostra-nos o propagador livre para o campo escalar. A linha contínua corresponde ao modo zero de Matsubara ($n = 0$) o qual é correspondente a $T = 0$. As linhas tracejadas correspondem ao primeiro modo de Matsubara ($n = 1$) para três temperaturas diferentes. A figura (b) mostra-nos o propagador do glúon para simulações na rede.

Fonte: O autor, 2018.

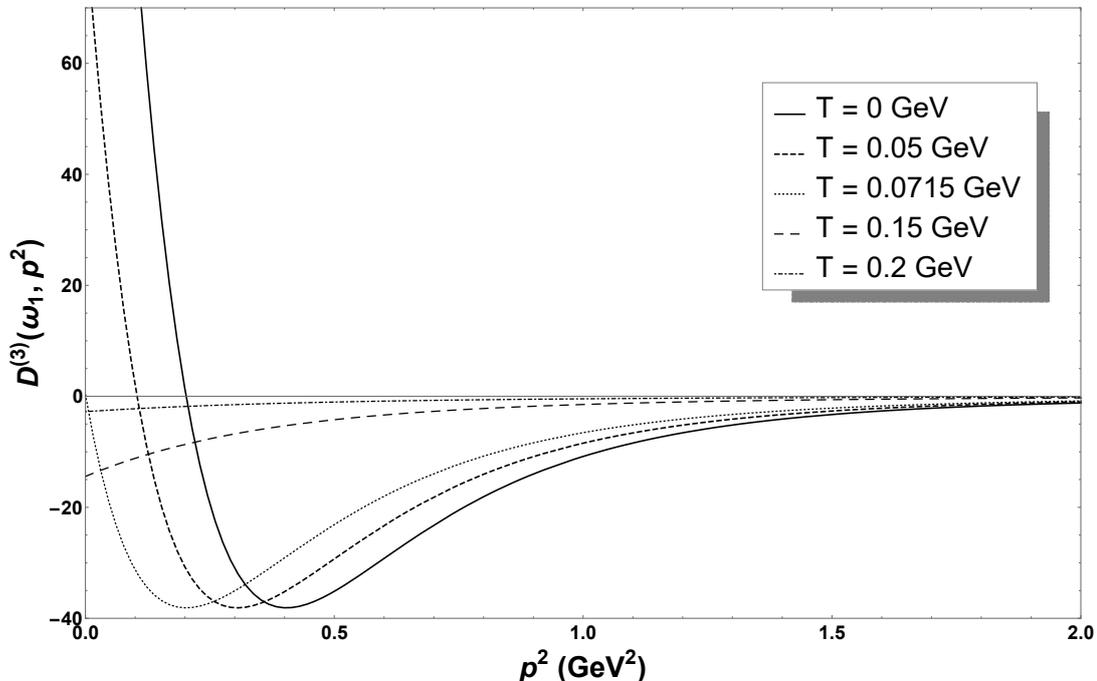
(OLIVEIRA; SILVA, 2012): $M^2 = 4.47 \text{ GeV}^2$, $m^2 = -3.77 \text{ GeV}^2$ e $\Lambda^4 = 17.25 \text{ GeV}^4$.

Pela grande semelhança que há entre os propagadores (213) e (56), sabemos que (213) também apresenta violação de positividade. Uma maneira de observar tal violação é fazer uma análise das derivadas do propagador (213) em relação a p^2 . Para um propagador que não apresente esta violação, ou seja, para uma função espectral que é positiva $\rho(\tau) > 0$ (para algum $\tau > 0$) tal propagador apresenta um padrão em suas derivadas: as derivadas ímpares sempre serão negativas e as derivadas pares sempre serão positivas. Todavia, para propagadores que apresentam violação de positividade esse padrão desaparece.

Na figura 13 e na figura 14 vemos o comportamento para a 3ª e 4ª derivada para o propagador (213), respectivamente, para $n = 1$. Percebemos que existe uma certa faixa de temperatura e momento onde tais derivadas obedecem o padrão, descrito acima, para a não ocorrência da violação de positividade. Entretanto, percebe-se também que há uma faixa de temperatura e momento onde este padrão é quebrado, acarretando na violação de positividade. Na figura 13, o valor de temperatura (aproximado) onde, a partir dela, não haveria mais violação é de $T \approx 0.0715 \text{ GeV}$ e na figura 14 é de $T \approx 0.1011 \text{ GeV}$. Portanto, pela linha de raciocínio desse trabalho, abaixo desses valores de temperatura as derivadas mudam de sinal e conseqüentemente há a violação de positividade. É fácil de visualizar que esse padrão de mudança de sinal também irá ocorrer nas próximas derivadas. Logo, mesmo que ainda exista um certo intervalo de T e p^2 onde as derivadas obedecem o padrão de não violação, existirá também um intervalo onde haverá a violação de positividade. Assim sendo, o propagador (213) apresenta violação de positividade pois suas derivadas quebram o padrão de não violação de positividade. Outro detalhe é que podemos pensar que como tais derivadas tendem a zero conforme a temperatura vai

aumentando, a violação deixaria de existir (em alguns modos de Matsubara), ou seja, os campos que representam esse modelo estariam desconfinados¹⁸. Mas tal pensamento é apenas uma suposição ao olhar para tais análises.

Figura 13 - Derivada 3ª do propagador do modo de Matsubara $n = 1$ em função de p^2 .



Legenda: A figura mostra-nos a derivada 3ª do propagador para valores fixos de temperatura.

Fonte: O autor, 2018.

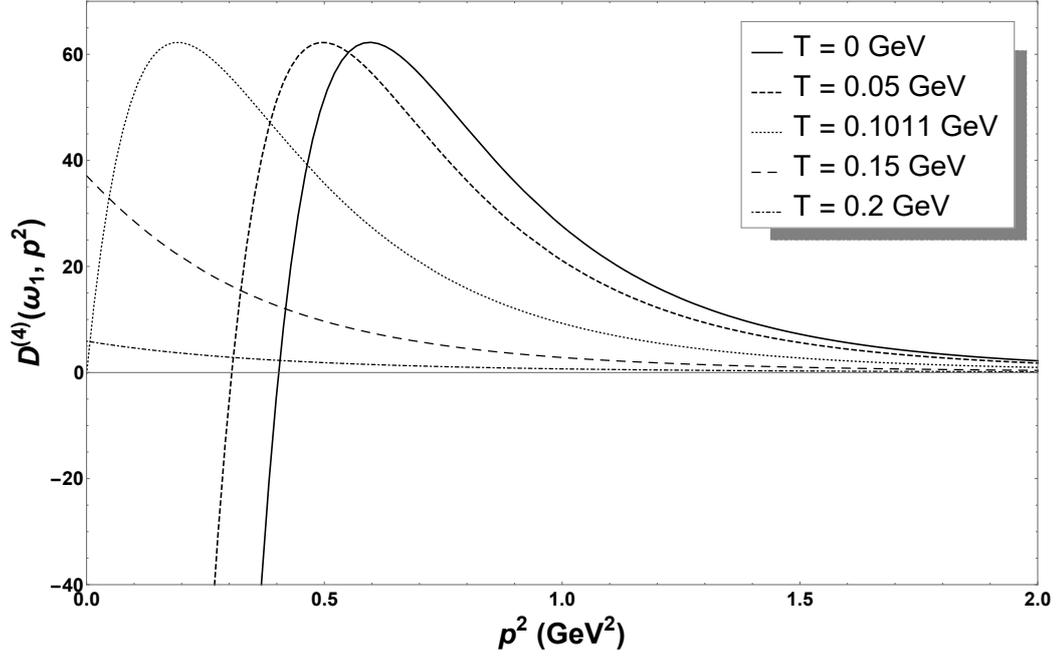
3.2.2 Pressão e densidade de entropia de um gás de partículas com violação de positividade

Após feita essa análise sobre o propagador livre, vejamos como é o comportamento de variáveis termodinâmicas. Para isso, usaremos o método funcional (como no capítulo anterior) para obtermos a função de partição $Z_F(\beta)$ livre. Sendo assim, temos a partir de (138) para $j = 0$,

$$\begin{aligned}
 Z_F(\beta) &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\phi;\beta)} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \left(-\partial^2 + m^2 + \frac{\Lambda^4}{-\partial^2 + M^2} \right) \phi(x) \right\} \\
 &= (2\pi)^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{O} \right\}, \tag{215}
 \end{aligned}$$

¹⁸ Lembrando que neste trabalho violação de positividade está ligada a confinamento como foi visto em 1.3.3.1

Figura 14 - Derivada 4ª do propagador do modo de Matsubara $n = 1$ em função de p^2 .



Legenda: A figura mostra-nos a derivada 4ª do propagador para valores fixos de temperatura.

Fonte: O autor, 2018.

onde, nesse caso, temos

$$\mathcal{O} := -\partial^2 + m^2 + \frac{\Lambda^4}{-\partial^2 + M^2}. \quad (216)$$

De maneira análoga ao que foi feito na seção 2.3 para obter (168), a função logarítmica aplicada à função de partição (215) será dada por

$$\begin{aligned} \ln Z_F(\beta) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \beta^2 (D_F)^{-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left\{ \beta^2 (p^2 - \Lambda_1) (p^2 - \Lambda_2) (p^2 + M^2)^{-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega'^2) \right] + \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega''^2) \right] - \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_p \sum_n \left\{ \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega'^2) \right] + \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega''^2) \right] - \ln \left[\beta^2 (\omega_n^2 + \omega^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (217)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega' &= (\vec{p}^2 - \Lambda_1)^{1/2}; \\ \omega'' &= (\vec{p}^2 - \Lambda_2)^{1/2}; \\ \omega &= (\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (218)$$

Agora, utilizando (169) e (170), podemos reescrever a expressão anterior da seguinte forma

$$\ln Z_F(\beta) = -V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \ln(1 - e^{-\beta\omega'}) + \ln(1 - e^{-\beta\omega''}) - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right\}. \quad (219)$$

Com isso, podemos obter a energia livre ($\Omega = -\ln Z_F(\beta)/\beta$)

$$\Omega = \frac{V}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \ln(1 - e^{-\beta\omega'}) + \ln(1 - e^{-\beta\omega''}) - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right\},$$

e, conseqüentemente, obter algumas variáveis termodinâmicas (analogamente ao capítulo anterior), como por exemplo a pressão

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial\Omega}{\partial V} \\ &= -\frac{1}{\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \ln(1 - e^{-\beta\omega'}) + \ln(1 - e^{-\beta\omega''}) - \ln(1 - e^{-\beta\omega}) \right\}. \end{aligned} \quad (220)$$

Cada termo da expressão acima pode ser reescrito em termos da função de Bessel modificada do tipo dois $K_2(x)$ (ver Apêndice A), portanto

$$P = \frac{a_1^2 T^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta\sqrt{a_1^2})}{n^2} + \frac{a_2^2 T^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta\sqrt{a_2^2})}{n^2} - \frac{M^2 T^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(n\beta\sqrt{M^2})}{n^2}, \quad (221)$$

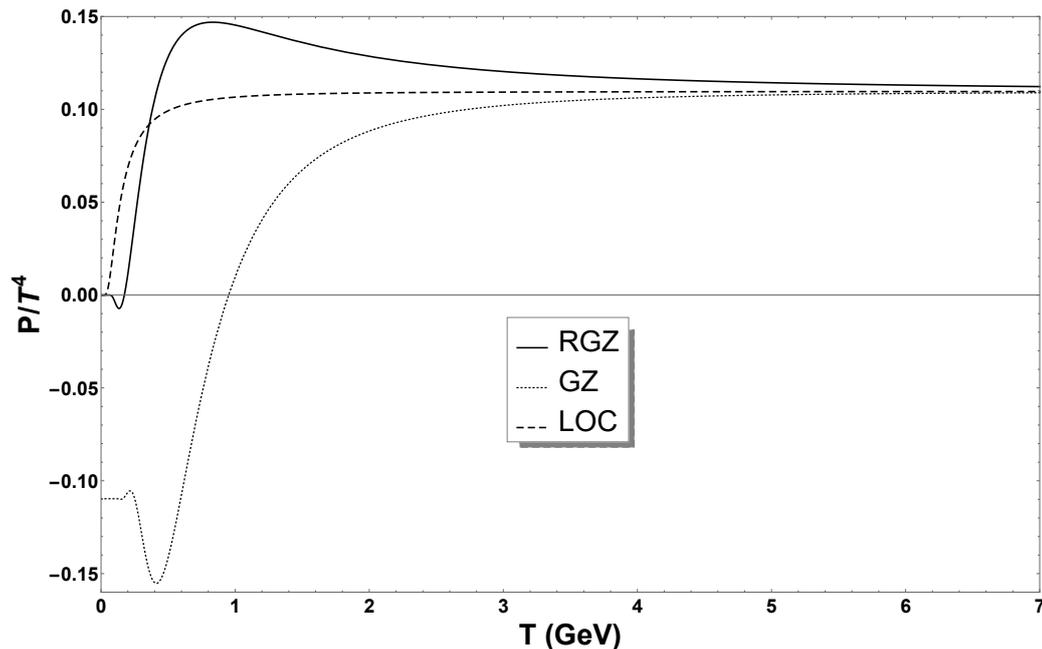
lembrando que a_1^2 e a_2^2 são dados em (58).

O modelo apresentado aqui, em princípio, pode ser visto como um simples modelo de um gás não interagente, porém com um termo de massa dependente do momento (212) (que é uma proposta física) na lagrangiana. Para uma melhor análise desta variável termodinâmica (a pressão), a figura 15 mostra-nos uma comparação entre *toy models* (para campo escalar). Tal figura apresenta uma curva para o modelo em questão (modelo semelhante ao modelo RGZ), para um modelo similar ao modelo GZ — que corresponde a $M = 0$ e $m = 0$ em (211) — e para um modelo com um lagrangiana que apresenta apenas termos locais — que corresponde a $\Lambda = 0$ em (211) — batizado de LOC na figura 15, ou seja, um modelo de gás massivo livre.

Podemos ver que para altas temperaturas (energias), os modelos convergem para o limite de Stefan-Boltzmann (o que já se era esperado). No entanto, para baixas temperaturas, certas oscilações ocorrem tanto no modelo similar a RGZ quanto ao modelo similar a GZ, implicando pressões negativas. Para o nosso modelo, na região onde a pressão é negativa, ou seja, no intervalo de temperatura entre (aproximadamente) 0.06 GeV e 0.1 GeV, a violação de positividade aparece ao olharmos para a figura 13 e para a figura 14.

Outra variável importante a ser estudada é a densidade de entropia (que também pode ser escrita em termos de funções de Bessel modificadas (KAPUSTA; GALE, 2006)). O gráfico da figura 16, também faz uma comparação com outros modelos análogo ao que foi feito para a pressão na figura 15. Também percebemos um acordo entre os modelos

Figura 15 - Comportamento da pressão para um gás livre



Legenda: A linha contínua corresponde ao *toy models* da RGZ, enquanto as linhas tracejadas correspondem a um *toy models* da GZ e a um *toy models* de gás livre (com uma lagrangiana local - LOC), respectivamente para campo escalar.

Fonte: O autor, 2018.

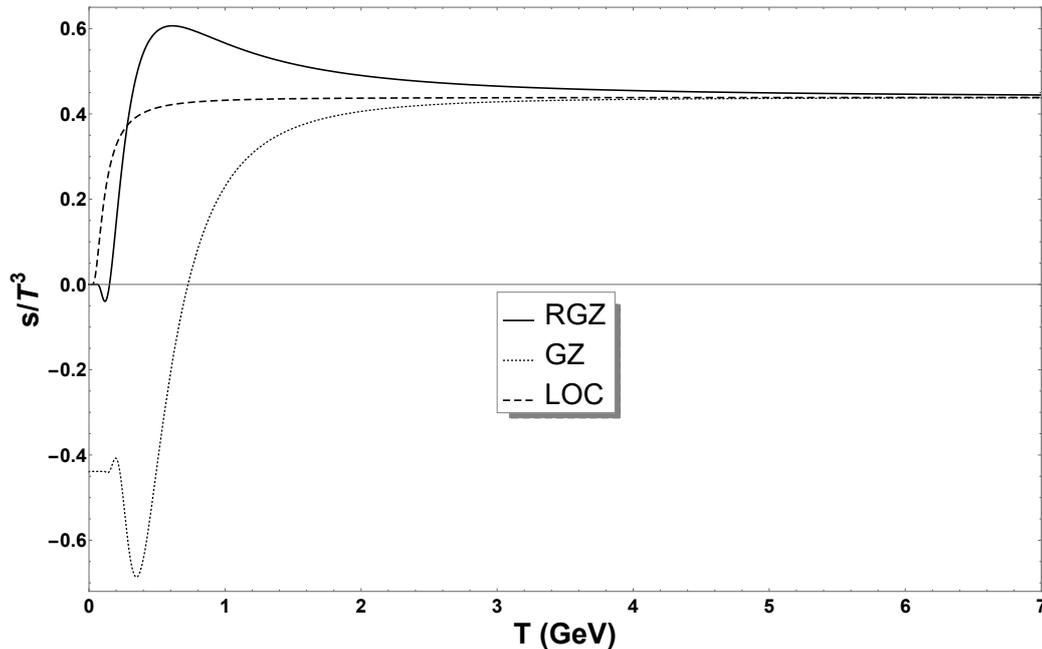
para o regime de altas energias, entretanto para baixas energias há novamente certas oscilações implicando em densidades de entropia negativas. Tal instabilidade também ocorre entre, aproximadamente, 0.06 GeV e 0.1 GeV onde ainda teríamos violação de positividade (figura 13 e figura 14).

Observamos então que para baixas temperaturas há uma certa instabilidade termodinâmica, que pode ter sido gerada pelo fato do propagador apresentar polos (massas) complexos e/ou como tal instabilidade foi observada em baixas energias, a mesma pode está ligada diretamente ao confinamento. Entretanto o trabalho de (BENIĆ; BLASCHKE; BUBALLA, 2012), mostra-nos que propagadores com polos complexos realmente geram oscilações não físicas em quantidades termodinâmicas para baixas temperaturas.

As oscilações que são observadas nos gráficos da pressão e densidade de entropia, podem ser vistas de maneira analítica. Se a parte real do argumento de $K_2(x)$ em (221) for muito maior que um ($x \gg 1$), ou seja,

$$T \rightarrow 0 \implies K_2(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x}, \quad (222)$$

Figura 16 - Comportamento da densidade de entropia para um gás livre.



Legenda: A linha contínua corresponde ao modelo RGZ, enquanto as linhas tracejadas correspondem ao modelo GZ e ao modelo de gás livre (LOC), respectivamente.

Fonte: O autor, 2018.

e além do mais, se $x \approx \sqrt{a_i^2} \in \mathbb{C}^{19}$ temos

$$K_2(x) \approx e^{-\alpha} \cos(\alpha/T + \varphi) \quad (223)$$

onde podemos observar as oscilações (não físicas) da pressão em baixas temperaturas quando a mesma é obtida a partir de um propagador com polos complexos²⁰. Portanto, dado que a pressão de um gás livre de partículas com massas complexas pode ser expressa por uma expressão do tipo (221), parece inevitável que tais massas complexas impliquem inconsistência termodinâmica em baixas temperaturas (o que poderia ser conjecturado como efeito do confinamento dos campos elementares).

O próximo passo a ser feito, seria (como no capítulo anterior) calcular as correções para (213), (215) e para as variáveis termodinâmicas apresentadas aqui. Mas, pelo fato dos mesmos não serem triviais, ficarão para as perspectivas desta dissertação esperando assim obter melhorias nas inconsistências encontradas.

¹⁹ Para os dados da rede, ou seja, para os valores de m , M e Λ vemos que $\sqrt{a_i^2}$ realmente será complexo.

²⁰ Um cálculo análogo a esse pode ser visto em (CANFORA et al., 2016) para um modelo com quarks.

CONCLUSÃO

A ideia deste trabalho de dissertação foi trazer inicialmente uma revisão histórica da teoria que descreve as interações fortes, suas características e evidências experimentais que mostram que a QCD é a teoria que descreve as interações fortes. Após isso, revisar também, de maneira breve, a Lagrangiana que descreve esta teoria. Posteriormente, apresentamos modelos que tentam descrever a QCD em regimes de baixas energias, ou seja, em regime não perturbativo. Vimos que o modelo RGZ é um modelo que mostra uma coerência grande com os dados obtidos em QCD na rede e que o mesmo apresenta um propagador, para o glúon, com violação de positividade implicando em uma das características da QCD para baixas energias, o confinamento.

O formalismo funcional mostrou-se ser uma técnica muito útil e prática, para obter quantidades desejadas como propagadores e variáveis termodinâmicas. Utilizamos como exemplo de aplicação do formalismo, o oscilador harmônico obtendo o propagador e o caso de um campo escalar neutro a temperatura finita obtendo o propagador e a pressão considerando o caso onde $m = 0$.

Por fim, propomos um modelo efetivo para um campo escalar com uma lagrangiana semelhante à do modelo RGZ, para estudarmos os efeitos da interação forte, com o propósito de investigar a termodinâmica do mesmo. Vimos que tal modelo reproduziu características que o modelo RGZ apresenta, pois ao introduzir a temperatura na teoria aparecem algumas inconsistências que são as mesmas apresentadas aqui para este simples modelo de campos escalares.

Os cálculos feitos foram para a situação livre, sem interação. Entretanto, como vimos, a QCD é a teoria que descreve as interações fortes, logo considerar termos de interação é obviamente algo importante neste modelo. Portanto uma das perspectivas deste trabalho será obter a correção perturbativa em primeira ordem para o propagador, para a função de partição e conseqüentemente para as variáveis termodinâmicas com o intuito de, talvez, ver alguma melhoria — em relação as oscilações existentes no regime de baixas temperaturas — nos gráficos da pressão e da densidade de entropia mostrados no capítulo 3. Porém, como foi dito, o modelo apresentado no último capítulo é apenas um *toy model* para RGZ. Entretanto temos também como perspectiva estudar, os cálculos vistos em tal capítulo no modelo RGZ para comparar como o que se conhece da Teoria de Yang-Mills. Dessa forma, podemos introduzir a constante de acoplamento dependente da escala, os condensados e o parâmetro de Gribov.

REFERÊNCIAS

- AGUILAR, A. C.; BINOSI, D.; PAPAVALASSILIOU, J. Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations. *Physical Review D*, [S.l.], v. 78, n. 2, Jul. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.025010>. Acesso em: 20 jan. 2018.
- AGUILAR, A. C.; NATALE, A. A. A dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations. *Journal of High Energy Physics*, [S.l.], v. 2004, n. 08, p. 057–057, Sep. 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2004/08/057>. Acesso em: 20 jan. 2018.
- ALKOFER R; VON SMEKAL, L. The infrared behaviour of QCD Green's functions confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Physics Reports*, [S.l.], v. 353, n. 5-6, p. 281–465, Nov. 2001. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00010-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00010-2). Acesso em: 22 jan. 2018.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, J. H. *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. [S.l.]: Elsevier, 2007. 544 p.
- BELLAC, M. Le. *Thermal field theory*. New York, USA: Cambridge Univ. Press, 1996.
- BENIĆ, S.; BLASCHKE, D.; BUBALLA, M. Thermodynamic instabilities in dynamical quark models with complex conjugate mass poles. *Physical Review D*, [S.l.], v. 86, n. 7, Oct. 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.074002>. Acesso em: 22 jan. 2018.
- BERGES, J.; TETRADIS, N.; WETTERICH, C. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, [S.l.], v. 363, n. 4-6, p. 223–386, Jun. 2002. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00098-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00098-9). Acesso em: 20 jan. 2018.
- BICUDO, P. et al. Lattice gluon propagator in renormalizable ξ gauges. *Physical Review D*, [S.l.], v. 92, n. 11, Dec. 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.114514>. Acesso em: 25 jan. 2018.
- BJORKEN, J. D.; PASCHOS, E. A. Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon. *Phys. Rev.*, [S.l.], v. 185, p. 1975–1982, 1969.
- BLAIZOT, J. P. *Non Perturbative Renormalization Group and Bose-Einstein Condensation*. 2007.
- BORNYAKOV, V. G.; MITRUSHKIN, V. K.; ROGALYOV, R. N. Lattice gluon propagators in 3D SU(2) theory and effects of Gribov copies. *Physical Review D*, [S.l.], v. 86, n. 11, Dec. 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.86.114503>. Acesso em: 11 nov. 2017.
- BRAMBILLA, N. et al. QCD and strongly coupled gauge theories: challenges and perspectives. *The European Physical Journal C*, [S.l.], v. 74, n. 10, Oct. 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-2981-5>. Acesso em: 17 nov. 2017.

- BRAUN, J. The QCD phase boundary from quark–gluon dynamics. *The European Physical Journal C*, [S.l.], v. 64, n. 3, Sep. 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1136-6>. Acesso em: 03 fev. 2018.
- BRODSKY, S. J. et al. Light-front holographic QCD and emerging confinement. *Physics Reports*, [S.l.], v. 584, p. 1–105, Jul. 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2015.05.001>. Acesso em: 03 fev. 2018.
- CANFORA, F. et al. Comments on the compatibility of thermodynamic equilibrium conditions with lattice propagators. *The European Physical Journal C*, [S.l.], v. 76, n. 8, Aug. 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4291-6>. Acesso em: 04 fev. 2018.
- CLOËT, I. C.; ROBERTS, C. D. Explanation and prediction of observables using continuum strong qcd. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, [S.l.], v. 77, p. 1–69, Jul. 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.pnpnp.2014.02.001>. Acesso em: 07 fev. 2018.
- CORNWALL, J. M. Confinement and Chiral Symmetry Breakdown: Estimates of $f(\pi)$ and of Effective Quark Masses. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 22, p. 1452, 1980.
- CORNWALL, J. M. Dynamical Mass Generation in Continuum QCD. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 26, p. 1453, 1982.
- CUCCHIERI, A. et al. Massive gluon propagator at zero and finite temperature. *PoS*, [S.l.], 2012.
- CUCCHIERI, A. et al. Modeling the gluon propagator in landau gauge: Lattice estimates of pole masses and dimension-two condensates. *Physical Review D*, [S.l.], v. 85, n. 9, May. 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.094513>. Acesso em: 10 out. 2017.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. What’s up with ir gluon and ghost propagators in landau gauge? a puzzling answer from huge lattices. *PoS*, p. 297, 2007.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Constraints on the infrared behavior of the ghost propagator in yang-mills theories. *Physical Review D*, [S.l.], v. 78, n. 9, Nov. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.094503>. Acesso em: 10 fev. 2018.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Constraints on the infrared behavior of the gluon propagator in yang-mills theories. *Physical Review Letters*, [S.l.], v. 100, n. 24, Jun. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.241601>. Acesso em: 10 fev. 2018.
- CUCCHIERI, A.; MENDES, T. Landau-gauge propagators in yang-mills theories at $\beta = 0$: Massive solution versus conformal scaling. *Physical Review D*, [S.l.], v. 81, n. 1, Jan. 2010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.016005>. Acesso em: 15 fev. 2018.
- CYROL, A. K. et al. Nonperturbative finite-temperature yang-mills theory. *Physical Review D*, [S.l.], v. 97, n. 5, Mar. 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.054015>. Acesso em: 05 mai. 2018.

- CYROL, A. K. et al. Reconstructing the gluon. *SciPost Phys.*, [S.l.], v. 5, n. 6, p. 065, 2018.
- DAS, A. *Field Theory: A Path Integral Approach*. 2. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2006.
- DUDAL, D. et al. The landau gauge gluon and ghost propagators in the refined gribov-zwanziger framework in 3 dimensions. *Physical Review D*, [S.l.], v. 78, n. 12, Dec. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.125012>. Acesso em: 05 mar. 2018.
- DUDAL, D. et al. Refinement of the gribov-zwanziger approach in the landau gauge: Infrared propagators in harmony with the lattice results. *Physical Review D*, [S.l.], v. 78, n. 6, Sep. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.78.065047>. Acesso em: 05 mar. 2018.
- DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. High precision statistical landau gauge lattice gluon propagator computation vs. the gribov-zwanziger approach. 2018.
- DUDAL, D.; OLIVEIRA, O.; VANDERSICKEL, N. Indirect lattice evidence for the refined gribov-zwanziger formalism and the gluon condensate $\langle A^2 \rangle$ in the landau gauge. *Physical Review D*, [S.l.], v. 81, n. 7, Apr. 2010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.81.074505>. Acesso em: 05 mar. 2018.
- DUDAL, D. et al. New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the gribov-zwanziger approach. *Physical Review D*, [S.l.], v. 77, n. 7, Apr. 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.77.071501>. Acesso em: 20 mar. 2018.
- FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman diagrams for the yang-mills field. *Physics Letters B*, [S.l.], v. 25, n. 1, p. 29–30, 1967.
- FRITZSCH, H.; GELL-MANN, M. Proceedings of the international conference on duality and symmetry in hadron physics. Jerusalem, 1971.
- GELL-MANN, M. Symmetries of baryons and mesons. *Phys. Rev.*, [S.l.], v. 125, p. 1067–1084, Feb. 1962.
- GELL-MANN, M. A Schematic Model of Baryons and Mesons. *Phys. Lett.*, [S. l.], v. 8, p. 214–215, 1964.
- GRADSHTEYN, Izrail Solomonovich; RYZHIK, Iosif Moiseevich. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014. 926 p.
- GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys. B*, [S.l.], v. 139, p. 1–19, 1978.
- GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 30, p. 1343–1346, Jun. 1973. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>. Acesso em: 15 abr. 2018.
- HALL, B. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*. [S.l.]: Springer, 2015. v. 222.

- HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics*. New York, Usa: Wiley, 1984.
- HAUCK, A.; SMEKAL, L. von; ALKOFER, R. Solving a coupled set of truncated qed dyson—schwinger equations. *Computer Physics Communications*, [S.l.], v. 112, n. 2-3, p. 166–182, Aug. 1998. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(98\)00045-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(98)00045-9). Acesso em: 23 abr. 2018.
- KAPUSTA, J. I; GALE, C. *Finite-temperature field theory: Principles and applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.
- KARSCH, F. Lattice results on QCD at high temperature and non-zero baryon number density. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, v. 62, p. 503–511, 2009.
- KLEVANSKY, S. P. The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, [S.l.], v. 64, p. 649–708, Jul. 1992.
- LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. *Quantum field theory for the gifted amateur*. [S.l.]: OUP Oxford, 2014.
- MAAS, Axel. Gauge bosons at zero and finite temperature. *Physics Reports*, [S.l.], v. 524, n. 4, p. 203–300, Mar. 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2012.11.002>. Acesso em: 09 mai. 2018.
- MANDELSTAM, S. Approximation scheme for quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 20, p. 3223–3238, Dec. 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.3223>. Acesso em: 09 mai. 2018.
- NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, [S.l.], v. 122, p. 345–358, Apr. 1961. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.122.345>. Acesso em: 07 mai. 2018.
- NE'EMAN, Y. Derivation of strong interactions from a gauge invariance. *Nucl. Phys. B*, [S.l.], v. 26, p. 222–229, 1961.
- NETO, João Barcelos. *Teoria de Campos e a Natureza - Parte Quântica*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.
- NISHIJIMA, K. BRS invariance, asymptotic freedom and color confinement. (A review). *Czech. J. Phys.*, [S.l.], v. 46, p. 1–124, 1996.
- OEHME, R. Analytic structure of amplitudes in gauge theories with confinement. *International Journal of Modern Physics A*, [S.l.], v. 10, n. 14, p. 1995–2014, Jun. 1995. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X95000978>. Acesso em: 18 mai. 2018.
- OLIVEIRA, O.; SILVA, P. J. Lattice landau gauge gluon propagator: Lattice spacing and volume dependence. *Phys. Rev. D*, [S.l.], v. 86, p. 114513, Dec. 2012.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.

POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 30, p. 1346–1349, Jun. 1973. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>. Acesso em: 27 abr. 2018.

WIPF, A. *Statistical approach to quantum field theory: an introduction*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. v. 864.

ZWANZIGER, D. Local and renormalizable action from the gribov horizon. *Nucl. Phys. B*, [S.l.], v. 323, n. 3, p. 513–544, 1989.

ZWEIG, G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. In: LICHTENBERG, D.B.; ROSEN, S. P. (Ed.). *Developments in the quark theory of hadrons. Vol. 1. 1964 - 1978*. [s.n.], 1964. p. 22–101. Disponível em: <http://inspirehep.net/record/4674/files/cern-th-412.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2018.

APÊNDICE A – Pressão de um gás bosônico em termos da função de Bessel de segundo tipo

Tendo uma lagrangiana para campo escalar, a pressão para um gás não interagente bosônico com potencial químico μ , é dada por

$$P = -T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta(\omega-\mu)}). \quad (224)$$

Entretanto, a mesma pode ser expressa de uma outra maneira: em termos da função de Bessel modificada de segundo tipo. Sabemos que

$$\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} x^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{para} \quad -1 < x \leq 1. \quad (225)$$

Dessa forma temos

$$P = T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} e^{-n\beta\omega}. \quad (226)$$

Lembrando que $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, temos

$$\begin{aligned} P &= T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} e^{-n\beta\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \\ &= \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-n\beta\sqrt{p^2 + m^2}} p^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dp \\ &= \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} \int_0^{\infty} dp \, p^2 e^{-n\beta\sqrt{p^2 + m^2}}. \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável, $x^2 = p^2 + m^2$, temos

$$\begin{aligned} P &= \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} \int_m^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - m^2}} (x^2 - m^2) e^{-n\beta x} \\ &= \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} \int_m^{\infty} dx \, x \sqrt{x^2 - m^2} e^{-n\beta x} \\ &= \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} \int_m^{\infty} dx \, x \, m \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - 1} e^{-n\beta x}. \end{aligned}$$

Fazendo uma outra mudança de variável, $y = x/m$, temos

$$P = \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n} m^3 \int_1^{\infty} dy \, y \sqrt{y^2 - 1} e^{-n\beta m y}. \quad (227)$$

Após uma integração por partes na integral em (227), temos

$$P = \frac{T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^3 e^{n\mu\beta}}{n} \frac{n\beta m}{3} \int_1^{\infty} dy (y^2 - 1)^{3/2} e^{-n\beta my}. \quad (228)$$

Utiliza-se a seguinte identidade (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014; ARFKEN; WEBER, 2007)

$$K_{\nu}(z) = \frac{z^{\nu} \sqrt{\pi}}{2^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu-1/2} dt \quad \text{para } \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (229)$$

onde $K_{\nu}(z)$ são as funções de Bessel modificada. Sendo que $\nu = 2$ e $z = n\beta m$, temos

$$P = \frac{m^4}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{3} \left[\frac{2^2 \Gamma(5/2)}{(n\beta m)^2 \sqrt{\pi}} K_2(n\beta m) \right]. \quad (230)$$

Por fim, sabendo que $\Gamma(5/2) = (3\sqrt{\pi})/4$, temos (KAPUSTA; GALE, 2006)

$$P = \frac{m^2 T^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n\mu\beta}}{n^2} K_2(n\beta m). \quad (231)$$

APÊNDICE B – Integrais Gaussianas em Dimensões Superiores

Considere a seguinte integral bidimensional

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2} x^T A x\right) d^2 x = \int \exp\left(-\frac{1}{2} A_{ij} x_i x_j\right) d^2 x, \quad (232)$$

onde o sobrescrito T indica transposição e A é uma matriz simétrica ($A = A^T$) bidimensional. Esta integral é realizada pela diagonalização de A , ou seja,

$$D = O^T A O, \quad (233)$$

sendo D a matriz diagonal e O uma matriz ortogonal e unitária

$$O O^T = O^T O = 1. \quad (234)$$

Dessa forma, temos que

$$x^T A x = x^T (O O^T) A (O O^T) x = (x^T O) (O^T A O) (O^T x) = y^T D y \quad (235)$$

Em uma notação matricial temos que

$$y^T D y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 = \sum_{i=1}^2 d_i y_i^2. \quad (236)$$

Com isso podemos reescrever (232) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 d_i y_i^2\right) d^2 y &= \int \exp\left(-\frac{1}{2} d_1 y_1^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} d_2 y_2^2\right) d^2 y \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{d_1/2}} \sqrt{\frac{\pi}{d_2/2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{d_1 d_2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{\det D}}. \end{aligned} \quad (237)$$

Mas $\det D = \det A$, logo o resultado para (232) é dado por

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2} x^T A x\right) d^2 x = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{\det A}}, \quad (238)$$

onde o expoente do fator (2π) , dentro da raiz, está diretamente ligado a dimensão, ou seja, para n dimensões temos como resultado geral

$$\int \exp\left(-\frac{1}{2} x^T A x\right) d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} . \quad (239)$$

Na seção (2.3.1), aplicando esse método, temos que $A = \beta^2(-\partial^2 + m^2)$ no espaço das coordenadas (\vec{x}, τ) e $A = \beta^2(\omega_n^2 + \omega^2)$ no espaço dos momentos (\vec{p}, ω_n) .