



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Daniel Fernandes da Cunha Veras

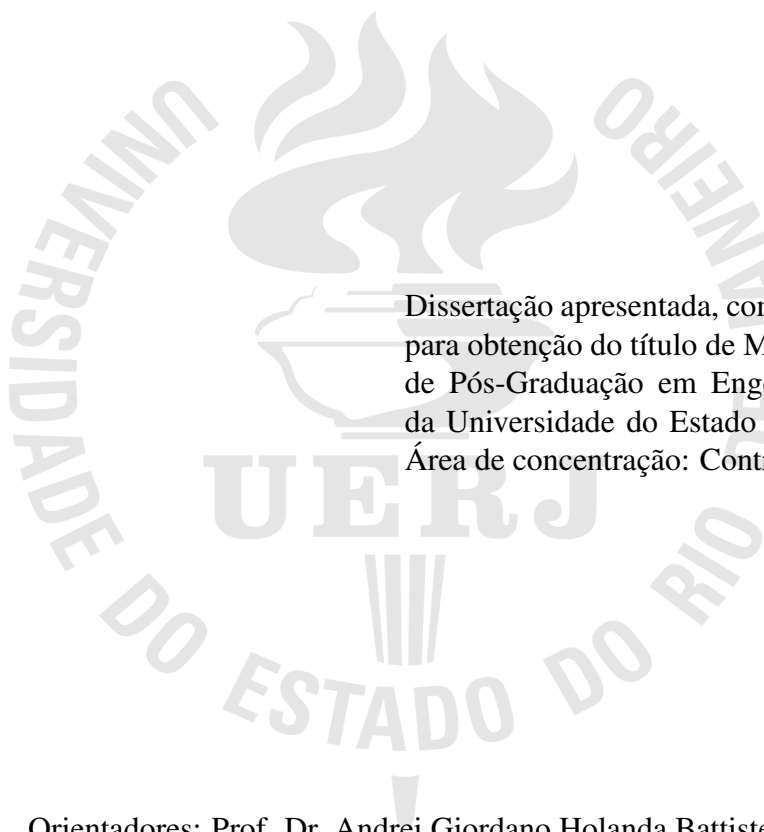
Controladores Multivariáveis Adaptativo Binário e Vetorial Unitário
Aplicados a Plataformas Inerciais

Rio de Janeiro

2021

Daniel Fernandes da Cunha Veras

**Controladores Multivariáveis Adaptativo Binário e Vetorial Unitário Aplicados a
Plataformas Inerciais**



Dissertação apresentada, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre, ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,
da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
Área de concentração: Controle e Automação.

Orientadores: Prof. Dr. Andrei Giordano Holanda Battistel
Prof. Dr. Tiago Roux Oliveira

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

V476 Veras, Daniel Fernandes da Cunha.
Controladores multivariáveis adaptativo binário e vetorial unitário aplicados a plataformas inerciais / Daniel Fernandes da Cunha Veras. – 2021.
71f.

Orientadores: Andrei Giordano Holanda Battistel, Tiago Roux de Oliveira.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia eletrônica - Teses. 2. Sistemas de controle ajustável - Teses. 3. Sistemas de controle por realimentação - Teses. I. Battistel, Andrei Giordano Holanda. II. Oliveira, Tiago Roux de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 681.513.63

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Daniel Fernandes da Cunha Veras

**Controladores Multivariáveis Adaptativo Binário e Vetorial Unitário Aplicados a
Plataformas Inerciais**

Dissertação apresentada, como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre, ao Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,
da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.
Área de concentração: Controle e Automação.

Aprovado em: 25 de maio de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Andrei Giordano Holanda Battistel (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Tiago Roux Oliveira (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Dr. Antonio Candea Leite
Faculty of Science and Technology - NMBU

Prof. Dr. Eduardo Vieira Leão Nunes
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação - UFRJ

Rio de Janeiro

2021

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradeço a Deus pelo seu infinito amor. Agradeço a minha Esposa Anna Flávia, pelo seu amor, carinho, apoio e companheirismo, com suas palavras de motivação que sempre me ajudaram nos momentos difíceis. Agradeço aos meus pais, José Airton, Marta Fernandes e aos meus irmãos Danilo e Davi. Agradeço aos meus orientadores Prof. Andrei Giordano e Prof. Tiago Roux, pelo apoio e auxílio. Agradeço também aos Professores Antonio Candea e Eduardo Vieira, por terem aceitado o convite de participar da banca. Agradeço ao meu grande amigo Wallace Ribeiro Ferreira, por termos enfrentado esses anos no mestrado, sofrendo juntos e realizando um sonho. Aos demais amigos do mestrado, Vinícius, Rodrigo e Wilton, pelos momentos que passamos. Agradeço também a UERJ, por me proporcionar não só a Graduação, mas também esse título de Mestre.

RESUMO

VERAS, Daniel Fernandes da Cunha . *Controladores Multivariáveis Adaptativo Binário e Vetorial Unitário Aplicados a Plataformas Inerciais*. 71 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2021.

Câmeras estabilizadas são utilizadas em diversas aplicações, como em Veículos Aéreos não Tripulados (VANT) e robôs móveis, com o objetivo de manter a imagem fixa em um determinado ponto, mesmo na presença de movimentos. Para essa finalidade são empregadas estratégias de controle a fim de manter essa estabilização. Neste trabalho é apresentado uma extensão do Controle Adaptativo Binário por Modelo de Referência (BMRAC) para sistemas multivariáveis incertos e com grau relativo arbitrários e não-uniformes, usando realimentação de saída. O BMRAC se apresenta como uma alternativa adaptativa-robusta com bom desempenho transitório, estrutura multivariável adequada para trabalhar com desequilíbrios mecânicos e sistemas incertos. A estratégia faz uso de um diferenciador recentemente proposto, com ganhos dinâmicos baseado em modos deslizantes de ordem superior (HOSM) com ganhos dinâmicos. Igualmente é apresentada uma segunda estratégia que consiste na aplicação do Controle Vetorial Unitário (UVC) multivariável, também empregando o diferenciador com ganhos dinâmicos. Serão apresentadas simulações tanto para gimbal de dois e três graus de liberdade, a primeira com dados obtidos de um veículo num terreno irregular e a segunda de dados adquiridos de um VANT em voo autônomo.

Palavras-chave: Modos Deslizantes de Ordem Superior; Controle Adaptativo Multivariável; Controle Vetorial Unitário; Gimbal.

ABSTRACT

VERAS, Daniel Fernandes da Cunha . *Multivariable Adaptive Binary and Unitary Vector Adaptive Controllers Applied to Inertial Platforms*. 68 f. Dissertation (Masters in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, State University of Rio de Janeiro, (UERJ), Rio de Janeiro, 2021.

Stabilized cameras are used in several applications, such as in Unmanned Aerial Vehicles(UAV) and mobile robots, in order to keep the image fixed at a certain point, even in the presence of host vehicle motion. For this and control strategies are employed in order to maintain this stabilization. In this work, an extension of the Binary Model-Reference Adaptive Control (BMRAC) is presented for uncertain multivariable systems with arbitrary and non-uniform relative degrees, using output feedback. BMRAC presents itself as a robust adaptive alternative with good transient performance, multivariable structure suitable for working with mechanical imbalances and advantages for uncertain systems. It makes use of a recently proposed differentiator with dynamic gains based on Higher-Order Sliding Modes (HOSM). Likewise, a second strategy is presented which consists of applying a multivariable version of Unit Vector Control (UVC) also employing the HOSM based dynamic gains differentiator. Simulations will be presented for both two and three degrees of freedom gimbals, the first with data obtained from a vehicle on uneven terrain and the second from data acquired from a UAV in autonomous flight.

Keywords: Higher-Order Sliding Modes; Multivariable Adaptive Control; Unit Vector Control; Gimbal.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Gimbal de 3 eixos.	11
Figura 2	Modelo VANT, DJI Phantom 4. Fonte: Biblioteca do Visualizador 3D	11
Figura 3	Foto tirada com VANT da UERJ. Fonte:Autor.....	12
Figura 4	Gimbal de dois eixos azimute α_1 e elevação α_2	36
Figura 5	Sistemas de coordenadas adotados <i>roll</i> , <i>pitch</i> e <i>yaw</i>	36
Figura 6	Dados experimentais do veículo: (a) <i>roll</i> ; (b) <i>pitch</i> e (c) <i>yaw</i> , em graus.....	39
Figura 7	Ângulo de correção calculado (sinal de referência) para elevação α_1 e azimute α_2	40
Figura 8	Desempenho de rastreamento com dados experimentais do veículo: saída da planta y (—); e saída do modelo y_m (- -)	41
Figura 9	Desempenho do diferenciador em sinais de erro: (a) sinal $e_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[1]}(t)$; (b) sinal $e_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[2]}(t)$; (c) sinal $\dot{e}_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[1]}(t)$; e (d) sinal $\dot{e}_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[2]}(t)$	42
Figura 10	Sinais de controles $u_1(t)$ e $u_2(t)$	42
Figura 11	Detalhe dos sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$	43
Figura 12	Parâmetros adaptados (ϑ), norma do parâmetro ($ \vartheta $), e seu limitante superior (M_ϑ).	43
Figura 13	Desempenho do observador da norma: Norma de estado $ x(t) $ e a norma de estado observada $ \hat{x}(t) $	43
Figura 14	Ganhos dinâmicos do diferenciador global HOSM: (a) ganho diferenciador $\mathcal{L}_1^{[1]}$ e $\ddot{e}_1$; (b) ganho diferenciador $\mathcal{L}_2^{[1]}$ e $\ddot{e}_2$	44
Figura 15	Detalhes da Figura 14	44
Figura 16	Erro angular e_{LOS} entre a LOS desejada e obtida em graus	45
Figura 17	Comparação de erro angular e_{LOS} entre a LOS desejada e a obtida para o sistema em condições ideais e com perturbação contabilizando o atrito da junta	45
Figura 18	Controlador de modo deslizante vetorial unitário por realimentação de saída global baseado no diferenciador HOSM multivariável.....	51
Figura 19	Gimbal de três eixos exibindo correção α_1 , α_2 e α_3 e orientação do sistema de coordenadas inerciais L	53

Figura 20 Saída da planta $y_1(t)$ e modelo de referência $y_{m1}(t)$	57
Figura 21 Saída da planta $y_2(t)$ e modelo de referência $y_{m2}(t)$	58
Figura 22 Saída da planta $y_3(t)$ e modelo de referência $y_{m3}(t)$	58
Figura 23 Erros de rastreamento $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$	58
Figura 24 Desempenho do diferenciador em sinais de erro: (a) sinal $e_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[1]}(t)$; (b) sinal $e_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[2]}(t)$; (c) sinal $e_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[2]}(t)$; (d) sinal $\dot{e}_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[1]}(t)$; (e) sinal $\dot{e}_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[2]}(t)$; e (f) sinal $\dot{e}_3(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[3]}(t)$	59
Figura 25 Detalhe de erros de rastreamento $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$	59
Figura 26 Erro angular entre a LOS desejada e a LOS obtida (em graus).....	60
Figura 27 Sinal de controle $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$	60
Figura 28 Estimação da norma de estado $ \hat{x}(t) $ e norma de estado $ x(t) $	60
Figura 29 (a) Ganhos dinâmicos do diferenciador HOSM: (a) ganho do diferenciador $\mathcal{L}_2^{[1]}$ e $\dot{e}_1$; (b) ganho do diferenciador $\mathcal{L}_2^{[2]}$ e $\dot{e}_2$; (c) ganho do diferenciador $\mathcal{L}_2^{[3]}$ e $\dot{e}_3$. .	61
Figura 30 Sinal de controles $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ com camada limite	62
Figura 31 Detalhe dos sinais de controle $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ com camada limite	62
Figura 32 Erros de rastreamento $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$ com camada limite.....	63
Figura 33 Comparação entre derivada do ângulo <i>roll</i> (ψ) estimado e medido.	63
Figura 34 Comparação entre derivada do ângulo <i>pitch</i> (β) estimado e medido.	64
Figura 35 Comparação entre derivada do ângulo <i>yaw</i> (ϕ) estimado e medido.	64

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	BMRAC MULTIVARIÁVEL	20
1.1	Descrição do Problema	20
1.2	Hipóteses	20
1.3	Modelo de Referência.....	21
1.4	Objetivo de Controle e Parametrização	22
1.5	BMRAC Multivariável para Sistemas de Grau Relativo Unitário	23
1.6	Observador da Norma do Estado	25
1.7	Diferenciador Global HOSM Multivariável com Ganhos Dinâmicos	27
1.8	BMRAC para Sistemas de Grau Relativo Arbitrário Usando o Diferenciador HOSM Multivariável Global	31
2	APLICAÇÃO DO BMRAC A PLATAFORMAS ESTABILIZADAS INER- CIALMENTE COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE	36
2.1	Aplicação a Plataformas Estabilizadas Inercialmente	36
2.2	Resultados da Simulação com Dados Experimentais de um Veículo	38
3	CONTROLE VETORIAL UNITÁRIO	46
3.1	Planta	46
3.2	Hipóteses	46
3.3	Modelo de Referência e Equação de Erro	47
3.4	Variável de Deslizamento Ideal.....	48
3.5	Diferenciador HOSM com Ganhos Dinâmicos	49
3.6	Observador de Norma.....	49
3.7	Controle Vetorial Unitário	51
4	APLICAÇÃO DO UVC A PLATAFORMAS ESTABILIZADAS INERCI- ALMENTE COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE	53
4.1	Estabilização de Câmera em um VANT Usando um Gimbal Desequilibrado de Três Eixos	53
4.2	Resultados da Simulação com Dados de Voo Real	55

4.3	Amplitude e Perfil de controle.....	61
4.4	Diferenciador HOSM como Ferramenta de Estimação e Monitoramento.....	63
	CONCLUSÃO	65
	REFERÊNCIAS	66

INTRODUÇÃO

Em diversas áreas da engenharia encontramos a aplicação das plataformas estabilizadas inercialmente (ISP - do inglês *Inertially stabilized platforms*), como: telescópios ópticos, conjuntos de sensores e equipamentos estratégicos, [1–3]. Há algum tempo, tem-se aumentado o uso em robôs móveis na tentativa da utilização do ISP para estabilização de câmeras acopladas ao robô [4]. O principal objetivo do controle é manter a linha de visada (LOS - do inglês *line-of-sight*) inalterada, ou seja, a direção na qual está o objeto ou ponto de interesse, mesmo na presença de movimentos intencionais ou não do robô, na qual a câmera está acoplada. Este é o caso de veículos aéreos não tripulados (VANT) e veículos operados remotamente, como os robôs anti-bomba, onde a compensação mecânica da LOS é empregada para evitar ou diminuir a deterioração da imagem. Esta tarefa inclui estimar a atitude da plataforma, que na maioria dos casos se dá pela utilização de um conjunto de sensores em uma unidade de medição inercial (IMU - do inglês *inertial measurement unit*) [5] ou com odometria visual [6], compensando-se esta atitude através de um conjunto de acionamentos mecânicos. Nesse sentido, o gimbal, Figura 19 se mostra como a ISP mais utilizada em VANT e robôs. Essa ISP consiste num suporte articulado que permite a rotação de câmera em torno de um ou mais eixos. Essa rotação em torno dos eixos é realizada através de motores que fazem o posicionamento da LOS de acordo com o sistema de controle. Para esses sistemas a obtenção de modelos matemáticos precisos torna-se algo difícil ou bem demorado, já que alguns parâmetros podem ser difíceis de identificar e na maioria das vezes apresentam incertezas. Assim sendo, deseja-se uma robustez às incertezas paramétricas da planta, nesse sentido as estratégias de controle adaptativo se mostram atraentes [7]. Entretanto, o Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) apresenta alguns desafios técnicos. Limitações como condição restritiva de simetria no Ganho de Alta Frequência (HFG - do inglês *high-frequency gain*), como em [8,9]; aplicação restrita a plantas uniformes de grau relativo um, fraco desempenho transitório e sobre-parametrização [10].

Uma escolha muito comum para posicionamento de câmeras em VANT é o gimbal de dois eixos [11, 12], que realiza rotações em dois ângulos, azimuth e elevação. Em condições onde não existe desbalanceamento mecânico, os ângulos de azimuth e elevação podem ser considerados como dois sistemas de entrada única e saída única, desacopladas.

Esses sistemas são conhecidos como SISO (*single-input, single-output*). Entretanto, na ocorrência dos desequilíbrios, as interações dinâmicas entre entradas e saídas farão com que



Figura 1 Gimbal de 3 eixos.

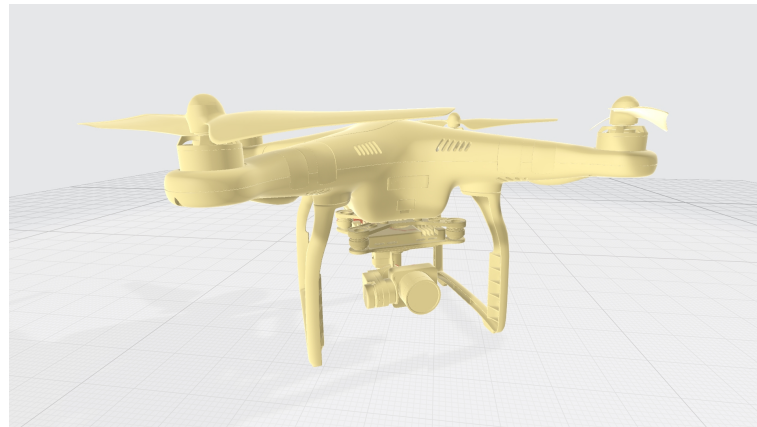


Figura 2 Modelo VANT, DJI Phantom 4. Fonte: Biblioteca do Visualizador 3D

os comandos do azimuth afetem o de elevação e de igual modo os comandos no sistema de elevação afetarão os de azimuth Logo, a abordagem mais adequada para o gimbal de dois eixos desequilibrado é o sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas, conhecido como MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*).

Alguns VANTs comerciais utilizam um gimbal de três eixos, a exemplo do Phantom 4, fabricado pela DJI e representado no esquemático da Figura 2 e utilizado neste trabalho. Este arranjo permite uma melhor estabilização da imagem, embora acrescente peso, consumo de energia e constitua uma montagem mais complexa [1]. Para um gimbal de três eixos o desbalanceamento mecânico acrescenta uma série de dificuldades operacionais, causando dificuldades para um projeto de controlador adequado [13]. Embora a arquitetura do Phantom 4 não permita a realização de experimentos com a estabilização da câmera, dados de voo são utilizados para fins de simulação numérica das técnicas discutidas. Um exemplo de imagem



Figura 3 Foto tirada com VANT da UERJ. Fonte: Autor

obtida pelo Phantom 4 durante os voos realizadas pode ser visto na Figura 3.

Diversas técnicas fundamentadas em Modos Deslizantes de Ordem Superior (HOSM) foram recentemente discutidas como controladores e observadores *super-twisting*, como em [14] em que é proposto um controlador baseado em *super-twisting* e provada sua estabilidade, para [15] o *super-twisting* é aplicado tanto em sistema SISO quanto MIMO e [16] apresenta a aplicação em motor síncrono de ímã permanente. Englobando aplicações na estimativa de sinal e filtragem usando os diferenciadores exatos [17, 18]. Como ferramenta viável para contornar as limitações de grau relativo, os diferenciadores HOSM apresentam a possibilidade de gerar uma variável de erro auxiliar de grau relativo um e estimando assim as derivadas necessárias do sinal de erro. Entretanto, os resultados obtidos pelos diferenciadores de [19] são apenas locais, motivando então uma nova classe de diferenciadores HOSM globais com ganhos dinâmicos, como em [20, 21]. O diferenciador HOSM pode ser utilizado como ferramenta proveitosa para estimar derivadas de sinais medidos, devida a sua exatidão, convergência global e robustez na presença de ruído de medição.

O Controle Adaptativo Binário por Modelo de Referência (BMRAC) é uma técnica originalmente proposta para sistemas SISO como descrito em [22] e só recentemente generalizado para sistemas MIMO de grau relativo um [23]. O BMRAC demonstra ter bom comportamento transitório devido ao uso de uma lei adaptativa do tipo gradiente de alto ganho com projeção de parâmetros, que assegura melhores respostas transitórias. Além disso, o sinal de controle é contínuo e sem *chattering*. Posteriormente, outros trabalhos apresentaram formas de con-

tornar as limitações de grau relativo do BMRAC MIMO. Logo, o MIMO BMRAC [23] pode ser generalizado para sistemas de graus relativo arbitrário obtendo estabilidade global e bom desempenho de rastreamento.

Por outro lado, uma estratégia para controle por modos deslizantes multivariável surge com o Controle Vetorial Unitário (UVC – do inglês *Unit Vector Control*), originalmente proposta em [24], pode ser vista em [25,26]. Embora em [27] seja proposto um controlador por modos deslizantes via realimentação de saída, aplicadas ao rastreamento exato de plantas MIMO com perturbação e grau relativo um. A extensão para grau relativo arbitrário é uma questão mais difícil [28]. Com isso, uma generalização do UVC para uma classe de plantas MIMO com grau relativo arbitrário e distúrbios não lineares foi recentemente proposta em [29, 30]. Este resultado foi alcançado usando uma versão MIMO do esquema de diferenciação HOSM global, originalmente proposto para plantas SISO em [20, 31–33].

Conceitos Básicos

Considera-se todo κ como constante positiva. O termo $\pi(t)$ é uma função exponencial decrescente, $|\pi(t)| \leq K e^{-\lambda t}$, $\forall t$, onde K depende das condições iniciais do sistema e λ é uma constante positiva genérica. O símbolo $|\cdot|$ representa a norma euclidiana para vetores, ou a norma induzida para matrizes, enquanto $\|f(t)\|$ denota $\sup\{|f(t)|, t \geq 0\}$, e $\|f_{[t_1, t_2]}\| = \sup_{t \in [t_1, t_2]} |f(t)|$, $0 \leq t_1 \leq t_2$.

Definição 1. (Controlabilidade) A equação de estado 1.1 ou o par (B, A) é dito ser controlável se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$, e qualquer estado final x_1 , existe uma entrada que transfere x_0 para x_1 em um tempo finito. Caso contrário 1.1 é dito ser não controlável.

Definição 2. (Observabilidade) A equação de estado 1.1 é dita observável se para qualquer estado inicial desconhecido $x(0) = x_0$, existe um finito tempo $t_1 :> 0$ tal que uma entrada conhecida $u(t)$ e saída $y(t)$ sobre $[0, t_1]$ é suficiente para determinar de forma única o estado inicial $x(0)$. Caso contrário, diz-se que a equação é não observável. É possível verificar se um sistema é controlável/Observável ou não, usando as seguintes matrizes.

$$C_M = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B],$$

$$O_M = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T$$

O sistema é controlável se e somente se, o posto de C_M for completo, e o sistema é observável se e somente se, o posto de O_M for completo. Neste trabalho, estamos particularmente interessados no índice de observabilidade, ν , que é o menor número inteiro tal que:

$$O_M = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]^T = n$$

Definição 3. (Fase Não-Mínima) Ocorre quando todos os zeros estão localizados no semi plano da esquerda do plano s

Definição 4. (Matriz Interactor) Considerar uma planta continua no tempo e Linearmente Invariante no Tempo (LTI) com M entradas e M saídas.

$$y(t) = G(s)[u](t) \quad (0.1)$$

Onde $y(t) \in \mathbb{R}_M$ é a saída da planta, $u(t) \in \mathbb{R}_M$ a entrada da planta, com $t \in [0, \infty)$. O conceito de matriz interactor é importante para o MRAC, uma vez que determina a estrutura do sistema ao infinito.

Para qualquer $M \times M$ matriz racional de transferência de postos completa $G(s)$ existe uma matriz polinomial triangular inferior única $\xi(s)$, definida como matriz interactor pela esquerda de $G(s)$, da forma:

$$\xi(s) = \begin{bmatrix} s^{l_1} & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ s^{l_1} h_{21} & s^{l_2} & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{l_1} h_{M1}(s) & s^{l_1} h_{M2}(s) & \cdot & s^{l_{M-1}} h_{MM-1}(s) & s^{l_M} \end{bmatrix},$$

onde $h_{ij}(s)$, $j = 1, \dots, M-1$, $i = 2, \dots, M$, são polinômios divisíveis por s e $l_i \geq 0$, $i = 1, \dots, M$, são números inteiros tais que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G(s) = K_p^0$$

é finito e não singular.

Definição 5. (Ganho de Alta Frequência)

Para qualquer $M \times M$ matriz racional de transferência de postos completa $G(s)$ existe uma matriz polinomial triangular inferior única $\xi(s)$, definida como matriz interactor modificada pela esquerda de $G(s)$, da forma:

$$\xi(s) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \\ h_{21}^m & d_2 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{M1}(s) & h_{M2}(s) & \cdot & h_{MM-1}(s) & d^M(s) \end{bmatrix},$$

onde $h_{ij}(s)$, $j = 1, \dots, M-1$, $i = 2, \dots, M$, são alguns polinômios e $d_i(s) = s^{l_i} + a_1^i s^{l_i-1} + \dots + a_{l_i}^i$, e $i = 1, \dots, M$ são quaisquer polinômios mono estáveis escolhidos de tal forma :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G(s) = K_p \quad (0.2)$$

é finito e não singular. Além disso, $h_{ij}^m(s)$ podem ser escolhidos como: $h_{ij}^m(s) =$ parte polinomial de $s^{l_j}(h_{ij}(s) + a_1^i s^{-1}h_{ij}(s) + \dots + a_{l_i}^i h_{ij}(s))$ para $j = 1, \dots, M-1$, $i = 2, \dots, M$. Para escolha de $h_{ij}^m(s)$, temos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G_0(s) = K_p^0$$

Para prova, ver [9][pp.385]. Assim, a Eq. 0.2 define o Ganho de Alta Frequência (HFG) do inglês High Frequency Gain da matriz função de transferência $G(s)$. No caso SISO, K_p é escalar e a matriz interactor é qualquer polinômio estável de grau $n - M$. A condição normalmente assumida para controle adaptativo é que existe um conhecimento prévio sobre o sinal de k_p . No caso multivariável, são necessários diferentes conhecimentos e condições em K_p a diferentes técnicas de controlo adaptativo. Nesta dissertação, chamamos especial atenção para atenuar os requisitos de simetria no HFG e procurar utilizar um condição referida como a condição PDJ.

Definição 6. (Definição de Filippov) A definição de Filippov's para solução de equações diferenciais descontínuas é assumida que, para uma equação diferencial:

$$\dot{x} = f(x, t),$$

Onde $\dot{x}, x \in \mathbb{R}^n$, na qual f é localmente e estritamente limitado (função medida de Lebesgue). Segundo Filippov, a solução é uma função localmente e absolutamente contínua $x(t)$, em que toda parte satisfaz $\dot{x} \in K_f[f](t, x)$, $K_F(t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu_L N = 0} \text{co}f(B(x, \delta) - N, t)$. Onde μ_L é a medida de Lebesgue, $O_\delta(x)$ é a δ -vizinhança de x e $\text{co}(\cdot)$ denota o contorno convexo [34].

Definição 7. (Estritamente Positiva Real) O conceito convencional estritamente positiva real

(SPR - do inglês strictly positive real) indica que para a matriz de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é SPR se e somente se existir uma matriz $P = P^T$, tal que: $PA + A^T P < 0$, $B^T P = C$, $P > 0$.

Definição 8. (W-Estritamente Positiva Real) A definição de W - Estritamente Positiva Real (WSPR - do inglês W-Strictly Positive Real) é que um sistema linear e invariante no tempo coma a realização A_K, B, C , onde $A_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times M}$, $C \in \mathbb{R}^{M \times n}$, é (WSP - do inglês W-Strictly-Passive) e a sua função de transferência $C(sI - A_K)^{-1}B$ é chamada de W - Estritamente Positiva Real (WSPR - do inglês W-Strictly Positive Real), onde existem matrizes simétricas positivas definidas $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que: $A_K^T P + P A_K = -Q$, $P B = C^T$, [35, 36].

Definição 9. (Forma de Jordan Diagonal Positiva (PDJ)) Diz-se que uma matriz é PDJ se os seus valores próprios são reais e positivos e a sua forma jordaniana é diagonal. Uma matriz que satisfaça a condição PDJ pode ser symmetric positive definite (SPD) de forma a que o produto seja também SPD. Este resultado é de particular importância para este trabalho e é declarada no seguinte lema.

Lema 1. (Barkana et al. [35], [36]) Seja $K_p \in \mathbb{R}^{M \times M}$, e que exista $W = W^T > 0$, $W \in \mathbb{R}^{M \times M}$ de modo que :

$$W K_p = K_p^T > 0$$

Se e somente se K_p é PDJ.

Prova: ver [36].

■

Além disso, pode ser demonstrado que se os principais menores de K_p não forem zero, existe uma matriz $\bar{L}$ tal que $\bar{L} K_p$ é PDJ. Considere-se a fatoração LDU [37] de K_p

$$K_p = L_p D_p U_p$$

onde L_p é unidade inferior triangular, D_p é diagonal e U_p é unidade superior triangular. É possível escolher uma matriz diagonal D_0 com valores próprios reais positivos e distantes de tal forma que exista uma matriz triangular inferior

$$\bar{L} = D_0 (L_p D_p)^{-1} \quad (0.3)$$

Isso implica que:

$$\bar{K}_p = \bar{L}K_p = D_0(L_p D_p)^{-1}(L_p D_p)U_p = D_0 U_p \quad (0.4)$$

é trinagular superior e PDJ. De acordo com Lema 1, existe W tal que $W\bar{L}K_p$ é SPD.

Definição 10. (Filtro de Kalman Estendido) Seja o sistema não linear do tipo:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k)$$

$$y_{k+1} = h(x_{k+1}) + v_{k+1}$$

Onde $f()$ é uma função não linear do sistemado processo e $h()$ uma função do sistema de medição. O termo x_{k+1} é o vetor de estado e y_{k+1} é o vetor de saída, u_k representa o controle e w_k o ruído do processo e v_{k+1} está associado ao ruído de medição.

$$F = Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, H = Dh(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$W = Dh(w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w_1} & \frac{\partial f_1}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial w_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial w_1} & \frac{\partial f_2}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial w_1} & \frac{\partial f_n}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial w_n} \end{bmatrix}$$

No algoritmo de filtro de kalman estendido, as matrizes Jacobianas F e H não são constantes. As equações de predição são das por:

$$\hat{X}_k^- = f(\hat{X}_{k-1}^+, u_{k-1})$$

$$P_k^- = F P_{k-1}^+ F^T + W Q_{k-1} W^T$$

As equações de correção são dadas por:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H^T [H P_k^- H^T + R_k]^{-1} \\ \hat{X}_k^+ &= \hat{X}_k^- + K_k [Y_k - h(\hat{X}_k^-)] \\ P_k^+ &= P_k^- - K_k H P_k^- \end{aligned}$$

Definição 11. (ISS - input-to-state stability) *Seja um sistema , $\dot{x} = f(x, u)$, $x(0) = x_0$, o sistema é chamado de ISS se existir $\beta \in \mathcal{KL}$ e $\gamma \in \mathcal{K}$ de modo que para todo valor inicial de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e qualquer entrada $u \in \mathcal{U}$ a solução correspondente $x = \phi(x_0, u)$ existe em $[0, \infty)$ e satisfaz: $\|\phi(t, x_0, u)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_\infty)$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 12. (Grupo Ortogonal Especial) *O grupo ortogonal especial é o subgrupo de $O(n)$ com matrizes de determinante 1, onde $SO(n) = \{R_n \in GL_n(\mathbb{R}); R_n^{-1} = R_n^T \text{ e } \det(R_n) = 1\}$.*

OBJETIVOS

O objetivo dessa dissertação é apresentar uma extensão para o MIMO BMRAC e UVC, utilizando diferenciadores HOSM globais com ganho dinâmicos, de modo que se atinja a estabilidade assintótica global em sistema de malha fechada e convergência exponencial global do erro de rastreamento para um conjunto residual. Assim, aplica-se o controlador MIMO BMRAC em plataformas estabilizadas de dois eixos e UVC em plataformas de três eixos. Com intuito de demonstrar a validade dos controladores, são realizadas simulações com dados reais de um veículo passando por um circuito com obstáculos, com intuito de demonstrar a estratégia de MIMO BMRAC. Para estratégia de MIMO UVC, são utilizados dados reais de um VANT em voo autônomo, a fim de validar a estratégia.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

- No capítulo 1, apresentação da estratégia BMRAC multivariável com HOSM com ganhos dinâmicos.
- No capítulo 2, aplicação do BMRAC Multivariável a ISP com dois graus de liberdade, ilustrando através de simulações.
- No capítulo 3, é apresentado o controle vetorial unitário UVC com diferenciadores HOSM com ganhos dinâmicos.

- No capítulo 4, são apresentadas simulações aplicando o controlador UVC a ISP de três graus de liberdade e verificando sua aplicabilidade.
- A conclusão e sugestões de trabalhos futuros são apresentadas na ultima parte da dissertação.

1 BMRAC MULTIVARIÁVEL

1.1 Descrição do Problema

Considere uma planta MIMO Linear e Invariante no Tempo (LTI - do inglês *linear time-invariant*)

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \quad y = H_p x_p, \quad (1.1)$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ a saída e A_p , B_p e H_p são as matrizes constantes e incertas. O modelo de entrada-saída da planta é dado por:

$$y = G(s)u, \quad G(s) = H_p(sI - A_p)^{-1}B_p.$$

1.2 Hipóteses

Consideramos as seguintes hipóteses:

- (H1) $G(s) = H_p(sI - A_p)^{-1}B_p$ é de fase-mínima, e tem posto completo.
- (H2) O par (A_p, B_p) é controlável (se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e qualquer estado final x_1 existe uma entrada que transfere x_0 para x_1 em um tempo finito, (A_p, H_p) observável (se para qualquer estado inicial desconhecido $x(0) = x_0$, existe um tempo finito $t_1 > 0$ de forma que o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ sobre $[0, t_1]$ é suficiente para determinar de forma única o estado inicial $x(0)$).
- (H3) O índice de observabilidade ou o limite superior é conhecido, ν de $G(s)$ (que é o menor número inteiro tal que : $O_M = [C^T A^T C^T (A^T)^2 C^T \dots (A^T)^{\nu-1} C^T]^T = n$ (veja [38])).
- (H4) Existe uma matriz polinomial diagonal conhecida $\xi_m(s)$, definida como a matriz interactor pela esquerda modificada (MLI) de $G(s)$ de forma que $\xi_m(s) = \text{diag} \{d_1(s), d_2(s), \dots, d_m(s)\}$ onde $d_i(s)$ são polinômios mônicos estáveis de grau $\rho_i > 0$.
- (H5) A matriz de ganho de alta frequência de $G(s)$, definida como $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s)G(s)$ é finita e não-singular, com autovalores positivos e forma de Jordan diagonal positiva (condição PDJ - do inglês *positive diagonal Jordan form*).

(H6) As matrizes A_p , B_p e H_p também são incertas e pertencem a algum conjunto compacto de modo que os limites de incerteza necessários estão disponíveis para projeto.

Embora as hipóteses **(H1)** a **(H3)** estejam na literatura de controle adaptativo multi-variável, a partir da hipótese **(H4)** podemos concluir que o grau relativo do vetor é arbitrário e conhecido $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m]^T$, com benefício de admitir grau relativo não uniforme $\rho_1 \neq \rho_2, \dots, \rho_{m-1} \neq \rho_m$. A generalização do sistema MIMO de BMRAC contido em [23] é capaz de evitar requisitos de simetria do HFG, aplicando uma condição de passividade. O conceito de WSPR é usado para estabelecer uma técnica de controle que requer que o HFG tenha autovalores reais positivo, que é a condição PDJ na hipótese **(H5)**, de acordo com [36]. Esta é uma condição significativamente menos restritiva do que a simetria exigida no MRAC convencional, uma vez que a condição PDJ é uma propriedade genérica, enquanto a condição de simetria é frágil e facilmente desfeita mesmo por pequenos ruídos numéricos. Para plantas nas quais o HFG não satisfaz a condição PDJ, uma matriz passivadora $\bar{L}$ pode ser escolhida de modo que $\bar{L}K_p$ seja PDJ [23]. Na hipótese **(H6)**, o sistema pode conter incertezas paramétricas tais que, por exemplo, $A_p = A_p^{\text{nom}} + \Delta_A$, onde $|\Delta_A| \leq k_A$, com $k_A > 0$ sendo um valor nominal conhecido para a matriz de incerteza A_p .

1.3 Modelo de Referência

Consideramos o sinal de referência $y_M \in \mathbb{R}^m$ ser gerado pelo seguinte modelo de referência.

$$y_M = W_m(s) r, \quad (1.2)$$

$$W_m(s) = \text{diag} \left\{ (s+p_1)^{-1}, \dots, (s+p_m)^{-1} \right\} L^{-1}(s),$$

Onde $p_i > 0$ ($i = 1, \dots, m$), $r(t) \in \mathbb{R}^m$ é um sinal de referência contínuo, arbitrário e uniformemente limitado por partes e

$$L(s) = \text{diag} \{ L_1(s), L_2(s), \dots, L_m(s) \}, \quad (1.3)$$

com $L_i(s) = s^{(\rho_i-1)} + l_{\rho_i-2}^{[i]} s^{(\rho_i-2)} + \dots + l_1^{[i]} s + l_0^{[i]}$, ($i = 1, \dots, m$) sendo polinômio Hurwitz e o índice $^{[i]}$ indicando que um parâmetro pertence a $L_i(s)$. A função de transferência $W_m(s)$ tem o mesmo vetor de grau relativo do que $G(s)$ e seu HFG é a matriz identidade.

1.4 Objetivo de Controle e Parametrização

O objetivo é encontrar uma lei de controle $u(t)$ de tal maneira que o erro de saída:

$$e(t) = y(t) - y_M(t), \quad (1.4)$$

tende a zero assintoticamente para condições iniciais arbitrárias. Uma vez que a planta é conhecida, uma lei de controle que atinge o casamento entre a matriz da função de transferência de malha fechada e $W_m(s)$ é dado por $u^* = \Theta^{*T} \omega$, onde o parâmetro ideal da matriz é escrito como $\Theta^* = [\Theta_u^{*T} \ \Theta_y^{*T} \ \Theta_0^{*T} \ K_\Theta^{*T}]^T$, com: $\Theta_u^*, \Theta_y^* \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}$, $\Theta_0^*, K_\Theta^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$, e o vetor regressor $\omega = [\omega_u^T \ \omega_y^T \ y^T \ r^T]^T$, $\omega_u, \omega_y \in \mathbb{R}^{m(\nu-1)}$ é obtido a partir de filtros de variáveis de estado de entrada-saída fornecido por:

$$\omega_u = A(s)\Lambda^{-1}(s)u, \quad \omega_y = A(s)\Lambda^{-1}(s)y, \quad (1.5)$$

Onde $A(s) = [Is^{\nu-2} \ Is^{\nu-3} \ \dots \ Is \ I]^T$, $\Lambda(s) = \lambda(s)I$ com $\lambda(s)$ sendo um polinômio mônico estável de grau $\nu - 1$. As condições de correspondência exigem que as condições $K_\Theta^{*T} = K_p^{-1}$. Entretanto, uma vez que a planta é desconhecida, a matriz de parâmetros desejada Θ^* também é desconhecida. Neste caso, a seguinte lei de controle pode ser usada.

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t) \quad (1.6)$$

onde Θ é uma estimativa de Θ^* obtida de uma lei de adaptação. Uma equação de erro pode ser desenvolvida estendendo a abordagem usual do SISO MRAC para o caso MIMO [8, 9]. Definindo o vetor de estado $X = [x_p^T \ \omega_u^T \ \omega_y^T]^T$ como a seguinte dinâmica $\dot{X} = A_0X + B_0u$. Então, adicionando e subtraindo B_0u^* e observando que existem matrizes Ω_1 e Ω_2 tais que

$$\omega = \Omega_1X + \Omega_2r \quad (1.7)$$

e assim tem-se

$$\dot{X} = A_cX + B_cK_p[u - u^*] + B_cr, \quad y = H_0X \quad (1.8)$$

com $A_c = A_0 + B_0 \Theta^{*T} \Omega_1$, $B_c = B_0 K_{\Theta}^{*T} = B_0 K_p^{-1}$. O modelo de referência pode ser descrito por $\dot{X}_m = A_c X_m + B_c r$. Assim, o estado de erro

$$X_e = X - X_m \quad (1.9)$$

é dado por:

$$\dot{X}_e = A_c X_e + B_c K_p [u - u^*], \quad e = H_0 X_e. \quad (1.10)$$

Note que (A_c, B_c, H_0) é uma realização não-mínima do modelo de referência estável $W_m(s)$, com A_c sendo uma matriz Hurwitz. Logo, a equação de erro pode ser reescrita na forma de entrada-saída como:

$$e = W_m(s) K_p [u - u^*]. \quad (1.11)$$

1.5 BMRAC Multivariável para Sistemas de Grau Relativo Unitário

O BMRAC foi originalmente proposto para sistemas SISO em [22] onde são demonstradas boas propriedades de adaptação para alto ganho. Recentemente, uma versão MIMO foi apresentada [23] para plantas com grau relativo um ($\rho_1 = \rho_2, \dots, \rho_{m-1} = \rho_m = 1$). A lei de adaptação em MIMO BMRAC proposta em [23] usa a seguinte parametrização:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \omega(t) \end{bmatrix}, \quad \vartheta(t) = \text{vec}(\Theta) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \vdots \\ \theta_m(t) \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

com dimensões $\Omega \in \mathbb{R}^{Nm \times m}$, $\vartheta \in \mathbb{R}^{Nm}$, sendo N a dimensão de ω e θ_i é a i -ésima coluna do parâmetro Θ . A lei de adaptação BMRAC MIMO é dada por

$$\dot{\vartheta}(t) = -\vartheta(t)\sigma - \gamma \Omega(t)e(t) \quad (1.13)$$

com σ dado por uma projeção:

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\vartheta| < M_{\vartheta} \quad \text{ou} \quad \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } |\vartheta| \geq M_{\vartheta} \quad \text{e} \quad \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

com

$$\sigma_{eq} = -\frac{\gamma \vartheta^T \Omega e}{|\vartheta|^2}, \quad (1.15)$$

e $M_\vartheta > |\vartheta^*|$ é uma constante. Assim, a lei de controle pode ser reescrita como:

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t) = \Omega^T(t)\vartheta(t). \quad (1.16)$$

Para plantas com $\rho > 1$, o obstáculo de grau relativo pode ser contornado usando o operador $L(s)$ definido em (3.4) de modo que $e(t)$ em (1.13)–(1.15) é substituído pela variável auxiliar $S(t)$. O operador $L(s)$ é tal que $L(s)G(s)$ e $L(s)W_m(s)$ tem vetor relativo uniforme de grau um. A variável auxiliar ideal de erro $S = L(s)e \in \mathbb{R}^m$ é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} e_1^{(\rho_1-1)} + \dots + l_1^{[1]} \dot{e}_1 + l_0^{[1]} e_1 \\ \vdots \\ e_m^{(\rho_m-1)} + \dots + l_1^{[m]} \dot{e}_m + l_0^{[m]} e_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\rho_1-1} l_j^{[1]} h_1^T A_c^{(j)} X_e \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\rho_m-1} l_j^{[m]} h_m^T A_c^{(j)} X_e \end{bmatrix} = \bar{H} X_e, \quad (1.17)$$

Onde $h_i \in \mathbb{R}^{n+2m(\nu-1)}$ é o i -ésima linha de H_0 e a segunda igualdade é derivada da hipótese **(H4)** e (1.10). A partir de (1.2) e (3.4), tem-se

$$\begin{aligned} S &= L(s)W_m(s)K_p \left[u - \Theta^{*T} \omega \right] \\ &= \text{diag} \{ (s + p_1)^{-1}, \dots, (s + p_m)^{-1} \} K_p \left[u - \Theta^{*T} \omega \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nota-se que $\{A_c, B_c, \bar{H}\}$ com A_c, B_c em (1.10) e $\bar{H}$ em (3.10) é uma realização não mínima de $L(s)W_m(s)$ em (1.18). Como relatado anteriormente, esta análise é adequada para plantas com grau relativo um e o uso do operador $L(s)$ para contornar o obstáculo de grau relativo. Uma vez que S não pode ser obtido diretamente e as derivadas dos erros de rastreamento $e_i(t)$ não são medidas. Com isso, a utilização de um diferenciador HOSM se faz necessária para obtê-las. Assim, emprega-se um diferenciador HOSM global com ganhos dinâmicos de forma que a estimativa seja mais simples do que a proposta baseada em chaveamento em [39] e [40], enquanto a estimativa global (para todas as condições iniciais) se mantém preservada.

1.6 Observador da Norma do Estado

O Lema apresentado abaixo é aplicado no cálculo da função de modulação. Fornece um limite superior para a norma do estado do não linear sistema 1.19. Neste Lema, o sinal de entrada U pode ser um sinal comutado gerado por uma lei de controle de modo deslizante e o sinal $U_{a\mu}$ é o controle médio gerado através do filtro passa-baixa 1.20

Lema 2. [25, Lema 3]

Considere o sistema:

$$\dot{X} = Ax + B[U + d] + B_\phi \phi(x, t), \quad (1.19)$$

$$\tau \dot{U}_{a\nu} = -U_{a\nu} + U \quad (1.20)$$

onde $U, d \in \mathbb{R}^m$ são sinais de entrada, d é localmente integrável, e $\tau > 0$ é uma constante arbitrária e $x \in \mathbb{R}^n, U_{a\nu} \in \mathbb{R}^m$. A função $\phi : \mathbb{R}^n \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^l$ é contínuo por partes em t e localmente Lipschitz em x e satisfaz $\|\phi(x, t)\| \leq K_x \|x\| + \varphi(t)$, com $k_x \leq 0$ sendo escalar e $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ e contínuo por partes. É assumido que para toda condição inicial arbitrária $[x^T(0), U_{a\mu}^T(0)]^T$ e λ_i os autovalores de A e $\lambda_0 := -\max_i [\text{Re}(\lambda_i)]$ definido como margem de estabilidade de A . Seja $c_\phi > 0$ e $\gamma < \lambda_0$ tal que $\|w_\phi(t)\| \leq c_\phi \exp(-\gamma t), \forall t \geq 0$, onde $w_\phi(t)$ é a resposta ao impulso da função de transferência $(sI - A)^{-1}B_\phi$.

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \leq & c_2 \tau \|U_{a\mu}(t)\| + \exp(-\gamma_x t) * [c_3 \phi(t) + (c_4 + \tau c_5) \|U_{a\mu}(t)\| + \\ & c_6 \|d(t)\|] + \exp(-\gamma_x t) [c_0 \|x(0)\| + c_1 \tau \|U_{a\mu}(0)\|] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Prova: [25, Apêndices V]

De 1.20 tem-se a expressão $U = \tau \dot{U}_{a\nu} + U_{a\nu}$ que pode ser re-escrita como:

$$\dot{x} - B\tau \dot{U}_{a\nu} = Ax + B[U_{a\nu} + d] + B_\phi \phi(x, t) \quad (1.22)$$

Definindo o vetor de estado $\bar{x} := x - B_{a\nu}$ e rescrevendo como :

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + (+I)BU_{a\nu} + Bd + B_\phi \phi(\bar{x} + B\tau U_{a\nu}, t) \quad (1.23)$$

Então, definindo o sinal escalar

$$r(t) = \exp(-\gamma t) * [c_\phi k_x \|\bar{x}\|] + c_\phi \varphi(t) + c_{uav} \|U_{av}\| + c_u \|d\| + c_0 \exp(-\gamma t) \|\bar{x}(0)\| \quad (1.24)$$

Com limite superior:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \exp(-\gamma t) * [c_\phi] \|\phi(\bar{x} + B\tau U_{av}, t)\| + (c_u + \tau c_\tau) \|U_{av}\| + \\ &c_u \|d\| + c_0 \exp(-\gamma t) \|\bar{x}(0)\| \leq r(t), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.25)$$

com (c_u, γ) e (c_τ, γ) sendo os FOAFs para a matriz função de transferência $(sI - A)^{-1}B$ e $(sI - A)^{-1}AB$, respectivamente, e

$$c_{uav} \geq c_u + \tau(c_\tau c_\phi K_x \|B\|) \quad (1.26)$$

O sinal $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a solução da equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\gamma r + [c_\phi K_x \|\bar{x}\| + c_\phi \varphi(t) + c_{uav} \|U_{av}\| + c_u \|d\|, \\ r(0) &= c_0 \|\bar{x}(0)\| \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ao substituir $\|\bar{x}\|$ para r em 1.27, obtemos a equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= (c_\phi k_x - \gamma) \bar{r} + [c_\phi \varphi(t) + c_{uav} \|U_{av}\| + c_u \|d\|, \\ \bar{r}(0) &= r(0) = c_0 \|\bar{x}(0)\|, \end{aligned} \quad (1.28)$$

que satisfaz $\bar{r}(t) \geq r(t) \geq \|\bar{x}(t)\|$, $\forall t \geq 0$. Conclui-se que se $\gamma_x = \gamma - c_\phi k_x > 0$, então 1.28 e, consequentemente, 1.19 é estável. Então de 1.28 obtem-se 1.21, dede que $\|x\| \leq \|\bar{x}\| + \tau \|B\| \|U_{av}\|$.

■

Considerando a hipótese **(H1)** e **(H5)** e aplicando Lema 2 em (1.8). É possível encontrar $k_x^* > 0$ tal que, para $k_x \in [0, k_x^*]$, uma norma destinada a X e x pode ser obtida através de FOAF

(do inglês *first order approximation filters*) estáveis (veja detalhes em [25]). Assim, tem-se

$$|x(t)| \leq |X(t)| \leq |\hat{x}(t)| + \hat{\pi}(t), \quad (1.29)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\lambda_x \hat{x}(t) + c_x |\omega(t)|, \quad (1.30)$$

$$\hat{x}(t) := \frac{c_x}{s + \lambda_x} |\omega(t)|, \quad (1.31)$$

com $c_x, \lambda_x > 0$ sendo constantes apropriadas que podem ser calculadas pelos métodos de otimização descritos em [41]. Em particular, o parâmetro $\lambda_x > 0$ é a margem de estabilidade¹ de A_c contido em (1.8). Como em [25], o termo exponencialmente decrescente $\hat{\pi}$ representa as condições iniciais do sistema.

Observação. De acordo com Eq. (1.29), podemos reescrever o limite superior $|\hat{x}(t)| \geq |x(t)| - \hat{\pi}(t)$. Considere $\hat{x}$ ser o estado da realização de espaço de estado mínimo para o FOAF $1/(s + \lambda_x)$ em Eq.(3.10): $\dot{\hat{x}} = -\lambda_x \hat{x} + c_x |\omega|$. Para fins práticos, é possível inicializar o estado do observador de norma com um valor positivo $\hat{x}(0) > 0$ para reduzir a fase transitória devido ao termo $\hat{\pi}(t)$ na Eq. (1.16), de modo que o limite superior $|x(t)| \leq \hat{x}(t)$ pode ser assegurado o mais rápido possível, isto é, $\forall t \geq T_0$ e algum tempo finito $T_0 > 0$ arbitrariamente pequeno. Seria de particular interesse fornecer propriedades de convergência mais rápidas para o diferenciador introduzido na Seção 1.7, embora não seja necessário provar a estabilidade global para o esquema geral de malha fechada. Mesmo que a estimativa da norma de estado possa ser obtida globalmente num tempo fixo, é garantida após algum tempo finito, que é desconhecido se não assumir, de antemão, nenhum conhecimento sobre as condições iniciais da planta (resultados globais).

1.7 Diferenciador Global HOSM Multivariável com Ganhos Dinâmicos

Um diferenciador global MIMO HOSM com coeficientes a serem adaptados utilizando a estimativa para a norma do estado x prevista em Eq. (1.29) é proposto para atingir a estimativa exata para domínios arbitrariamente grandes, isto é, diferenciação exata de sinais com quaisquer condições iniciais e derivadas superiores ilimitadas. A ideia aqui é usar um diferenciador HOSM com ganhos dinâmicos $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ de ordem $p_i = \rho_i - 1$ para cada saída

¹Sejam $\{\lambda_i\}$ os valores próprios de A_c , a margem de estabilidade de A_c é definido por $\lambda_x := \min_i [-\text{Re}(\lambda_i)]$.

$e_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}_0^{[i]} &= v_0^{[i]} = -\lambda_0^{[i]} \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i] \frac{1}{p_i+1}}(\hat{x}, t) |\zeta_0^{[i]} - e_i(t)|^{\frac{p_i}{p_i+1}} \text{sgn}(\zeta_0^{[i]} - e_i(t)) + \zeta_1^{[i]} \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_j^{[i]} &= v_j^{[i]} = -\lambda_j^{[i]} \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i] \frac{1}{p_i-j+1}}(\hat{x}, t) |\zeta_j^{[i]} - v_{j-1}^{[i]}|^{\frac{p_i-j}{p_i-j+1}} \text{sgn}(\zeta_j^{[i]} - v_{j-1}^{[i]}) + \zeta_{j+1}^{[i]}, \\
 &\vdots \\
 \dot{\zeta}_{p_i}^{[i]} &= -\lambda_{p_i}^{[i]} \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \text{sgn}(\zeta_{p_i}^{[i]} - v_{p_i}^{[i]}),
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

onde o índice $^{[i]}$ é usado para indicar que um determinado parâmetro ou variável pertence a um diferenciador relacionado com e_i .

Lema 3. *Considera-se os ganhos dinâmicos do diferenciador MIMO HOSM (1.32) definidos como*

$$\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) := k_1^{[i]} |\hat{x}| + k_2^{[i]} + k_3^{[i]} |\omega|, \tag{1.33}$$

onde $k_1^{[i]} > 0$, $k_2^{[i]} > 0$ e $k_3^{[i]} > 0$ são constantes apropriadas, portanto, o seguinte limite superior pode ser obtido usando apenas sinais mensuráveis

$$|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t), \quad \forall t \geq T, \tag{1.34}$$

por algum tempo finito $T > 0$.

Prova: Pode-se mostrar que o sistema da Eq. (1.1) pode ser transformado na forma normal [42, p. 224]:

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta), \tag{1.35}$$

$$\dot{\xi}_1^i = \xi_2^i,$$

$$\vdots$$

$$\dot{\xi}_{\rho_i-1}^i = \xi_{\rho_i}^i, \tag{1.36}$$

$$\dot{\xi}_{\rho_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta),$$

$$y_i = \xi_1^i, \tag{1.37}$$

para todos $1 \leq i \leq m$, onde $z^T = [\eta^T \ \xi^T] \in \mathbb{R}^n$ com $\eta \in \mathbb{R}^{(n-\sum_{i=1}^m \rho_i)}$ sendo referido ao estado da dinâmica inversa ou zero e

$$\begin{aligned} \xi &= [\xi_1^1, \dots, \xi_{\rho_1-1}^1, \dots, \xi_1^m, \dots, \xi_{\rho_m-1}^m]^T = \\ &= [y_1, \dots, y_1^{(\rho_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\rho_m-1)}]^T \end{aligned}$$

o estado de dinâmica externa.

Da hipótese **(H1)**, podemos concluir que η dinâmica é estável, uma vez que a planta tem uma fase mínima. Além disso, os termos $a_{ij}(\xi, \eta)$ e $b_i(\xi, \eta)$ são calculados por meio da Derivada de Lie de modo que,

$$a_{ij}(\xi, \eta) = a_{ij}(x) = \sum_{j=1}^m H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j, \quad (1.38)$$

$$b_i(\xi, \eta) = b_i(x) = H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x, \quad (1.39)$$

onde $H_p^{[i]}$ representa a i -ésima linha da matriz H_p e $B_p^{[i,j]}$ o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de B_p . Portanto, para todos $1 \leq i$ e $j \leq m$, o ρ_i saída derivada y_i satisfaz

$$y_i^{(\rho_i)} = H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x + \sum_{j=1}^m H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j. \quad (1.40)$$

O valor absoluto de $y_i^{(\rho_i)}$ satisfaz

$$\begin{aligned} |y_i^{(\rho_i)}| &= |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i} x + \sum_{j=1}^m H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]} u_j| \\ &\leq |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i}| |x| + \sum_{j=1}^m |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]}| |u_j| \\ &\leq |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i}| |x| + \max_{k=1, \dots, m} \{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,k]}| \} \sum_{j=1}^m |u_j| \\ &\leq |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i}| |x| + \max_{k=1, \dots, m} \{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,k]}| \} m |u|. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ao utilizar hipóteses **(H5)** e Eq. (1.41), um limite superior para Eq. (1.40) é

$$|y_i^{(\rho_i)}| \leq \kappa_1^{[i]} |x| + \kappa_2^{[i]} |u|, \quad (1.42)$$

onde

$$\kappa_1^{[i]} > |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i}| + m \max_{k=1, \dots, m} \{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]}| \} k_x, \quad (1.43)$$

$$\kappa_2^{[i]} > m \max_{k=1, \dots, m} \{ |H_p^{[i]} A_p^{\rho_i-1} B_p^{[i,j]}| \} , \quad (1.44)$$

são constantes conhecidas. A partir das Eq. (1.42) e (1.4), podemos escrever

$$|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq L_{\rho_i}^{[i]}(x, t) = \kappa_1^{[i]}|x| + \kappa_2^{[i]}|u| + |y_{M_i}^{(\rho_i)}(t)|. \quad (1.45)$$

Agora, suponha que a entrada de controle satisfaça

$$|u| \leq M_\vartheta |\omega(t)| \leq \kappa_4 \|X_t\| + \kappa_5. \quad (1.46)$$

para constantes $M_\vartheta, \kappa_4, \kappa_5 > 0$. Então, aplicando (1.29), podemos obter o seguinte limite superior com a variável do observador de norma $\hat{x}(t)$ em (1.29)–(3.15):

$$|e_i^{(\rho_i)}(t)| \leq \kappa_1^{[i]}(|\hat{x}| + \delta_0) + \kappa_2^{[i]} \bar{\Theta} |\omega| + |y_{M_i}^{(\rho_i)}(t)|, \quad (1.47)$$

módulo de decaimento exponencial devido às condições iniciais, que levam em conta o caráter transitório do FOAF. Definindo constantes positivas conhecidas $k_1^{[i]}, k_2^{[i]}, k_3^{[i]}$ e $\kappa_m^{[i]}$ satisfatória $\kappa_m^{[i]} \geq |y_{M_i}^{(\rho_i)}(t)|$, $k_1^{[i]} \geq \kappa_1^{[i]}$, $k_2^{[i]} \geq \kappa_1^{[i]} \delta_0 + \kappa_m^{[i]}$ e $k_3^{[i]} \geq \kappa_2^{[i]} \bar{\Theta}$, podemos definir os ganhos dinâmicos do diferenciador como na Eq. (1.33) de modo que a desigualdade da Eq. (1.34) é satisfeita. ■

A condição de regularidade contidas em [43] e Eq. (1.46) é invocada no próximo lema para provar a convergência do diferenciador MIMO HOSM global com ganhos dinâmicos.

Lema 4. *Considere o diferenciador HOSM da Eq. (1.32) com ganhos dinâmicos Eq. (1.33) e sinal de entrada u satisfatória Eq. (1.46). Então, se os parâmetros $\lambda_j^{[i]}$ são apropriadamente recursivamente escolhidos*

$$\zeta_0^{[i]}(t) = e_i(t), \quad \zeta_j^{[i]}(t) = e_i^{(j)}(t), \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p_i, \quad (1.48)$$

são estabelecidas globalmente em tempo finito.

Prova: Os ganhos dinâmicos do diferenciador multivariável devem satisfazer as mesmas condições para convergência finita dada em [44,45]: o limite superior global $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ deve

ser absolutamente contínuo com derivada logarítmica limitada.

Para $M_i > 0$, $|\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)/\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)| \leq M_i$. Isso implica que, após algum tempo finito, $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ pode crescer exponencialmente ao máximo, como resultado de $|\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)| \leq M_i |\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)|$. É garantido diretamente a partir da condição de regularidade em Eq. (1.46), uma vez que qualquer escape finito é impedido para todos os sinais e pode-se concluir que Eq. (1.33) cresce no máximo exponencialmente de modo que a derivada logarítmica $\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)/\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ do ganho variável $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ é sempre limitada. Então, a convergência de Eq. (1.48) é garantido usando os mesmos argumentos e etapas de demonstração estabelecidas em [44, 45]. ■

A vantagem teórica de Lema 4 é a sua validação global (válida para quaisquer condições iniciais), uma vez que não é necessário, a priori, que o sinal $e_i^{(\rho_i)}(t)$ seja uniformemente limitado, conforme assumido no diferenciador HOSM global com ganhos fixos De acordo com [45], o ganho variável pode apresentar um crescimento arbitrário, de tal modo que $\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \geq 0$ implicaria em taxas de convergência mais rápidas para o diferenciador. A principal contribuição é mostrar como construir o ganho do diferenciador usando apenas informações de entrada-saída para satisfazer as condições levantadas em [44, 45] para ganhos variáveis com o tempo. Assim, usando um diferenciador global MIMO HOSM Eq. (1.32), composto por m diferenciadores de ordem $\rho_j - 1$ para cada saída e_j , a seguinte estimativa para Eq. (3.10) pode ser obtida:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \zeta_{\rho_1-1}^{[1]} + \dots + l_1^{[1]} \zeta_1^{[1]} + l_0^{[1]} \zeta_0^{[1]} \\ \vdots \\ \zeta_{\rho_m-1}^{[m]} + \dots + l_1^{[m]} \zeta_1^{[m]} + l_0^{[m]} \zeta_0^{[m]} \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

1.8 BMRAC para Sistemas de Grau Relativo Arbitrário Usando o Diferenciador HOSM Multivariável Global

O MIMO BMRAC pode ser estendido para plantas de grau relativo arbitrário usando o diferenciador global MIMO HOSM com ganhos dinâmicos. Se o HFG não satisfizer a condição PDJ, um multiplicador $\bar{L}$ pode ser usado de forma que $\bar{L}K_p$ é PDJ. Para incluir este caso na análise, considere o sistema de erro modificado, seguindo as etapas de [23].

$$\dot{X}_e = A_K X_e + B_c K_p [u - u^*] \quad (1.50)$$

$$e_L = L e, \quad (e = H_0 X_e). \quad (1.51)$$

onde $A_K = A_c - B_c K_p K \bar{L} H_0$, K é um ganho de realimentação de saída estático e $\bar{L}$ é escolhido para que o sistema $\{A_K, B_c K_p, \bar{L} H_0\}$ satisfaça a condição WASPR em [36]. A lei de adaptação é escrita como

$$\dot{\vartheta}(t) = -\vartheta(t)\sigma - \gamma\Omega(t)\hat{S}_L(t) \quad (1.52)$$

onde

$$\hat{S}_L = \bar{L}\hat{S} \quad (1.53)$$

e $\hat{S}$ é a estimativa exata de S dado a Eq. (1.49). Por outro lado, se a hipótese **(H5)** for verificada, $\bar{L} = I^{m \times m}$ é simplesmente a matriz de identidade e Eq. (1.53) torna-se:

$$\hat{S}_L = \hat{S}. \quad (1.54)$$

O termo σ é gerado pelo operador de projeção

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } |\vartheta| < M_\vartheta \quad \text{ou} \quad \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } |\vartheta| \geq M_\vartheta \quad \text{e} \quad \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad (1.55)$$

com

$$\sigma_{eq} = -\frac{\gamma\vartheta^T\Omega\hat{S}_L}{|\vartheta|^2}, \quad (1.56)$$

e $M_\vartheta > |\vartheta^*|$ é uma constante. Assim, a lei de controle Eq. (1.6) pode ser reescrita como:

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t) = \Omega^T(t)\vartheta(t). \quad (1.57)$$

Como a estimativa exata para $\hat{S}$ é obtida em algum tempo finito T , a compensação de grau relativo é perfeitamente alcançada e o MIMO BRAC pode ser aplicado. O resultado principal é enunciado no seguinte teorema.

Teorema 13. *Considere a planta Eq. (1.1) e o modelo de referência Eq. (1.2), o sistema de erro Eq. (1.4) com a lei de adaptação binária dada por Eq. (1.52)–(1.56) e lei de controle Eq. (1.57). Considere que as hipóteses **(H1)** - **(H5)** sejam válidas e $\|\Theta(0)\| \leq M_\vartheta$ com uma constante $M_\vartheta > \|\Theta^*\|$ e $\bar{L}$ é um conhecido multiplicador passivador. Para $\lambda_j^{[i]}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, \rho_i - 1$, devidamente escolhido e $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ em Eq. (1.32) satisfazendo Eq. (1.33), a estimativa da variável S torna-se exata após algum tempo finito, ou seja, $\hat{S} \equiv S$. Então,*

o sistema de erro de malha fechada com dinâmica Eq. (1.10) é uniformemente e globalmente assintoticamente estável no sentido de que X_e e, portanto, o erro de rastreamento de saída e convergem assintoticamente para zero e todos os sinais de malha fechada permanecem uniformemente limitados. Além disso,

$$(i) \quad \|\Theta(t)\| \leq M_\vartheta, \quad \forall t \geq 0;$$

$$(ii) \quad \|X_e(t)\|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \|X_e(0)\|^2 + \mathcal{O}(\gamma^{-1}), \quad \forall t \geq 0, \text{ com algumas constantes positivas } c_1 \text{ e } \lambda_1;$$

(iii) O erro de rastreamento de saída e e o erro de rastreamento X_e tendem assintoticamente a zero.

Prova: No que segue, $k_i > 0$ são constantes que não dependem das condições iniciais. A demonstração está dividida em duas etapas. No primeiro, é necessário mostrar que nenhum escape em tempo finito nos sinais do sistema em malha fechada é possível. Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V_\vartheta = \frac{1}{2} \vartheta^T \vartheta. \quad (1.58)$$

A derivada temporal da Eq. (1.58) ao longo da Eq. (1.52) resulta em

$$\dot{V}_\vartheta = (\sigma_{eq} - \sigma) |\vartheta|^2 = 2(\sigma_{eq} - \sigma) V_\vartheta, \quad (1.59)$$

e $(\sigma_{eq} - \sigma) \leq 0$ para $|\vartheta| \geq M_\vartheta$, em virtude de Eq. (1.55) e Eq. (1.56). Assim, o conjunto $|\vartheta| \leq M_\vartheta$ é positivamente invariante e, portanto, $\tilde{\vartheta}^T \tilde{\vartheta}$ é uniformemente limitado por uma constante. Recordando que $\vartheta = \text{vec}(\Theta)$ é uniformemente limitado por uma constante, pode-se concluir que Θ também é uniformemente limitado por uma constante, de modo que, $|\Theta| \leq M_\vartheta$. Então, a lei de controle (1.57) satisfaz a desigualdade

$$|u| \leq M_\vartheta |\omega(t)| \leq k_7 \|X_t\| + k_8. \quad (1.60)$$

Esta propriedade é estabelecida escrevendo-se $|\omega| \leq k_9 \|X\| + k_{10}$ a partir de Eq. (1.7), com $k_9 \geq |\Omega_1|$ e $k_{10} \geq |\Omega_2 r|$, considerando isso $r(t)$ é um sinal de referência uniformemente limitado. Então, de Eq. (1.29) e a relação ISS (do inglês *input-to-state stability*) entrada para estado estável do sinal filtrado em Eq. (3.15) em relação a $|\omega|$, obtém-se o limite da norma Eq. (1.60). Assim, o diferenciador global com ganhos dinâmicos dados em Eq. (1.32) pode

de fato ser construído e seu estado substitui exatamente as derivadas de tempo do sinal $e(t)$ na variável $\hat{S} \equiv S$ (1.49), depois de algum tempo finito. A partir de Eq. (1.18), é fácil mostrar que $S(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ desde a $L(s)W_m(s)$ seja SPR, de acordo com [8, seção 6.4.1]. Lembrando que a dinâmica do erro Eq (1.10) é entrada para estado estável com relação a $S(t)$, então pode-se concluir que $X_e(t)$ e $e(t)$ tendem a zero ao menos assintoticamente. Usando as relações Eq. (1.7) e Eq. (1.9), tem-se $X = X_e + X_m$ e o vetor regressor

$$\omega = \Omega_1 X_e + \Omega_1 X_m + \Omega_2 r. \quad (1.61)$$

Temos $x_m := [y_{m_1}, \dots, y_{m_1}^{(\rho_1-1)}, \dots, y_{m_m}, \dots, y_{m_m}^{(\rho_m-1)}]^T$ e $x_e := \xi - x_m$, com ξ em Eq. (1.36). A partir de Eq. (1.10), pode ser mostrado que $e_i^{(j)} = H_0^{[i]} A^j X_e$, para $j = 1, \dots, \rho_i - 1$, por isso $|x_e| \leq k_0 |X_e|$. Portanto, uma vez que x_m é uniformemente limitado, então $\xi = x_e + x_m$ pode ser limitado por norma em $|X_e|$. Além disso, a partir da condição de fase mínima na hipótese **(H1)**, a dinâmica zero na Eq. (1.35) ISS em relação a ξ . Assim, pode-se concluir que $|x| \leq k_1 \|\xi_t\| + k_2$, e consequentemente, $|x| \leq k_3 \|(X_e)_t\| + k_4$. Desde a $\dot{X}_m = A_c X_m + B_c r$,

$$|X_m| \leq k_5 \|(X_e)_t\| + k_6. \quad (1.62)$$

Finalmente, da Eq. (1.7), Eq. (1.61) e Eq. (1.62), concluímos que ω na Eq. (1.10), e, consequentemente, o sinal de controle u são todos limitados de forma afim por X ou X_e , isto é,

$$|u|, |\omega| \leq k_a \|X_t\| + k_b, \quad (1.63)$$

$$|u|, |\omega| \leq k_c \|(X_e)_t\| + k_d. \quad (1.64)$$

Assim, os sinais do sistema serão regulares [43] e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente. Então, cada ganho dinâmico $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t)$ do diferenciador MIMO satisfaz as seguintes condições para convergência rápida e finita:

1. O limite superior global $\mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}$ é absolutamente contínuo com pelo menos derivada logarítmica limitada final ($|\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]} / \mathcal{L}_{\rho_i}^{[i]}| \leq M_i$, por alguma constante $M_i > 0$) [44].
2. Inicialmente, o ganho variável pode ter um crescimento arbitrário para que $\dot{\mathcal{L}}_{\rho_i}^{[i]}(\hat{x}, t) \geq 0$ implica em taxas de convergência mais rápidas para o diferenciador [45].

Este fato nos conduz à segunda etapa da prova. Existem dois instantes de tempo finito $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$ de tal modo que Eq. (1.29) e Eq. (1.34) estão satisfeitas, $\forall t > \max\{T_1, T_2\}$. Então, os erros do diferenciador são forçados a finalmente alcançar um conjunto compacto no qual as condições suficientes dadas em [44] e [45] podem ser invocados e concluir que a Eq. (1.48) está satisfeita. Consequentemente, a variável deslizante ideal é exatamente estimada, isto é, $\hat{S}_L = \hat{S} \equiv S$ e a compensação de grau relativo é perfeitamente alcançada. Depois disso, uma vez que o grau relativo é compensado, o processo de análise de estabilidade é finalizado usando o seguinte candidata a função de Lyapunov.

$$V = X_e^T P X_e + \text{tr} \left[\frac{1}{\gamma} Z \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} Z^T \right] \quad (1.65)$$

onde $Z \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não singular tal que $W = Z^T Z$ é positiva definida. Diferenciando Eq. (1.65) em relação ao tempo, temos

$$\dot{V} = -X_e^T Q X_e + 2\hat{S}_L^T Z^T Z \tilde{\Theta}^T \omega - \text{tr} \left[2\tilde{\sigma} Z \Theta^T \tilde{\Theta} Z^T \right] - \text{tr} \left[2Z \tilde{\Theta}^T \omega \hat{S}_L^T Z^T \right]. \quad (1.66)$$

Desde $\text{tr}(xy^T) = y^T x$, temos também que $2\hat{S}_L^T W \tilde{\Theta}^T \omega = \text{tr} \left[2Z \tilde{\Theta}^T \omega \hat{S}_L^T Z^T \right]$, portanto

$$\dot{V} = -X_e^T Q X_e - 2\tilde{\sigma} \text{tr} \left[\tilde{\Theta} W \Theta^T \right]. \quad (1.67)$$

Uma vez que Θ é uniformemente limitado, $V = X_e^T P X_e + \mathcal{O}(\gamma^{-1})$. É então possível obter $\dot{V} \leq -\lambda_1 [V - \mathcal{O}(\gamma^{-1})]$, onde $\lambda_1 = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$ e autovalores mínimo-máximo de $Q = Q^T > 0$ e $P = P^T > 0$ são denotados por $\lambda_{\min}(Q)$ e $\lambda_{\max}(P)$, respectivamente. Isso implica a propriedade (ii) usando um Lema de comparação. A partir de (1.55) e desde $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$ e $M_{\vartheta} \geq \|\Theta^*\|_F$ por hipótese, pode-se mostrar que o termo $-2\tilde{\sigma} \text{tr} \left[\tilde{\Theta} W \Theta^T \right]$ é não positivo. Assim, segue-se que $\dot{V} \leq -X_e^T Q X_e \leq 0$, a partir do qual pode ser mostrado usando o Lema de Barbalat que $X_e(t) \rightarrow 0$ e $\hat{S}(t) \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$. ■

2 APLICAÇÃO DO BMRAC A PLATAFORMAS ESTABILIZADAS INERCIALMENTE COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

2.1 Aplicação a Plataformas Estabilizadas Inercialmente

O gimbal de dois eixos é representado na Figura 4. O objeto a ser estabilizado é representado por um retângulo vermelho posicionado no gimbal interno e os ângulos de correção são denotados por α_1 (azimute) e α_2 (elevação). O sistema de coordenadas (do inglês *reference frame*) **b** da plataforma também denota onde os sensores estão posicionados. Os sistemas de coordenadas chave usados neste problema são representados na Figura 5. O sistema de coordenadas inercial é denotado por **L**; enquanto **b** representa o corpo, ou seja, o veículo onde a plataforma está colocada e onde os sensores estão posicionados; e **a** denota a posição do objeto onde a LOS está. A matriz C_{ij} é um membro do grupo ortogonal especial $SO(3)$, denota a orientação do referencial i em relação ao referencial j .

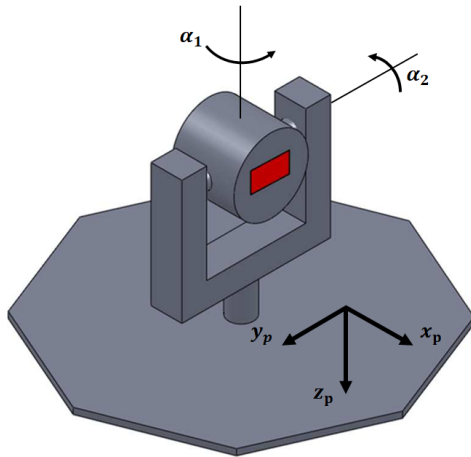


Figura 4 Gimbal de dois eixos azimute α_1 e elevação α_2 .

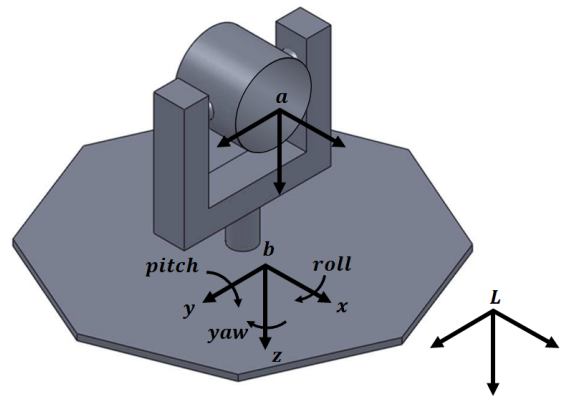


Figura 5 Sistemas de coordenadas adotados *roll*, *pitch* e *yaw*

Para fins de estabilização, deseja-se manter a LOS, denotada por $U_L^* \in \mathbb{R}^3$, invariante em uma direção escolhida em relação ao referencial inercial L . Para realizar isso, o gimbal deve compensar a atitude do veículo em relação ao sistema de coordenadas inerciais, C_{bL} , usando os ângulos de azimute e de elevação. Os ângulos de correção são calculados como em [46]. Considerando uma atitude do veículo dada pela representação do *roll*, *pitch* e *yaw*:

$$C_{bL} = R_z(\phi)R_y(\beta)R_x(\psi), \quad (2.1)$$

onde $C_{bL} \in SO(3)$; $R_i(k)$ é a rotação em torno do eixo i por um ângulo k [47]; ψ , β e ϕ são os ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* do veículo, respectivamente. A LOS, dado em termos da atitude do veículo, denotado por C_{aL} é

$$C_{aL} = C_{bL}(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1) R_y(\alpha_2), \quad (2.2)$$

onde a LOS é a matriz de orientação C_{aL} primeira coluna [48]. Com $e_x^T = [1, 0, 0]$, isto é

$$U_L = C_{aL} e_x = C_{bL}(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1) R_y(\alpha_2) e_x. \quad (2.3)$$

Considera-se que a LOS desejada U_L^* é escolhida pelo operador no momento em que a estabilização da plataforma é acionada em uma determinada atitude,

$$C_{aL}^* = C_{bL}(\psi^*, \beta^*, \phi^*) R_z(\alpha_1^*) R_y(\alpha_2^*), \quad (2.4)$$

onde ψ^* , β^* , ϕ^* , α_1^* e α_2^* são os ângulos quando a estabilização começa. Assim, a LOS desejada é dada por:

$$U_L^* = C_{aL}^* e_x. \quad (2.5)$$

Observe que, como o objetivo é manter apenas uma direção invariante, a LOS, um mecanismo com dois graus de liberdade é suficiente (as rotações ao redor da LOS não são compensadas). Então, a primeira etapa é determinar o azimuth α_1 e elevação α_2 ângulos para os quais U_L está alinhado com U_L^* , portanto, de Eq.(2.3) e Eq. (2.5), a seguinte equação deve ser satisfeita

$$C_{bL}(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1) R_y(\alpha_2) e_x = C_{aL}^* e_x. \quad (2.6)$$

A partir de Eq. (2.6), tem-se, onde U_b^* é o vetor que define a LOS na estrutura do veículo:

$$R_z(\alpha_1) R_y(\alpha_2) e_x = C_{bL}^T(\psi, \beta, \phi) U_L^* = U_b^*. \quad (2.7)$$

A expressão para U_b^* pode ser obtida por meio de matrizes de rotação elementares, considerando que

$$R_z(\alpha_1) R_y(\alpha_2) e_x = [\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \quad \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \quad -\sin \alpha_2]^T. \quad (2.8)$$

Por outro lado, sabendo que:

$$U_b^* = C_{bL}^T(\psi, \beta, \phi) U_L^* = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

o azimute e a elevação desejados α_{d1} e α_{d2} podem ser calculados como:

$$\alpha_{d1} = \arctan(x_2/x_1); \quad \alpha_{d2} = \arcsin(-x_3). \quad (2.9)$$

A matriz de orientação C_{bL} é calculada como em Eq. (2.1) usando as medições da IMU. Se não houver desequilíbrios mecânicos, os dois graus de liberdade podem ser controlados de forma independente e o problema se reduz a dois sistemas SISO $K_{12} = K_{21} = 0$ na Eq. (2.10). No entanto, desequilíbrios mecânicos levarão a um acoplamento cruzado entre os ângulos de elevação e azimute [13].

Assim, a planta considerada é modelada como em Eq. (2.10), onde as entradas são torques do motor correspondentes aos valores desejados de α_1 e α_2 , a saber α_{d1} e α_{d2} . As saídas são as posições angulares de azimute e elevação. A dinâmica da planta é considerada desconhecida para fins de controle e apenas valores nominais para K_{11} , K_{22} , a_1 e a_2 estão disponíveis.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{s(s+a_{11})} & \frac{K_{12}}{s(s+a_{12})} \\ \frac{K_{21}}{s(s+a_{21})} & \frac{K_{22}}{s(s+a_{22})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.2 Resultados da Simulação com Dados Experimentais de um Veículo

Para simulação numérica e propósitos de projeto de controle, assume-se que os valores nominais são $K_{11}^{nom} = K_{22}^{nom} = 1$, $a_1^{nom} = 3$, $a_2^{nom} = 4$. Para resolver um problema mais desafiador, um cenário onde o ganho de alta frequência K_p não é simétrico nem PDJ é considerado, de forma que as técnicas adaptativas convencionais não são aplicáveis. Os outros parâmetros são desconhecidos. Os parâmetros reais da planta são fixados da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.2}{s(s+1.3)} & \frac{-0.2}{s(s+2.6)} \\ \frac{0.1}{s(s+40)} & \frac{0.9}{s(s+20)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Para fornecer resultados de simulação em condições reais de operação, os dados de entrada são os dados adquiridos de um experimento com um carro instrumentado conduzido em um circuito com obstáculos no solo. Isso nos permite avaliar a aplicabilidade do controlador a uma situação

de operação real. O *roll*, *pitch* e *yaw* são mostrados na Figura 6. Os dois cenários podem ser distintos: na primeira parte do circuito, o veículo se move em linha reta com obstáculos, o que pode ser inferido pela guinada constante com variação rápida de *roll* e *pitch*; ele então passa a realizar quatro voltas para a esquerda, em uma pista desobstruída, como pode ser notado pelo ângulo de *yaw* decrescente em etapas de aproximadamente 90° com pequenos valores de rolagem e inclinação.

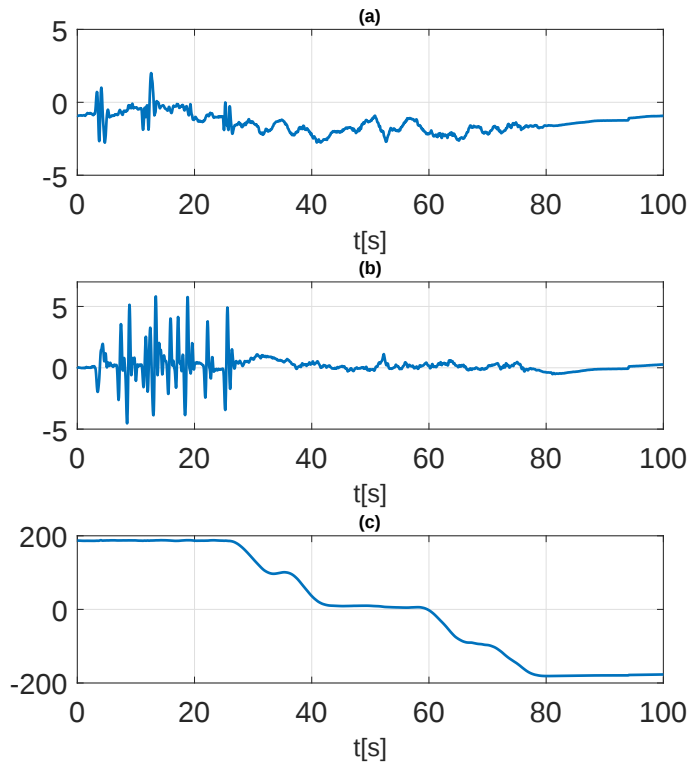


Figura 6 Dados experimentais do veículo: (a) *roll*; (b) *pitch* e (c) *yaw*, em graus

A LOS desejada é escolhida como a linha horizontal, $U_L^* = [1 \ 0 \ 0]$, sem perda de generalidade. Os sinais de referência no algoritmo de controle adaptativo são, portanto, o azimute e a elevação desejados calculados para estabilizar a plataforma usando a orientação medida. Esses sinais são representados na Figura 7 (onde a elevação é multiplicada por 10 para visualização). Os sinais de referência são usados para escolher uma dinâmica adequada para o modelo de referência, de forma que seja possível que os gimvais atuem rápido o suficiente para compensar os movimentos do veículo. O modelo de referência é escolhido de acordo com Eq. (1.2) com $p_1 = 3$ e $p_2 = 30$, uma vez que o movimento de *roll* é consideravelmente mais rápido do que o movimento de *yaw*.

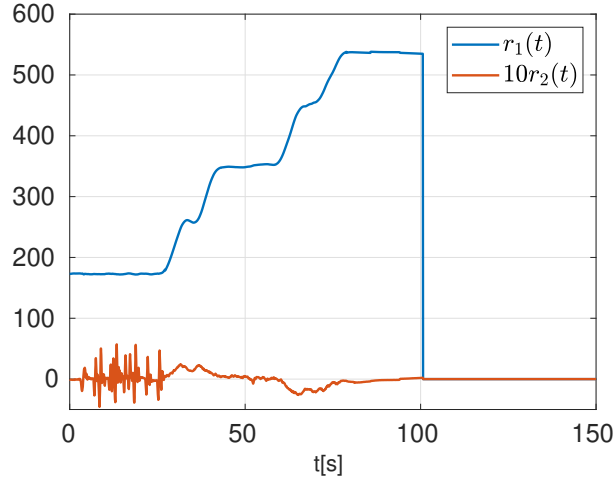


Figura 7 Ângulo de correção calculado (sinal de referência) para elevação α_1 e azimute α_2

Os parâmetros do diferenciador HOSM são 1.32: $\lambda_0^{[1]} = 1.5$, $\lambda_1^{[1]} = 1.1$ e $\mathcal{L}_{\rho_1}^{[1]}(\hat{x}, t) = 20|\hat{x}| + u_1(t) + 18|y_{m_1}| + 9|\dot{y}_{m_1}| + |r_1|$; $\lambda_0^{[2]} = 3$, $\lambda_1^{[2]} = 1.5$, $\lambda_2^{[2]} = 1.1$ e $\mathcal{L}_{\rho_2}^{[2]}(\hat{x}, t) = 74|\hat{x}| + |u(t)| + 180|y_{m_2}| + 36|\dot{y}_{m_2}| + |r_2|$; note que y_{m_1} , y_{m_2} e suas respectivas derivadas podem ser encontrados empregando uma implementação de espaço de estado do modelo de referência. Também, $\hat{x}$ é um observador de norma de estado dado por (3.15), com $c_x = 1$, e $\lambda_x = 1$. Um multiplicador passivador $\bar{L} = [1 \ 0; -0.098 \ 0.9804]$ é usado de uma forma que $\bar{L}K_p$ é PDJ, onde da Eq. 1.50 temos que $A_k = A_c - B_c K_p K L H_0$ é uma saída de ganho estático de realimentação. O multiplicador passificante L é escolhido de modo que o sistema modificado $\{A_k, B_c K_p, L H_0\}$ satisfaça a condição WSPR. Uma maneira de determinar L é a seguinte : Suponha que os principais menores de K_p seja diferentes de zero. Então, considere a fatoração LDU-(Decomposição diagonal inferior-superior) de $K_p = L_p D_p U_p$, onde L_p é a unidade triangular inferior, D_p é a diagonal e U_p é a unidade triangular superior. Escolhemos uma matriz diagonal D_0 com elementos diagonais positivos e distintos e com as matrizes L_p e D_p da fatoração LDU de K_p , a matriz multiplicadora triangular inferior $L = D_0(L_p D_p^{-1})$ pode ser obtida de modo que a matriz $\bar{K}_p = L K_p = D_0 U_p$ é triangular superior com elementos diagonais e autovalores positivos reais e distintos. Assim, existe uma matriz W tal que $W L K_p$ é SPD. Além disso, é possível concluir que o sistema de erro modificado $e_L = W_M(s) L K_p [u - u^*]$, é WSPR, uma vez que $W_M(s) = \frac{1}{s+a} I$ e $L K_p$ é PDJ. Neste caso particular, pode-se definir $K = 0$ e, portanto, $A_K = A_c$. Quando K_p é incerto, este procedimento pode ser seguido por algum valor nominal de K_p . O ganho de adaptação está definido para $\gamma = 100$ e condição inicial do vetor de parâmetro $\Theta(0)$ é definido para parâmetros ideais para valores nominais.

Outros parâmetros de modelo são listados a seguir: Filtros de E/S 3.6: $\lambda(s) = (s+8)$

e $\nu = 2$; $L(s) = \text{diag} \{(s + 6), (s + 6)\}$. Consideramos as seguintes condições iniciais da planta: $y_1(0) = -60^\circ$, $y_2(0) = 10^\circ$. As demais condições iniciais do sistema são definidas como zero.

O controlador proposto apresenta um bom desempenho de rastreamento conforme mostrado na Figura 8. A comparação entre os sinais de erro e suas respectivas derivadas com as estimativas fornecidas pelo diferenciador global HOSM são mostradas na Figura 9, onde é possível notar a rápida convergência. Os parâmetros estão representados na Figura 12, onde é possível notar que a norma do parâmetro é limitada pela lei de adaptação baseada na projeção. Os sinais de controle são mostrados nas Figura 10 e Figura 11. Os ganhos variáveis são mostrados nas Figura 14 e Figura 15 e são projetados para ser um limite superior para as derivadas de erro. A norma observada é vista na Figura 13 em comparação com o valor da norma real. Os parâmetros são representados na Figura 12 que mostra que a norma do parâmetro é limitada pela lei de adaptação baseada em projeções.

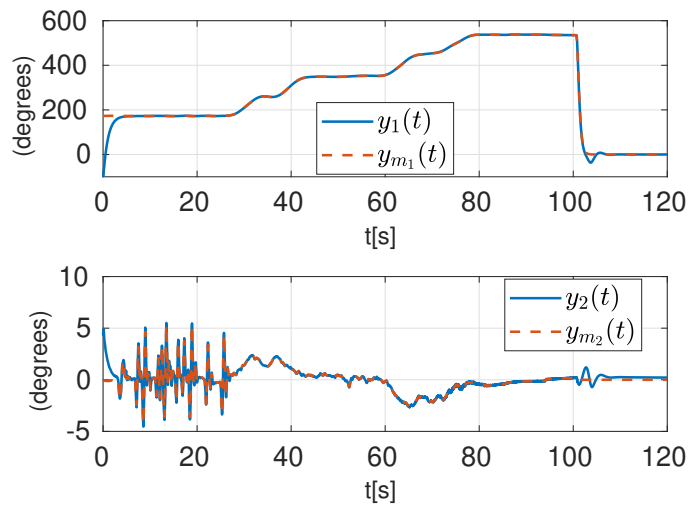


Figura 8 Desempenho de rastreamento com dados experimentais do veículo: saída da planta y (—); e saída do modelo y_m (- -)

Por fim, é possível avaliar o desempenho geral da plataforma estabilizada, avaliando o erro angular entre a LOS desejada e a obtida. Isso é $e_{LOS} = \arccos(U_L^* \cdot U_L)$. Isso é visto na Figura 16, onde é possível notar que um pequeno erro é obtido durante o circuito. Picos são observados quando o veículo muda de direção, mas ainda em pequena amplitude.

A fim de avaliar como essa técnica funcionaria em um cenário mais realista, uma perturbação de entrada não linear é incluída para contabilizar o atrito da junta viscoso modelado conforme

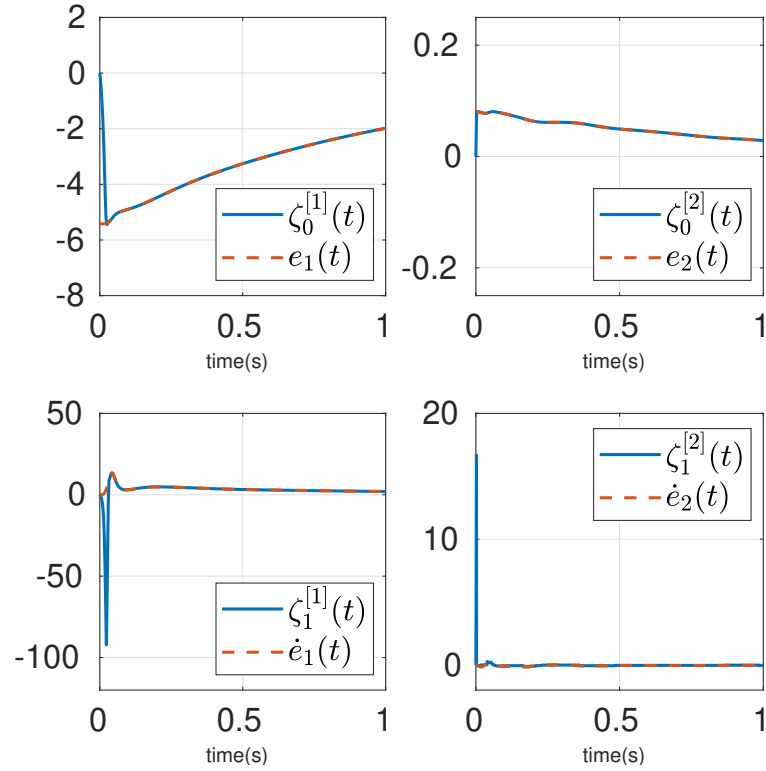


Figura 9 Desempenho do diferenciador em sinais de erro: (a) sinal $e_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[1]}(t)$; (b) sinal $e_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[2]}(t)$; (c) sinal $\dot{e}_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[1]}(t)$; e (d) sinal $\dot{e}_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[2]}(t)$

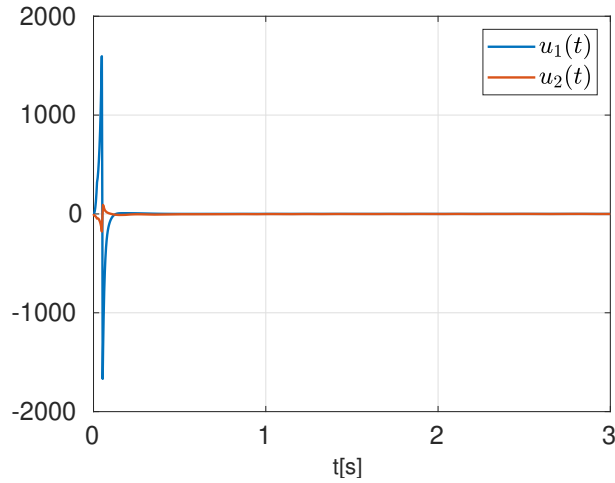


Figura 10 Sinais de controles $u_1(t)$ e $u_2(t)$

em [49]. A planta com perturbação de entrada é considerada como

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.2}{s(s+1.3)} & \frac{-0.2}{s(s+2.6)} \\ \frac{0.1}{s(s+40)} & \frac{0.9}{s(s+20)} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -d_1 \tanh(\dot{\alpha}_1/\alpha_1^v) \\ -d_2 \tanh(\dot{\alpha}_2/\alpha_2^v) \end{bmatrix} \right) \quad (2.12)$$

com $d_1, d_2 > 0$ e $\alpha_1^v, \alpha_2^v \in [0, 1]$. Para fins de simulação, usamos $d_1 = d_2 = 10$ e $\alpha_1^v = \alpha_2^v =$

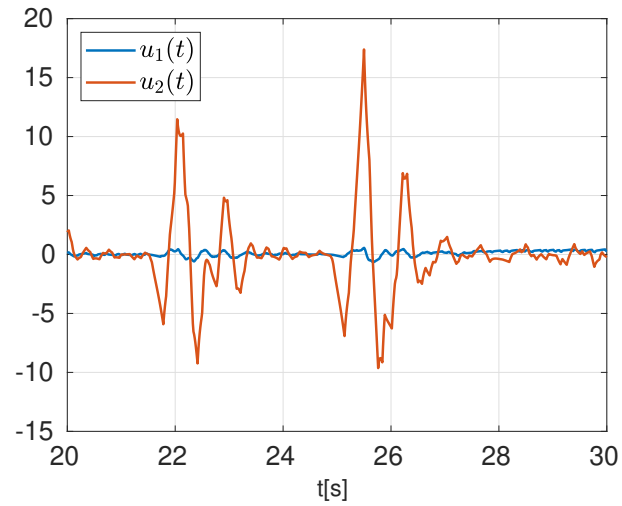


Figura 11 Detalhe dos sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$

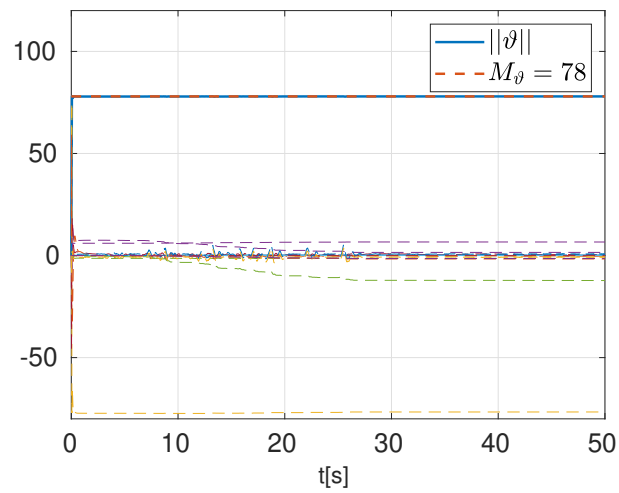


Figura 12 Parâmetros adaptados (ϑ), norma do parâmetro ($|\vartheta|$), e seu limitante superior (M_{ϑ}).

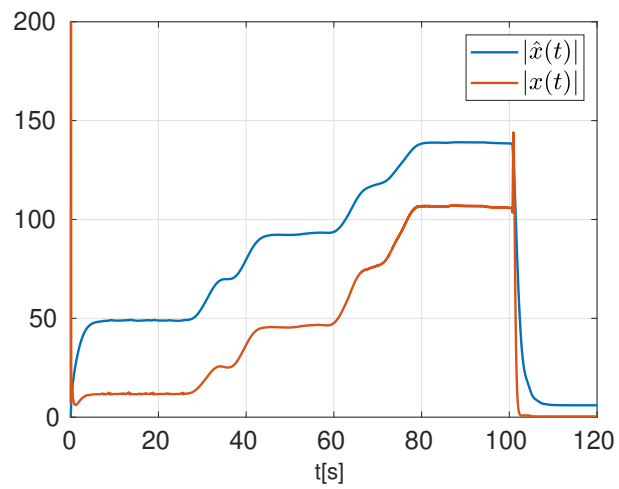


Figura 13 Desempenho do observador da norma: Norma de estado $|x(t)|$ e a norma de estado observada $|\hat{x}(t)|$

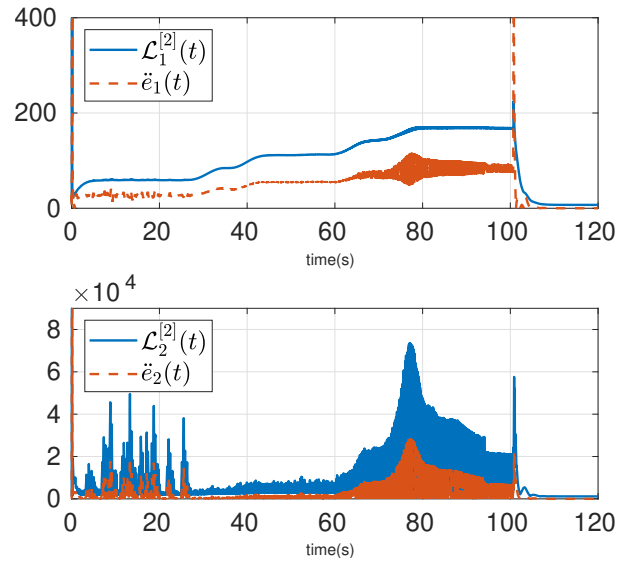


Figura 14 Ganhos dinâmicos do diferenciador global HOSM: (a) ganho diferenciador $\mathcal{L}_1^{[1]}$ e $\ddot{e}_1$; (b) ganho diferenciador $\mathcal{L}_2^{[1]}$ e $\ddot{e}_2$

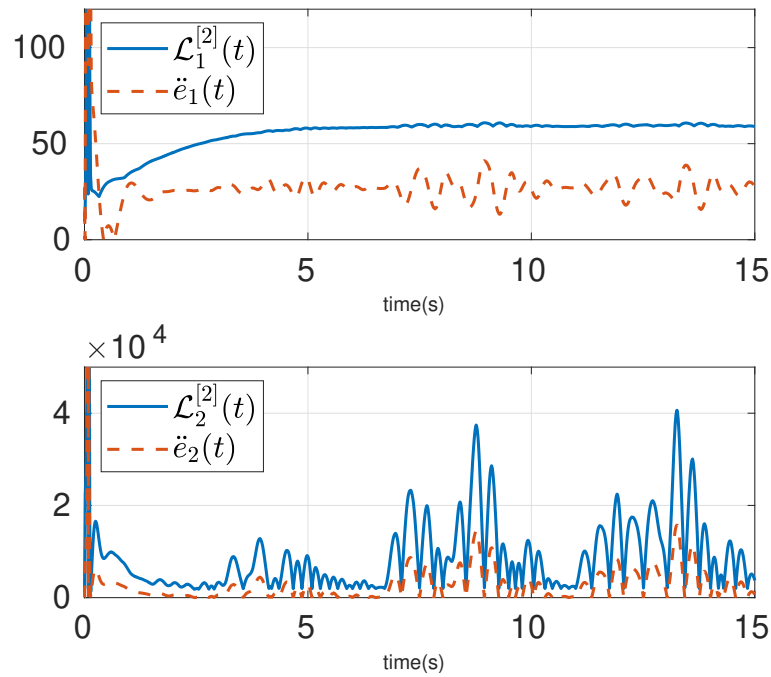


Figura 15 Detalhes da Figura 14

0.2. A Figura 17 mostra uma comparação entre uma simulação com condições ideais e com atrito da junta. É possível notar que o erro de ângulo na LOS é apenas ligeiramente afetado, mostrando uma boa robustez do BMRAC MIMO.

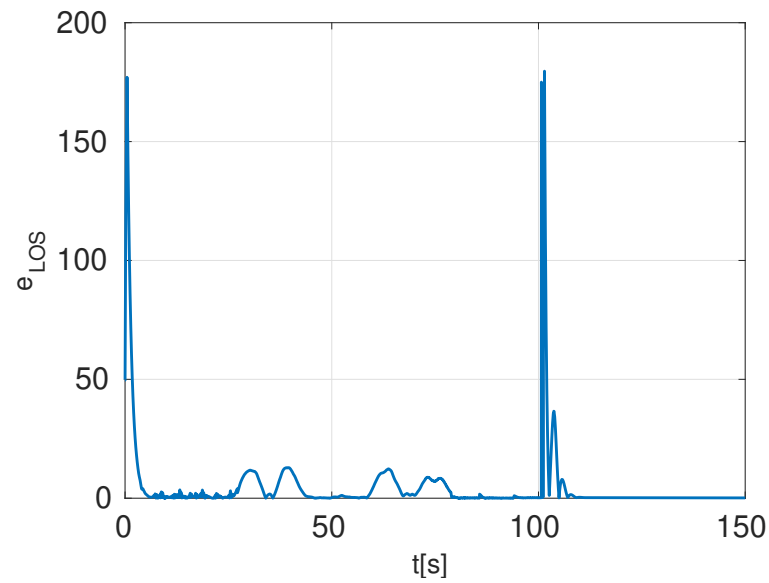


Figura 16 Erro angular e_{LOS} entre a LOS desejada e obtida em graus

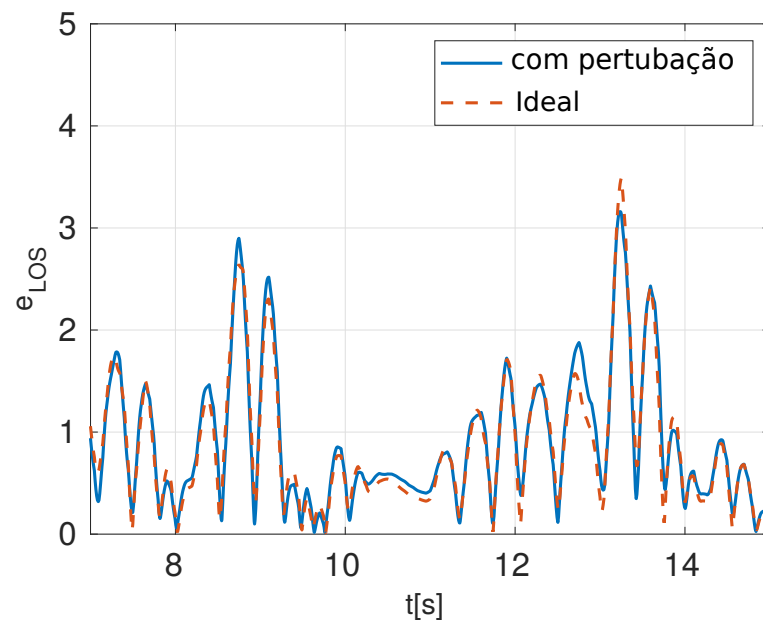


Figura 17 Comparação de erro angular e_{LOS} entre a LOS desejada e a obtida para o sistema em condições ideais e com perturbação contabilizando o atrito da junta

3 CONTROLE VETORIAL UNITÁRIO

3.1 Planta

Considere um sistema MIMO incerto descrito por:

$$\dot{x} = A_p x + B_p [u + d(x, t)], \quad y = H_p x, \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída e $d(x, t) \in \mathbb{R}^m$ é uma perturbação não linear, incerta e dependente do estado. As matrizes incertas A_p , B_p e H_p pertencem a algum conjunto compacto, de modo que os limites de incerteza necessários a serem definidos posteriormente estão disponíveis para o projeto.

3.2 Hipóteses

As hipóteses (H1)-(H4) do MIMO BMRAC são também utilizadas para o MIMO UVC e são repetidas aqui por conveniência.

(H1) $G(s) = H_p(sI - A_p)^{-1}B_p$ é de fase mínima e tem posto completo.

(H2) O subsistema linear é controlável e observável.

(H3) O índice de observabilidade ν de $G(s)$, ou um limite superior de ν , é conhecido.

(H4) A matriz interactor pela esquerda $\Xi(s)$ é diagonal e $G(s)$ tem um grau relativo de vetor global conhecido $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ (isto é., $\Xi(s) = \text{diag}\{s^{\rho_1}, \dots, s^{\rho_m}\}$). A matriz $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$, finito e não singular, é referida matriz HFG e satisfaz $K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \Xi(s)G(s)$.

(H7) Uma matriz não singular S_p é conhecido de tal forma que $-K_p S_p$ é diagonalmente estável, isto é, existe uma matriz diagonal $D > 0$ de tal modo que $DK + K^T D = -Q$, com $Q = Q^T > 0$ e $K = -K_p S_p$.

(H8) A perturbação de entrada $d(x, t)$ é considerada incerta, localmente integrável e de norma limitada por $|d(x, t)| \leq k_x |x| + k_d$, $\forall x, t$, onde $k_x, k_d \geq 0$ e escalares conhecidos.

A Hipótese **(H8)** é utilizada para alcançar rastreamento exato global utilizando apenas a realimentação de saída.

Assim como no caso do MIMO BMRAC, embora seja arbitrário, o grau relativo é considerado conhecido. Isso não é muito restritivo, já que algum modelo da planta geralmente está disponível. No caso que consideramos, não é difícil determinar o grau relativo, uma vez que a planta basicamente representa uma relação torque-posição angular.

Observe que o grau relativo do sistema (3.1) depende apenas da parte linear, sendo independente da perturbação d . Embora essa hipótese restrinja a classe de distúrbios enfrentados, ela representa um desafio no contexto do controle de modo deslizante de realimentação de saída, uma vez que a estabilidade global e o rastreamento exato ainda são desejados. Para o gimbal de três eixos, a classe de distúrbios descrita em (H8) é suficiente para lidar com o atrito da junta, que é não linear e dependente do estado.

Além disso, em (H7), a matriz HFG da planta K_p deve ser diagonalmente estável, o que é uma condição menos restritiva do que as condições de simetria exigidas em técnicas semelhantes. Alguns trabalhos como [25, 39] requerem o conhecimento de um multiplicador de matriz S_p tal que $K_p S_p + S_p^T K_p^T > 0$.

3.3 Modelo de Referência e Equação de Erro

Considera-se o sinal de referência $y_m(t) \in \mathbb{R}^m$ gerado pelo seguinte modelo de referência.

$$y_m = W_m(s) r, \quad (3.2)$$

$$W_m(s) = \text{diag} \{ (s + \gamma_1)^{-1}, \dots, (s + \gamma_m)^{-1} \} L^{-1}(s), \quad (3.3)$$

onde $\gamma_j > 0$ ($j = 1, \dots, m$), $r(t) \in \mathbb{R}^m$ é um sinal de referência contínuo arbitrário e uniformemente limitado por partes e

$$L(s) = \text{diag} \{ L_1(s), L_2(s), \dots, L_m(s) \}, \quad (3.4)$$

com $L_j(s) = s^{(\rho_j - 1)} + l_{\rho_j - 2}^{[j]} s^{(\rho_j - 2)} + \dots + l_1^{[j]} s + l_0^{[j]}$ ($j = 1, \dots, m$) sendo polinômios Hurwitz e o índice $^{[j]}$ indicando que um parâmetro pertence a $L_j(s)$. A matriz da função de transferência $W_m(s)$ tem o mesmo grau relativo do vetor que $G(s)$ e seu HFG é a matriz de identidade. O

objetivo principal é encontrar uma lei de controle u tal que o erro de saída

$$e := y - y_m \quad (3.5)$$

tende assintoticamente a zero, para condições iniciais arbitrárias. Quando a planta é conhecida e $d(t) \equiv 0$, uma lei de controle que atinge o casamento entre a matriz da função de transferência em malha fechada e $W_m(s)$ é dada por $u^* = \theta^{*T} \omega$, onde a matriz de parâmetros é escrita como $\theta^* = [\theta_1^{*T} \theta_2^{*T} \theta_3^{*T} \theta_4^{*T}]^T$, com $\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}$, $\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e o vetor regressor $\omega = [\omega_u^T \omega_y^T y^T r^T]^T$ ($w_u, w_y \in \mathbb{R}^{m(\nu-1)}$) é obtido a partir de filtros de variáveis de estado de E/S fornecidos por:

$$\omega_u = A(s)\Lambda^{-1}(s)u, \quad \omega_y = A(s)\Lambda^{-1}(s)y, \quad (3.6)$$

onde $A(s) = [Is^{\nu-2} \ Is^{\nu-3} \ \dots \ Is \ I]^T$, $\Lambda(s) = \lambda(s)I$ com $\lambda(s)$ sendo um polinômio Hurwitz mônico de grau $\nu - 1$. Em particular, as condições de correspondência exigem que $\theta_4^{*T} = K_p^{-1}$, para mais detalhes veja [8]. Considere a seguinte realização de (3.6)

$$\dot{\omega}_u = \Phi \omega_u + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_y = \Phi \omega_y + \Gamma y, \quad (3.7)$$

$$\Phi \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m(\nu-1)}, \quad \Gamma \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m} \quad (3.8)$$

onde Γ e Φ são escolhidos pelo projeto de forma que $\det(sI - \Phi) = \det(\Lambda(s)) = [\lambda(s)]^m$. De [30], o erro de entrada-saída pode ser mostrado para ser dado por

$$e = W_m(s)K_p \left[u - \theta^{*T} \omega + d_f \right], \quad (3.9)$$

onde a perturbação desconhecida $d_f(x, t)$ é o correspondente de entrada-saída de $d(x, t)$ em (3.1).

3.4 Variável de Deslizamento Ideal

O operador $L(s)$ em (3.4) é escolhido de forma que $L(s)G(s)$ e $L(s)W_m(s)$ têm vetor uniforme relativo grau um. Assim, a variável deslizante ideal é um erro modificado $S = L(s)e \in$

$\mathbb{R}^m$ dado por

$$S = \begin{bmatrix} e_1^{(\rho_1-1)} + \dots + l_1^{[1]} \dot{e}_1 + l_0^{[1]} e_1 \\ \vdots \\ e_m^{(\rho_m-1)} + \dots + l_1^{[m]} \dot{e}_m + l_0^{[m]} e_m \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

onde $e^{(\rho_i)}$ é ρ_i -ésimo derivada de $e(t)$. Como mostrado em [30], o sistema de erro de malha fechada é uniformemente globalmente estável com um sinal de controle dado por

$$u = (\theta^{nom})^T \omega - \varrho(t) S_p \frac{S}{|S|},$$

onde θ^{nom} é o valor nominal para θ^* e $\varrho(t)$ é suficientemente grande para dominar os distúrbios de entrada e será definido posteriormente. Nesse caso, S torna-se identicamente zero após algum tempo finito. No entanto S não está disponível para implementação, pois as derivadas da ordem $\rho_i - 1$ das saídas y_i precisariam ser medidas para construir as derivadas de erro $e_i^{(\rho_i-1)}$. Isso apresentaria uma complexidade adicional no uso de vários sensores, bem como um custo econômico mais alto. Além disso, para alguns sistemas, os sensores que medem as derivadas necessárias podem estar indisponíveis. Para resolver esse problema, um diferenciador HOSM pode ser usado para obter estimativas para essas derivadas.

3.5 Diferenciador HOSM com Ganhos Dinâmicos

Conforme visto na secção 1.7 a variável deslizante S pode ser estimada usando uma extensão MIMO global do diferenciador HOSM proposto em [50] de forma que o rastreamento exato possa ser alcançado. Resultando na estimativa de S :

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \zeta_{\rho_1-1}^{[1]} + \dots + l_1^{[1]} \zeta_1^{[1]} + l_0^{[1]} \zeta_0^{[1]} \\ \vdots \\ \zeta_{\rho_m-1}^{[m]} + \dots + l_1^{[m]} \zeta_1^{[m]} + l_0^{[m]} \zeta_0^{[m]} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

3.6 Observador de Norma

Para construir o diferenciador HOSM com ganhos dinâmicos, uma norma limitada para o estado não medido $x(t)$ é necessária de acordo com a Eq. (1.34). Para tanto, é empregado um observador de normas. O sinal de controle também requer um limite de norma para $d_f(x, t)$,

que pode ser obtido de forma semelhante. Uma norma limitada para x pode ser obtida através do FOAF usando a equação de espaço de estado como dada em [30] para matrizes apropriadas A_c, B_c, B_0 e H_o

$$\dot{X} = A_c X + B_c K_p [\theta_4^{*T} r + u - u^*] + B_0 d \quad (3.12)$$

$$y = H_o X, \quad (3.13)$$

Assim, aplicando [25, Lema 3] em (3.12) é possível encontrar $k_x^* > 0$ de tal modo que, para $k_x \in [0, k_x^*]$ um tem

$$|x(t)| \leq |X(t)| \leq |\hat{x}(t)| + \hat{\pi}(t), \quad (3.14)$$

onde

$$\hat{x}(t) := \frac{c_x}{s + \lambda_x} [c_1 k_d + c_2 |\omega(t)|], \quad (3.15)$$

onde $c_x, c_1, c_2 > 0$ são suficientemente grandes e $\lambda_x > 0$ é suficientemente pequeno. Todas essas constantes também podem ser calculadas pelos métodos de otimização descritos em [41]. Em relação ao parâmetro λ_x , é definido por $\lambda_x := \gamma_0 - |B_0|k_x$ onde $|B_0|k_x > 0$ é uma constante menor que γ_0 computado com B_0 em 3.12, k_x de **(H8)** e $\gamma_0 > 0$ sendo a margem de estabilidade de A_c é definido por $\gamma_0 := \min_i [-\text{Re}(\lambda_i)]$, onde λ_i são os vetores próprios de A_c . Como em [25], o termo exponencialmente decadente $\hat{\pi}$ considera as condições iniciais do sistema. Além disso, de **(H8)** e da Eq. (3.15), tem-se $|d(x, t)| \leq k_x \hat{x}(t) + k_d$, modulo um termo $\hat{\pi}$, e pode-se escrever $|d_f(x, t)| \leq \hat{d}_f(\hat{x}, t) + \hat{\pi}_f$, onde $\hat{\pi}_f$ é um termo exponencialmente decrescente,

$$\hat{d}_f(t) := \frac{c_f}{s + \lambda_f} [k_x \hat{x}(t) + k_d], \quad (3.16)$$

e $\frac{c_f}{s + \lambda_f}$ é um FOAF projetado com constantes positivas adequadas c_f e λ_f . Uma escolha conservadora de parâmetros é c_f suficientemente grande e λ_f suficientemente pequeno. Observe que os limites da norma para x e $d_f(x, t)$ podem ser construídos usando apenas sinais mensuráveis.

3.7 Controle Vetorial Unitário

A lei de controle vetorial unitário (UVC - do inglês *unit vector control*) de realimentação de saída proposta é dada por:

$$u = (\theta^{nom})^T \omega - \varrho(t) S_p \frac{\hat{S}}{|\hat{S}|}. \quad (3.17)$$

A função de modulação $\varrho(t) \geq 0$ é projetada para induzir um modo deslizante na variedade $e = 0$ e é tal que:

$$\varrho(t) \geq (1 + c_d) |S_p^{-1} [(\theta^{nom} - \theta^*)^T \omega - d_f]| + \delta. \quad (3.18)$$

Uma possível escolha para a função de modulação que satisfaça (3.18) é dada por

$$\varrho(t) = (1 + c_d) |S_p^{-1}| [\bar{\theta} |\omega| + |\hat{d}_f|] + \delta \quad (3.19)$$

onde $c_d > 0$ é uma constante apropriada e $\delta > 0$ pode ser arbitrariamente pequeno e $\bar{\theta}$ é um limite superior para θ^* . A estimativa de $\bar{\theta}$ pode ser obtida a partir de uma planta de parâmetros nominais onde, em vez de θ^* , pode-se calcular θ^{nom} . O limite é definido por $\bar{\theta} = (1 + c) |\theta^{nom}|$, para algum grande o suficiente $c > 0$ para contabilizar a incerteza em torno da planta nominal.

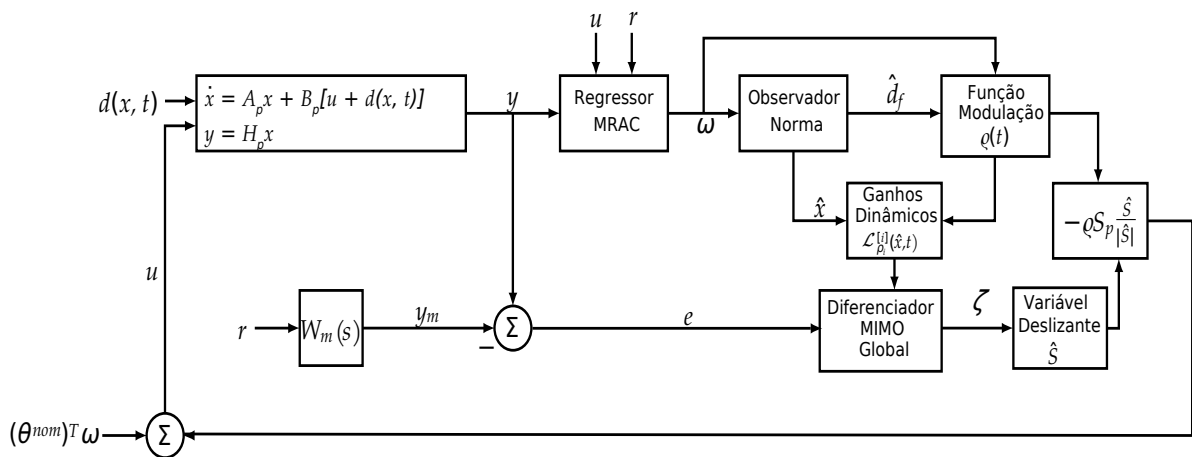


Figura 18 Controlador de modo deslizante vetorial unitário por realimentação de saída global baseado no diferenciador HOSM multivariável.

Portanto, também vale a pena mencionar que, apesar do fato de os diferenciadores HOSM com ganhos dinâmicos serem empregados para contornar uma limitação de grau relativo, sua aplicabilidade pode ser estendida. Uma vez que fornece derivadas exatas e convergência global e preserva a robustez ao ruído de medição dos diferenciadores originais em [50], pode ser facilmente aplicado para estimar derivadas de n -ésima ordem de quaisquer sinais medidos para propósitos gerais. O diagrama de blocos da Figura 18 mostra o UVC MIMO proposto em [30]

4 APLICAÇÃO DO UVC A PLATAFORMAS ESTABILIZADAS INERCIALMENTE COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE

4.1 Estabilização de Câmera em um VANT Usando um Gimbal Desequilibrado de Três Eixos

A câmera montada em um gimbal de três eixos é ilustrada na Figura 19. Os sistemas de coordenadas chave usados neste problema são o sistema de coordenadas inercial representado na Figura 19 por $\{x_L, y_L, z_L\}$ e denotado por $\mathbf{L}$; enquanto $\mathbf{b}$ representa o corpo, ou seja, a orientação do VANT; e $\mathbf{a}$ representa o sistema de coordenadas da câmera. Os graus de liberdade nesta montagem são representados pelos ângulos de correção α_1 , α_2 e α_3 em torno dos eixos z , x e y do sistema de coordenadas da câmera. Os sensores são posicionados no corpo da plataforma. A matriz C_{ij} é membro do grupo ortogonal especial $SO(3)$ e denota a orientação do referencial i em relação ao referencial j .

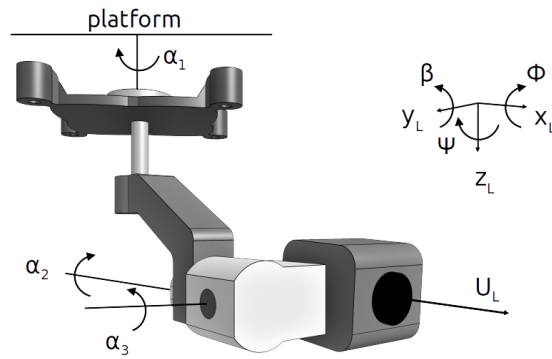


Figura 19 Gimbal de três eixos exibindo correção α_1 , α_2 e α_3 e orientação do sistema de coordenadas inerciais L .

Para fins de estabilização, é desejável manter a atitude da câmera C_{aL} invariante em uma direção escolhida em relação ao referencial inercial L , consequentemente mantendo a LOS, $U_L \in \mathbb{R}^3$, invariante. É interessante notar que a estabilização da LOS é possível com um gimbal de dois eixos, se a rotação em torno da LOS for aceitável, como em [46]. No caso de um gimbal de três eixos, todos os graus de liberdade na atitude do VANT em relação ao quadro inercial, C_{bL} , podem ser compensados. Para calcular tais ângulos de correção, considere a atitude do VANT dada pela representação *roll-pitch-yaw*, ou seja,

$$C_{bL} = R_z(\phi)R_y(\beta)R_x(\psi) \quad (4.1)$$

onde $R_i(k)$ é a rotação elementar em torno do eixo i por um ângulo k [47]; ψ , β e ϕ são os ângulos de *roll*, *pitch* e *yaw* do veículo, respectivamente. Nesta configuração de gimbal, a orientação da câmera é indicada por C_{aL} e é expressa por

$$C_{aL} = C_{bL}(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1) R_x(\alpha_2) R_y(\alpha_3). \quad (4.2)$$

A LOS desejada é escolhida pelo operador. Como de costume em sistema VANT, apenas α_1 e α_3 estão disponíveis para posicionar a câmera, ou seja, nenhum movimento intencional em torno do eixo LOS é usado. Assim, a orientação desejada da câmera é dada por

$$C_{aL}^* = R_z(\alpha_1^*) R_y(\alpha_3^*), \quad (4.3)$$

onde α_1^* e α_3^* são os ângulos gimbal desejados. Uma vez que a LOS será afetado pela orientação do veículo, é possível concluir que a seguinte relação deve ser satisfeita

$$R_z(\alpha_1^*) R_y(\alpha_3^*) = C_{bL}(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1) R_x(\alpha_2) R_y(\alpha_3), \quad (4.4)$$

o que leva a

$$R_z(\alpha_1) R_x(\alpha_2) R_y(\alpha_3) = C_{bL}^T(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1^*) R_x(\alpha_2^*). \quad (4.5)$$

O lado direito da Eq. (4.5) corresponde à matriz de orientação que precisa ser compensada, levando em consideração os movimentos do veículo, bem como os ângulos de câmera desejados escolhidos pelo operador. Isso significa que os ângulos de correção desejados α_{d1} , α_{d2} e α_{d3} para estabilizar a LOS podem ser calculados da seguinte forma, onde $C_{bL}^* = C_{bL}^T(\psi, \beta, \phi) R_z(\alpha_1^*) R_x(\alpha_2^*)$ e $C_{bL}^*(i, j)$ é o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna de C_{bL}^* :

$$\alpha_{d1} = \arctan(-C_{bL}^*(2, 1)/C_{bL}^*(2, 2)) \quad (4.6)$$

$$\alpha_{d2} = \arcsin(C_{bL}^*(2, 3)) \quad (4.7)$$

$$\alpha_{d3} = \arctan(-C_{bL}^*(1, 3)/C_{bL}^*(3, 3)). \quad (4.8)$$

A matriz de orientação C_{bL} é calculada como na Eq.(4.1) usando as medições IMU, enquanto os ângulos do gimbal são medidos e a LOS desejada é escolhida pelo operador pelos valores

apropriados de α_1^* e α_3^* . A planta considerada é modelada da seguinte forma

$$y = \begin{bmatrix} \frac{K_{11}}{s(s+a_{11})} & \frac{K_{12}}{s(s+a_{12})} & 0 \\ \frac{K_{21}}{s(s+a_{21})} & \frac{K_{22}}{s(s+a_{22})} & \frac{K_{23}}{s(s+a_{23})} \\ 0 & \frac{K_{32}}{s(s+a_{32})} & \frac{K_{33}}{s(s+a_{33})} \end{bmatrix} [u + d] \quad (4.9)$$

onde Eq. (4.9) corresponde à forma de entrada-saída da Eq. (3.1) com as entradas sendo os torques do motor $u = [\tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3]^T$. As saídas são as posições angulares dos ângulos de correção $y = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$, d é a perturbação não linear

$$d = \begin{bmatrix} -d_1 \tanh(\dot{\alpha}_1/\alpha_1^v) \\ -d_2 \tanh(\dot{\alpha}_2/\alpha_2^v) \\ -d_3 \tanh(\dot{\alpha}_3/\alpha_3^v) \end{bmatrix}$$

com $d_1, d_2, d_3 > 0$ e $\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_3^v \in [0, 1]$ é considerado responsável pelo atrito em cada junta do gimbal [49].

Se não houver desequilíbrios mecânicos, os três graus de liberdade podem ser controlados independentemente e o problema se reduz a três sistemas SISO ($K_{ij} = 0$ para $i \neq j$ em 4.9). No entanto, desequilíbrios mecânicos levarão a um acoplamento cruzado entre os eixos gimbal [13]. Neste trabalho, considera-se que existe um acoplamento mecânico entre juntas consecutivas. O resultado é uma planta de grau relativo dois em cada saída ($\rho_i = 2$). A dinâmica da planta é considerada desconhecida para fins de controle e apenas valores nominais para K_{11} , K_{22} , K_{33} , a_1 , a_2 e a_3 estão disponíveis.

4.2 Resultados da Simulação com Dados de Voo Real

Para fornecer resultados em uma situação mais realista, as simulações são executadas usando os dados de *roll*, *pitch* e *yaw* de um VANT quadrotor em um voo autônomo. Os dados de atitude são fornecidos por uma IMU que consiste em um conjunto de giroscópios, magnetômetros e acelerômetros combinados por um esquema de fusão de dados usando um Filtro Kalman Estendido (EKF - do inglês *Extended Kalman Filter*)[ver apêndice]. Apenas *roll*, *pitch* e *yaw* são usados para fins de controle, com um tempo de amostragem de $T = 10\text{ms}$. É assumido para fins de projeto de controle que os valores nominais da Eq. (4.9) são: $K_{11}^{nom} = K_{22}^{nom} = K_{33}^{nom} = 1$, $a_{11}^{nom} = a_{22}^{nom} = a_{33}^{nom} = 20$ e $K_{12} = K_{21} = K_{23} = K_{33} = 0$. Ou

seja, o sistema de gimbal é considerado balanceado para fins de projeto de controle. A planta real, no entanto, é fixada da seguinte forma:

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1.2}{s(s+22)} & \frac{-0.2}{s(s+30)} & 0 \\ \frac{0.1}{s(s+30)} & \frac{0.9}{s(s+22)} & \frac{0.1}{s(s+15)} \\ 0 & \frac{-0.2}{s(s+15)} & \frac{1.2}{s(s+25)} \end{bmatrix} [u + d]$$

com a perturbação de entrada como

$$d = \begin{bmatrix} -2 \tanh(\dot{\alpha}_1/0.2) \\ -2 \tanh(\dot{\alpha}_2/0.2) \\ -1 \tanh(\dot{\alpha}_3/0.1) \end{bmatrix}$$

O modelo de referência é escolhido para ser rápido o suficiente para compensar o movimento de rotação, inclinação e guinada e de forma que $G(0) = 1$. É escolhido como:

$$W_m(s) = \text{diag} \left\{ \frac{50^2}{(s + 50)^2} \right\}. \quad (4.10)$$

Então, na Eq. (3.17) a função de modulação $\varrho(t)$ é dada pela Eq. (3.19), com $c_d=6$, $|d_f| \leq \hat{d}_f$ e $\delta=1$. O sinal $\hat{d}_f$ é obtido pelo FOAF descrito na Eq. (3.16), com $k_x = 0.2$, $k_d = 1$, $c_f = 5$, $\lambda_f = 0.5$ e $\hat{x}$ é um observador de norma de estado dado pela Eq. (3.15), com $c_1 = 1.2$, $c_2 = 2.5$ e $\lambda_x = 5$. Essas constantes são escolhidas de acordo com as diretrizes discutidas nas Subseções 3.6 e 3.7 são ajustadas por simulações. Os parâmetros diferenciadores HOSM da Eq.(1.32) são: $\lambda_0^{[1]} = 1.5$, $\lambda_1^{[1]} = 1.1$ e $\mathcal{L}_2^{[1]}(\hat{x}, t) = |\hat{x}| + 0.5\varrho + |y_{m1}| + |\dot{y}_{m1}| + |r_1|$; $\lambda_0^{[2]} = 1.5$, $\lambda_1^{[2]} = 1.1$, e $\mathcal{L}_2^{[2]}(\hat{x}, t) = |\hat{x}| + 0.5\varrho + |y_{m2}| + |\dot{y}_{m2}| + |r_2|$; $\lambda_0^{[3]} = 1.5$, $\lambda_1^{[3]} = 1.1$ e $\mathcal{L}_2^{[3]}(\hat{x}, t) = |\hat{x}| + 0.5\varrho + |y_{m3}| + |\dot{y}_{m3}| + |r_3|$; note que y_{m1} , y_{m2} , y_{m3} e suas respectivas derivadas podem ser encontradas empregando uma implementação de espaço de estado do modelo de referência. Esses ganhos dinâmicos são estimados calculando as derivadas de erro usando um modelo nominal. Consideramos as seguintes condições iniciais da planta: $y_1(0) = 100^\circ$, $y_2(0) = 30^\circ$, $y_3(0) = -70^\circ$. Esses valores são escolhidos para fins ilustrativos, uma vez que em aplicações práticas a câmera poderia ser facilmente conduzida a condições iniciais zero no pré-voo. A LOS inicial é definida como $U_L = [1 \ 0 \ 0]^T$. Supõe-se que os pontos de ajuste são alterados duas vezes, primeiro para α_3 em $t = 30s$ onde $\alpha_3^* = -45^\circ$ e depois para α_1 em $t = 60s$ com $\alpha_1^* = -60^\circ$. Em $t = 120s$, o sistema de estabilização é desligado. Essas mudanças de ponto de ajuste são utilizadas para avaliar o

desempenho na presença de possíveis mudanças na LOS desejada comandada por um operador durante o voo. Eles também são úteis para avaliar o desempenho dos ganhos dinâmicos do HOSM e dos observadores de norma, mostrando que altos ganhos desnecessários são evitados à medida que os ganhos são reduzidos dependendo dos estados do sistema. Em particular, quando o sistema é desligado, é possível notar que os ganhos do diferenciador diminuem com os estados do sistema, mostrando que um problema de regulação pode ser resolvido com acurácia utilizando ganhos menores. O desempenho do rastreamento é visto na Figura 20, Figura 21 e a Figura 22, mostrando que o rastreamento exato foi alcançado. Também é possível notar a presença de picos em instantes de tempo onde as mudanças de ponto de ajuste são aplicadas. Apesar disso, a convergência é observada como visto na Figura 23 e a Figura 25. O erro angular entre a LOS obtida e a desejada é vista na Figura 26. Os sinais de controle são vistos na Figura 27, mostrando uma chaveamento de alta frequência conforme o esperado. Uma comparação entre a norma de estado e sua estimativa dada pelo observador da norma é mostrada na Figura 28. A Figura 24 mostra o desempenho do diferenciador HOSM com estimativa exata, enquanto a Figura 29 mostra que os ganhos dinâmicos do diferenciador projetado limitam as respectivas derivadas do sinal.

Observação. *O erro angular em estado estacionário é inferior a 0.5° , o que significa menos de 1mm para um objeto a uma distância de 1m, mostrando assim que uma estabilização precisa é possível.*

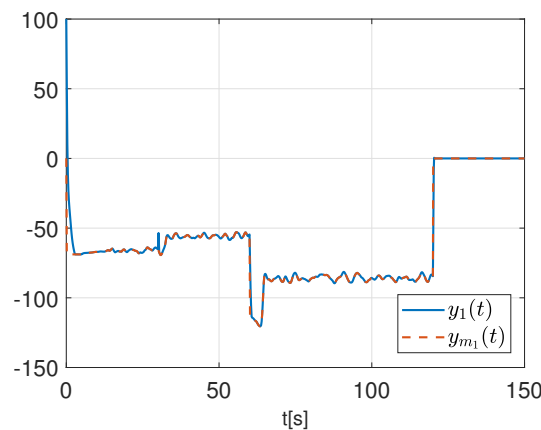


Figura 20 Saída da planta $y_1(t)$ e modelo de referência $y_{m1}(t)$.

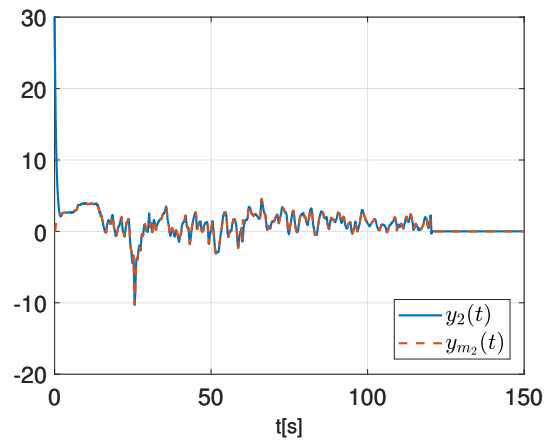


Figura 21 Saída da planta $y_2(t)$ e modelo de referência $y_{m2}(t)$.

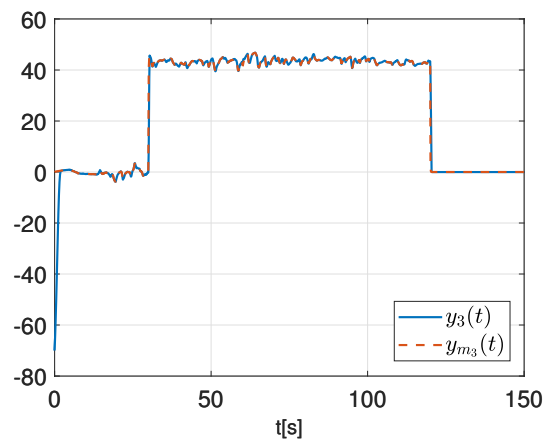


Figura 22 Saída da planta $y_3(t)$ e modelo de referência $y_{m3}(t)$.

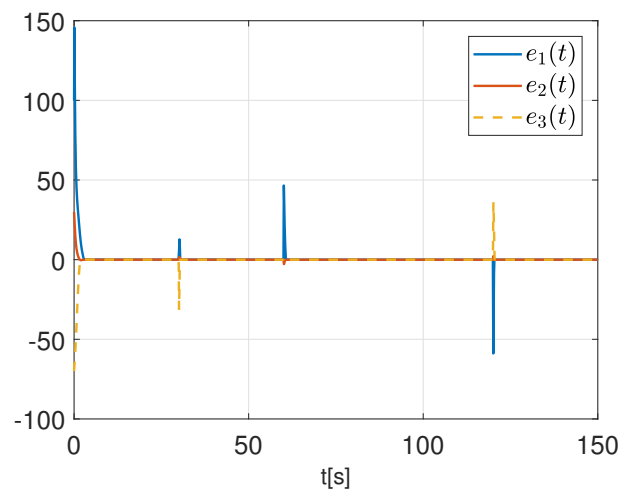


Figura 23 Erros de rastreamento $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$.

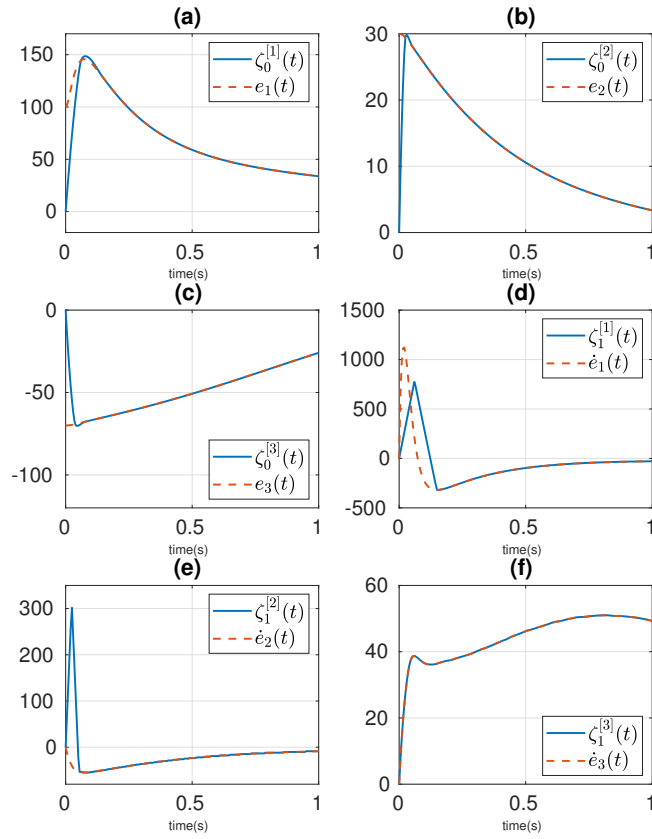


Figura 24 Desempenho do diferenciador em sinais de erro: (a) sinal $e_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[1]}(t)$; (b) sinal $e_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[2]}(t)$; (c) sinal $e_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_0^{[3]}(t)$; (d) sinal $\dot{e}_1(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[1]}(t)$; (e) sinal $\dot{e}_2(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[2]}(t)$; e (f) sinal $\dot{e}_3(t)$ e sua estimativa $\zeta_1^{[3]}(t)$.

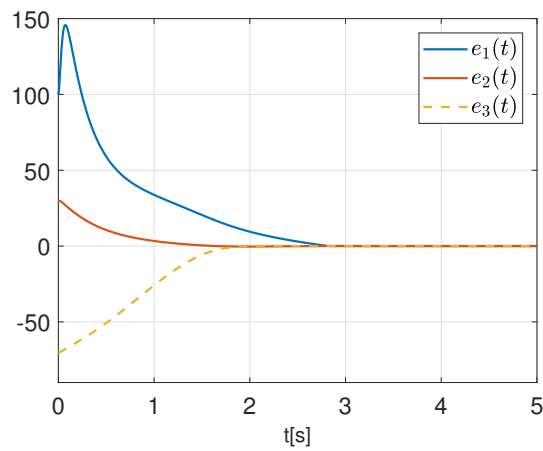


Figura 25 Detalhe de erros de rastreamento $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$.

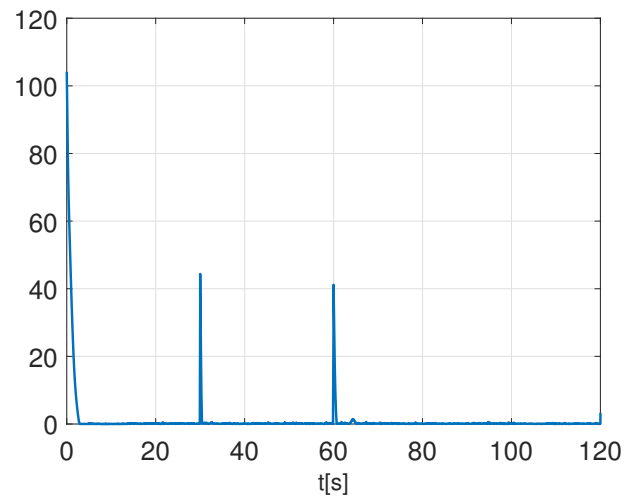


Figura 26 Erro angular entre a LOS desejada e a LOS obtida (em graus).

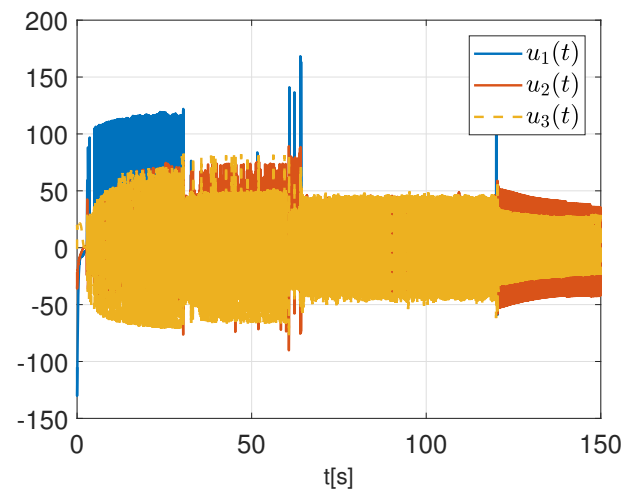


Figura 27 Sinal de controle $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$.

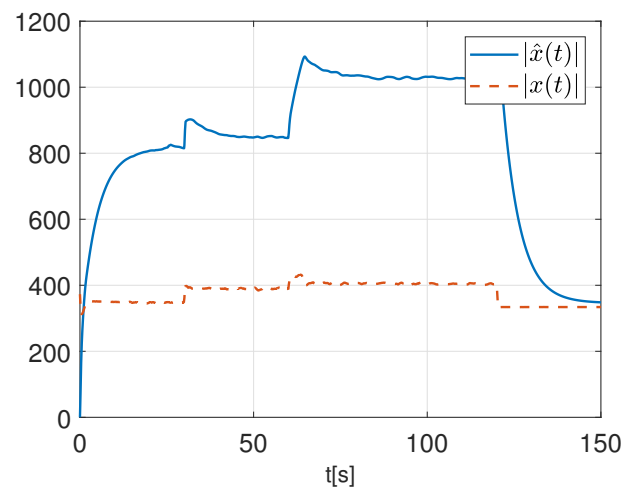


Figura 28 Estimação da norma de estado $|\hat{x}(t)|$ e norma de estado $|x(t)|$.

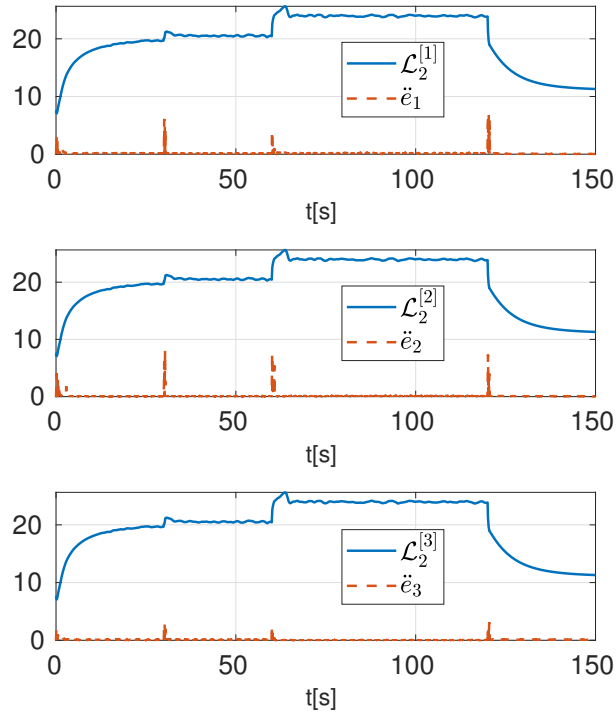


Figura 29 (a) Ganhos dinâmicos do diferenciador HOSM: (a) ganho do diferenciador $\mathcal{L}_2^{[1]}$ e $\dot{e}_1$; (b) ganho do diferenciador $\mathcal{L}_2^{[2]}$ e $\dot{e}_2$; (c) ganho do diferenciador $\mathcal{L}_2^{[3]}$ e $\dot{e}_3$.

4.3 Amplitude e Perfil de controle

As amplitudes do sinal de controle podem ser reduzidas ajustando o parâmetro c_d . Se as incertezas dos parâmetros da planta forem pequenas, a amplitude da função de modulação pode ser reduzida. Mesmo que o sinal de controle seja descontínuo, isso não é necessariamente um problema em aplicações onde os acionamentos elétricos são operados por conversores de potência chaveados, o que seria uma escolha natural de implementação para controle de motor em um sistema de gimbal.

Observação. Em aplicações onde um sinal de controle descontínuo não é aceitável, uma camada limite pode ser usada para obter um sinal de controle contínuo [51]. A lei de controle, neste caso, é dada como

$$u = (\theta^{nom})^T \omega - \varrho(t) S_p \frac{S}{|S| + \delta_L},$$

para alguns, de preferência pequenos, $\delta_L > 0$.

Apesar de útil na prática, este método apresenta uma desvantagem, uma vez que introduz um erro de estado estacionário finito. No entanto, os resultados da simulação para um limite

com $\delta_L = 0.1$ pode ser visto nas Figura 30 e a Figura 32 mostram que é possível obter um perfil de controle contínuo e mais adequado, mantendo um bom desempenho.

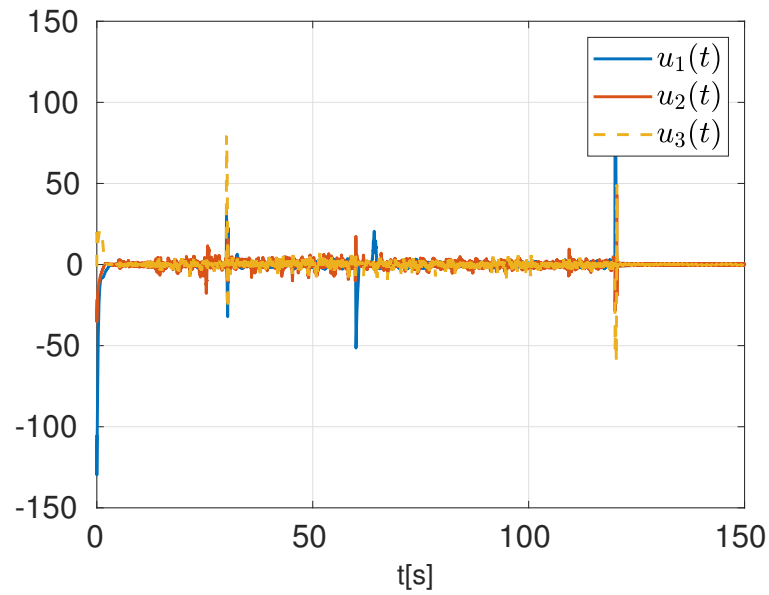


Figura 30 Sinal de controles $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ com camada limite

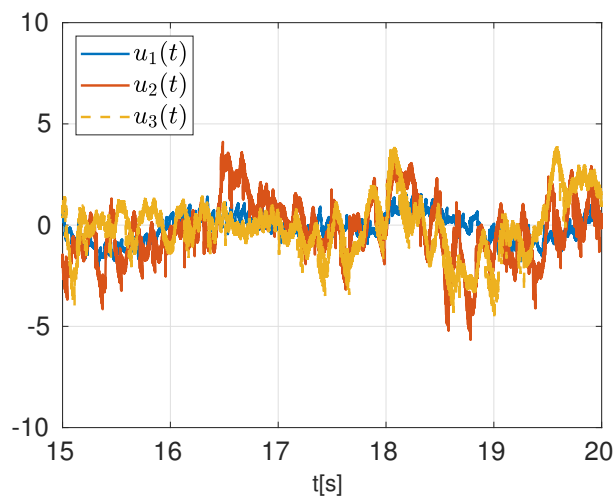


Figura 31 Detalhe dos sinais de controle $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$ com camada limite

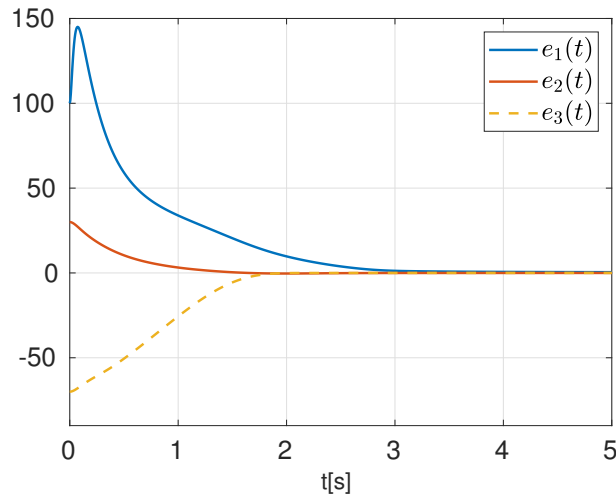


Figura 32 Erros de rastreamento $e_1(t)$, $e_2(t)$ e $e_3(t)$ com camada limite

4.4 Diferenciador HOSM como Ferramenta de Estimação e Monitoramento

Apesar do fato de que o diferenciador HOSM proposto em [20] é usado neste contexto para contornar uma limitação de grau relativo, sua utilidade pode ser estendida para estimar sinais indisponíveis em aplicações práticas, devido à sua exatidão e convergência global e rápida. Neste experimento, as derivadas de *roll*, *pitch* e *yaw* foram medidas, de forma que seja possível comparar essas medidas com os sinais estimados fornecidos pelo diferenciador HOSM, como pode ser visto na Figura 33, Figura 34 e a Figura 35. Na verdade, as estimativas são bastante precisas, o que é interessante apontar, uma vez que esses sinais contêm uma quantidade considerável de ruído de medição inevitável.

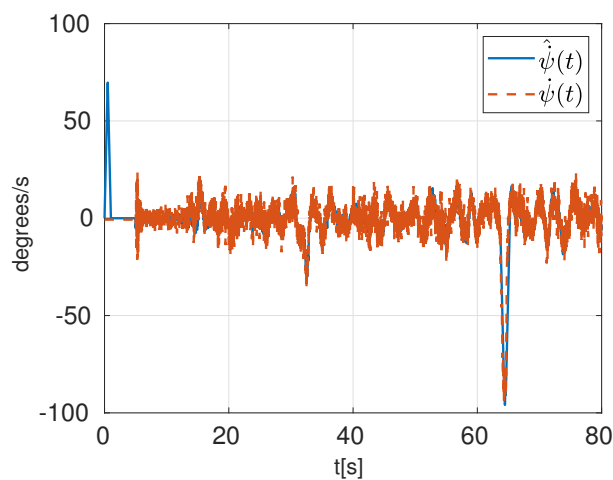


Figura 33 Comparação entre derivada do ângulo *roll* (ψ) estimado e medido.

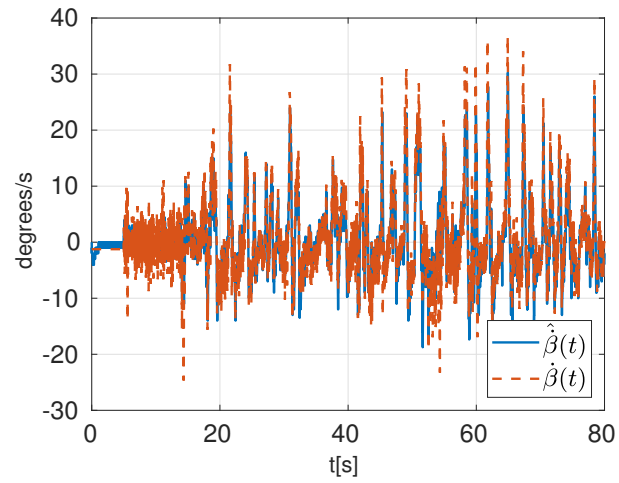


Figura 34 Comparação entre derivada do ângulo *pitch* (β) estimado e medido.

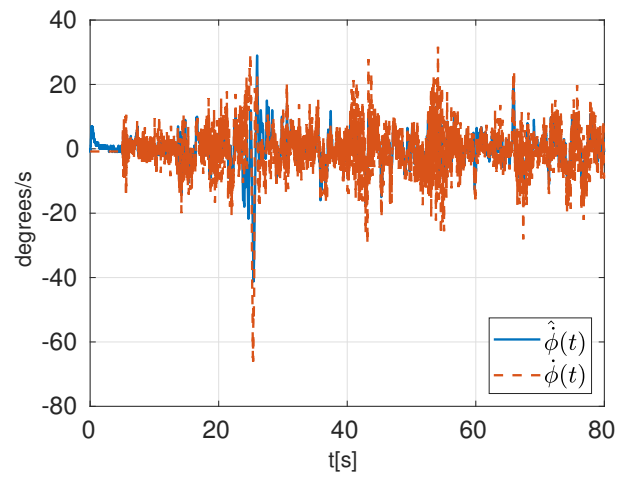


Figura 35 Comparação entre derivada do ângulo *yaw* (ϕ) estimado e medido.

CONCLUSÃO

Esta dissertação trouxe uma nova contribuição ao MRAC Binário Multivariável (BM-RAC), aplicando uma generalização MIMO de um método de estimação baseado em diferenciadores globais com ganhos dinâmicos e modos deslizantes de ordem superior. O controlador proposto no Capítulo 1 resolve o problema de rastreamento exato para uma categoria de plantas multivariáveis (quadradas), incertas e com grau relativos arbitrários não uniformes via realimentação de saída. Uma condição semelhante à passividade para a matriz de HFG do sistema foi usada a fim de contornar os requisitos de simetria, normalmente admitidos nas técnicas clássicas de controle adaptativo multivariável. A estabilidade exponencial global e o rastreamento exato foram demonstrados. A efetividade do controlador foi ilustrada, no Capítulo 2, utilizando uma simulação numérica com dados de entrada coletados de sensores reais, mostrando assim os benefícios do método de controle adaptativo proposto em termos de respostas transitórias exponencialmente rápidas e sinais de controle sem *chattering*. No, Capítulos 3 e 4 são apresentadas aplicações do controle vetorial unitário apresentado para problemas de estabilização de uma câmera em um VANT usando um gimbal de três eixos, com atuador mecânico e na presença de desequilíbrios mecânicos, incertezas de parâmetros e distúrbios não lineares dependentes de estado. A técnica apresentada emprega uma nova classe de diferenciadores exatos globais, baseados em ganhos dinâmicos e modos deslizantes de ordem superior que também podem ser usados para fins de estimação. As simulações apresentadas no Capítulo 4 são de dados experimentais adquiridos de um VANT em voo autônomo, a fim de verificar a efetividade da abordagem em condições práticas.

TRABALHOS FUTUROS

Trabalhos futuros incluem compensação de movimento translacional, rastreamento de um ponto de interesse e uso de informações de imagem para inferir sobre a orientação da câmera, [52], [53], [54], [55], bem como rastreamento visual e estratégias de navegação usando algoritmo de visão computacional. Podem ser utilizados simuladores como o ROS/Gazebo, os quais podem ser utilizados com modelos com gimbal de dois ou três eixos. Esses modelos podem ser o *Iris with Standoffs and Camera LiftDrag ArduCopter Plugins* e *Typhoon h480 RS*, ambos com gimbal de dois e três eixos, respectivamente. Além disso, pode ser utilizado o pacote OpenCV para reconhecimento de alvo, assim como em [56] [57].

REFERÊNCIAS

- [1] HILKERT, J. Inertially stabilized platform technology: Concepts and principles. *IEEE Control System Magazine*, n. 28, p. 26–46, 2008.
- [2] MASTEN, M. Inertially stabilized platforms for optical imaging systems. *IEEE Control System Magazine*, p. 47–64, 2008.
- [3] WANG, T. W. H. Strategic inertial navigation systems. *Seventh International Symposium on Intelligent Robotic Systems (SIRS)*, 1999.
- [4] HURAK, M. R. Z. Image-based pointing and tracking for inertially stabilized airborne camera platform. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 20, p. 1146–1159, 2012.
- [5] HAMEL, R. M. T. Attitude estimation on $SO(3)$ based on direct inertial measurements. In: *Proc. of the 2006 IEEE Int. Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 2170–2175.
- [6] CARRILLO A. E. D. LOPEZ, R. L. C. P. L. R. G. Combining stereo vision and inertial navigation system for a quad-rotor uav. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, v. 65, p. 373–387, 2011.
- [7] PYRKIN, A. I. A. Adaptive output regulation of right-invertible MIMO LTI systems, with application to vessel motion control. *European Journal of Control*, v. 46, p. 63–79, 2019.
- [8] IOANNOU, K. S. P. *Robust Adaptive Control*. [S.l.]: Prentice Hall.
- [9] TAO, G. *Adaptive Control Design and Analysis*. [S.l.]: Wiley, 2003.
- [10] BATTISTEL ANDREI, V. P. V. N. M. N. E. V. L. H. L. Multivariable binary MRAC with guaranteed transient performance using non-homogeneous robust exact differentiators. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer, v. 32, n. 2, p. 378–389, 2021.
- [11] EVREN F. YABUZ, M. U. S. High precision stabilization of pan-tilt systems using reliable angular acceleration feedback from a master-slave kalman filter. *Journal of Intelligent Robotic System*, v. 88, p. 97–127, 2017.

- [12] MAO S. LI, Q. L. J. Y. J. Design and implementation of continuous finite-time sliding mode control for 2-dof inertially stabilized platform subject to multiple disturbances. *ISA Transactions*, v. 84, p. 214–224, 2019.
- [13] ABDO A. R. VALI, A. T. M. R. A. M. Research on the cross-coupling of a two axes gimbal system with dynamic unbalance. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, v. 10, 2013.
- [14] GURUMURTHY, D. K. D. G. Terminal sliding mode disturbance observer based adaptive super twisting sliding mode controller design for a class of nonlinear systems. *European Journal of Control*, 2020.
- [15] SADALA, B. M. P. S. P. Super-twisting control using higher order disturbance observer for control of siso and mimo coupled systems. *ISA Transactions*, v. 106, p. 303–317, 2020.
- [16] WU J. ZHANG, B. C. S. Adaptive super-twisting sliding mode observer based robust backstepping sensorless speed control for ipmsm. *ISA Transactions*, v. 92, p. 155–165, 2019.
- [17] LEVANT, M. L. A. Robust exact filtering differentiators. *European Journal of Control*, v. 55, p. 33–44, 2020.
- [18] AGUILAR-IBANEZ M. SUAREZ-CASTANON, J. M.-C. O. G.-F. C. M.-Z. J. A. M.-C. C. A simple approach to regulate a pvtol system using matching conditions. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, v. 98, p. 511–524, 2020.
- [19] LEVANT, A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, v. 76, p. 924–941, 2003.
- [20] OLIVEIRA A. ESTRADA, L. F. T. R. Global and exact hosm differentiator with dynamic gains for output-feedback sliding mode control. *Automatica*, v. 81, n. 7, p. 156–163, 2017.
- [21] OLIVEIRA V. H. P. RODRIGUES, L. F. T. R. Generalized model reference adaptive control by means of global hosm differentiators. *Transactions on Automatic Control*, v. 64, n. 5, p. 2053–2060, 2019.
- [22] HSU, L.; COSTA, R. R. B-MRAC: Global exponential stability with a new model reference adaptive controller based on binary control theory. *C-TAT - Control-Theory and Advance Technology*, v. 10, n. 04, p. 649–668, December 1994. Special Issue on Sliding Mode Control (invited paper).

- [23] YANQUE, I. et al. Binary mimo mrac using a passifying multiplier — a smooth transition to sliding mode control. In: . [S.l.: s.n.], 2012. p. 1925–1930. ISBN 978-1-4577-1095-7.
- [24] BAIDA, S. V.; IZOSIMOV, D. B. Vector method of design of sliding motion and simplex algorithms. *Avtomat. i Telemekh*, v. 7, p. 56–63, 1985.
- [25] HSU, L.; COSTA, R. R.; CUNHA, J. P. V. S. Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, p. 543–556, 2003.
- [26] OLIVEIRA TIAGO ROUX, L. A. C. P. A. J. H. L. Overcoming limitations of uncalibrated robotics visual servoing by means of sliding mode control and switching monitoring scheme. *Asian Journal of Control*, v. 16, n. 3, p. 752–764, 2014.
- [27] HSU LIU, O. T. R. C. J. P. V. S. Y.-L. Adaptive unit vector control of multivariable systems using monitoring functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 29, n. 3, p. 583–600, 2019.
- [28] FLOQUET, T.; SPURGEON, S. K.; EDWARDS, C. An output feedback sliding mode control strategy for mimo systems of arbitrary relative degree. p. 3721–3726, 2007.
- [29] OLIVEIRA TIAGO ROUX, R. V. H. P. B. A. F. L. M. Global multivariable hosm differentiator for output-feedback unit vector control of nonuniform relative degree systems. In: *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 233–238.
- [30] OLIVEIRA TIAGO ROUX, R. V. H. P. B. A. F. L. Multivariable extension of global finite-time hosm based differentiator for output-feedback unit vector and smooth binary control. *Asian Journal of Control*, v. 21, n. 1, p. 3–20, 2019.
- [31] OLIVEIRA V. RODRIGUES, A. E. L. M. F. T. R. Hosm differentiator with varying gains for global/semi-global output feedback. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 1728–1735, 2017. ISSN 2405-8963. 20th IFAC World Congress.
- [32] OLIVEIRA V. RODRIGUES, A. E. L. F. T. R. Output-feedback variable gain super-twisting algorithm for arbitrary relative degree systems. *International Journal of Control*, Taylor Francis, v. 91, n. 9, p. 2043–2059, 2018.

- [33] RODRIGUES, V. H. P.; OLIVEIRA, T. R. Global adaptive hosm differentiators via monitoring functions and hybrid norm-state observers for output feedback. *International Journal of Control*, v. 91, p. 1–27, 10 2017.
- [34] FILLIPOV, A. F. Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, p. 199–231, 1964.
- [35] BARKANA, I.; TEIXEIRA, M. C. M.; HSU, L. Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control. *Automatica*, v. 39, n. 9, p. 1611–1616, 2006.
- [36] HSU M. C. M. TEIXEIRA, R. R. C. E. A. L. Necessary and sufficient condition for generalized passivity, passification and application to multivariable adaptive systems. In: *Proc. of the 18th IFAC World Congress*. Milan: [s.n.], 2011.
- [37] STRANG, G. *Linear Algebra and Its Applications*. [S.l.]: Academic Press, 1980.
- [38] KAILATH, T. *Linear Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1980.
- [39] NUNES, E. V. L. et al. Global exact tracking for uncertain mimo linear systems by output feedback sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, v. 351, n. 4, p. 2015–2032, 2014.
- [40] BATTISTEL, A.; NUNES, E. V. L.; HSU, L. Multivariable BMRAC extension to arbitrary relative degree using global robust exact differentiators. In: *13th Workshop on Variable Structure Systems*. Nantes: [s.n.], 2014.
- [41] CUNHA, J. P. V. S.; COSTA, R. R.; HSU, L. Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems. *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 55, n. 11, p. 4031–4046, 2008.
- [42] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. [S.l.]: Springer, 1995.
- [43] SCIAVICCO B. SICILIANO, L. V. G. O. L. *Robotics: modelling, planning and control*. [S.l.]: Springer Verlag, 2009.
- [44] LEVANT, A.; LIVNE, M. Exact differentiation of signals with unbounded higher derivatives. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 4, p. 1076–1080, 2012.

- [45] MORENO, J. A. Exact differentiator with varying gains. *Int. J. Contr.*, v. 91, n. 9, p. 1983–1993, 2018.
- [46] BATTISTEL, A.; LIZARRALDE, F.; HSU, L. Inertially stabilized platforms using only two gyroscopic measures and sensitivity analysis to unmodeled motion. *2012 American Control Conference (ACC)*, p. 4582–4587, 2012.
- [47] SASTRY, S. S.; BODSON, M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*. [S.l.]: Prentice Hall, 1989.
- [48] WEN, J. T.; KREUTZ-DELGADO, K. The attitude control problem. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 36, n. 10, p. 1148–1162, 1991.
- [49] PENNESTRI V. ROSSI, P. S. P. P. V. E. Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear Dynamics*, p. 1785–1801, 2016.
- [50] LEVANT, A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 09, p. 924–941, 2003.
- [51] UTKIN J. GULDNER, J. S. V. *Sliding Mode Control In Eletromechanical Systems*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1999.
- [52] WU, J. et al. Fast complementary filter for attitude estimation using low-cost marg sensors. *IEEE Sensors Journal*, v. 16, n. 18, p. 6997–7007, 2016.
- [53] FOURATI HASSEN, M. N. A. L. H. Y. Complementary observer for body segments motion capturing by inertial and magnetic sensors. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 19, n. 1, p. 149–157, 2014.
- [54] HAMEL, T.; SAMSON, C. Riccati observers for the nonstationary pnp problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 63, n. 3, p. 726–741, 2018.
- [55] HADFIELD, S.; LEBEDA, K.; BOWDEN, R. Hard-pnp: Pnp optimization using a hybrid approximate representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 41, n. 3, p. 768–774, 2019.
- [56] GOMEZ-BALDERAS J. E., F. G. G. C. L. R. L. R. Tracking a ground moving target with a quadrotor using switching control. *Journal of Intelligent Robotic Systems*, v. 70, p. 65–78, 04 2013.

- [57] KIM, J.; SHIM, D. H. A vision-based target tracking control system of a quadrotor by using a tablet computer. In: *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1165–1172.