



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Rodrigo Araújo da Silva Vartuli

**Termodinâmica e estrutura de fases de uma teoria de  
multicampos escalares na presença de temperatura e potencial  
químico**

Rio de Janeiro

2011

Rodrigo Araújo da Silva Vartuli

**Termodinâmica e estrutura de fases de uma teoria de multicampos escalares  
na presença de temperatura e potencial químico**



Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor, ao Programa  
de Pós-Graduação em Física, da Universi-  
dade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos

Rio de Janeiro

2011

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

V326

Vartuli, Rodrigo Araújo da Silva.

Termodinâmica e estrutura de fases de uma teoria de multcampos escalares na presença de temperatura e potencial químico / Rodrigo Araújo da Silva Vartuli. – 2011. 103 f. : il.

Orientador: Rudnei de Oliveira Ramos.

Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Simetria quebrada (Física) - Teses. 2. Teoria quântica de campos - Teses. 3. Perturbação (Matemática) – Teses. I. Ramos, Rudnei de Oliveira. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Rodrigo Araújo da Silva Vartuli

**Termodinâmica e estrutura de fases de uma teoria de multicampos escalares  
na presença de temperatura e potencial químico**

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor, ao Programa  
de Pós-Graduação em Física, da Universi-  
dade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de Maio de 2011.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr. César Augusto Linhares Junior  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

---

Prof. Dr. Heron Carlos de Godoy Caldas  
Universidade Federal de São João Del-Rei

---

Prof<sup>a</sup>. Dr. José Abdalla Helayël- Neto  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

---

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci  
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2011

## DEDICATÓRIA

A minha família e aos meus amigos, que me deram todo o suporte, e a natureza, infinita fonte de inspiração.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, pelo apoio durante todos esses anos de estudos, pelo apoio, suporte e incentivo.

Um agradecimento especial ao prof. Rudnei de O. Ramos, pela sua perseverança e paciência ao longo dos últimos oito anos, me proporcionando amplas oportunidades de aprendizado e crescimento acadêmico.

Agradeço ao professor o Dr. Ricardo Faria pelos constantes incentivos, pelas ajudas prestadas nos momentos críticos, pelos trabalhos em conjunto nesses últimos quatro anos, pelas "chamadas" quando eu mergulhava em meus momentos de inércia (sem trocadilhos com a dinâmica de corpos rígidos).

Agradeço aos professores do PPGF que fizeram parte da minha formação durante o mestrado e o doutorado, em especial, os professores José Roberto Mahon, César Linhares, Marcelo Chiapparine, Henrique Pereira e Nilson Antunes.

Agradeço aos secretários Rogério, Isabel e Laurimar, pela disposição constante em ajudar e pelo seu exemplo de dedicação e profissionalismo.

Agradeço a FAPERJ, pelo apoio financeiro.

Agradeço a todos os meus amigos da pós graduação por todos os bons momentos que passamos e passaremos juntos. Embora agradeça a todos, vale citar os mais próximos: Leandro Alexandre, Walter Aldar, Gustavo Vicente, Daniel Tedesco, Bruno Osório, Bruno Inchausp, Marcelo Ferreira, Raimundo Nonato, Paulo, Gustavo Vicente e Carlos Letta (in memoriam).

Pois as suas qualidades invisíveis — isto é, seu poder eterno e Divindade, são claramente vistas desde a criação do mundo, porque são percebidas por meio das coisas feitas, de modo que eles não têm desculpa.

*Romanos 11:20*

Never forget what you are, the rest of the world will not.

*Tyrion Lannister, Game of Thrones*

## RESUMO

VARTULI, R. A. S.. *Termodinâmica e estrutura de fases de uma teoria de multicampos escalares na presença de temperatura e potencial químico*. 2011. 103 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

A possibilidade de que simetrias possam ser quebradas (ou permanecerem quebradas) em altas temperaturas não é nova. Este fenômeno, usualmente chamada de quebra inversa de simetria (ISB em inglês), ou não-restauração de simetria (SNR), foi primeiramente proposto em 1974, por Weinberg, onde foi considerada a análise da aproximação de um laço para o potencial efetivo para um modelo de dois campos escalares interagentes. ISB ou SNR é uma consequência direta que em teorias com dois ou mais campos, as constantes de acoplamentos entre os campos podem receber valores negativos, permanecendo o potencial ainda limitado por baixo. Sob estas circunstâncias, os efeitos de quebra de simetria podem ser acentuados em altas temperatura, uma vez que efeitos térmicos são levados em conta. No entanto, a expansão perturbativa pode quebrar a altas temperaturas ou densidades quando as potências das constantes de acoplamento são suplantadas pelas potências da temperatura. Desta forma, ISB ou SNR poderia ser apenas uma consequência da teoria de perturbação. Uma forma alternativa para tratar deste problema é fazer uso do método não perturbativo da teoria de perturbação otimizada, TPO, que envolve a modificação da teoria de perturbação convencional junto com um procedimento de otimização, o princípio de sensibilidade mínima, PSM, que fixa os parâmetros variacionais auxiliares introduzidos pela TPO. Nesta tese, nós investigamos os fenômenos de ISB e SNR, levando-se em conta efeitos de temperatura e densidade finitas em ambos os casos, perturbativo e não-perturbativo. Para o caso perturbativo, calculamos o potencial efetivo a um laço e, por meio dele, obtemos expressões para os valores esperados no vácuo para os campos escalares considerados no modelo. Após resumirmos o método da TPO, nós o utilizamos para calcular as correções para massa térmica até a segunda ordem obtendo nossos resultados para os diferentes aspectos de simetria para esta teoria multi-escalar. Comparamos os resultados obtidos para os casos perturbativo e não-perturbativo bem como com outros resultados existentes na literatura obtidos por diferentes métodos.

Palavras-chave: Simetria quebrada. Teoria quântica de campos. Perturbação. Potencial químico.

## ABSTRACT

VARTULI, R. A. S.. *Thermodynamics and phase structure of a multiscale fields theory in the presence of temperature and chemical potential*. 2011. 103 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

The possibility that symmetries may be broken (or remain broken) at high temperatures is not new. This phenomenon is usually called inverse symmetry breaking (ISB) or symmetry nonrestoration (SNR) and, it was proposed initially for Weinberg, in 1974, studying a model with two interacting scalar fields infinite temperature. He shows that ISB or SNR is a direct consequence that in two or multifield theories some of the coupling constants between fields can be negative while the model is still bounded from below. In 1981, Benson, Bernstein e Dodelson show that ISB or SNR would be found in a model with a complex scalar field. This happens because in complex scalar fields model, there are the presence of a conserved charge. In this case, effects of density must be considered and, this effects inducing the emergence of ISB or SNR. Our purpose consist in investigate the phenomenon of inverse symmetry brake or symmetry non restauration to a model with two interacting complex scalar fields. In a first step, we calculate the one loop approximation for the effective potential. In the second step, we use the non perturbative approach called OPT, optimized perturbation theory, to calculate the thermal mass up to second order in the expansion. The justification to use a non perturbative approach is that the perturbative expansion can break down in high temperature. The results obtained for the perturbative case and the non perturbative case are compared and we will show that the results strongly supporting inverse symmetry breaking (or symmetry nonrestoration).

Keywords: Symmetry brake. Quantum field theory. Perturbation. Chemical Potential.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Valor esperado para o campo $\phi$ em uma teoria multiescalar com carga $n_\psi = \eta_\psi T^3$ e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram $\lambda_\phi = 0.08$ , $\lambda_\psi = 0.08$ e $\lambda = -0.026$ . Consideramos $\eta_\psi = 0.01$ (sendo este mantido fixo). . . . .	56
Figura 2 -	Valor esperado para o campo $\psi$ em uma teoria multiescalar com carga $n_\psi = \eta_\psi T^3$ e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram $\lambda_\phi = 0.08$ , $\lambda_\psi = 0.08$ e $\lambda = -0.026$ . Consideramos $\eta_\psi = 0.01$ (sendo este mantido fixo). . . . .	57
Figura 3 -	Valor esperado para o campo $\phi$ em uma teoria multiescalar com carga $n_\phi = \eta_\phi T^3$ e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram $\lambda_\phi = 0.08$ , $\lambda_\psi = 0.08$ e $\lambda = -0.026$ . Consideramos $\eta_\psi = 0.01$ (sendo este mantido fixo). . . . .	58
Figura 4 -	Valor esperado para o campo $\psi$ em uma teoria multiescalar com carga $n_\psi = \eta_\psi T^3$ e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram $\lambda_\phi = 0.08$ , $\lambda_\psi = 0.08$ e $\lambda = -0.026$ . Consideramos $\eta_\psi = 0.01$ (sendo este mantido fixo). . . . .	59
Figura 5 -	Diagramas referentes as contribuições para as auto energias dos campos até segunda ordem na TPO. Linhas cheias nos laços (loops) se referem ao propagador de um campo $i$ , enquanto que linhas pontilhadas ao propagador de um outro campo $j$ ( $i, j = \phi, \psi$ ). Os pontos cheios são inserções de $\delta\eta_i^2$ e os pontos cruzados referem-se a correções de renormalização de massa (se estão sobre um propagador) ou de renormalização de constante de acoplamento (se estão num vértice). . . . .	80
Figura 6 -	Diagramas contribuindo para o contratermo de renormalização de massa em primeira ordem na TPO. . . . .	84
Figura 7 -	Diagramas contribuindo para o contratermo de renormarmalização de vértice. Note que essas contribuições são de segunda ordem na TPO. . . . .	86
Figura 8 -	A temperatura critica $T_c/m_\phi$ para ISB na direção de $\phi$ , como função do potencial químico $\mu$ ( $= \mu_\phi = \mu_\psi$ ) para os seguintes valores de parâmetros: $m_{\phi,\psi}^2/\mu^2 = 1.0$ , $\lambda_\phi = 0.012$ , $\lambda_\psi = 0.4$ e $\lambda = -0.03$ . A linha cheia é o resultado obtido na aproximação perturbativa a um laço, a linha tracejada corresponde aos resultados obtidos pelo procedimento PSM e a linha pontilhada são os resultados obtidos pelo procedimento FAC. . . . .	92

Figura 9 -	A massa quadrática efetiva para $\phi$ , $M_\phi^2/m_\phi^2$ , como uma função da temperatura, para $\mu_\phi = \mu_\psi = 0$ , $m_{\phi,\psi}^2/\mu^2 = 1.0$ , $\lambda_\phi = 0.009$ , $\lambda_\psi = 0.1$ e $\lambda = -0.01$ . A linha cheia é o resultado obtido na aproximação perturbativa a um laço, a linha tracejada corresponde aos resultados obtidos pelo procedimento PSM e a linha pontilhada são os resultados obtidos pelo procedimento FAC. . . .	94
Figura 10 -	O mesmo que na figura 9, mas para a massa quadrática efetiva térmica para o campo $\psi$ , $M_\psi^2/m_\psi^2$ . . . . .	95
Figura 11 -	A massa quadrática efetiva para $\phi$ , $M_\phi^2/m_\phi^2$ , como função da temperatura, para $\mu_\phi/M = \mu_\psi/M = 0.99$ , $m_{\phi,\psi}^2/M^2 = 1.0$ , $\lambda_\phi = 0.009$ , $\lambda_\psi = 0.1$ and $\lambda = -0.01$ . A linha cheia é o resultado obtido na aproximação perturbativa a um laço, a linha tracejada corresponde aos resultados obtidos pelo procedimento PSM e a linha pontilhada são os resultados obtidos pelo procedimento FAC. . . .	96
Figura 12 -	O mesmo que na figura 9, mas para a massa quadrática efetiva para $\psi$ , $M_\psi^2/m_\psi^2$ . . . . .	97

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados para a temperatura crítica para ISB obtida na aproximação perturbativa em um laço, na TPO com otimização via PSM e otimização via FAC, respectivamente. . . . .	93
Tabela 2 - Resultados para a temperatura crítica para ISB obtida na aproximação perturbativa em um laço, na TPO com otimização via PSM e otimização via FAC, respectivamente. . . . .	93

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
1	<b>TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS TÉRMICA</b> . . . . .	16
1.1	<b>Amplitudes de transição para bosons</b> . . . . .	16
1.1.1	<u>O Propagador de um campo escalar em temperatura finita</u> . . . . .	19
1.1.2	<u>O Propagador de Matsubara</u> . . . . .	22
1.2	<b>O Campo Escalar Neutro</b> . . . . .	23
1.2.1	<u>Cálculo das correções a um laço</u> . . . . .	24
1.2.2	<u>O Potencial Efetivo para um Campo Escalar Neutro</u> . . . . .	27
1.3	<b>Campo Escalar Carregado</b> . . . . .	30
1.3.1	<u>Potencial Efetivo para Campo Carregado</u> . . . . .	32
2	<b>ESTRUTURA DE FASES E POTENCIAL EFETIVO</b> . . . . .	38
2.1	<b>Potencial Efetivo a um laço para Modelo de Dois Campos Es-</b> <b>calares Complexos Interagentes</b> . . . . .	38
2.2	<b>Tomando o Limite de Alta Temperatura</b> . . . . .	43
2.3	<b>A Estrutura de Fases do Modelo</b> . . . . .	52
2.3.1	<u>Limite de Altas Densidades e Altas Temperaturas</u> . . . . .	52
2.3.2	<u>Fases de ISB e SNR</u> . . . . .	54
3	<b>TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA</b> . . . . .	61
3.1	<b>Uma Breve Apresentação</b> . . . . .	61
3.2	<b>Quebra da Teoria de Perturbação em Teoria Quântica de Campos</b> . . . . .	62
3.3	<b>Quebra da Teoria de Perturbação em Altas Temperaturas</b> . . . . .	69
3.4	<b>Teoria de Perturbação Otimizada</b> . . . . .	71
3.5	<b>Indo além de Teoria de Perturbação - Uso da TPO</b> . . . . .	73
4	<b>APLICAÇÃO DA TPO PARA O MODELO DE DOIS CAMPOS</b> <b>ESCALARES COMPLEXOS INTERAGENTES</b> . . . . .	77
4.1	<b>Correções para Massa Térmica na TPO</b> . . . . .	77
4.1.1	<u>Massa Térmica em Primeira Ordem</u> . . . . .	80
4.1.2	<u>Massa Térmica em Segunda Ordem na TPO</u> . . . . .	84
4.2	<b>Resultados</b> . . . . .	89
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	99
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	101

## INTRODUÇÃO

A união de duas das mais bem sucedidas teorias em física, a saber, mecânica quântica e física estatística, trouxe explicações satisfatórias para uma grande gama de fenômenos físicos de interesse no passado como, por exemplo, a radiação de corpo negro e as transições de fases. Posteriormente este conceito foi estendido para teorias de campos não-relativísticas em temperatura e densidades finitas, nos anos 50, por Matsubara [1] no contexto de física da matéria condensada. Em meados dos anos 60, Fradkin [2] generalizou para englobar teorias de campos relativísticas. Após ter permanecido adormecida por alguns anos, teorias de campos a temperatura finita foram redescobertas e sistematicamente desenvolvidas nas últimas décadas como pode ser visto, por exemplo em [3].

Atualmente, teorias quânticas de campos em temperatura e densidades finitas provêm o aparato teórico para descrever física em ambientes extremos como por exemplo a fase desconfiada dos quarks e gluons (chamada de plasma quark-gluon), que acredita-se ter ocorrido no universo primordial e em estudo atualmente no laboratório, através de colisões relativísticas de íons pesados, bem como supercondutividade colorida<sup>1</sup> na fase CFL (do Inglês, "color-flavor-locked" ou cor-sabor-fixos) em densidades muito altas, que pode ser observado em objetos astrofísicos de grande interesse como, por exemplo, estrelas de neutrons.

Entretanto, teorias quântica de campos, em particular, teorias de calibre, via de regra, apresentam um grande grau de complexidade o que requer o uso de uma série de esquemas de aproximação para que se obtenha uma solução para a teoria. Um dos esquemas, baseado em teoria de perturbação, consiste numa expansão de um parâmetro da teoria, como por exemplo, a constante de acoplamento, desprezando-se os termos de ordem mais alta na expansão. Um exemplo de sucesso da aplicação deste método obtido na Eletrodinâmica Quântica para a obtenção do fator  $g$  de Landè do elétron, relacionado ao momento magnético orbital e de spin, onde se obteve seu valor com uma precisão de 1 parte em  $10^9$ . Enquanto que a teoria de perturbação obteve sucesso nesta e em outras áreas, há inúmeros casos onde a expansão do parâmetro não é pequena e as contribuições de ordem mais alta tornam-se significativas. Neste contexto, o método perturbativo não é mais aplicável, pois neste caso teoria de perturbação não produzirá uma sequência convergente, dando-nos na melhor das hipóteses, uma sequência assintótica, e os setores fortemente interagentes da teoria permanecem fora de nosso entendimento.

---

<sup>1</sup> Supercondutividade colorida é um fenômeno que é previsto ocorrer em matéria de quarks se a densidade de bárions é suficientemente alta (bem acima da densidade nuclear) e a temperatura não é demasiadamente alta (bem abaixo de  $10^{12}$  kelvins). Fases de supercondutividade colorida são contrastantes com a fase normal da matéria de quark, a qual é só um líquido de Fermi de quarks com interações fracas

Um exemplo de grande interesse em física, onde a teoria de perturbação pode não fornecer uma descrição satisfatória, consiste na descrição de transições de fase em geral. Transições de fase podem ocorrer quando um parâmetro externo ao sistema, tal como variações de temperatura, densidade, campos externos (magnético e elétrico), etc causam uma mudança no estado de simetria do sistema. Tipicamente, esperamos que transições de fase estejam relacionadas com fenômenos envolvendo quebras espontâneas de simetria (lembrando que uma quebra espontânea de simetria sempre ocorre quando a Hamiltoniana de um dado sistema, seja ele clássico ou quântico, possui uma simetria definida mas o estado fundamental, ou de vácuo, do sistema não manifesta essa simetria).

Os fenômenos mais usuais de transições de fase envolvendo quebras espontâneas de simetria são aqueles onde o sistema passa de um estado menos simétrico para um estado mais simétrico, a medida que se aumenta por exemplo a temperatura. Entretanto, a possibilidade de que haja fenômenos onde simetrias podem ser quebradas a altas temperaturas, ou também a possibilidade de permanecerem quebradas mesmo quando se aumenta a temperatura, fenômenos esses mais comumente chamados de quebra inversa de simetria (em inglês ISB) ou não-restauração de simetria (SNR) são de grande interesse. Fenômenos desses tipos em teoria de campos foram primeiramente propostos por Weinberg [5] em 1974, ao trabalhar em um modelo com dois campos escalares interagentes a temperatura finita. ISB ou SNR é uma consequência direta do fato que em uma teoria de multicampos algumas das constantes de acoplamento entre os campos podem ser negativas, permanecendo ainda o modelo limitado por baixo. Este pode ser o caso em alguma extensão do modelo padrão com um grande setor composto de campos escalares interagentes. Sob estas condições, efeitos de quebra de simetria podem ser acentuados a altas temperaturas, onde efeitos térmicos são levados em conta no modelo.

Tanto no estudo de transições de fase em geral, como também naqueles casos incluindo os fenômenos de ISB e SNR, pode ocorrer situações em que há regimes de parâmetros onde potência das constantes de acoplamento são superadas pelas potências na temperatura, ou devido ao aparecimento de divergências de infravermelho próximas a pontos críticos nessas teorias de campos exibindo transições de fase [4, 6]. Nessas circunstâncias, esperamos que o uso de teoria de perturbação perca a validade e métodos não-perturbativos sejam necessários para uma completa descrição de transições de fase nesses sistemas. Além do mais, as condições de vínculo sobre as constantes de acoplamento, que podem ser importantes para a observação de ISB ou SNR, usualmente requerem grandes valores para os acoplamentos. Nesses casos as correções de laço de mais alta ordem podem também se tornar importantes e mudar drasticamente a região de parâmetros do modelo (em termos das constantes de acoplamento e massa) para ISB ou SNR. Uma vez que no estudo original sobre ISB e SNR, feito por Weinberg foi baseado numa aproximação perturbativa em ordem mais baixa, há a possibilidade de que ISB/SNR sejam apenas artefatos da simples aproximação utilizada e que a consideração de termos

de mais alta ordem e inclusão de efeitos não-perturbativos, possam mudar a situação com respeito a esses fenômenos envolvendo quebras de simetria e transições de fase. Muitos esforços, usando-se diferentes métodos, já foram realizados na tentativa de se encontrar uma resposta satisfatória para este problema embora os resultados obtidos tenham sido, até então, um tanto quanto controversos. Por exemplo, os fenômenos foram estudados usando-se grupos de renormalização de Wilson [7], onde levou-se em conta uma varredura das constantes de acoplamento (dependentes da temperatura), mostrando que de fato a intensidade de todos os acoplamentos aumentam da mesma forma com a temperatura. Esta análise mostra que uma vez que os acoplamentos são fixados em alguma escala (de temperatura), assim como ocorre em ISB/SNR, não pode ser revertido em temperaturas mais altas. Ramos e Pinto [8] também trataram do problema não perturbativamente, levando em conta as trabalhosas contribuições de dois loops. Os resultados obtidos em [8] estão em boa concordância com aqueles obtidos por meio do método do grupo de renormalização mostrados no trabalho da referência [7] e, além do mais, também dão suporte a possibilidade da ocorrência de ISB/SNR em modelos multiescalares relativísticos em temperaturas extremamente altas, onde a teoria de perturbação padrão é esperada quebrar, de acordo com a discussão acima. Apesar destes sucessos, outros autores, por meio de outros métodos, não deram suporte a existência de ISB/SNR. Este é o caso de Bimonte e colaboradores [9], que fizeram uso de simulação de Monte Carlo.

Desde a sua proposta, o mecanismo de ISB/SNR encontrou uma grande variedade de aplicações. Por exemplo em cosmologia, onde foi implementado em modelos realísticos, suas consequências foram exploradas em conexão com transições de fases em altas temperaturas no universo primordial, com aplicações cobrindo problemas envolvendo violação  $CP^2$  (carga paridade) e bariogênese, formação de defeitos topológicos, inflação, etc. Muitas aplicações são listadas na referência [10], que nos dá uma introdução sobre o assunto discutindo outros contextos onde ISB/SNR podem tomar lugar em conexão com cosmologia e física da matéria condensada. Destes resultados interessantes da teoria quântica de campos a temperatura finita, surgem questões a cerca da possibilidade de sua manifestação em sistemas de matéria condensada, que podem ser descritos por meio de teorias de campos escalares não relativísticos, por exemplo na construção fenomenológica de potenciais de Landau-Ginzburg, ou no estudo de gases de Bose por meio de átomos frios.

O objetivo desta tese consiste em estudar o aparecimento de ISB e SNR em modelos multi escalares em temperatura e densidade finitas (na presença de potenciais químicos devido a cargas conservadas). Para atingirmos este objetivo, faremos uso do método não-

---

<sup>2</sup> A violação carga-paridade, com o uso em teorias que pretendem explicar a assimetria entre a matéria e anti-matéria.

perturbativo conhecido como TPO (Teoria de Perturbação Otimizada), também chamada de expansão delta linear [11,12]. Este método mostrou ser útil em muitas áreas de teoria de campos, oferecendo um método sistemático para se extrair informações das regiões fortemente interagentes, ou seja, naqueles casos onde teoria de perturbação não se aplica ou em que ela pode produzir resultados não confiáveis. A característica básica da TPO consiste num esquema de otimização onde a ação é separada artificialmente nas partes livre e interagente sem recorrer ao uso natural de constantes de acoplamentos como parâmetros de expansão. Por meio da TPO, a divisão da ação nas diferentes partes é realizada por meio de parâmetros auxiliares os quais são então ajustados em cada ordem sucessiva de expansão, nos termos considerados interação, de acordo com algum princípio variacional bem definido e consistente para otimizar a expansão.

A presente tese encontra-se dividida do seguinte modo: no capítulo 2, apresentamos uma revisão de teoria quântica de campos em temperatura finita, fornecendo os conceitos básicos e ferramentas que serão utilizadas em nosso estudo nos capítulos seguintes. No capítulo 3 investigamos como a presença de carga pode alterar os aspectos de simetria de uma teoria multiescalar, a qual tomaremos como sendo um modelo descrito por dois campos escalares complexos auto interagentes e interação entre eles. A termodinâmica desse modelo é realizada por meio do estudo do potencial efetivo calculado ao nível da aproximação de um laço no regime de potencial químico finito e altas temperaturas. Já nesse modelo nessa aproximação mais simples, descreveremos como os fenômenos de ISB e SNR podem ocorrer.

No capítulo 4 mostramos em detalhes a natureza precisa da quebra da teoria de perturbação e apresentamos um breve sumário da TPO, indicando como esta pode ser utilizada como método alternativo, não perturbativo, para solução de problemas onde teoria de perturbação não se aplica.

No capítulo 5 aplicamos a TPO para obtenção das correções envolvendo temperatura e potencial químico para as massas efetivas no modelo de dois campos escalares complexos descritos no capítulo 3. Mostraremos por meio desse cálculo, como os fenômenos de ISB e SNR podem se manifestar mesmo num cálculo de natureza não perturbativa.

No capítulo 6, expomos nossas conclusões finais e possibilidades de trabalhos futuros. Em dois apêndices mostramos também alguns dos detalhes envolvendo nossos cálculos.

# 1 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS TÉRMICA

Neste capítulo, apresentaremos a construção teórica necessária para efetuarmos cálculos de teorias quânticas de campos em temperatura finita. Na seção 2, mostraremos como calcular amplitudes de transição para bósons e, em especial, a forma do propagador em temperatura finita. Na seção 3, mostraremos como calcular a massa térmica e potencial efetivo para o campo escalar neutro para teoria  $\lambda\phi^4$ . Na seção 4, calculamos a massa térmica e o potencial efetivo para o campo escalar carregado.

## 1.1 Amplitudes de transição para bosons

Consideremos um operador de campo escalar  $\hat{\phi}(x)$  com autoestados representados por  $|\phi\rangle$  na representação de Schrödinger. A dinâmica deste operador de campo bosônico é governada pelo operador Hamiltoniano  $\hat{H}$ . Como objetivo inicial, desejamos derivar amplitude de transição deste operador de campo. Dado um estado inicial no instante de tempo  $t$ , a evolução desse estado para um instante de tempo posterior  $t'$  é descrito por um operador de evolução temporal que leva o estado inicial  $|\phi\rangle$  para o estado  $e^{i\hat{H}(t-t')}|\phi\rangle$ . Para calcularmos a transição de amplitude entre este estado evoluído e um estado  $|\phi'\rangle$ , podemos dividir o intervalo  $[t, t']$  em  $n$  sub intervalos iguais de duração  $\delta t = t - t' / (n + 1)$  e inserimos um conjunto completo de auto estados do operador do campo em tempos  $t_1, t_2 \dots t_n$ . Assim, a amplitude de transição é escrita como:

$$\langle \phi' | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int \prod_{i=1}^n d\phi_i \langle \phi_{i+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | \phi_i \rangle \right) \langle \phi_1 | e^{-i\hat{H}\delta t} | \phi \rangle, \quad (1)$$

com  $|\phi_{i+1}\rangle = |\phi'\rangle$ . O Hamiltoniano transporta em si informações sobre o comportamento dinâmico do sistema de modo que ele será um funcional do campo e de seus momentos conjugados,

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}(\hat{\phi}, \hat{\pi}), \quad (2)$$

onde  $\mathcal{H}$  é a densidade Hamiltoniana como função do campo  $\hat{\phi}$  e momento conjugado  $\hat{\pi}$ . Assim, para calcular os elementos da matriz  $\langle \phi' | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \phi \rangle$  inserimos um conjunto completo de estados  $|\pi_i\rangle$  do operador momento conjugado  $\hat{\pi}$ , que nos da

$$\langle \phi' | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \phi \rangle = \int \frac{d\pi_i}{2\pi} \langle \phi_i | \pi_i \rangle \langle \pi_i | e^{-i\hat{H}\delta t} | \phi_i \rangle . \quad (3)$$

Fazendo  $\delta t \rightarrow 0$ , podemos expandir a exponencial na expressão (3) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \langle \pi_i | e^{-i\hat{H}\delta t} | \phi_i \rangle &\sim \langle \pi_i | \left( 1 - i\hat{H}\delta t \right) | \phi_i \rangle \\ &= (1 - iH_i\delta t) \langle \pi_i | \phi_i \rangle . \end{aligned} \quad (4)$$

Fazendo uso da relação

$$\langle \phi | \pi \rangle = \exp \left[ i \int d^3\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) \right], \quad (5)$$

e inserindo o resultado acima em (3) nós encontramos a seguinte expressão para a amplitude de transição,

$$\begin{aligned} \langle \phi' | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \phi \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int \prod_{i=1}^n d\phi_i \langle \phi_{i+1} | e^{-i\hat{H}\delta t} | \phi_i \rangle \right) \\ &\times e^{-i\delta t \sum_{j=1}^n \int d^3x [H(\pi_j, \phi_j) - \pi_j(\phi_{j+1} - \phi_j)/\delta t]} . \end{aligned} \quad (6)$$

Tomando o limite em que  $\delta t \rightarrow 0$ , obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \langle \phi' | e^{-i\hat{H}(t-t')} | \phi \rangle &= \\ &\int [d\phi] [d\pi] e^{-i \int_t^{t'} dt'' \int d^3x \left[ \pi(\mathbf{x}, t'') \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t'')}{\partial t''} - H(\pi(\mathbf{x}, t''), \phi(\mathbf{x}, t'')) \right]} , \end{aligned} \quad (7)$$

com  $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x})$  e  $\phi(\mathbf{x}, t') = \phi'(\mathbf{x})$ , sendo estes os limites sobre a integração funcional de  $[d\phi]$ . Com este resultado, estamos aptos a determinar uma expressão para a função de partição para bósons no ensemble canônico, via integrais funcionais,

$$Z = Tr \exp \left[ -\beta \hat{H} \right] = \int d\phi \langle \phi | e^{-i\beta \hat{H}} | \phi \rangle, \quad (8)$$

onde  $\beta = \frac{1}{T}$  é o inverso da temperatura em unidades onde a constante de Boltzmann é

igual a 1 e o traço é feito somando sobre todos auto estados de  $\hat{H}$ . Notamos pela estrutura formal da equação (8) uma forte semelhança com a transição de amplitude calculada em (6). A conexão entre os dois pode ser feita através da continuação analítica da função de partição para tempo imaginário via a definição

$$\begin{aligned} t &\rightarrow i\tau \\ t' &\rightarrow i\tau' \end{aligned} \tag{9}$$

e identificamos  $\beta = \tau' - \tau$ . Assim,

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{periódico}} [d\phi] \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left( -\pi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \hat{\mathcal{H}}(\pi, \phi) \right) \right], \tag{10}$$

onde o subscrito “periódico” sobre a integração funcional  $[d\phi]$  indica que estamos vinculando a integração sobre todas as configurações de campos em tempo imaginário onde há periodicidade, ou seja,  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta)$ . Esta periodicidade dos campos nos permite deslocar o intervalo de integração em  $\tau$  para  $[0, \beta]$  na exponencial.

Consideremos agora, a densidade Hamiltoniana da forma

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi). \tag{11}$$

Inserimos (11) em (10), obtemos a expressão

$$Z = \int [d\pi] \int_{\text{periódico}} [d\phi] \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left( -\pi \frac{\partial\phi}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) \right) \right], \tag{12}$$

que após efetuarmos a integração sobre os momentos conjugados  $\pi$ , torna-se

$$Z = \langle \phi | e^{-\beta\hat{H}} | \phi \rangle = N \int [d\phi] \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E(\phi) \right), \tag{13}$$

onde  $N$  é alguma constante de normalização que pode ser considerada como 1 sem perda de generalidade e  $\mathcal{L}_E$  é a densidade de Lagrangiana euclídeana, dada por

$$\mathcal{L}_E(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi). \quad (14)$$

A função de partição em (13) fica então dado por

$$Z(\beta) = \int [d\phi] \exp[-S_E(\beta)], \quad (15)$$

onde a ação euclideana é dada por

$$S_E(\beta) = \int_T d^4x \mathcal{L}_E(\phi), \quad (16)$$

com

$$\int_T d^4x = \int_0^\beta d\tau \int d^3x. \quad (17)$$

### 1.1.1 O Propagador de um campo escalar em temperatura finita

Como sabemos, em mecânica quântica, partículas são criadas através de uma fonte, interagem e são posteriormente destruídas em uma fonte. Assim, é conveniente que possamos escrever uma expressão para a função de partição na presença de fontes. Para isso, fazemos a seguinte transformação na densidade de Lagrangiana,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + J(x)\phi(x).$$

Em analogia direta com o caso de temperatura zero, escrevemos o gerador funcional  $Z(\beta, J)$  com  $Z(\beta) = Z(\beta, J = 0)$

$$Z(\beta, J) = \int [d\phi] \exp \left[ -S_E(\beta) + \int_T d^4x J(x)\phi(x) \right]. \quad (18)$$

Diferenciando funcionalmente (18) obtemos o propagador em tempo imaginário e em temperatura diferente de zero,

$$\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta, J)}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{1}{Z(\beta)} \int [d\phi] \phi_1(x) \phi_2(x) e^{-S_E(\beta)}, \quad (19)$$

com  $\phi_1 = \phi(x_1)$  e  $\phi_2 = \phi(x_2)$ . É fácil notar que o propagador pode ser identificado como a média térmica do produto dos operadores de ordenação temporal:

$$\langle T(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left[ e^{-(\beta \hat{H})} T(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) \right], \quad (20)$$

onde  $\hat{\phi}$  é o operador no quadro representação de Heisenberg:

$$\hat{\phi}(-i\tau_1, \mathbf{x}_1) = e^{\hat{H}\tau_1} \hat{\phi}(0, \mathbf{x}_1) e^{-\hat{H}\tau_1}. \quad (21)$$

Para tempo imaginário, o operador de ordenação temporal é definido da forma:

$$\begin{aligned} T \left[ \hat{\phi}(-i\tau_1, \mathbf{x}_1) \hat{\phi}(-i\tau_2, \mathbf{x}_2) \right] &= \hat{\phi}(-i\tau_1, \mathbf{x}_1) \hat{\phi}(-i\tau_2, \mathbf{x}_2), \quad \tau_1 > \tau_2, \\ &= \hat{\phi}(-i\tau_2, \mathbf{x}_2) \hat{\phi}(-i\tau_1, \mathbf{x}_1), \quad \tau_2 > \tau_1, \end{aligned} \quad (22)$$

Considerando o caso em que  $\tau_1 > \tau_2$  temos

$$Z(\beta) \langle T(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) \rangle = \int d\phi \langle \phi | e^{-(\beta-\tau_1)\hat{H}} \hat{\phi}(0, \mathbf{x}_1) e^{-(\tau_1-\tau_2)\hat{H}} \hat{\phi}(0, \mathbf{x}_2) e^{-\hat{H}\tau_2} | \phi \rangle. \quad (23)$$

Inserindo conjuntos completos nos tempos  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , obtemos

$$Z(\beta) \langle T(\hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2) \rangle_\beta = \int d\phi d\phi_1 d\phi_2 \langle \phi | e^{-(\beta-\tau_1)\hat{H}} | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-(\tau_1-\tau_2)\hat{H}} | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | e^{-\hat{H}\tau_2} | \phi \rangle. \quad (24)$$

Se continuarmos a inserir conjuntos completos para os tempos dos estados intermediários do mesmo modo como calculamos a integral de trajetória, poderemos assegurar a equivalência desta média térmica com o propagador da equação (19). Usamos então esta definição com a finalidade de determinar uma expressão para a função  $\Delta(x)$  que é periódica em tempo imaginário,

$$\Delta(x) = \langle T \hat{\phi}(-i\tau, \mathbf{x}) \hat{\phi}(0) \rangle_\beta. \quad (25)$$

Basta-nos agora utilizar a propriedade de ciclicidade do traço na equação (20) para mostrar a importante propriedade satisfeita pelo propagador térmico de um campo escalar,  $\Delta(\tau - \beta, \mathbf{x}) = \Delta(\tau, \mathbf{x})$ , expressão essa conhecida com a identidade de Kubo-Martin-Schwinger (KMS).

Considerando a densidade de Lagrangiana para um campo escalar livre, dada por

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (26)$$

neste caso, o gerador funcional torna-se

$$\begin{aligned} Z_F(\beta, J) &= \int [d\phi] e^{-\int_T d^4x \left( \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - J(x)\phi(x) \right)} \\ &= \int [d\phi] e^{-\int_T d^4x \left( \frac{1}{2}\phi(x) \left[ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}m^2 \right] \phi(x) - J(x)\phi(x) \right)}, \end{aligned} \quad (27)$$

onde o subscrito  $F$  indica que estamos tratando do caso com campos livres. Podemos efetuar a integração funcional sobre  $\phi(x)$  para obter

$$Z_F(\beta, J) = Z_F(\beta, J=0) = \int [d\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_T d^4x d^4y [J(x)K(x, y)J(y)] \right\}, \quad (28)$$

com  $K(x, y)$  satisfazendo a equação

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}m^2 \right) K(x, y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (29)$$

onde  $x = (\tau, \mathbf{x})$  e  $y = (\tau, \mathbf{y})$ . Combinando a Eq. (19), a Eq. (27) e a definição (25), estamos aptos para declarar a equivalência entre  $K$  e  $\Delta_F$  (o propagador livre),

$$K(x, y) = \Delta_F(x - y), \quad (30)$$

com a provisão adicional de que  $\Delta_F$  é periódico em tempo imaginário, com período  $\beta$ , de acordo com a relação de KMS definida pela Eq. (25).

### 1.1.2 O Propagador de Matsubara

Definimos a transformada de Fourier para o propagador  $\Delta_F(x)$  em tempo imaginário na Eq. (25) através de

$$\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Delta_F(x), \quad (31)$$

com a transformação inversa dada por

$$\Delta_F(x) = T \sum_n e^{-i\omega_n\tau} \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}). \quad (32)$$

Uma vez que  $\Delta_F(x)$  é periódico em  $\tau$ , a transformada de Fourier em  $\tau$  é tomada num intervalo finito  $[0, \beta]$ , e as frequências  $\omega_n$  recebem valores discretos,

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (33)$$

sendo estas frequências conhecidas como frequências de Matsubara. Resolvendo a equação (29) com  $\Delta_F(x - y)$  no lugar de  $K(x, y)$  no espaço de Fourier dá-nos obtemos:

$$(\omega_n^2 + \omega_k^2) \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) = 1, \quad (34)$$

onde

$$\omega_k = (\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}. \quad (35)$$

Da equação (34), obtemos o propagador de Matsubara como sendo

$$\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{(\omega_n^2 + \omega_k^2)}. \quad (36)$$

Uma quantidade muito útil em teoria de campos térmica, especialmente quando desejamos efetuar a somas sobre as frequências de Matsubara, como de fato faremos nos cálculos subsequentes, consiste na representação mista  $\Delta_F(\tau, \mathbf{k})$  do propagador. Isto requer que façamos a transformação de Fourier apenas na variável de tempo imaginário,

o que nos dá o resultado

$$\begin{aligned}\Delta_F(\tau, \mathbf{k}) &= T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2\omega_k} [(1 + n_k) e^{-\omega_k \tau} + n_k e^{\omega_k \tau}] ,\end{aligned}\tag{37}$$

onde

$$n_k = \frac{1}{e^{\beta\omega_k} - 1} ,\tag{38}$$

é a função de distribuição de Bose-Einstein. O propagador de Matsubara pode ser reobtido por se efetuar a transformação de Fourier do propagador misto com respeito a variável de tempo de Matsubara  $\tau$ :

$$\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta_F(\tau, \mathbf{k}) .\tag{39}$$

## 1.2 O Campo Escalar Neutro

Nesta seção aplicaremos o formalismo apresentado na seção anterior ao campo escalar neutro com o objetivo de calcular as correções de primeira ordem para a auto-energia para um modelo com auto-interação na teoria  $\lambda\phi^4$ . Estes cálculos nos permitirão entender o formalismo necessário para efetuarmos mais para frente a tarefa muito mais complicada, que consiste em calcular as correções de segunda ordem para a auto-energia para um modelo com dois campos escalares carregados. Consideremos um campo escalar tendo a seguinte densidade de Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) ,\tag{40}$$

onde  $m$  é a massa da partícula representada pelo campo e a interação é contida em  $V(\phi)$ . Procedendo por meio da forma Lagrangiana da integral de trajetória, nós chegamos em

$$Z_F(\beta) = \int [d\phi] \exp \left[ - \int_T d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right) \right] ,\tag{41}$$

com gerador funcional dado por

$$Z(\beta, J) = \int [d\phi] \exp \left[ -S_E(\beta) + \int_T d^4x J(x)\phi(x) \right], \quad (42)$$

onde a ação euclideana é dada pela Eq. (16). Podemos agora fazer uso da estrutura teórica que desenvolvemos para calcular as correções para a massa térmica a um laço para um modelo de campo escalar com termo de interação  $\lambda\phi^4$ .

### 1.2.1 Cálculo das correções a um laço

Primeiramente, relembremos que o propagador  $\Delta_F(x-y)$  pode ser obtido por meio de derivadas do gerador funcional,

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta, J)}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \int [d\phi] \phi_1(x)\phi_2(x) e^{-S_E(\beta)}. \end{aligned} \quad (43)$$

Lembramos ainda que as condições de contorno exibem periodicidade, isto é,  $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(\beta, \mathbf{x})$ . Como nosso objetivo consiste em obter as correções quânticas para a massa térmica a um laço, nós podemos expandir o termo de interação na exponencial até a primeira ordem em  $\lambda$ , onde obtemos

$$e^{-S_E(\beta)} \sim e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left( 1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) \right), \quad (44)$$

onde  $e^{-S_E^{(F)}(\beta)}$  é a ação euclideana livre. Calculamos agora a quantidade

$$\begin{aligned} I(x, y) &= Z(\beta) \Delta^{(1)}(x-y) \\ &= \int [d\phi] \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left( 1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) \right). \end{aligned} \quad (45)$$

temos que  $\Delta^{(1)}(x-y)$  consiste na aproximação de primeira ordem para o propagador  $\Delta(x-y)$ . Utilizando o teorema de Wick

$$\begin{aligned}\langle \phi(x)\phi(y)\phi^4(z) \rangle &= 12\langle \phi(x)\phi(z) \rangle \langle \phi(y)\phi(z) \rangle \langle \phi^2(z) \rangle \\ &+ 3\langle \phi(x)\phi(y) \rangle \langle \phi^2(z) \rangle^2,\end{aligned}\quad (46)$$

e

$$\langle \phi^4(z) \rangle = 3\langle \phi^2(z) \rangle^2, \quad (47)$$

notamos que a integral  $I(x, y)$  torna-se agora

$$\begin{aligned}I(x, y) &= Z(\beta) \left( \Delta(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-y) \Delta_F(z=0) \Delta_F(z-y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{8} \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-y) \Delta_F^2(z=0) \right).\end{aligned}\quad (48)$$

A função de partição completa deve também ser expandida à mesma ordem de  $\lambda$ , de modo que obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}Z(\beta) &= \int [d\phi] \phi(x)\phi(y) e^{-S_E^{(F)}(\beta)} \left( 1 - \frac{\lambda}{4!} \int_0^\beta d^4z \phi^4(z) \right) \\ &= Z(\beta) \left( 1 - \frac{\lambda}{8} \int_0^\beta d^4z \Delta_F^2(z=0) \right).\end{aligned}\quad (49)$$

Dividindo a Eq. (45) por (49) e descartando o termo de  $O(\lambda)$ , nós encontramos o seguinte resultado para o propagador

$$\Delta(x-y) = \Delta_F(x-y) - \frac{\lambda}{2} \int_0^\beta d^4z \Delta_F(x-y) \Delta_F(z=0) \Delta_F(z-y). \quad (50)$$

Tomando a transformada de Fourier da equação (50) e fazendo uso do teorema de Convolução da transformada de Fourier, encontramos que

$$\Delta(i\omega_n, \mathbf{k}) = \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) - \frac{\lambda}{2} \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) \left( T \sum_m \int \frac{d^3 \mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \Delta_F(i\omega_m, \mathbf{k}') \right) \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}). \quad (51)$$

Podemos agora usar a equação (51) para obter a correção perturbativa de primeira ordem para a auto energia, definida por

$$\Delta^{-1}(i\omega_n, \mathbf{k}) = \Delta_F^{-1}(i\omega_n, \mathbf{k}) + \Pi(i\omega_n, \mathbf{k}). \quad (52)$$

Deduzimos que para a primeira ordem de  $\lambda$ , a expressão para  $\Pi$  é independente do momento e é dada por

$$\Pi = \frac{\lambda T}{2} \sum_m \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Delta_F(i\omega_m, \mathbf{k}). \quad (53)$$

Como próximo passo, precisamos agora efetuar a soma sobre as frequências de Matsubara  $\omega_n$ . Para que possamos fazê-la de um modo mais simples, faremos uso da representação mista do propagador de Matsubara, conforme definido em (37). Assim temos que

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\lambda T}{2} \sum_m \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta_F(\tau, \mathbf{k}) \\ &= \frac{\lambda T}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_m e^{i\omega_n \tau} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Delta_F(\tau, \mathbf{k}) \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_p \delta(\tau - p\beta) \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\omega_n \tau} \Delta_F(\tau, \mathbf{k}) \\ &= \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (1 + 2n_k) = \Pi_0 + \Pi_T, \end{aligned} \quad (54)$$

onde  $\Pi_0$  é a auto-energia em  $T = 0$  e  $\Pi_T$  corresponde a parte dependente da temperatura na auto-energia. Aqui usamos a propriedade

$$\Delta_F(\tau - \beta, \mathbf{k}) = \Delta_F(\tau, \mathbf{k}), \quad (55)$$

ao longo do intervalo  $[0, \beta]$ . Como já dissemos, a auto-energia pode ser interpretada como

uma correção para a massa que pode ser escrita do seguinte modo

$$m_R^2 = m^2 + \Pi, \quad (56)$$

onde  $\Pi = \Pi_0 + \Pi_T$  e,  $m_R^2$  correspondendo a massa efetiva em temperatura finita. A Eq. (53) é divergente no ultravioleta. Em  $T = 0$ , o termo  $\Pi_0$ ,

$$\Pi_0 = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k}, \quad (57)$$

é quadraticamente divergente, mas  $\Pi_T$ ,

$$\Pi_T = \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{n_k}{\omega_k}, \quad (58)$$

é finito devido ao fator de distribuição de Bose-Einstein. Para tratar da divergência no termo  $\Pi_0$ , podemos introduzir um contratermo de massa na ação euclideana tal que

$$m^2 \longrightarrow m^2 + \delta m^2, \quad (59)$$

que deve cancelar todos os termos divergentes da auto-energia, isto é

$$\delta m^2 = -\Pi_0. \quad (60)$$

Assim, obtemos a massa efetiva renormalizada como

$$m_R^2 = m^2 + \Pi_T = m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{n_k}{\omega_k}. \quad (61)$$

### 1.2.2 O Potencial Efetivo para um Campo Escalar Neutro

Nesta seção, faremos uma breve revisão do cálculo do potencial efetivo a temperatura finita. No formalismo de tempo imaginário, a única diferença formal entre teoria de campos a temperatura zero e a temperatura finita, é a forma das funções de Green, ou propagadores, os quais são modificados na presença de um meio térmico, como vimos explicitamente nas seções acima. Os vértices a temperatura finita são exatamente os

mesmos que em temperatura zero. Assim, dada uma teoria quântica de campos, efetuamos nossos cálculos de interesse termodinâmico via diagramas de Feynman. Os cálculos diagramáticos podem ser feitos de maneira análoga aos feitos à temperatura zero. A única diferença é que os valores de energia são quantizados e as integrais sobre energias intermediárias tem de ser substituídas por somas sobre valores discretos, ou seja

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3}. \quad (62)$$

Primeiramente, recordamos a expressão do potencial efetivo Euclideano para teoria  $\lambda\phi^4$  na aproximação de um laço, a qual está deduzida em diversos livros-texto, como por exemplo [13, 14], o que nos dá o resultado básico

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \Delta V_\beta, \quad (63)$$

onde  $\bar{\phi}$  é uma configuração de campo constante,  $\bar{\phi} \equiv \langle \phi \rangle$ , e

$$\Delta V_\beta = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln \left( k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2 \right), \quad (64)$$

é a correção ao nível de um laço para o potencial clássico.

Fazendo uso de (62) e de

$$k_E^4 \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (65)$$

o potencial efetivo calculado até a ordem de um laço a temperatura finita torna-se

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \frac{1}{2\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2), \quad (66)$$

onde definimos  $\omega_k^2 = k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2$ . A soma das frequências de Matsubara  $\omega_n$  em (66) pode ser feita usando a identidade [2]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln(\omega_n^2 + \omega_k^2) = 2\beta \left[ \frac{\omega_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \right] + \text{termos independentes de } \omega_k \quad (67)$$

o que, portanto nos dá para a Eq. (63) o resultado

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \int \frac{d^3k_E}{(2\pi)^3} \left[ \frac{\omega_k}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) \right]. \quad (68)$$

A integral sobre o primeiro termo na expressão acima é a correção para o potencial efetivo a um laço a em  $T = 0$ ,

$$\int \frac{d^3k_E}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \ln \left( k_E^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2 \right). \quad (69)$$

A integral nos momentos na expressão acima diverge no ultravioleta. A eliminação/renormalização dessa divergência aparecendo na teoria em  $T = 0$  é padrão em teoria quântica de campos e se dá pela introdução de contratermos na massa e constante acoplamento no potencial original do modelo da forma usual como dada nos livros textos (ver por exemplo [13–15]).

A parte dependente da temperatura na expressão do potencial efetivo em (68) é finita e pode ser escrita como

$$\int \frac{d^3k_E}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta\omega_k}) = \frac{1}{2\pi^2\beta^4} J_B [m(\bar{\phi})\beta], \quad (70)$$

onde escrevemos  $m^2(\bar{\phi}) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\bar{\phi}^2$  e a função  $J_B [m(\bar{\phi})\beta]$  é definida como

$$J_B [y] = \int_0^\infty dx x^2 \ln \left( 1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \right). \quad (71)$$

A integral acima, que é o potencial efetivo bosônico térmico, admite uma expansão em altas temperaturas, para  $y \ll 1$ , a qual é dada por [2]

$$\begin{aligned} J_B [y] = & -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}y^2 - \frac{\pi}{6}(y^2)^{3/2} - \frac{1}{32}y^4 \ln \left( \frac{y^4}{a_b} \right) \\ & - 2\pi^{7/2} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+1)!} \Gamma \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{y^2}{4\pi^2} \right)^{l+2}, \end{aligned} \quad (72)$$

onde  $a_b = 16\pi^2 e^{3/2-2\gamma}$ ,  $\ln(a_b) = 5.4076$  e  $\zeta(x)$  é a função zeta de Riemann.

Dentro da aproximação de altas temperaturas dada pela Eq. (72), a expressão do potencial efetivo na teoria  $\lambda\phi^4$  fica (desprezando termos independentes de  $\bar{\phi}$  e mantendo até ordem mais baixa em (72)),

$$V_{eff}(\bar{\phi}) = \frac{1}{2}m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!}\bar{\phi}^4 + \frac{\lambda}{48}T^2\bar{\phi}^2. \quad (73)$$

Da equação acima, minimizando em relação ao campo, encontramos o valor esperado do campo como função da temperatura:

$$\left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial \bar{\phi}} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}(T)} = 0 \longrightarrow \bar{\phi}^2(T) = -\frac{6m^2}{\lambda} - \frac{T^2}{4}, \text{ ou } \bar{\phi}^2 = 0. \quad (74)$$

Notemos que da solução dependente de temperatura, na situação clássica de quebra espontânea de simetria do potencial clássico, ou seja, quando  $m^2 = -|m^2|$ , o resultado acima expressa como o vácuo com simetria quebrada,  $\bar{\phi} \neq 0$ , restaura a simetria,  $\bar{\phi} = 0$ , quando a temperatura aumenta, o que nos leva a obtenção de uma temperatura crítica de restauração de simetria (transição de fase) definida por

$$T_c^2 = \frac{24|m^2|}{\lambda}, \quad (75)$$

acima da qual  $\bar{\phi}(T) = 0$ .

### 1.3 Campo Escalar Carregado

Para o caso de um campo escalar carregado com simetria  $U(1)$ , levando em conta cargas de Noether conservadas devido a simetria contínua, trabalhamos no ensemble Gran Canônico, onde desejamos obter a função de partição neste ensemble. Temos que

$$Z = Tr \exp - [\beta(\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i)], \quad (76)$$

onde  $\mathcal{Q}_i$  é um conjunto de operadores número conservados, com multiplicadores de Lagrange expressos pelos potenciais químicos  $\mu_i$ . Podemos formular uma expressão para a função de partição Gran Canônica no formalismo Hamiltoniano para as integrais de trajetória como fizemos no caso do campo escalar neutro, desta vez fazendo a substituição  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i$ . Uma vez que estamos considerando um campo escalar carregado, este tem de ser necessariamente complexo. Para a teoria livre tendo a seguinte densidade de Lagrangiana no espaço de Minkowski:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi \phi^*, \quad (77)$$

que tem claramente uma simetria  $U(1)$ ,

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad (78)$$

levando a seguinte corrente de Noether conservada no espaço de Minkowski

$$j_\mu = \phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi \quad (79)$$

A componente temporal de  $j_\mu$  nos fornece a carga conservada

$$\mathcal{Q} = \int d^3x j_0. \quad (80)$$

Como é usual em teoria quântica de campos, nós decompomos o campo  $\phi$  em sua parte real e imaginária fazendo

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}.$$

Aplicamos o mesmo procedimento ao seu conjugado complexo, o que nos fornece para a densidade de Hamiltoniana em termos das componentes real e imaginária do campo e momento conjugado,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_2^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 + \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2), \quad (81)$$

e para a densidade de carga

$$\mathcal{Q} = (\phi_2\pi_1 - \phi_1\pi_2). \quad (82)$$

A presença da quantidade conservada  $\mathcal{Q}$  indica a existência de um potencial associado  $\mu$ . Combinando as Eq. (81) e (82) junto com a Eq. (76), a integral de trajetória para a função de partição Gran Canônica toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
Z[\beta, \mu] &= \int [d\phi_1] [d\phi_2] \int [d\pi_1] [d\pi_2] \exp \left\{ \int d^4x \left[ i(\pi_1 \dot{\phi}_1 + \pi_2 \dot{\phi}_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathcal{H}(\phi_i, \pi_i) + \mu(\phi_1 \pi_2 - \phi_2 \pi_1) \right] \right\}. \tag{83}
\end{aligned}$$

Efetuando a integração em  $\pi_i$  e redefinindo  $\phi_i$  em relação as quantidades originais  $\phi$  e  $\phi^*$ , nós obtemos que

$$Z[\beta, \mu] = \int [d\phi] [d\phi^*] \exp \left\{ \int d^4x \phi \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu \right)^2 + \nabla^2 + m^2 \right] \phi^* \right\}. \tag{84}$$

Podemos notar que o efeito do potencial químico consiste em provocar o deslocamento  $i\omega_n \rightarrow i\omega_n + \mu$ , que por sua vez altera o propagador de Matsubara que passa a adquirir a seguinte forma

$$\Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) = \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 + \omega_k^2}. \tag{85}$$

De modo similar, o propagador misto também tem sua forma alterada. Com potencial químico diferente de zero temos

$$\begin{aligned}
\Delta_F(\tau, \mathbf{k}) &= T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \Delta_F(i\omega_n, \mathbf{k}) \\
&= \frac{1}{2\omega_k} \left[ (1 + n_k^-) e^{-(\omega_k - \mu)\tau} + n_k^+ e^{(\omega_k + \mu)\tau} \right], \tag{86}
\end{aligned}$$

onde

$$n_k^\pm = \frac{1}{e^{\beta(\omega_k \pm \mu)} - 1}, \tag{87}$$

é a função de distribuição de Bose-Einstein na presença de potencial químico. O propagador de Matsubara pode ser obtido novamente ao se efetuar a transformação de Fourier do propagador misto com respeito ao tempo euclidiano  $\tau$ , conforme feito em (39).

### 1.3.1 Potencial Efetivo para Campo Carregado

Nesta seção, nós mostramos como podemos encontrar uma expressão para o potencial efetivo a um laço na presença de carga. Mostraremos que a aproximação a um laço

é relativamente simples de se obter. Este objeto mostra-se bastante útil pois, por meio do potencial efetivo podemos derivar todas as quantidades termodinâmicas, como energia livre, entropia e pressão para o sistema. O ponto de partida para os nossos cálculos é a função de partição Gran Canônica dada por

$$Z(\beta, \Omega, J_i, \mu_i) = \text{Tr} \{ \exp[-\beta(\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i)] \}, \quad (88)$$

onde nós escrevemos explicitamente a função de partição Gran Canônica como sendo uma função do inverso da temperatura  $\beta$ , do volume do sistema  $\Omega$ , das fontes externas  $J_i$ , introduzidos para evidenciar os campos, e dos potenciais químicos  $\mu_i$ . O Hamiltoniano  $\mathcal{H}'$  consiste em dois pedaços: o Hamiltoniano ordinário  $H$  e as fontes acopladas a todas os campos externos,

$$\mathcal{H}' \equiv H - \frac{J_i}{\beta\Omega} \int d^3x \phi_i(x). \quad (89)$$

O Hamiltoniano acima possui uma simetria global resultante de uma carga de Noether conservada  $\mathcal{Q}_i$ . A inclusão de cargas conservadas nos resultados é obtida por meio da condição de vínculo termodinâmica dada por

$$\bar{\mathcal{Q}}_i \equiv \langle \mathcal{Q}_i \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \ln Z. \quad (90)$$

Para isso, definimos a transformação de Legendre

$$\Gamma(\bar{\phi}_i, \mu_i) \equiv -\ln Z(J_i, \mu_i) - J_i \phi_i \equiv W(J_i, \mu) - J_i \bar{\phi}_i. \quad (91)$$

A vantagem desta transformação é que  $\Gamma$  não é mais função das fontes externas. Para que o lado direito de (91) também não seja mais função dos  $J_i$ , requeremos que

$$\left. \frac{\partial W}{\partial J_i} \right|_{\mu_i} = \bar{\phi}_i. \quad (92)$$

Aplicando isto junto com a definição de  $Z$ , dada em (88), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial J_i} &= -\frac{1}{Z} \text{Tr} \left[ \int d^3x \phi_i(x) e^{-\beta(\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i)} \right], \\
\bar{\phi}_i &\equiv \Omega \int d^3x \langle \phi_i(x) \rangle_{J_i}, \\
\bar{\phi}_i &= \langle \phi_i(x) \rangle_{J_i},
\end{aligned} \tag{93}$$

que nos dá o valor esperado no vácuo para o campo  $\phi$  na presença de fontes. Claramente,  $\langle \phi_i(x) \rangle_0$  é a quantidade de interesse físico, uma vez que estamos interessados em problemas onde não há fontes externas.

Uma equação mais relevante segue da definição da transformação de Legendre. Se variarmos ambos os lados de (91) por fazer uma pequena variação em  $\phi_i$ , mantendo  $\mu_i$  fixo, definimos

$$\delta\Gamma = \left. \frac{\partial W}{\partial J_i} \right|_{\mu_i} \left. \frac{\partial J_i}{\partial \bar{\phi}_i} \right|_{\mu_i} \delta\bar{\phi}_i + \left. \frac{\partial J_i}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\mu_i} \delta\bar{\phi}_i \bar{\phi}_j - J_i \delta\bar{\phi}_i. \tag{94}$$

Se não houvesse carga fixa, ou equivalentemente, potencial químico, parariamos aqui. O ponto seria que em  $\beta$  e  $\Omega$  fixos, gostaríamos que  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\phi}_i}$  fosse zero, uma vez que é igual a  $J_i$  e, no caso de interesse  $J_i = 0$ . Entretanto, com uma carga fixa, uma pequena variação arbitrária em  $\Gamma$  é

$$\delta\Gamma = \left. \frac{\partial J_i}{\partial \bar{\phi}_i} \right|_{\mu_i} \delta\bar{\phi}_i + \left. \frac{\partial J_i}{\partial \mu_i} \right|_{\bar{\phi}_i} \delta\mu_i. \tag{95}$$

Queremos a carga fixa, não o potencial químico, de modo que não é verdade que os pontos estacionários de  $\Gamma$  são estados fisicamente relevantes. Por isso, fazemos mais uma transformação de Legendre e definimos a energia livre como

$$F(\bar{\phi}_i, \bar{\mathcal{Q}}_i) \equiv \frac{1}{\beta} \Gamma(\phi, \mu_i) + \mu_i \bar{\mathcal{Q}}_i. \tag{96}$$

A equação de vínculo (90) nos diz que  $F$  independe de  $\mu_i$ . Além do mais, em  $\bar{\mathcal{Q}}_i$  fixos, o sistema estará em um estado de equilíbrio quando  $F$  está em seu mínimo.

Coletando estas várias definições acima, escrevemos o potencial efetivo em temperatura e densidade finitas como

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= \frac{F}{\Omega} \\
&= -\frac{1}{\beta\Omega} (\ln Z + J_i \bar{\phi}_i) + \frac{\mu_i \bar{Q}_i}{\Omega}.
\end{aligned} \tag{97}$$

Em temperatura, volume, e cargas fixos,  $V_{eff}$  deve ser minimizado com respeito a  $\mu_i$  e  $\bar{\phi}_i$ . Lembramos que aqui, nós escrevemos os campos complexos em termos de suas componentes reais da seguinte forma

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}. \tag{98}$$

Para que possamos encontrar o potencial efetivo para o nosso modelo, precisamos determinar uma expressão para a ação efetiva. Partindo da função de partição

$$\begin{aligned}
Z[J_i] &= \int \prod_i [d\phi_i] \prod_i [d\pi_i] \\
&\times \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ i\pi_i \dot{\phi}_i - (\mathcal{H}' - \mu_i \mathcal{Q}_i) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{99}$$

a integral funcional é realizada sobre os campos  $\phi_i$  e os momentos conjugados  $\pi_i$ . Como estamos interessados em investigar o sistema em temperatura finita, a integral sobre o tempo euclidiano percorre o intervalo de 0 a  $\beta$ . O Hamiltoniano acima é invariante sobre uma simetria global SO(2). Esta simetria é gerada pela integral sobre todos os espaços da densidade de carga:

$$\mathcal{Q}_k \equiv \phi_i \pi_j - \phi_j \pi_i. \tag{100}$$

Efetuada a integral sobre os momentos conjugados  $\pi_i$ , obtemos

$$Z[J_i] = N \int \prod_i [d\phi_i] \exp(-S[\phi_i, J_i]), \tag{101}$$

onde  $N$  é uma constante e  $S$  é a ação. Expandindo a ação em torno de uma configuração de campo constante:  $\phi_i = \bar{\phi}_i$ , temos

$$\begin{aligned}
S &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \text{termos de ordem superior} \\
&= S_0[\bar{\phi}_i, J_i] + \int d^4x \frac{\delta S[\phi_i(x) - \bar{\phi}_i]}{\delta \phi_i(x)} \Big|_{\phi_i = \bar{\phi}_i} [\phi - \bar{\phi}_i(x)] \\
&+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi_i - \bar{\phi}_i(x)] \frac{\delta^2 S[\phi_i(x) - \bar{\phi}_i]}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_i(y)} \Big|_{\phi_i = \bar{\phi}_i} [\phi_i - \bar{\phi}_i(y)] + \dots
\end{aligned} \tag{102}$$

Há duas razões para fazermos a expansão em torno de  $\phi_i = \bar{\phi}_i$ . A primeira é que, como vimos acima, no fim dos cálculos  $\bar{\phi}_i$  corresponde ao valor esperado no vácuo para os campos  $\phi_i$ . Os campos  $\phi_i$  oscilarão em torno deste vácuo com amplitude proporcional a  $\hbar$  (quando este é restaurado nas expressões acima, lembrando que assumimos do início as unidades naturais  $c = k_B = \hbar = 1$ ) e, no limite que  $\hbar$  é pequeno, é razoável assumir que estas oscilações serão também pequenas. A segunda razão é que veremos que tal expansão torna especialmente fácil inverter a Eq. (92), que determina os  $J_i$  em termos de  $\bar{\phi}_i$ .

Até agora não foi necessário fazer nenhuma escolha específica para o potencial. Definimos por enquanto apenas de um modo bem geral o potencial do campo escalar como  $U_0(\phi_i)$ , onde requer-se somente que seja função de  $\phi_i^2$  ou no máximo  $\phi_i^4$ . Fazendo o shift  $\phi'_i = \phi_i - \bar{\phi}_i$ , temos que a contribuição de ordem zero para a ação calculado em  $\bar{\phi}_i$  é:

$$S^{(0)}(\bar{\phi}_i) = S_0[\bar{\phi}_i, J_i] = \beta\Omega \left[ U_0(\bar{\phi}_i) - \frac{1}{2} \mu_i^2 \bar{\phi}_i^2 \right] + J_i \bar{\phi}_i, \tag{103}$$

e para o termo de primeira ordem temos

$$S^{(1)}(\bar{\phi}_i) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi'_i(x) \left[ \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} \Big|_{\phi_i = \bar{\phi}_i} - \mu \bar{\phi}_i + \frac{J_i}{\beta\Omega} \right]. \tag{104}$$

A contribuição de segunda ordem para a ação é

$$S^{(2)} = \beta\Omega U_{ct}(\bar{\phi}) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi'_i(x) \mathcal{M}_{ij} \phi'_j(y), \tag{105}$$

onde

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{\delta^2 S}{\delta \phi'_i(x) \delta \phi'_j(y)}. \tag{106}$$

O primeiro termo do lado direito de (105) representa os contra-termos, calculados em  $\phi_i = \bar{\phi}_i$ , incluídos de tal modo a cancelar as divergências ultravioletas que podem

surgir no cálculo do potencial efetivo. Os elementos da matriz  $\mathcal{M}_{ij}$  correspondem as segundas derivadas funcionais da ação na Eq. (102) com respeito a  $\phi'_i(x)$  e  $\phi'_i(y)$ .

A aproximação a um laço do potencial efetivo corresponde a negligenciar todos os termos na ação de ordem superior a  $S^{(2)}$ , isto é, todos aqueles de ordem superior ao quadrático em  $\phi'_i$  (e qualquer desvio de  $\phi_i = \bar{\phi}_i$  nos contra-termos). Nesta aproximação,

$$W \equiv -\ln Z^{(1)} \simeq S^{(0)} - \ln \left[ \int \prod_i [d\phi'_i] \exp(-S^{(1)} - S^{(2)}) \right]. \quad (107)$$

Podemos escolher os  $J_i$  de tal forma que o termo linear  $S^{(1)}$  na ação se anule. Uma vez que fixamos  $J_i$ , temos uma expressão manejável para a função de partição em um laço, que pode ser inserida na equação (97) para obtermos o potencial efetivo

$$V_{eff} = U_0(\bar{\phi}) - \frac{1}{2} \mu_i^2 \bar{\phi}_i^2 - \frac{1}{\beta\Omega} \ln Z^{(1)}, \quad (108)$$

onde

$$Z^{(1)} = \int \prod_i [d\phi'_i] \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi'_i(x) \mathcal{M}_{ij} \phi'_j(y) \right]. \quad (109)$$

Podemos ainda fazer uso da seguinte relação

$$Z^{(1)} = \int \prod_i [d\phi'_{i,n}] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_n \int d^3x \phi'_{i,n}(x) \mathcal{M}_{ij} \phi'_{j,n}(y) \right) = \frac{N'}{|\det \mathcal{M}|^{1/2}},$$

onde  $N'$  é uma constante infinita independente de  $\beta$  que iremos absorver sobre toda a normalização da integração funcional e usamos a relação  $\det A = \exp(\text{Tr} \ln A)$  para trazer o determinante na exponencial. Notamos que esta expressão para  $Z^{(1)}$  é exatamente a que teríamos obtido se tivéssemos iniciado nossos cálculos sem a inclusão de qualquer termos de fontes. Expandimos sobre os campos constantes  $\bar{\phi}_i$  e mantivemos somente os termos quadráticos. O formalismo que apresentamos nesta seção tem três propostas básicas: I) convencer-nos de que devemos minimizar a expressão completa para o potencial efetivo com respeito a  $\bar{\phi}_i$ ; II) convencer-nos que  $\langle \phi_i \rangle = \bar{\phi}_i$ ; III) prover-nos uma prescrição, ou pelo menos o ponto de partida para o cálculo das correções de mais alta ordem para o potencial efetivo. No próximo capítulo mostraremos uma expressão para o potencial efetivo para o modelo de dois campos escalares complexos, que é o modelo que estaremos trabalhando ao longo desta tese.

## 2 ESTRUTURA DE FASES E POTENCIAL EFETIVO

Neste capítulo nós investigamos em detalhes como a presença de carga afeta a estrutura de fases de uma teoria de campos interagentes. Para atingir este objetivo determinamos uma expressão para o potencial efetivo a um laço para o modelo considerado, uma vez que este objeto em temperatura e densidade finita deve ser minimizado em relação ao valor esperado do campo e do potencial químico. Na seção 2.1 derivamos uma expressão exata para o potencial efetivo para o modelo de campos escalares interagentes. Na seção 2.2 mostramos uma discussão a respeito do limite de altas temperaturas e derivamos a expressão para o potencial efetivo neste limite. Na seção 2.3 analisamos qualitativamente como a presença de carga afeta a estrutura de fases da teoria. Os cálculos realizados neste capítulo consistem em uma extensão do que foi feito em [16]

### 2.1 Potencial Efetivo a um laço para Modelo de Dois Campos Escalares Complexos Interagentes

Vamos agora fazer uso do formalismo apresentado na seção anterior para calcular o potencial efetivo para o modelo onde dois campos escalares interagem entre si por meio de um termo quadrático nos campos. Para este modelo, tomamos a densidade de Lagrangiana euclideana é da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \psi, \psi^*) &= (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^* + m_\phi^2 \phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{4} (\phi \phi^*)^2 \\ &+ (\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi)^* + m_\psi^2 \psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{4} (\psi \psi^*)^2 + \lambda (\phi \phi^*) (\psi \psi^*). \end{aligned} \quad (110)$$

Como passo usual para o cálculo de potencial efetivo a um laço, vamos começar por decompor os campos  $\phi$  e  $\psi$  na Eq. (110) em termos de campos de fundo (que, sem perda de generalidade, podem ser tomados como campos reais constantes)  $\phi_0$  e  $\psi_0$ , respectivamente, e flutuações  $\phi_{1,2}$  e  $\psi_{1,2}$ , tal que

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_0 + \phi_1 + i\phi_2), \\ \psi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0 + \psi_1 + i\psi_2). \end{aligned} \quad (111)$$

Quando substituirmos (111) em (110) nós mantemos apenas os termos quadráticos nos campos de flutuação para o cálculo do potencial efetivo a um laço para os campos de

fundo, como descrito no Capítulo anterior. Para este caso, a ação é dada por

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{flut} - \frac{1}{2}\mu_\phi^2 (\phi_0^2 + 2\phi_0\phi_1 + \phi_1^2 + \phi_2^2) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2}\mu_\psi^2 (\psi_0^2 + 2\psi_0\psi_1 + \psi_1^2 + \psi_2^2) \\
&\quad \left. - \frac{J_i^\phi}{\beta\Omega}\phi_i - \frac{J_i^\psi}{\beta\Omega}\psi_i - \mu^\phi \mathcal{Q}^\phi - \mu^\psi \mathcal{Q}^\psi \right], \tag{112}
\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{Q}^\phi = (\phi_1\pi_2^\phi - \pi_2^\phi\phi_1)$  e  $\mathcal{Q}^\psi = (\psi_1\pi_2^\psi - \pi_2^\psi\psi_1)$ . Temos que a densidade de Lagrangiana pode ser dividida em um termo que só depende dos campos de fundo,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m_\phi^2}{2}\phi_0^2 + \frac{m_\psi^2}{2}\psi_0^2 + \frac{\lambda_\phi}{16}\phi_0^4 + \frac{\lambda_\psi}{16}\psi_0^4 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^2\psi_0^2, \tag{113}$$

e num outro termo que depende quadraticamente nas flutuações em  $\phi$  e  $\psi$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{flut} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi_2)^2 \\
&\quad + \frac{m_\phi^2}{2}[2\phi_0\phi_1 + \phi_1^2 + \phi_2^2] + \frac{\lambda_\phi}{16}[6\phi_0^2\phi_1^2 + 2\phi_0^2\phi_2^2] \\
&\quad + \frac{m_\psi^2}{2}[2\psi_0\psi_1 + \psi_1^2 + \psi_2^2] + \frac{\lambda_\psi}{16}[6\psi_0^2\psi_1^2 + 2\psi_0^2\psi_2^2] \\
&\quad + \frac{\lambda}{4}[2\psi_0\phi_0^2\psi_1 + \phi_0^2(\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2\phi_0\psi_0^2\phi_1 + 4\phi_0\psi_0\phi_1\psi_1 + \psi_0^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)]. \tag{114}
\end{aligned}$$

Expandindo a ação em (112) temos

$$\begin{aligned}
S &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \text{termos de ordem superior} \\
&= S_0 + \int d^4x \left[ \frac{\delta S[\phi'_i(x), \psi'_i(x)]}{\delta\phi'_i(x)} \Big|_{\phi_i=\bar{\phi}_i} \phi'_i(x) + \frac{\delta S[\psi'_i(x)]}{\delta\psi'_i(x)} \Big|_{\psi_i=\bar{\psi}_i} [\psi'_i(x)] \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left[ \phi'_i(x) \frac{\delta^2 S[\phi'_i(x), \psi'_i(x)]}{\delta\phi'_i(x)\delta\phi'_j(y)} \Big|_{\phi_i=\bar{\phi}_i} \phi'_j(y) \right. \\
&\quad \left. + \psi'_i(x) \frac{\delta^2 S[\phi'_i(x), \psi'_i(x)]}{\delta\psi'_i(x)\delta\psi'_j(y)} \Big|_{\phi_i=\bar{\phi}_i} \psi'_j(y) \right]. \tag{115}
\end{aligned}$$

Devemos lembrar que, conforme exposto no Capítulo anterior, podemos escolher os termos de fonte  $J_i^\phi$  e  $J_i^\psi$  de tal forma a cancelarem os termos de primeira ordem na expansão da ação. Com estas definições, podemos usar a Eq. (108) para escrever uma

expressão para o potencial efetivo na aproximação de um laço como sendo

$$V_{eff} \approx U(\phi_0, \psi_0) - \frac{\mu_\phi^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\mu_\psi^2}{2} \psi_0^2 + \frac{\mu_\phi \bar{Q}^\phi}{\Omega} + \frac{\mu_\psi \bar{Q}^\psi}{\Omega} - \frac{1}{\beta \Omega} \ln Z^{(1)}(\phi_i, \psi_i), \quad (116)$$

com

$$Z^{(1)}(\phi_i, \psi_i) = \frac{N'}{\det \mathcal{M}^{1/2}}. \quad (117)$$

Os elementos da matriz  $\mathcal{M}$  em (117) são

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \partial^2 + m_\phi^2 + \frac{3\lambda_\phi \phi_0^2}{4} - \mu_\phi^2 & i\mu_\phi \partial_\tau & \lambda \phi_0 \psi_0 & 0 \\ -i\mu_\phi \partial_\tau & \partial^2 + m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi \phi_0^2}{4} - \mu_\phi^2 & 0 & 0 \\ \lambda \phi_0 \psi_0 & 0 & \partial^2 + m_\psi^2 + \frac{3\lambda_\psi \psi_0^2}{4} - \mu_\psi^2 & i\mu_\psi \partial_\tau \\ 0 & 0 & -i\mu_\psi \partial_\tau & \partial^2 + m_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi \psi_0^2}{4} - \mu_\psi^2 \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Podemos ir para o espaço dos momentos para calcular o determinante da matriz em (118).

Efetuada este passo obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M} &= [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\phi^2 + U''_{\phi_1}] [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\phi^2 + U''_{\phi_2}] [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\psi^2 + U''_{\psi_1}] \\ &\times [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\psi^2 + U''_{\psi_2}] - \mu_\psi^2 \omega_n^2 [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\phi^2 + U''_{\phi_1}] [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\phi^2 + U''_{\phi_2}] \\ &- \mu_\phi^2 \omega_n^2 [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\psi^2 + U''_{\psi_1}] [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\psi^2 + U''_{\psi_2}] + \mu_\phi^2 \mu_\psi^2 \omega_n^4 \\ &- \lambda^2 \phi_0^2 \psi_0^2 [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\phi^2 + U''_{\phi_2}] [(k^2 + \omega_n^2) - \mu_\psi^2 + U''_{\psi_2}], \end{aligned} \quad (119)$$

onde  $\omega_n$  são as frequências de Matsubara e os termos para as derivadas dos potenciais  $U$  tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} U''_{\phi_1} &= m_\phi^2 + \frac{3\lambda_\phi}{4} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \psi_0^2 \\ U''_{\phi_2} &= m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{4} \phi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \psi_0^2 \\ U''_{\psi_1} &= m_\psi^2 + \frac{3\lambda_\psi}{4} \psi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 \\ U''_{\psi_2} &= m_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{4} \psi_0^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 \end{aligned} \quad (120)$$

Fazemos algumas manipulações na expressão da Eq. (119) para que possamos escrever o

determinante como um polinômio das frequências de Matsubara tal que

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M} = & \left\{ \omega_n^4 + [U''_{\phi_1} + U''_{\phi_2} - 2\mu_\phi^2 + 2k^2 - 2\lambda\phi_0^2] \omega_n^2 + [(k^2 + U''_{\phi_2} - \mu_\phi^2) [(k^2 + U''_{\phi_1} - \mu_\phi^2)]] \right\} \\ & \times \left\{ \omega_n^4 + [U''_{\psi_1} + U''_{\psi_2} - 2\mu_\psi^2 + 2k^2 - 2\lambda\psi_0^2] \omega_n^2 + [(k^2 + U''_{\psi_2} - \mu_\psi^2) (k^2 + U''_{\psi_1} - \mu_\psi^2)] \right\} \\ & - \lambda^2 \phi_0^2 \psi_0^2 [(k_\phi^2 + \omega_n^2) - \mu_\phi^2 + U''_{\phi_2}] [(k_\psi^2 + \omega_n^2) - \mu_\psi^2 + U''_{\psi_2}]. \end{aligned} \quad (121)$$

Podemos ainda decompor os polinômios de ordem  $\omega_n^4$  em polinômios de ordem  $\omega_n^2$ . Fazendo isto obtemos

$$\det \mathcal{M} = \ln [(\omega_n^2 + i\alpha\omega_n + \gamma) (\omega_n^2 - i\alpha\omega_n + \gamma) (\omega_n^2 + i\nu\omega_n + \zeta) (\omega_n^2 - i\nu\omega_n + \zeta)], \quad (122)$$

onde

$$\alpha^2 = 2 \left[ k^2 + \mu_\phi^2 + \frac{1}{2}(U''_{\phi_1} + U''_{\phi_2}) - \gamma \right], \quad (123)$$

$$\gamma^2 = (k^2 + U''_{\phi_1} - \mu_\phi^2) (k^2 + U''_{\phi_2} - \mu_\phi^2), \quad (124)$$

$$\nu^2 = 2 \left[ k^2 + \mu_\psi^2 + \frac{1}{2}(U''_{\psi_1} + U''_{\psi_2}) - \zeta \right], \quad (125)$$

$$\zeta^2 = (k^2 + U''_{\psi_1} - \mu_\psi^2) (k^2 + U''_{\psi_2} - \mu_\psi^2). \quad (126)$$

Após efetuarmos a soma sobre as frequências de Matsubara encontramos o seguinte resultado para o potencial efetivo

$$V_{eff} = \left( \frac{const}{\beta\Omega} \right) V_{tree} + V_{termico} + V_{ponto\ zero} \quad (127)$$

com a contribuição ao nível de árvore (zero laço) dada por

$$V_{tree} = U(\phi_0, \psi_0) - \frac{1}{2}\mu_\phi^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}\mu_\psi^2\psi_0^2 + \mu_\phi \frac{\bar{Q}_\phi}{\Omega} + U_{ct}(\phi_0, \psi_0), \quad (128)$$

onde

$$U(\phi_0, \psi_0) = \frac{m_\phi^2}{2}\phi_0^2 + \frac{m_\psi^2}{2}\psi_0^2 + \frac{\lambda_\phi}{16}\phi_0^4 + \frac{\lambda_\psi}{16}\psi_0^4 + \frac{\lambda}{4}\phi_0^2\psi_0^2, \quad (129)$$

a contribuição para a parte térmica do potencial efetivo é dada por

$$V_{\text{termico}} = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left[ \left(1 - e^{-\beta E_+^\phi}\right) \left(1 - e^{-\beta E_-^\phi}\right) \right] + \ln \left[ \left(1 - e^{-\beta E_+^\psi}\right) \left(1 - e^{-\beta E_-^\psi}\right) \right] \right\}, \quad (130)$$

e a energia de ponto zero é

$$V_{\text{ponto zero}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_+^\phi(k) + E_-^\phi(k) + E_+^\psi + E_-^\psi}{2} \quad (131)$$

onde  $E_\pm^\phi$  e  $E_\pm^\psi$  são dados por

$$\begin{aligned} E_\phi^\pm(k) &= \sqrt{\gamma + \frac{\alpha^2}{4}} \pm \frac{\alpha}{2}, \\ E_\psi^\pm(k) &= \sqrt{\zeta + \frac{\nu^2}{4}} \pm \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \quad (132)$$

Podemos ainda escrever os termos acima, usando as Eqs. (123)-(126), da forma

$$\begin{aligned} (E_\phi^\pm(k))^2 &= k^2 + \mu_\phi^2 + \frac{1}{2}(U''_{\phi_1} + U''_{\phi_2}) \\ &\pm \left\{ 2\mu_\phi^2 [2k^2 + (U''_{\phi_1} + U''_{\phi_2})] + \frac{1}{4} [U''_{\phi_1} - U''_{\phi_2}] \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} (E_\psi^\pm(k))^2 &= k^2 + \mu_\psi^2 + \frac{1}{2}(U''_{\psi_1} + U''_{\psi_2}) \\ &\pm \left\{ 2\mu_\psi^2 [2k^2 + (U''_{\psi_1} + U''_{\psi_2})] + \frac{1}{4} [U''_{\psi_1} - U''_{\psi_2}] \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (134)$$

Estas energias de excitação podem ainda ser reescritas em uma forma mais conveniente como se segue

$$(E_\pm^\phi(k))^2 = k^2 + \mu_\phi^2 + \tilde{m}_\phi^2 \pm \{4\mu_\phi^2 (k^2 + \tilde{m}_\phi^2) + \tilde{m}_\phi^4 \delta^2\}^{1/2}, \quad (135)$$

$$(E_\pm^\psi(k))^2 = k^2 + \mu_\psi^2 + \tilde{m}_\psi^2 \pm \{4\mu_\psi^2 (k^2 + \tilde{m}_\psi^2) + \tilde{m}_\psi^4 \eta^2\}^{1/2}, \quad (136)$$

onde definimos

$$\tilde{m}_\phi^2 \equiv m_\phi^2(1 + 2\delta), \quad (137)$$

$$\tilde{m}_\psi^2 \equiv m_\psi^2(1 + 2\eta), \quad (138)$$

com

$$\delta = \frac{\lambda_\phi}{4m_\phi^2}\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4m_\phi^2}\psi_0^2, \quad (139)$$

$$\eta = \frac{\lambda_\psi}{4m_\psi^2}\psi_0^2 + \frac{\lambda}{4m_\psi^2}\phi_0^2. \quad (140)$$

O termo dado pela Eq. (131) possui uma divergência no ultravioleta. Este infinito pode ser regularizado se introduzimos um corte nos momentos no ultravioleta dado por  $\Lambda$  e requerer que  $|\mathbf{k}| < \Lambda$ . Não entraremos em detalhes sobre tais infinitos. Apenas vale destacar que tais infinitos serão eliminados por meio dos termos em  $U_{ct}(\phi_0, \psi_0)$  e que os infinitos da energia de ponto zero é independente do potencial químico [16]. Na próxima seção, veremos como obter uma expressão analítica aproximada para o potencial efetivo quando consideramos o limite de alta temperatura para as integrais na Eq. (130).

## 2.2 Tomando o Limite de Alta Temperatura

Na seção anterior, mostramos como calcular uma expressão para o potencial efetivo a um laço para o modelo de dois campos escalares complexos interagentes. Um dos motivos que torna o formalismo do potencial efetivo especialmente atraente é sua conexão com a estrutura de fases, isto é, a estrutura que geralmente aparece em altas temperaturas modificando os aspectos de simetria da transição de fase no modelo. Para verificarmos esta estrutura, examinaremos o limite de alta temperatura da Eq. (127). Antes de começarmos nossa discussão para este limite, faremos algumas observações importantes sobre a expansão da expressão exata (127) para  $V_{eff}$ .

Em primeiro lugar, olhemos mais atentamente para as integrais de um laço para  $V_{\text{ponto zero}}$  e  $V_{\text{térmico}}$ . Note que a contribuição de ponto zero não tem dependência explícita da temperatura. No entanto, em alta temperatura, este termo tornar-se-á moderadamente dependente da temperatura devido a renormalização da massa. Todavia, na aproximação que estamos considerando, esta dependência induzida permanecerá suprimida pelas autointerações. Uma vez que a outra contribuição,  $V_{\text{térmico}}$ , é muito maior, a contribuição de ponto zero não será significativa, podendo ser desprezada, como de fato faremos em nossa discussão para este trabalho. Em um trabalho, em preparação, compararemos os

resultados numéricos completos com o objetivo de testar a validade desta aproximação.

Em segundo lugar, consideremos  $V_{\text{térmico}}$  em maiores detalhes. Note que o integrando (com peso  $k^2$ ) anula-se nos limites em que  $k \rightarrow \infty$  e  $k \rightarrow 0$ . Ele é maximizado quando  $E_{\phi,\psi}^{\pm}$  e  $k$  são ambos comparáveis a temperatura. Isto é exatamente o esperado para as distribuições térmicas em função da temperatura: aquelas excitações com energia física  $E_{\phi,\psi}^{\pm} \sim T$  predominam.

Finalmente, como ocorre com qualquer cálculo perturbativo, o resultado somente é válido quando a teoria de perturbação converge. Assim sendo, devemos evitar as divergências de infravermelho que contaminam a teoria próximo ao ponto crítico. Isto significa que devemos nos restringir a valores de  $\phi_0$ ,  $\psi_0$  e  $T$  tal que

$$\frac{\lambda_{\phi}\phi_0^2 + \lambda\psi_0^2}{m_{\phi}^2 - \mu_{\phi}^2} \ll 1, \quad (141)$$

$$\frac{\lambda_{\psi}\psi_0^2 + \lambda\phi_0^2}{m_{\psi}^2 - \mu_{\psi}^2} \ll 1. \quad (142)$$

Porém, podemos perder este vínculo de convergência em temperaturas mais altas. Apenas garantimos que os modos com  $k \sim T$  compõem a contribuição dominante  $V_{\text{térmico}}$  e por conseguinte em  $V_{\text{eff}}$ . Assim, em temperaturas suficientemente altas, a integral (130) não atinge a região de infravermelho mas, ao invés disso, as regiões com maiores valores de  $k$  com fator de convergência

$$\frac{\lambda_{\phi}\phi_0^2 + \lambda\psi_0^2}{k^2 + m_{\phi}^2 - \mu_{\phi}^2} \sim \frac{\lambda_{\phi}\phi_0^2 + \lambda\psi_0^2}{T^2}, \quad (143)$$

$$\frac{\lambda_{\psi}\psi_0^2 + \lambda\phi_0^2}{k^2 + m_{\psi}^2 - \mu_{\psi}^2} \sim \frac{\lambda_{\psi}\psi_0^2 + \lambda\phi_0^2}{T^2}. \quad (144)$$

Em qualquer caso, há um vínculo de convergência que deve ser obedecido. E, uma vez que o obedecemos, podemos também usá-lo como um meio para simplificar as expressões de dispersão  $E_{\phi,\psi}^{\pm}$ . Definimos por conveniência as expressões

$$E_{\phi}^2 = |\mathbf{k}|^2 + \tilde{m}_{\phi}^2, \quad (145)$$

$$E_{\psi}^2 = |\mathbf{k}|^2 + \tilde{m}_{\psi}^2, \quad (146)$$

com  $\tilde{m}_\phi^2$  e  $\tilde{m}_\psi^2$  definidos nas equações (137) e (138), e expandimos em Taylor as equações (124) e (126) em termos das pequenas quantidades  $\lambda_\phi \phi_0^2 / (E_\phi^2 - \mu_\phi^2)^2$  e  $\lambda_\psi \psi_0^2 / (E_\psi^2 - \mu_\psi^2)^2$ . Nós obtemos

$$\gamma = (E_\phi^2 - \mu_\phi^2) - \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{32(E_\phi^2 - \mu_\phi^2)}, \quad (147)$$

$$\zeta = (E_\psi^2 - \mu_\psi^2) - \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{32(E_\psi^2 - \mu_\psi^2)}. \quad (148)$$

Colocamos (147) e (148) em (133) e (134) respectivamente nos fornece após uma expansão adicional em Taylor das Eqs. (133) e (134)

$$\begin{aligned} E_\pm^\phi(k) &= \sqrt{E_\phi - \frac{1}{128} \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{E_\phi^2 - \mu_\phi^2}} \pm \sqrt{\mu_\phi^2 + \frac{1}{128} \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{E_\phi^2 - \mu_\phi^2}} \\ &= \tilde{E}_\phi \pm \Delta_\phi \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} E_\pm^\psi(k) &= \sqrt{E_\psi - \frac{1}{128} \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{E_\psi^2 - \mu_\psi^2}} \pm \sqrt{\mu_\psi^2 + \frac{1}{128} \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{E_\psi^2 - \mu_\psi^2}} \\ &= \tilde{E}_\psi \pm \Delta_\psi \end{aligned} \quad (150)$$

Uma nova expansão em Taylor do primeiro termo no lado direito de (149) e (150) nos fornece

$$\begin{aligned} E_\pm^\phi(k) &= E_\phi - \frac{1}{128} \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{E_\phi^2 - \mu_\phi^2} \pm \sqrt{\mu_\phi^2 + \frac{1}{128} \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{E_\phi^2 - \mu_\phi^2}} \\ &= \tilde{E}_\phi \pm \Delta_\phi \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} E_\pm^\psi(k) &= E_\psi - \frac{1}{128} \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{E_\psi^2 - \mu_\psi^2} \pm \sqrt{\mu_\psi^2 + \frac{1}{128} \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{E_\psi^2 - \mu_\psi^2}} \\ &= \tilde{E}_\psi \pm \Delta_\psi \end{aligned} \quad (152)$$

onde

$$\tilde{E}_\phi = E_\phi - \frac{1}{128} \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{E_\phi^2 - \mu_\phi^2}, \quad (153)$$

$$\tilde{E}_\psi = E_\psi - \frac{1}{128} \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{E_\psi^2 - \mu_\psi^2}, \quad (154)$$

e

$$\Delta_\phi = \sqrt{\mu_\phi^2 + \frac{1}{128} \frac{\lambda_\phi^2 \phi_0^4}{E_\phi^2 - \mu_\phi^2}}, \quad (155)$$

$$\Delta_\psi = \sqrt{\mu_\psi^2 + \frac{1}{128} \frac{\lambda_\psi^2 \psi_0^4}{E_\psi^2 - \mu_\psi^2}}. \quad (156)$$

Iremos considerar o regime dominado pela carga, isto é, o onde as variações para as energias  $\Delta^\phi$  e  $\Delta^\psi$  são dominadas pelos termos de potencial químico e a capacidade dos modos de acomodar cargas domina suas auto-interações. Sendo assim, podemos efetuar uma expansão em Taylor para  $\Delta^\phi$  e  $\Delta^\psi$  em termos de  $\mu_\phi$  e  $\mu_\psi$  o que nos dá o seguinte resultado

$$\Delta_\phi = \mu_\phi + \frac{\beta \lambda_\phi^2 \phi_0^4}{128 \mu_\phi (E_\phi^2 - \mu_\phi^2)}, \quad (157)$$

$$\Delta_\psi = \mu_\psi + \frac{\beta \lambda_\psi^2 \psi_0^4}{128 \mu_\psi (E_\psi^2 - \mu_\psi^2)}. \quad (158)$$

Com isto, as energias de excitação dadas por (133) e (134) podem ser reescritas como

$$(E_\phi^\pm(k))^2 = \tilde{E}_\phi \pm \mu_\phi + \frac{\beta \lambda_\phi^2 \phi_0^4}{128 \mu_\phi (E_\phi^2 - \mu_\phi^2)}, \quad (159)$$

$$(E_\psi^\pm(k))^2 = \tilde{E}_\psi \pm \mu_\psi + \frac{\beta \lambda_\psi^2 \psi_0^4}{128 \mu_\psi (E_\psi^2 - \mu_\psi^2)}. \quad (160)$$

Colocando os resultados obtidos acima em (130) e efetuando uma nova expansão em Taylor em torno de  $\tilde{E}_\phi - E_\phi$  temos

$$\begin{aligned}
V_{\text{termico}} &\equiv \frac{1}{\beta^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta(E_\phi + \mu_\phi)}) (1 - e^{-\beta(E_\phi - \mu_\phi)}) \\
&+ \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta(E_\psi + \mu_\psi)}) (1 - e^{-\beta(E_\psi - \mu_\psi)}) \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\beta \lambda_\phi^2 \phi_0^4}{128 \mu_\phi E_\phi} \left[ \frac{1}{E_\phi + \mu_\phi e^{\beta(E_\phi + \mu_\phi)} - 1} - \frac{1}{E_\phi - \mu_\phi e^{\beta(E_\phi - \mu_\phi)} - 1} \right] \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\beta \lambda_\psi^2 \psi_0^4}{128 \mu_\psi E_\psi} \left[ \frac{1}{E_\psi + \mu_\psi e^{\beta(E_\psi + \mu_\psi)} - 1} - \frac{1}{E_\psi - \mu_\psi e^{\beta(E_\psi - \mu_\psi)} - 1} \right]. \quad (161)
\end{aligned}$$

Os termos nas primeira e segunda linhas de (161) assemelha-se a contribuição da teoria livre, com carga fixa, exceto pela inclusão do termo  $\frac{\lambda_\phi}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda_\psi}{2} \psi_0^2$  em  $(E^{\phi,\psi})^2$  através de  $\tilde{m}_\phi^2$  e  $\tilde{m}_\psi^2$  como pode ser visto nas equações (137) e (138). A análise que faremos da expressão em (161) segue de perto ao que foi feito em [17] em especial no que concerne ao limite de altas temperaturas. Começamos pelos termos contidos nas duas primeiras linhas de (161) que corresponde a teoria livre. Chamamos a esta parte livre de  $V_{\text{termico}}$  de  $J$  que definimos em termos de uma relação recursiva como vemos abaixo

$$J = -\frac{4}{\pi^2 \beta^4} H_5(\beta \tilde{m}_\phi, \beta \tilde{m}_\psi, \mu_\phi / \tilde{m}_\phi, \mu_\psi / \tilde{m}_\psi), \quad (162)$$

onde  $H_5$  é uma das classes de função definidas como

$$H_l(\bar{M}, r) = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty \frac{x^{l-1} dx}{(x^2 + \bar{m}^2)^{1/2}} \left[ \frac{1}{\exp[(x^2 + \bar{m}^2)^{1/2} - r\bar{m}] - 1} + (r \rightarrow -r) \right]$$

onde  $x = \beta k$ ,  $\bar{m} = \beta m$  e  $r = \mu/m$ . Para que calculemos a expansão em altas temperaturas de  $H_l$  definimos mais uma classe de funções:

$$G_l(\bar{M}, r) = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty x^{l-1} dx \left[ \frac{1}{\exp[(x^2 + \bar{m}^2)^{1/2} - r\bar{m}] - 1} + (r \rightarrow -r) \right]$$

que estão relacionadas da seguinte maneira

$$\frac{dG_{l+1}}{d\bar{m}} = lrH_{l+1} - \frac{\bar{m}}{l}G_{l-1} + \frac{\bar{m}^2 r}{l}H_{l-1}, \quad (163)$$

$$\frac{dH_{l+1}}{d\bar{m}} = \frac{r}{l}G_{l-1} - \frac{\bar{m}}{l}H_{l-1}. \quad (164)$$

Usando estas expressões, podemos determinar a o limite de altas temperatura para a parte

livre de  $V_{\text{termico}}$  <sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
J &= \frac{-\pi^2 T^4}{45} + \frac{T^2 \tilde{m}_\phi^2}{12} - \frac{T^2 \mu_\phi^2}{6} + \frac{T(\tilde{m}_\phi^2 - \mu_\phi^2)^{3/2}}{6\pi} \\
&+ \frac{T^2 \tilde{m}_\psi^2}{12} - \frac{T^2 \mu_\psi^2}{6} + \frac{T(\tilde{m}_\psi^2 - \mu_\psi^2)^{3/2}}{6\pi} + \mathcal{O}(\ln T).
\end{aligned} \tag{165}$$

A única diferença de nosso resultado para aquele encontrado em [17] corresponde ao shift  $m_{\phi,\psi}^2 \rightarrow \tilde{m}_{\phi,\psi}^2$ . O principal efeito é gerar a bem conhecida renormalização da massa em alta temperatura

$$m_\phi^2 \rightarrow m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi T^2}{12} - \lambda\psi_0^2. \tag{166}$$

$$m_\psi^2 \rightarrow m_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi T^2}{12} - \lambda\phi_0^2. \tag{167}$$

Assim como apontado por Weinberg [?], o aparecimento da correção de massa quadrática negativa em alta temperatura sinaliza a quebra da teoria de perturbação. Para um laço, a inserção de massa torna-se comparável a o termo de nível de árvore [16]. Para que possamos atingir este resultado, vamos utilizar o método proposto por Fendley [18]. Fendley mantém invariável o termo de nível de árvore mas soma sobre todas as inserções de massa sobre os gráficos que contribuem para o potencial efetivo a um laço, o que é obtido por se usar a massa renormalizada em (166) e (167) no lugar da massa em expressões obtidas para potencial efetivo a um laço. Tecnicamente,  $m_{\phi,\psi}^2$  e  $\tilde{m}_{\phi,\psi}^2$  que aparecem em  $V_{\text{ponto zero}}$  e  $V_{\text{termico}}$  seriam corrigidos pelo termo aditivo  $\frac{\lambda_{\phi,\psi} T^2}{12}$ . A quantidade adimensional  $m_{\phi,\psi}^2$  permanece adimensional assim como encontrado no limite de alta temperatura de Harber e Weldon. Além do mais, todos os termos aditivos induzidos em (165) pelo shift finalizam sendo o fator  $\lambda_{\phi,\psi}$  menor que os termos pré-existente.

Vamos agora fazer a nossa análise para a segunda linha na expressão em (161) para  $V_{\text{termico}}$ . Para determiná-lo, devemos encontrar o limite de alta temperatura para a integral

---

<sup>3</sup> Alguns detalhes dos cálculos que levam a este limite podem ser encontrados em [17]

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\beta\lambda_\phi^2\phi_0^4}{128\mu_\phi E_\phi} \left[ \frac{1}{E_\phi + \mu_\phi e^{\beta(E_\phi + \mu_\phi)} - 1} \frac{1}{E_\phi - \mu_\phi e^{\beta(E_\phi - \mu_\phi)} - 1} \right] + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(1 - e^{-\beta(E_\psi + \mu_\psi)}) (1 - e^{-\beta(E_\psi - \mu_\psi)}) \\
&+ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\beta\lambda_\psi^2\psi_0^4}{128\mu_\psi E_\psi} \left[ \frac{1}{E_\psi + \mu_\psi e^{\beta(E_\psi + \mu_\psi)} - 1} \frac{1}{E_\psi - \mu_\psi e^{\beta(E_\psi - \mu_\psi)} - 1} \right]. \quad (168)
\end{aligned}$$

Devido a sua dependência das variáveis  $\beta$ ,  $\mu_{\phi,\psi}$  e  $m_{\phi,\psi}^2$ ,  $I$  pode ser relacionado a contribuição térmica livre  $J$  pela relação

$$\partial_\beta I = \frac{2}{\beta} \partial(m_{\phi,\psi}^2) \partial(\mu_{\phi,\psi}) J. \quad (169)$$

Fazendo uso do limite de alta temperatura de Harber e Weldon (161) obtemos então

$$I = \frac{\mu_\phi T}{2\pi\sqrt{\tilde{m}_\phi^2 - \mu_\phi^2}} + \frac{\mu_\psi T}{2\pi\sqrt{\tilde{m}_\psi^2 - \mu_\psi^2}}. \quad (170)$$

Combinando os resultados apresentados em (165) e (170), reproduzimos o limite de alta temperatura para  $V_{\text{termico}}$  para este regime dominado pela carga. Manteremos apenas os termos lineares ou de ordem mais alta em  $T$ , e somente as porções dominantes de seus coeficientes (isto é, negligenciamos as contribuições suprimidas em  $\lambda_{\phi,\psi}$ ). Em nenhum lugar, entretanto, negligenciamos a direção  $\mu_{\phi,\psi}$ ,  $\phi_0$  e  $\psi_0$  ou a dependência em  $T$ . Obtemos então

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{\text{termico}} &= \frac{-2\pi^2 T^4}{45} + \frac{T^2 \tilde{m}_\phi^2}{12} + \frac{T^2 \tilde{m}_\psi^2}{12} - \frac{T^2 \mu_\phi^2}{6} - \frac{T(\tilde{m}_\phi^2 - \mu_\phi^2)^{3/2}}{6\pi} + \frac{T\lambda_\phi^2\phi_0^4}{256\pi\sqrt{m_\phi^2 - \mu_\phi^2}} \\
&+ \frac{T^2 m_\psi^2}{12} - \frac{T^2 \mu_\psi^2}{6} - \frac{T(m_\psi^2 - \mu_\psi^2)^{3/2}}{6\pi} + \frac{T\lambda_\psi^2\psi_0^4}{256\pi\sqrt{m_\psi^2 - \mu_\psi^2}}. \quad (171)
\end{aligned}$$

Notemos que o comportamento líder dominante de  $\mu_{\phi,\psi}$ ,  $\phi_0$  e  $\psi_0$  é todo determinado pelos termos de ordem  $T^2$  ou de ordem mais alta. Estes termos são inalterados do caso livre, com a substituição de  $m_{\phi,\psi}^2 \rightarrow \tilde{m}_{\phi,\psi}^2$ . Para o limite de altas temperaturas, podemos desprezar os termos com dependência linear na temperatura que aparecem em (171) o que nos fornece como resultado

$$\begin{aligned}
V_{eff} &= V_{tree} + V_{termico} \\
&= \frac{(m_\phi^2 - \mu_\phi^2)}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda_\phi}{16} \phi_0^4 + \frac{T^2 \tilde{m}_\phi^2}{12} - \frac{T^2 \mu_\phi^2}{6} \\
&+ \frac{(m_\psi^2 - \mu_\psi^2)}{2} \psi_0^2 + \frac{\lambda_\psi}{16} \psi_0^4 + \frac{T^2 \tilde{m}_\psi^2}{12} - \frac{T^2 \mu_\psi^2}{6} \\
&+ \frac{\lambda}{4} \phi_0^2 \psi_0^2 + \mu_\phi n_\phi - \frac{\pi^2 T^4}{45} + \mu_\psi n_\psi,
\end{aligned} \tag{172}$$

A estrutura de fases depende do mínimo do potencial efetivo. Devemos lembrar que  $\phi_0$  e  $\psi_0$  aparecem explicita e implicitamente em  $V_{eff}$ , através de  $\tilde{m}_{\phi,\psi}^2$ , obtemos

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_0} = \left[ m_\phi^2 - \mu_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{6} \phi_0^2 - \frac{\lambda_\phi T^2}{18} - \frac{\lambda}{2} \psi_0^2 \right] \phi_0, \tag{173}$$

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \psi_0} = \left[ m_\psi^2 - \mu_\psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{6} \psi_0^2 - \frac{\lambda_\psi T^2}{18} - \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 \right] \psi_0, \tag{174}$$

onde temos os mínimos  $\phi_0 = 0$  e  $\psi_0 = 0$  para a fase simétrica para os setores  $\phi$  e  $\psi$  respectivamente, e

$$\phi_0^2 = \frac{4}{\lambda_\phi} \left[ \mu_\phi^2 - m_\phi^2 - \frac{\lambda_\phi T^2}{18} - \lambda \psi_0^2 \right], \tag{175}$$

$$\psi_0^2 = \frac{4}{\lambda_\psi} \left[ \mu_\psi^2 - m_\psi^2 - \frac{\lambda_\psi T^2}{18} - \lambda \phi_0^2 \right], \tag{176}$$

com quebra de simetria. A transição de fases ocorre quando  $\phi_0^2$  e  $\psi_0^2$  tornam-se não negativo, o que acontece em uma temperatura chamada crítica definida por

$$(T_c^\phi)^2 = \frac{12 [\mu_\phi^2(T_c) - m_\phi^2 - \lambda \psi_0^2]}{\lambda_\phi}, \tag{177}$$

$$(T_c^\psi)^2 = \frac{12 [\mu_\psi^2(T_c) - m_\psi^2 - \lambda \phi_0^2]}{\lambda_\psi}. \tag{178}$$

Lembremos que  $n_\phi$  e  $n_\psi$  surgem da minimização do potencial efetivo com relação ao potencial químico como vemos em

$$n_\phi = \mu_\phi \phi_0^2 - \frac{\partial V_{eff}}{\partial \mu_\phi}, \tag{179}$$

$$n_\psi = \mu_\psi \psi_0^2 - \frac{\partial V_{eff}}{\partial \mu_\psi}, \quad (180)$$

onde negligenciamos a contribuição de ponto zero. Notemos também que a dependência de  $\mu_{\phi,\psi}$  do termo dominante do potencial efetivo em alta temperatura é invariante para a teoria livre conforme nos mostra o resultado de Harber e Weldon [17]. O shift  $m_{\phi,\psi}^2 \rightarrow \tilde{m}_{\phi,\psi}^2$  nos cálculos da contribuição térmica não o afeta. Assim, a contribuição térmica é simplesmente

$$n_\phi = -\frac{\partial J}{\partial \mu_\phi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{E_\phi + \mu_\phi} \frac{1}{e^{\beta(E_\phi + \mu_\phi)} - 1} - \frac{1}{E_\phi - \mu_\phi} \frac{1}{e^{\beta(E_\phi - \mu_\phi)} - 1} \right], \quad (181)$$

$$n_\psi = -\frac{\partial J}{\partial \mu_\psi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{E_\psi + \mu_\psi} \frac{1}{e^{\beta(E_\psi + \mu_\psi)} - 1} - \frac{1}{E_\psi - \mu_\psi} \frac{1}{e^{\beta(E_\psi - \mu_\psi)} - 1} \right], \quad (182)$$

onde  $J$  é dado pela Eq. (165). As Eqs. (181) e (182) representam as densidades de carga para as excitações térmicas para o gás de Bose de partículas e anti-partículas. Vemos ainda que as Eqs. (181) e (182) exclui as excitações de momento zero, uma vez que o integrando tem peso zero aqui. Assim, a densidade de carga total é facilmente interpretada como a soma de (1) as densidades de carga portadas pelos modos do banho de térmicos, e (2) a densidade de carga portada pelos modos de Goldstone. No limite de altas temperatura, a soma destas duas contribuições torna-se simplesmente

$$n_\phi = \mu_\phi \phi_0^2 + \frac{\mu_\phi T^2}{3} = \frac{6\mu_\phi}{\lambda_\phi} (\mu_\phi^2 - \bar{m}_\phi^2), \quad (183)$$

$$n_\psi = \mu_\psi \psi_0^2 + \frac{\mu_\psi T^2}{3} = \frac{6\mu_\psi}{\lambda_\psi} (\mu_\psi^2 - \bar{m}_\psi^2), \quad (184)$$

Em geral a Eq. (183) e (184) para  $\mu_{\phi,\psi}$  é difícil de resolver, mas ela pode ser simplificada em dois limites: limite de baixa densidade, com  $\lambda_\phi n_\phi \ll \bar{m}_\phi^3$  (e  $\lambda_\psi n_\psi \ll \bar{m}_\psi^3$ ) e o limite de alta densidade com  $\lambda_\phi n_\phi \gg \bar{m}_\phi^3$  [17]. Para o limite de baixa densidade tanto  $n_{\phi,\psi}$  quanto  $\mu_{\phi,\psi}$  são pequenos e tem um impacto mínimo sobre a evolução da teoria. Aqui, tomando  $\bar{m}_\phi^2 < 0$  então a teoria tem quebra de simetria em baixa temperatura na ausência de carga e as Eq. (183) e (184) atingem o valor

$$\mu_{\phi,\psi} = \frac{\lambda_{\phi,\psi} n_{\phi,\psi}}{6 |\bar{m}_{\phi,\psi}^2|} \ll |\bar{m}_{\phi,\psi}|. \quad (185)$$

Uma vez que  $\mu_\phi$  tem um pequeno efeito sobre  $T_c$ , então expandimos sobre seu valor na ausência de  $\mu_\phi$  :

$$T_c^2 \equiv \frac{18 |\bar{m}_{\phi,\psi}^2|}{\lambda_{\phi,\psi}} (1 + \delta), \quad (186)$$

onde

$$\delta = \frac{\mu_{\phi,\psi}^2(T_c)}{|\bar{m}_{\phi,\psi}^2|}, \quad (187)$$

isto é, a temperatura crítica atinge um valor levemente mais alto na ausência de  $n_\phi$ , sem entretanto alterar qualitativamente os aspectos da simetria para o sistema.

Uma vez que estamos investigando a presença de ISB/SNR, que consistem em alterações drásticas no quadro de simetria da teoria, não aprofundaremos a nossa análise para o limite de baixa densidade. Nossa análise bem como os resultados obtidos concentram-se no limite de altas densidades conforme veremos na próxima seção.

### 2.3 A Estrutura de Fases do Modelo

Passamos agora a estudar a estrutura de fases do modelo e buscar a possível existência de fases de ISB e SNR.

#### 2.3.1 Limite de Altas Densidades e Altas Temperaturas

No limite de alta densidade, ambos  $n_\phi^0$  e  $n_\psi^0$  são grandes tendo extremos efeitos sobre a evolução da teoria. Aqui as equações (183) e (184) produzem

$$\mu_\phi = \frac{\lambda_\phi n_\phi}{6 |\bar{m}_\phi^2|} \gg |\bar{m}_\phi|, \quad (188)$$

$$\mu_\psi = \frac{\lambda_\psi n_\psi}{6 |\bar{m}_\psi^2|} \gg |\bar{m}_\psi|, \quad (189)$$

que tem como principal consequência elevar o valor da temperatura crítica.

O limite de alta densidade domina verdadeiramente o parâmetro espacial para o

sistema durante a expansão em alta temperatura. Isto ocorre sempre que

$$\lambda_\phi \eta_\phi \gg \bar{m}_\phi^3 / T^3, \quad (190)$$

$$\lambda_\psi \eta_\psi \gg \bar{m}_\psi^3 / T^3, \quad (191)$$

onde  $\eta_{\phi,\psi}$  é uma constante de proporcionalidade. O lado direito é por suposição extremamente pequeno de modo que o resultado expresso pelas Eqs. (190) e (191) são via de regra obtidos. Uma observação importante a ser feita é que estamos fazendo nossa considerações para um quadro de expansão isentrópica o que implica que as soluções de alta densidade para  $\mu_{\phi,\psi}$  tem seu impacto mais significativo. Para este quadro, o potencial químico é contínuo na transição de fases e definido por

$$\mu_{\phi,\psi} = \begin{cases} 3\eta_{\phi,\psi} T, & \text{para a fase simétrica} \\ \left( \frac{\lambda_{\phi,\psi} \eta_{\phi,\psi}}{2} \right)^{1/3} T, & \text{para quebra de simetria} \end{cases} \quad (192)$$

com as densidades de carga dadas por

$$n_{\phi,\psi} = \eta_{\phi,\psi} T^3, \quad (193)$$

e, neste caso  $T_c$  tem a forma

$$T_c^2 = \frac{12\bar{m}_\phi^2}{\lambda_\phi [(162\eta_\phi^2/\lambda_\phi) - 1]}, \quad (194)$$

$$T_c^2 = \frac{12\bar{m}_\psi^2}{\lambda_\psi [(162\eta_\psi^2/\lambda_\psi) - 1]}, \quad (195)$$

onde  $\bar{m}_\phi^2 = m_\phi^2 - \lambda\psi_0^2$  e  $\bar{m}_\psi^2 = m_\psi^2 - \lambda\phi_0^2$ . Definimos os parâmetros

$$\psi_\phi \equiv \left[ \frac{162\eta_\phi^2}{\lambda_\phi} \right]. \quad (196)$$

$$\psi_\psi \equiv \left[ \frac{162\eta_\psi^2}{\lambda_\psi} \right]. \quad (197)$$

Podemos usar as Eqs. (175) e (176) junto com as definições (196) e (197) para escrever a seguinte expressão para os VEVs para os campos  $\phi_0$  e  $\psi_0$  respectivamente

$$\phi_0^2 = \left[ \left( \psi_\phi^{1/3} - 1 \right) T^2 - \frac{6m_\phi^2}{\lambda_\phi} - \lambda\psi_0^2 \right], \quad (198)$$

$$\psi_0^2 = \left[ \left( \psi_\psi^{1/3} - 1 \right) T^2 - \frac{6m_\psi^2}{\lambda_\psi} - \lambda\phi_0^2 \right], \quad (199)$$

quando estas expressões tornam-se não negativas, ocorre a quebra de simetria. A nossa teoria com termo de interação cruzado  $\lambda\phi_0^2\psi_0^2$  pode nos dar diferentes comportamentos para os diversos setores dos parâmetros espaciais. Vejamos cada caso em detalhes.

### 2.3.2 Fases de ISB e SNR

Como sabemos, em casos onde os campos apresentam massa quadrática negativa, o resultado padrão consiste em termos a simetria quebrada em baixas temperaturas e posteriormente a sua restauração com o aumento da temperatura acima de um valor crítico. Todavia, conforme foi mostrado por Weinberg [5], para modelos multiescalares, podem haver casos onde este resultado não se verifica. Isto ocorre se consideramos que a constante de acoplamento cruzado  $\lambda$  recebe valores negativos e as seguintes condições de contorno são satisfeitas

$$\begin{aligned} |\lambda| &> (2/3)\lambda_\phi \\ |\lambda| &< (2/3)\lambda_\psi \end{aligned} \quad (200)$$

Assim, segundo Weinberg, o setor  $\psi$  teria a simetria restaurada em altas temperaturas enquanto que para o setor  $\phi$  a simetria nunca é restaurada, fenômeno este conhecido como SNR (Symmetry non-restoration, em inglês). De modo similar, quando considerado o caso onde ambos os setores apresentavam massa quadrática positiva, ou seja, a teoria deveria permanecer simétrica em ambos os setores. No entanto, com as condições dadas acima, o setor  $\phi$  apresentava quebra de simetria em alta temperatura, o que foi chamado de ISB (Inverse Symmetry Breaking). Nosso objetivo aqui é avaliar se a presença de carga induz o aparecimento de ISB/SNR afetando os possíveis aspectos de simetria da teoria.

Começamos nossa análise por considerar o caso em que ambos os campos tem massa quadrática negativa. Utilizando as definições (196) e (197) bem como os resultados em (192) escrevemos as equações para os VEVs em termos dos parâmetros  $\psi_{\phi,\psi}$  conforme vemos abaixo

$$\begin{aligned}\phi_0^2 &= \frac{\lambda_\phi}{\lambda_\phi\lambda_\psi - 9\lambda^2} \left[ \frac{1}{3} \left( (\psi_\phi^{1/3} - 1) T^2 + 6 \frac{m_\phi^2}{\lambda_\phi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\lambda}{\lambda_\phi} \left( (\psi_\psi^{1/3} - 1) T^2 + 6 \frac{m_\psi^2}{\lambda_\psi} \right) \right]\end{aligned}\quad (201)$$

$$\begin{aligned}\psi_0^2 &= \frac{\lambda_\psi}{\lambda_\psi\lambda_\phi - 9\lambda^2} \left[ \frac{1}{3} \left( (\psi_\psi^{1/3} - 1) T^2 + 6 \frac{m_\psi^2}{\lambda_\psi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\lambda}{\lambda_\psi} \left( (\psi_\phi^{1/3} - 1) T^2 + 6 \frac{m_\phi^2}{\lambda_\phi} \right) \right]\end{aligned}\quad (202)$$

com  $\psi_{\phi,\psi}$  definidos pelas Eqs. (196) e (197).

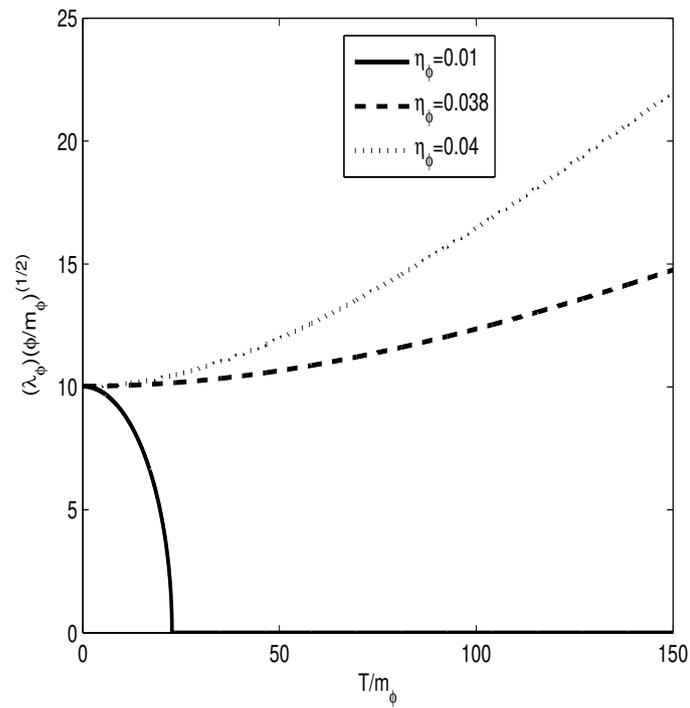
Conforme podemos notar, observando as figuras 1 e 2, a princípio ambos os setores da teoria apresentam o aspecto padrão de quebra de simetria em baixas temperaturas e uma posterior restauração da simetria com o aumento da temperatura. Mantivemos fixo a constante de proporcionalidade  $\eta_\psi$  (lembramos que a densidade de carga é dada por  $n_{\phi,\psi} = \eta_{\phi,\psi} T^3$ ) e variamos o valor do constante  $\eta_\phi$ . Observamos que quando a atribuímos a  $\eta_\phi$  o valor 0.038 o setor  $\phi$  da teoria apresenta SNR, isto é, a simetria quebrada em baixas temperatura permanece quebrada mesmo quando em temperaturas mais elevadas. Notamos ainda que para este valor de  $\eta_\phi$  a temperatura crítica para o o setor  $\psi$  atinge valores mais elevados do que ocorreria na ausência de carga ou mesmo para pequenos valores da densidade de carga. Podemos ainda perceber que, quando atribuímos a  $\eta_\phi$  o valor 0.04 nenhum dos setores terá a simetria restaurada em altas temperaturas.

$$\begin{aligned}\phi_0^2 &= \frac{\lambda_\phi}{\lambda_\phi\lambda_\psi - 9\lambda^2} \left[ \frac{1}{3} \left( (\psi_\phi^{1/3} - 1) T^2 - 6 \frac{m_\phi^2}{\lambda_\phi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\lambda}{\lambda_\phi} \left( (\psi_\psi^{1/3} - 1) T^2 - 6 \frac{m_\psi^2}{\lambda_\psi} \right) \right],\end{aligned}\quad (203)$$

$$\begin{aligned}\psi_0^2 &= \frac{\lambda_\psi}{\lambda_\psi\lambda_\phi - 9\lambda^2} \left[ \frac{1}{3} \left( (\psi_\psi^{1/3} - 1) T^2 - 6 \frac{m_\psi^2}{\lambda_\psi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\lambda}{\lambda_\psi} \left( (\psi_\phi^{1/3} - 1) T^2 - 6 \frac{m_\phi^2}{\lambda_\phi} \right) \right],\end{aligned}\quad (204)$$

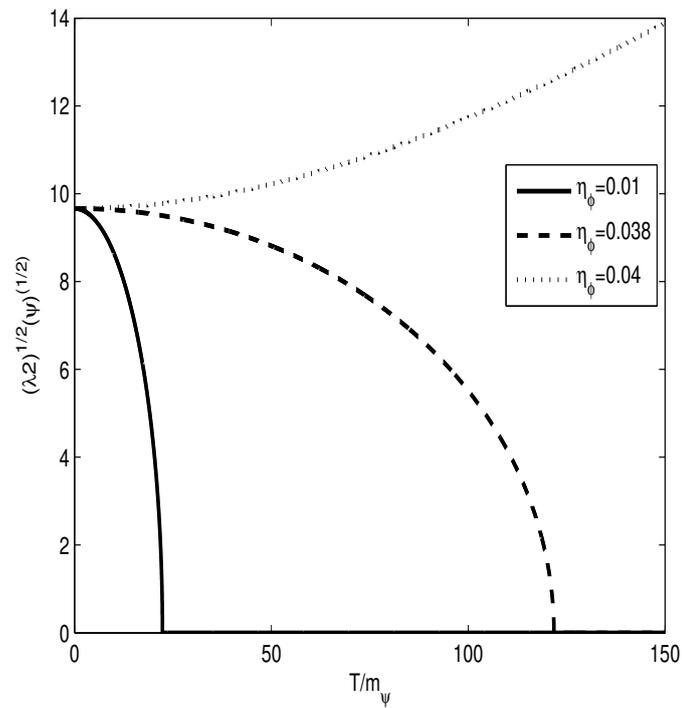
os resultados podem ser vistos nas figuras

Figura 1 - Valor esperado para o campo  $\phi$  em uma teoria multiescalar com carga  $n_\psi = \eta_\psi T^3$  e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro  $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram  $\lambda_\phi = 0.08$ ,  $\lambda_\psi = 0.08$  e  $\lambda = -0.026$ . Consideramos  $\eta_\psi = 0.01$  (sendo este mantido fixo).



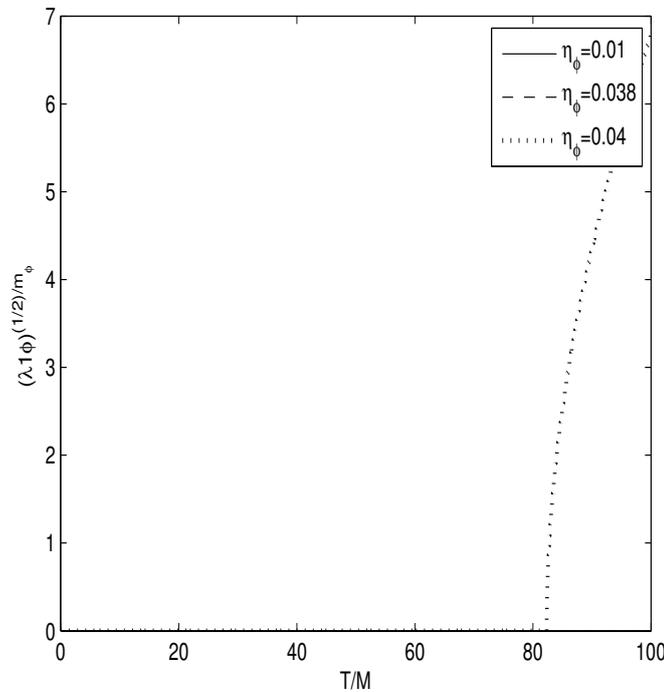
Fonte: O autor, 2011.

Figura 2 - Valor esperado para o campo  $\psi$  em uma teoria multiescalar com carga  $n_\psi = \eta_\psi T^3$  e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro  $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram  $\lambda_\phi = 0.08$ ,  $\lambda_\psi = 0.08$  e  $\lambda = -0.026$ . Consideramos  $\eta_\psi = 0.01$  (sendo este mantido fixo).



Fonte: O autor, 2011.

Figura 3 - Valor esperado para o campo  $\phi$  em uma teoria multiescalar com carga  $n_\phi = \eta_\phi T^3$  e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro  $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram  $\lambda_\phi = 0.08$ ,  $\lambda_\psi = 0.08$  e  $\lambda = -0.026$ . Consideramos  $\eta_\psi = 0.01$  (sendo este mantido fixo).

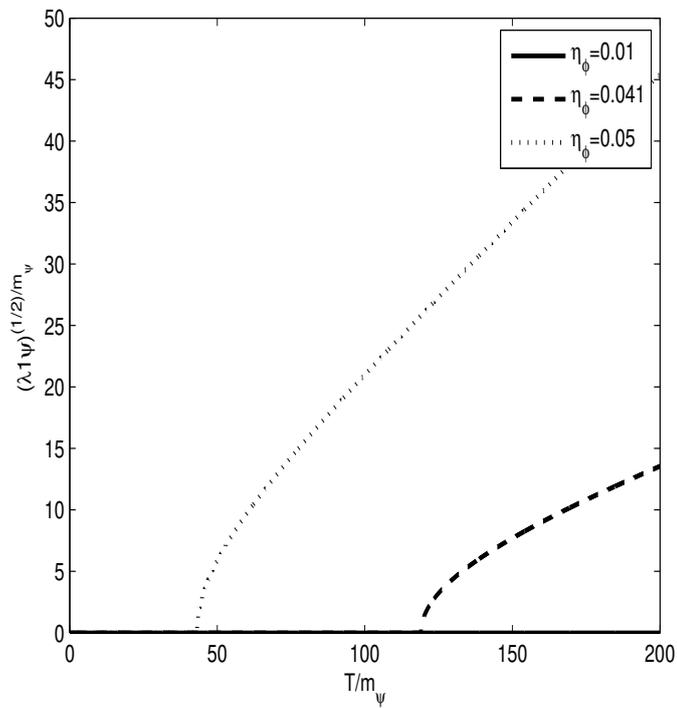


Fonte: O autor, 2011.

Das figuras ( 3) e (4), podemos notar que, para valores de  $\eta_\phi$  inferiores a 0.041, ambos os campos encontram-se na fase simétrica, como ocorreria em teorias onde efeitos de densidade não estão sendo levados em conta. No entanto, para valores acima deste valor crítico, ambos campos apresentarão uma quebra de simetria em altas temperaturas. Notamos também, que maiores valores de  $\eta_\phi$  podem alterar o valor da temperatura crítica para os setores  $\phi$  e  $\psi$  da teoria.

Como vimos com os resultados acima, a presença de carga pode modificar de forma extrema o diagrama de fases de uma teoria de campo escalar. Vimos que os efeitos de ISB/SNR são induzidos quando consideramos grandes valores para as densidades de carga. Todavia, há uma ressalva a ser feita: todos os resultados aqui apresentados para essas fases foram obtidos por meio da aplicação de teoria de perturbação ao nível de um laço, ou seja, são válidos apenas onde o método perturbativo converge e os termos de ordem superior nas constantes de acoplamento são mantidos nos cálculos. Sabe-se no entanto que esses não é o caso quando consideramos sistemas no limite de altas temperaturas, onde as correções

Figura 4 - Valor esperado para o campo  $\psi$  em uma teoria multiescalar com carga  $n_\psi = \eta_\psi T^3$  e massa quadrática negativa para diferentes valores do parâmetro  $\eta_\phi$ . Os valores usados para os acoplamentos foram  $\lambda_\phi = 0.08$ ,  $\lambda_\psi = 0.08$  e  $\lambda = -0.026$ . Consideramos  $\eta_\psi = 0.01$  (sendo este mantido fixo).



Fonte: O autor, 2011.

de alto energia de ordem mais alta, e que corrigem no caso as massas do campo (massas térmicas) e correções para a constante de acoplamento (o escalonamento com a energia, no caso a temperatura) podem tornar-se significativas. Para investigarmos o surgimento de ISB/SNR de forma consistente e estabelecer a existência desses fenômenos, torna-se necessário, portanto, a utilização de métodos não-perturbativos. Como já discutido na introdução no primeiro Capítulo, nesse trabalho faremos uso do método da TPO, que será definido no próximo Capítulo.

### 3 TEORIA DE PERTURBAÇÃO OTIMIZADA

#### 3.1 Uma Breve Apresentação

A quebra da expansão perturbativa em teoria quântica de campos a temperatura finita é um problema bem conhecido e cuja solução constitui ainda hoje matéria de muitas discussões e estudos. Esta quebra pode ocorrer devido ao aparecimento de divergências de infravermelho nas proximidades da temperatura crítica em teoria apresentando transição de fases de segunda ordem ou fracamente de primeira ordem, ou em teorias não massivas como na Cromodinâmica Quântica, ou simplesmente pelo fato que a altas temperaturas diagramas de Feynman de ordem mais alta nas constantes de acoplamento podem apresentar potências mais altas na temperatura do que termos de ordem mais baixa. Nesse casos em particular, podemos encontrar regimes de parâmetros onde os esquemas perturbativos convencionais são impraticáveis em altas temperaturas, quando as potências das constante de acoplamento são suplantadas pelas potências da temperatura.

Na tentativa de tratar deste problema, muitas técnicas de ressonância de termos da série perturbativa tem sido utilizadas. Alguns exemplos são a ressonância de diagramas de um laço (ressonância de diagramas *daisy e super daisy*) [19], [20], método do operador composto [21], o método do propagador de campo vestido [22] [23], ressonância auto consistente modificada [24] dentre outros métodos. A maioria destes métodos tem a desvantagem de não conseguirem a auto-consistência quando os diagramas de ordem mais alta são ressonados bem como a dificuldade para implantação da renormalização. Nós escolhemos, para esta tese, fazer uso da Teoria de Perturbação Otimizada (TPO), também conhecida como expansão delta linear, aplicada a uma teoria quântica de campos em temperatura e densidade finitas e em específico no modelo de dois campos em estudo nesta tese.

Como exemplos de aplicações bem sucedidas da TPO temos os trabalhos de Pinto e Ramos [25] em que foi feito uso deste método na investigação de quebras de simetria em temperatura finita em uma teoria de campo escalar com interação  $\lambda\phi^4$  até a segunda ordem em TPO e em Parkin [26] onde foi considerada uma teoria de campo escalar interação  $\phi^4$  e potencial químico diferente de zero, que, como vimos no Capítulos anteriores, promove um deslocamento na componente de energia do propagador de Matsubara e como consequência, tornam os cálculos dos diagramas de Feynman da teoria consideravelmente mais complicados de se calcular, mas que não apresentam outros problemas técnicos a princípio.

Neste Capítulo mostraremos detalhadamente como a teoria de perturbação falha em gerar uma sequência convergente de aproximantes, bem como seu mecanismo de quebra em altas temperaturas e em seguida, definimos o método da TPO e mostramos como esse método pode nos fornecer uma solução satisfatória e não perturbativa para esses

problemas. O presente Capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 3.2 mostramos brevemente como ocorre a quebra da teoria de perturbação para uma teoria de campos com termo de auto-interação  $\phi^4$  no caso geral a temperatura zero. Na Seção 3.3 explicamos como ocorre a quebra da teoria de perturbação no caso de temperatura finita. Na Seção 3.4 apresentamos um sumário sobre a TPO. Finalmente, na Seção 3.5 mostraremos como podemos utilizar a TPO como solução destes problemas por encontrar uma sequência convergente de aproximantes.

### 3.2 Quebra da Teoria de Perturbação em Teoria Quântica de Campos

Nesta Seção apresentamos os cálculos realizados para um modelo de teoria quântica de campos com auto interação  $\lambda\phi^4$ , mostrando como a teoria de perturbação falha em fornecer uma sequência convergente de aproximantes. O material desta seção segue de perto o trabalho de Pernice e Oleaga [27].

Consideremos uma teoria de campo escalar com termo de auto interação quártica tendo a seguinte função de partição

$$Z(g) = \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] e^{-S[\phi]}, \quad (205)$$

com

$$S[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]. \quad (206)$$

Podemos construir uma prova bastante simples para a divergência das séries perturbativas por argumentar que se tais séries convergirem para o resultado exato, a expansão da função de partição, por exemplo, seria analítica em  $\lambda$  para  $\lambda = 0$ . Entretanto, isto não pode ser verdade pois se permitirmos que  $\mathcal{R}(\lambda) < 0$  então a integral funcional em (205) diverge. Sendo assim, a conclusão óbvia que podemos chegar é que o método perturbativo irá divergir. O objetivo principal desta seção consiste em identificar o mecanismo para esta quebra e fornecer alguma justificativa e motivação para a TPO em teorias de campos e mostrando como esta constitui, de fato, em um método eficiente para gerar sequências convergentes que se aproximam da resposta correta.

Começaremos por gerar as séries perturbativas para a função de partição (205) que podem ser feitas do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
Z(g) &= \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] e^{-\int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) - \int d^d x \frac{\lambda}{4!} \phi^4} \\
&= \int [d\phi] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\lambda}{4!} \int d^d x \phi^4 \right)^n e^{-\int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int [d\phi] \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\lambda}{4!} \int d^d x \phi^4 \right)^n e^{-\int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)}. \tag{207}
\end{aligned}$$

Uma vez que para grandes valores de  $n$  os coeficientes em (207) exibem um comportamento fatorial, as séries perturbativas serão divergentes para qualquer  $\lambda \neq 0$  pois a integral funcional em (207) é perfeitamente bem definida para  $\mathcal{R}(\lambda) > 0$ , indicando que algum passo usado na geração das séries perturbativas deve estar equivocado. Como temos que o integrando é analítico em  $\lambda$ , podemos legitimamente expandi-lo em série de Taylor. Desta forma concluímos que o primeiro passo usado para construir séries perturbativas é perfeitamente aceitável. Isto nos leva a concluir que o segundo passo, que consiste na troca da posição entre a soma e a integral, é que deve estar equivocado. Para analisarmos o porquê de ser esta troca inválida neste caso, usamos o teorema de convergência dominada de Lebesgue, conforme é declarado abaixo:

*Seja  $f_N$  uma sequência de funções integráveis que converge pontualmente à função  $f$*

$$f_N \rightarrow f \text{ quando } N \rightarrow \infty, \tag{208}$$

*e é limitada em valor absoluto por uma função integrável positiva  $h$  (dominada):*

$$|f_N| \leq h, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{209}$$

*Então é verdade que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int f_N = \int \lim_{N \rightarrow \infty} f_N = \int f. \tag{210}$$

Vamos agora constatar que podemos aplicar o teorema de Lebesgue para o caso da integral funcional. Escrevemos

$$f_N[\phi(x)] = \frac{1}{Z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\lambda}{4!} \int d^d x \phi^4 \right)^n \exp \left[ - \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right], \tag{211}$$

convergindo neste exemplo para o valor exato

$$f_N[\phi(x)] = \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] \exp \left[ - \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \int d^d x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right]. \quad (212)$$

Para efetuarmos nossa análise da expansão perturbativa, consideremos em mais detalhes os termos da expansão

$$c_n[\phi(x)] = \frac{1}{Z_0} \frac{(-1)^n}{n!} \exp \left[ - \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right] + n \ln \left( \frac{\lambda}{4!} \int d^d x \phi^4 \right). \quad (213)$$

Estamos interessados em encontrar o valor máximo para  $c_n[\phi(x)]$  e por fazer isso demonstrar que há uma região espacial do campo em que não se pode aplicar o teorema de Lebesgue.

Se escrevemos

$$c_n[\phi(x)] = \frac{1}{Z_0} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-S_{eff}[\phi]}, \quad (214)$$

com

$$S_{eff}[\phi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - n \ln \left( \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \right], \quad (215)$$

então a configuração do campo  $\phi$  que minimiza a ação efetiva (maximizando  $c_n[\phi(x)]$ ) é governada pela seguinte equação:

$$-\nabla^2 \phi + m^2 \phi - \frac{4n}{\int d^d x \phi^4} \phi^3 = 0. \quad (216)$$

Fazendo a mudança de variável

$$\begin{aligned} \phi(x) &= m \left( \frac{\int d^d x \phi^4}{4n} \right)^{1/2} \phi(mx) \\ &= m^{d/2-1} \left( \frac{4n}{\int d^d x \varphi^4(u)} \right)^{1/2} \varphi(u), \end{aligned} \quad (217)$$

o campo transformado satisfaz a equação

$$-\nabla^2 \varphi(u) + \varphi(u) - \varphi^3(u) = 0, \quad u = mx. \quad (218)$$

Vamos denotar as soluções que maximizam  $c_n[\phi(x)]$  por  $\phi_{\max}$ . Agora se consideramos a condição que  $\phi_{\max}$  minimiza a ação, então dada uma constante arbitrária  $\alpha$ ,  $S_{eff}[\alpha\phi_{\max}]$  será minimizada em  $\alpha = 1$ . Agora

$$S_{eff}[\alpha\phi_{\max}] = \alpha^2 \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{\max})^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_{\max}^2 \right] - n \ln \left( \frac{\lambda \alpha^4}{4!} \int d^d x \phi^4 \right), \quad (219)$$

então

$$\frac{\partial S_{eff}[\phi]}{\partial \alpha} = \int d^d x [(\partial_\mu \phi_{\max})^2 + m^2 \phi_{\max}^2] - \frac{4n}{\alpha}. \quad (220)$$

A Eq. (219) conduz a condição

$$\int d^d x (\partial_\mu \phi_{\max})^2 + m^2 \int d^d x \phi_{\max}^2 - 4n = 0. \quad (221)$$

É também o caso que  $S_{eff}[\alpha\phi_{\max}]$  será minimizado em  $\alpha = 1$ . Se fizermos  $\alpha x \rightarrow x$  então

$$S_{eff}[\alpha\phi_{\max}] = \alpha^{2-d} \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{\max})^2 + \frac{1}{\alpha^d} \int d^d x \frac{1}{2} m^2 \phi_{\max}^2 - n \ln \left( \frac{\lambda}{4! \alpha^d} \int d^d x \phi_{\max}^4 \right), \quad (222)$$

de modo que

$$\frac{\partial S_{eff}[\alpha\phi_{\max}]}{\partial \alpha} = (2-d) \alpha^{1-d} \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{\max})^2 - \frac{d}{\alpha^{d+1}} \int d^d x \frac{1}{2} m^2 \phi_{\max}^2 - \frac{nd}{\alpha}. \quad (223)$$

Deduzimos de (222) que

$$\frac{(2-d)}{d} \int d^d x (\partial_\mu \phi_{\max})^2 - m^2 \int d^d x \phi_{\max}^2 - \alpha n. \quad (224)$$

Resolvendo as Eq. (220) e (224)

$$\int d^d x (\partial_\mu \phi_{\max})^2 = nd, \quad (225)$$

$$m^2 \int d^d x \phi_{\max}^2 = n(4-d). \quad (226)$$

Podemos usar estas duas equações ou, ao invés disso, usamos apenas a equação (220), para obter

$$\int d^d x [(\partial_\mu \phi_{\max})^2 + m^2 \phi_{\max}^2] = 2n. \quad (227)$$

Agora  $\varphi_{\max}(u)$  (relacionado a  $\phi_{\max}$  por meio da Eq.(217)) é uma quantidade adimensional e dada que sua correspondência com  $\phi_{\max}$  tem uma ação finita, temos que

$$A \equiv \frac{1}{4} \int d^d u \phi_{\max}^4, \quad (228)$$

é um número finito e estritamente positivo. Com  $A$  conforme definido acima e usando a Eq. (217), temos que

$$\phi_{\max}(x) = m^{d/2-1} \left(\frac{n}{A}\right)^{1/2} \varphi_{\max}(u). \quad (229)$$

Assim,  $|\varphi_{\max}| \sim \sqrt{n}$ , desde que a equação para o qual  $\varphi_{\max}$  é uma solução, a saber a Eq. (216), é independente de  $n$ . Daí então, combinando as Eqs. (227) e (229) junto com a definição (228), nós temos

$$S_{eff}[\phi_{\max}] = 2n - n \ln \left( \frac{\lambda m^{d-4}}{A} n^2 \right), \quad (230)$$

do qual podemos ver que

$$c_n[\phi_{\max}] \sim \frac{1}{Z_0} \frac{(-1)^n}{2\pi} (n-1)! \ln \left( \frac{\lambda m^{d-4}}{A} \right)^n. \quad (231)$$

Podemos observar que os coeficientes  $c_n[\phi_{\max}]$  exibem um padrão de comportamento de crescimento dependente de um fatorial.

Agora, vamos derivar a aproximação gaussiana de  $c_n[\phi]$  sobre  $\phi_{\max}$ . Para que possamos fazer isto, vamos primeiramente efetuar a seguinte mudança de variáveis

$$\phi(x) = m^{d/2-1} \varphi_q(mx), \quad (232)$$

de modo que a ação efetiva torna-se (com  $u \equiv mx$ )

$$S_{eff}[\phi_{\max}] = \frac{1}{2} \int d^d u [\phi_q(u) [-\nabla^2 + 1] \phi_q(u)] - n \ln \left( \frac{\lambda m^{d-4}}{4} \int d^d u \phi_q^4(u) \right). \quad (233)$$

Com a mudança de variável descrita em (232), fazemos a definição

$$\phi_{\max}(x) = m^{d/2-1} \varphi_{q_{\max}}(u), \quad (234)$$

e efetuando a expansão em Taylor da ação efetiva em torno de  $\varphi_{q_{\max}}(u)$ :

$$\begin{aligned} S_{eff}[\phi_q] &= S_{eff}[\phi_{q_{\max}}] + \int d^d u_1 \phi_q(u_1) \left. \frac{\delta S_{eff}[\phi_q]}{\delta \phi_q(u_1)} \right|_{\phi_q = \phi_{q_{\max}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^d u_1 d^d u_2 \phi_q(u_1) \phi_q(u_2) \left. \frac{\delta^2 S_{eff}[\phi_q]}{\delta \phi_q(u_1) \delta \phi_q(u_2)} \right|_{\phi_q = \phi_{q_{\max}}}. \end{aligned} \quad (235)$$

Agora,

$$\frac{\delta S_{eff}[\phi_q]}{\delta \phi_q(u_1)} = [-\nabla_{u_1}^2 + 1] \phi_q(u_1) - \frac{4n}{\int d^d u \phi_q^4(u_1)} 3\phi_q^2(u_1) \delta(u_1 - u_2), \quad (236)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S_{eff}[\phi_q]}{\delta \phi_q(u_1) \delta \phi_q(u_2)} &= [-\nabla_{u_1}^2 + 1] \phi_q(u_1) - \frac{4n}{\int d^d u \phi_q^4(u_1)} 3\phi_q^2(u_1) \delta(u_1 - u_2) \\ &\quad + \frac{16n}{\left(\int d^d u \phi_q^4(u_1)\right)^2} \phi_q^3(u_1) \phi_q^3(u_2). \end{aligned} \quad (237)$$

Por construção

$$\frac{\delta S_{eff}[\phi_q]}{\delta \phi_q(u_1)} = 0. \quad (238)$$

Para calcular a Eq. (237) em  $\phi_q = \phi_{q\max}$ , nós usamos a definição (228) e a Eq. (229) para deduzir que

$$\phi_{q\max}(x) = \left(\frac{n}{A}\right)^{1/2} \phi_{\max}(u), \quad (239)$$

$$\int d^d u \phi_q^4(u) = \frac{4n^2}{A}, \quad (240)$$

e assim

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 S_{eff}[\phi_q]}{\delta\phi_q(u_1)\delta\phi_q(u_2)} \right|_{\phi_q=\phi_{q\max}} &= [-\nabla_{u_1}^2 + 1 - 3\varphi_{\max}^2] \delta(u_1 - u_2) \phi_q(u_1) \\ &+ \frac{1}{A} \varphi_{\max}^3(u_1) \varphi_{\max}^3(u_2). \end{aligned} \quad (241)$$

Desta forma, a aproximação gaussiana para  $c_n[\phi]$  em torno de  $\phi_{\max}$  é dada por

$$\begin{aligned} c_n[\phi_{\max}] &\sim \frac{1}{Z_0} \frac{(-1)^n}{2\pi} (n-1)! \ln \left( \frac{\lambda m^{d-4}}{A} \right)^n \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d u_1 d^d u_2 \phi_q(u_1) [-\nabla_{u_1}^2 + 1 - 3\varphi_{\max}^2(u_1)] \delta(u_1 - u_2) \phi_q(u_2) \right) \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d u_1 d^d u_2 \phi_q(u_1) \left[ \frac{1}{A} \varphi_{\max}^3(u_1) \varphi_{\max}^3(u_2) \right] \phi_q(u_2) \right). \end{aligned} \quad (242)$$

Esta aproximação torna-se exata no limite em que  $n \rightarrow \infty$ .

Podemos notar claramente com o que foi apresentado acima como a expansão em Taylor da  $f[\phi(x)]$  em potências da constante de acoplamento  $\lambda$  falhará em convergir de maneira dominada. A expansão  $f_N[\phi(x)]$  consiste do termo de ordem zero (uma gaussiana pura) acrescido de picos sucessivos. Enquanto que a largura destes picos permanecem constantes, a sua altura absoluta cresce fatorialmente com a ordem da expansão (com a posição do pico aumentando de forma proporcional a raiz quadrada da ordem). Até um certo valor crítico  $x = x_{c,N}$  (com  $x_{c,N} < x_{\max} = \sqrt{2n}$ ), o cancelamento entre os picos sucessivos é praticamente exato e  $f_N[\phi(x)]$  aproxima-se do integrando interagente com um alto grau de precisão. Todavia, além deste valor crítico, começa a emergir um pico final e este não é cancelado por nenhum outro posteriormente e, a medida que  $N$  torna-se cada vez maior, este permanece praticamente não cancelado pelos picos prévios. Para estes valores de  $x$ , o supremo da diferença entre a expansão de Taylor e o integrando exato é da ordem da altura do último pico e, como tal, cresce fatorialmente com  $N$ . Além

do mais, a largura deste aproxima-se de uma constante finita e diferente de zero quando  $N \rightarrow \infty$  de forma que há uma região para o qual

$$|f_N| \sim \mathcal{O}((n-1)!). \quad (243)$$

Está claro para nós que não irá convergir para o valor real de  $f_N[\phi(x)]$  de uma maneira dominada, pois qualquer função positiva  $h(x)$  com a propriedade

$$|f_N| \leq h(x) \quad \forall N, \quad (244)$$

não é integrável, uma vez que tal função deve conter um pico e desta forma cobrirá uma área cujo crescimento é fatorial com a ordem.

Assim sendo, concluímos que a aproximação gaussiana para  $c_N[\phi(x)]$  (dada pela Eq. (242)) consiste em uma medida finita e independente de  $N$  e nós concluímos que o desvio de  $f_N[\phi(x)]$  com relação a  $f[\phi(x)]$  é da ordem de  $(n-1)!$  nesta região.

### 3.3 Quebra da Teoria de Perturbação em Altas Temperaturas

Nesta seção, discutiremos brevemente como o método perturbativo quebra quando consideramos que o sistema está em um limite de temperatura muito alta. No Capítulo anterior calculamos a aproximação de um laço para o potencial efetivo do modelo de dois campos escalares complexos interagentes e afirmamos que esta aproximação somente era válida no limite em que a teoria de perturbação converge. Vejamos como esta palavra de cautela é justificável.

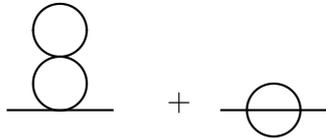
Para que possamos ver se a série perturbativa é bem comportada, precisamos considerar os termos de ordem mais alta na expansão. Vamos considerar por exemplo a massa térmica  $m_\beta$ . Para ordem de um laço, a contribuição para massa térmica é dada pelo diagrama de ordem  $\lambda$ ,

$$\text{Diagrama de um laço} \quad (245)$$

que nos fornece como contribuição térmica para massa o resultado

$$\delta m_\beta = \frac{\lambda T^2}{24}. \quad (246)$$

Na ordem de dois laços, a massa térmica recebe a contribuição devida a dois diferentes diagramas, mostrados na figura abaixo,



$$(247)$$

O resultado em altas temperaturas para os dois diagramas em (247) é dado por

$$\delta m_{\beta}^{(2)} = -\frac{\lambda^2 T^3}{384m}. \quad (248)$$

Comparando este resultado de segunda ordem com a contribuição de primeira ordem para massa térmica, concluímos que para a aproximação de primeira ordem ser confiável em temperatura finita devemos ter

$$\left(\frac{\lambda^2 T^3}{384m}\right) / \left(\frac{\lambda T^2}{24}\right) = \frac{\lambda T}{16\pi m} \ll 1,$$

além do requerimento usual para expansão perturbativa,  $\lambda \ll 1$ . Está claro deste resultado que em temperaturas suficientemente altas, para valores fixos de  $m$  e  $\lambda$  a aproximação perturbativa quebra. Um outro problema sério relacionado ao resultado (248) consiste na singularidade no infravermelho que surge quando  $m \rightarrow 0$ . Esta singularidade é devido apenas a topologia do diagrama de primeira ordem dado por (245). Embora divergências no infravermelho sejam inerentes a quase todas as teorias de perturbação, quer em temperatura zero, quer em temperatura finita, temos boas razões para nos preocuparmos especialmente com esta. Em primeiro lugar, a contribuição dada por (248), entra como uma correção para massa térmica, e além disso, participa na solução do polo do propagador, que é por suposição, uma quantidade física. Em segundo lugar, em temperatura zero, um famoso teorema como como é o caso do teorema de Kinoshita-Lee-Nauenberg [28] demonstra que as singularidades que aparecem em estágios intermediários cancelam-se nos resultados físicos finais. Entretanto, um argumento crucial da versão do teorema de Kinoshita-Lee-Nauenberg é a restrição do deslocamento da massa em todas as ordens que é a única quantidade considerada aqui. E, finalmente, este deslocamento de massa entrará em quantidades físicas fazendo o papel de um *cut-off* cinemático e aparecerá, por exemplo, na taxa de produção de partículas leves fracamente acopladas em um banho térmico. O que, então pode ser feito com relação a esta divergência de infravermelho? Como ela não pode ser cancelada, então pode-se usar um regulador de infravermelho. De fato, um regulador óbvio é a própria massa térmica obtida em primeira ordem  $\delta m_{\beta}$ . Neste caso, o

comportamento resultante é

$$\delta^2 m_\beta^{(2)} = \mathcal{O}\left(\lambda\sqrt{\lambda}T^2\right). \quad (249)$$

Isto é, o resultado é ainda aceitável perturbativamente uma vez que ele é menor que a correção anterior. Infelizmente, este argumento não sobrevive para correções de ordem mais alta. Assim sendo, mesmo atribuindo um número arbitrário de diagramas de um laço, como o da Eq. (245), às linhas do propagador, obtemos sempre a mesma correção  $\delta^2 m_\beta^{(2)} = \mathcal{O}\left(\lambda\sqrt{\lambda}T^2\right)$ . Um número infinito de diagramas contribuem para a mesma ordem na constante de acoplamento. Isto nos mostra claramente a quebra da teoria de perturbação em temperatura finita. Por outro lado, este subconjunto infinito da maioria dos diagramas infravermelho pode ser ressomado. Isto não é mais do que uma expansão em Taylor cujo termo de contribuição de um laço pode ser expresso como

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{m_\beta^{2N}}{N!} \left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^N \int_m^{\infty} k d\omega \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \Big|_{m=0} = \int_{m_\beta}^{\infty} k d\omega \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (250)$$

que é equivalente a substituir  $m^2$  por  $m^2 \rightarrow m^2 + \delta m^2$  no termo de um laço. A integral em (250) é perfeitamente bem definida para qualquer valor da constante de acoplamento. Visto desta perspectiva, as divergências de infravermelho surgem de uma expansão equivocada de  $\sqrt{\lambda}$  em torno de zero. Esta discussão simplificada pode claramente ser estendida para teorias mais complicadas, por exemplo para o modelo padrão, onde o problema de divergências de infravermelho é evidente em altas temperatura, quando as massa dos bosons de calibre  $m_W(\phi_c)$  e  $m_Z(\phi_c)$  anulam-se e esquemas de ressonância de contribuições em ordem de laço mais altas, ou métodos não-perturbativos devem ser usados para se estudar os detalhes das transições de fase. Vejamos agora como o método não perturbativo da TPO pode ser útil para a solução destes problemas apresentados.

### 3.4 Teoria de Perturbação Otimizada

Suponhamos que desejamos calcular alguma quantidade como, por exemplo, o valor esperado no vácuo para uma teoria de campo escalar descrita por uma densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , em algum sistema cuja dinâmica seja governada por uma dada ação  $S$ . A aplicação padrão da TPO para uma teoria descrita por esta densidade de Lagrangiana inicia-se com uma interpolação definida por

$$\mathcal{L}^\delta = (1 - \delta) \mathcal{L}_0(\eta) + \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\eta) + \delta (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0(\eta)), \quad (251)$$

onde  $\mathcal{L}_0(\eta)$  é a densidade de Lagrangiana de uma teoria solúvel que pode conter um parâmetro de massa arbitrário ( $\eta$ ). A densidade de Lagrangiana  $\mathcal{L}^\delta$  interpola entre a parte solúvel quadrática  $\mathcal{L}_0(\eta)$  (quando  $\delta = 0$ ) e a original  $\mathcal{L}$  (quando  $\delta = 1$ ). De modo similar, a ação ordinária é substituída por uma ação  $\delta$  modificada da forma

$$S_\delta := S_0 + \delta(S - S_0), \quad (252)$$

onde  $S_0 \equiv S_0(\eta)$  é alguma ação solúvel que dependa de algum parâmetro variacional artificial  $\eta$  (cuja generalização para um conjunto de parâmetros variacionais  $\{\eta_i\}$ , seja óbvia). A escolha para a forma de  $S_0$  não é prescrita *a priori* pela TPO mas, em geral, uma ação conveniente possa ser inferida do contexto, embora não signifique que seja a única possibilidade. É aconselhável que  $S_0$  reflita pelo menos alguma das simetrias pertencentes a ação original. Nota-se que a ação  $\delta$  modificada interpola entre  $S_0$  e  $S$  a medida que

$$S_{\delta=1} = S, \quad S_{\delta=0} = S_0. \quad (253)$$

Devemos ressaltar aqui o fato de que a presença do parâmetro  $\delta$  tem como única finalidade nos permitir a expansão consistente de todas as quantidades desejadas até uma certa ordem de  $\delta$ . No fim dos cálculos atribuímos a  $\delta$  o valor 1. O ponto realmente crucial neste método está na dependência de  $S_0$  sobre o parâmetro variacional  $\eta$ .

Para ilustrar como isto ocorre, vamos supor que desejamos calcular uma certa quantidade  $\mathcal{P}_N$  até uma dada ordem  $N$  em  $\delta$  (onde o subscrito se refere a ordem da expansão) e então tomamos  $\delta = 1$ . Truncar nesta ordem significa  $\mathcal{P}_N$  que retém alguma dependência sobre o parâmetro não-físico. Conseqüentemente, precisamos de algum critério bem definido para selecionar os valores mais convenientes do parâmetro variacional. Enfatizamos que este critério deve ser um procedimento bastante geral e que, desta forma, não dependa do modelo em consideração.

Um critério bastante comum e que tem sido usado com sucesso já há algum tempo é o chamado princípio de sensibilidade mínima (PSM) [29], originalmente discutido com referência a ambigüidades em esquemas de renormalização, onde  $\eta$  é escolhido como sendo estacionário no ponto onde a expansão é truncada, onde a dependência é mínima, isto é, onde impomos que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_N}{\partial \eta} \right|_{\eta=\bar{\eta}} = 0 \quad (254)$$

onde a motivação para a aplicação deste critério reside no fato que enquanto que alguma solução truncada depende de  $\eta$ , pelo menos localmente,  $\mathcal{P}_N$  é independente de  $\eta$ .

É crucial notar que este procedimento deve ser aplicado numa dada ordem  $N$  na expansão, de modo que  $\eta$  adquira alguma dependência dos parâmetros do modelo, em particular, das constantes de acoplamento. É por meio da fixação de  $\eta$ , pelo critério variacional apropriado, que correções não perturbativas são geradas. Por outro lado, se  $\eta$  fosse fixado independentemente da ordem de  $N$  na expansão, então a TPO teria um raio de convergência igual a zero, do mesmo modo que teoria de perturbação ordinária. É esta característica da dependência da ordem na TPO que nos permite conseguir uma sequência convergente de aproximantes em nítido contraste com as séries assintoticamente divergentes obtidas por meio da teoria de perturbação convencional.

### 3.5 Indo além de Teoria de Perturbação - Uso da TPO

Vimos na seção 3.2 que a falha na expansão em Taylor do integrando em convergir para o integrando exato de maneira dominada, o que torna inválido em teoria de perturbação a troca entre a soma e a integral. Uma solução para este problema seria multiplicar o integrando por alguma função característica que modificará o integrando perturbativo na região onde ele é fortemente desviado do integrando exato, sem contudo provocar nenhuma alteração significativa na região onde há uma correspondência bem próxima entre os dois. Claramente este procedimento é dependente da ordem, uma vez que nesta região espacial do campo para o qual há divergência entre  $f_N[\phi(x)]$  e  $f[\phi(x)]$  depende da ordem da expansão. Foi sugerido em [27] que um candidato apropriado para o papel de função característica é

$$W(M, u) = e^{-Mu} \sum_{n=0}^M \frac{(Mu)^n}{n!}, \quad (255)$$

onde  $M$  é um inteiro positivo. A função  $W(M, u)$  pode ser generalizada para  $W(M, u, i)$  onde

$$W(M, u, i) = e^{-Mu} \sum_{n=0}^{M-i} \frac{(Mu)^n}{M!}, \quad (256)$$

e  $i$  é um inteiro fixado. Encontramos esta generalização no contexto da discussão envolvendo a TPO. Por enquanto, focalizamos nossa atenção sobre a escolha da definição (255) e seu uso para construir séries convergentes.

A razão para a escolha de (255) como representação para função característica é que se  $u$  é substituído por uma forma quadrática positiva definida da forma  $\langle \phi | D | \phi \rangle / C_N$ , onde  $D$  é algum operador de derivada segunda de nossa escolha, então a modificação resultante do integrando perturbativo,

$$\begin{aligned} c_n [\phi_{\max}] &= c_n [\phi_{\max}] \times \lim_{M \rightarrow \infty} W(M, \langle \phi | D | \phi \rangle / C_N) \\ &= \frac{1}{Z_0} \frac{(-1)^n}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-S_0} (S_{int})^n W(M, \langle \phi | D | \phi \rangle / C_N), \end{aligned} \quad (257)$$

produz uma série de gaussianas multiplicada por monômios, permitindo-nos usar a técnica dos diagramas de Feynmann para integrá-las. A quantidade  $C_N$  é uma constante que depende de  $N$  (ordem da expansão) para excluir a região no espaço de fases onde o integrando perturbativo não exibe convergência dominada. Dessa forma, a integral funcional tem um corte na região para o qual  $\langle \phi | D | \phi \rangle > C_N$  e o comportamento fatorial dos coeficientes perturbativos é atenuado. Com esta modificação o tipo de integral funcional a ser calculado tem a forma

$$\begin{aligned} &[d\phi] \exp \left\{ - \int d^d x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + (\phi D \phi) / C_N \right] \right\} \\ &\times \left( \int d^d x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right)^n \left( \int d^d x \phi D \phi \right)^m. \end{aligned} \quad (258)$$

Devemos também notar que a construção de uma série convergente não conflita com o fato da função  $Z(\lambda)$  não ser analítica em  $\lambda = 0$ . Precisamos ter em mente que, em primeiro lugar, não se requer que a sequência de funções analíticas convirjam para uma função analítica e, em segundo lugar, a constante  $C_N$ , que fixamos ordem a ordem, pode ter alguma dependência implícita sobre  $\lambda$ , que é o caso da TPO.

Examinemos agora o mecanismo pelo qual a TPO produz séries convergentes. Tomemos como exemplo o oscilador quântico anarmônico (cuja propriedade de convergência foi examinada em [30]), caso em que a ação é substituída pela ação  $\delta$ -modificada

$$S_\delta = \int dt \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 + \frac{g}{2m} \alpha \right) \phi^2 + \frac{\delta \lambda}{4!} \left( \phi^4 - \frac{\alpha}{m} \phi^2 \right) \right] \quad (259)$$

onde  $\alpha$  para nós constitui apenas um parâmetro não-físico que será fixado por meio do critério PSM.

Suponhamos que desejamos calcular a função de partição para esta teoria até a ordem  $N$ . Expandimos a parte interagente da ação em potências de  $\delta$  (e ao final tomamos  $\delta = 1$ ), obtemos:

$$Z_N(m, \lambda, \alpha) = \frac{1}{Z_0} \int [d\phi] \left\{ - \int dt \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 + \frac{\lambda}{12m} \alpha \right) \phi^2 \right] \right\} \\ \times \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\delta}{4!} \left( \lambda \int dt \phi^4 - \frac{\lambda\alpha}{24m} \int dt \phi^2 \right)^n \quad (260)$$

Expandimos o binômio por fazer uso da seguinte identidade

$$\sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} (a-b)^n = \sum_{n=0}^N \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(n-i)!} a^i b^{(n-i)} \\ = \sum_{i=0}^N \sum_{n=i}^N \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(n-i)!} a^i b^{(n-i)} \\ = \sum_{i=0}^N (-1)^i \frac{a^i}{i!} \sum_{k=0}^{N-i} \frac{b^k}{k!}. \quad (261)$$

Com esta definição podemos reescrever a Eq. (260) como

$$Z_N(m, \lambda, \alpha) = \frac{1}{Z_0} [d\phi] \exp \left\{ - \int dt \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 + \frac{\lambda}{22m} \alpha \right) \phi^2 \right] \right\} \\ \times \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^i}{i!} \left( \frac{\lambda}{4!} \int dt \phi^4 \right)^i \left[ \sum_{k=0}^{N-i} \frac{1}{k!} \left( \frac{\lambda\alpha}{24m} \int dt \phi^2 \right)^k \right]. \quad (262)$$

Uma inspeção minuciosa da Eq. (262) nos mostra que na TPO cada integrando perturbativo é modificado de acordo com (mudando o índice  $i \rightarrow n$ )

$$c_n^{TPO} [\phi(x)] = \frac{1}{Z_0} \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{M \rightarrow \infty} e^{-S_0} (S_{int})^n W(M, \langle \phi | D | \phi \rangle / C_N), \quad (263)$$

com  $u$  substituído pela forma quadrática  $(\lambda/24m \int dt \phi^2) / C_N$  onde  $C_N = N/\alpha$ , o que está em nítido contraste com a nossa tentativa de modificar a teoria de perturbação onde escolhemos modificar cada um dos coeficientes  $c_n [\phi(x)]$  pela mesma função  $W(M, u)$ , e então tomar o limite  $M \rightarrow \infty$ . Se nós escolhemos para a quantidade não-física  $\alpha$  a escala em que  $\alpha \simeq N^{2/3}$  (foi rigorosamente provado em [30] que esta escala gera uma sequência convergente na TPO), então nós estamos modificando cada um dos coeficientes  $c_n [\phi(x)]$  pela função que se aproxima da função  $\theta$  (como a ordem de  $N$  da expansão tende ao

infinito) na região espacial do campo para o qual

$$\frac{\lambda}{24m} \int dt \phi^2 \leq N^{1/2}. \quad (264)$$

Podemos ver que a TPO (por conferir um mecanismo ativo [30], como oposto ao método sugerido inicialmente que é chamado de passivo pois cada integrando perturbativo é multiplicado pela mesma função característica) é uma melhoria sobre o método passivo uma vez que gera uma sequência que converge mais rapidamente para a resposta correta. Para vermos isto, notemos que para grandes valores de  $N$  os primeiros poucos termos da TPO (que é o caso para  $i \ll N$ ) são multiplicados essencialmente pela mesma função e temos, em essência, um método passivo para ordens baixas. Por outro lado, para ordens mais altas ( $i \lesssim N$ ) a função  $W(M, u, i)$  aproxima para uma função  $\theta$  mais rapidamente. Isto pode ser comprovado se olharmos brevemente uma das características da função  $W(M, u, i)$ . Quando temos que  $u > 1$  então

$$W(M, u, i) < u^{-i} e^{N[\ln u - (u-1)]}. \quad (265)$$

Notamos em (265) a presença do termo  $u^{-i}$  multiplicando a quantidade exponencial. Tal termo claramente será mais significativo para valores de  $i$  mais próximos de  $N$ , conduzindo a uma forte convergência. Portanto, podemos perceber o modo como a TPO provê uma sequência convergente para a teoria  $\lambda\phi^4$ . Vemos que ela gera um regulador (*cut off*) nas á reas espaciais do campo para os quais a expansão perturbativa ordinária não exhibe convergência dominada e ainda nos fornece um mecanismo de convergência mais eficiente que o método passivo delineado na seção 3.2.

## 4 APLICAÇÃO DA TPO PARA O MODELO DE DOIS CAMPOS ESCALARES COMPLEXOS INTERAGENTES

Neste capítulo, estenderemos o método da TPO para tratar o problema da estrutura de fases no modelo de dois campos escalares complexos interagentes, introduzido no Capítulo 3. Faremos uso da expansão até a segunda ordem na TPO e calcularemos de maneira sistemática todos os diagramas que contribuem para a auto-energia incluindo os resultados para a temperatura crítica bem como seu comportamento. O estudo da massa térmica até a segunda ordem usando a TPO nos auxiliará no estudo das fases no modelo, acessando ao mesmo tempo o regime não-perturbativo do modelo. A justificativa para calcularmos a massa térmica e não o potencial efetivo, como fizemos no Capítulo 3, é que, para  $\mathcal{O}(\delta^2)$ , o cálculo do potencial efetivo implicaria no cálculo de funções de vácuo até ordem de três laços, o que se tornaria extremamente complicado os cálculos em temperatura e potenciais químicos finitos. Em todos os momentos estaremos trabalhando com o limite de altas temperatura, isto é, no regime onde a temperatura é muito maior que os parâmetros de massa apropriados da teoria. Com estas correções geradas pela massas térmicas para os campos, estaremos aptos para investigar o aparecimento de ISB/SNR para um modelo multiescalar em temperatura e potenciais químicos finitos.

### 4.1 Correções para Massa Térmica na TPO

Vamos agora mostrar como podemos obter as correções para massa térmica até a segunda ordem na TPO para o modelo multiescalar considerado no capítulo 3. Lembramos que a densidade de Lagrangiana para este modelo é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \psi, \psi^*) &= (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^* + m_\phi^2 \phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{4} (\phi \phi^*)^2 \\ &+ (\partial_\mu \psi) (\partial^\mu \psi)^* + m_\psi^2 \psi^2 + \frac{\lambda_\psi}{4} (\psi \psi^*)^2 + \lambda (\phi \phi^*) (\psi \psi^*). \end{aligned} \quad (266)$$

Para o modelo interpolado, a ação  $\delta$ -modificada, de acordo com a prescrição dada pela Eq. (252), é dada então por

$$S^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi) = S_F^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi) + S_I^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi) + S_{ct}^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi), \quad (267)$$

com

$$\begin{aligned}
S_F^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi) &= \int_T d^4x \phi^* \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu_\phi \right)^2 + \nabla^2 + \Omega_\phi^2 \right] \phi \\
&+ \int_T d^4x \psi^* \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu_\psi \right)^2 + \nabla^2 + \Omega_\psi^2 \right] \psi,
\end{aligned} \tag{268}$$

$$\begin{aligned}
S_I^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi) &= \int_T d^4x \left[ \frac{\delta \lambda_\phi}{4} (\phi^* \phi)^2 - \delta \eta_\phi^2 \phi^* \phi \right] \\
&+ \int_T d^4x \left[ \frac{\delta \lambda_\psi}{4} (\psi^* \psi)^2 - \delta \eta_\psi^2 \psi^* \psi \right] \\
&+ \int_T d^4x [\delta \lambda (\phi^* \phi) (\psi^* \psi)],
\end{aligned} \tag{269}$$

e ação de contratermos de renormalização definida por

$$\begin{aligned}
S_{ct}^\delta(\beta, \mu_\phi, \mu_\psi) &= \int_T d^4x \left\{ A_\phi^\delta \phi^* \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu_\phi \right)^2 + \nabla^2 \right] \phi + B_\phi^\delta \Omega_\phi^2 \phi^* \phi \right\} \\
&+ \int_T d^4x \left\{ A_\psi^\delta \psi^* \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu_\psi \right)^2 + \nabla^2 \right] \psi + B_\psi^\delta \Omega_\psi^2 \psi^* \psi \right\} \\
&+ \int_T d^4x \left[ C_\phi^\delta \frac{\delta \lambda_\phi}{4} (\phi^* \phi)^2 - \delta B_\phi^\delta \eta_\phi^2 \phi^* \phi \right] \\
&+ \int_T d^4x \left[ C_\psi^\delta \frac{\delta \lambda_\psi}{4} (\psi^* \psi)^2 - \delta B_\psi^\delta \eta_\psi^2 \psi^* \psi \right] \\
&+ \int_T d^4x [C \delta \lambda (\phi^* \phi) (\psi^* \psi)].
\end{aligned} \tag{270}$$

Nas equações acima introduzimos o parâmetro  $\Omega_i$ , com  $i = \phi, \psi$ , dado em termos dos parâmetros variacionais  $\eta_i$  por  $\Omega_i^2 = m_i^2 + \eta_i^2$ . A notação  $\int_T d^4x$  indica que as integrais são feitas no espaço de Minkowski, a temperatura finita.

Em seguida vamos efetuar os nossos cálculos para a massa térmica até a  $\mathcal{O}(\delta^2)$ . Posteriormente, usaremos a regularização dimensional para renormalizar a teoria. Como já discutido no Capítulo 4, os parâmetros  $\eta_i$  tornam-se funções dos parâmetros originais do modelo, incluindo as constantes de acoplamento após a condição variacional apropriada, que nos nossos cálculos, é aplicada diretamente sobre as massas térmicas, procedimento esse também adotado em [8, 25]. Como já discutido no Capítulo anterior, é dessa forma,

pela aplicação de um princípio variacional sobre as quantidades físicas sendo calculadas, que o comportamento não perturbativo surge na TPO. Como também discutido nas Refs. [8, 25], uma vez que a aplicação do princípio variacional gera também parâmetros da TPO dependentes da temperatura, o processo de renormalização deve ser realizado *antes da aplicação* do mesmo, tal que a renormalização acaba se tornando idêntica a realizada na teoria normal em  $T = 0$ . O procedimento de renormalização que utilizamos segue de perto ao usado em [25] e é baseado em [31]. Os detalhes do processo de renormalização podem ser vistos no Apêndice 2.

Como início de nossos cálculos, definimos as regras de Feynmann no espaço das frequências na presença de carga, que segue diretamente das expressões em (268) e (269):

1. A cada linha de propagador é atribuído um fator

$$\Delta_j(i\omega_n, \mathbf{k}) = [-(i\omega_n + \mu_j)^2 + \omega_{j,k}^2]^{-1}, \quad (271)$$

onde  $i = \phi, \psi$ ,  $\omega_n = 2\pi n/\beta$  e  $\omega_{j,k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \Omega_j^2}$  e a seta segue na direção do fluxo do momento;

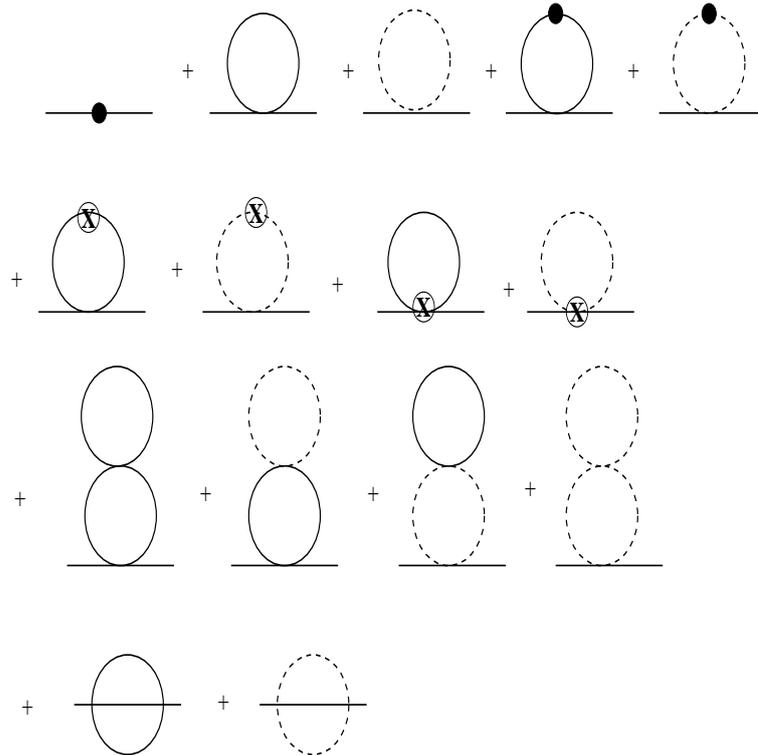
2. Atribuímos um fator  $-\delta\lambda_j$  a cada vertex de auto interação, e um fator  $-\delta\lambda$  para os vértices de acoplamento mútuo entre  $\phi$  e  $\psi$ ;
3. Atribuímos um fator  $-\delta\eta_i^2$  a cada inserção (interação) gerada pela TPO;
4. Integramos sobre toda linha externa com peso  $T \sum_n \int d^3\mathbf{k}/(2\pi)^3$ ;
5. Deve haver conservação de carga em cada vertex, isto é o número de setas entrando em um vértex deve ser igual ao número das que saem;
6. Atribui-se o fator de simetria apropriado a cada diagrama.

Agora nós estamos aptos para estimar as correções para as massas térmica para os campos  $\phi$  e  $\psi$ , via suas correções de auto energia, geradas dentro do método da TPO,

$$M_i^2(T, \mu_i, \mu_j) = \Omega_i^2 - \mu_i^2 + \Pi_i^{(\delta^n)}(i\omega_n, \mathbf{p}), \quad (272)$$

com as correções de auto energia para os campos,  $\Pi_i^{(\delta^n)}(i\omega_n, \mathbf{p})$ , calculados até ordem  $\mathcal{O}(\delta^n)$  em TPO e definidos na casca de massa (*on-shell*), ou seja para  $i\omega_n = \Omega_i - \mu_i$ ;  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . A escolha do quadrimomento será discutida mais a frente, quando calcularemos os diagramas de dois laços que carregam momento externo.

Figura 5 - Diagramas referentes as contribuições para as auto energias dos campos até segunda ordem na TPO. Linhas cheias nos laços (loops) se referem ao propagador de um campo  $i$ , enquanto que linhas pontilhadas ao propagador de um outro campo  $j$  ( $i, j = \phi, \psi$ ). Os pontos cheios são inserções de  $\delta\eta_i^2$  e os pontos cruzados referem-se a correções de renormalização de massa (se estão sobre um propagador) ou de renormalização de constante de acoplamento (se estão num vértice).



Fonte: O autor, 2011.

Todos os diagramas de Feynman que contribuem para  $\Pi_i^{(\delta^2)}(i\omega_n, \mathbf{p})$  até segunda ordem na TPO estão representados na Figura 5. Nos cálculos seguintes vamos estar nos referenciando sempre aos diagramas ali representados.

#### 4.1.1 Massa Térmica em Primeira Ordem

Vamos iniciar nossos cálculos com a determinação das massas térmicas em ordem mais baixa na TPO, ordem  $\delta$ . Nessa ordem, as contribuições relevantes são, que correspondem aos três primeiros diagramas mostrados na Figura 5. Seguindo a ordem dos termos mostrados na Figura 5, temos que

$$\Pi_{i,1}^{(\delta^1)} = \delta\eta_i^2, \quad (273)$$

$$\Pi_{i,2}^{(\delta^1)} = \delta\lambda_i T \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Delta_i(i\omega_n, \mathbf{k}), \quad (274)$$

e

$$\Pi_{i,3}^{(\delta^1)} = \delta\lambda \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \Delta_j(i\omega_n, \mathbf{k}). \quad (275)$$

A soma nas frequência de Matsubara nas Eqs. (274) e (275) pode ser tratada de uma forma eficiente e concisa por fazermos uso da representação mista do propagador de Matsubara em temperatura e potencial químico finitos, dada pela Eq. (86), obtida no Capítulo 2, que ao tomar avariável  $\tau = 0$ , nos dá os resultados para (274) e (275),

$$\Pi_{i,2}^{(\delta^1)} = \delta\lambda_i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{k_i}} [1 + n_{i,k}^+ + n_{i,k}^-], \quad (276)$$

e analogamente para a Eq. (275). A integração sobre os momentos na Eq. (276) pode ser realizada separadamente sobre o termo que independe da temperatura,

$$X_0 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{i,k}}, \quad (277)$$

e o termo dependente da temperatura:

$$X_T = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{k_i}} [n_{i,k}^+ + n_{i,k}^-]. \quad (278)$$

A integração no momento no termo independente da temperatura,  $X_0$ , pode ser realizada usando a técnica de regularização dimensional [13–15], para obter

$$X_0 = \frac{\Omega_i^2}{16\pi^2} \left[ -\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2}\right) + \gamma - 1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right], \quad (279)$$

onde  $M$  é a escala de massa introduzida pela regularização dimensional e  $\varepsilon$  é o parâmetro

em que a divergência ultravioleta é expressa (para  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

O termo de temperatura finita é obtido ao se definir em (278)  $x = \beta k$ ,  $y_i = \beta \Omega_i$  e  $r_i = \mu_i/\Omega_i$ , tal que a integral em momento pode ser expressa na forma

$$X_T = \frac{T^2}{\pi^2} h^e(y_i, r_i), \quad (280)$$

onde

$$h^e(y_i, r_i) = h(y_i, r_i) + h(y_i, -r_i), \quad (281)$$

e

$$h(y_i, r_i) = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y_i^2}} \left[ \frac{1}{\exp(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r_i y_i) - 1} \right]. \quad (282)$$

Em seguida podemos usar a expressão para a expansão em alta temperatura (para  $y_i \ll 1$ ) para a Eq. (281), mantendo  $r_i$  fixo, dada por [32]:

$$h^e(y_i, r_i) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi y_i}{4} \sqrt{1 - r_i^2} - \frac{y_i^2}{8} \left[ \ln\left(\frac{y_i}{4\pi}\right) + \gamma - \frac{1}{2} + r_i^2 \right] + \dots$$

Juntando os resultados acima para os termos de  $T = 0$  e  $T \neq 0$ , os diagramas em primeira ordem na TPO nos forneceram o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \Pi_i^{(\delta^1)} &= \delta\eta_i^2 \\ &+ \frac{\delta\lambda_i \Omega_i^2}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2}\right) + \gamma - 1 \right] + \frac{\delta\lambda_i T^2}{\pi^2} h^e(y_i, r_i) \\ &+ \frac{\delta\lambda_j \Omega_j^2}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\Omega_j^2}{4\pi M^2}\right) + \gamma - 1 \right] + \frac{\delta\lambda T^2}{\pi^2} h^e(y_j, r_j), \end{aligned} \quad (283)$$

o que nos leva ao resultado para a massa térmica em primeira ordem na TPO,

$$\begin{aligned}
M_{i,\delta^1}^2(T, \mu_i, \mu_j, \eta_i, \eta_j) &= \Omega_i^2 - \mu_i^2 - \delta\eta_i^2 \\
&+ \delta\lambda_i \left[ \frac{1}{16\pi^2\varepsilon} + X_i(T) \right] \\
&+ \delta\lambda \left[ \frac{1}{16\pi^2\varepsilon} + X_j(T) \right], \tag{284}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$X_i(T) = \frac{T^2}{12} - \frac{T\Omega_i}{4\pi} \sqrt{1 - r_i^2} + \frac{\Omega_i^2}{16\pi^2} [L(T) - 2r_i^2], \tag{285}$$

e por conveniência para representar os resultados em segunda ordem na TPO que realizaremos em seguida, definimos também as funções:

$$L(T) = \left[ \ln \left( \frac{4\pi T^2}{M^2} \right) - \gamma \right], \tag{286}$$

$$Y_i(T) = \frac{T}{8\pi\Omega_i} \frac{1}{\sqrt{1 - r_i^2}} - \frac{1}{16\pi^2} L(T), \tag{287}$$

$$Z_i(0) = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2} \right) + \gamma \right]^2 + \frac{\pi^2}{12}, \tag{288}$$

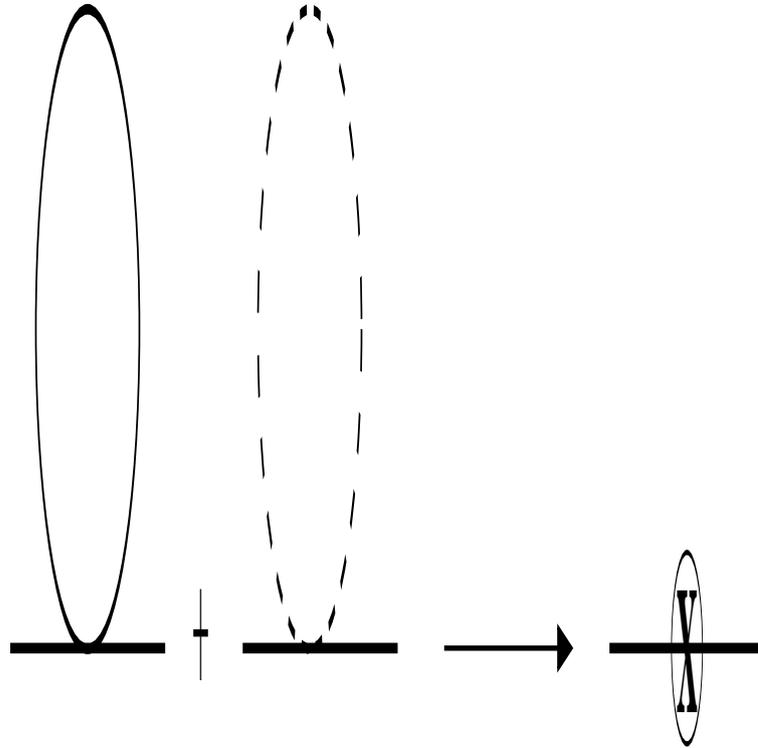
$$W_i(0) = \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2} \right) + \gamma - 1 \right]^2 + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}. \tag{289}$$

Finalmente notamos que as divergências em  $1/\varepsilon$  aparecendo em (284) podem ser canceladas se definimos um contratermo de renormalização de massa, dado por

$$\Pi_{div}^{(\delta^1)} = -\frac{\delta}{16\pi^2\varepsilon} (\lambda_i \Omega_i^2 + \lambda \Omega_j^2). \tag{290}$$

Esse contratermo de renormalização de massa pode ainda ser interpretado como um vértice de interação sendo adicionado na ação original e vai contribuir em ordens superiores na expansão na TPO, em particular em nosso cálculo em segunda ordem a ser realizado abaixo. A representação diagramática desse contratermo de massa está mostrada na

Figura 6 - Diagramas contribuindo para o contratermo de renormalização de massa em primeira ordem na TPO.



Fonte: O autor, 2011.

Figura 6.

#### 4.1.2 Massa Térmica em Segunda Ordem na TPO

Para a ordem  $\mathcal{O}(\delta^2)$ , temos contribuições para a auto energia dos campos vindo tanto de diagramas independentes do momento e também dos diagramas não triviais do tipo “**sol nascente**” (*settingsun*), dependentes do momento externo, representados pelos dois últimos diagramas mostrados na Figura 5.

Vamos primeiramente considerar os diagramas independentes do momento, que em  $\mathcal{O}(\delta^2)$  podem ter um ou dois laços. Nesta ordem, a contribuição a um laço independente do momento são representados pelos diagramas 4 a 9 mostrados na Figura 5. Usando as definições (285)-(289, apresentamos abaixo os resultados para esses diagramas. O primeiros dois desses diagramas são dados explicitamente por

$$\Pi_{i,4} = \delta^2 \lambda_i \eta_i^2 \left( \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon} + Y_i(T) \right), \quad (291)$$

e analogamente,

$$\Pi_{i,5} = \delta^2 \lambda \eta_j^2 \left( \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon} + Y_j(T) \right). \quad (292)$$

Em seguida temos as contribuições vindo dos contratermos de massa tanto para o campo  $\phi$  como para  $\psi$  (na nossa notação, podendo ser termos do tipo "i" ou "j", para representar  $\phi$  ou  $\psi$ ). Essas contribuições são dadas explicitamente por

$$\begin{aligned} \Pi_{i,6}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2 \lambda_i}{16\pi^2} [\lambda_i \Omega_i^2 + \lambda \Omega_j^2] \\ &\times \left[ \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon^2} + Y_i(T) \frac{1}{\varepsilon} + \frac{Z_i(0)}{16\pi^2} \right], \end{aligned} \quad (293)$$

e

$$\begin{aligned} \Pi_{i,7}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2 \lambda}{16\pi^2} [\lambda_j \Omega_j^2 + \lambda \Omega_i^2] \\ &\times \left[ \frac{1}{16\pi^2 \varepsilon^2} + Y_j(T) \frac{1}{\varepsilon} + \frac{Z_j(0)}{16\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (294)$$

Notamos também que para a renormalização necessitamos além dos contratermos de massa, contratermos de renormalização de vértice, conforme descrito em detalhes nas referências [8]. A representação desses contratermos de renormalização de vértice e os diagramas que geram eles, são mostrados na Figura 7.

A contribuição de renormalização de vértice dado pelos termos mostrados na Figura 7 gera os seguintes contratermos de vértice:

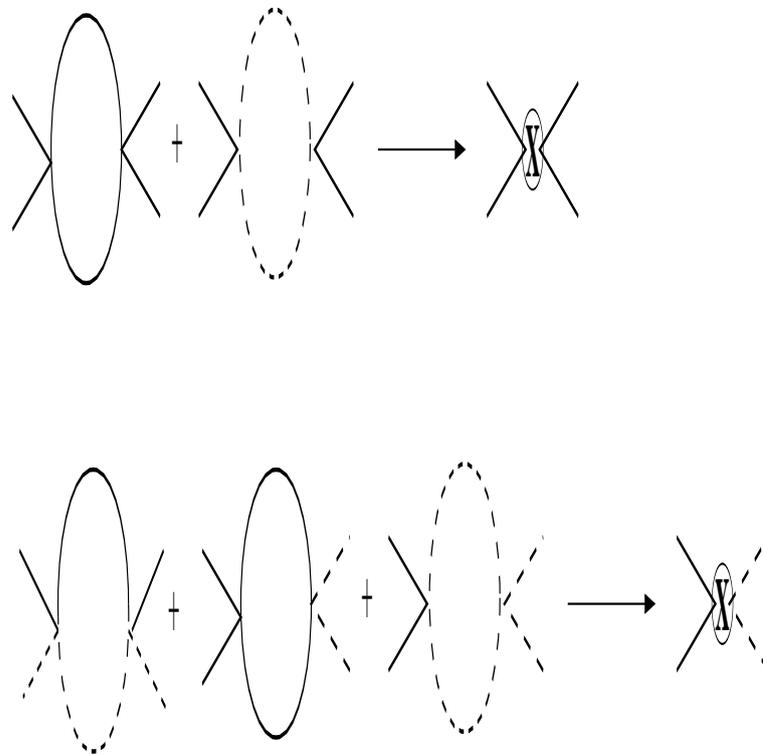
$$C_i = \frac{\delta^2}{32\pi^2 \varepsilon} (5\lambda_i^2 + 4\lambda^2), \quad (295)$$

para os dois primeiros diagramas mostrados na Figura 7, e

$$C = \frac{\delta^2 \lambda^2}{8\pi^2 \varepsilon} + \frac{\delta^2 \lambda}{16\pi^2 \varepsilon} (\lambda_i + \lambda_j), \quad (296)$$

para os três últimos diagramas mostrados na Figura 7. Desses contratermos de vértice podemos gerar o oitavo e nono diagramas mostrados na Figura 5. Esses diagramas são dados por

Figura 7 - Diagramas contribuindo para o contratermo de renormalização de vértice.  
 Note que essas contribuições são de segunda ordem na TPO.



Fonte: O autor, 2011.

$$\begin{aligned}\Pi_{i,8}^{(\delta^2)} &= -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{16\pi^2} (5\lambda_i^2 + 4\lambda^2) \\ &\times \left\{ \frac{\Omega_i^2}{16\pi^2 \varepsilon^2} - X_i(T) \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\Omega_i^2}{(16\pi^2)} W_i(0) \right\},\end{aligned}\quad (297)$$

e

$$\begin{aligned}\Pi_{i,9}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2}{16\pi^2} [2\lambda^2 + \lambda(\lambda_i + \lambda_j)] \\ &\times \left\{ \frac{\Omega_j^2}{16\pi^2 \varepsilon^2} - X_j(T) \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\Omega_j^2}{16\pi^2} W_j(0) \right\}.\end{aligned}\quad (298)$$

Chegamos agora nas contribuiao de dois laços, independente do momento externo, que  dada pelos décimo, décimo primeiro, décimo segundo e décimo terceiro diagramas (*double-scoops*) mostrados na Figura 5. Esses diagramas são dados por

$$\begin{aligned}\Pi_{i,10}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2 \lambda_i^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\Omega_i^2}{16\pi^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} [X_i(T) - \Omega_i^2 Y_i(T)] \right\} \\ &- \delta^2 \lambda_i^2 \left\{ X_i(T) Y_i(T) - \frac{\Omega_i^2}{(16\pi^2)^2} [Z_i(0) + W_i(0)] \right\},\end{aligned}\quad (299)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{i,11}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2 \lambda_i \lambda}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\Omega_j^2}{16\pi^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} [X_j(T) - \Omega_j^2 Y_i(T)] \right\} \\ &- \delta^2 \lambda_i \lambda \left\{ X_j(T) Y_i(T) - \frac{\Omega_j^2}{(16\pi^2)^2} [Z_i(0) + W_j(0)] \right\},\end{aligned}\quad (300)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{i,12}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2 \lambda^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\Omega_i^2}{16\pi^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} [X_i(T) - \Omega_i^2 Y_j(T)] \right\} \\ &- \delta^2 \lambda^2 \left\{ X_i(T) Y_j(T) - \frac{\Omega_i^2}{(16\pi^2)^2} [Z_j(0) + W_i(0)] \right\},\end{aligned}\quad (301)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{i,13}^{(\delta^2)} &= -\frac{\delta^2 \lambda_j \lambda}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\Omega_j^2}{16\pi^2 \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} [X_j(T) - \Omega_j^2 Y_j(T)] \right\} \\ &- \delta^2 \lambda_j \lambda \left\{ X_j(T) Y_j(T) - \frac{\Omega_j^2}{(16\pi^2)^2} [Z_j(0) + W_j(0)] \right\}.\end{aligned}\quad (302)$$

Finalmente chegamos nos diagramas mais complicados, de dois laços e dependentes

de momento externa, dados pelos dois últimos diagramas mostrados na Figura 5. O primeiro desses diagramas foi calculado em detalhes na Ref. [26] e aqui damos então somente o resultado final encontrado pelos autores dessa referência:

$$\begin{aligned}
\Pi_{i,14}^{(\delta^2)} &= \frac{\delta^2 \lambda_i^2 \Omega_i^2}{(16\pi^2)^2 \varepsilon^2} + \frac{\delta^2 \lambda_i^2 \Omega_i^2}{(16\pi^2)^2 \varepsilon} - \frac{\delta^2 \lambda_i^2 p^2}{(16\pi^2)^2 2\varepsilon} \\
&\quad - \frac{3\delta^2 \lambda_i^2}{16\pi^2 \varepsilon} \left\{ \frac{T^2}{12} - \frac{T\Omega_i}{4\pi} \sqrt{1-r_i^2} + \frac{\Omega_i^2}{32\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{4\pi T^2}{M^2} \right) - \gamma - 2r_i^2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{3\delta^2 \lambda_i^2 \Omega_i^2}{2(16\pi^2)^2} \left[ \ln^2 \left( \frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2} \right) + \left( 2\gamma - \frac{17}{6} \right) \ln \left( \frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2} \right) + 1.9785 \right] \\
&\quad - \frac{3\delta^2 \lambda_i^2}{16\pi^2} \left[ -\ln \left( \frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2} \right) + 2 - \gamma \right] \\
&\quad \times \left\{ \frac{T^2}{12} - \frac{T\Omega_i}{4\pi} \sqrt{1-r_i^2} - \frac{\Omega_i^2}{16\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{4\pi T^2}{M^2} \right) - \frac{1}{2} + \gamma + r_i^2 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\delta^2 \lambda_i^2 T^2}{128\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{\Omega_i^2}{T^2} \right) + 5.0669 + \frac{3}{2} \ln(1-r_i^2) - \frac{2r_i^2}{\pi^2} (2\ln 2 - 1) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\pi^2} \ln^2 \left( \frac{1+r_i}{1-r_i} \right) \ln 2 \Big]. \tag{303}
\end{aligned}$$

O último diagrama mostrado na Figura 5 é similar ao diagrama de cima, com a exceção de possuir um dos propagadores internos com termo de massa (e potencial químico) diferente dos demais dois propagadores internos. O resultado desse diagrama, não encontrado na literatura, foi completamente calculado nesta tese e o resultado que encontramos é

$$\begin{aligned}
\Pi_{i,15}^{(\delta^2)} &= \frac{\delta^2 \lambda^2 \Omega_j^2}{(4\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 1 + \frac{n^2}{2} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{n^2}{2} \right) \left[ 3 - 2\gamma - 2 \ln \left( \frac{\Omega_j^2}{4\pi M^2} \right) \right] - \frac{p^2}{\Omega_j^2 \varepsilon} + \frac{n^2}{\varepsilon} \ln(n^2) \right\} \\
&- \frac{\delta^2 \lambda^2 T^2}{(4\pi)^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} [h(y_i, r_i) + 2h(y_j, r_j)] \right. \\
&+ h(y_i, \pm r_i) \left[ \ln \left( \frac{\Omega_j^2}{4\pi M^2} \right) + 2 + \gamma_E \right] + 2h(y_j, \pm r_j) \left[ \ln \left( \frac{\Omega_i^2}{4\pi M^2} \right) + 2 + \gamma_E \right] \left. \right] \\
&+ \frac{\delta^2 \lambda^2 \Omega_j^2}{2(4\pi)^4} \left( 1 + \frac{n^2}{2} \right) \left[ 7 + \frac{\pi^2}{6} + 6\gamma + 2\gamma^2 - 2(3 - 2\gamma) \right. \\
&\times \left. \ln \left( \frac{\Omega_j^2}{4\pi M^2} \right) + 2 \ln^2 \left( \frac{\Omega_j^2}{4\pi M^2} \right) \right] \\
&- \frac{\delta^2 \lambda^2 \Omega_j^2}{2(4\pi)^4} \left[ 1 + \frac{11}{8} n^2 - \left( 1 + \frac{n^2}{2} \right) \ln(n^2) - \frac{1}{2} n^2 \ln^2(n^2) \right. \\
&+ \left. \frac{(1 - n^2)^2}{n^2} \left( Li_2(1 - n^2) - \frac{\pi^2}{6} \right) \right] \\
&- \frac{\delta^2 \lambda^2 \Omega_i^2}{2(4\pi)^4} \left[ 3 - 2\gamma - 2 \ln \left( \frac{\Omega_j^2}{4\pi M^2} \right) \left( \frac{1}{4} + \ln(n^2) \right) \right. \\
&\frac{T^2}{64\pi^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{\Omega_i \Omega_j}{T} \right) - \ln \frac{\Omega_i^2 \Omega_j^2}{T^2} + \frac{1}{2} \ln(1 - r_i^2) + \ln(1 - r_j^2) \right. \\
&- \left. \frac{1}{2\pi^2} \left[ \ln \left( \frac{1 + r_i}{1 - r_i} \right) \ln \left( \frac{1 + r_j}{1 - r_j} \right) \right] \ln 2 \right. \\
&- \left. \frac{1}{\pi^2} r_i r_j (2 \ln 2 - 1) + 5.0669 \right], \tag{304}
\end{aligned}$$

onde  $n = \Omega_i/\Omega_j$ .

Com os resultados acima, temos que a massa efetiva, em segunda ordem na TPO, para os campos pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
M_i^2(T, \mu_i, \mu_j, \eta_i, \eta_j) &= \Omega_i^2 - \mu_i^2 \Pi_{i,1}^{(\delta^1)} + \Pi_{i,2}^{(\delta^1)} + \Pi_{i,3}^{(\delta^1)} + \Pi_{i,4}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,5}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,6}^{(\delta^2)} \\
&+ \Pi_{i,7}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,8}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,9}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,10}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,11}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,12}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,13}^{(\delta^2)} \\
&+ \Pi_{i,14}^{(\delta^2)} + \Pi_{i,15}^{(\delta^2)}. \tag{305}
\end{aligned}$$

## 4.2 Resultados

Passamos agora para o estudo das diferentes fases do modelo e o processo de otimização que fixa os valores dos parâmetros da OPT,  $\eta_\phi$  e  $\eta_\psi$ , na expressão para a massa efetiva dada pela Eq. (305).

Uma vez que obtivemos as massas efetiva  $M_\phi(T, \mu_\phi, \mu_\psi, \eta_\phi, \eta_\psi)$  e  $M_\psi(T, \mu_\phi, \mu_\psi, \eta_\phi, \eta_\psi)$ , estamos agora em posição de aplicar o procedimento de otimização e então obter os valores otimizados de  $\eta_\phi$  e  $\eta_\psi$ . Antes de fazermos isso, alguns detalhes técnicos concernentes ao procedimento de otimização devem ser esclarecidos. Primeiro, lembremos que nosso procedimento de interpolação foi efetuado de uma forma bem geral por atribuirmos diferentes parâmetros de interpolação para cada campo. Embora geral, este procedimento produz dois parâmetros arbitrários que precisam ser fixados por meio do procedimento de otimização, o que obviamente complica o procedimento de obtenção desses termos, pois temos de procurar extremos no espaço  $\eta_\phi, \eta_\psi$ . Algumas vezes estes extremos apresentam-se como pontos de sela, que são difíceis de se detectar numericamente. Neste caso nós testamos dois dos mais usados procedimentos de otimização, o PSM e FAC. No PSM procuramos por extremos das massa efetiva,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_\phi^2}{\partial \eta_\phi} \right|_{\bar{\eta}_\phi^\phi, \bar{\eta}_\psi^\phi} &= 0, \\ \left. \frac{\partial M_\phi^2}{\partial \eta_\psi} \right|_{\bar{\eta}_\phi^\phi, \bar{\eta}_\psi^\phi} &= 0, \end{aligned} \quad (306)$$

para obter os valores otimizados  $\bar{\eta}_\phi^\phi, \bar{\eta}_\psi^\phi$  para  $M_\phi$ , e analogamente para  $M_\psi$ , para obter os valores otimizados  $\bar{\eta}_\phi^\psi, \bar{\eta}_\psi^\psi$ . No procedimento FAC procuramos por valores de  $\bar{\eta}_\phi, \bar{\eta}_\psi$  tais que os termos na ordem  $\delta^2$  para as massas dos campos,  $\Delta_{\delta^2} M_i$ , satisfazem

$$\Delta_{\delta^2} M_\phi^2 \Big|_{\bar{\eta}_\phi^\phi, \bar{\eta}_\psi^\phi} = 0, \quad (307)$$

$$\Delta_{\delta^2} M_\psi^2 \Big|_{\bar{\eta}_\phi^\psi, \bar{\eta}_\psi^\psi} = 0, \quad (308)$$

com os valores otimizados obtidos por se escolher valores mínimos para  $\bar{\eta}_i$ , que são soluções para as Eqs. (307) e (308), consistentes com a aproximação de alta temperatura, ou seja,  $\bar{\eta}_i < T$ , dados os valores de temperatura e potenciais químicos.

O segundo ponto a ser discutido diz respeito a quantidade que nós escolhemos otimizar, de acordo com os procedimentos dados pelos critério PSM ou FAC, isto é Eqs. (306) e (307), respectivamente, para o campo  $\phi$  e equivalentemente para o campo  $\psi$ , de modo a obter os valores de  $\bar{\eta}_i$ . Por olhar atentamente nossas equações, podemos facilmente ver que, exceto para o caso onde  $\mu_\phi = \mu_\psi$ ,  $m_\phi^2 = m_\psi^2$  e  $\lambda_\phi = \lambda_\psi$ , os procedimentos variacionais PSM/FAC aplicados separadamente para  $M_\phi^2$  e  $M_\psi^2$ , na mesma temperatura, pode gerar diferentes valores para o mesmo  $\bar{\eta}_i$ . Uma forma de evitar isto seria calcular e otimizar uma quantidade mais compreensiva, como o potencial efetivo. De fato, este procedimento foi utilizado em outras aplicações da TPO, [ver por exemplo. Refs. [33–35]].

Entretanto, no presente trabalho não tentamos calcular o potencial efetivo pois, como já explicado no início deste Capítulo, em  $\mathcal{O}(\delta^2)$ , implicaria no cálculo de funções de vácuo de três laços, o que se tornaria extremamente complicado em temperatura e potencial químico finitos. Seguimos aqui a prescrição original dada em [29] onde é sugerido que a otimização deve ser aplicada para cada quantidade física diferente, de modo que  $\eta_i$  pode ser ajustado para a escala de energia relevante. A validade de tal procedimento pode ser julgada por se comparar nossos resultados obtidos dentro das duas otimizações usadas aqui, PSM e FAC, mas é também confirmado por resultados anteriores considerando ISB/SNR obtidos em [8], onde a otimização (PSM) foi aplicada para as massas dos campos (neste caso somente efeitos de temperatura foram estudados naquela referência), com resultados consistentes com aqueles obtidos por meio de técnicas de grupo de renormalização [7] [36], que suportam então a validade do procedimento lá adotado. Da mesma forma podemos supor a validade do estudo feito aqui.

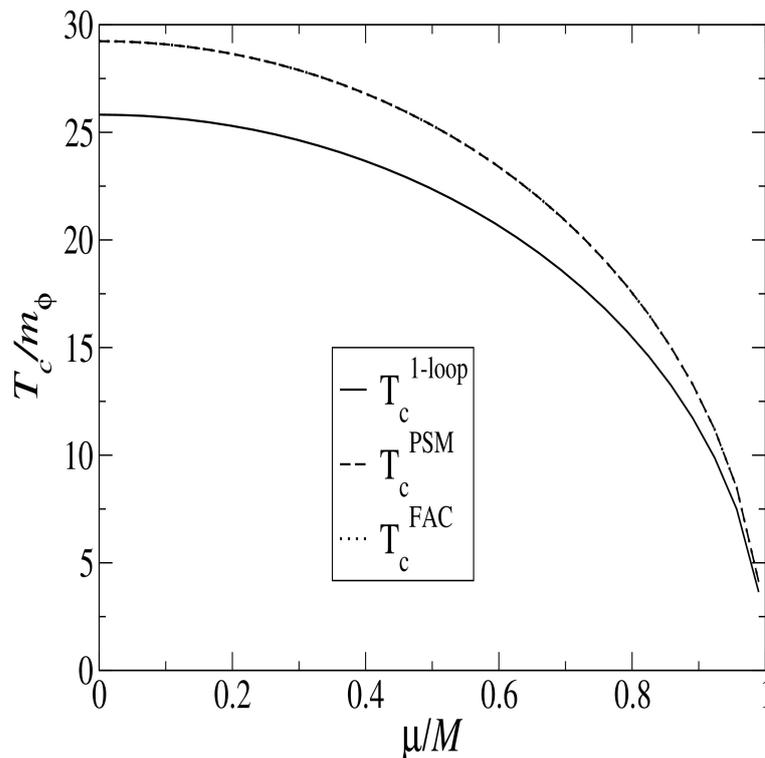
Finalmente, como discutido em [8], podemos facilmente ver que aplicando o PSM a  $M_i^2$  na primeira ordem em  $\delta$ , obtemos valores para  $\bar{\eta}_i$  que não dependem dos acoplamentos e que, portanto, não fornecem resultados verdadeiramente não-perturbativos nessa ordem da TPO. Ainda que este não seja o caso para o procedimento FAC, uma vez que queremos comparar ambos os procedimentos, então investigaremos apenas os resultados generalizados na ordem de  $\delta^2$ , ou seja, segunda ordem na TPO.

Nós trabalhamos em unidades de escala arbitrária  $M$  introduzida pela regularização dimensional, e extremizamos quantidade adimensional  $M_i^2/M^2$ . Para investigar o aparecimento de quebra inversa de simetria em altas temperaturas devemos nos assegurar que as simetrias estejam já restauradas em  $T = 0$ . Isto é conseguido por considerarmos  $m_i^2 > 0$  e por se observar as condições de potencial limitado quando são escolhidos valores para  $\lambda$  com sinal negativo.

Nossa estratégia de otimização numérica é a seguinte. Para os potenciais químico  $\mu_\phi$  e  $\mu_\psi$ , e temperatura abaixo do valor predito pela aproximação de um laço, identificamos as soluções no espaço  $\eta_\phi, \eta_\psi$ , em ambos os procedimentos PSM and FAC. As massa nas posições extremas no caso do PSM, ou soluções no caso de FAC, são encontradas como sendo consistentemente positivas e as soluções como únicas (e consistentes com a aproximação de altas temperaturas, no sentido de que  $\bar{\eta}_{\phi,\psi} < T$ ). O extremo é então seguido a medida que a temperatura aumenta com os potenciais químicos mantidos fixos. Quando uma das massas torna-se negativa, o valor de  $T_c$  é obtido e os valores de  $\bar{\eta}_\phi, \bar{\eta}_\psi$  são registrados. Posteriormente nós estudamos como os resultados são obtidos quando o potencial químico também varia.

Na Tabela I nós apresentamos alguns dos resultados obtidos para alguns valores representativos dos parâmetros. Em todos os casos  $m_\phi^2/M^2 = m_\psi^2/M^2 = 1.0$ . Logo acima da temperatura crítica apresentada nas duas primeira fileiras, a massa térmica  $M_\phi^2$  é negativa, enquanto que  $M_\psi^2$  é positiva.

Figura 8 - A temperatura crítica  $T_c/m_\phi$  para ISB na direção de  $\phi$ , como função do potencial químico  $\mu$  ( $= \mu_\phi = \mu_\psi$ ) para os seguintes valores de parâmetros:  $m_{\phi,\psi}^2/\mu^2 = 1.0$ ,  $\lambda_\phi = 0.012$ ,  $\lambda_\psi = 0.4$  e  $\lambda = -0.03$ . A linha cheia é o resultado obtido na aproximação perturbativa a um laço, a linha tracejada corresponde aos resultados obtidos pelo procedimento PSM e a linha pontilhada são os resultados obtidos pelo procedimento FAC.



Fonte: O autor, 2011.

Notamos dos resultados da Tab. 2 e Fig. 8, que os valores para temperatura crítica (neste caso representando a temperatura crítica para ISB na direção de  $\phi$ ) em ambos os procedimentos, o PSM e o FAC, definidos pelas Eqs. (306) e (307) para  $\phi$  (e equivalentemente para  $\psi$ ) são bem consistentes, produzindo resultados que diferem por não mais do que 0.5%. Note também que os resultados são sempre maiores que as previsões obtidas pela simples estimativa perturbativa na aproximação de um laço, definidas por

$$M_{i(\text{one-loop})}^2 \simeq m_i^2 - \mu_i^2 + \frac{T^2}{12}(\lambda_i + \lambda), \quad i = \phi, \psi. \quad (309)$$

Estes resultados são também consistentes com os obtidos na Ref. [8] para o caso sem potencial químico. A medida que aumentamos o potencial químico, nós também observamos

Tabela 1 - Resultados para a temperatura crítica para ISB obtida na aproximação perturbativa em um laço, na TPO com otimização via PSM e otimização via FAC, respectivamente.

$\lambda_\phi$	$\lambda_\psi$	$\lambda$	$\mu_\phi/M$	$\mu_\psi/M$	$T_c^{1\text{-loop}}/m_\phi$	$T_c^{\text{PSM}}/m_\phi$	$T_c^{\text{FAC}}/m_\phi$
0.012	0.4	- 0.03	0	0	25.1899	29.2342	29.2348
0.012	0.4	- 0.03	0.66	0.66	19.3976	21.9733	21.9742
0.009	0.1	- 0.01	0	0	109.5445	197.0635	197.8150
0.009	0.1	- 0.01	0.66	0.66	82.2970	148.3020	148.9304

Fonte: O autor, 2011.

Tabela 2 - Resultados para a temperatura crítica para ISB obtida na aproximação perturbativa em um laço, na TPO com otimização via PSM e otimização via FAC, respectivamente.

$\lambda_\phi$	$\lambda_\psi$	$\lambda$	$\mu_\phi/M$	$\mu_\psi/M$	$T_c^{1\text{-loop}}/m_\phi$	$T_c^{\text{PSM}}/m_\phi$	$T_c^{\text{FAC}}/m_\phi$
0.012	0.4	- 0.03	0	0	25.1899	29.2342	29.2348
0.012	0.4	- 0.03	0.66	0.66	19.3976	21.9733	21.9742
0.009	0.1	- 0.01	0	0	109.5445	197.0635	197.8150
0.009	0.1	- 0.01	0.66	0.66	82.2970	148.3020	148.9304

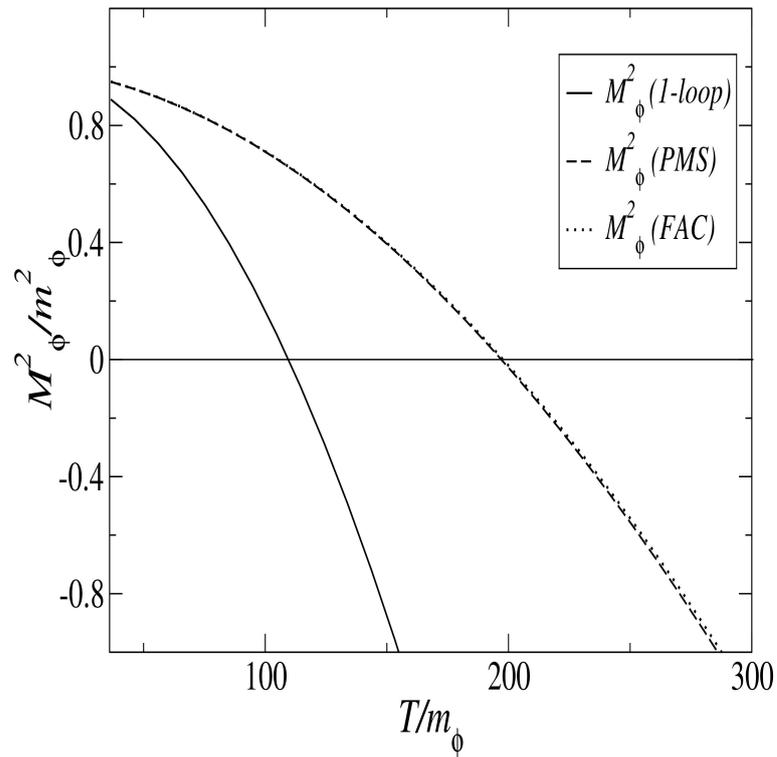
Fonte: O autor, 2011.

da Tab. (2) e Fig. 8 que a temperatura crítica para ISB tende a diminuir.

Nas Figs. 9 e 10, mostramos como as massa quadráticas efetivas variam com a temperatura na aproximação de um laço bem como nos procedimentos PSM e FAC, para o caso dos parâmetros dados pela terceira entrada na Tab.2. Nas Figs 11 e 12, nós mostramos o mesmo nos valores extremos para o potencial químico  $\mu_\phi = \mu_\psi = 0.99$ .

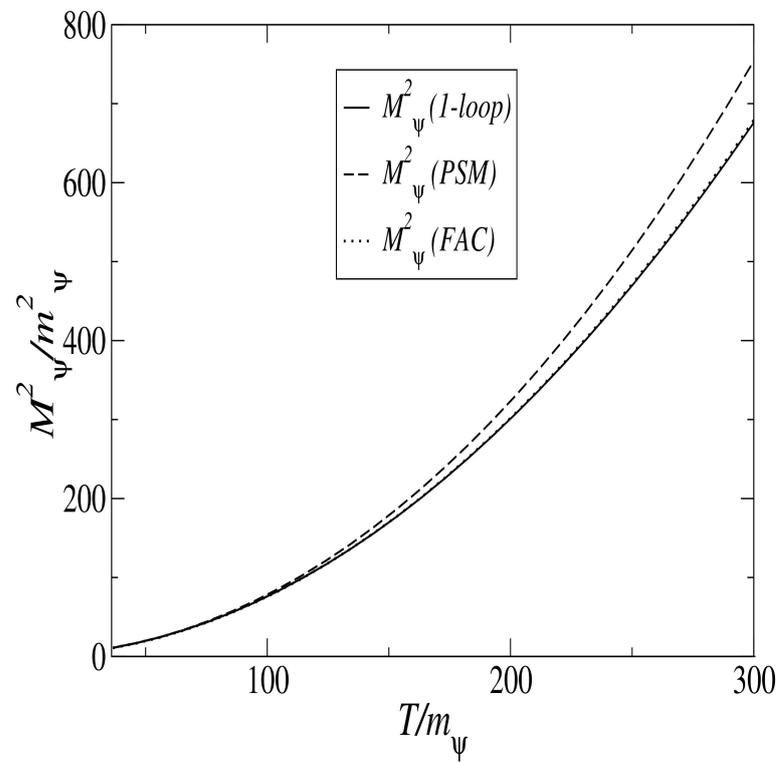
Nós observamos dos resultados mostrados nas Figs. 9 e 11 que mais uma vez os dois procedimentos de otimização, PSM e FAC, produzem resultados consistentes, com curvas bem próximas até para valores bem altos para a temperatura, onde começa a haver um pequeno desvio mais visível entre os dois resultados. Notamos também que os resultados perturbativos de um laço são bastante distantes dos resultados não perturbativos gerados pela TPO. Os resultados vistos nas Figs. 10 e 12 por outro lado mostram que a massa efetiva para  $\psi$  não é muito diferente entre o resultados perturbativos de um laço e os obtidos com a TPO via PSM e via FAC, com os obtidos via FAC mais próximos dos resultados perturbativos que os via PSM. Nós esperamos que a medida que valores mais altos para as constantes de acoplamento sejam considerados, os resultados obtidos com a

Figura 9 - A massa quadrática efetiva para  $\phi$ ,  $M_\phi^2/m_\phi^2$ , como uma função da temperatura, para  $\mu_\phi = \mu_\psi = 0$ ,  $m_{\phi,\psi}^2/\mu^2 = 1.0$ ,  $\lambda_\phi = 0.009$ ,  $\lambda_\psi = 0.1$  e  $\lambda = -0.01$ . A linha cheia é o resultado obtido na aproximação perturbativa a um laço, a linha tracejada corresponde aos resultados obtidos pelo procedimento PSM e a linha pontilhada são os resultados obtidos pelo procedimento FAC.



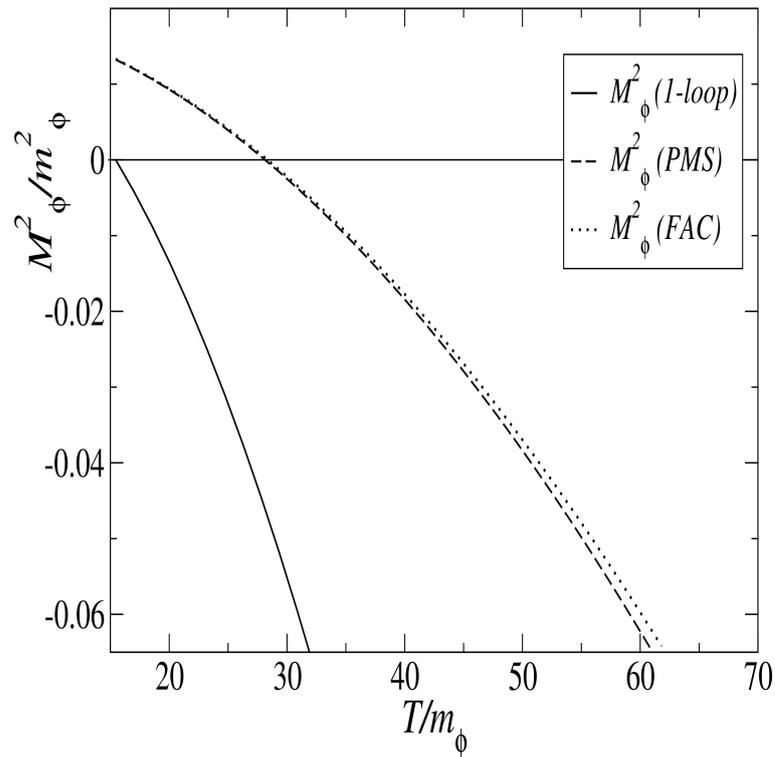
Fonte: O autor, 2011.

Figura 10 - O mesmo que na figura 9, mas para a massa quadrática efetiva térmica para o campo  $\psi$ ,  $M_\psi^2/m_\psi^2$ .



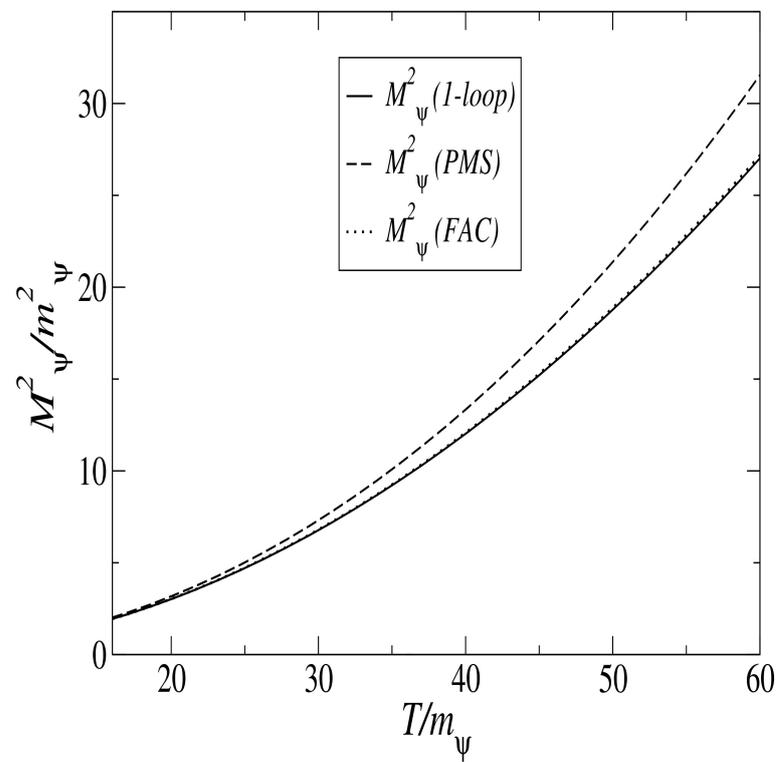
Fonte: O autor, 2011.

Figura 11 - A massa quadrática efetiva para  $\phi$ ,  $M_\phi^2/m_\phi^2$ , como função da temperatura, para  $\mu_\phi/M = \mu_\psi/M = 0.99$ ,  $m_{\phi,\psi}^2/M^2 = 1.0$ ,  $\lambda_\phi = 0.009$ ,  $\lambda_\psi = 0.1$  and  $\lambda = -0.01$ . A linha cheia é o resultado obtido na aproximação perturbativa a um laço, a linha tracejada corresponde aos resultados obtidos pelo procedimento PSM e a linha pontilhada são os resultados obtidos pelo procedimento FAC.



Fonte: O autor, 2011.

Figura 12 - O mesmo que na figura 9, mas para a massa quadrática efetiva para  $\psi$ ,  $M_\psi^2/m_\psi^2$ .



Fonte: O autor, 2011.

TPO devam cada vez mais se distanciar dos resultados perturbativos. Com relação aos resultados para a massa efetiva térmica para  $\phi$  no maior valor tomado para os potenciais químicos,  $\mu_\phi/M = \mu_\psi/M = 0.99$ , é observado da Fig. 11 que a temperatura crítica para ISB fosse próxima de zero de acordo com a Eq. (309), mas efeitos não perturbativos levam a um valor muito maior para  $T_c$ , a qual, para os parâmetros usados na Fig. 11 é dado por  $T_c \simeq 28.34m_\phi$ .

## CONCLUSÃO

No decorrer deste trabalho, procuramos investigar a existência de ISB/SNR para um modelo de dois campos escalares complexos interagente, levando-se em conta efeitos de temperatura e densidade finitas. Para isso, num primeira etapa, encontramos uma expressão para aproximação do potencial efetivo a um laço e, por meio deste potencial efetivo, encontramos a estrutura de fases para nosso modelo. Mostramos, que a presença de densidade pode alterar drasticamente os aspectos de simetria para uma teoria multiescalar, havendo valores desta densidade onde teríamos uma quebra de simetria em altas temperaturas (ISB), bem como, para determinados valores da densidade, a simetria quebrada em baixas temperaturas jamais era restaurada (SNR).

Mostramos também que, em especial em teorias de campos em altas temperaturas, que há uma necessidade de utilização de métodos não perturbativos para que possamos encontrar resultados confiáveis. Isto ocorre pois, em altas temperaturas a expansão perturbativa pode quebrar para regime de parâmetros onde a potência das constantes de acoplamento são suplantadas pelas potências da temperatura, havendo a necessidade de se considerar os termos de ordem mais alta na expansão. Mostramos ainda, em detalhes, o mecanismo de quebra para teoria de perturbação na aproximação gaussiana e, também como ocorre essa quebra em altas temperaturas. Nós escolhemos utilizar como método não perturbativo a Teoria de Perturbação Otimizada (TPO), junto com o critério de sensibilidade mínima (PSM) e FAC, para obter informações não perturbativas e, mostramos como a TPO pode ser aplicada em uma teoria  $\lambda\phi^4$ , ilustrando a sua superioridade em relação a teoria de perturbação.

Finalmente, uma vez que havíamos desenvolvido toda a estrutura matemática necessária, consideramos o caso de um modelo de dois campos escalares complexos com auto interação e termo de interação quadrática entre os campos, levando-se em conta efeitos de temperatura e, com um potencial químico finito onde, como já dissemos, a expansão perturbativa não consiste em uma ferramenta apropriada para fornecer uma descrição satisfatória para este modelo e, por este motivo, utilizamos a TPO para acessar aos regimes não perturbativos da teoria. Calculamos a massa térmica no limite de altas temperaturas até a segunda ordem na expansão, usando esta quantidade para descrever sua variação com relação a temperatura, encontrar a temperatura crítica e como esta pode ser alterada devido ao potencial químico. Encontramos, que, para os dois setores da teoria,  $\phi$  e  $\psi$ , os valores para temperatura crítica (neste caso representando a temperatura crítica para ISB na direção de  $\phi$ ) em ambos os procedimentos, o PSM e o FAC, para  $\phi$  (e equivalentemente para  $\psi$ ) são bem consistentes, produzindo resultados bem próximos. Note também que os resultados são sempre maiores que as previsões obtidas pela simples estimativa perturbativa na aproximação de um laço. Estes resultados são também consistentes com

os obtidos na Ref. [8] para o caso sem potencial químico. A medida que aumentamos o potencial químico, nós também observamos que a temperatura crítica para ISB tende a diminuir. Os procedimentos de otimização, PSM e FAC, produzem resultados consistentes, com curvas bem próximas até para valores bem altos para a temperatura, onde começa a haver um pequeno desvio mais visível entre os dois resultados. Notamos também que os resultados perturbativos de um laço são bastante distantes dos resultados não perturbativos gerados pela TPO. Mostramos ainda, que a massa efetiva para  $\psi$  não é muito diferente entre o resultados perturbativos de um laço e os obtidos com a TPO via PSM e via FAC, com os obtidos via FAC mais próximos dos resultados perturbativos que os via PSM. Nós esperamos que a medida que valores mais altos para as constantes de acoplamento sejam considerados, os resultados obtidos com a TPO devam cada vez mais se distanciar dos resultados perturbativos. Com relação aos resultados para a massa efetiva térmica para  $\phi$  no maior valor tomado para os potenciais químicos, esperava-se que a temperatura crítica para ISB fosse próxima de zero, mas efeitos não perturbativos levam a um valor muito maior para  $T_c$ .

## REFERÊNCIAS

- 1 MATSUBARA, T., A New Approach to quantum-statistical. *Mechanics Prog. Theor. Phys.*, College Park, v.14, p.351, 1955.
- 2 LE BELLAC, M., *Thermal Field Theory*. Cambridge Univ. Press, 1996.
- 3 DOLAN, L.; JACKIW, R. Symmetry behavior at finite temperature *Phys. Rev. D* , College Park, v.9, n.3320, 1974.
- 4 GLEISER, M.; RAMOS, R. O., Thermal fluctuations and validity of the 1-loop effective potential. *Phys. Lett. B*, College Park, v.300, n.271, 1993.
- 5 WEINBERG, S., Gauge and global symmetries at high temperature. *Phys. Rev. D*, College Park, v.9, N.3357, 1974.
- 6 ARNOLD, P.; ESPINOSA, O. Effective potential and first-order phase transitions: beyond leading order. *Phys. Rev. D*, College Park, v.47, n.3546, 1993.
- 7 ROOS, T. G. Wilson renormalization group study of inverse symmetry breaking. *Phys. Rev. D*, College Park, v.54, n.2944, 1996.
- 8 PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Nonperturbative study of inverse symmetry breaking at high temperatures. *Phys. Rev. D*, College Park, v.125 n.016, 2000.
- 9 BIMONTE, G.; INIGUEZ, D.; TARACÓN, A.; ULLÓD, C.L. A lattice Monte Carlo study of inverse symmetry breaking in a two-scalar model in three dimensions. *Nucl. Phys. B*, Institute of Technology, Stockholm, Sweden, v.515, n.345, 1998.
- 10 BAJC, B. *High Temperature Symmetry Nonrestoration*. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0002187>. Acesso em: 02 jan. 2011..
- 11 DUNCAN, A.; MOSHE, M. Nonperturbative physics from interpolating actions. *Phys. Lett. B*, College Park, v.215, n.352, 1988.
- 12 JONES, H. F.; MOSHE, M. Renormalization of the linear expansion. The gross-neveu model, *Phys. Lett. B*, College Park, v.234, n.492, 1990.
- 13 RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1989.
- 14 RAMOND, P. *Field Theory: A Modern Primer*. New York: Addison-Wesley, 1990.
- 15 COLLINS, J. C. *Renormalization*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- 16 BENSON, K.; WIDROW, L. Coaxing charge from the vacuum. *Nucl. Phys. B*, Institute of Technology, Stockholm, Sweden, v.353, Issue1, pg.187, 1991.
- 17 HARBE, H. E.; WELDON, H. Finite-temperature symmetry breaking as Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. D*, College Park, v.25, n.502, 1982.

- 18 FENDLEY,P. The effective potential and the coupling constant at high temperature. *Phys. Lett. B*, College Park, v.196, pg.17.5, 1987.
- 19 ESPINOSA, J. R.; QUIRÓS, M.; ZWIMER, F. On the phase transition in the scalar theory. *Phys. Lett. B*, College Park, v.291, p.115, 1992.
- 20 ARAFUNE,J.; OGATA,K.; SATO,J. Non-perturbative evaluation of the effective potential of  $\lambda\phi^4$  theory at finite temperature in the super daisy approximation. *Prog. Theor. Phys.*, College Park, v:99, p. 119, 1998.
- 21 AMELINO-CAMELIA, G.; PI, S.Y. Self-consistent improvement of the Finite-temperature effective potential. *Phys. Rev. D*, College Park, v.47, p.2356, 1993.
- 22 PARWANI,R. R. Resummation in a hot scalar field theory. *Phys. Rev. D*, College Park, v.45, p.4695, 1992.
- 23 BAMERJEE, N.; MALLIK,S. Critical temperature in a Higgs scalar field theory. *Phys. Rev. D*, College Park, v.43, p.3368, 1991.
- 24 CALDAS, H. C. G On symmetry nonrestoration in a resummed renormalized theory at high temperature. *Phys. Rev. D*, College Park, v.66, p.105015, 2002.
- 25 PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. High temperature resummation in the linear expansion. *Phys. Rev. D*, College Park, v.60, p.105005, 1999.
- 26 JONES, H. F.; PARKIN,P. The renormalized thermal mass with non-zero charge density. *Nucl. Phys. B*, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, v.594, p.518, 2001.
- 27 PERNICE S. A.; OLEAGA,G. Divergence of perturbation theory: Steps towards a convergent series. *Phys. Rev. D*, College Park, v.57 p.1144, 1997.
- 28 KINOSHITA, T. Mass singularities of Feynman amplitudes. *J. Math. Phys.*, College Park, v.3, p.650, 1962.
- 29 STEVENSON, P. M. Optimized perturbation theory. *Phys. Rev. D*, College Park, v.23, p.2916, 1981.
- 30 DUNCAN, A.; JONES,H. F. Convergence proof for optimized expansion: anharmonic oscillator. *Phys. Rev. D*, College Park, v.47, p.2560, 1993.
- 31 CHIKU,S.;HATSUDA,T. Optimized perturbation theory at finite temperature. *Phys. Rev.D*, College Park, v.58, p.076001, 1998.
- 32 HARBE, H.E.; WELDON, H. On the relativistic Bos-Einstein integrals *J. Math. Phys.*, College Park, v.23, p.1852, 1982.

- 33 KNEUR, J.L.; PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Critical and tricritical points for the massless 2D Gross-Neveu model beyond large  $n$ . *Phys. Rev. D*, College Park, v.74, p.125020, 2006.
- 34 KNEUR, J.L.; PINTO, M. B.; RAMOS, R. O.; STAUDT, E. Emergence of tricritical point and liquid-gas phase in the massless 2+1 dimensional Gross-Neveu model. *Phys. Rev. D*, College Park, v.76, p.045020, 2007.
- 35 FARIAS, R. L. S.; KREIN, G.; RAMOS, R. O. Applicability of the linear expansion for the  $\lambda\phi^4$  field theory at finite temperature in the symmetric and broken phases. *Phys. Rev. D*, College Park, v.78, p.065046, 2008.
- 36 PIETRONI, M.; RIUS, N.; TETRADIS, N. Inverse symmetry breaking and the exact renormalization group. *Phys. Lett. B*, College Park, v.367 p.119, 1997.