



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciência  
Faculdade de Engenharia

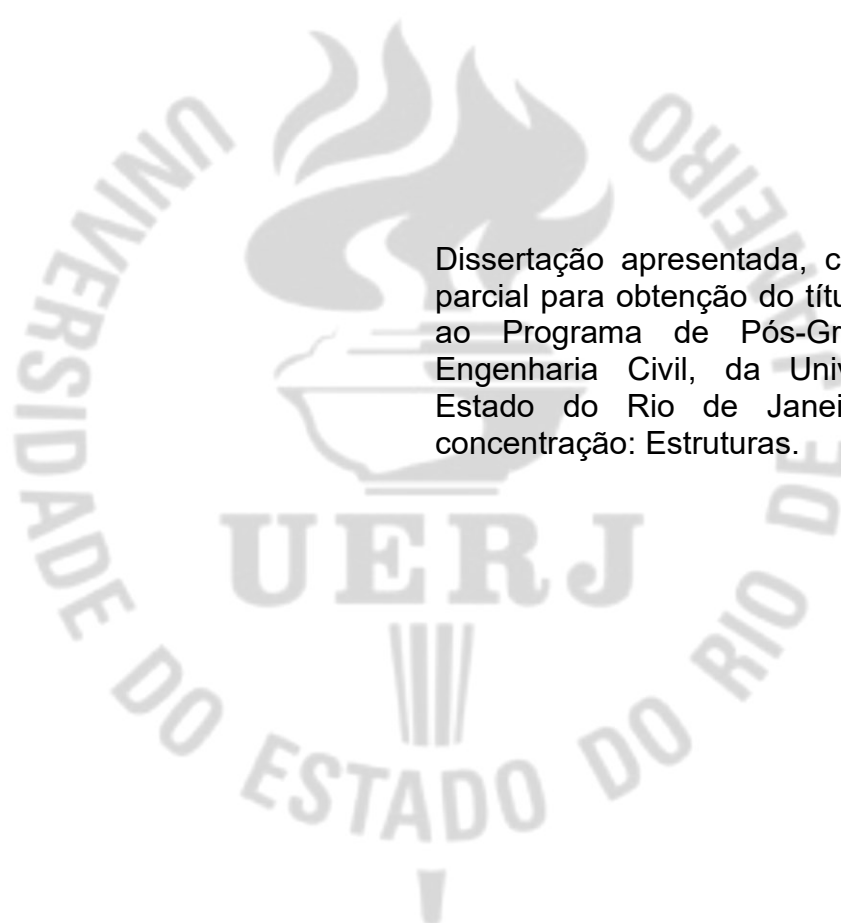
Aline dos Santos Alves Gesteira

**Modelagem de painéis de alvenaria submetidos a carregamento lateral utilizando elementos finitos de pórtico com seção transversal variável**

Rio de Janeiro  
2021

Aline dos Santos Alves Gesteira

**Modelagem de painéis de alvenaria submetidos a carregamento lateral  
utilizando elementos finitos de pórtico com seção transversal variável**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.

Orientadores: Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos

Prof. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

G393 Gesteira, Aline dos Santos Alves.  
Modelagem de painéis de alvenaria submetidos a carregamento lateral utilizando elementos finitos de pórtico com seção transversal variável / Aline dos Santos Alves Gesteira. – 2021.  
113f.

Orientadores: Rodrigo Bird Burgos, Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Alvenaria - Teses. 3. Análise estrutural (Engenharia) - Teses. 4. Deformações e tensões - Teses. 5. Método dos elementos finitos - Teses. I. Burgos, Rodrigo Bird. II. Oliveira, Maria Fernanda Figueiredo de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 624.042

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Aline dos Santos Alves Gesteira

**Modelagem de painéis de alvenaria submetidos a carregamento lateral  
utilizando elementos finitos de pórtico com seção transversal variável**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Estruturas.


Aprovado em: 28 de julho de 2021.

Banca Examinadora:



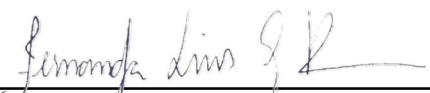
---

Prof. Dr. Rodrigo Bird Burgos (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ




---

Profa. Dra. Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ



---

Profa. Dra. Fernanda Lins Gonçalves Pereira  
Faculdade de Engenharia – UERJ



---

Prof. Dr. Luiz Fernando C. R. Martha  
PUC-Rio

Rio de Janeiro

2021

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Sandra e Eloisio, minha avó Sebastiana, meu primo Robson e meu afilhado Victor Hugo por estarem sempre ao meu lado, me amparando e me auxiliando em todos os momentos, com amor e conforto.

As minhas amigas Mariana Rechtman e Ana Célia Soares por todo o incentivo concedido, apoio em todos os momentos que estive precisando, pelos sorrisos que abriram para mim e que me fizeram abrir

Aos meus orientadores, Rodrigo Burgos e Maria Fernanda, pela paciência e ensinamentos, por estarem sempre dispostos a ouvirem o que tenho a dizer, pelas orientações, pelos conhecimentos que me passaram e pelas oportunidades que me concederam quanto ao meu desenvolvimento profissional.

Ao Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil, por ter me recebido, passado o conhecimento e ter permitido com que eu desenvolvesse esta pesquisa.

À UERJ, por todo conhecimento e maturidade para eu me tornar uma pessoa melhor e uma profissional capacitada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

If you can dream it, you can do it.  
Always remember that this whole thing started with dream and a mouse.

*Walt Disney*

## RESUMO

GESTEIRA, Aline dos Santos Alves. *Modelagem de painéis de alvenaria submetidos a carregamento lateral utilizando elementos finitos de pórtico com seção transversal variável*. 2021. 113f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

O comportamento dos painéis de alvenaria quando submetidos a carregamento lateral é uma das principais preocupações ao projetar tais estruturas e pode depender de vários parâmetros, tais como relação de aspecto do painel, propriedades do material compósito e intensidade da carga axial de compressão. Esse comportamento pode ser analisado por meio de ensaios experimentais e numéricos e geralmente é representado através da curva de carga versus deflexão lateral. Uma forma simples de obter essa curva numericamente é considerar a parede de alvenaria como um elemento unidimensional e realizar uma análise por elementos finitos. Com base em hipóteses relativas à distribuição de tensões normais, o painel pode ser discretizado em elementos de pórtico cujas propriedades geométricas são avaliadas a partir da parte da seção transversal submetida à compressão. No caso do emprego de elementos finitos de seções transversais constantes, bons resultados são obtidos apenas se a malha for densa o suficiente para representar com precisão a mudança nas propriedades geométricas da porção resistente da seção transversal do painel. Neste trabalho, um elemento finito com seção transversal variável é empregado, de forma que o número de elementos necessários para uma solução confiável possa ser reduzido. Os resultados do modelo proposto são comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura para várias dimensões e propriedades de materiais. Também são realizadas comparações com modelos muito discretizados de elementos finitos de seção constante e elementos obtidos pelo método da série de potências.

Palavras-chave: Painéis de Alvenaria. Carregamento lateral. Elemento com seção transversal variável. Elemento com seção transversal constante. Elementos obtidos pelo método da série de potências.

## ABSTRACT

GESTEIRA, Aline dos Santos Alves. *Modelling of masonry walls subjected to lateral loads using finite elements with variable cross section*. 2021. 113f. Master's thesis (Master of Science in Civil Engineering) – Engineering Faculty, Rio de Janeiro State University, Rio de Janeiro, 2021.

The behavior of masonry panels subjected to lateral loads is one of the main concerns during the project execution and may depend on several parameters such as panel aspect ratio, composite material properties and intensity of axial compressive load. This behavior can be analyzed by experimental and numerical tests that could be represented by the load versus lateral deflection curve. A simple way to obtain this curve numerically is to perform a finite element analysis considering the masonry wall as a one-dimensional element. Based on assumptions regarding the distribution of normal stresses, the panel can be discretized into frame elements whose geometric properties are obtained from the part of the cross section subjected to compression only. In the case of using finite elements of constant cross sections, good results are achieved only if the mesh becomes dense enough to accurately represent the change in geometric properties of the panel's cross section. So, this work proposes a finite element with variable cross section, so that the number of elements included for a reliable solution can be reduced. The results of the proposed model are compared with experimental results available in the literature for various dimensions and material properties. Comparisons are also performed with highly discretized finite element models using constant cross-section and elements obtained by the power series method.

Keywords: Masonry walls. Lateral load. Element with variable cross section. Finite elements with variable cross section. Finite elements with uniform cross section. Finite elements obtained by the power series method.



## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1– Exemplos de construções em alvenaria: Grécia Antiga (500-400 a.C.); Lisboa Pombalina (1755-1880); Igreja na Guarda (Ferreira, 2014).....                  | 17 |
| Figura 2– Gráficos da tensão – deformação nos blocos (a) na tração e (b) na compressão.....   | 19 |
| Figura 3– Ação das forças dos ventos na estrutura (Santos, 2014).....   | 21 |
| Figura 4 – Mecanismos de rupturas em paredes de alvenaria quando solicitadas no seu plano por cargas horizontais e verticais (Hamid, Mahmoud, & Magd., 1994). ....  | 22 |
| Figura 5 – Fissuras que ocorreram num edifício de alvenaria de tijolo, após um sismo ocorrido no norte de Itália, 2012. (Ferreira, 2014). ....                      | 23 |
| Figura 6 – Curva tensão deformação na compressão adotado (Benedetti & Steli, 2008). ....  | 25 |
| Figura 7 – (a) Painel de alvenaria composto (b) Painel modelado por elementos de barra (c) Painel composto por três trechos. Adaptado de Grande et al. (2013). .... | 25 |
| Figura 8 – (a) Painel de alvenaria composto por três trechos e (b) os estados de tensão-deformação correspondentes. Adaptado de Grande et al. (2013).....           | 26 |
| Figura 9 – Fluxograma do cálculo da carga lateral a partir da posição da linha neutra. Adaptado Grande et al. de (2013). ....                                       | 28 |
| Figura 10 – Possíveis configurações de trechos do painel de alvenaria. Adaptado de Grande et al. (2013) .....   | 34 |
| Figura 11 – Campos dos deslocamentos no interior de uma barra (Rodrigues, 2021). ....   | 37 |
| Figura 12 – Componentes de tensões em um elemento infinitesimal de barra (Martha, 2018).....  | 38 |
| Figura 13 – Componentes lineares de um elemento infinitesimal no caso plano .....   | 39 |
| Figura 14 – Relação de Rigidez entre esforços internos e deformações (Martha, 2018). ....   | 41 |
| Figura 15 – Equilíbrio do elemento infinitesimal considerando a configuração original (Rodrigues,2019).....   | 42 |
| Figura 16– Equilíbrio de um elemento de viga deformado (Martha e Burgos, 2015).43   |    |
| Figura 17– Esforços e deslocamento na forma clássica da viga de Timoshenko (Rodrigues, 2021).....   | 45 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 18 – Configuração deformada da barra (Martha, 2018). .....                                       | 47 |
| Figura 19– Elemento seção transversal variável.....   | 47 |
| Figura 20 – Elástica axial da barra de pórtico plano e deslocabilidades axiais (Martha, 2018).....      | 49 |
| Figura 21 – Elástica transversal da barra de pórtico, deslocabilidades transversais. (Martha,2018)..... | 52 |
| Figura 22 – Aplicação do PDV para cálculo do carregamento nodal equivalente (Martha, 2018).....         | 63 |
| Figura 23 – Carregamento uniformemente distribuído (a) axial, (b) transversal. (Rodrigues, 2019).....   | 63 |
| Figura 24 – Barra não prismática submetida a carregamento axial (Soltani, 2019). .                      | 65 |
| Figura 25 – Deslocamento nodal de uma barra com mísula de comprimento $L_e$ . (Soltani, 2019).....      | 71 |
| Figura 26 – Funções Hermitianas com 15 elementos, 12 termos e parâmetro $\alpha = 0.9$ .....            | 72 |
| Figura 27 – Algoritmo utilizado na análise da estabilidade linear em elementos não prismáticos .....    | 74 |
| Figura 28 – Teste de convergência Método da Série de Potência para $\alpha = 0.1$ . .....               | 79 |
| Figura 29 – Teste de convergência Método da Série de Potência para $\alpha = 0.5$ .....                 | 79 |
| Figura 30 – Teste de convergência Método da Série de Potência para $\alpha = 0.8$ . .....               | 80 |
| Figura 31 – Teste de convergência da carga crítica para $\alpha = 0.1$ .....                            | 82 |
| Figura 32 – Teste de convergência da carga crítica para $\alpha = 0.5$ .....                            | 83 |
| Figura 33 – Teste de convergência da carga crítica para $\alpha = 0.8$ .....                            | 83 |
| Figura 34 – Fluxograma das três abordagens investigadas neste trabalho. ....                            | 85 |
| Figura 35 –Experimento do painel (Salmanpour, 2017).....  | 88 |
| Figura 36 – Curva carga lateral $V$ vs. $D$ . ....  | 88 |
| Figura 37 – Curva carga lateral $V$ vs. $D$ . ....  | 89 |
| Figura 38 – Curva carga lateral $V$ vs. $D$ considerando a não linearidade geométrica. ....             | 89 |
| Figura 39 – Curva carga lateral $V$ vs. $D$ considerando a não linearidade geométrica. ....             | 90 |
| Figura 40 –Extensões dos trechos do painel Grande et al. (2013).....                                    | 91 |
| Figura 41 – Variação da extensão dos trechos do painel.....   | 92 |
| Figura 42 – Variação da extensão dos trechos do painel.....   | 92 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 43– (a) Coeficientes de Rigidez à flexão, (b) Coeficientes de Flexibilidade . | 107 |
| Figura 44 – Configurações deformadas elementares. (Martha, 2018) .....               | 110 |
| Figura 45 – Sistema principal adotado para a solução da estrutura da Figura 23. .    | 111 |

## LISTA DE TABELAS

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1 – Propriedades do exemplo 1.....   | 76  |
| Tabela 2 – Validação do Exemplo 1.....  | 76  |
| Tabela 3 – Propriedades do teste de convergência .....  | 78  |
| Tabela 4 – Resultados para o cálculo do deslocamento utilizando MSP comparados com os obtidos por MEF. ....                 | 81  |
| Tabela 5 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem utilizando MEF comparados com os obtidos pelo ANSYS..... | 84  |
| Tabela 6 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem utilizando MSP comparados com os obtidos pelo ANSYS..... | 84  |
| Tabela 7 – Características do painel de alvenaria obtidas experimentalmente por (Salmanpour, 2017).....                     | 86  |
| Tabela 8 – Características do painel de alvenaria obtidas experimentalmente por (Giambiamco, et al., 1996). ....            | 87  |
| Tabela 9 – Forças e momentos unitários do lado direito .....  | 108 |
| Tabela 10 – Forças e momentos unitários do lado esquerdo.....   | 109 |

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUÇÃO</b> .....   | <b>13</b> |
| <b>1. PAINEL DE ALVENARIA ESTRUTURAL</b> .....  | <b>17</b> |
| 1.1. Alvenaria estrutural .....   | 17        |
| 1.2. Painel de alvenaria .....  | 20        |
| 1.3. Modelagem do painel de alvenaria por elementos de barra .....  | 24        |
| 1.4. Equilíbrio da seção transversal na base.....   | 28        |
| 1.5. Configurações dos trechos do painel com a mesma condição de tensão.....                              | 32        |
| <b>2. ELEMENTO FINITO DE BARRA COM SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL</b> .....                                   | <b>35</b> |
| 2.1. Idealização do comportamento de barras .....   | 36        |
| 2.1.1. Teoria de Timoshenko.....  | 36        |
| 2.1.2. Relações entre deslocamentos e deformações .....   | 38        |
| 2.1.3. Lei constitutiva linear para o material.....   | 40        |
| 2.1.4. Relações de rigidez do elemento infinitesimal de barra .....                                       | 41        |
| 2.1.5. Equações de equilíbrio do elemento infinitesimal na condição indeformada.....                      | 42        |
| 2.1.6. Equações de equilíbrio do elemento infinitesimal na condição deformada.....                        | 43        |
| 2.2. Equações diferenciais e funções de forma .....   | 45        |
| 2.2.1. Equações diferenciais para o comportamento axial .....   | 48        |
| 2.2.2. Solução das equações diferenciais para comportamento axial.....                                    | 49        |
| 2.2.3. Equações diferenciais para o comportamento à flexão considerando distorção de cisalhamento. ....   | 49        |
| 2.2.4. Obtenção das funções de forma para o comportamento à flexão segundo o elemento de Timoshenko. .... | 51        |
| 2.3. Matriz de rigidez.....   | 52        |
| 2.3.1. Princípio dos deslocamentos virtuais .....   | 53        |
| 2.3.2. Energia de deformação interna .....  | 54        |
| 2.3.3. Matriz de rigidez elástica.....  | 55        |
| 2.4. Análise não linear geométrica .....  | 58        |
| 2.5. Cargas nodais equivalentes .....   | 62        |

|   |     |
|---|-----|
| 2.5.1. Princípio dos deslocamentos virtuais .....                               | 62  |
| 2.6. Elemento finito baseado em séries de potência .....                        | 64  |
| 2.6.1. Equações governantes.....  | 65  |
| 2.6.2. Método numérico .....  | 66  |
| 2.6.3. Condições de contorno e funções de forma .....                           | 70  |
| 2.6.4. Matriz de rigidez.....   | 73  |
| 3. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO .....                                      | 75  |
| 3.3. Exemplo 1: Validação do elemento finito com variação linear .....          | 75  |
| 3.4. Exemplo 2: Validação do elemento finito baseado em séries de potência..... | 77  |
| 3.5. Carga crítica de barras com seção transversal variável .....               | 81  |
| 3.6. Painel de alvenaria .....  | 85  |
| 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....   | 93  |
| REFERÊNCIAS.....  | 95  |
| APÊNDICE A .....  | 100 |
| APÊNDICE B .....  | 105 |
| APÊNDICE C .....  | 107 |

## INTRODUÇÃO

Em diversos países as construções em alvenaria constituem uma parte importante das edificações existentes e em muitos deles ela representa uma herança cultural. Isto ocorre, principalmente em razão das suas vantagens construtivas como: a elevada resistência à compressão, facilidade de implementação e disponibilidade do material, baixo custo de manutenção, durabilidade e boa proteção sonora e contra ao fogo, (Mu Lu, 2005). Contudo, a alvenaria apresenta um comportamento mecânico complexo de difícil modelagem numérica, visto que é um material compósito anisotrópico com assimetria na tração e compressão, elevada não-linearidade na compressão e ruptura quase-frágil (Ferreira, 2014).

Numa edificação em alvenaria estrutural, quando há a ação de ventos e sismos, as lajes acabam atuando como diafragmas rígidos que distribuem os esforços cortantes entre as paredes conforme suas rigidezes. Posto isto, com um projeto adequado, as paredes são capazes de absorver os esforços cortantes desenvolvidos nas interseções com as lajes. Nesse contexto, a resposta de um painel sob compressão submetido à carga lateral é utilizada para verificar a capacidade de carga e o comportamento global de estruturas diante desses eventos.

Segundo Ferreira (2014), a curva de capacidade de carga permite calcular a capacidade de deformação prevista para estrutura e fornece informações sobre a ductilidade, que escapa a uma análise linear. É importante referir que a curva de capacidade é uma propriedade intrínseca da estrutura e da forma como esta é carregada, e não a resposta da mesma face a uma dada solicitação externa.

Os primeiros estudos realizados sobre o comportamento mecânico da alvenaria contemplados por Heyman (1966) e Pasquale (1992) apresentaram várias soluções úteis para a alvenaria sem-reforço. Esses trabalhos admitiram que a alvenaria não suporta tensões de tração e que a resposta a compressão possui comportamento elasto-plástico perfeito. Além disso, os modelos de equilíbrio desenvolvidos por Magenes & Calvi (1997) e por Roca (2006) resultaram em fórmulas simples e eficientes de calcular o carregamento último, mas essas

formulações são deficientes no caso da curva de capacidade e do deslocamento último.

Assim sendo, Benedetti & Steli (2008) apresentaram uma solução analítica para paredes de alvenaria sem-reforço também considerando que a alvenaria não suporta tensões de tração, portanto, a seção resistente do painel varia continuamente ao longo da altura, conforme a evolução da região comprimida. Sendo que, a resposta a compressão tem um comportamento elasto-plástico perfeito. A curva de capacidade é obtida através de uma fórmula explícita desenvolvida por meio da integração do diagrama de curvatura com o propósito de obter o deslocamento considerando os efeitos do cisalhamento. Em seu trabalho, os resultados são comparados com oito ensaios experimentais obtidos na literatura.

Neste contexto, Grande et al. (2013) propõe uma abordagem simples para avaliar a resposta não linear de painéis de alvenaria com e sem reforço sujeitos a carregamentos verticais no plano e a cargas laterais. A metodologia consiste em considerar o painel como um elemento unidimensional e realizar uma análise por elementos finitos considerando a deformação por cisalhamento e à flexão. As propriedades geométricas e mecânicas dos elementos são calculados com base nos diferentes estados de tensão-deformação avaliadas a partir da parte da seção transversal submetida à compressão. A validação do modelo foi realizada através de modelos numéricos e experimentais obtidos na literatura. A comparação entre o ensaio experimental e o modelo numérico são satisfatórios tanto em relação a carregamento máximo quanto deslocamento último.

Considerando o exposto, este trabalho investiga uma metodologia para o cálculo de curvas de capacidade lateral (carga lateral vs. deflexão lateral) de painéis de alvenaria submetidos a carga axial compressiva, aprimorando a abordagem apresentada por Grande et al. (2013). Posto isto, o painel de alvenaria de base engastada e topo livre não admite tensão de tração, assim, a seção transversal resistente varia continuamente ao longo da altura, conforme a evolução da região comprimida, sendo que a resposta a compressão possui comportamento elasto-plástico perfeito. Além disso, a estrutura estudada considera que para um dado valor de força lateral, o painel pode ser composto por diferentes trechos ao longo da estrutura, de modo que cada trecho possui estado tensão-deformação característico. O número de trechos e as suas extensões dependem de uma série de parâmetros



como as propriedades da alvenaria, o valor da carga aplicada e a geometria do painel.

A curva carga lateral vs. deflexão lateral no topo do painel é obtida através de uma análise não linear incremental, sendo cada ponto da curva calculado em duas etapas. A primeira consiste em analisar o número de trechos do painel e os estados de tensão-deformação correspondente ao valor da força lateral, a partir das equações de equilíbrio. A segunda avalia o deslocamento lateral do painel pelo método dos elementos finitos utilizando a teoria de Timoshenko. Essa formulação é válida nesse caso, uma vez que a distorção de cisalhamento desempenha um papel importante em estruturas cuja relação comprimento/largura é baixa.

Dessa forma três abordagens foram estudadas para avaliar a resposta não-linear de painéis de alvenaria através de uma análise unidimensional utilizando o Método dos Elementos Finitos. A primeira abordagem discretiza a estrutura em um número fixo de elementos com seção transversal constante. A segunda e a terceira discretizam a estrutura com um elemento finito por trecho, cada um com seção transversal variável, porém no caso da terceira abordagem as propriedades geométricas da seção transversal são expandidas em séries de potências até um certo número de termos, onde há precisão nos resultados. Diferente da segunda abordagem que desenvolve o elemento finito de barra com seção transversal variável através da utilização das funções de forma obtidas da solução da equação diferencial do elemento indeformado.

Além disso, nos painéis de alvenaria estudados foram feitas análises considerando tanto a linearidade como a não linearidade geométrica. A análise não linear geométrica é resolvida de maneira incremental através do método de Newton-Raphson.

## **Objetivos**

O objetivo principal deste trabalho consiste na análise painéis de alvenaria sob compressão submetidos a cargas laterais com propósito de avaliar a resposta não linear dessas estruturas, através da modelagem dos painéis como um conjunto de elementos finitos, utilizando a formulação de Timoshenko, ou seja, considerando

tanto à deformação por flexão quanto à distorção por cisalhamento. Especificamente, neste trabalho pretende-se investigar a aplicação do elemento finito com seção transversal variável nesse tipo de problema, comparando-o com o elemento finito de seção transversal constante e com resultados obtidos experimentalmente na literatura.

### **Estrutura da Dissertação**

No capítulo 1, é feita uma revisão bibliográfica a respeito das principais características da alvenaria estrutural; além disso é apresentada a formulação utilizada no cálculo de curvas de capacidade lateral (carga lateral vs. deflexão lateral).

No capítulo 2, são desenvolvidas as equações necessárias para a obtenção dos três modelos utilizados, assim são obtidas a matriz de rigidez elástica e geométrica, além das cargas nodais equivalentes tanto para o finito com seção transversal variável, como o elemento baseado em series de potenciais.

No capítulo 3, são expostos exemplos de aplicação dessa implementação e seus resultados serão confrontados com experimentos obtidos na literatura.

No capítulo 4, são apresentadas as conclusões e ideias para prosseguimentos dos estudos.

Nos apêndices, podem ser encontrados a formulação do elemento finito com seção transversal uniforme considerando a teoria de Timoshenko, além da obtenção das matrizes de rigidez elástica, geométrica e das cargas nodais equivalentes, através dos coeficientes de flexibilidade.

## 1. PAINEL DE ALVENARIA ESTRUTURAL

### 1.1. Alvenaria estrutural

A alvenaria é um dos materiais de construção mais antigos e amplamente utilizados na indústria da engenharia civil contemporânea. Sua utilização possibilitou, ao longo da história, a realização de obras que conciliam o valor arquitetônico com a função estrutural. Como resultado, a alvenaria assumiu-se como um elemento essencial na fundação de civilizações e cidades, como ilustrado na Figura 1 (Silva, Lourenço, & Oliverira, 2003).



Figura 1– Exemplos de construções em alvenaria: Grécia Antiga (500-400 a.C.); Lisboa Pombalina (1755-1880); Igreja na Guarda (Ferreira, 2014).

As primeiras construções em alvenaria surgem com as primeiras comunidades sedentárias, ou seja, quando o homem passa a construir os seus próprios abrigos através da colocação de pedras sobrepostas. Mais tarde, o uso de tijolos cerâmicos viria a desencadear a primeira revolução na construção, dadas as vantagens construtivas e funcionais deste material em comparação com a pedra (Marques, 2012).

Do ponto de vista material, a alvenaria é definida como um compósito heterogêneo, anisotrópico e descontínuo, que possui propriedades distintas nas diferentes direções; sendo assim, é difícil caracterizá-la mecanicamente. Essa heterogeneidade é ocasionada pelas condições de construção desiguais, ou seja, dos variados tipos de materiais empregados, da técnica construtiva utilizada, assim

como possíveis alterações e diferentes estados de degradação provocados por danos ou patologias (Ferreira, 2014).

De um modo geral, as principais vantagens das construções em alvenaria são a elevada resistência à compressão, facilidade de implementação, disponibilidade do material, baixo custo de manutenção, boa proteção sonora e contra ao fogo, durabilidade e estética (Mu Lu, 2005).

Contudo, a alvenaria apresenta desvantagens como a fraca resistência à tração, dispondo, principalmente, da ação estabilizadora da gravidade. A fraca resistência à tração resulta em uma reduzida resistência global à flexão, com isso tornando questionável a segurança das estruturais quando submetidas a abalos sísmicos ou ventos. Além disso, especialmente sob a ação de sismos, as estruturas de alvenaria possuem baixa ductilidade e fraca capacidade de dissipação de energia, o que pode ocasionar em uma ruptura frágil (Ferreira, 2014). É válido ressaltar que as construções altas e pesadas estão mais sujeitas a esse tipo de ruptura, visto que estão submetidas a cargas de compressão elevadas e permanentes (Roque, 2002).

Em diversos países as construções em alvenaria constituem uma parte importante das edificações existentes e, em muitos deles, ela representa uma herança cultural. Contudo, ainda há uma carência de informação e pesquisa para caracterizar suas propriedades mecânicas e performance estrutural, porque esse material além de ser heterogêneo apresenta um comportamento não-linear (Barraza, 2012).

Para realizar estudos sobre a alvenaria estrutural é necessário o conhecimento das propriedades e do comportamento de cada um dos materiais envolvidos. A alvenaria é constituída por dois materiais diferentes a argamassa e o bloco, o que resulta em uma estrutura heterogênea e descontínua. Além disso, a união desses dois elementos gera a formação de uma zona de interface.

Os blocos possuem uma significativa contribuição no comportamento global da alvenaria, visto que estes representam a maior parcela do volume da estrutura. No mercado da construção civil, eles possuem diferentes formas e tamanhos, em função das influências regionais, econômicas e da vantagem estrutural. No Brasil, os blocos vazados de concreto e cerâmica são os mais populares (Santos, 2014).

Os blocos são os principais responsáveis pela resistência à compressão e à tração, durabilidade a agentes agressivos, estabilidade e precisão dimensional da alvenaria (Mata, 2011). Posto isto, os procedimentos de ensaio para a obtenção das propriedades dos blocos podem ser realizados de forma independente e encontram-se descritos na norma NBR 15270 partes de 1 a 3 (ABNT, 2005), no caso de blocos cerâmicos e de vedação, enquanto a NBR 16868-3 (ABNT, 2020), refere-se aos ensaios de blocos de concreto para a alvenaria (Silva C. R., 2020). A Figura 2 ilustra o gráfico de tensão-deformação dos blocos tanto para a tração como compressão obtidos através dos ensaios experimentais.

A alvenaria quando submetida a cargas axiais, de acordo com a rigidez dos materiais, sofre tensões de tração no bloco e de confinamento na argamassa. Portanto, a resistência à tração do bloco se torna um fator de elevada importância. A resistência à tração pode ser determinada de maneira direta ou indireta, contudo devido as dificuldades da realização dos ensaios diretos, os indiretos são os mais comuns (Santos, 2014).

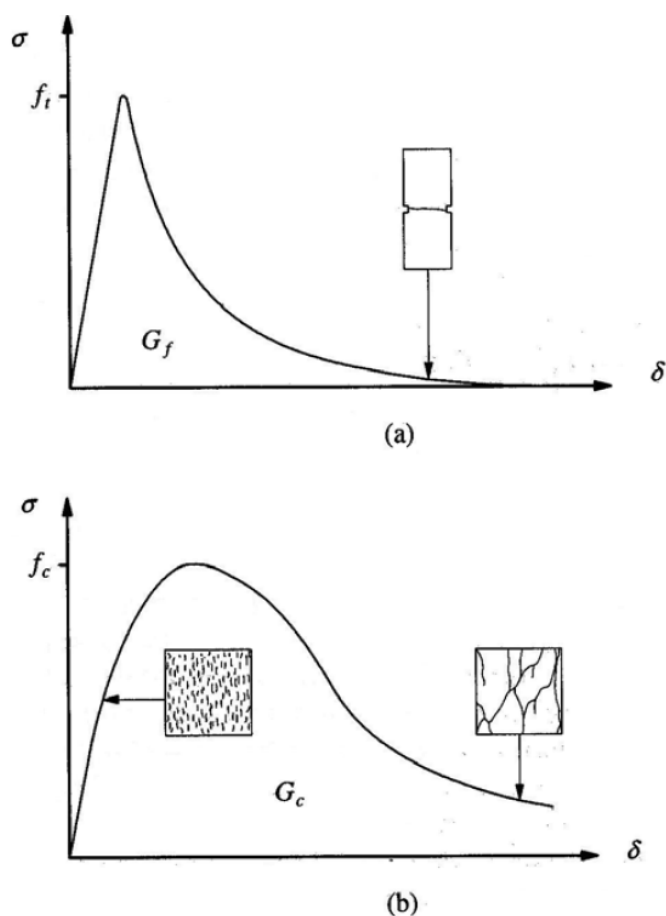


Figura 2– Gráficos da tensão – deformação nos blocos (a) na tração e (b) na compressão (Silva, Lourenço, & Oliverira, 2003)

A argamassa, por sua vez, é composta de uma mistura de cimento, agregado miúdo e aditivos, como os concretos, mas a diferença está nas diferentes proporções que acarretam propriedades mecânicas distintas (Silva C. R., 2020). A argamassa é a principal responsável pela união dos blocos, mas ela também possui a função de distribuir as tensões ao longo da seção das unidades, de acomodar as deformações provenientes de carregamentos externos e de ajustar as tolerâncias geométricas dos blocos. Dito isso, para a argamassa desempenhar adequadamente tais atribuições ela deve possuir certas características essenciais como, no estado fresco, a trabalhabilidade e a capacidade de retenção de água. Já no estado endurecido, as principais propriedades são a resistência mecânica, capacidade de absorver deformações, resistência de aderência, retração na secagem e durabilidade (Santos, 2014).

A aderência pode ser considerada uma das propriedades essenciais para o bom desempenho da alvenaria. Esta é responsável pela capacidade da junta de resistir aos esforços de tração perpendiculares ao seu plano e à tensão de cisalhamento provocadas pelas forças tangenciais. A aderência é fundamental para que as paredes resistam aos cisalhamentos produzidos por forças laterais principalmente no caso das alvenarias não armadas, na qual a qualidade da argamassa, a magnitude das forças verticais e horizontais podem gerar modos de rupturas distintos (Mata, 2011).

A interface entre bloco e argamassa, de certa forma, não constitui um material da alvenaria, e sim uma região formada pela união desses componentes, logo suas propriedades são influenciadas tanto por características do bloco quanto da argamassa. Além disso, as juntas de argamassa constituem caminhos principais de propagação de fissuras, bem como, ela é um fator relevante no modo de falha da alvenaria como um todo (Silva C. R., 2020).

## **1.2. Paineis de alvenaria**

Numa edificação em alvenaria estrutural, quando há a ação de ventos e sismos, as lajes acabam atuando como diafragmas rígidos que distribuem os esforços cortantes entre as paredes conforme suas rigidezes, como apresentado na

Figura 3. Posto isto, com um projeto adequado, as paredes são capazes de absorver os esforços cortantes desenvolvidos nas interseções com as lajes (Santos, 2014). Nesse contexto, a resposta de um painel sob compressão submetido à carga lateral é utilizada para verificar a capacidade de carga e o comportamento global de estruturas diante desses eventos.

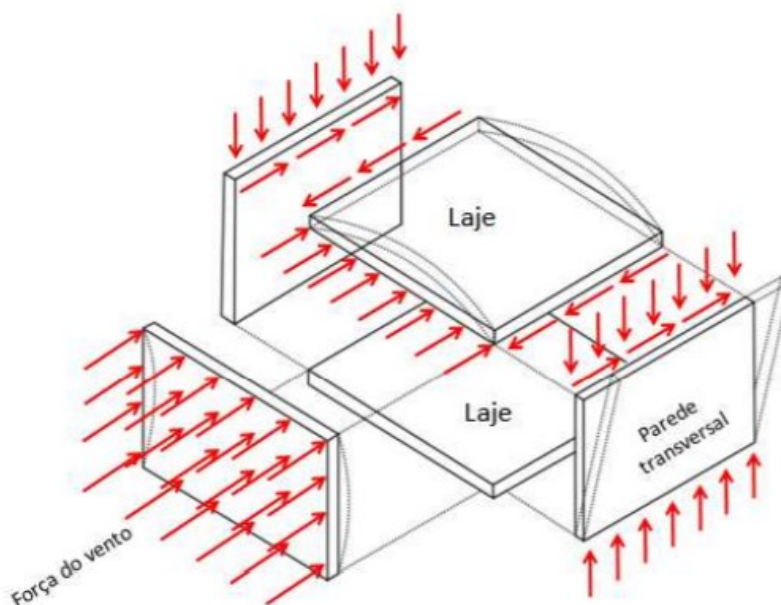


Figura 3– Ação das forças dos ventos na estrutura (Santos, 2014).

Assim, é necessário compreender que as cargas laterais e verticais conduzem a uma combinação das tensões de cisalhamento e normal (de compressão e tração) em cada painel. A fratura e a ruptura do painel sob pré-compressão carregado lateralmente não é algo simples de se analisar, em virtude da complexa interação da ruptura por cisalhamento ao longo das juntas de argamassa, da tração das fiadas e da falha por compressão geralmente na base do painel (Chaimoon & M.Attard, 2007).

Outro ponto investigado é a análise da falha por flambagem uma vez que o painel está submetido a carregamento axial compressivo. Esse tipo de análise possui extrema relevância em painéis com razão de esbeltez elevada para o qual a influência de efeitos geométricos não lineares é muito significativa e até crítica, como os painéis de alvenaria construídos nos séculos 19 e 20 (Sandoval & Roca, 2012).

Como dito anteriormente, as paredes de alvenaria são caracterizadas pela baixa ductilidade e pela fraca capacidade de dissipação de energia, o que pode

ocasionar em uma ruptura frágil, especialmente sob a ação de sismos, uma vez que eles podem atingir elevados níveis em comparação a outros tipos de ações. Os modos de falha das paredes de alvenaria sem reforço submetidas a carga vertical e horizontal no plano, Figura 4(a), podem ser resumidos como:

- Ruptura por cisalhamento da junta de argamassa entre as fiadas, Figura 4(b);
- Ruptura por cisalhamento diagonal, Figura 4(c);
- Ruptura por tração na base e tombamento, Figura 4(d)

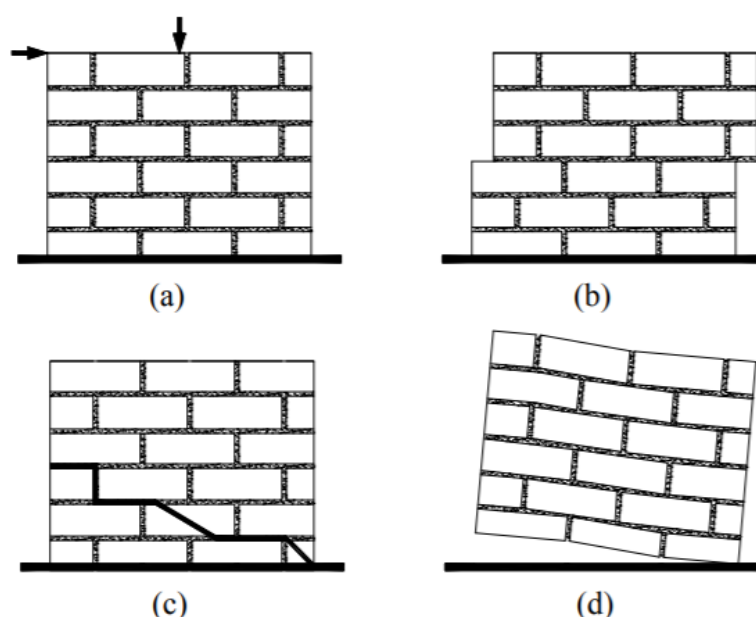


Figura 4 – Mecanismos de rupturas em paredes de alvenaria quando solicitadas no seu plano por cargas horizontais e verticais (Hamid, Mahmoud, & Magd., 1994).

A ruptura por cisalhamento da junta de argamassa entre as fiadas ocorre devido à formação de fissuras horizontais; além disso, planos de deslizamento podem ser formados ao longo das juntas fissuradas (Magenes & Calvi, 1997). Esse modo de falha é possível quando a tensão de cisalhamento resultante da força horizontal exceder a soma da resistência ao cisalhamento da parede mais a tensão vertical compressiva multiplicada pelo coeficiente de fricção entre a argamassa e as unidades (Hamid, Mahmoud, & Magd., 1994).

Já a ruptura por cisalhamento diagonal é caracterizada pelas fissuras diagonais, que se iniciam no centro do painel e se propagam para os cantos, sendo este o mecanismo de ruptura mais comum em paredes de alvenaria. Esse modo de falha ocorre primeiramente pela fissuração da argamassa de assentamento ao longo



das zonas de compressão do painel, que se propaga à medida que o carregamento lateral aumenta. No caso de carregamentos com magnitude elevada, pode ocorrer o esmagamento dos blocos. Este modo de falha normalmente acontece quando a carga vertical é maior que a horizontal.

Por fim, o modo de ruptura por tração na base e tombamento envolve dois tipos de ruptura diferentes: se a carga vertical aplicada é menor do que a resistência a compressão, o carregamento horizontal gera fissuras de tração nos cantos; dessa forma, o painel começa a se comportar como um corpo rígido, se inclinando em torno da base, ou seja, ocorre o tombamento da estrutura. Contudo, no caso do painel submetido a uma carga vertical que supera a resistência à compressão, o painel é progressivamente caracterizado por fissuras sub verticais na direção dos cantos comprimidos, isto é, ocorre o esmagamento do painel. É importante ressaltar que esses dois mecanismos não ocorrem de maneira individualizada, portanto, a análise normalmente é realizada considerando os dois mecanismos simultaneamente.

Os fatores predominantes no modo de ruptura na base e o tombamento estão associados à resistência tração da argamassa, à eficiência da ligação entre a argamassa e o bloco e à relação entre a carga vertical e horizontal (Ferreira, 2014).

Na realidade, o mais comum é que todos esses modos de ruptura ocorram simultaneamente, dessa maneira explicitando a complexidade estrutural de paredes em alvenaria, conforme ilustra a Figura 5.



Figura 5 – Fissuras que ocorreram num edifício de alvenaria de tijolo, após um sismo ocorrido no norte de Itália, 2012. (Ferreira, 2014).

Apesar de o principal carregamento para o dimensionamento de painéis de alvenaria ser axial, a resposta de um painel sob compressão submetido a cargas laterais é utilizada para verificar a capacidade de carga e o comportamento global das estruturas diante de eventos como ventos e sismos. Vale ressaltar que a curva de capacidade de carga permite calcular a capacidade de deformação prevista para estrutura e fornece informações sobre a ductilidade, que escapa a uma análise linear (Ferreira, 2014).

Contudo, a avaliação da capacidade de carga das estruturas de alvenaria submetidas ao carregamento horizontal não é algo simples, dado que esta depende da confiabilidade dos modelos empregados. Como a alvenaria é um material heterogêneo com características ortotrópicas, além de possuir juntas de argamassa que acarretam planos de fraqueza, esse tipo de modelagem se torna ainda mais complexa (Mata, 2011).

A modelagem numérica da alvenaria estrutural pode enfatizar uma representação detalhada de todos os seus componentes (blocos, juntas de argamassa e a zona de interface), a qual é denominada de micro modelagem. Ou como é feito neste trabalho adotar uma representação macro da estrutura (macro modelagem) na qual o material é considerado como um compósito, dotado de propriedades elásticas médias, obtidas através do processo de homogeneização.

### **1.3. Modelagem do painel de alvenaria por elementos de barra**

Este trabalho visa realizar uma análise unidimensional de um painel de alvenaria através do Método dos Elementos Finitos. A partir da resposta de um painel sob pré-compressão submetido ao aumento progressivo de uma carga lateral, é possível obter a curva de capacidade de carga do painel, que pode ser empregado para avaliar o comportamento global de estruturas (Gesteira, 2020). É neste contexto que este trabalho investiga e aprimora a formulação para o cálculo de curvas de capacidade lateral (carga lateral vs. deflexão lateral) proposta por Grande et al. (2013).

Nesse estudo, a alvenaria é considerada como um material homogêneo, ou seja, dotada de propriedades elásticas médias, obtidas por ensaios de

caracterização de paredinhas ou homogeneização. Admite-se que a alvenaria não suporta tensões de tração e que a resposta à compressão segue um comportamento elasto-plástico perfeito, isto é, a resistência a compressão da alvenaria  $f_{mk}$  jamais é excedida. Uma vez que esteja atingida ela é mantida, e toda deformação adicional é exclusivamente de natureza plástica, como apresentado na Figura 6, sendo  $\varepsilon_y$  a deformação elástica limite e  $\varepsilon_u$  a deformação última.

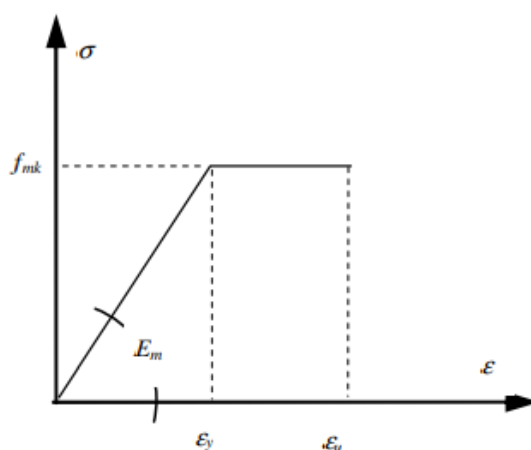


Figura 6 – Curva tensão deformação na compressão adotado (Benedetti & Steli, 2008).

A Figura 7 (a) representa um painel de alvenaria submetido a cargas no plano. A modelagem é realizada por elementos de barra, de forma que a configuração final da estrutura é obtida pela reunião das barras isoladas, Figura 7(b). Como se desconsidera a resistência à tração da alvenaria, a seção transversal resistente do painel varia continuamente ao longo da altura, conforme a evolução da região comprimida, Figura 7(c).

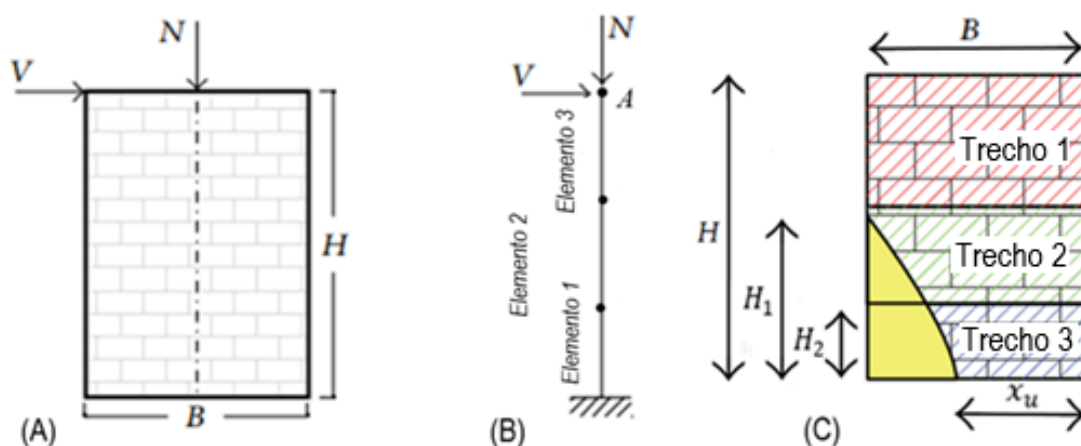


Figura 7 – (a) Painel de alvenaria composto (b) Painel modelado por elementos de barra (c) Painel composto por três trechos. Adaptado de Grande et al. (2013).

Para um dado valor de força lateral  $V$ , o painel pode ser considerado como composto por diferentes trechos ao longo da altura da estrutura, de modo que cada trecho possui um estado de tensão e deformação característico, como ilustra a Figura 8(b). O número de trechos e as suas extensões dependem de uma série de parâmetros como as propriedades da alvenaria, o valor da carga aplicada e a geometria do painel. Considerando como  $\varepsilon_{m\acute{a}x}$  o valor da deformação máxima quando o material está submetido à compressão,  $\varepsilon_y$  o valor da deformação elástica limite para a alvenaria,  $x_s$  a posição da fibra em que se inicia o escoamento e  $x_u$  a posição do eixo neutro na base do painel, os seguintes trechos podem ser identificados (Gesteira, 2020):

- Trecho 1: Toda seção transversal está comprimida, isto é,  $(x_u \geq B)$  e o material está no estado elástico ( $\varepsilon_{m\acute{a}x} \leq \varepsilon_y$ ).
- Trecho 2: Somente uma parte  $x_u$  da seção transversal está comprimida, ou seja,  $(x_u < B)$  e o material continua no estado elástico ( $\varepsilon_{m\acute{a}x} \leq \varepsilon_y$ ).
- Trecho 3: Somente uma parte  $x_u$  da seção transversal está comprimida, isto é,  $(x_u < B)$ , porém o material se comporta no estado plástico ( $\varepsilon_{m\acute{a}x} > \varepsilon_y$ ).

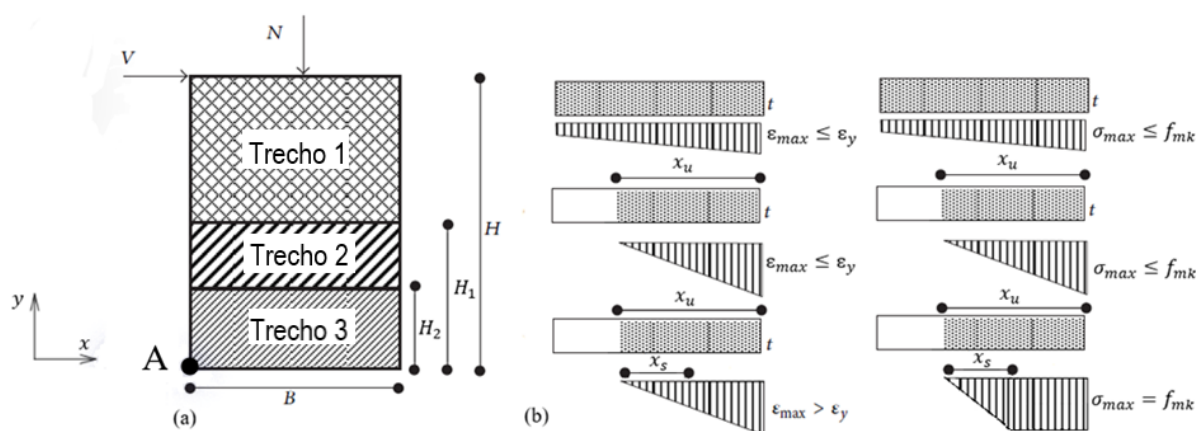


Figura 8 – (a) Painel de alvenaria composto por três trechos e (b) os estados de tensão-deformação correspondentes. Adaptado de Grande et al. (2013).

A curva carga lateral vs. deflexão lateral no topo do painel ( $V$  vs.  $D$ ) é obtida por uma análise não linear incremental, sendo que cada ponto da curva é calculado em duas etapas. A primeira etapa consiste em analisar o número de trechos no painel e os estados de tensão-deformação correspondentes para um dado valor de  $V$ , a partir do cálculo isostático. A segunda etapa avalia o deslocamento  $D$  do painel pelo método dos elementos finitos e da série de potências. É válido ressaltar que ambos os métodos consideram a teoria de Timoshenko, visto que a distorção ao cisalhamento desempenha um papel crucial na formação da resposta sísmica e do vento das estruturas de alvenaria. As matrizes de rigidez de cada elemento são avaliadas a partir das propriedades geométricas da seção transversal resistente determinada na primeira etapa.

Na segunda etapa, este trabalho analisa três tipos de modelos. O modelo 1 discretiza o painel num número de elementos finitos escolhidas pelo usuário com propriedades geométricas da seção transversal constantes. O modelo 2, proposto no presente trabalho, discretiza o painel com um elemento finito por trecho, cada um com largura da seção transversal resistente variando linearmente ao longo do elemento. Portanto, cada ponto da curva  $V$  vs.  $D$  pode empregar de 1 a 3 elementos, a depender do número de trechos existente para a carga lateral analisada. O modelo 3 também discretiza o painel com um elemento finito por trecho com largura da seção transversal resistente variando linearmente ao longo do elemento, porém neste modelo as propriedades geométricas da seção transversal são expandidas em séries de potências até uma certa ordem, onde há precisão nos resultados. As formulações foram implementadas no MATLAB (MathWorks, Inc, 2018) e testadas em exemplos obtidos na literatura.

Dessa forma, a partir desses três modelos são realizadas as seguintes considerações sobre os modos de ruptura do painel de alvenaria modelado neste trabalho:

- A ruptura por cisalhamento da junta de argamassa entre as fiadas está sendo desconsiderada, visto que não foi implementado um mecanismo para considerar o deslizamento das juntas.
- O tombamento do painel, quando o mesmo atinge a rotação limite para início de movimento de corpo rígido, também não está sendo considerado.

Na segunda etapa também é realizada a análise não linear geométrica com objetivo de analisar se os efeitos da carga axial no painel geram significativas deflexões laterais que conseqüentemente podem ocasionar no aparecimento de momentos fletores e deslocamentos adicionais denominados de segunda ordem. A análise não linear geométrica é resolvida de maneira incremental através do método de Newton-Raphson.

#### 1.4. Equilíbrio da seção transversal na base

A partir do equilíbrio do diagrama de tensão normal atuante na seção transversal na base do painel, Figura 8(b), pode-se delimitar os trechos e obter as expressões da deformação máxima,  $\varepsilon_{max}$  e da carga lateral  $V$ . O cálculo de  $V$  está fundamentado em quatro passos, além disso, ela é incrementada indiretamente a partir da variação incremental da posição da linha neutra na base do painel  $x_u$  (Figura 9). Vale ressaltar que cada incremento de carga  $V$ , é necessário para se determinar a nova posição da linha neutra ao longo do painel e assim, calcular as propriedades geométricas da seção transversal de cada elemento na análise por Métodos dos Elementos Finitos.

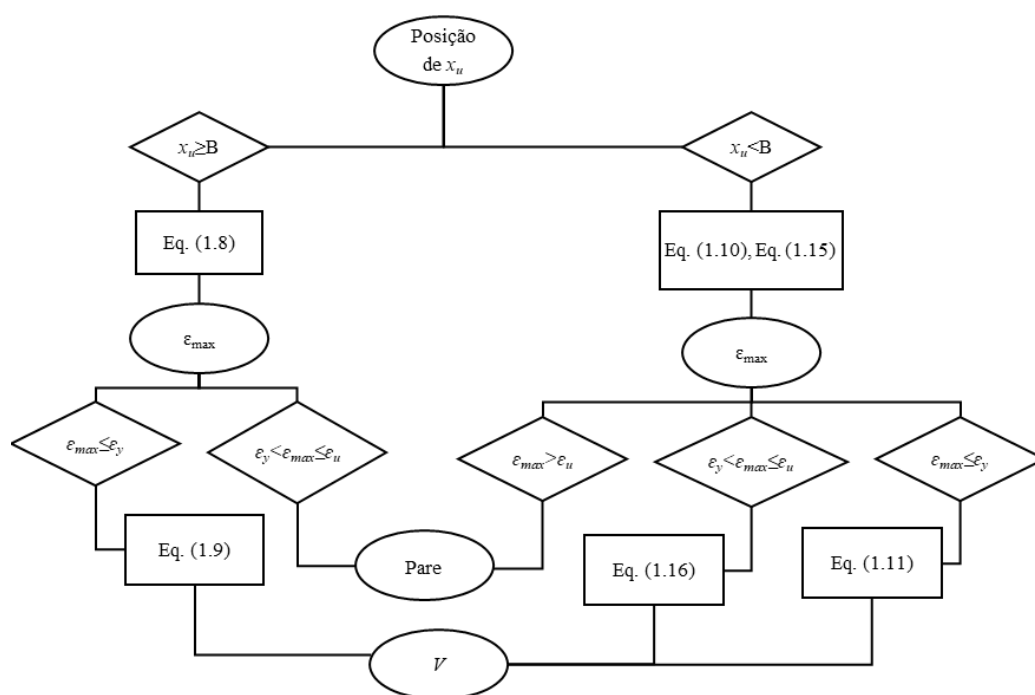


Figura 9 – Fluxograma do cálculo da carga lateral a partir da posição da linha neutra. Adaptado de Grande et al. (2013).

O primeiro passo para o cálculo da carga lateral  $V$  consiste em definir a posição da linha neutra  $x_u$ , porém como o painel possui trechos com larguras variáveis há duas alternativas para o estado de tensões na base da estrutura: toda seção está comprimida se  $x_u \geq B$  ou somente uma parte da seção comprimida se  $x_u < B$ . O segundo passo consiste na determinação da função de deformação, que conforme foi mostrado na Figura 8(b) varia linearmente ao longo do comprimento.

Assim, as equações que definem as funções de deformação são obtidas de acordo com as deformações de início e fim de cada trecho de comprimento igual a posição da linha neutra. No caso do trecho 1 ( $x_u \geq B$  e  $\varepsilon_{m\acute{a}x} \leq \varepsilon_y$ ), a função de deformação é definida considerando  $\varepsilon(0) = \varepsilon_{\min}$  e  $\varepsilon(B) = \varepsilon_{\max}$ . Já para o trecho 2 ( $x_u < B$  e  $\varepsilon_{m\acute{a}x} \leq \varepsilon_y$ ), a função de deformação é determinada considerando  $\varepsilon(B - x_u) = 0$  e  $\varepsilon(B) = \varepsilon_{\max}$ . Finalmente, no caso do trecho 3 ( $x_u < B$  e  $\varepsilon_{m\acute{a}x} > \varepsilon_y$ ), a função de deformação é definida atentando para  $\varepsilon(B - x_u + x_s) = 0$  e  $\varepsilon(B) = \varepsilon_y$ , sendo  $x_s$  a posição da fibra em que se inicia o escoamento. Isso resulta nas seguintes funções de deformação para os trechos 1, 2 e 3 respectivamente:

$$\varepsilon(x) = \frac{x(\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})}{B} + \varepsilon_{\min} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{(x - B + x_u)\varepsilon_{\max}}{x_u} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{(x - B + x_u)\varepsilon_y}{x_s} \quad (1.3)$$

Após a determinação da função da deformação, o próximo passo consiste na imposição das equações de equilíbrio das forças na direção  $y$  para obter as expressões das deformações máximas de cada trecho:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \int Et\varepsilon(x)dx - N = 0 \quad (1.4)$$

Em que  $E$  é o módulo de elasticidade da alvenaria e  $t$  corresponde a espessura da seção transversal do painel. É interessante enfatizar que a deformação máxima poderá assumir valores maiores ou menores que a deformação

de escoamento  $\varepsilon_y$ , mas não poderá exceder a deformação última  $\varepsilon_u$  que indica a condição de ruptura. Finalmente, o quarto passo consiste no cálculo do valor da carga lateral  $V$  impondo o equilíbrio de momento em torno do nó A, da Figura 8(a), conforme a Equação (1.6):

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \int Et\varepsilon(x)xdx - N\frac{B}{2} - VH = 0 \quad (1.5)$$

A seguir, os cálculos da deformação máxima  $\varepsilon_{\max}$  e da carga lateral  $V$  para cada trecho do painel:

- Trecho 1 ( $x_u \geq B$  e  $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_y$ ):

No caso do trecho 1, o somatório de forças resulta em:

$$\sum F_y \rightarrow \int_0^B Et \left( \frac{x(\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})}{B} + \varepsilon_{\min} \right) dx - N = 0 \rightarrow N = \frac{BEt(\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min})}{2} \quad (1.6)$$

Além disso, através do diagrama de deformação da Figura 8(b) é possível obter uma relação entre a deformação máxima  $\varepsilon_{\max}$  e a mínima  $\varepsilon_{\min}$ , conforme mostrado na Equação (1.7):

$$\varepsilon_{\min} = \varepsilon_{\max} \frac{(x_u - B)}{x_u} \quad (1.7)$$

Substituindo a Equação (1.7) na Equação (1.6), chega-se à expressão de deformação máxima,  $\varepsilon_{\max}$ , para o trecho 1:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{2N}{BEt \left( 1 + \left( \frac{x_u - B}{x_u} \right) \right)} \quad (1.8)$$

Já o equilíbrio de momentos em torno do nó A resulta na seguinte expressão de carga lateral  $V$ :

$$\sum M_A \rightarrow \int_0^B Et x \left( \frac{x(\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})}{B} + \varepsilon_{\min} \right) dx - N\frac{B}{2} - VH = 0 \rightarrow V = \frac{E\varepsilon_{\max} \left( 1 - \frac{(x_u - B)}{x_u} \right) tB^2}{12H} \quad (1.9)$$



- Trecho 2 ( $x_u < B$  e  $\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_y$ ):

No caso do trecho 2, o somatório de forças e momentos resulta nas seguintes expressões de deformação máxima,  $\varepsilon_{\max}$  e de carga lateral  $V$ :

$$\sum F_y \rightarrow \int_{B-x_u}^B Et \left( \frac{(x-B+x_u)\varepsilon_{\max}}{x_u} \right) dx - N = 0 \rightarrow \varepsilon_{\max} = \frac{2N}{Ex_u t} \quad (1.10)$$

$$\sum M_A \rightarrow \int_{B-x_u}^B Et x \left( \frac{(x-B+x_u)\varepsilon_{\max}}{x_u} \right) dx - N \frac{B}{2} - VH = 0 \rightarrow V = \frac{Et\varepsilon_{\max} x_u \left( \frac{B}{2} - \frac{x_u}{3} \right)}{2H} \quad (1.11)$$

- Trecho 3 ( $x_u < B$  e  $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_y$ ):

No caso do trecho 3 há a plastificação da seção transversal, portanto, o cálculo do equilíbrio de forças apresenta duas parcelas: a elástica e a plástica. Sendo que, na região plástica, a tensão é uma função constante igual a resistência à compressão da alvenaria,  $f_{mk}$ . Disso resulta:

$$\sum F_y \rightarrow \int_{B-x_u}^{B-x_u+x_s} Et x \left( \frac{(x-B+x_u)\varepsilon_y}{x_s} \right) dx + \int_{B-x_u+x_s}^B f_{mk} t dx - N = 0 \quad (1.12)$$

Além disso, por meio do diagrama de deformação da Figura 8(b) é possível obter uma relação entre a posição da fibra em que se inicia o escoamento,  $x_s$  e a posição da linha neutra  $x_u$ , conforme mostrado na Equação(1.13):

$$x_s = \frac{x_u \varepsilon_y}{\varepsilon_{\max}} \quad (1.13)$$

Como a resposta compressão do painel possui um comportamento elasto-plástico perfeito, ilustrado no diagrama de tensão da Figura 8(b), tem-se:

$$f_{mk} = E\varepsilon_y \quad (1.14)$$

Logo, substituindo as Equações (1.14) e (1.13) na Equação(1.12) e resolvendo as integrais do problema, chega-se à expressão de deformação máxima,  $\varepsilon_{\max}$ , para o trecho 3:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{f_{mk} x_u \varepsilon_y t}{2(f_{mk} x_u t - N)} \quad (1.15)$$

Já o equilíbrio de momentos resulta na seguinte equação para carga  $V$ :

$$\int_{B-x_u}^{B-x_u+x_s} Etx \frac{(x-B+x_u)\varepsilon_y}{x_s} dx + \int_{B-x_u+x_s}^B t f_{mk} x dx - N \frac{B}{2} - VH = 0 \quad (1.16)$$

$$\rightarrow V = \frac{f_{mk} x_s t \left( \frac{B}{2} + \frac{2x_s}{3} - x_u \right) + f_{mk} (x_u - x_s) t (B - x_u + x_s)}{2H}$$

A delimitação de cada trecho do painel é dada pelas alturas  $H_1$  e  $H_2$ . A altura  $H_1$  é a distância da base do painel até o ponto em que  $x_u = B$  e pode ser calculada considerando  $\varepsilon_{\min} = 0$  nas Equações (1.8) e (1.9) e substituindo  $\varepsilon_{\max}$  resultante da Equação (1.8) na (1.9), chegando a:

$$H_1 = H - \frac{NB}{6V} \quad (1.17)$$

Já a altura  $H_2$  é a distância da base do painel até o ponto em que começa a plastificação e pode ser calculada isolando  $x_u$  da Equação (1.10) e substituindo-o e na Equação (1.11), além disso como ocorre o escoamento da seção e o comportamento é elasto-plástico perfeito a tensão é uniforme e igual a resistência a compressão da alvenaria,  $f_{mk}$ .

$$H_2 = H - \frac{N}{V} \left( \frac{B}{2} - \frac{2N}{3f_{mk}t} \right) \quad (1.18)$$

## 1.5. Configurações dos trechos do painel com a mesma condição de tensão

Para cada valor de carga  $V$ , o cálculo do deslocamento  $D$  no topo do painel é feito pelo método dos elementos finitos empregando a formulação de vigas de Timoshenko. A obtenção da curva de capacidade lateral é construída a partir do processo incremental da carga lateral  $V$ , através de incrementos na posição do eixo neutro  $x_u$  e do cálculo da deflexão lateral no topo  $D$  correspondente. Esse processo continua até que a deformação última  $\varepsilon_u$  seja alcançada na base do painel.

No caso da abordagem que discretiza a estrutura em um número fixo de elementos com seção transversal constante, é necessário o cálculo da largura  $B'$  da seção transversal resistente nos nós das malhas dos elementos, para que se possa avaliar as propriedades geométricas de cada elemento. A largura  $B'$  corresponde à porção comprimida da seção transversal e está relacionada com a posição da linha neutra, que depende do trecho ao qual o nó pertence. Para o trecho 1, toda seção está comprimida e a posição da linha neutra é constante ao longo de todo o comprimento, resultando em  $B' = B$ . Contudo, para os trechos 2 e 3 a largura  $B'$  no nó é calculada por interpolação linear a partir dos valores conhecidos do início e fim de cada trecho. A seguir, as equações resultantes da interpolação linear que calcula a largura  $B'$  nos trechos 2 e 3, sendo  $c$  a distância entre o elemento e a base do painel.

- Trecho 2 ( $x_u < B$  e  $\varepsilon_{máx} \leq \varepsilon_y$ ):

$$B' = B - \frac{(H_1 - c)(B - x_u)}{H_1} \quad (1.19)$$

- Trecho 3 ( $x_u < B$  e  $\varepsilon_{máx} > \varepsilon_y$ ):

$$B' = x_y - \frac{(H_2 - c)(x_y - x_u)}{H_2}, \text{ se } c < H_2 \quad (1.20)$$

$$B' = B - \frac{(H_1 - c)(B - x_y)}{H_1 - H_2}, \text{ se } H_2 \leq c < H_1 \quad (1.21)$$

A depender da posição do eixo neutro na base  $x_u$  há três possibilidades para a configuração do painel como ilustrado na Figura 10, na qual também estão indicadas as expressões de  $B'$  no início e no fim de cada trecho, sendo  $x_y = 2N/tf_{mk}$ .

Para um dado valor de  $B'$ , as propriedades geométricas da seção geométricas da seção transversal resistente retangular são dadas por:

$$A = B't \text{ e } I = \frac{B'^3 t}{12} \quad (1.22)$$

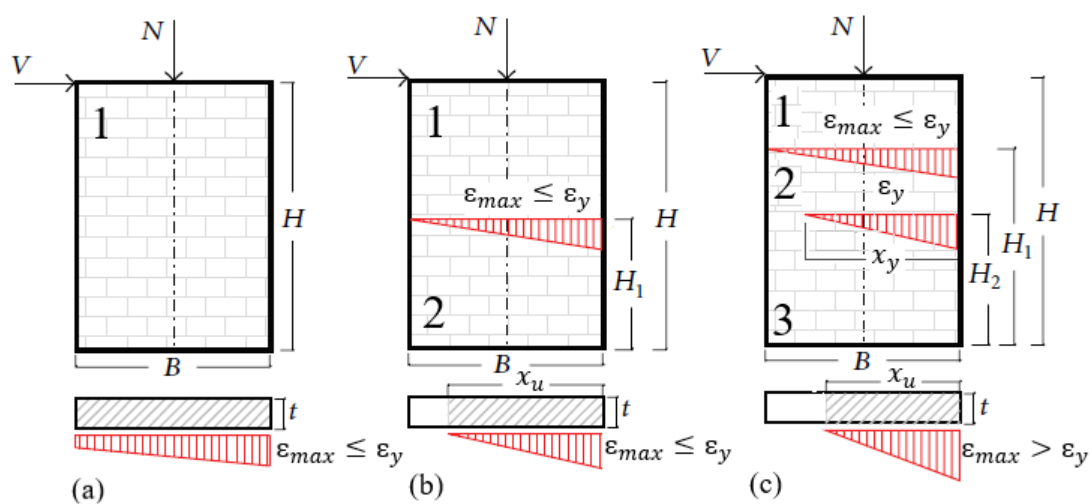


Figura 10 – Possíveis configurações de trechos do painel de alvenaria. Adaptado de Grande et al.

(2013)

## 2. ELEMENTO FINITO DE BARRA COM SEÇÃO TRANSVERSAL VARIÁVEL

Este capítulo tem como objetivo resumir os principais conceitos matemáticos envolvidos na idealização do comportamento de barras. Essa idealização é fundamentada em hipóteses simplificadoras utilizadas para o comportamento axial e para o comportamento à flexão, considerando o modelo de Timoshenko, que leva em conta deformação por cisalhamento (Martha, 2018). A teoria de Timoshenko é utilizada neste trabalho, visto que ela possui significativa relevância nos casos em que a relação comprimento/largura é baixa, ou seja, quando a estrutura possui o índice de esbeltez baixo.

Além disso, com o objetivo de diminuir o número de elementos no modelo numérico, propõe-se empregar um único elemento de barra com seção transversal variável para cada trecho do painel, considerando a largura  $B'$  variando ao longo do elemento. Para isso, primeiramente obtêm-se as soluções das equações diferenciais do equilíbrio de um elemento infinitesimal com seção transversal variável na sua configuração indeformada e deformada, considerando-se a teoria de Timoshenko. Na sequência, obtêm-se as funções de interpolação e as matrizes de rigidez elástica e geométrica. Essas matrizes são calculadas a partir das expressões genéricas do princípio dos deslocamentos virtuais através da configuração indeformada da estrutura. A configuração deformada é utilizada no cálculo dos elementos com seção transversal variável obtidos pelo método da série de potências. Esse último é relevante, uma vez que permite resolver qualquer tipo de variação da seção transversal.

Assim como, também é realizada a análise não linear geométrica com objetivo de analisar se os efeitos da carga axial no painel geram significativas deflexões laterais que conseqüentemente podem ocasionar no aparecimento de momentos fletores e deslocamentos adicionais denominados de segunda ordem. A análise não linear geométrica é resolvida de maneira incremental através do método de Newton-Raphson.

## 2.1. Idealização do comportamento de barras

Essa seção tem como objetivo resumir as principais expressões envolvidas na idealização do comportamento de barras. Essa idealização é fundamentada em hipóteses simplificadoras utilizadas para o comportamento axial e para o comportamento à flexão, considerando o modelo de Timoshenko para vigas (Martha, 2018).

### 2.1.1. Teoria de Timoshenko

A teoria de Timoshenko desconsidera que a seção transversal permanece normal ao eixo da barra que sofre flexão. Contudo, ela leva em conta que a seção permanece plana, ou seja, não há empenamento da mesma. Assim sendo, a rotação da seção transversal fica desassociada da tangente da elástica. A Figura 11 apresenta a interpretação física para a distorção de cisalhamento  $\gamma$ : a diferença entre a tangente da elástica  $dv/dx$  e a rotação devido à flexão  $\theta$  é justamente  $\gamma$  (Martha, 2018).

A teoria de viga Timoshenko é baseada em quatro hipóteses fundamentais, ilustradas na Figura 11:

- A primeira hipótese é a permanência da seção transversal plana quando há deformação da viga;
- A segunda considera que o ângulo de rotação  $\theta$  da seção transversal é muito pequeno e, portanto, pode ser aproximado pela sua tangente;
- A terceira desconsidera as deformações e tensões normais na direção do eixo  $y$  da barra;
- A quarta considera um estado plano de tensões, desconsiderando o efeito de Poisson.

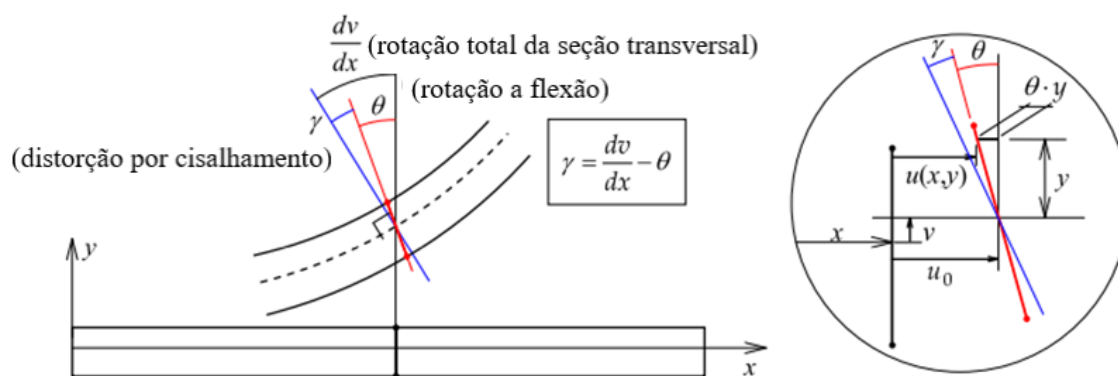


Figura 11 – Campos dos deslocamentos no interior de uma barra (Rodrigues, 2021).

O campo de deslocamentos no interior da barra é dado por:

$$u(x, y) = u_0(x) - \theta(x)y \quad (2.1)$$

$$v(x, y) = v_0(x) \quad (2.2)$$

onde  $u_0(x)$  corresponde aos deslocamentos axiais e  $v_0(x)$  aos transversais do centro de gravidade da seção transversal, ou seja, da linha elástica da barra, em  $y=0$ . Assim sendo, a partir das Equações (2.1) e (2.2) conclui-se que o campo de deslocamento de uma barra pode ser obtido a partir de  $u_0$ ,  $v_0$  e  $\theta$ , que são reunidos em um vetor de deslocamentos generalizados  $\{u\}$  dado por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_0(x) \\ \theta(x) \\ v_0(x) \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Como visto anteriormente, o campo de deformações do comportamento plano de uma barra, sucede em um campo de deformações onde há apenas as deformações normais na direção axial e distorções de cisalhamento. Logo, no caso de modelos de vigas e pórticos planos, há somente as componentes de tensão normal a seção transversal da barra e a tensão de cisalhamento. Dito isso, a Figura 12 apresenta as componentes de tensão em um elemento infinitesimal de barra.

Observa-se que  $\sigma_x$  corresponde a tensão normal na direção longitudinal da barra devido aos efeitos axial e de flexão e  $\tau_{xy}$  condiz com a tensão de cisalhamento pontual determinada pelo efeito cortante (Martha, 2018).

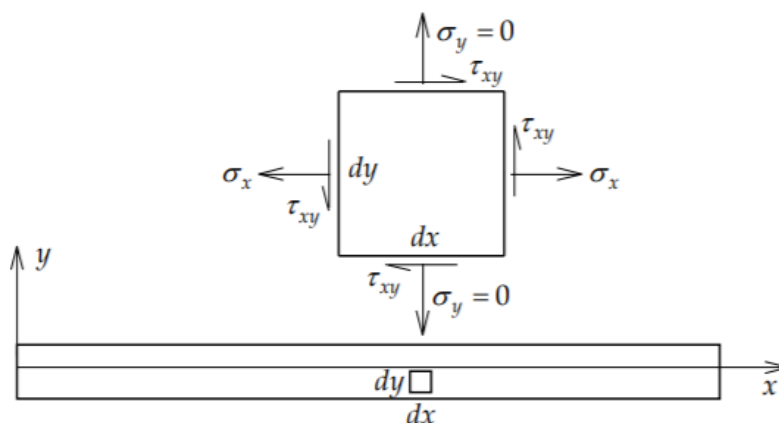


Figura 12 – Componentes de tensões em um elemento infinitesimal de barra (Martha, 2018).

### 2.1.2. Relações entre deslocamentos e deformações

Esse item apresenta as relações de compatibilidade e continuidade entre deformações e deslocamentos no interior de uma barra. Para isso, é necessário levar em conta que as deformações são pequenas, ou seja, as relações diferenciais entre deslocamentos e deformações consideram somente termos lineares. No caso do estado plano de tensões, essas relações são definidas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.6)$$

sendo que  $\varepsilon_x$  corresponde à deformação normal na direção longitudinal da barra,  $\varepsilon_y$  à deformação normal na direção transversal da barra e  $\gamma$  à distorção de cisalhamento. A Figura 13 mostra as componentes de deformação no plano atuantes num elemento infinitesimal.



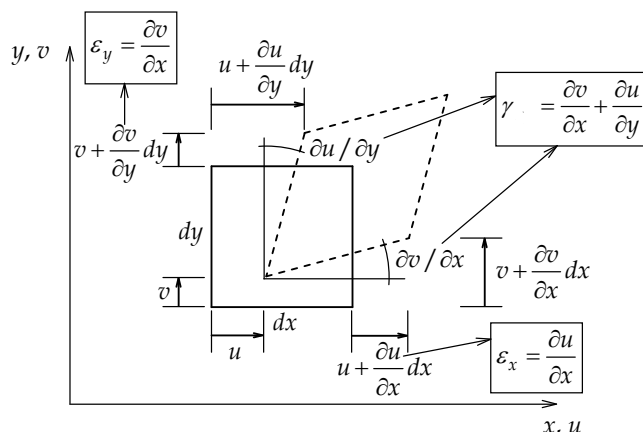


Figura 13 – Componentes lineares de um elemento infinitesimal no caso plano (Martha, 2018).

Segundo o campo de deslocamento definido nas Equações (2.1) e (2.2), as relações deformação-deslocamento podem ser reescritas como:

$$\varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} - \frac{d\theta}{dx} y \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y = 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma = \frac{dv_0}{dx} - \theta \quad (2.9)$$

Observa-se que a deformação longitudinal, Equação (2.7), possui duas parcelas; a primeira é a axial  $\varepsilon_x^a$  e a segunda é a de flexão  $\varepsilon_x^f$ , como indica as expressões a seguir:

$$\varepsilon_x^a = \frac{du_0}{dx} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_x^f = -\frac{d\theta}{dx} y \quad (2.11)$$

Vale ressaltar que a Equação (2.9) estabelece uma relação de compatibilidade entre a distorção de cisalhamento devido ao esforço cortante, a rotação da seção e o deslocamento transversal. Verifica-se que a hipótese adotada para o campo de deslocamentos resulta em uma distorção de cisalhamento

constante em cada seção transversal (Martha, 2018). Além disso, define-se a derivada de  $d\theta/dx$  como o gradiente da rotação por flexão  $\kappa^f$

Deste modo, considerando a teoria de Timoshenko, pode-se definir um vetor de deformações generalizadas dado por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ \kappa^f \\ \gamma^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 \\ 0 & d/dx & 0 \\ 0 & d/dx & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ \theta \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

De forma genérica, a expressão anterior pode ser representada como se segue:

$$\{\kappa\} = [\partial]\{u\} \quad (2.13)$$

onde  $\{\kappa\}$  equivale ao vetor de deformações generalizadas do elemento infinitesimal,  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos generalizados de um ponto no eixo da barra,  $[\partial]$  é a matriz de operadores diferenciais.

### 2.1.3. Lei constitutiva linear para o material

Para material em regime elástico-linear, isto é, de acordo com a lei de Hooke, a relação constitutiva entre tensões e deformações é dada por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.14)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma \quad (2.15)$$

sendo  $\sigma_x$  a tensão normal na seção transversal da barra (direção longitudinal),  $E$  o módulo de elasticidade,  $\varepsilon_x$  a deformação normal na direção longitudinal da barra,  $\tau_{xy}$  a tensão de cisalhamento,  $G$  o módulo de cisalhamento e  $\gamma$  a distorção de cisalhamento (Martha, 2018).

#### 2.1.4. Relações de rigidez do elemento infinitesimal de barra

São chamadas de rigidez do elemento infinitesimal da barra as relações entre deformações elementares e o correspondente esforço interno.

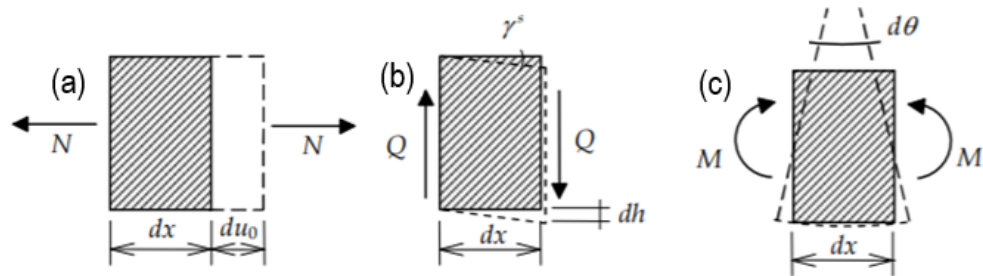


Figura 14 – Relação de Rigidez entre esforços internos e deformações (Martha, 2018).

No caso do efeito axial, Figura 14(a), a relação de rigidez entre o esforço normal e a deformação axial de um elemento infinitesimal de barra é:

$$N = EA \frac{du_0}{dx} \rightarrow N = EA \varepsilon_x^a \quad (2.16)$$

onde a rigidez axial do elemento corresponde ao produto entre o módulo de elasticidade ( $E$ ) e a área da seção transversal ( $A$ ).

Para o esforço cortante, Figura 14 (b), a relação de rigidez entre o esforço cortante e a distorção de cisalhamento, sendo a última considerada de forma integral, é:

$$Q = -G\chi A \frac{dh}{dx} \rightarrow Q = -G\chi A \gamma \rightarrow Q = -G\chi A \left( \frac{dv_0}{dx} - \theta \right) \quad (2.17)$$

Em que a rigidez transversal ao cisalhamento do elemento infinitesimal corresponde ao produto entre o módulo de cisalhamento do material ( $G$ ), a área da seção transversal ( $A$ ) e o fator de forma ( $\chi$ ) que define a área efetiva para cisalhamento da seção transversal. Esse fator tem valor de  $5/6$  para seções retangulares, que é o tipo de seção utilizada nesse trabalho.

Para o efeito de flexão, Figura 14(c), a relação de rigidez entre momento fletor e o gradiente da rotação por flexão é:

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} \rightarrow M = EI k^f \quad (2.18)$$

onde a rigidez à flexão do elemento corresponde ao produto entre o módulo de elasticidade ( $E$ ) e o momento de inércia da seção transversal ( $I$ ).

Assim sendo, as relações de rigidez dadas pelas Equações (2.16) a (2.18) podem ser reescritas em notação matricial, chegando-se a:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & -G\chi A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^a \\ k^f \\ \gamma^s \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Logo, as relações matriciais de rigidez do elemento infinitesimal da barra podem ser generalizadas através da seguinte expressão:

$$\{m\} = [S] \cdot \{k\} \quad (2.20)$$

Sendo  $\{m\}$  o vetor de esforços internos do elemento infinitesimal,  $\{k\}$  o vetor de deformações generalizadas do elemento infinitesimal e  $[S]$  a matriz de rigidez do elemento infinitesimal (Martha, 2018).

### 2.1.5. Equações de equilíbrio do elemento infinitesimal na condição indeformada

A Figura 15 mostra as forças atuantes num elemento infinitesimal de barra de pórtico plano na sua configuração indeformada.

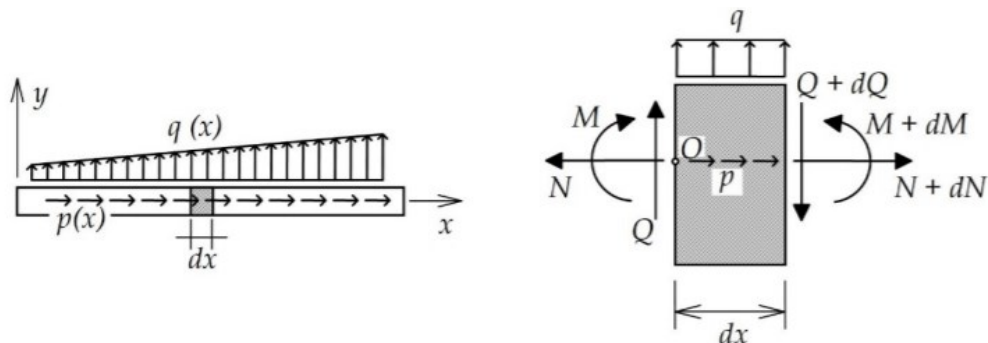


Figura 15 – Equilíbrio do elemento infinitesimal considerando a configuração original (Rodrigues,2019).

A partir do equilíbrio de forças no elemento infinitesimal considerando apenas a geometria inicial do modelo, isto é, incluindo apenas os efeitos de primeira ordem, é possível obter as seguintes expressões:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow +dN + p(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dN(x)}{dx} = -p(x) \quad (2.21)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -dQ + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dQ(x)}{dx} = q(x) \quad (2.22)$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow +dM - (Q + dQ)dx + q(x)\frac{dx^2}{2} = 0 \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad (2.23)$$

onde  $M(x)$  é o momento fletor,  $Q(x)$  o esforço cortante,  $q(x)$  a carga transversal distribuída e  $p(x)$  a carga longitudinal distribuída.

Considerando a relação de rigidez dada pela Equação (2.18) e substituindo na Equação (2.23), obtém-se:

$$EI(x)\frac{d^2\theta}{dx^2} - Q(x) = 0 \quad (2.24)$$

#### 2.1.6. Equações de equilíbrio do elemento infinitesimal na condição deformada

Na Figura 16 apresenta um elemento infinitesimal de viga na condição deformada, submetido a um carregamento distribuído  $q$  e a uma carga axial constante  $P$ .

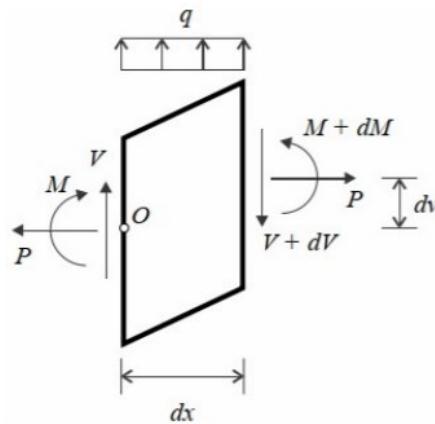


Figura 16– Equilíbrio de um elemento de viga deformado (Martha e Burgos, 2015).

A imposição do equilíbrio do elemento resulta em:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -dV + q(x)dx = 0 \rightarrow \frac{dV(x)}{dx} = q(x) \quad (2.25)$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow +dM - (V + dV)dx + q(x)\frac{dx^2}{2} - Pdv_0 = 0 \rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x) + \frac{Pdv_0(x)}{dx} \quad (2.26)$$

Onde  $v(x)$  é o deslocamento transversal,  $V(x)$  a componente vertical do esforço na seção transversal,  $P$  a componente horizontal do esforço na seção transversal.

Considerando a expressão da deflexão da linha elástica dada pela Equação (2.18) pode-se desenvolver a equação diferencial que descreve o problema:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - V(x) - P \frac{dv_0(x)}{dx} &= 0 \\ \rightarrow EI \frac{d^3\theta(x)}{dx^2} - \frac{dV(x)}{dx} - P \frac{d^2v_0(x)}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substituindo a Equação (2.25) na expressão anterior, tem-se:

$$EI \frac{d^3\theta(x)}{dx^2} - P \frac{d^2v_0(x)}{dx^2} = q(x) \quad (2.28)$$

Conforme foi dito anteriormente, a teoria de Timoshenko considera a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional às seções transversais, conforme mostra a Figura 11, portanto a projeção dos esforços é obtida usando a rotação total ao invés de apenas a rotação por flexão  $\theta$ .

A Figura 17 ilustra os esforços e deslocamentos em um elemento infinitesimal deformado de barra considerando a teoria de Timoshenko. A análise da Figura 17 revela que, para pequenos deslocamentos e rotações, os esforços solicitantes na seção transversal podem ser escritos da seguinte forma:

$$N(x) = P \cos(\theta + \gamma) - V(x) \operatorname{sen}(\theta + \gamma) = P - V(x)(\theta + \gamma) \rightarrow N(x) = P - V(x) \frac{dv_0(x)}{dx} \quad (2.29)$$

$$Q(x) = P \operatorname{sen}(\theta + \gamma) + V(x) \cos(\theta + \gamma) = P(\theta + \gamma) + V(x) \rightarrow Q(x) = P \frac{dv_0(x)}{dx} + V(x) \quad (2.30)$$

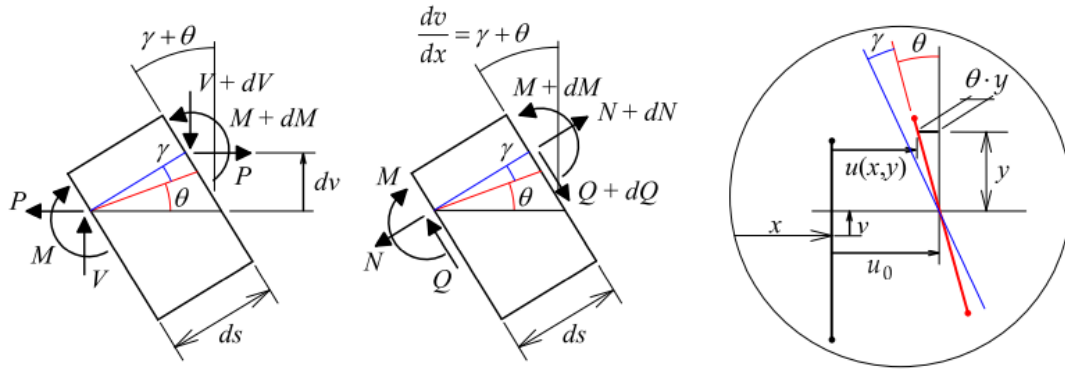


Figura 17– Esforços e deslocamento na forma clássica da viga de Timoshenko (Rodrigues, 2021).

Derivando a Equação (2.30) uma vez em relação a  $x$  e utilizando a Equação (2.25), resulta em:

$$\frac{dQ(x)}{dx} - P \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} = q(x) \quad (2.31)$$

Substituindo a Equação (2.17) e considerando que o carregamento transversal não está incluso, ou seja,  $q(x) = 0$ , chega-se a:

$$\frac{d}{dx} \left( G\chi A(x) \left( -\frac{dv_0}{dx} + \theta \right) \right) - P \frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} = 0 \quad (2.32)$$

Uma constatação importante é obtida com a substituição da Equação (2.30) na Equação (2.26), visto que isso resulta na consagrada relação fundamental da estática entre o esforço cortante e momento fletor dada pela Equação (2.23). Assim sendo, é possível reescrever a Equação (2.17) em função do momento fletor:

$$\frac{dM(x)}{dx} = G\chi A(x) \left( \theta(x) - \frac{dv_0(x)}{dx} \right) \quad (2.33)$$

Substituindo a deflexão da linha elástica expressa da Equação (2.18) na Equação (2.33), chega-se a:

$$\frac{d}{dx} \left( EI(x) \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + G\chi A(x) \left( -\theta(x) + \frac{dv_0(x)}{dx} \right) = 0 \quad (2.34)$$

## 2.2. Equações diferenciais e funções de forma

Essa seção tem como propósito definir as equações diferenciais, e suas soluções clássicas, que determinam o comportamento analítico de um elemento infinitesimal da barra para efeitos axiais e de flexão, por meio das condições de compatibilidade entre deslocamentos e deformações, das condições de equilíbrio e das leis constitutivas do material, ilustradas na seção anterior (Martha, 2018).

As equações diferenciais e conseqüentemente as suas soluções serão obtidas para barra com mísula reta (seção transversal varia linearmente ao longo da barra). É válido ressaltar que no apêndice A estão apresentadas as equações diferenciais e suas soluções para barra prismática (seção transversal constante ao longo da barra).

As equações diferenciais e suas soluções clássicas definem o comportamento analítico de um elemento infinitesimal da barra tanto para os efeitos axiais como os de flexão. A solução completa dessas equações para deslocamentos e rotações é obtida com a soma da solução homogênea com a solução particular. A primeira corresponde à condição da barra descarregada e a segunda depende do carregamento transversal (Martha, 2018). Como nesse trabalho não está incluso o carregamento transversal, ou seja,  $q(x) = 0$ , não há necessidade de calcular as soluções particulares; portanto, a solução homogênea corresponde à solução final das equações diferenciais. Se houver carregamento transversal distribuído, este será aplicado através de cargas equivalentes nodais.

Essa seção também irá demonstrar como se obter funções interpolação de uma dada função, visto que em uma análise pelo MEF, o comportamento de um sólido pode ser representado por um comportamento discreto. Normalmente, a solução discreta é obtida pelos deslocamentos nodais e a solução do problema contínuo pode ser identificada interpolando os deslocamentos nodais com a aplicação das funções de forma.

Logo, as configurações deformadas elementares de uma barra isolada decorrem da imposição individual dos deslocamentos nas suas extremidades, como é ilustrado na Figura 18.



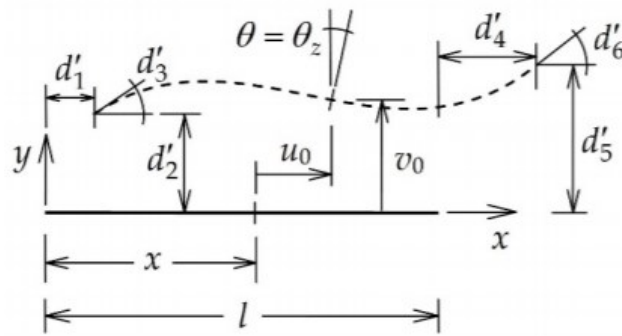


Figura 18 – Configuração deformada da barra (Martha, 2018).

As soluções homogêneas para o comportamento de barras descrevem uma configuração deformada que pode ser demonstrada em função dos seus deslocamentos nodais, utilizando as funções de interpolação. Essas equações podem ser apresentadas de forma matricial e de uma forma condensada, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} u_o(x) \\ \theta(x) \\ v_o(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^u(x) & 0 & 0 & N_4^u(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2^\theta(x) & N_3^\theta(x) & 0 & N_5^\theta(x) & N_6^\theta(x) \\ 0 & N_2^v(x) & N_3^v(x) & 0 & N_5^v(x) & N_6^v(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ d'_4 \\ d'_5 \\ d'_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_o(x) \\ \theta(x) \\ v_o(x) \end{Bmatrix} = [N] \{d'\} \quad (2.35)$$

em que  $[N]$  é a matriz que contém as funções de forma (Rodrigues, 2019),  $N^u$  corresponde as funções de forma axiais,  $N^v$  as funções de forma de deslocamento transversal e  $N^\theta$  as funções de forma de rotação. Neste trabalho, propõe-se empregar um elemento de barra com seção transversal retangular de altura variável (barra com mísula), considerando a largura  $B'$  variando linearmente ao longo do elemento (Figura 19) e que a espessura da seção transversal  $t$  permanece constante ao longo da barra.

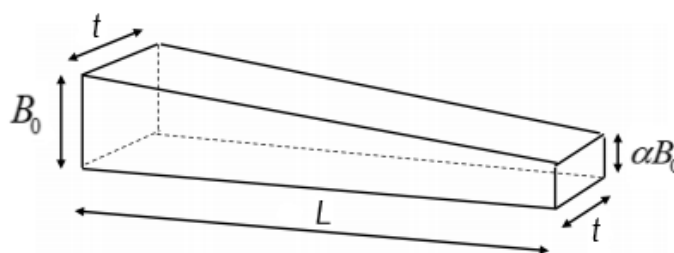


Figura 19– Elemento seção transversal variável

Assim sendo,  $B'$  é determinada de acordo com as condições de início ( $B_0$ ) e fim ( $B_1$ ) de cada elemento de comprimento  $L$ , que nesse caso equivale à altura. Vale ressaltar que, como a variação é linear, pode-se colocar  $B_1$  em função de  $B_0$  segundo a expressão  $B_1 = \alpha B_0$ :

$$B'(x) = B_0 + (B_1 - B_0) \frac{x}{L} = B_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \quad (2.36)$$

A partir da Equação (2.36), pode-se obter a função da área  $A(x)$  e da inércia à flexão  $I(x)$  da seção transversal:

$$A(x) = B'(x)t = B_0 t \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) = A_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \quad (2.37)$$

$$I(x) = \frac{B'^3(x)t}{12} = \frac{B_0^3 t \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)^3}{12} = I_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)^3 \quad (2.38)$$

### 2.2.1. Equações diferenciais para o comportamento axial

A Equação (2.16) estabelece uma relação entre o esforço normal e o deslocamento axial. Com isso, a substituição dela na Equação de equilíbrio (2.21), resulta na equação diferencial para o comportamento axial. Como o carregamento axial não está incluso, a solução completa dessa equação possui apenas a parcela homogênea, resultando em:

$$\frac{d}{dx} \left[ EA(x) \frac{du_0}{dx} \right] = 0 \quad (2.39)$$

Como no caso da barra com mísula reta a área varia ao longo do comprimento do elemento, existem duas variáveis na equação diferencial: o deslocamento axial  $u_0(x)$  e a área  $A(x)$ . Disso resulta:

$$E \left( A_0 \left( \frac{x(\alpha - 1)}{L} + 1 \right) \frac{d^2}{dx^2} u(x) + \frac{A_0(\alpha - 1)}{L} \frac{d}{dx} u(x) \right) = 0 \quad (2.40)$$

### 2.2.2. Solução das equações diferenciais para comportamento axial.

Essa seção tem como objetivo formalizar a interpolação dos deslocamentos axiais no interior da barra em função das deslocabilidades locais da barra, sendo que, o deslocamento axial  $u_0(x)$  só depende das deslocabilidades axiais  $dea_1$  e  $dea_2$  (Figura 20).

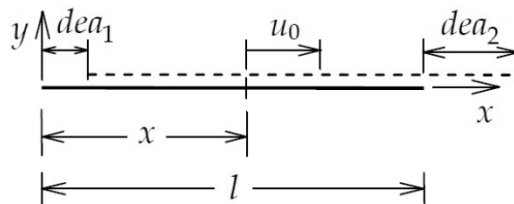


Figura 20 – Elástica axial da barra de pórtico plano e deslocabilidades axiais (Martha, 2018).

As equações que definem as funções de forma axiais são obtidas por meio das condições de contorno apropriadas. Portanto, a função de forma  $N_1^u$  é definida considerando  $u(0)=1, u(L)=0$  e a função de forma  $N_4^u$  é definida considerando  $u(0)=0, u(L)=1$ . As funções de forma axiais resultantes, no caso da barra com mísula reta, são:

$$N_1^u = \frac{\log(x-L-\alpha x) - \log(-L\alpha)}{\log(-L) - \log(-L\alpha)}, \quad N_4^u = -\frac{\log(-L) - \log(x-L-\alpha x)}{\log(\alpha)} \quad (2.41)$$

### 2.2.3. Equações diferenciais para o comportamento à flexão considerando distorção de cisalhamento.

A inclusão da distorção de cisalhamento provoca uma desassociação entre a tangente elástica e a rotação da seção transversal; com isso, não é possível deduzir uma equação diferencial em função de apenas uma variável para o comportamento à flexão (Martha, 2018). Portanto, na circunstância da barra prismática, as equações diferenciais que retratam o comportamento à flexão da viga de Timoshenko dispõem de 2 variáveis: o deslocamento transversal  $v(x)$  e a rotação  $\theta(x)$ . As equações diferenciais para barra uniforme estão apresentadas no APÊNDICE A. Entretanto, no caso de elementos com seção transversal variável, mísula reta, a área e a inércia

também variam. Assim sendo, as equações diferenciais que descrevem o comportamento à flexão da viga de Timoshenko têm quatro variáveis: o deslocamento transversal  $v(x)$ , a rotação  $\theta(x)$ , a área  $A(x)$ , e a inercia  $I(x)$  da seção transversal. Para se chegar nessas equações é necessário expressar o momento fletor e o esforço cortante em função do deslocamento transversal e da rotação. A Equação (2.18) relaciona o momento fletor com a rotação e a Equação (2.17) fornece a expressão do esforço cortante.

Substituindo a Equações (2.17) e (2.18) nas Equações (2.22) e (2.23) resulta nas equações diferenciais da Teoria de Timoshenko:

$$\frac{d}{dx} \left[ \chi GA(x) \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) \right] = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d\theta}{dx} \right] + \chi GA(x) \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (2.43)$$

Para se obter as equações diferenciais de equilíbrio da viga com seção transversal variável considerando a teoria de Timoshenko, é necessário substituir as Equações (2.37) e (2.38) nas Equações (2.42) e (2.43) resultando em:

$$\chi A_0 G \frac{d \left( \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \left( \frac{dv_0}{dx} - \theta \right) \right)}{dx} = 0 \quad (2.44)$$

$$E \frac{d \left( I_0 \left[ 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right]^3 \frac{d\theta}{dx} \right)}{dx} + \chi GA_0 \left[ 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right] \left( \frac{dv_0}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (2.45)$$

As soluções homogêneas são obtidas resolvendo as seguintes equações diferenciais.

$$E \left[ I_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)^3 \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} + \frac{3 I_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)^3 (\alpha - 1) \frac{d\theta(x)}{dx}}{L} \right] + \chi GA_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \left( \frac{dv_0(x)}{dx} - \theta(x) \right) = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{d \left( \chi GA_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \left( \frac{dv_0(x)}{dx} - \theta(x) \right) \right)}{dx} = 0 \quad (2.47)$$

Derivando a Equação (2.46) uma vez em relação a  $x$  e utilizando a Equação (2.47), obtém-se a relação:

$$E \frac{d^2 \left( I_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)^3 \frac{d\theta(x)}{dx} \right)}{dx^2} = 0 \quad (2.48)$$

Expandindo a Equação (2.48), chega se a:

$$E \left[ I_0 \left( \frac{x(\alpha - 1)}{L} + 1 \right)^3 \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} + \frac{6I_0 \left( \frac{x(\alpha - 1)}{L} + 1 \right)^2 (\alpha - 1) \frac{d^2\theta(x)}{dx^2}}{L} + \frac{6I_0 \left( \frac{x(\alpha - 1)}{L} + 1 \right) (\alpha - 1)^2 \frac{d\theta(x)}{dx}}{L^2} \right] = 0 \quad (2.49)$$

Dividindo a Equação (2.46) por  $\chi GA_0 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)$ , resulta em:

$$\frac{dv_0(x)}{dx} - \theta(x) + \frac{EI_0}{\chi GA_0} \left[ \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right)^2 \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{3 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) (\alpha - 1)}{L} \frac{d\theta(x)}{dx} \right] = 0 \quad (2.50)$$

É conveniente expressar a relação entre a inércia à flexão  $EI_0$  e a inércia ao cisalhamento  $\chi A_0 G$  em função de um parâmetro adimensional. O parâmetro adimensional  $\Omega_0$  é em geral utilizado, considerando o comprimento da barra,  $L$ .

$$\Omega_0 = \frac{EI_0}{\chi A_0 G} \quad (2.51)$$

Assim, utilizando o parâmetro  $\Omega_0$  na Equação (2.51), tem-se:

$$\frac{dv_0(x)}{dx} - \theta(x) + \Omega_0 L^2 \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \left[ \left( 1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L} \right) \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{3(\alpha - 1)}{L} \frac{d\theta(x)}{dx} \right] = 0 \quad (2.52)$$

2.2.4. Obtenção das funções de forma para o comportamento à flexão segundo o elemento de Timoshenko.

Essa seção tem como objetivo formalizar a interpolação dos deslocamentos transversais e rotações no interior de uma barra, dado que o deslocamento transversal

$v_0(x)$  e a rotação  $\theta(x)$  são definidos pelas deslocabilidades  $def_1^{xy}$ ,  $def_2^{xy}$ ,  $def_3^{xy}$ ,  $def_4^{xy}$  (Figura 21).

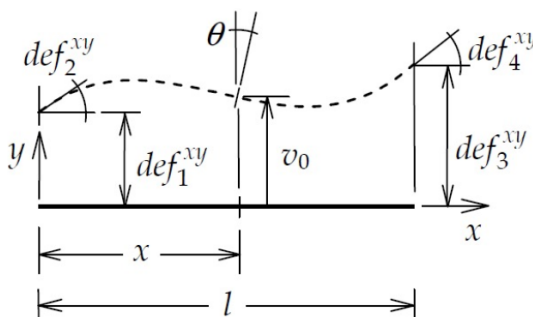


Figura 21 – Elástica transversal da barra de pórtico, deslocabilidades transversais. (Martha,2018).

As equações que definem as funções de forma para as deslocabilidades transversais no caso da barra com seção transversal variável podem ser obtidas resolvendo as Equações diferenciais (2.50) e (2.53), com base nas condições de contorno apropriadas. Logo, as funções de forma  $N_1^v$  e  $N_1^\theta$  são definidas considerando  $v(0) = 1, v(L) = 0, \theta(0) = 0$  e  $\theta(L) = 0$ ; as funções de forma  $N_2^v$  e  $N_2^\theta$  são definidas considerando  $v(0) = 0, v(L) = 0, \theta(0) = 1$  e  $\theta(L) = 0$ ; as funções de forma  $N_3^v$  e  $N_3^\theta$  são definidas considerando  $v(0) = 0, v(L) = 1, \theta(0) = 0$  e  $\theta(L) = 0$ ; as funções de forma  $N_4^v$  e  $N_4^\theta$  são definidas considerando  $v(0) = 0, v(L) = 0, \theta(0) = 0$  e  $\theta(L) = 1$  (Martha, 2018). As funções de forma resultantes estão indicadas no APÊNDICE B.

### 2.3. Matriz de rigidez

O método dos elementos finitos é um método aproximado de cálculo de sistemas contínuos, em que a estrutura é subdivida em um número finito de elementos, para descrever os campos de deslocamentos e rotações da estrutura. As matrizes desses elementos são montadas pela superposição de submatrizes dos

comportamentos elementares de deformação de uma barra. Desse modo, esta seção apresenta uma formulação matricial para a matriz de rigidez elástica e geométrica a partir das expressões do princípio dos deslocamentos virtuais e dos coeficientes de flexibilidade (Martha, 2018).

### 2.3.1. Princípio dos deslocamentos virtuais

O princípio dos deslocamentos virtuais (PDV), é fundamentado no princípio de conservação de energia. O PDV possui a seguinte proposta: “Para toda estrutura, o incremento de primeira ordem da energia de deformação é igual ao incremento de primeira ordem do trabalho externo.” A aplicação do princípio não se limita a sistemas conservativos (Vaz, 2011). Portanto, matematicamente, ele pode ser apresentado por:

$$\partial U_{\text{int}} = \partial W_{\text{ext}} \quad (2.53)$$

Em que  $\partial W_{\text{ext}}$  corresponde ao trabalho das forças e momentos externos reais sobre os deslocamentos e rotações virtuais e  $\partial U_{\text{int}}$  representa a energia de deformação interna virtual armazenada nas barras.

Considerando um campo virtual de deslocamentos generalizados em que os deslocamentos virtuais nas extremidades da barra são  $\{\partial d'\}$ , o trabalho externo virtual é:

$$\partial W_{\text{ext}} = \{\partial d'\}^T \{f'\} \quad (2.54)$$

Sendo que  $\{f'\}$  representa as forças e momentos externos reais (forças e momentos aplicados – concentrados ou distribuídos – e reações de apoio).

Já a energia de deformação interna virtual armazenada nas barras da estrutura corresponde a combinação dos esforços internos reais,  $\{m\}$ , com as equivalentes deformações generalizadas internas virtuais,  $\{\partial k\}$ .

$$\partial U_{\text{int}} = \int \{\partial k\}^T \{m\} dx \quad (2.55)$$

Considerando materiais elásticos lineares, os esforços internos reais se relacionam com as deformações generalizadas reais por meio da Equação (2.20). Tanto as deformações generalizadas reais como as virtuais podem ser associadas aos deslocamentos generalizados de um ponto no eixo de uma barra através de operadores diferenciais, conforme mostrado na Equação (2.13). Isso resulta na seguinte expressão da energia da deformação interna virtual:

$$\partial U_{\text{int}} = \int \left\{ \partial u \right\}^T [\partial]^T [S] \left\{ \partial u \right\} [\partial] dx \quad (2.56)$$

Onde  $\left\{ \partial u \right\}$  é o vetor deslocamentos generalizados de um ponto no eixo de uma barra e  $[\partial]$  é a matriz de operadores diferenciais.

### 2.3.2. Energia de deformação interna

A expressão da energia de deformação interna pode ser reescrita a partir da Equação (2.55); particularizando para pórticos planos, o vetor das deformações virtuais generalizadas  $\left\{ \partial k \right\}$  é dado pela Equação (2.20) e os esforços internos são o esforço normal  $N$ , o esforço cortante  $V$  e o momento fletor  $M$ . Disso resulta:

$$\partial U_{\text{int}} = \int \left( \partial \varepsilon_x^a N + \delta \gamma^s V + \delta \kappa^f M \right) dx \quad (2.57)$$

Para material com comportamento elástico-linear e utilizando as componentes de deformações reais e virtuais obtidas na Equação (2.12), a expressão da energia de deformação interna considerando a teoria de Timoshenko resulta em:

$$\partial U_{\text{int}} = \int \left( \frac{d\delta u_0}{dx} EA \frac{du_0}{dx} + \left( \frac{d\delta v_0}{dx} - \delta\theta \right) G\chi A \left( \frac{d\delta v_0}{dx} - \delta\theta \right) + \frac{d\delta\theta}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} \right) dx \quad (2.58)$$

Contudo, levando-se em conta os efeitos da deformação axial que foram desconsiderados na expressão anterior, a energia de deformação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\partial U_{\text{int}} = \int \left( \frac{d\delta u_0}{dx} EA \frac{du_0}{dx} + \left( \frac{d\delta v_0}{dx} - \delta\theta \right) G\chi A \left( \frac{d\delta v_0}{dx} - \delta\theta \right) + \frac{d\delta\theta}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} + \frac{d\delta v_0}{dx} P \frac{dv_0}{dx} + \frac{d\delta u_0}{dx} P \frac{du_0}{dx} \right) dx \quad (2.59)$$



### 2.3.3. Matriz de rigidez elástica

Conforme já explicitado ao longo da seção 2.2, os deslocamentos e rotações ao longo do eixo da barra são interpolados pelos deslocamentos e rotações dos nós nas extremidades da barra utilizando as funções de forma deduzidas na seção 2.2. Genericamente essas interpolações são fornecidas pela Equação (2.35):

$$\{u\} = [N]\{d'\}$$

A matriz de deformações  $[B]$  que relaciona deslocamentos e rotações dos nós de um elemento com deformações generalizadas no interior dele é deduzida reunindo a Equação (2.13) com a Equação (2.35):

$$\{\kappa\} = [\partial][N]\{d'\} \rightarrow \{\kappa\} = [B]\{d'\} \rightarrow [B] = [\partial][N] \quad (2.60)$$

Portanto, a matriz de deformações  $[B]$  pode ser obtida através do produto matricial entre a matriz de operadores diferenciais com a matriz de funções de forma, conforme a expressão (2.61):

$$[B] = \begin{bmatrix} dN_1^u/dx & 0 & 0 & dN_4^u/dx & 0 & 0 \\ 0 & dN_2^\theta/dx & dN_3^\theta/dx & 0 & dN_5^\theta/dx & dN_6^\theta/dx \\ 0 & (dN_2^v/dx) - N_2^\theta & (dN_3^v/dx) - N_3^\theta & 0 & (dN_5^v/dx) - N_5^\theta & (dN_6^v/dx) - N_6^\theta \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Por meio da Equação (2.53) do princípio do deslocamento virtual, ou seja, igualando  $\partial W_{ext}$  da Equação (2.54) com  $\partial U_{int}$  da Equação (2.56), e utilizando a matriz de deformações  $[B]$ , chega-se a:

$$\{f'\}\{d'\} = \{d'\}^T \int_0^L [B]^T [S][B] dx \{d'\} \quad (2.62)$$

Na equação anterior, os vetores das deslocabilidades real e virtual são retirados da integral, visto que independem da variável  $x$ . Os deslocamentos virtuais  $\{\partial d'\}$ , podem ser cancelados porque são arbitrários e podem ser diferentes de zero. Assim, a Equação (2.62) se resume a:

$$\{f'\} = \int_0^L [B]^T [S] [B] dx \{d'\} \rightarrow [k'] = \int_0^L [B]^T [S] [B] dx \rightarrow \{f'\} = [k'] \{d'\} \quad (2.63)$$

Onde  $\{f'\}$  equivale as forças nodais no elemento,  $\{d'\}$  são os deslocamentos nodais,  $[k']$  é a matriz de rigidez do elemento que representa o coeficiente entre as forças nodais e os deslocamentos nodais para um elemento de pórtico e  $[S]$  corresponde à matriz de rigidez do elemento infinitesimal da barra dada pela Equação (2.19).

Para a situação da barra com seção transversal variável, a matriz de rigidez do elemento infinitesimal, Equação (2.19), é reescrita, visto que a área e a inércia variam ao longo do comprimento do elemento, além disso foi utilizado o parâmetro  $\Omega_0$  da Equação (2.51), conforme mostrado na Equação (2.64).

$$[S] = \begin{bmatrix} EA_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)}{L^2 \Omega_0} \end{bmatrix}, \chi GA_0 = \frac{EI_0}{\Omega_0 L^2} \quad (2.64)$$

Substituindo-se as funções de forma para seção transversal variável na matriz de deformações e resolvendo as integrais do problema, encontra-se a matriz de rigidez elástica de um elemento plano para barra com seção transversal retangular, com altura variando linearmente, considerando a teoria de flexão de Timoshenko, Equação (2.65).

Vale ressaltar que, quando  $\Omega_0 = 0$ , a Equação (2.65) se transforma na matriz de rigidez de Euler-Bernoulli para seção transversal variável, e se além disso aplicar o limite para  $\alpha \rightarrow 1$ , a Equação (2.65) coincide com a já estabelecida matriz de rigidez de Euler-Bernoulli para seção uniforme.

$$\begin{aligned}
[K_E] = & \begin{bmatrix} \frac{A_0 E(\alpha-1)}{L \log(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_0(\alpha-1)^3(\alpha+1)}{L^3(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{EI_0(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} \\ 0 & \frac{EI_0(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{2EI_0\alpha^2}{L(\alpha+1)} + \frac{EI_0(\alpha-1)^3}{L(\alpha+1)(\log(\alpha)(\Omega_0+\alpha-\Omega_0\alpha-\Omega_0\alpha^2+\Omega_0\alpha^3+1)-2\alpha+2)} \\ \frac{A_0 E(\alpha-1)}{L \log(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_0(\alpha-1)^3(\alpha+1)}{L^3(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{EI_0(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} \\ 0 & \frac{EI_0\alpha(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{EI_0\alpha(\alpha-1)^3}{L(\alpha+1)(\log(\alpha)(\Omega_0+\alpha-\Omega_0\alpha-\Omega_0\alpha^2+\Omega_0\alpha^3+1)-2\alpha+2)} - \frac{2EI_0\alpha^2}{L(\alpha+1)} \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \frac{A_0 E(\alpha-1)}{L \log(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_0(\alpha-1)^3(\alpha+1)}{L^3(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{EI_0\alpha(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} \\ 0 & \frac{EI_0(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{EI_0\alpha(\alpha-1)^3}{L(\alpha+1)(\log(\alpha)(\Omega_0+\alpha-\Omega_0\alpha-\Omega_0\alpha^2+\Omega_0\alpha^3+1)-2\alpha+2)} - \frac{2EI_0\alpha^2}{L(\alpha+1)} \\ \frac{A_0 E(\alpha-1)}{L \log(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI_0(\alpha-1)^3(\alpha+1)}{L^3(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{EI_0\alpha(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} \\ 0 & \frac{EI_0\alpha(\alpha-1)^3}{L^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} & \frac{2EI_0\alpha^2}{L(\alpha+1)} + \frac{EI_0\alpha^2(\alpha-1)^3}{L(\alpha+1)(\log(\alpha)(\Omega_0+\alpha-\Omega_0\alpha-\Omega_0\alpha^2+\Omega_0\alpha^3+1)-2\alpha+2)} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

## 2.4. Análise não linear geométrica

Grande parte das estruturas em engenharia civil se comporta de maneira linear elástica durante o decorrer de sua vida útil. Para essas estruturas, a análise linear apresenta resultados aceitáveis que são suficientes para uma análise estrutural. Por outro lado, em alguns casos faz-se necessária uma análise mais complexa. Um exemplo é a consideração dos efeitos de não linearidade geométrica. Esses últimos são decorrentes da consideração de grandes deslocamentos para um modelo estrutural, de tal maneira que as condições de equilíbrio são impostas considerando a geometria atualizada do modelo estrutural pelos deslocamentos e rotações provocadas pelas solicitações externas aplicadas. (Martha, 2018).

Em função da consideração dos efeitos das deformações e deslocamentos na formulação das equações de equilíbrio na análise linear de segunda ordem. A expressão da matriz de rigidez elástica é alterada para a inclusão da matriz de rigidez geométrica  $K_G$ .

$$(K_E + K_G)d = F \quad (2.66)$$

Em que a matriz de rigidez geométrica  $K_G$  representa a mudança de rigidez da estrutura proveniente de tais efeitos. A solução do problema considerando a não linearidade geométrica é resolvida de maneira incremental pelo método de Newton-Raphson, em que, cada passo da solução é resolvido um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$(K_E + K_G)\partial d = \partial f \quad (2.67)$$

A partir da expressão anterior, também é possível determinar o fator de carga crítica  $\lambda$ . Esse fator representa a majoração das cargas nodais  $F$  essencial para determinar a flambagem elástica na estrutura. Para esse fim, é preciso reescrever a Equação (2.67), como:

$$(K_E + \lambda K_G)\partial d = 0 \quad (2.68)$$

A questão expressa na Equação (2.68) consiste em um problema geral de autovalor cuja solução fornece  $n$  autovalores  $\lambda$  e  $n$  autovetores  $\phi$  que representam  $\delta d$ , sendo  $n$  a dimensão das matrizes  $K_E$  e  $K_G$ . O menor autovalor calculado é o fator de carga crítica e o autovetor associado ao menor autovalor é o modo de flambagem que representa o modo ou a forma de flambagem da estrutura (Vaz, 2011).

A soma das matrizes de rigidez elástica e geométrica pode ser obtida através da substituição das expressões  $u(x)$ ,  $v(x)$  e  $\theta(x)$  que são dadas conforme a Equação (2.35) na expressão (2.59), após a manipulação das equações obtém-se a

$$\begin{aligned} \partial U_{\text{int}} = & \int_0^L EA \left( \frac{d(N_u^T)}{dx} \frac{dN_u}{dx} \right) dx + \int_0^L EI \left( \frac{d(N_\theta^T)}{dx} \frac{dN_\theta}{dx} \right) dx + \int_0^L G\chi A \left( \frac{d(N_v^T)}{dx} - N_\theta^T \right) \left( \frac{d(N_v)}{dx} - N_\theta \right) dx \\ & + \int_0^L P \left( \frac{d(N_v^T)}{dx} \frac{dN_v}{dx} \right) dx + \int_0^L P \left( \frac{d(N_u^T)}{dx} \frac{dN_u}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (2.69)$$

seguinte formulação matricial para as equações de equilíbrio:

Em que a matriz de rigidez elástica do elemento formada pelos três primeiros termos de  $\partial U_{\text{int}}$  é dada por:

$$K_{E_{i,j}} = \int_0^L EA \left( \frac{d(N_i^T(x))}{dx} \frac{dN_j(x)}{dx} \right) dx \quad (2.70)$$

$$K_{E_{i,j}} = \int_0^L EI \left( \frac{d(N_{i,j}^T)}{dx} \frac{dN_{i,j}}{dx} \right) dx + \int_0^L G\chi A \left( \frac{d(N_{i,j}^T)}{dx} - N_{i,j}^T \right) \left( \frac{d(N_{i,j})}{dx} - N_{i,j} \right) dx \quad (2.71)$$

A Equação (2.70) vale para  $i$  e  $j$  iguais a 1 e 4. A Equação (2.71) vale para  $i$  e  $j$  iguais a 2, 3, 5 e 6, os termos não incluídos nas expressões anteriores são nulos. As matrizes de rigidez resultantes das equações anteriores estão apresentadas na Equação (A.23) e na Equação (2.65), a primeira refere-se ao caso da barra prismática e a segunda da barra com seção transversal variável.

Já a matriz de rigidez geométrica formada pelos dois últimos termos de  $\partial U_{\text{int}}$  é dada por:

$$K_{G_{i,j}} = \int_0^L P \left( \frac{d(N_{i,j}^T)}{dx} \frac{dN_{i,j}}{dx} \right) dx \quad (2.72)$$

Substituindo-se as funções de forma para barra com seção transversal variável e resolvendo-se as integrais do problema, encontra-se a matriz de rigidez geométrica do elemento, baseada na teoria de flexão de Timoshenko:

$$K_G = P \begin{bmatrix} k_{g11} & 0 & 0 & -k_{g11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{g22} & k_{g23} & 0 & -k_{g22} & k_{g26} \\ 0 & k_{g23} & k_{g33} & 0 & -k_{g23} & k_{g36} \\ -k_{g11} & 0 & 0 & k_{g11} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{g22} & -k_{g23} & 0 & k_{g22} & -k_{g26} \\ 0 & k_{g26} & k_{g36} & 0 & -k_{g26} & k_{g66} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Vale ressaltar que, quando  $\Omega_0 = 0$  a Equação (2.73) se transforma na matriz de rigidez geométrica de Euler-Bernoulli para seção transversal variável, e se além disso aplicar o limite de  $\alpha$  tendendo a 1, a Equação (2.73) coincide matriz de rigidez geométrica de Euler-Bernoulli para seção uniforme.

$$k_{g^{11}} = \frac{(\alpha-1)^2}{L\alpha \log(\alpha)}$$

$$k_{g^{22}} = \frac{(\alpha-1)^6 \left( \frac{4}{(\alpha-1)^4} - \frac{1}{3(\alpha-1)} + \frac{\Omega_0^2 + \Omega_0 + \frac{1}{3}}{\alpha} + \frac{4\Omega_0 + \frac{1}{3}}{(\alpha-1)^2} + \Omega_0^2(\alpha+2) \right) - 2\log(\alpha)(\alpha^2-1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}{L(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)^2}$$

$$k_{g^{23}} = \frac{1}{\alpha^2-1} - \frac{(\alpha-1)(\alpha-3\Omega_0-3\Omega_0\alpha+3\Omega_0\alpha^2+3\Omega_0\alpha^3+11)}{6(\alpha+1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} + \frac{(\alpha-1)^4(3\Omega_0^2\alpha^4-6\Omega_0^2\alpha^2+3\Omega_0^2+3\Omega_0\alpha^2+6\Omega_0\alpha+3\Omega_0+1)}{3\alpha(\alpha+1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)^2}$$

$$k_{g^{26}} = \frac{(\alpha-1)^4(3\Omega_0^2\alpha^4-6\Omega_0^2\alpha^2+3\Omega_0^2+3\Omega_0\alpha^2+6\Omega_0\alpha+3\Omega_0+1)}{3\alpha(\alpha+1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)^2} - \frac{1}{\alpha^2-1} - \frac{(\alpha-1)(3\Omega_0+11\alpha+3\Omega_0\alpha-3\Omega_0\alpha^2-3\Omega_0\alpha^3+1)}{6(\alpha+1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)}$$

$$k_{g^{33}} = \frac{L(\alpha^2+2\alpha+3)}{3(\alpha-1)(\alpha+1)^2} - \frac{L(\alpha-1)(\alpha-3\Omega_0-3\Omega_0\alpha+3\Omega_0\alpha^2+3\Omega_0\alpha^3+5)}{3(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)} + \frac{(\alpha-1)^4(3\Omega_0^2\alpha^4-6\Omega_0^2\alpha^2+3\Omega_0^2+3\Omega_0\alpha^2+6\Omega_0\alpha+3\Omega_0+1)}{3\alpha(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)^2}$$

$$k_{g^{36}} = \frac{L(\alpha-1)^4(3\Omega_0^2\alpha^4-6\Omega_0^2\alpha^2+3\Omega_0^2+3\Omega_0\alpha^2+6\Omega_0\alpha+3\Omega_0+1)}{3(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)^2} - \frac{L(\alpha-1)(\alpha-3\Omega_0-3\Omega_0\alpha+3\Omega_0\alpha^2+3\Omega_0\alpha^3+5)}{3(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)}$$

$$- \frac{L\alpha}{3(\alpha+1)^2} - \frac{L(\alpha-1)(3\Omega_0+10\alpha-6\Omega_0\alpha^2+3\Omega_0\alpha^4+\alpha^2+1)}{6(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)}$$

$$k_{g^{66}} = \frac{L\alpha(\alpha-1)^4(3\Omega_0^2\alpha^4-6\Omega_0^2\alpha^2+3\Omega_0^2+3\Omega_0\alpha^2+6\Omega_0\alpha+3\Omega_0+1)}{3(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)^2} - \frac{L\alpha(3\alpha^2+2\alpha+1)}{3(\alpha-1)(\alpha+1)^2} - \frac{L\alpha(\alpha-1)(3\Omega_0+5\alpha+3\Omega_0\alpha-3\Omega_0\alpha^2-3\Omega_0\alpha^3+1)}{3(\alpha+1)^2(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2-2\Omega_0\alpha+\Omega_0+1)-2\alpha+2)}$$

## 2.5. Cargas nodais equivalentes

Como foi dito anteriormente, a discretização de um modelo estrutural dentro do contexto do método da rigidez direta está baseada na representação do comportamento contínuo do modelo por parâmetros de rigidez e de solicitações externas (carregamentos) nos seus nós (pontos de discretização). As solicitações externas atuantes no modelo estrutural são transformadas em cargas nodais combinadas, que resultam da superposição das cargas nodais propriamente ditas com as cargas equivalentes nodais. Logo, essa seção mostra como um carregamento atuante no interior de um elemento da barra é modificado em cargas equivalentes nodais (Martha, 2018).

### 2.5.1. Princípio dos deslocamentos virtuais

O carregamento nodal equivalente pode ser obtido utilizando o princípio dos deslocamentos virtuais. Para exemplificar tal procedimento, considere a barra biengastada da Figura 22.

Nesta Figura 22 podem ser observados dois distintos sistemas: o sistema A, composto pela barra biengastada com o carregamento externo aplicado e as devidas reações de apoio; e o sistema B, que libera o vínculo correspondente à reação vertical no ponto 1, e a ele aplica uma força  $V_B^1$ .

Com a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, o resultado da soma do trabalho realizado por  $f_2$  de A no deslocamento unitário B com o trabalho realizado por  $q(x)$  de A na elástica  $v_0^B(x)$  deve ser nulo, uma vez que as forças e momentos do sistema B não realizam trabalho sobre os deslocamentos (nulos) do sistema A (Burgos, 2020).



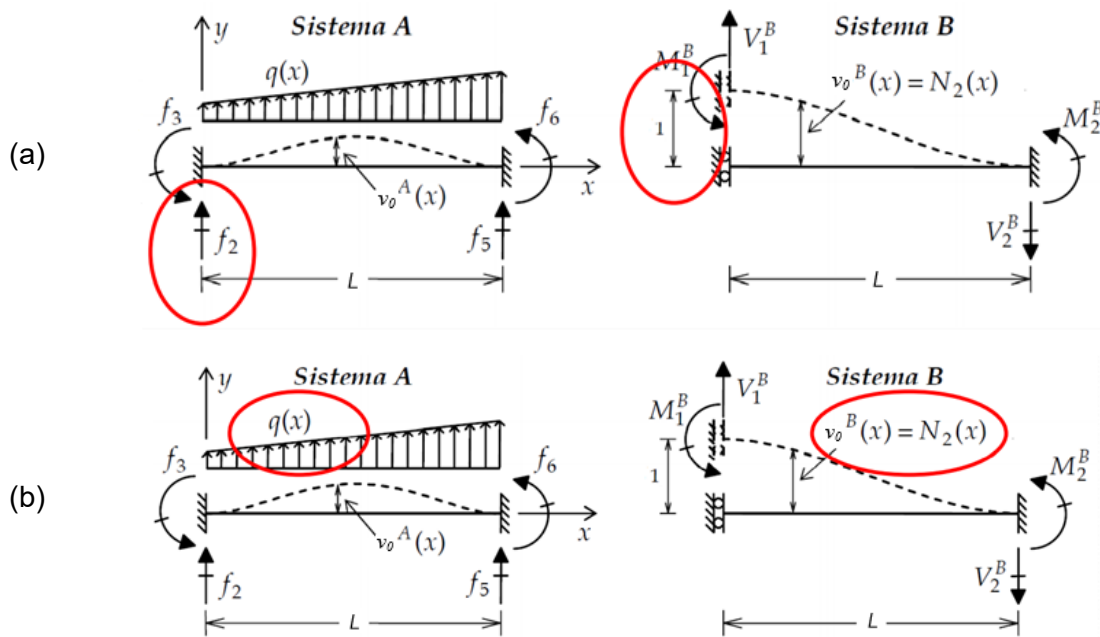


Figura 22 – Aplicação do PDV para cálculo do carregamento nodal equivalente (Martha, 2018)

Dessa forma:

$$f_2 \cdot 1 + \int_0^l q(x) \cdot N_2(x) dx = 0 \rightarrow f_2 = - \int_0^l q(x) \cdot N_2(x) dx \quad (2.74)$$

De forma geral:

$$f_i = - \int_0^l q(x) \cdot N_i(x) dx \quad (2.75)$$

Neste trabalho foram empregados apenas carregamentos uniformemente distribuídos, conforme é apresentado na Figura 23.

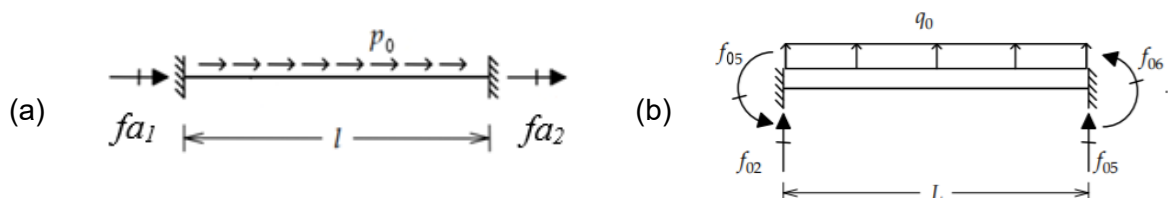


Figura 23 – Carregamento uniformemente distribuído (a) axial, (b) transversal. (Rodrigues, 2019).

Assim, substituindo-se as funções de forma na Equação (2.75) obtém-se as cargas nodais equivalentes para o caso de carregamento constante, conforme a Equação (2.76) para carregamento axial e a Equação (2.77) para o transversal:

$$f_{a_1} = -\frac{Lp_0}{\log(\alpha)} + \frac{Lp_0}{\alpha-1} \qquad f_{a_2} = -\frac{L\alpha p_0}{\alpha-1} + \frac{Lp_0}{\log(\alpha)} \quad (2.76)$$

$$f_{01} = \frac{Lq_0(\alpha-1)^2(2\Omega_0^2\alpha^4 - 4\Omega_0^2\alpha^2 + 2\Omega_0^2 + 3\Omega_0\alpha^2 + 6\Omega_0\alpha + 3\Omega_0 + 1)}{2(\alpha+1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}$$

$$-\frac{Lq_0(\Omega_0 + 2\alpha - \Omega_0\alpha - \Omega_0\alpha^2 + \Omega_0\alpha^3 + 1)}{(\alpha^2 - 1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}$$

$$f_{02} = -\frac{\frac{L^2\alpha^2q_0(\log(\alpha)-4)}{2} - \frac{L^2q_0(\log(\alpha)+4)}{2} + \frac{L^2\alpha q_0(2\log(\alpha)^2+8)}{2}}{\log(\alpha)(\alpha-1)(\alpha+1)(\log(\alpha) - 2\alpha + \Omega_0 \log(\alpha) + \alpha \log(\alpha) - \Omega_0\alpha^2 \log(\alpha) + \Omega_0\alpha^3 \log(\alpha) - \Omega_0\alpha \log(\alpha) + 2)}$$

$$-\frac{L^2q_0(-2\alpha^3 + 2\alpha^2 \log(\alpha)^2 - \alpha^2 \log(\alpha) + 6\alpha^2 - 6\alpha + \log(\alpha) + 2)}{2\log(\alpha)(\alpha-1)^3(\alpha+1)} \quad (2.77)$$

$$f_{03} = \frac{L\alpha q_0(\Omega_0 + \alpha - \Omega_0\alpha - \Omega_0\alpha^2 + \Omega_0\alpha^3 + 2)}{(\alpha^2 - 1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}$$

$$-\frac{Lq_0(\alpha-1)^2(2\Omega_0^2\alpha^4 - 4\Omega_0^2\alpha^2 + 2\Omega_0^2 + 3\Omega_0\alpha^2 + 6\Omega_0\alpha + 3\Omega_0 + 1)}{2(\alpha+1)(\log(\alpha)(\Omega_0 + \alpha - \Omega_0\alpha - \Omega_0\alpha^2 + \Omega_0\alpha^3 + 1) - 2\alpha + 2)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}$$

$$f_{04} = \frac{L^2\alpha q_0(-\alpha^3 \log(\alpha) + 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\alpha \log(\alpha)^2 + \alpha \log(\alpha) + 6\alpha - 2)}{2\log(\alpha)(\alpha-1)^3(\alpha+1)}$$

$$-\frac{\frac{L^2\alpha^3q_0(\log(\alpha)-4)}{2} - \frac{L^2\alpha q_0(\log(\alpha)+4)}{2} + \frac{L^2\alpha^2q_0(2\log(\alpha)^2+8)}{2}}{\log(\alpha)(\alpha-1)(\alpha+1)(\log(\alpha) - 2\alpha + \Omega_0 \log(\alpha) + \alpha \log(\alpha) - \Omega_0\alpha^2 \log(\alpha) + \Omega_0\alpha^3 \log(\alpha) - \Omega_0\alpha \log(\alpha) + 2)}$$

Nota-se que, quando é aplicado o limite de  $\alpha$  tendendo a 1, as Equações (2.76) e (2.77) se modificam nas cargas nodais equivalentes nodais para seção uniforme. Além disso, como à carga uniformemente distribuída não depende do cisalhamento, não existe diferença entre as teorias de flexão de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

## 2.6. Elemento finito baseado em séries de potência

Nesta seção foi utilizada uma abordagem baseada em expansões de série de potências para obter as matrizes de rigidez elástica e geométrica. Essa abordagem foi empregada, visto que ela permite uma variação qualquer da seção transversal. De acordo com essa metodologia, os deslocamentos, a área e o momento de inércia da seção transversal são aproximados por uma série de potências para um número escolhido de termos.

A Figura 24 ilustra uma barra com seção transversal não uniforme de comprimento  $L$  submetida a um carregamento axial  $P$  nas duas extremidades sem excentricidade. Além disso, essa imagem também revela que foi utilizado o sistema cartesiano de eixos, em que o  $x$  representa o eixo longitudinal, o  $y$  corresponde a direção lateral e o eixo  $z$  possui a mesma direção que a espessura da barra. A origem dos eixos se localiza no centroide da seção transversal. É válido ressaltar que, a teoria de Timoshenko foi adotada com o objetivo de considerar as influências da deformação por cisalhamento sobre a barra (Soltani M. , 2019).

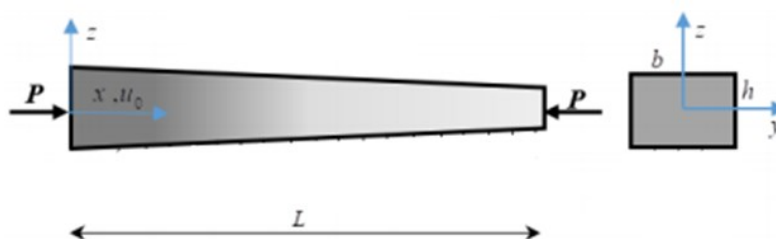


Figura 24 – Barra não prismática submetida a carregamento axial (Soltani, 2019).

### 2.6.1. Equações governantes

As Equações (2.39), (2.32) e (2.34) representam as equações de equilíbrio para barras não prismáticas. As Equações (2.32) e (2.34) correspondem às equações diferenciais devido à presença do deslocamento transversal e da rotação,  $(v_0, \theta)$ . Enquanto, a Equação (2.39) é a equação diferencial para o comportamento axial; essa expressão está desacoplada das demais e pode ser desenvolvida de forma independente, visto que não possui influência na análise da estabilidade linear da barra de Timoshenko.

A formulação não linear geométrica para barras de Timoshenko com seção transversal variável obtidas pela configuração deformada, ou seja, pelas Equações (2.33) e (2.34), só podem ser solucionadas através de procedimentos numéricos como o método baseado em expansões de série de potências. Como foi dito anteriormente, este método numérico aproxima através de série de potências para um número escolhido de termos as componentes do deslocamento e as propriedades geométricas.

### 2.6.2. Método numérico

No caso das Equações (2.39), (2.32) e (2.34) as propriedades geométricas da seção transversal variam ao longo do comprimento, assim sendo, elas são reescritas na forma de série de potência como se segue:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \qquad I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i x^i \qquad (2.78)$$

Onde  $A_i$  e  $I_i$  são os coeficientes da série de potência de ordem  $i$ . Com o objetivo de facilitar o cálculo das Equações (2.39), (2.32) e (2.34), uma variável adimensional  $\varepsilon = x/L$  é introduzida; portanto a Equação (2.78) pode ser reescrita:

$$A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon^i L^i \qquad I(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i \varepsilon^i L^i \qquad (2.79)$$

Os resultados da substituição da Equação (2.79) e da variável adimensional  $\varepsilon$  nas Equações (2.39), (2.32) e (2.34) são apresentados em Equação (2.80a), (2.80b) e (2.80c):

$$\frac{E}{L^2} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon^i L^i \frac{du_0}{d\varepsilon} \right] = 0 \qquad (2.80a)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ E \left( \sum_{i=0}^{\infty} I_i \varepsilon^i L^i \right) \frac{d\theta}{d\varepsilon} \right] + G\chi L \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon^i L^i \right) \left( -L\theta + \frac{dv_0}{d\varepsilon} \right) = 0 \qquad (2.80b)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ G\chi \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varepsilon^i L^i \right) \left( -\frac{dv_0}{d\varepsilon} + L\theta \right) \right] - P \frac{d^2 v_0}{d\varepsilon^2} = 0 \qquad (2.80c)$$

É importante observar que, a regra da cadeia foi utilizada nas expressões anteriores, conforme a expressão (2.81).

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} &= \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\varepsilon} \rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} = \frac{d}{dx} L \rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\varepsilon} \\ \varepsilon &= \frac{x}{L} \rightarrow x = \varepsilon L \rightarrow dx = L d\varepsilon \rightarrow \frac{dx}{d\varepsilon} = L \end{aligned} \qquad (2.81)$$

Em seguida, com o intuito de simplificar o cálculo das equações de equilíbrio, novas variáveis são introduzidas:

$$A_i^* = A_i L^i \qquad I_i^* = I_i L^i \qquad (2.82)$$

As variáveis apresentadas na Equação (2.82) são adicionadas às Equações (2.80a), (2.80b) e (2.80c). Portanto, estas expressões podem ser reescritas conforme as expressões

$$\frac{E}{L^2} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^* \varepsilon^i \frac{du_0}{d\varepsilon} \right] = 0 \qquad (2.83a)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ E \left( \sum_{i=0}^{\infty} I_i^* \varepsilon^i \right) \frac{d\theta}{d\varepsilon} \right] + G\chi L \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^* \varepsilon^i \right) \left( -L\theta + \frac{dv_0}{d\varepsilon} \right) = 0 \qquad (2.83b)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ G\chi \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^* \varepsilon^i \right) \left( -\frac{dv_0}{d\varepsilon} + L\theta \right) \right] - P \frac{d^2 v_0}{d\varepsilon^2} = 0 \qquad (2.83c)$$

As soluções gerais para os parâmetros de deslocamento axial  $u_0(\varepsilon)$ , vertical  $v_0(\varepsilon)$  e a rotação  $\theta(\varepsilon)$  podem ser aproximadas na forma de série de potência da seguinte maneira:

$$u_0(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i \varepsilon^i \qquad v_0(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i \qquad \theta(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \varepsilon^i \qquad (2.84)$$

Em que  $\tau_i$ ,  $a_i$  e  $b_i$  são os coeficientes desconhecidos da série de potência de ordem  $i$ . Substituindo as Equações (2.84) nas Equações (2.83a), (2.83b) e (2.83c), tem-se:

$$\frac{E}{L^2} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^* \varepsilon^i \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \tau_{(k+1)} \varepsilon^k \right) \right] = 0 \qquad (2.85a)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ E \left( \sum_{j=0}^{\infty} I_j^* \varepsilon^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) b_{(k+1)} \varepsilon^k \right) \right] + G\chi L \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i^* \varepsilon^i \right) \left( -L \left( \sum_{k=0}^{\infty} k b_k \varepsilon^k \right) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{(k+1)} \varepsilon^k \right) \right] = 0 \qquad (2.85b)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[ G\chi \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j^* \varepsilon^j \right) \left( - \left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{(k+1)} \varepsilon^k \right) + L \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varepsilon^k \right) \right] - P \left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{(k+2)} \varepsilon^k \right) = 0 \qquad (2.85c)$$

No caso da Equação (2.85a), são realizadas as seguintes simplificações:

$$\frac{E}{L^2} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} A_i^*(k+1)\tau_{(k+1)} \right\} \varepsilon^k \right] = 0 \quad (2.86)$$

$$\frac{E}{L^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^{k+1} A_i^*(k-i+2)(k+1)\tau_{(k-i+2)} \right] \varepsilon^k = 0 \quad (2.87)$$

Ou:

$$\frac{E}{L^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ A_0^*(k+2)(k+1)\tau_{(k+2)} + \sum_{i=1}^{k+1} A_i^*(k-i+2)(k+1)\tau_{(k-i+2)} \right] \varepsilon^k = 0 \quad (2.88)$$

Já para a Equação (2.85a):

$$E \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} I_j^*(k+1)b_{(k+1)} \right\} \varepsilon^k \right] - G\chi L^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A_j^* b_k \right\} \varepsilon^k \right] + G\chi L \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A_j^*(k+1)a_{(k+1)} \right\} \varepsilon^k \right] = 0 \quad (2.89)$$

$$E \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k+1} I_j^*(k-j+2)(k+1)b_{(k-j+2)} \right\} \varepsilon^k \right] - G\chi L^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^k A_j^* b_{(k-j)} \right\} \varepsilon^k \right] + G\chi L \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^k A_j^*(k-j+1)a_{(k-j+1)} \right\} \varepsilon^k \right] = 0 \quad (2.90)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ E \sum_{j=0}^{k+1} I_j^*(k-j+2)(k+1)b_{(k-j+2)} - G\chi L^2 \sum_{j=0}^k A_j^* b_{(k-j)} + G\chi L \sum_{j=0}^k A_j^*(k-j+1)a_{(k-j+1)} \right] \varepsilon^k = 0 \quad (2.91)$$

Ou:

$$EI_0^*(k+2)(k+1)b_{(k+2)} + E \sum_{j=1}^{k+1} I_j^*(k-j+2)(k+1)b_{(k-j+2)} - G\chi L^2 \sum_{j=0}^k A_j^* b_{(k-j)} + G\chi L \sum_{j=0}^k A_j^*(k-j+1)a_{(k-j+1)} = 0 \quad (2.92)$$

Para a Equação (2.85c):

$$-G\chi \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A_j^*(k+1)a_{(k+1)} \right\} \varepsilon^k \right] + G\chi L \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A_j^* b_k \right\} \varepsilon^k \right] - P \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{(k+2)} \varepsilon^k \right] = 0 \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
& -G\chi \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k+1} A_j^* (k-j+2)(k+1) a_{(k-j+2)} \right\} \varepsilon^k \right] + G\chi L \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{k+1} A_j^* (k+1) b_{(k-j+1)} \right\} \varepsilon^k \right] \\
& -P \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{(k+2)} \varepsilon^k \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ -G\chi \sum_{j=0}^{k+1} A_j^* (k-j+2)(k+1) a_{(k-j+2)} + G\chi L \sum_{j=0}^{k+1} A_j^* (k+1) b_{(k-j+1)} - P(k+2)(k+1) a_{(k+2)} \right] \varepsilon^k = 0 \tag{2.95}$$

Isto é:

$$\begin{aligned}
& -G\chi A_0^* (k+2)(k+1) a_{(k+2)} - G\chi \sum_{j=1}^{k+1} A_j^* (k-j+2)(k+1) a_{(k-j+2)} + G\chi L \sum_{j=0}^{k+1} A_j^* (k+1) b_{(k-j+1)} \\
& -P(k+2)(k+1) a_{(k+2)} = 0
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Para satisfazer as Equações (2.88), (2.92) e (2.96) para todos os valores de  $\varepsilon$ , as seguintes fórmulas de recorrência são obtidas:

$$\tau_{(k+2)} = - \frac{\sum_{i=1}^{k+1} A_i^* (k-i+2)(k+1) \tau_{(k-i+2)}}{(k+2)(k+1) A_0^*} \tag{2.97}$$

$$b_{(k+2)} = \frac{-E \sum_{j=1}^{k+1} I_j^* (k-j+2)(k+1) b_{(k-j+2)} + G\chi L^2 \sum_{j=0}^k A_j^* b_{(k-j)} - G\chi L \sum_{j=0}^k A_j^* (k-j+1) a_{(k-j+1)}}{(k+2)(k+1) E I_0^*} \tag{2.98}$$

$$a_{(k+2)} = \frac{-G\chi \left( \sum_{j=1}^{k+1} A_j^* (k-j+2)(k+1) a_{(k-j+2)} - L \sum_{j=0}^{k+1} A_j^* (k+1) b_{(k-j+1)} \right)}{(k+2)(k+1) (P + G\chi A_0^*)} \tag{2.99}$$

Para  $k=0,1, 2, \dots, \infty$ .

Vale ressaltar, que o parâmetro  $k$  representa o número escolhido de termos utilizados na aproximação pela série de potências. De acordo com as fórmulas de recorrência apresentadas nas Equações (2.97), (2.98) e (2.99), conclui-se que todos os coeficientes  $\tau_k$ ,  $b_k$  e  $a_k$  podem ser calculados exceto os dois primeiros ( $\tau_0, \tau_1$ ,  $b_0, b_1$  e  $a_0, a_1$ ), contudo eles podem ser obtidos através das condições de contorno da barra de Timoshenko.

Aplicando as Equações (2.97), (2.98) e (2.99) junto com a Equação (2.84), é possível determinar as soluções fundamentais das Equações (2.39), (2.32) e (2.34)

nos termos de seis constantes ( $\tau_0, \tau_1, b_0, b_1$  e  $a_0, a_1$ ). Logo, a solução geral das equações de equilíbrio pode ser expressa através da seguinte matriz:

$$\{C(\varepsilon)\} = [B(\varepsilon)]\{A\} \quad (2.100)$$

Onde:

$$\{C(\varepsilon)\} = \begin{Bmatrix} u_0(\varepsilon) \\ v_0(\varepsilon) \\ \theta(\varepsilon) \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

$$[B(\varepsilon)] = \begin{bmatrix} u_{0_0}(\varepsilon) & 0 & 0 & u_{0_1}(\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & v_{0_0}(\varepsilon) & v_{0_1}(\varepsilon) & 0 & v_{0_2}(\varepsilon) & v_{0_3}(\varepsilon) \\ 0 & \theta_0(\varepsilon) & \theta_1(\varepsilon) & 0 & \theta_2(\varepsilon) & \theta_3(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

$$\{A\} = \{\tau_0 \quad \tau_1 \quad a_0 \quad a_1 \quad b_0 \quad b_1\}^T \quad (2.103)$$

Na Equação (2.100),  $[B(\varepsilon)]$  consiste em uma matriz 3x6, em que estão inclusas as soluções fundamentais das equações de equilíbrio da análise estabilidade linear para barras de Timoshenko ( $u_{0_i}(\varepsilon), i=0,1, \theta_i(\varepsilon)$  e  $v_{0_i}(\varepsilon), i=0,1,2,3$ ), bem como  $\{A\}$  representa um vetor coluna com seis parâmetros desconhecidos. Vale ressaltar que todos os termos  $u_{0_i}, \theta_i$  e  $v_{0_i}$  foram calculados com o auxílio do software MATLAB (MathWorks, Inc, 2018).

### 2.6.3. Condições de contorno e funções de forma

Nota-se que tanto os seis coeficientes desconhecidos ( $\tau_0, \tau_1, a_0, a_1, b_0, b_1$ ) como os demais coeficientes  $\tau_k, b_k$  e  $a_k$  ( $k=2,3$ , e  $4, \dots$ ) são funções de deslocamentos dos graus de liberdade. Com isso, as expressões do ângulo, do deslocamento axial e transversal podem ser calculadas por meio das funções de deslocamento dos graus de liberdade. Os parâmetros desconhecidos citados anteriormente podem ser obtidos através da imposição de condições de contorno no elemento.



No modelo de elemento finito utilizado nesse trabalho existem dois nós com três graus de liberdade por nó. Esses dois nós estão localizados nas duas extremidades do elemento e é através desses nós que ocorre a montagem dos elementos individuais para formar o modelo estrutural. Assim, o deslocamento nodal do elemento de pórtico na coordenada local  $\varepsilon=0$  e  $\varepsilon=1$  é ilustrado na Figura 25.

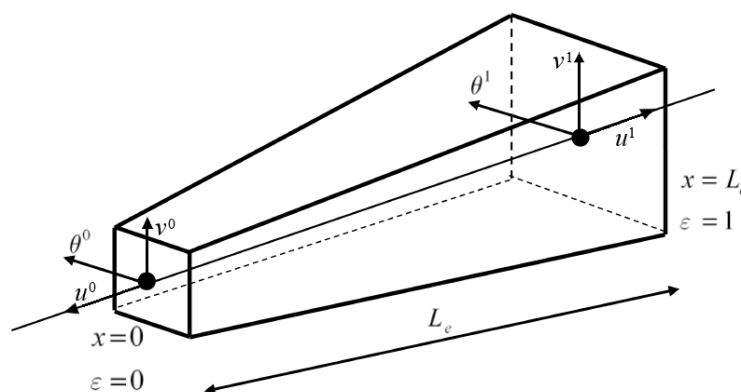


Figura 25 – Deslocamento nodal de uma barra com mísula de comprimento  $L_e$ . (Soltani, 2019).

De acordo com a Figura 25, devem ser satisfeitas as seguintes condições de contorno na coordenada local:

$$\{D\} = [V]\{A\} \quad (2.104)$$

Em que:

$$[V] = \begin{bmatrix} u_{0_0}(0) & 0 & 0 & u_{0_1}(0) & 0 & 0 \\ 0 & v_{0_0}(0) & v_{0_1}(0) & 0 & v_{0_2}(0) & v_{0_3}(0) \\ 0 & \theta_0(0) & \theta_1(0) & 0 & \theta_2(0) & \theta_3(0) \\ u_{0_0}(1) & 0 & 0 & u_{0_1}(1) & 0 & 0 \\ 0 & v_{0_0}(1) & v_{0_1}(1) & 0 & v_{0_2}(1) & v_{0_3}(1) \\ 0 & \theta_0(1) & \theta_1(1) & 0 & \theta_2(1) & \theta_3(1) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$\{D\}^T = \{u_0^0 \quad v_0^0 \quad \theta^0 \quad u_0^1 \quad v_0^1 \quad \theta^1\} \quad (2.106)$$

Os graus de liberdade nas extremidades de cada elemento são:  $u_0^0, u_0^1$  que correspondem ao deslocamento axial na direção do eixo  $x$ ,  $v_0^0, v_0^1$  que representam o deslocamento transversal na direção do eixo  $z$  e  $\theta^0, \theta^1$  que são os ângulos de rotação. O vetor dos graus de liberdade do elemento é dado pela Equação (2.106).

Através da Equação (2.107) é possível obter o vetor  $\{A\}$  que consiste na matriz coluna com os seis parâmetros desconhecidos:

$$\{A\} = [V]^{-1} \{D\} \quad (2.107)$$

Assim, a Equação (2.100) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\{C(\varepsilon)\} = [B(\varepsilon)][V]^{-1} \{D\} \rightarrow [N] = [B(\varepsilon)][V]^{-1} \rightarrow \{C(\varepsilon)\} = [N]\{D\} \rightarrow \{C(\varepsilon)\} = \begin{bmatrix} \{N_u\}^T \\ \{N_{v_0}\}^T \\ \{N_\theta\}^T \end{bmatrix} \{D\} \quad (2.108)$$

Onde  $[N]$  corresponde as funções de forma (ou de interpolação). As funções de interpolação são escritas para que o deslocamento em qualquer ponto do elemento possa ser calculado tomando-se como base apenas os valores dos deslocamentos nos nós (Burgos, 2005).

Após serem obtidas as funções de forma do elemento, é possível concluir que as novas funções de forma em comparação com a interpolação Hermitiana cúbica, ou seja, com as Equações (A.19) a (A.22), são proporcionais as características mecânicas do elemento de pórtico incluindo as propriedades geométricas, as características do material, bem como a carga compressiva axial  $P$ .

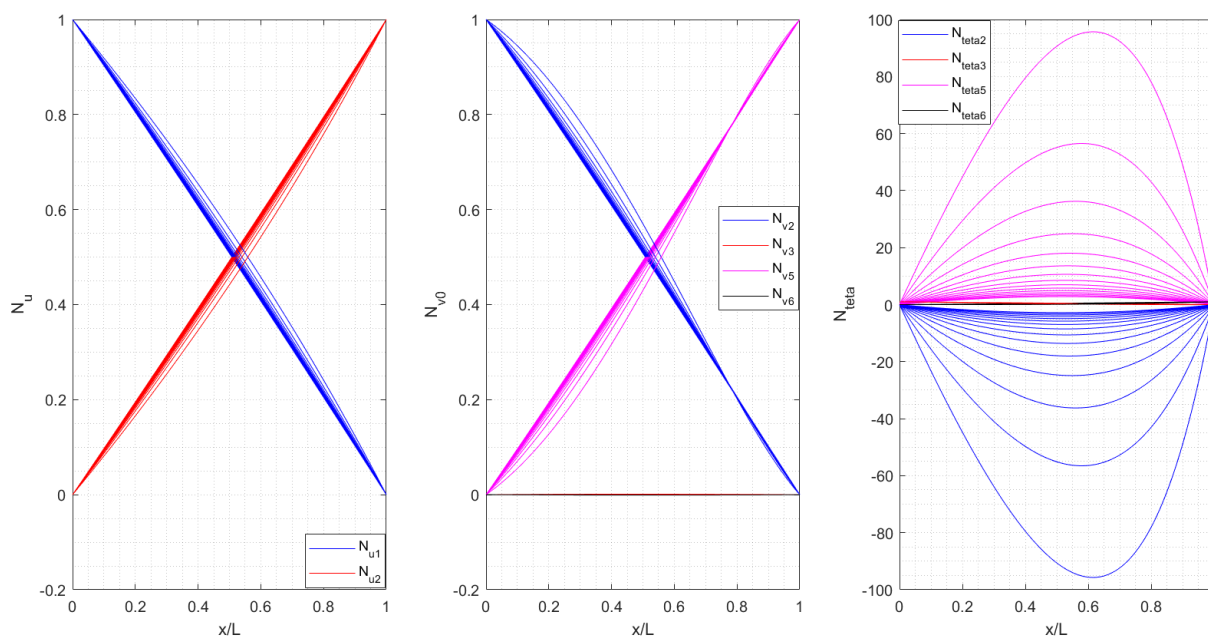


Figura 26 – Funções Hermitianas com 15 elementos, 12 termos e parâmetro  $\alpha = 0.9$

#### 2.6.4. Matriz de rigidez

As matrizes de rigidez à flexão ( $K_E$ ), ao cisalhamento ( $K_C$ ) e geométrica ( $K_G$ ) de um elemento com seção transversal variável são calculadas substituindo as funções de forma, Equação (2.108), nas Equações (2.110), (2.111) e (2.112) respectivamente.

$$K_{E_{i,j}} = \int_0^L \frac{EA(\varepsilon)}{L_e} \left( \frac{d(N_u^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{dN_u(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon + \int_0^L \frac{EI(\varepsilon)}{L_e} \left( \frac{d(N_\theta^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{d(N_\theta(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon \quad (2.109)$$

$$K_{C_{i,j}} = \int_0^L \frac{GA(\varepsilon)}{L_e} \left( \frac{d(N_\theta^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{d(N_\theta(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon + \int_0^L \frac{GA(\varepsilon)}{L_e} \left( \frac{d(N_{v_0}^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{d(N_{v_0}(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon - \int_0^L \frac{GA(\varepsilon)}{L_e} \left( \frac{d(N_{v_0}^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{d(N_\theta(\varepsilon))}{d\varepsilon} + \frac{d(N_\theta^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{d(N_{v_0}(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon \quad (2.110)$$

$$K_{G_{i,j}} = \int_0^L \frac{P}{L_e} \left( \frac{d(N_{v_0}^T(\varepsilon))}{d\varepsilon} \frac{d(N_{v_0}(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon \quad (2.111)$$

Nota-se que a matriz geométrica depende da carga axial  $P$  e que  $L_e$  é o comprimento de cada elemento que pode ser obtido conforme a expressão  $L_e = L/e$ , sendo  $e$  o número de elementos utilizados na análise. A partir, da reunião das matrizes de rigidez à flexão ( $K_E$ ), ao cisalhamento ( $K_C$ ) e geométrica ( $K_G$ ) de cada elemento é possível obter a matriz de rigidez global de toda a estrutura:

$$([K_E] + [K_C] + [K_G]) \delta d = \delta f \quad (2.112)$$

A Equação (2.112) corresponde a equação geral utilizada na análise linear de segunda ordem, isto é, quando os efeitos das deformações e deslocamentos são considerados na formulação das equações de equilíbrio.

Além disso, a Equação (2.112) também pode ser usada para determinar o valor de carga crítica  $\lambda$ . Esse fator representa a majoração das cargas nodais  $F$  essencial para determinar a flambagem elástica na estrutura. Para esse fim, é preciso reescrever a Equação (2.112) como:

$$([K_E] + [K_C] + \lambda[K_G])\{\partial d\} = 0 \quad (2.113)$$

Onde  $\lambda$  correspondem aos autovalores associados aos graus de liberdade totais de cada elemento. Nota-se que o sistema com  $n$  graus de liberdade possuem  $n$  modos de flambagem.

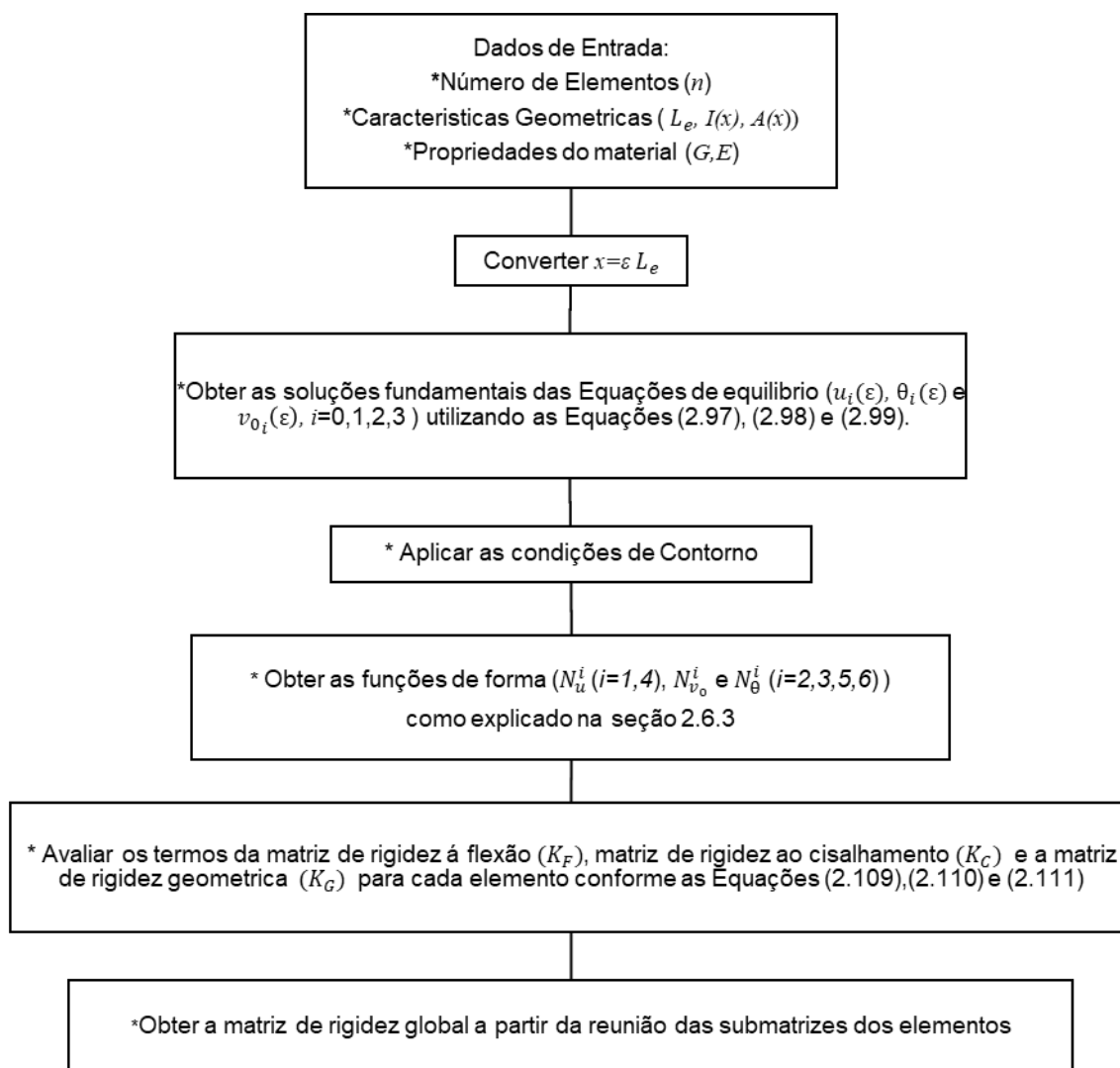


Figura 27 – Algoritmo utilizado na análise da estabilidade linear em elementos não prismáticos

A fim de esclarecer o procedimento numérico, a Figura 27 apresenta o algoritmo geral para a determinação das soluções fundamentais, das funções de forma e das matrizes de rigidez para uma barra com seção transversal variável através da expansão em série de potências.

### 3. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO E APLICAÇÃO

Para a validação e aplicação da formulação desenvolvida neste trabalho, os elementos propostos foram implementados no MATLAB (MathWorks, Inc, 2018) e comparados com soluções analíticas e modelagens presentes na literatura.

#### 3.3. Exemplo 1: Validação do elemento finito com variação linear

O primeiro exemplo estuda o deslocamento de barras com diferentes valores para o parâmetro adimensional,  $\alpha$ , que corresponde à relação entre a base final ( $\alpha B_0$ ) e a inicial ( $B_0$ ) do elemento, conforme apresentado na Figura 19, na qual também estão indicadas o comprimento  $L$  e a espessura  $t$  do elemento. Esse exemplo tem como objetivo validar o elemento com variação linear proposto neste trabalho no cálculo dos deslocamentos nodais da estrutura considerando a teoria de Timoshenko.

Essa validação é realizada através da comparação do deslocamento calculado pela solução numérica pelo método dos elementos finitos, empregando vários elementos, com a solução analítica apresentado em Wong (2019):

$$d = \frac{LP \log(\alpha)}{\chi A_0 G(\alpha - 1)} - \frac{PL^2 \left( \frac{L(3\alpha - 1)}{\alpha^2} - \frac{2L \log(\alpha)}{(\alpha - 1)} \right)}{2EI_0(\alpha - 1)^2} \quad (3.1)$$

A Tabela 1 apresenta as propriedades da barra investigada. Para o exemplo 1 foram usados três valores distintos de  $\alpha$  (0.1; 0.5 e 0.8). Esses três valores foram escolhidos de modo a ser possível notar a influência de  $\alpha$  no cálculo do deslocamento nodal. Os resultados obtidos pela teoria da elasticidade e pelo elemento finito para os três valores de  $\alpha$  são apresentados na Tabela 2.

| Parâmetro | Valor                               |
|-----------|-------------------------------------|
| $E$       | $20 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$      |
| $G$       | $76.9230 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ |
| $\nu$     | 0.3                                 |
| $B_0$     | $0.5m$                              |
| $t$       | $0.5m$                              |
| $L$       | $4m$                                |
| $\chi$    | 5/6                                 |
| $P$       | 10kN                                |

Tabela 1 – Propriedades do exemplo 1

| Deslocamento (mm) |                      |                     |                                  |
|-------------------|----------------------|---------------------|----------------------------------|
| $\alpha$          | MEF                  | Analítica           | Erro (%)                         |
| 0.1               | 0.84714891025123914  | 0.84714891025123898 | $1.895538219533 \cdot 10^{-14}$  |
| 0.5               | 0.33841721261359834  | 0.33841721261359831 | $0.75555673022 \cdot 10^{-14}$   |
| 0.8               | 0.244209572451710531 | 0.24420957245171119 | $27.101920325932 \cdot 10^{-14}$ |

Tabela 2 – Validação do Exemplo 1

É válido ressaltar que os resultados apresentados na Tabela 2 pelo Método de Elementos Finitos e pelo analítico são praticamente idênticos, tornando evidente que para o elemento finito com variação linear proposto neste trabalho independe da discretização da barra para chegar ao resultado analítico. Isto ocorre, devido a utilização de funções de interpolação exatas, nas quais o comportamento contínuo da barra pode ser representado por parâmetros nodais, sem a consideração de nenhuma aproximação adicional, além das já contidas na idealização analítica do comportamento de barras, resultando assim em uma discretização quase que natural da estrutura.

Em outras palavras, esse fato ocorre porque as expressões deduzidas para o cálculo dos deslocamentos e rotações ao longo de uma barra através das soluções das equações diferenciais que descrevem o equilíbrio de um elemento infinitesimal de barra são obtidas por funções de forma desenvolvidas diretamente da solução homogênea da equação diferencial do problema contínuo (Rodrigues, 2019).

### 3.4. Exemplo 2: Validação do elemento finito baseado em séries de potência

Na sequência, procura-se identificar a convergência do elemento finito baseado em séries de potência de descrever o comportamento da estrutura em comparação ao método de elementos finitos, MEF, que como foi dito anteriormente, fornece o resultado exato para o deslocamento da estrutura com apenas um elemento.

Contudo, no caso do Método de Série de Potência, existe a necessidade da discretização de barras com seção transversal variável, em que a largura de cada elemento,  $B_e$ , corresponde a uma função linear. Entretanto, devido a discretização, cada elemento possui diferentes condições de início,  $(B_{inicial})$ , conforme a Equação (3.2), e fim,  $(B_{final})$ , segundo a Equação (3.3). Assim, gerando uma função de largura  $B_e$  específica para cada elemento representada na Equação (3.4).

$$B_{inicial} = B_0 + \frac{B_0(\alpha - 1)(i - 1)}{e} \quad (3.2)$$

$$B_{final} = B_0 + \frac{B_0(\alpha - 1)i}{e} \quad (3.3)$$

$$B_e = (B_{final} - B_{inicial}) \frac{x}{L_e} + B_{inicial} \quad (3.4)$$

Onde  $e$  corresponde ao número de elementos discretizados,  $i$  as iterações que variam de 1 até  $e$ ,  $\alpha$  equivale a relação entre a largura final da barra  $(B_1)$  e a

inicial,  $(B_0)$  e  $L_e$  é o comprimento de cada elemento que pode ser obtido conforme a expressão  $L_e = L/e$ .

Vale ressaltar que o cálculo do momento de inércia e da área seção transversal podem ser obtidos conforme as Equações (A.1) e (A.2) e que a espessura da seção transversal ( $t$ ) permanece constante ao longo da barra. Assim, foram feitas várias análises discretizando o número de elementos e de termos até que a solução convergisse com o valor encontrado por MEF, conforme apresentado nas Figura 28, Figura 29 e Figura 30. A Tabela 3 apresenta as propriedades da barra investigada.

| <b>Parâmetro</b> | <b>Valor</b>                          |
|------------------|---------------------------------------|
| $E$              | $210.10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$    |
| $G$              | $80.769.10^6 \text{ kN} / \text{m}^2$ |
| $\nu$            | 0.3                                   |
| $B_0$            | 0,34641m                              |
| $t$              | 0.1m                                  |
| $L$              | 1m                                    |
| $\chi$           | 5/6                                   |
| $P$              | 800kN                                 |

Tabela 3 – Propriedades do teste de convergência.



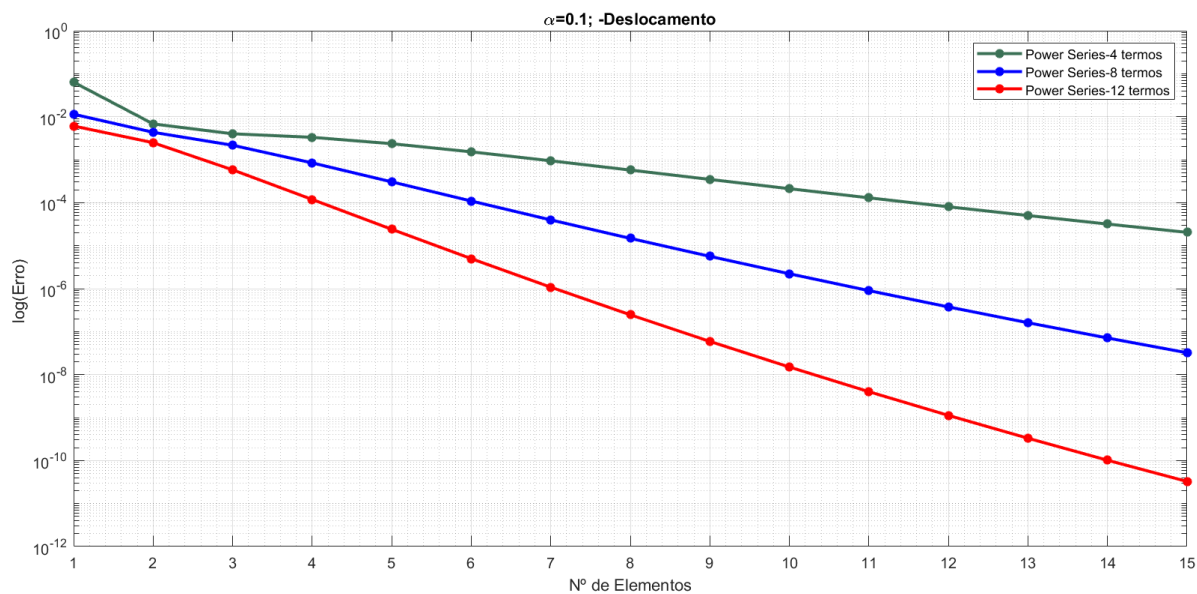


Figura 28 – Teste de convergência Método da Série de Potência para  $\alpha = 0.1$ .

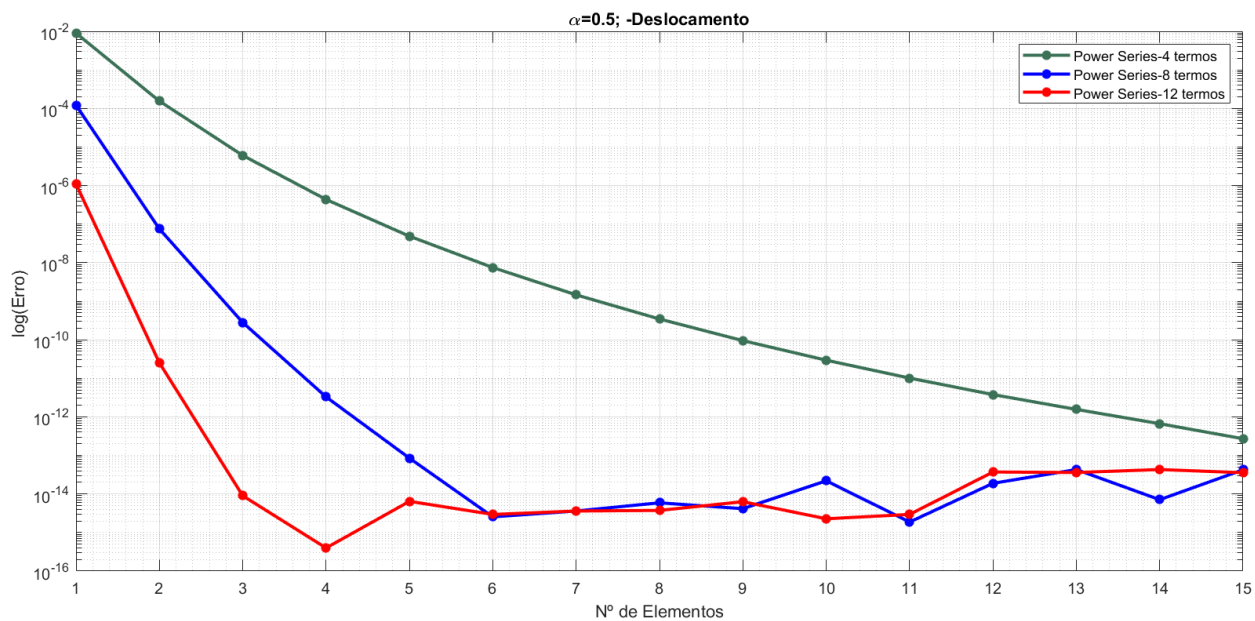


Figura 29 – Teste de convergência Método da Série de Potência para  $\alpha = 0.5$

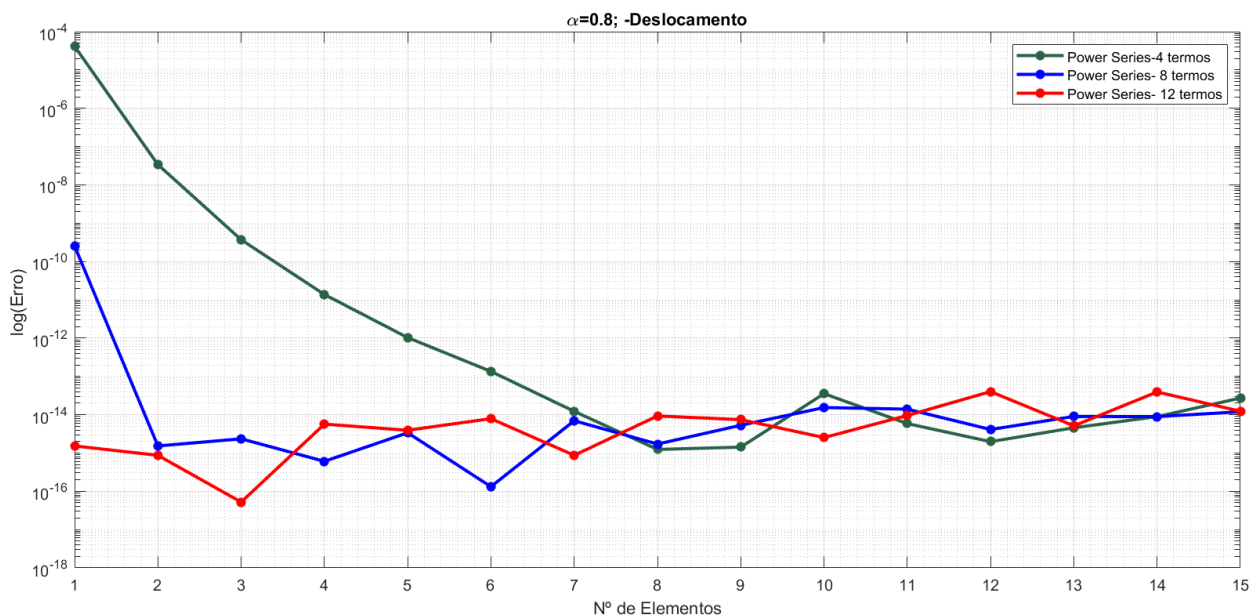


Figura 30 – Teste de convergência Método da Série de Potência para  $\alpha = 0.8$ .

A partir dos resultados presentes nos gráficos anteriores é possível perceber que o Método de Série de Potências, MSP, é satisfatório, visto que com o aumento significativo do número de termos e elementos ele converge. Contudo, principalmente para o caso de  $\alpha = 0.1$ , onde a diferença entre a base final e a inicial é maior, nota-se que é preciso um número de elementos e termos maior do que nas demais situações, para que ocorra a convergência.

Além disso, vale ressaltar que as variações erráticas existentes nas Figura 29 e Figura 30 são ocasionadas pela precisão do software MATLAB (MathWorks, Inc, 2018). Neste trabalho, está sendo implementado uma precisão de 32 dígitos que é o limite estabelecido pelo software. A Tabela 4 apresenta os resultados do deslocamento nodal para os três valores de  $\alpha$  (0.1; 0.5 e 0.8) após a discretização em 15 elementos:

| Deslocamento (mm) |                  |               |               |               |                               |
|-------------------|------------------|---------------|---------------|---------------|-------------------------------|
| $\alpha$          | MSP–15 Elementos |               |               | MEF           | Erro (%)<br>12 Termos         |
|                   | 4 Termos         | 8 Termos      | 12 Termos     |               |                               |
| 0.1               | 15.9263218611    | 15.926645808  | 15.9266463212 | 15.9266463217 | $3.266062239 \cdot 10^{-9}$   |
| 0.5               | 6.47104990305    | 6.47104990305 | 6.47104990305 | 6.47104990305 | $3.578794593 \cdot 10^{-12}$  |
| 0.8               | 4.7040774292     | 4.7040774292  | 4.7040774292  | 4.7040774292  | $1.2906956267 \cdot 10^{-12}$ |

Tabela 4 – Resultados para o cálculo do deslocamento utilizando MSP comparados com os obtidos por MEF.

### 3.5. Carga crítica de barras com seção transversal variável

Nesta seção os elementos formulados pelo Método de Série de Potências, MSP e pelo Método de Elementos Finitos, MEF são testados em problemas de instabilidade de colunas. São obtidas cargas críticas de flambagem para uma barra engastada e livre considerando a teoria de Timoshenko. Para a validação desses métodos os valores de carga crítica calculados são comparados com a modelagem via Método dos Elementos Finitos, realizada por meio do programa ANSYS, apresentado por (Soltani M. , 2018). Nesta seção a Tabela 3 também é utilizada, porém a carga axial aplicada no topo da estrutura é modificada para 1kN.

Para o cálculo da carga crítica empregando o Método de Elementos Finitos, MEF, existe a necessidade da discretização de barras com seção transversal variável, uma vez que para uma análise não linear geométrica, a solução homogênea da equação diferencial não consegue descrever completamente o problema, exigindo a utilização de um maior número de elementos na análise (Rodrigues, 2019).

Contudo, devido a discretização, cada elemento possui diferentes condições de início,  $(B_{inicial})$ , e fim,  $(B_{final})$ . Dessa forma, gerando tanto uma função de largura  $B_e$  específica para cada elemento, conforme apresentado nas Equações (3.2), (3.3)

e (3.4) como um parâmetro adimensional  $\alpha_e$  também considerada propriedade do elemento que relaciona  $(B_{final})$  com  $(B_{inicial})$ , segundo a expressão  $\alpha_e = B_{final} / B_{inicial}$ .

Dessa forma, foram realizadas várias análises discretizando o número de elementos até que a solução convergisse com o valor encontrado pela modelagem via Método dos Elementos Finitos, realizada através do programa ANSYS por Soltani (2018). No caso do Método de Série de Potência foram empregados 12 termos em todas as verificações. Os resultados são apresentados nas Figura 31, Figura 32 e Figura 33.

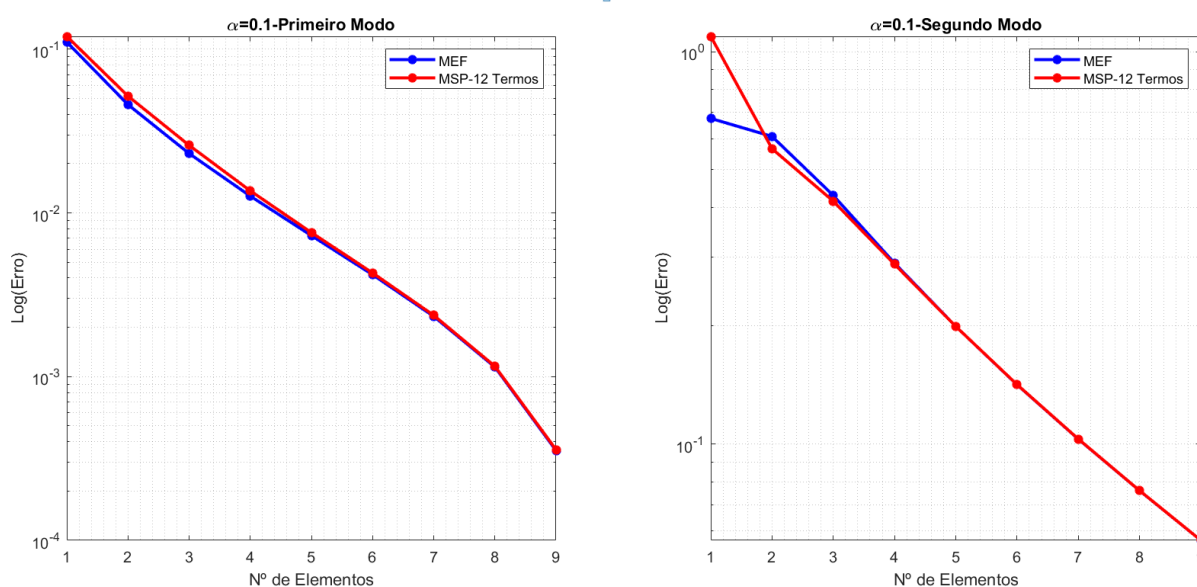


Figura 31 – Teste de convergência da carga crítica para  $\alpha = 0.1$

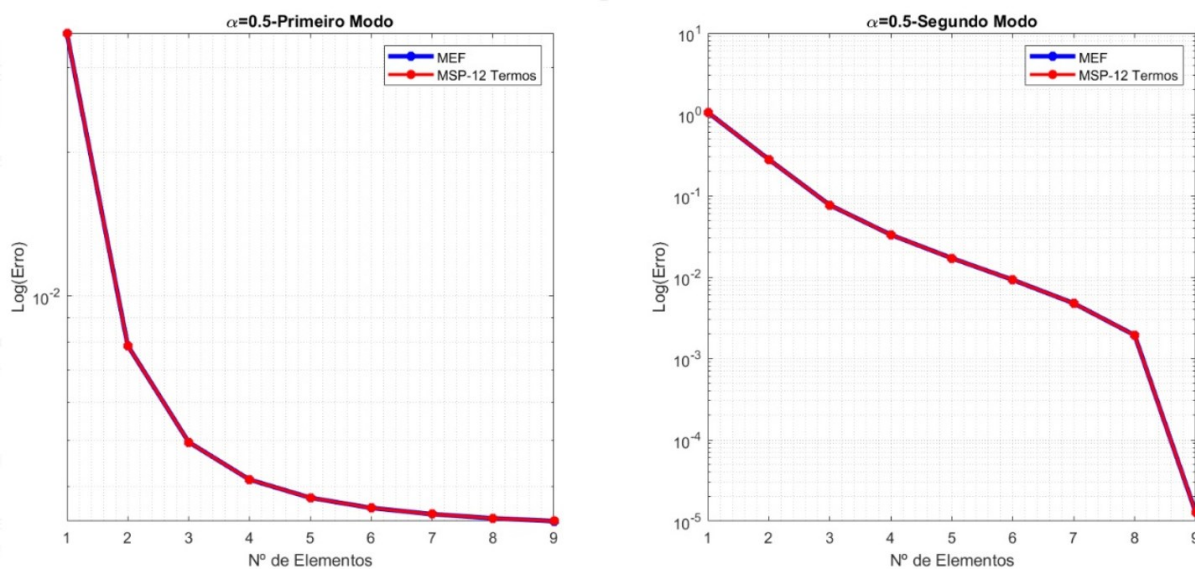


Figura 32 – Teste de convergência da carga crítica para  $\alpha = 0.5$

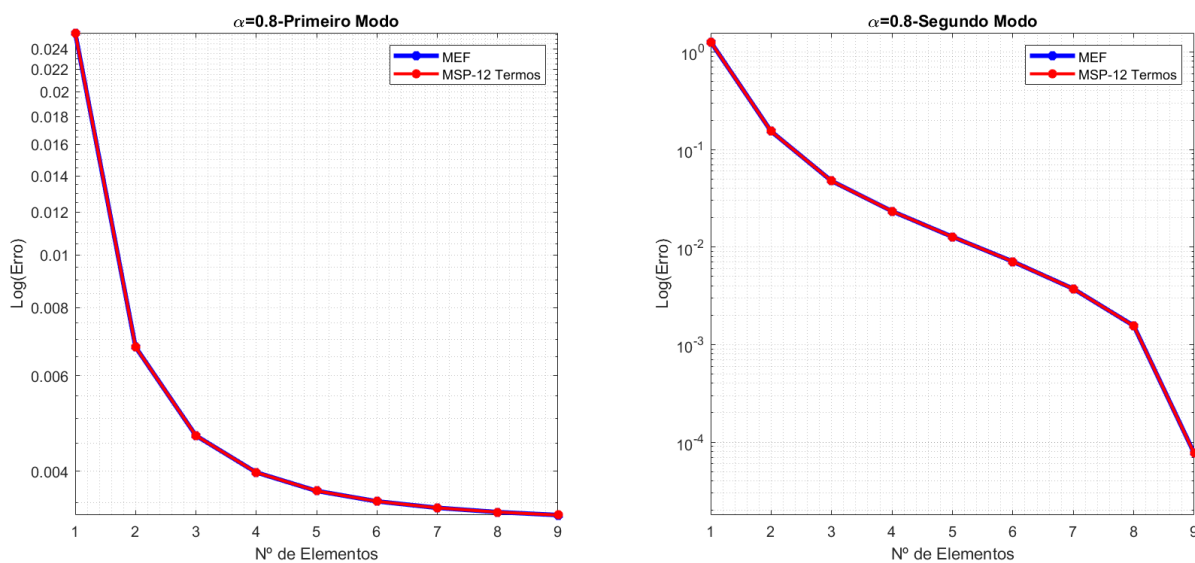


Figura 33 – Teste de convergência da carga crítica para  $\alpha = 0.8$

Como base nos resultados presentes nos gráficos anteriores é possível concluir que tanto o Método de Série de Potencias, MSP, como o Método de Elementos Finitos, MEF são eficazes, dado que com o aumento significativo do número de elementos ele converge com o resultado obtido pelo software ANSYS.

Os resultados da carga crítica após a discretização em 9 elementos para os três valores de  $\alpha$  (0.1; 0.5 e 0.8) analisados tanto para MEF como MSP são exibidos

de forma adimensional nas Tabela 5, Tabela 6 e são comparadas com os valores obtidos pela modelagem realizada no ANSYS, por (Soltani M. , 2018).

| Carga Crítica ( $PL^2/EI_0$ ) |                  |               |                              |         |            |             |
|-------------------------------|------------------|---------------|------------------------------|---------|------------|-------------|
| $\alpha$                      | MEF- 9 elementos |               | ANSYS<br>(Soltani M. , 2018) |         | Erro (%)   |             |
|                               | 1º Modo          | 2º Modo       | 1º Modo                      | 2º Modo | 1º Modo    | 2º Modo     |
| 0.1                           | 0.3021067144     | 1.119122343   | 0.302                        | 1.059   | 0.03533590 | 5.677275086 |
| 0.5                           | 1.2502143720     | 6.13807835409 | 1.246                        | 6.138   | 0.33823210 | 0.001276541 |
| 0.8                           | 1.8842357838     | 10.3647947442 | 1.878                        | 10.364  | 0.33204387 | 0.007668315 |

Tabela 5 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem utilizando MEF comparados com os obtidos pelo ANSYS.

| Carga Crítica ( $PL^2/EI_0$ ) |                               |                |                                 |            |              |              |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------|---------------------------------|------------|--------------|--------------|
| $\alpha$                      | MSP- 9 elementos<br>12 Termos |                | ANSYS<br>(Soltani M. ,<br>2018) |            | Erro (%)     |              |
|                               | 1º Modo                       | 2º Modo        | 1º<br>Modo                      | 2º<br>Modo | 1º Modo      | 2º Modo      |
| 0.1                           | 0.3021081015                  | 1.1191414634   | 0.302                           | 1.059      | 0.0357952068 | 5.6790805880 |
| 0.5                           | 1.25021437652                 | 6.138078487352 | 1.246                           | 6.138      | 0.3382324655 | 0.001278712  |
| 0.8                           | 1.8842357879                  | 10.364794841   | 1.878                           | 10.364     | 0.3320440841 | 0.0076692500 |

Tabela 6 – Resultados para o cálculo da carga crítica de flambagem utilizando MSP comparados com os obtidos pelo ANSYS.

### 3.6. Painel de alvenaria

Nesta seção, os modelos utilizados nesse trabalho serão testados em painéis de alvenaria sob compressão submetidos a cargas laterais com o propósito de avaliar a resposta não linear dessas estruturas, através da esquematização dos painéis como um conjunto de elementos finitos, utilizando a formulação de Timoshenko, ou seja, atendendo tanto à deformação por flexão quanto à distorção por cisalhamento. Assim sendo, os painéis de alvenaria modelados foram comparados as curvas carga lateral vs. deflexão lateral obtidas experimentalmente por Giambianco et al. (1996) e Salmanpour (2017).

Neste trabalho são investigadas três abordagens, conforme ilustrado na Figura 34. A abordagem 1 discretiza a estrutura em um número de elementos finitos definida pelo usuário com propriedades geométricas da seção transversal constantes. A segunda e a terceira discretizam a estrutura com um elemento finito por trecho, cada um com seção transversal variável, porém no caso da terceira abordagem as propriedades geométricas da seção transversal são expandidas em séries de potências até um certo número de termos, onde há precisão nos resultados. Diferente da segunda abordagem que desenvolve o elemento finito de barra com seção transversal variável através da utilização das funções de forma obtidas da solução da equação diferencial do elemento indeformado.

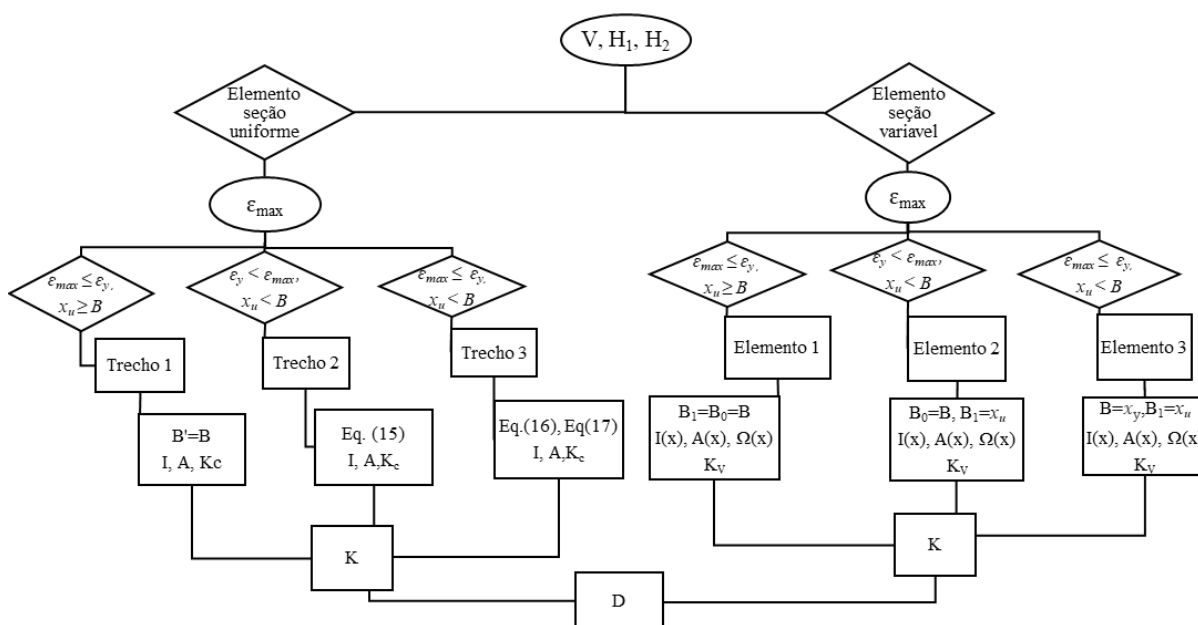


Figura 34 – Fluxograma das três abordagens investigadas neste trabalho.

No caso da primeira abordagem, os elementos finitos em questão possuem propriedades constantes ao longo do comprimento, resultados confiáveis somente serão alcançados com malhas relativamente densas, de modo a representar a mudança da seção transversal de forma suave. Portanto, foram implementados os modelos 2 e 3 que possuem seção transversal variável, de tal forma que o número de barras necessário para um resultado confiável possa ser reduzido.

As propriedades geométricas e mecânicas dos elementos são obtidas a partir de diferentes estados tensão-deformação que caracterizam o comportamento da seção transversal, conforme apresentado no capítulo 1. As Tabela 7 e Tabela 8 apresentam as dimensões dos painéis analisados, os parâmetros dos materiais e as cargas de compressão aplicadas.

| <b>Parâmetro</b> | <b>Valor</b> |
|------------------|--------------|
| $E$              | 3500MPa      |
| $G$              | 1800MPa      |
| $B$              | 2700mm       |
| $H$              | 2600mm       |
| $t$              | 150mm        |
| $\chi$           | 5/6          |
| $N$              | 235kN        |
| $f_{mk}$         | 5,8MPa       |

Tabela 7 – Características do painel de alvenaria obtidas experimentalmente por (Salmanpour, 2017).



| Parâmetro | Valor       |
|-----------|-------------|
| $E$       | 726MPa      |
| $G$       | 315.6522MPa |
| $B$       | 1200mm      |
| $H$       | 2400mm      |
| $t$       | 500mm       |
| $\chi$    | 5/6         |
| $N$       | 311kN       |
| $f_{mk}$  | 4.5MPa      |

Tabela 8 – Características do painel de alvenaria obtidas experimentalmente por (Giambiamco, Rizzo, & Spallino, 1996).

A obtenção da curva de capacidade lateral é construída a partir do processo incremental da carga lateral  $V$ , através de incrementos na posição do eixo neutro  $x_u$  e do cálculo da deflexão lateral no topo  $D$  correspondente. Assim, nas três abordagens investigadas a carga lateral foi incrementada num total de 100 passos a partir de um incremento de 37.67 mm da posição da linha neutra na base do painel. É importante ressaltar que foi feito um estudo de malha para o modelo 1, adotando-se uma discretização de 70 elementos para um erro de  $10^{-3}$  no deslocamento do topo do painel. Além disso, no caso do Modelo 3, como o método de séries de potência só é válido para o parâmetro  $\alpha$  menor que 1 e é necessário modelar o painel de forma que a largura inicial seja maior que a final.

Atualmente é cada vez mais comum a adoção de métodos cada vez mais sofisticados para a análise de estruturas como a consideração da não linearidade geométrica. Assim sendo, na análise dos painéis foram consideradas as não linearidades geométricas com propósito de investigar se os efeitos da carga axial no painel geram significativas deflexões laterais que conseqüentemente podem ocasionar no aparecimento de momentos fletores e deslocamentos adicionais denominados de segunda ordem e, portanto, influenciar na curva de capacidade. Vale ressaltar que a análise não linear geométrica é resolvida de maneira incremental através do método de Newton-Raphson.

As comparações entre os ensaios experimentais, ilustrado na Figura 35 e os modelos numéricos desenvolvidos neste estudo considerando a linearidade geométrica são apresentados na Figura 36 e na Figura 37, em que se verifica que o modelo 1, o modelo 2 e o modelo 3 aproximam da curva experimental  $V$  vs.  $D$ , porém o modelo 1 requer uma malha relativamente densa para se obter os resultados.



Figura 35 –Experimento do painel (Salmanpour, 2017).

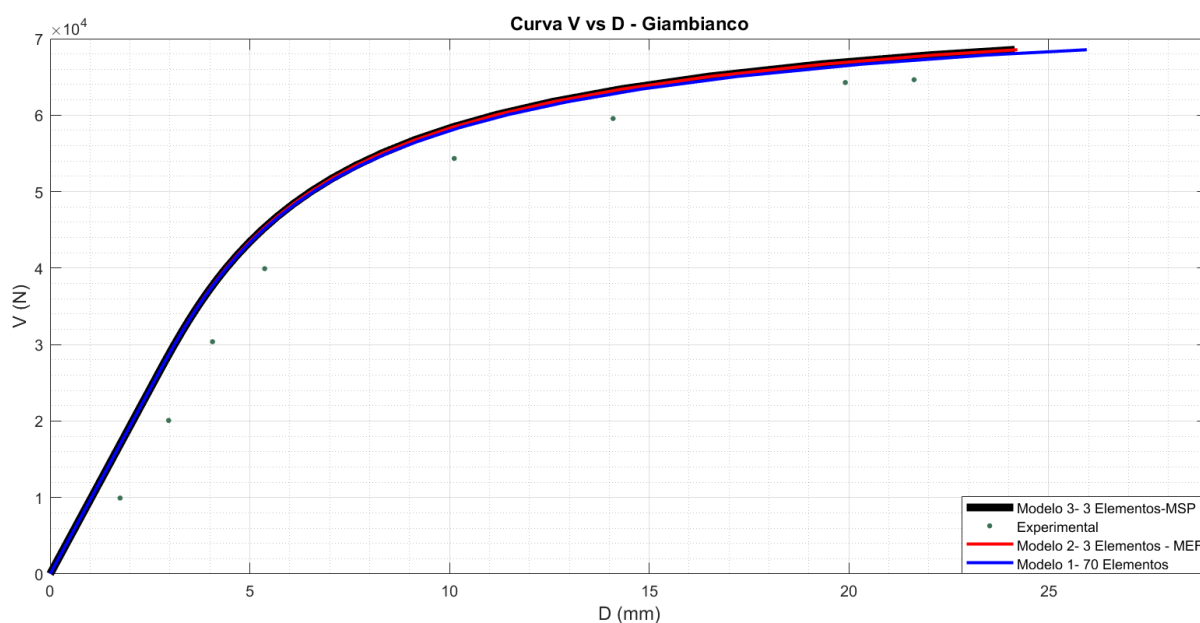


Figura 36 – Curva carga lateral  $V$  vs.  $D$ .

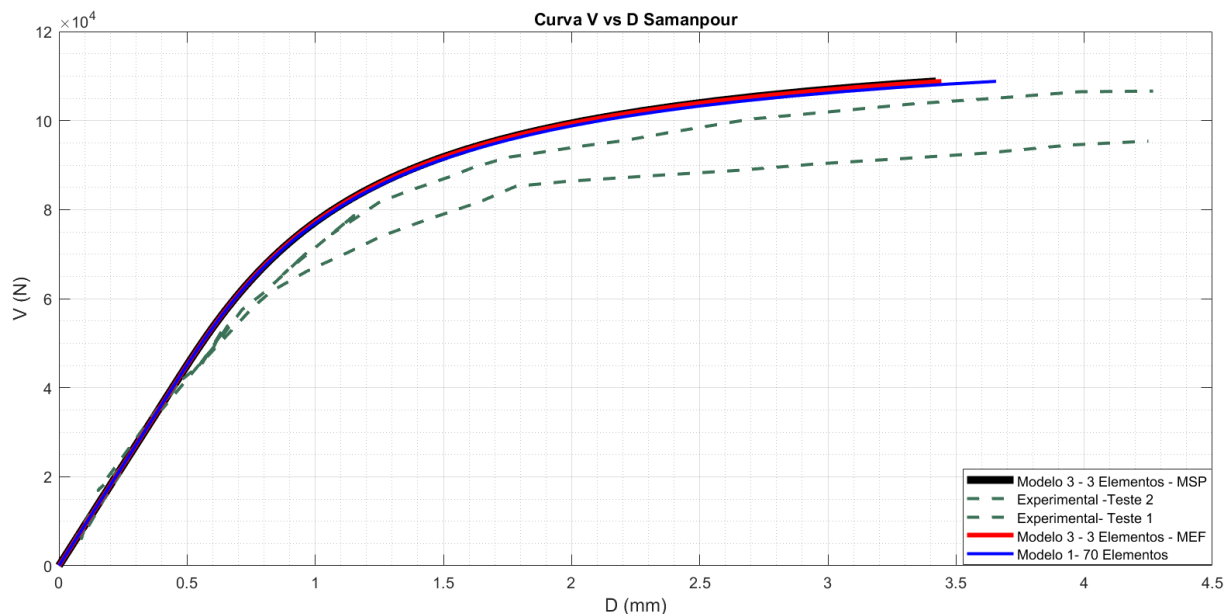


Figura 37 – Curva carga lateral  $V$  vs.  $D$ .

As comparações entre os ensaios experimentais e os modelos numéricos desenvolvidos neste estudo considerando a não linearidade geométrica são apresentados na Figura 38 e na Figura 39, em que também se verifica que o modelo 1, o modelo 2 e o modelo 3 aproximam da curva experimental  $V$  vs.  $D$ , porém o modelo 1 requer uma malha relativamente densa para se obter os resultados.

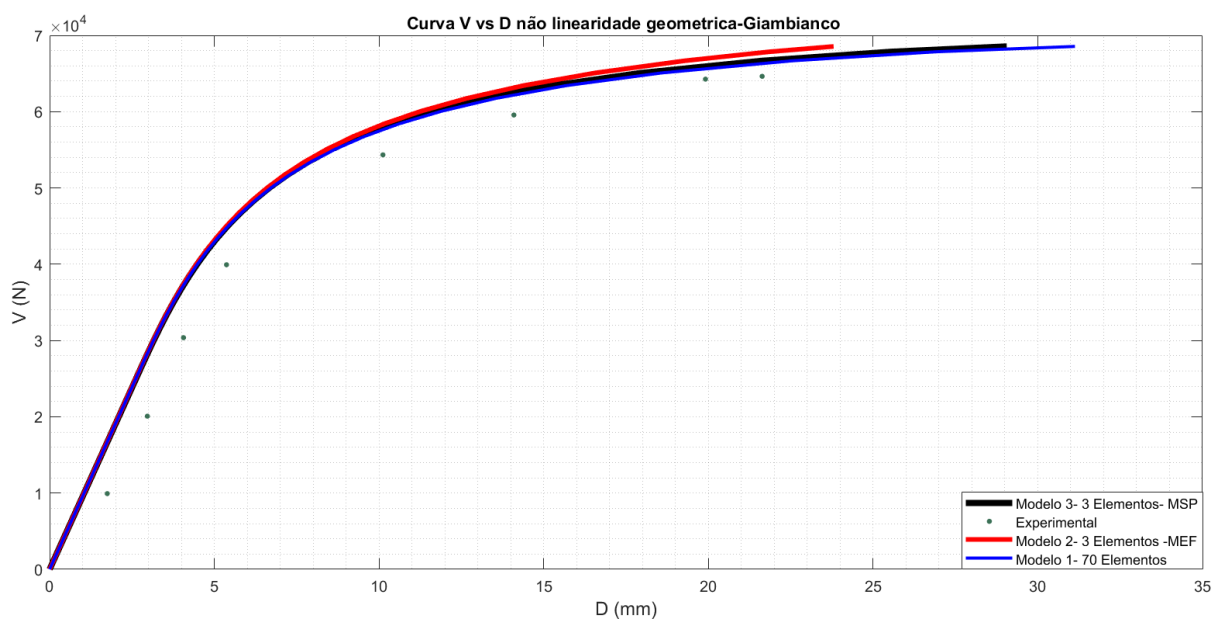


Figura 38 – Curva carga lateral  $V$  vs.  $D$  considerando a não linearidade geométrica.

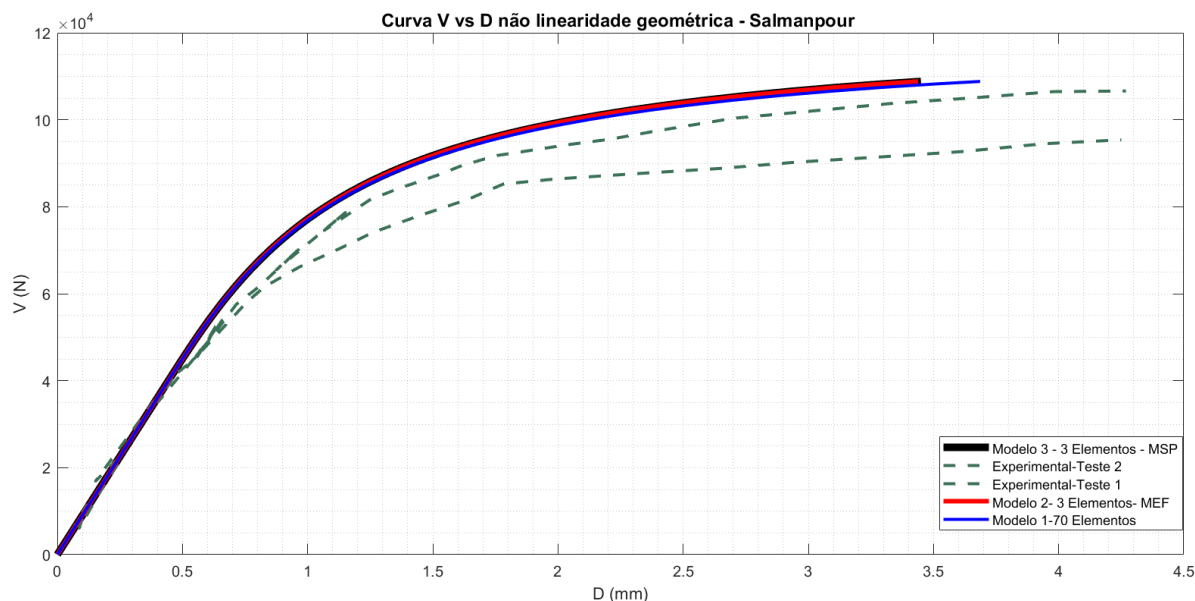


Figura 39 – Curva carga lateral  $V$  vs.  $D$  considerando a não linearidade geométrica.

As comparações entre o ensaio experimental e os modelos numéricos mostram que os resultados numéricos são satisfatórios tanto em relação a carregamento máximo quanto ao deslocamento último. Contudo, vale ressaltar que os modelos numéricos com seção transversal variável são mais eficientes, tanto os obtidos pelo método da série de potências quanto os elementos calculados através da solução da equação diferencial do elemento indeformado, visto que ambos necessitam de poucos elementos para se obter um bom resultado. Pode-se observar que em todas as curvas de capacidade lateral a configuração do painel passa de um para dois trechos quando a curva não se torna mais linear e a mudança de dois para três trechos ocorre assim que a inclinação da curva diminui e as deformações aumentam sem que haja um aumento significativo na carga lateral.

Além disso, analisando as curvas de capacidade, pode ser observado que não são percebidas relevantes diferenças ao considerar ou não a análise não linear geométrica, isto ocorre devido os painéis possuírem índice de esbeltez baixo e a carga lateral estar sendo aplicada no plano. Assim, para painéis curtos a análise não linear geométrica não é relevante. Entretanto, como a relação comprimento/largura é baixa a distorção de cisalhamento desempenha um papel importante na análise do painel, portanto a consideração da teoria de Timoshenko neste tipo de análise é de extrema importância.

As Figura 41 e Figura 42 representam a variação da extensão  $L_i$  dos diferentes trechos  $i$  que caracterizam o comportamento dos painéis. O trecho  $L_1 = \frac{H - H_1}{H}$  representa a extensão em que  $\varepsilon_{\max} < \varepsilon_y$ , onde toda seção transversal está comprimida, o trecho  $L_2 = \frac{H_1 - H_2}{H}$  corresponde a extensão em que  $\varepsilon_{\max} < \varepsilon_y$  e onde somente uma parte da seção está comprimida. Vale ressaltar que tanto  $L_1$  como  $L_2$  estão no regime elástico. Contudo, no caso do trecho  $L_3 = \frac{H_2}{H}$  onde  $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_y$  o regime é elastoplástico e apenas uma parte da seção está comprimida, conforme é ilustrado na Figura 40 .

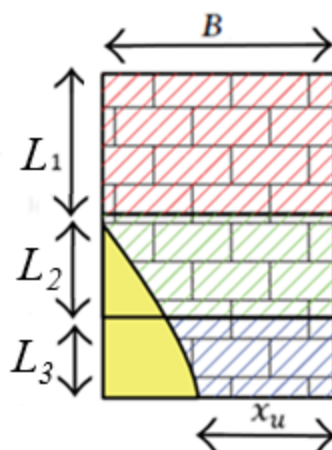


Figura 40 –Extensões dos trechos do painel Grande et al. (2013).

Assim, os gráficos das Figura 41 e Figura 42 tem como principal objetivo apresentar o processo da formação dos vários trechos do painel que caracterizam o comportamento da estrutura quando a força externa  $V$  aumenta. É interessante observar que em ambas as figuras  $H_1 = H_2$  quando o eixo neutro está localizado no centro da seção ( $x_u/B = 0.5$ ) Grande et al. (2013).

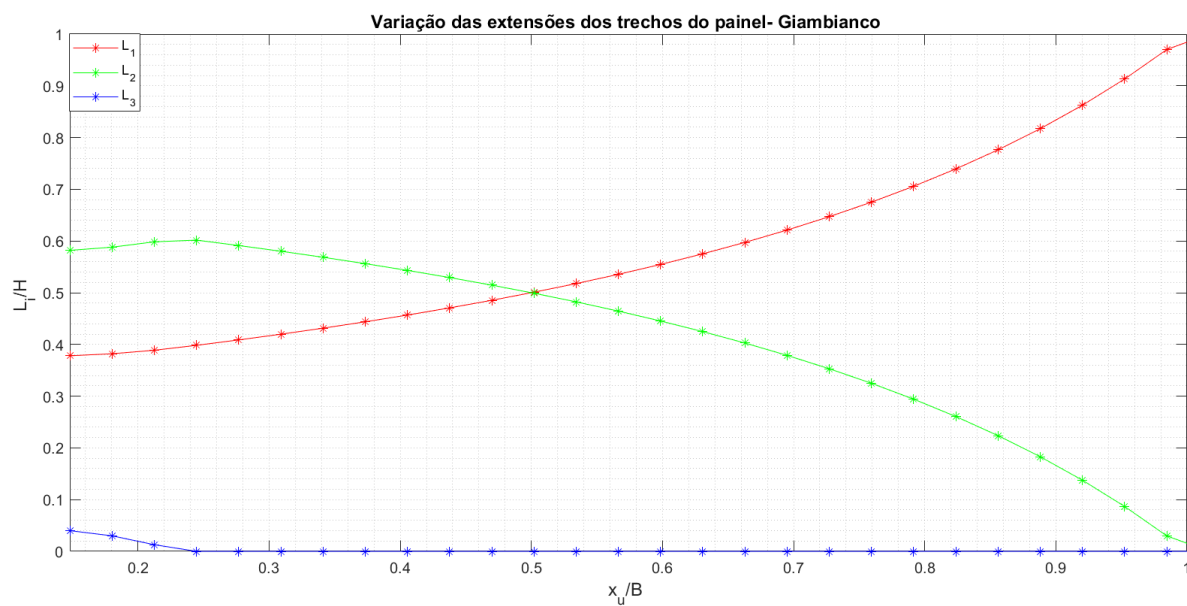


Figura 41 – Variação da extensão dos trechos do painel.

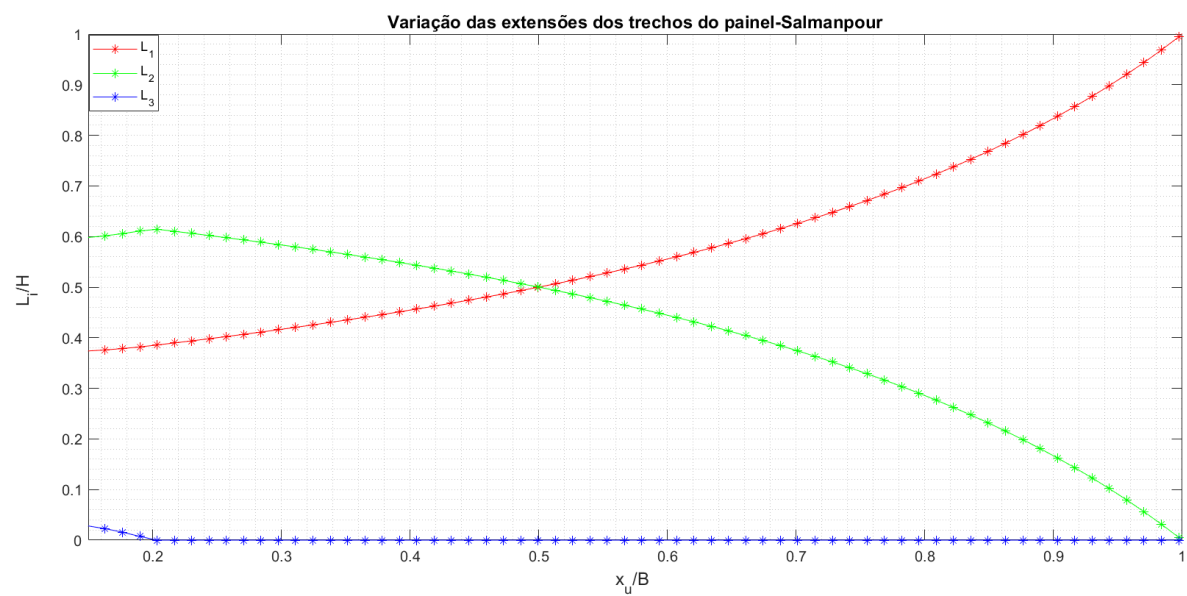


Figura 42 – Variação da extensão dos trechos do painel

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por ser um material compósito com diferentes propriedades a depender da direção analisada, a modelagem numérica da alvenaria se torna mais difícil do que outros materiais como o aço ou o concreto. Durante a realização da revisão bibliográfica, verificou-se que é necessário dimensionar as paredes de alvenaria estrutural de modo que elas sejam capazes de absorver os esforços cortantes ocasionados por eventos como ventos e sismos. Nesse contexto, a resposta de um painel sob compressão submetido à carga lateral é utilizada para verificar a capacidade de carga lateral (carga lateral vs. deflexão lateral) dessas estruturas.

Nesse estudo, foi realizada uma análise unidimensional de um painel de alvenaria através do Método dos Elementos Finitos, sendo a alvenaria considerada como um material homogêneo, ou seja, dotada de propriedades elásticas médias. A metodologia utilizada aprimora a abordagem apresentada por Grande (2013) para o cálculo de curvas de capacidade lateral de painéis de alvenaria submetidos a carga axial compressiva. Posto isto, o painel de alvenaria de base engastada e topo livre não admite tensão de tração, assim, a seção transversal resistente varia continuamente ao longo da altura, conforme a evolução da região comprimida, sendo que a resposta à compressão possui comportamento elasto-plástico perfeito.

Além disso, a estrutura estudada considera que para um dado valor de força lateral, o painel pode ser composto por diferentes trechos ao longo da estrutura, de modo que cada trecho possui estado tensão- deformação característico. O número de trechos e as suas extensões dependem de uma série de parâmetros como as propriedades da alvenaria, o valor da carga aplicada e a geometria do painel.

Neste contexto, foram estudadas três abordagens para avaliar a resposta não linear de painéis de alvenaria. Essas ferramentas têm como propósito esquematizar um painel como um conjunto de elementos finitos, utilizando a formulação de Timoshenko, ou seja, levando em conta tanto a deformação por flexão quanto a distorção por cisalhamento.

As comparações entre o ensaio experimental e os modelos numéricos mostram que os resultados numéricos são satisfatórios tanto em relação a carregamento máximo quanto ao deslocamento último. Contudo, vale ressaltar que

os modelos numéricos com seção transversal variável são mais eficientes tanto pela abordagem utilizando série de potências como o elemento finito cujas matrizes são obtidas diretamente da solução da equação diferencial, posto que necessitam de poucos elementos para se obter um bom resultado. Diferente da abordagem que utiliza elementos finitos com propriedades constantes ao longo do comprimento, em que resultados confiáveis somente serão alcançados com malhas relativamente densas, de modo a representar a mudança da seção transversal de forma suave.

Como esperado não é possível notar diferenças relevantes na consideração da análise não linear geométrica, isto ocorre devido os painéis possuírem índice de esbeltez baixo e a carga lateral estar sendo aplicada no plano. Entretanto, como a relação comprimento/largura é baixa a distorção de cisalhamento desempenha um papel importante na análise do painel, portanto a consideração da teoria de Timoshenko neste tipo de análise é de extrema importância.

Fundamentado nos estudos realizados, o presente trabalho aponta para o desenvolvimento de futuras pesquisas que avaliem os resultados das formulações apresentadas em análises não lineares para cargas aplicadas fora do plano e carregamento distribuído. Outra sugestão que este trabalho indica é a expansão das formulações, desenvolvendo elementos para outras seções transversais. Seguindo raciocínio semelhante, sugere-se, ainda, considerar a imperfeição geométrica para o cálculo da capacidade de carga das colunas.



## REFERÊNCIAS

- ABNT. NBR 15270-1: Componentes cerâmicos Parte 1: Blocos cerâmicos para alvenaria de vedação — Terminologia e requisitos. Rio de Janeiro, 2005.
- ABNT. NBR 15270-2: Componentes cerâmicos Parte 2: Blocos cerâmicos para alvenaria estrutural – Terminologia e requisitos. Rio de Janeiro, 2005.
- ABNT. NBR 15270-3: Componentes cerâmicos Parte 3: Blocos cerâmicos para alvenaria estrutural e de vedação – Métodos de ensaio. Rio de Janeiro, 2005.
- ABNT.NBR 16868-3: Alvenaria Estrutural Parte 3: Métodos de Ensaio. Rio de Janeiro, 2020.
- Al-Sadder, Samir Z. Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam–column member. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, n. 11, p. 1561-1584, 2004.
- Angelillo, Maurizio, ed. *Mechanics of masonry structures*. Vienna: Springer, 2014.
- Campbell Barraza, Jaime Andrés. *Numerical model for nonlinear analysis of masonry walls*. 2012.
- Benedetti, Andrea, Elisa Steli. Analytical models for shear–displacement curves of unreinforced and FRP reinforced masonry panels. *Construction and Building Materials*, v. 22, n. 3, p. 175-185, 2008.
- Burgos, Rodrigo Bird. *Avaliação de Cargas Críticas e Comportamento Pós-Crítico Inicial de Pórticos Planos*. 2005. Tese (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Burgos, Rodrigo Bird. *Notas de aula do curso de hiperestática 2*. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2020.
- Burgos, Rodrigo Bird, e Luiz Fernando Martha. Exact Shape functions and tangent stiffness matrix for the buckling of beams - columns considering shear deformation. *XXXIV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2013, Pirenópolis, Brasil.

Chaimoon, Krit, e Mario M. Attard. Modeling of unreinforced masonry walls under shear and compression. *Engineering structures*, v. 29, n. 9, p. 2056-2068, 2007.

Grande, Ernesto, et al. A frame element model for the nonlinear analysis of FRP-strengthened masonry panels subjected to in-plane loads. *Advances in Materials Science and Engineering*, v. 2013, 2013.

Ferreira, Ana Margarida Oliveira Louro. *Modelação de paredes em alvenaria estrutural de tijolo*. 2014. Tese de Mestrado. Universidade Nova Lisboa.

Gesteira, Aline dos Santos Alves. Estudo do comportamento de painéis de alvenaria submetidos a carregamento lateral utilizando elementos de pórtico com seção transversal variável. *XLI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2020, Foz do Iguaçu, Brasil.

Giambanco, G., S. Rizzo, and R. Spallino. *Il Modello di Interfaccia a Doppia Asperità per l'analisi delle Strutture Discontinue*. Atti del Convegno Nazionale: La Meccanica delle Murature tra Teoria e Progetto, Messina, Italy, 1996.

Hamid, Ahmad A., A. Mahmoud, and Sherif Abo El Magd. Strengthening and repair of unreinforced masonry structures: state-of-the-art. In: *Proc., 10th Int. Brick and Block Masonry Conf.* 1994. p. 485-497.

Heyman, Jacques. The stone skeleton. *International Journal of solids and structures*, v. 2, n. 2, p. 249-279, 1966.

Kreyszig, E. *Advanced engineering mathematics*. Ohio, Columbus: JOHN WILEY and SONS. 2006.

Magenes, Guido, and Gian Michele Calvi. In-plane seismic response of brick masonry walls. *Earthquake engineering & structural dynamics*, v. 26, n. 11, p. 1091-1112, 1997

Marques, Rui Filipe Pedreira. *Metodologias inovadoras no cálculo sísmico de estruturas em alvenaria simples e confinada*. 2013.

Martha, Luiz F. *Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos*, 2ª Edição. 2017.

—. *Análise matricial de estruturas com orientação a objetos*. Elsevier Brasil, 2018

—. A structural educational interactive tool. Proceedings of Workshop in Multimedia Computer Techniques in Engineering Education, Institute for Structural Analysis, Technical University of Graz, Austria, p. 51-65, 1999.

Mata, Rodrigo Carvalho da . Análise experimental e numérica do comportamento de junta em painéis de contraventamento de alvenaria estrutural. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

MathWorks, Inc. Matlab Reference Manual. 2018.

McGuire, William, Richard H. Gallagher, and Ronald D. Ziemian. Matrix Structural Analysis, Hamilton Printing Company. Inc., USA, 2000.

Lu, Mu, Arturo E. Schultz, and Henryk K. Stolarski. Application of the arc-length method for the stability analysis of solid unreinforced masonry walls under lateral loads. Engineering Structures, v. 27, n. 6, p. 909-919, 2005.

Di Pasquale, Salvatore. New trends in the analysis of masonry structures. Meccanica, v. 27, n. 3, p. 173-184, 1992.

Reddy, J. N., C.M.Wang, e C.Y.Wang. Exact solutions for buckling of structural members. CRC press, 2004.

Roca, Pere. Assessment of masonry shear-walls by simple equilibrium models. Construction and Building Materials, v. 20, n. 4, p. 229-238, 2006.

Rodrigues, Marcos Antonio Campos, Rodrigo Bird Burgos, and Luiz Fernando Martha. A unified approach to the Timoshenko 3D beam-column element tangent stiffness matrix considering higher-order terms in the strain tensor and large rotations. International Journal of Solids and Structures, v. 222, p. 111003, 2021.

Rodrigues, Marcos Antonio Campos, Rodrigo Bird Burgos, and Luiz Fernando Martha. A Unified Approach to the Timoshenko Geometric Stiffness Matrix Considering Higher-Order Terms in the Strain Tensor. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 16, 2019.

Rodrigues, Marcos Antonio Campos. Soluções Integradas para as Formulações do Problema de Não Linearidade Geométrica. 2019. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Roque, João Carlos Almendra. Reabilitação estrutural de paredes antigas de alvenaria. 2002. Tese de Doutorado. Universidade do Minho.

Salmanpour, Amir Hosein. Displacement capacity of structural masonry. 2017. Tese de Doutorado. ETH Zurich.

Sandoval, Cristian, and Pere Roca. Study of the influence of different parameters on the buckling behaviour of masonry walls. *Construction and Building Materials*, v. 35, p. 888-899, 2012.

Santos, Emerson Acácio Feitosa. Estudo da influência das propriedades elásticas da interface bloco-argamassa na rigidez de paredes de alvenaria. 2014. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

Silva, Carolina Rocha Fortes da. Implementação computacional de modelos constitutivos para juntas de argamassa de estruturas de alvenaria no ANSYS. *Tese de Mestrado*, 2020. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Silva, Fernando Artur Nogueira, Paulo B. Lourenço, and Romilde A. de Oliverira. Paredes de alvenaria estrutural não armada dotadas de aberturas e submetidas a carregamento lateral. Relatório 03-DEC/E-13, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, 2003.

Silva, Maria Flavia Dutra Silva. Ferramenta Gráfico-Interativa para o Dimensionamento de Pórticos Planos de Concreto Armado Considerando Não Linearidade Geométrica, 2017. Tese de Mestrado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Soltani, M., B. Asgarian, and Foudil Mohri. Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method. *Journal of constructional steel research*, v. 96, p. 106-126, 2014.

Soltani, Masoumeh, and Behrouz Asgarian. Finite element formulation for linear stability analysis of axially functionally graded nonprismatic timoshenko beam. *International Journal of Structural Stability and dynamics*, v. 19, n. 02, p. 1950002, 2019.

—. Finite element modelling for buckling analysis of tapered axially functionally graded Timoshenko beam on elastic foundation. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 2020.

Soltani, Masoumeh, and Behrouz Asgarian. New hybrid approach for free vibration and stability analyses of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams with variable cross-section resting on uniform Winkler-Pasternak foundation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 16, 2019.

Eloy, Luiz. *Métodos dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. Elsevier Brasil, 2010.

Wong, Foek Tjong, et al. On the derivation of exact solutions of a tapered cantilever timoshenko beam. *Civil Engineering Dimension*, v. 21, n. 2, p. 89-96, 2019.

## APÊNDICE A

Neste apêndice são apresentadas as equações diferenciais, suas soluções, as funções de forma e a matriz de rigidez de um elemento com seção transversal uniforme. Logo, a expressão da área e o momento de inercia da seção transversal são:

$$A(x) = A_0 = B_e t \quad (\text{A.1})$$

$$I(x) = I_0 = \frac{B_e^3 t}{12} \quad (\text{A.2})$$

A Equação (A.1) representa a equação diferencial para comportamento a flexão, no caso da barra prismática a área é constante, portanto, só há uma variável na equação diferencial: o deslocamento axial  $u_0(x)$ . Dessa forma, a Equação (2.39), trivializa em:

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

As condições de contorno são as mesmas da seção transversal variável, ou seja, a função de forma  $N_1^u$  é definida considerando  $u(0) = 1, u(L) = 0$  e a função de forma  $N_4^u$  é definida considerando  $u(0) = 0, u(L) = 1$ . Posto isto, as funções de forma resultantes, no caso da barra prismática, estão indicadas a seguir:

$$N_1^u = 1 - \frac{x}{L} \quad (\text{A.4})$$

$$N_4^u = \frac{x}{L} \quad (\text{A.5})$$

As Equações (2.42) e (2.43) representam as equações diferenciais para comportamento a flexão, porém como a barra é prismática o momento de inercia e a área são constantes, assim sendo as soluções homogêneas são obtidas resolvendo-se as seguintes equações:

$$\frac{d}{dx} \left[ \chi GA \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) \right] = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d}{dx} \left[ EI \frac{d\theta}{dx} \right] + \chi GA \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Derivando a Equação (A.6) uma vez em relação a  $x$  e utilizando a Equação (A.7), chega-se a:

$$EI \frac{d^3\theta}{dx^3} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Logo, a solução homogênea para a rotação da seção transversal é escrita através de um polinômio de terceiro grau:

$$\theta(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo  $\theta(x)$  da equação anterior em  $\theta$  da Equação (A.7), tem-se:

$$EI c_3 + \chi GA \frac{dv_0}{dx} - \chi GA \left( c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Ou melhor, reescrevendo em função da derivada do deslocamento transversal, chega-se a:

$$\frac{dv_0^h}{dx} = \frac{EI}{\chi GA} c_3 - c_1 + c_2 x + c_3 \frac{x^2}{2} \quad (\text{A.11})$$

$$v_0 = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left( \frac{x^3}{6} - \frac{EI}{\chi GA} x \right)$$

Integrando, apenas uma vez em relação  $x$ , obtém-se:

$$v_0 = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left( \frac{x^3}{6} - \frac{EI}{\chi GA} x \right) \quad (\text{A.12})$$

E utilizando o parâmetro  $\Omega_0$  da Equação (2.51), tem-se:

$$v_0 = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \left( \frac{x^3}{6} - \Omega_0 L^2 x \right) \quad (\text{A.13})$$

É apropriado reescrever as Equações diferenciais (A.9) e (A.13) de forma matricial, para isso, é necessário relacionar o campo de deslocamentos generalizados, incluindo as rotações, com os coeficientes dos polinômios da solução homogênea.

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} - \Omega L^2 x \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X] \{c\} \quad (\text{A.14})$$

Através da aplicação das condições de contorno apropriadas, Equação (A.15), é possível avaliar a solução homogênea nas extremidades da barra, a fim de obter a matriz que relaciona o vetor de deslocabilidades com o vetor dos coeficientes da solução, conforme a Equação (A.16).

$$\{d'\} = \{v_0(0) \quad \theta(0) \quad v_0(L) \quad \theta(L)\} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{Bmatrix} v_0(0) \\ \theta(0) \\ v_0(L) \\ \theta(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & \frac{L^2}{2} & \left(\frac{1}{6} - \Omega\right)L^3 \\ 0 & 1 & L & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \{d'\} = [H] \{c\} \quad (\text{A.16})$$

Invertendo a matriz  $[H]$ , obtém-se uma matriz que relaciona o vetor dos coeficientes da solução homogênea com o vetor das deslocabilidades, que de uma forma condensada pode ser expresso por:

$$[c] = [H]^{-1} \{d'\} \quad (\text{A.17})$$

A substituição do vetor dos coeficientes da solução homogênea, Equação (A.17) na Equação (A.14), resulta na matriz de funções de forma, que é uma relação entre o campo de deslocamentos generalizados e o vetor de deslocabilidade,



Equação (A.18). As funções de forma interpolam os deslocamentos, solução discreta, a fim de adquirir a solução contínua do problema.

$$\begin{Bmatrix} v_0(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = [X][H]^{-1} \{d'\} \rightarrow [N] = [X][H]^{-1} \quad (\text{A.18})$$

As expressões a seguir demonstram as funções de forma para o comportamento à flexão de Timoshenko.

$$N_1^v = -\frac{(x-L)(12L^2\Omega - 2x^2 + Lx + L^2)}{L^3(12\Omega + 1)} \quad N_1^\theta = \frac{6x(x-L)}{L^3(12\Omega + 1)} \quad (\text{A.19})$$

$$N_2^v = -\frac{x(x-L)(6L\Omega - x + L)}{L^2(12\Omega + 1)} \quad N_2^\theta = -\frac{(x-L)(12L\Omega - 3x + L)}{L^2(12\Omega + 1)} \quad (\text{A.20})$$

$$N_3^v = \frac{x(12L^2\Omega - 2x^2 + 3Lx)}{L^3(12\Omega + 1)} \quad N_3^\theta = -\frac{6x(x-L)}{L^3(12\Omega + 1)} \quad (\text{A.21})$$

$$N_4^v = \frac{x(x-L)(6L\Omega + x)}{L^2(12\Omega + 1)} \quad N_4^\theta = \frac{x(12L\Omega - 3x - 2L)}{L^2(12\Omega + 1)} \quad (\text{A.22})$$

Para deduzir a matriz de rigidez elástica na situação da barra prismática considerando a teoria de flexão de Timoshenko é necessário substituir as funções de forma para seção transversal uniforme na matriz de deformações e resolver as integrais do problema.

$$K_E = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+12\Omega_0)} & \frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+12\Omega_0)} & \frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} & \frac{4EI(1+3\Omega_0)}{L(1+12\Omega_0)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} & \frac{2EI(1-6\Omega_0)}{L(1+12\Omega_0)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+12\Omega_0)} & -\frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+12\Omega_0)} & -\frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} & \frac{2EI(1-6\Omega_0)}{L(1+12\Omega_0)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+12\Omega_0)} & \frac{4EI(1+3\Omega_0)}{L(1+12\Omega_0)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

É importante observar que, quando  $\Omega_0 = 0$  a Equação (A.23) se transforma na matriz de rigidez de Euler-Bernoulli. A teoria de Euler-Bernoulli considera que o

deslocamento transversal fica associado a rotação da seção transversal em uma equação que também é conhecida como uma relação de compatibilidade:

$$\theta = \frac{dv_0}{dx} \quad (\text{A.24})$$

A expressão anterior pode ser obtida considerando a distorção de cisalhamento da Equação (2.9) nula. Isso enfatiza que, a consideração de que o giro de seções transversais se mantendo normais ao eixo deformado da barra está associada a desprezar deformações por cisalhamento.

A matriz de rigidez geométrica para barra prismática considerando a teoria de flexão de Timoshenko pode ser calculada através da substituição das funções de forma para seção transversal uniforme na matriz de deformações e resolver as integrais do problema.

$$K_G = P \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6(120\Omega_0^2 + 20\Omega_0 + 1)}{5L(12\Omega_0 + 1)^2} & \frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} & 0 & -\frac{6(120\Omega_0^2 + 20\Omega_0 + 1)}{5L(12\Omega_0 + 1)^2} & \frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} \\ 0 & \frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} & \left( \frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega_0 + 1)^2} \right) & 0 & -\frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} & -\left( \frac{L}{12} - \frac{L}{20(12\Omega_0 + 1)^2} \right) \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6(120\Omega_0^2 + 20\Omega_0 + 1)}{5L(12\Omega_0 + 1)^2} & -\frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} & 0 & \frac{6(120\Omega_0^2 + 20\Omega_0 + 1)}{5L(12\Omega_0 + 1)^2} & -\frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} \\ 0 & \frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} & -\left( \frac{L}{12} - \frac{L}{20(12\Omega_0 + 1)^2} \right) & 0 & -\frac{1}{10(12\Omega_0 + 1)^2} & \left( \frac{L}{12} + \frac{L}{20(12\Omega_0 + 1)^2} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

É importante observar que, quando  $\Omega_0 = 0$  a Equação (A.25) se modifica na matriz de rigidez geométrica de Euler-Bernoulli.

As cargas nodais equivalentes para seção transversal uniforme são calculadas substituindo-se as funções de forma para seção prismática na Equação (2.75). O resultado é:

$$f_{a_1} = f_{a_2} = -\frac{p_0 L}{2}, \quad f_{01} = f_{03} = +\frac{q_0 L}{2}, \quad f_{02} = -f_{04} = +\frac{q_0 L^2}{12}, \quad (\text{A.26})$$

É interessante notar que as cargas nodais equivalentes devidas a carga uniformemente distribuídas não dependem do cisalhamento.

## APÉNDICE B

$$N_2^\theta = -\frac{x(L-x)(\alpha-1)^3}{L(\log(\alpha)(\Omega_0 + \alpha - \Omega_0\alpha - \Omega_0\alpha^2 + \Omega_0\alpha^3 + 1) - 2\alpha + 2)(L-x+\alpha x)^2} \quad (\text{B.1})$$

$$N_2^v = \frac{x^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) - x(L\alpha^2 - 4L\alpha + 3L) - 2L^2\alpha + \log\left(\frac{L+x(\alpha-1)}{L\alpha}\right)\left(x(L+L\Omega_0) + L^2\Omega_0\alpha^2 + L^2\Omega_0\alpha\right) + 2L^2 + L\Omega_0\alpha^3 x \log\left(\frac{x^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + L^2 - x(2L - 2L\alpha)}{L^2\alpha^2}\right)}{\log(\alpha)(L^2\Omega_0 - \alpha(L^2\Omega_0 - L^2) + L^2 - L^2\Omega_0\alpha^2 + L^2\Omega_0\alpha^3) - 2L^2\alpha - x(2L - 4L\alpha + \log(\alpha)(-L\Omega_0\alpha^4 + 2L\Omega_0\alpha^3 - L\alpha^2 - 2L\Omega_0\alpha + L + L\Omega_0) + 2L^2\alpha) + 2L^2} \quad (\text{B.2})$$

$$N_3^\theta = \frac{\log\left(\frac{L\alpha}{L+x(\alpha-1)}\right)\left(L^2\Omega_0 + x(L\Omega_0\alpha^4 + L\alpha^2) + L^2\alpha + L^2 + L^2\Omega_0\alpha^3\right) + L\Omega_0\alpha x \log\left(\frac{L^2\alpha^2}{x^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + L^2 - x(2L - 2L\alpha)}\right)}{\log(\alpha)(L^2\Omega_0 - \alpha(L^2\Omega_0 - L^2) + L^2 - L^2\Omega_0\alpha^2 + L^2\Omega_0\alpha^3) - 2L^2\alpha - x(2L - 4L\alpha + \log(\alpha)(-L\Omega_0\alpha^4 + 2L\Omega_0\alpha^3 - L\alpha^2 - 2L\Omega_0\alpha + L + L\Omega_0) + 2L^2\alpha) + 2L^2} \quad (\text{B.2})$$

$$N_3^v = \frac{L^2 - x^2}{|L-x+\alpha x|^2} \quad (\text{B.3})$$

$$N_3^v = \frac{x(L-x)(2\log(\alpha) - 4\alpha + 2\Omega_0\log(\alpha) + \alpha^2 + 2\Omega_0\alpha^2\log(\alpha) - 4\Omega_0\alpha\log(\alpha) + 3)}{(L-x+\alpha x)^2(\log(\alpha) + \Omega_0\log(\alpha) - \alpha(\Omega_0\log(\alpha) - \log(\alpha) + 2) - \Omega_0\alpha^2\log(\alpha) + \Omega_0\alpha^3\log(\alpha) + 2)}$$

$$N_3^v = \frac{L\alpha - L\alpha^2 + L(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)(\log(L) - 2\alpha\log(L) + \alpha^2\log(L) + \alpha^2\log(\alpha))}{\log(\alpha) - 6\alpha + \Omega_0\log(\alpha) - \alpha\log(\alpha) + 6\alpha^2 - 2\alpha^3 - \alpha^2\log(\alpha) + \alpha^3\log(\alpha) + 2\Omega_0\alpha^2\log(\alpha) + 2\Omega_0\alpha^3\log(\alpha) - 3\Omega_0\alpha^4\log(\alpha) + \Omega_0\alpha^5\log(\alpha) - \Omega_0\alpha\log(L\alpha) + \Omega_0\alpha\log(L) - 2\Omega_0\alpha\log(\alpha) + 2} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{x(\log(\alpha) - \alpha + \Omega_0\log(\alpha) + \Omega_0\alpha^2\log(\alpha) - 2\Omega_0\alpha\log(\alpha) + 1)}{4\alpha - \log(\alpha) - \Omega_0\log(L\alpha) + \Omega_0\log(L) - 2\alpha^2 + \alpha^2\log(\alpha) - 2\Omega_0\alpha^3\log(\alpha) + \Omega_0\alpha^4\log(\alpha) + 2\Omega_0\alpha\log(\alpha) - 2}$$

$$\frac{2L^2\alpha - 2L^2\alpha^2 + 2L^2\alpha^2\log(\alpha)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}{2(\alpha-1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)}$$

$$\frac{L\log(L-x+\alpha x)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1)}{\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0\alpha^2 - 2\Omega_0\alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2}$$

$$N_5^{\theta} = \frac{x(L-x)(\alpha-1)^3}{L(\log(\alpha)(\Omega_0 + \alpha - \Omega_0\alpha - \Omega_0\alpha^2 + \Omega_0\alpha^3 + 1) - 2\alpha + 2)(L-x+\alpha x)^2} \quad (\text{B.5})$$

$$N_5^{\nu} = \frac{\log(L-x+\alpha x) - \log(L)}{\log(\alpha)}$$

$$\frac{(\alpha-1)(2L^2 \log(L-x+\alpha x) - 2L^2 \log(L) - 2Lx \log(L-x+\alpha x) + 2Lx \log(L) - 2L\alpha x \log(L) + 2L\alpha x \log(L-x+\alpha x)) - \log(\alpha)(\alpha-1)(Lx + \alpha x^2 - x^2 + L\alpha x)}{L \log(\alpha)(L-x+\alpha x)(\log(\alpha) - 2\alpha + \Omega_0 \log(\alpha) + \alpha \log(\alpha) - \Omega_0 \alpha^2 \log(\alpha) + \Omega_0 \alpha^3 \log(\alpha) - \Omega_0 \alpha \log(\alpha) + 2)} \quad (\text{B.6})$$

$$N_6^{\theta} = \frac{\alpha - \alpha^2 + \alpha^2 \log(\alpha)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1)}{4\alpha - \log(\alpha) - \Omega_0 \log(L\alpha) + \Omega_0 \log(L) - 2\alpha^2 + \alpha^2 \log(\alpha) - 2\Omega_0 \alpha^3 \log(\alpha) + \Omega_0 \alpha^4 \log(\alpha) + 2\Omega_0 \alpha \log(\alpha) - 2}$$

$$- \frac{L^2 \alpha - x(-L\alpha^4 + 3L\alpha^3 - 3L\alpha^2 + L\alpha) - L^2 \alpha^2 + L^2 \alpha^2 \log(\alpha)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1)}{(\alpha-1)(\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)(L-x+\alpha x^2)} \quad (\text{B.7})$$

$$N_6^{\nu} = \frac{L\alpha^3 - L\alpha^2 + L\alpha(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1)(\log(L) - 2\alpha \log(L) - \alpha \log(\alpha) + \alpha^2 \log(L))}{\log(\alpha) - 6\alpha + \Omega_0 \log(\alpha) - \alpha \log(\alpha) + 6\alpha^2 - 2\alpha^3 - \alpha^2 \log(\alpha) + \alpha^3 \log(\alpha) + 2\Omega_0 \alpha^2 \log(\alpha) + 2\Omega_0 \alpha^3 \log(\alpha) - 3\Omega_0 \alpha^4 \log(\alpha) + \Omega_0 \alpha^5 \log(\alpha) - \Omega_0 \alpha \log(L\alpha) + \Omega_0 \alpha \log(L) - 2\Omega_0 \alpha \log(\alpha) + 2}$$

$$+ \frac{\alpha x - \alpha^2 x + \alpha^2 x \log(\alpha)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1)}{4\alpha - \log(\alpha) - \Omega_0 \log(L\alpha) + \Omega_0 \log(L) - 2\alpha^2 + \alpha^2 \log(\alpha) - 2\Omega_0 \alpha^3 \log(\alpha) + \Omega_0 \alpha^4 \log(\alpha) + 2\Omega_0 \alpha \log(\alpha) - 2} \quad (\text{B.8})$$

$$+ \frac{L^2 \alpha^2 (\log(\alpha) + \Omega_0 \log(\alpha) + 1) - L^2 \alpha^3 (2\Omega_0 \log(\alpha) + 1) + L^2 \Omega_0 \alpha^4 \log(\alpha)}{(\alpha-1)^2 (\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)(L-x+\alpha x)} - \frac{L\alpha \log(L-x+\alpha x)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1)}{\log(\alpha)(\alpha+1)(\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2}$$

## APÊNDICE C

Não é somente por equações diferenciais que é possível obter os coeficientes da matriz de rigidez elástica. Esse procedimento também é possível através dos coeficientes de flexibilidade, para isso é necessário obter os coeficientes de flexibilidade depois inverter a matriz resultante para chegar na de rigidez. Por meio, da relação entre a flexibilidade e a rigidez, pode-se obter os coeficientes de 2 sistemas desacoplados e obter os demais coeficientes por equilíbrio, conforme será visto adiante.

É valido notar que as equações tanto para área como para a inercia para caso da seção transversal variável são apresentadas nas Equações (2.37) e (2.38) respectivamente, como o cisalhamento está incluso o parâmetro adimensional  $\Omega$  também irá variar ao longo do comprimento do elemento, Dessa forma, tem-se:

$$\Omega = \frac{EI(x)}{\chi GA(x)L^2} = \frac{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3}{\chi GA_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^2 L^2} = \Omega_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^2 \quad (C.1)$$

Enquanto a matriz de rigidez consiste em forças e momentos necessários para produzir valores unitários de deslocamentos e rotações. A matriz de flexibilidade consiste nos deslocamentos e rotações que surgem ao aplicar forças e momentos unitários, conforme Figura 43. Vale ressaltar que, não existe interação entre efeitos axiais e transversais devido a linearidade geométrica, assim sendo os coeficientes da matriz de rigidez podem ser obtidos pela inversão da matriz de flexibilidade resultante.

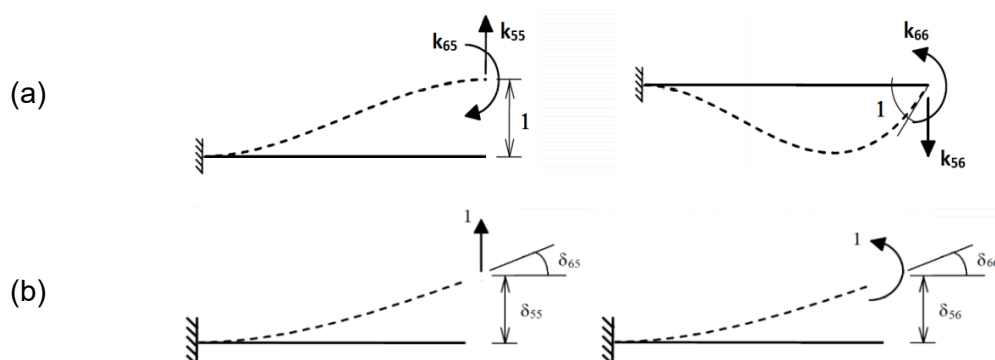


Figura 43– (a) Coeficientes de Rigidez à flexão, (b) Coeficientes de Flexibilidade

Para formular a matriz de coeficientes de flexibilidade é necessário aplicar forças e momentos unitários, para que se possa obter o deslocamento provocado por essa carga unitária. Conforme está ilustrado na Tabela 9.

|                    |                      |                    |
|--------------------|----------------------|--------------------|
|                    |                      |                    |
| $N(x) = +1$<br>1.0 | $Q(x) = -1$<br>-1.0  | $Q(x) = 0$         |
| $M(x) = 0$         | $M(x) = -x + L$<br>L | $M(x) = +1$<br>1.0 |

Tabela 9 – Forças e momentos unitários do lado direito

No caso da parte axial, considerando  $N = 1$ , obtém-se o deslocamento ( $\delta_{44}$ ) provocado pela carga unitária.

$$\delta_{44} = \int_0^L \frac{dx}{EA_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)} = \frac{L \log(\alpha)}{A_0 E (\alpha - 1)} \quad (\text{C.2})$$

Para o caso da parte transversal considerando  $Q = 1$ , obtém-se o deslocamento ( $\delta_{55}$ ) e a rotação ( $\delta_{65}$ ) provocado pelo momento unitário. Fazendo  $M = 1$ , obtém-se o deslocamento ( $\delta_{56}$ ) e a rotação ( $\delta_{66}$ ) provocados pelo momento unitário.

$$\delta_{55} = \int_0^L \frac{(-x+L)^2}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx + \int_0^L \frac{\Omega_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^2 L^2}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = \frac{L^3 \left(\log(\alpha) - 2\alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\right)}{EI_0 (\alpha - 1)^3} + \frac{L^3 \Omega_0 \log(\alpha)}{EI_0 (\alpha - 1)}, \quad (\text{C.3})$$

$$\delta_{56} = \int_0^L \frac{(-x+L)}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = \frac{L^2}{2EI_0 \alpha}, \quad \delta_{65} = \int_0^L \frac{(-x+L)}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = \frac{L^2}{2EI_0 \alpha}, \quad (\text{C.4})$$

$$\delta_{66} = \int_0^L \frac{1}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = \frac{L(\alpha + 1)}{EI_0 2\alpha^2} \quad (\text{C.5})$$

O procedimento para chegar nos coeficientes resultantes da aplicação das forças e momentos unitários do lado esquerdo são semelhantes ao direito, como ilustra a Tabela 10, mas, como  $EA$  e  $EI$  não são constantes, só é possível afirmar que  $\delta_{33}$  é igual a  $\delta_{66}$  e que  $\delta_{11}$  é igual a  $\delta_{44}$ , visto que, a integral é a mesma.

|                 |                |                 |
|-----------------|----------------|-----------------|
|                 |                |                 |
| $N(x) = -1$<br> | $Q(x) = 1$<br> | $Q(x) = 0$<br>  |
| $M(x) = 0$<br>  | $M(x) = x$<br> | $M(x) = -1$<br> |

Tabela 10 – Forças e momentos unitários do lado esquerdo

$$\delta_{11} = \delta_{44} = \int_0^L \frac{dx}{EA_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)} = \frac{L \log(\alpha)}{A_0 E (\alpha - 1)} \quad (\text{C.6})$$

$$\delta_{22} = \int_0^L \frac{x^2}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx + \int_0^L \frac{\Omega_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^2 L^2}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = \frac{L^3 (4\alpha - 3\alpha^2 + 2\alpha^2 \log(\alpha) - 1)}{2EI_0 \alpha^2 (\alpha - 1)^3} + \frac{L^3 \Omega_0 \log(\alpha)}{EI_0 (\alpha - 1)}, \quad (\text{C.7})$$

$$\delta_{23} = \int_0^L \frac{-x}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = -\frac{L^2}{2EI_0 \alpha}, \quad \delta_{32} = \int_0^L \frac{-x}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = -\frac{L^2}{2EI_0 \alpha}, \quad (\text{C.8})$$

$$\delta_{66} = \delta_{33} = \int_0^L \frac{1}{EI_0 \left(1 + (\alpha - 1) \frac{x}{L}\right)^3} dx = \frac{L(\alpha + 1)}{EI_0 2\alpha^2} \quad (\text{C.9})$$

Os coeficientes da matriz de rigidez são obtidos através da inversão de duas matrizes 3x3.

$$\begin{bmatrix} k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{55} & \delta_{65} \\ 0 & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & \delta_{23} \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{C.10})$$

$$k_{11} = \frac{A_0 E (\alpha - 1)}{L \log(\alpha)}, \quad k_{22} = \frac{EI_0 (\alpha - 1)^3 (\alpha + 1)}{L^3 (\log(\alpha) (\alpha + 1) (\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)}, \quad k_{55} = k_{22} \quad (\text{C.11})$$

$$k_{32} = k_{23} = \frac{EI_0 (\alpha - 1)^3}{L^2 (\log(\alpha) (\alpha + 1) (\Omega_0 \alpha^2 - 2\Omega_0 \alpha + \Omega_0 + 1) - 2\alpha + 2)}, \quad k_{56} = k_{65} = -k_{23} \quad (\text{C.12})$$

$$k_{33} = \frac{2EI_0 \alpha^2}{L(\alpha + 1)} + \frac{EI_0 (\alpha - 1)^3}{L(\alpha + 1) (\log(\alpha) (\Omega_0 + \alpha - \Omega_0 \alpha - \Omega_0 \alpha^2 + \Omega_0 \alpha^3 + 1) - 2\alpha + 2)}, \quad (\text{C.13})$$

$$k_{66} = \frac{2EI_0 \alpha^2}{L(\alpha + 1)} + \frac{EI_0 \alpha^2 (\alpha - 1)^3}{L(\alpha + 1) (\log(\alpha) (\Omega_0 + \alpha - \Omega_0 \alpha - \Omega_0 \alpha^2 + \Omega_0 \alpha^3 + 1) - 2\alpha + 2)}, \quad (\text{C.14})$$

Os coeficientes da parte em que as linhas vão de 1 a 3 e as colunas de 4 a 6 são obtidos por equilíbrio, conforme mostrado na Figura 44.

$$k_{14} = -k_{44}, \quad k_{25} = -k_{55}, \quad k_{35} = -k_{55}L - k_{65}, \quad k_{36} = -k_{56}L - k_{66}, \quad k_{26} = -k_{56}, \quad (\text{C.15})$$

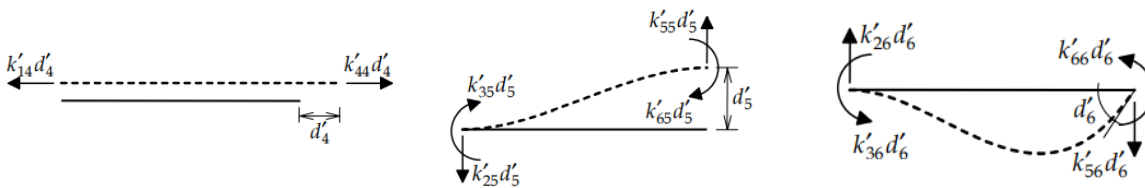


Figura 44 – Configurações deformadas elementares. (Martha, 2018)

Os demais coeficientes são obtidos pela simetria da matriz:

$$k_{41} = k_{14}, \quad k_{52} = k_{25}, \quad k_{53} = k_{35}, \quad k_{62} = k_{26}, \quad k_{63} = k_{36} \quad (\text{C.16})$$

É importante notar que, a matriz de rigidez para seção transversal uniforme também pode ser obtida pelos coeficientes de flexibilidade, o procedimento será o mesmo adotado para seção transversal variável, porém para esse caso a área, a inercia e o parâmetro adimensional  $\Omega$  serão constantes. A matriz de rigidez resultante é igual a obtida na Equação (A.23).

Outra importante consideração é que obter os coeficientes da matriz de rigidez através de funções de forma do elemento com seção transversal uniforme introduz erros, pois as funções de forma hermitianas são a solução exata da equação quando  $EA$  e  $EI$  são constantes, mas não quando são variáveis. Assim



sendo, existem 2 soluções para isso conforme foi apresentado ao longo das seções 2.2 e 2.3.

- Obter os coeficientes de flexibilidade e inverter a matriz resultante para chegar na de rigidez.
- Resolver as equações diferenciais e obter funções de forma “exatas”.

As cargas nodais equivalentes também podem ser obtidas por meio do princípio das forças virtuais, PFV. Para isso, primeiramente é preciso obter o sistema principal, ou seja, cria-se uma estrutura isostática auxiliar que é obtida da estrutura original hiperestática pela eliminação de vínculos. O sistema principal, SP, adotado no caso da Figura 23 é a estrutura isostática mostrada na Figura 45. Observa-se que foram retirados 3 vínculos externos da figura original, com isso o grau de hiperestaticidade do problema é igual a 3.

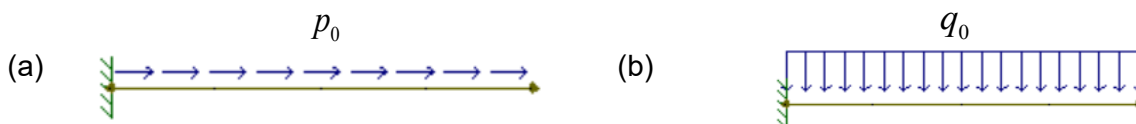


Figura 45 – Sistema principal adotado para a solução da estrutura da Figura 23.

Por meio do SP e utilizando as Equações de equilíbrio (2.21), (2.22) e (2.23) as expressões do esforço normal, do cortante e do momento fletor são calculadas:

$$\int \frac{dN(x)}{dx} = \int p_0 \rightarrow N(x) = p_0x + c_2 \quad (\text{C.17})$$

$$\int \frac{dQ(x)}{dx} = \int -q_0 \rightarrow Q(x) = -q_0x + c_1 \quad (\text{C.18})$$

$$\int \frac{dM(x)}{dx} = \int Q(x) \rightarrow M(x) = \int (q_0x + c_1) dx \rightarrow M(x) = q_0 \frac{x^2}{2} + c_1x + c_0 \quad (\text{C.19})$$

Através da aplicação das condições de contorno apropriadas, Equação (C.20), é possível obter os coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$ .

$$N \rightarrow x(0) = p_0L \quad Q \rightarrow x(0) = q_0L, \quad M \rightarrow x(0) = -\frac{q_0^2L}{2} \quad (\text{C.20})$$

$$N_0 = -p_0x + p_0L \quad Q_0 = -q_0x + q_0L \quad M_0 = -q_0 \frac{(L-x)^2}{2} \quad (C.21)$$

Para calcular as cargas nodais equivalentes é necessário encontrar os valores dos hiperestáticos que fazem com que as condições de compatibilidades violadas na criação do SP sejam restabelecidas. A determinação dos hiperestáticos é feita através da superposição de casos básicos, utilizando o SP como estrutura para as soluções básicas. Assim, o sistema de compatibilidade pode ser escrito pela Equação (C.22):

$$\{\delta_0\} + [\delta]\{X\} = \{0\} \quad (C.22)$$

Sendo,  $\{\delta_0\}$  o vetor dos termos de carga,  $[\delta]$  a matriz de flexibilidade e  $\{X\}$  o vetor dos hiperestáticos.

O cálculo dos coeficientes  $\delta_{i0}$  e  $\delta_{ij}$  que aparecem nesse sistema de equações é realizado com o auxílio do PFV. O PFV trabalha com um sistema de forças real de deformação, no qual se quer calcular um deslocamento em algum ponto, e um sistema de forças virtuais, as forças virtuais são cargas unitárias aplicada no ponto e na direção do deslocamento que se quer calcular. (Martha, 2017). Como, ilustrado na Tabela 9.

Portanto, os valores dos termos de carga são:

$$\delta_{40} = \int_0^L \frac{(-p_0x + p_0L)dx}{EA_0 \left(1 + (\alpha-1) \frac{x}{L}\right)} = \frac{L^2 p_0 (\alpha \log(\alpha) - \alpha + 1)}{A_0 E (\alpha - 1)^2} \quad (C.23)$$

$$\delta_{50} = \int_0^L \frac{-q_0(L-x)^2(-x+L)dx}{2EA_0 \left(1 + (\alpha-1) \frac{x}{L}\right)} - \int_0^L \frac{\Omega_0 \left(1 + (\alpha-1) \frac{x}{L}\right)^2 L^2 (-q_0x + q_0L)}{EI_0 \left(1 + (\alpha-1) \frac{x}{L}\right)^3} dx =$$

$$-\frac{L^4 q_0 (3\alpha + 6\alpha \log(L + L(\alpha-1)) - 6\alpha \log(L) - 6\alpha^2 + \alpha^3 + 2)}{4EI_0 (\alpha - 1)^4} - \frac{L^4 \Omega_0 q_0 (\alpha \log(\alpha) - \alpha + 1)}{EI_0 (\alpha - 1)^2} \quad (C.24)$$

$$\delta_{60} = \int_0^L \frac{-q_0(L-x)^2 dx}{2EA_0 \left(1 + (\alpha-1) \frac{x}{L}\right)} = -\frac{L^3 q_0 \left(\log(L + L(\alpha-1)) - 2\alpha - \log(L) + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{3}{2}\right)}{2EI_0 (\alpha - 1)^3} \quad (C.25)$$

Conforme foi visto anteriormente, os coeficientes de flexibilidade resultantes da aplicação das forças e momentos unitários do lado direito são dados pelas Equações (C.2), (C.3), (C.4) e (C.5).

A solução do sistema de equações de compatibilidade são os já conhecidos resultados apresentados  $f_{a_2}$  da Equação (2.76),  $f_{03}$  e  $f_{04}$  da Equação (2.77). As outras cargas são obtidas através das seguintes Equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_{a_2} + p_0 L + f_{a_1} = 0 \rightarrow f_{a_1} = -f_{a_2} - p_0 L \quad (\text{C.26})$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow f_{01} - q_0 L + f_{03} = 0 \rightarrow f_{01} = -f_{03} + q_0 L \quad (\text{C.27})$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow f_{03} L - \frac{q_0 L^2}{2} + f_{04} + f_{02} = 0 \rightarrow f_{02} = -f_{03} L + \frac{q_0 L^2}{2} - f_{04} \quad (\text{C.28})$$

Vale ressaltar que, a cargas nodais equivalentes para seção transversal uniforme também pode ser obtida pelo princípio do trabalho virtual, o procedimento será o mesmo adotado para seção transversal variável, mas para esse caso a área, a inercia e o parâmetro adimensional  $\Omega$  serão constantes. O resultado obtido será igual a Equação (A.26).