

Universidade do Estado do Rio de Janeiro Centro de Tecnologia e Ciências Instituto de Física Armando Dias Tavares

Tiago dos Santos Mendonça

Colisão de kinks via métodos espectrais

Rio de Janeiro 2015 Tiago dos Santos Mendonça

# Colisão de kinks via métodos espectrais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira

## CATALOGAÇÃO NA FONTE UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

M539c	Mendonça, Tiago dos Santos. Colisão de kinks via métodos espectrais / Tiago dos Santos Mendonça. – 2015. 47 f. : il.
	Orientador: Henrique Pereira de Oliveira. Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.
	1. Teoria de campos (Física) – Equações diferenciais - Teses. 2. Klein-Gordon, Equação de – Teses. 3. Equações diferenciais – Soluções numéricas - Teses. I. Oliveira, Henrique Pereira de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.
	CDU 530.145:517.9

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Tiago dos Santos Mendonça

# Colisão de kinks via métodos espectrais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de Maio de 2015. Banca Examinadora:

> Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira (Orientador) Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Bruno Werneck Mintz Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Eduardo Rodrigues Lima Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

# DEDICATÓRIA

Aos meus pais.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer Diogo da Costa, Agnes Léa e Vicente Paschoal pelo grande incentivo em persistir com os objetivos e a lutar contra as dificuldades.

Ao meu grande orientador Dr. Henrique Pereira de Oliveira, que apesar da distância nosso contato nunca esteve tão próximo e sempre proporcionando um ambiente de trabalho muito agradável.

E especialmente ao Professor Dr. Pedro Carlos Pereira, do departamento de matemática UFRRJ, que num momento de indecisão, me direcionou novamente à física.

A sabedoria comunica a vida a seus filhos e acolhe os que a procuram. Bíblia Sagrada. Eclo 4,12

### RESUMO

MENDONÇA, T. S. *Colisão de kinks via métodos espectrais.* 2015. 47 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

Neste trabalho, resolvemos numericamente a equação de Klein-Gordon usando métodos espectrais para descrever a dinâmica de kinks em (1 + 1) dimensões. Os kinks aparecem em diversos contextos, como física de partículas, matéria condensada, cosmologia e óptica. Primeiramente obtemos os resultados já conhecidos no modelo  $\lambda \phi^4$ . Em seguida estudamos a interação dos chamados kinks duplos descritas pelo potencial  $V_p(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^{-p^{-1}} - \phi^{p^{-1}})^2$ , com p = 3, 5, 7...

Palavras-chave: Resolução de equações diferenciais. Teoria de campos. Métodos numéricos.

## ABSTRACT

MENDONÇA, T. S. *The collision of kinks at Spectral Method.* 2015. 47 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

In this work, we solve the Klein-Gordon equation numerically using spectral methods to describe the dynamics of kinks (1 + 1). We remark that kinks appear in distinct areas such as particle physics, condensed matter, cosmology and optics. We first recovered the known results of the case of the  $\lambda \phi^4$  model. To be more specific, we have studied the interaction of the so-called two-kinks described by the potential  $V_p(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^{-p^{-1}} - \phi^{p^{-1}})^2$ , with p = 3, 5, 7...

Keywords: Differential Equation. Field Theory. Numerical Methods.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura	1 - Exemplo de potenciais que permitem soluções do tipo onda solitária	23
Figura	2 - Densidade de energia de um Sóliton ("kink") em movimento em Sine-	
	Gordon com velocidade $u = 0.2.$	23
Figura	3 - Densidade de energia um breather em Sine-Gordon com o parâmetro	
	v = 0.2.	24
Figura	4 - Densidade de energia na colisão de sóliton com anti-sóliton em Sine-	
	Gordon com velocidade de impacto $u = 0.5$	24
Figura	5- Relação da velocidade de impacto e a velocidade de saída da colisão	
	entre kink-anti-kink em $\lambda \phi^4$	27
Figura	6 - Solução da eq.(53): lumps e kinks duplos	29
Figura	7 - Solução da eq. (7): lumps e kinks duplos	29
Figura	8 - Evolução de uma solução do tipo Lump com $p=4$ sendo adicionada	
	uma perturbação gaussiana central da ordem de amplitude 0.01 $\ .$	30
Figura	9 - Autofunção $\chi_1(x)$ para $p = 3, 5,, 15$ e $p = 17$	32
Figura	10 - Resultados referente a colisão de kinks retirados do artigo Goodman e	
	Haberman (2005, p.1196) a título de comparação	35
Figura	11 - Decaimento do erro em relação ao aumento da ordem N para a colisão	
	de dois kinks em $\lambda \phi^4$	36
Figura	12 - Campo escalar e densidade de energia para $u = 0.35$ em $\lambda \phi^4$	36
Figura	13 - Campo escalar e densidade de energia para $u=0.213~{\rm em}~\lambda\phi^4$ $~$	37
Figura	14 - Densidade de energia para $u = 0.1988$ em $\lambda \phi^4$	37
Figura	15 - Campo escalar para $u = 0.1886 \text{ em } \lambda \phi^4 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$	38
Figura	16 - Campo e densidade de energia para $u = 0.19125$ em $\lambda \phi^4$ . Podemos ob-	
	servar nessa imagem o efeito de três brounces, onde os oscillos colidem	
	três vezes antes de escaparem	38
Figura	17 - Ilustração da distribuição inicial da densidade de energia $\rho(x,0)$ cor-	
	respondente a um kink duplo e antikink duplo para $p = 3. \ldots \ldots$	41
Figura	18 - Densidade de energia da colisão de dois kink-duplos para $u=0.1\ {\rm com}$	
	$p=3. \ {\rm Após}$ a complicada interação entre os kink duplo, observamos a	
	completa destruição dos mesmos	42
Figura	19 - Campo escalar $\phi(x,t)$ e densidade de energia $\rho(x,t)$ para colisão de	
	kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.41$	42
Figura	20 - Configuração crítica formada após a colisão de kink duplo com a velo-	
	cidade de impacto $u = 0.40553$ para $p = 3$ . A configuração estacionária	
	formada por volta de $t \approx 60$ e mantida até $t \approx 200$	43

Figura 2	- Configuração crítica formada após a colisão de kink duplo com a velo-		
	cidade de impacto $u = 0.45004$ para $p = 5$ . Essa figura apresenta que		
	as colisões com $p=5$ também reproduzem o mesmo comportamento		
	crítico que em $p = 3. \ldots 43$		
Figure	22. Compo occelar $\phi(x,t)$ o densidado do operaio $\phi(x,t)$ para colição do		

- Figura 23 Perfis numéricos do campo e da densidade de energia para configuração crítica junto aos respectivos perfis exatos da solução do tipo lump. . . . 45

# SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	MÉTODOS ESPECTRAIS	13
1.1	Método de colocação (Pseudo espectral)	14
1.2	Métodos Espectrais aplicados a equações diferenciais parciais.	15
1.3	Métodos de mapeamento: transformação de coordenadas	15
2	ESTUDO SOBRE AS ONDAS SOLITÁRIAS	18
2.1	Obtendo soluções do tipo onda solitária em $(1+1)$ dimensões	19
2.2	Colisões em $\lambda \phi^4$	25
3	MODELO KINK DUPLO BAZEIA	28
3.1	Modos Internos e Modos Contínuos para os kinks duplos	30
4	COLISÕES NO MODELO KINK DUPLO BAZEIA	33
4.1	Colisões para $p = 1(\lambda \phi^4)$ : Verificação do código $\ldots \ldots \ldots \ldots$	33
4.2	Colisões para $p = 3, p = 5$ e $p = 7$	39
4.2.1	$\underline{\text{Estado ligado}}$	39
4.2.2	$\underline{\text{Escape}}$	39
4.2.3	$\underline{\text{Estado crítico}} \dots $	40
4.3	Formação de lumps	40
	CONCLUSÕES	46
	<b>REFERÊNCIAS</b>	47

# INTRODUÇÃO

Por volta de Agosto de 1834, o engenheiro naval John Scott Russell fez o seguinte relato:

Estava observando o movimento de um barco que era puxado velozmente ao longo de um canal estreito por dois cavalos, quando de repente o barco parou subitamente – mas não a massa de água no canal que havia posto em movimento; esta acumulou-se ao entorno da proa do barco num estado de violenta agitação, e posteriormente, deixando-o repentinamente para trás, rolando para frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação, um monte de água arredondado, suave e bem definido, que prosseguiu seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudança de forma e variação de velocidade. Segui a cavalo e a alcancei ainda rolando com uma velocidade constante de oito ou nove milhas por hora, preservando seu formato original de uns trinta pés de comprimento por um pé a um pé e meio de altura. Diminuía gradativamente sua altura, depois de uma perseguição de uma ou duas milhas, perdi nos meandros do canal. J. Scott Russell, agosto de 1884 (REBBI; SOLIANI, 1984, p.1).

Russell estava convencido de que tinha observado um fenômeno importante, uma onda solitária. Sendo assim, construiu um tanque experimental em seu jardim para continuar seus estudos, onde chamava essa porção de água em movimento de "Wave of Translation" (DODD, 1982). "Wave of Translation" foi considerada apenas como uma curiosidade até os anos 1960, quando os cientistas começaram a usar computadores para estudar a propagação de ondas não-lineares. Em seguida, diversas atividades ocorreram quando se descobriu que muitos fenômenos da física, eletrônica e biologia poderiam ser descritos por ondas solitárias (DODD, 1982). De acordo com (LEMOS, 2007) são chamadas de sóliton as ondas solitárias que se recompõem após colidirem entre si, e de "kink" as ondas solitárias que não necessariamente recompõem sua forma após a colisão.

As ondas solitárias são defeitos topológicos de grande interesse em várias áreas da física, como mecânica dos fluidos, matéria condensada, física nuclear e de partículas e cosmologia (LINHARES; OLIVEIRA, 2007). A forma mais simples são os defeitos unidimensionais modelados pelo campo escalar que satisfaz a equação de Klein-Gordon (LEMOS, 2007),

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \tag{1}$$

onde c é uma constante positiva e  $V(\phi)$  é o potencial escalar, que obrigatoriamente necessita de pelo menos dois pontos de mínimo para admitir soluções de ondas solitárias. Um dos mais simples modelos de ondas solitárias são descritos pelo potencial  $\lambda \phi^4$  definido por  $V(\phi) = \lambda (a^2 - \phi^2)^2/2$  e o potencial de Seno Gordon:  $V(\phi) = 1 - \cos(\phi)$  (RAJARAMAN, 1982; VACHASPATI, 2006). No trabalho (BAZEIA; MENEZES; MENEZES, 2003), foi apresentada uma nova classe de defeitos topológicos em sistemas descritos por um campo escalar real em (D, 1) dimensões, onde para D = 1 temos:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^{-1/p} - \phi^{1/p})^2,$$
(2)

sendo p é um número inteiro. Observamos que para p = 1 esse potencial se resume ao potencial  $\lambda \phi^4$ , para  $\lambda = a = 1$ . Para valores ímpares de p tal que p = 3, 5, 7...,temos que o perfil da densidade de energia é constituído de uma estrutura similar à dois kinks padrões $(\lambda \phi^4)$ , afastados a uma distância que aumenta conforme o parâmetro p, chamada de kinks duplos. E para valores pares de p, temos estruturas topológicas instáveis denominadas *lumps*, cujo perfil da densidade de energia é similar ao dos casos onde p é impar, porém diferindo na forma do perfil do campo escalar).

Nesta dissertação, nosso objetivo consiste em determinar numericamente as soluções que descrevem estruturas da colisão de ondas solitárias no modelo da eq.(2). Para tal, desenvolvemos um procedimento computacional baseado nos métodos espectrais. (MENDONÇA; OLIVEIRA, 2015a; MENDONÇA; OLIVEIRA, 2015b).

A dissertação está dividida da seguinte maneira: o capítulo 1 é dedicado à apresentação dos métodos espectrais, que são um conjunto de técnicas matemáticas capazes de aproximar a complicada equação não linear que rege o movimento dessas ondas em um conjunto de equações diferencias ordinárias, estabelecendo assim, o ponto de partida para o processo de integração numérica e a determinação de sua solução aproximada. No capítulo 2 são abordados as propriedades principais de uma solução de onda solitária, a breve apresentação dos modelos de Sine-Gordon e  $\lambda\phi^4$ . O capítulo 3 é direcionado à apresentação dos kinks duplos. No capítulo 4 aplicamos nosso procedimento para determinar a evolução numérica da colisão de ondas solitárias nos modelos  $\lambda\phi^4$  com objetivo de verificação do código e apresentação dos comportamentos e para o potencial  $V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^{-1/p} - \phi^{1/p})^2$  (para os casos onde p = 3, 5, 7). Finalmente, no capítulo 5 apresentamos as conclusões do presente trabalho.

## 1 MÉTODOS ESPECTRAIS

Métodos espectrais representam uma classe de técnicas utilizadas em matemática aplicada e computação científica para resolver numericamente equações diferenciais. A ideia consiste em escrever a solução da equação diferencial como uma combinação linear de funções de base (como por exemplo: a série de Fourier, que é uma combinação linear de senos e cossenos) e em seguida determinar os coeficientes dessa combinação. A solução aproximada é dada por:

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \psi_k(x),$$
 (3)

onde  $a_n \operatorname{com} n = 0, 1, 2, ..., N$ , são os coeficientes modais, N a ordem da truncagem que está diretamente ligada a precisão da solução aproximada; e  $\psi_n(x)$  são as funções de base, que são obtidas das soluções de equações diferenciais do tipo Sturm-Lioville, como os polinômios de Legendre, Chebyshev e funções de Fourier.

Para a resolução via métodos espectrais do problema dado por:

$$\begin{cases} Hu(x) - f = 0 \quad x \in U \subset \Re^n \\ Bu(y) = 0 \quad y \in \partial U \end{cases},$$
(4)

onde H é um operador diferencial, B um operador diferencial associado às condições de contorno, f uma função das variáveis do problema, U o domínio da equação e  $\partial U$ a fronteira associada ao domínio U. Temos que determinar completamente a solução aproximada  $u_N(x)$ , ou seja obter os todos os coeficientes modais a partir das condições de contorno. Substituindo a solução aproximada  $u_N(x)$  na equação diferencial, obtemos chamada a função residual, que é dada por :

$$R(x, a_0, a_1, \dots, a_N) = Hu_N(x) - f.$$
(5)

É de se esperar que a função residual  $R(x, a_j)$  seja pequena, e o tão pequena que ela seja, depende também (além do valor de N) da escolha das chamadas funções de teste  $\phi_i(x)$ . O produto interno entre a função de teste e a função residual fornecerá a partir da relação abaixo as condições para determinar os coeficientes modais  $a_n$ ,

$$\langle R, \phi_i \rangle = \int_a^b \omega(x) R(x, a_0, a_1, \dots, a_N) \phi^*(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots N;$$
 (6)

 $\omega(x)$  são chamadas função de peso e são definidas a partir da escolha da função de teste  $\phi_i(x)$ . Temos  $\phi_i^*(x)$  como a conjugação complexa de  $\phi_i(x)$ , em que essa notação é irrele-

vante no caso do uso de bases reais, porém é essencial no uso de bases complexas como as bases de Fourier. Essa relação fornece um sistema de N + 1 equações, cuja solução é o valor dos N + 1 coeficientes da expansão espectral. A eq.(6) implica que, quando  $N \to \infty$ , a função residual é ortogonal a todas as funções de teste  $\phi_i(x)$  e converge para zero na média (BOYD, 2001). Se a função residual converge para zero na média e  $u_N(x)$  satisfaz as condições de contorno, é de se esperar que esta solução aproximada irá convergir para a solução exata da eq.(4)(FORNBERG, 1998).

#### 1.1 Método de colocação (Pseudo espectral)

Existem diversas classificações sobre os métodos espectrais em relação à escolha das funções de teste. Iremos dar atenção ao Método Espectral de Colocação também conhecido como *Pseudo-espectral* (BOYD, 2001), pois foi o método utilizado na integração das equações referentes a esse trabalho. O método de colocação consiste em utilizar deltas de Dirac como a função de teste, ou seja:

$$\phi_i(x) = \delta(x - x_i),\tag{7}$$

onde  $x_i$  (com i = 0, 1, ..., N) são chamados de pontos de colocação (ou de rede). Os pontos de colocação irão depender das funções de base. Por exemplo, no caso das funções de Chebyshev, que possui o domínio  $-1 \le x \le 1$ , temos os pontos de colocação conhecidos por pontos de Chebyshev-Gauss-Lobato que são dados por:

$$x_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, .., N.$$
(8)

Outros conjuntos de pontos são possíveis como os de Chebyshev-Gauss-Radau e Chebyshev-Gauss (FORNBERG, 1998). Sendo funções de peso associadas às deltas de Dirac dada por  $\omega(x) = 1$ , podemos reescrever a eq.(6) como:

$$\langle R, \phi_i \rangle = R(x_i, a_0, a_1, \dots, a_N) = 0, \quad i = 0, 1, \dots N.$$
 (9)

isso significa que no método de colocação, a equação residual anula-se exatamente nos pontos de colocação.

#### 1.2 Métodos Espectrais aplicados a equações diferenciais parciais.

Uma grande conveniência da utilização dos métodos espectrais é para resolução de equações diferenciais parciais. Dada a equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} Du(x,t) + Hu(x,t) - f = 0 , x \in U \subset \Re^n \\ Bu(y,t) = 0 , y \in \partial U , \\ Su(y,0) = Su_0(y) , t = 0 \end{cases}$$
(10)

sendo H é um operador diferencial espacial, D um operador diferencial temporal B um operador diferencial associado as condições de contorno, S um operador diferencial associado as condições iniciais do problema, f uma função das variáveis do problema e U o domínio da equação. Estabelecemos a seguinte solução aproximada:

$$u_N(x,t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\psi_k(x),$$
(11)

Considerando que o operador diferencial temporal D, possua operadores de derivação de até segunda ordem, temos que a equação residual será:

$$R(x,t;a_0,a_1,\ldots,a_N,\dot{a_0},\dot{a_1},\ldots,\dot{a_N},\ddot{a_1},\ddot{a_2},\ldots,\ddot{a_N}) = Du_N + Hu_N - f.$$
(12)

Substituindo a equação residual R, na eq.(9) obtemos a projeção residual, que nos fornecerá uma sistema de N+1 equações diferenciais ordinárias acopladas, e que serão evoluídas numericamente, a fim de estabelecer todos os coeficientes  $a_n(t)$  para qualquer intervalo de tempo de interesse. Realizando a projeção residual da terceira expressão de eq.(10), é possível determinar os valores iniciais dos coeficientes  $a_n(0)$  na dada configuração de  $u_0(y)$ , estabelecendo assim o ponto de partida para evolução numérica do sistema.

#### 1.3 Métodos de mapeamento: transformação de coordenadas.

Para a solução da equação de Klein-Gordon é conveniente utilizar como funções de base os polinômios de Chebyshev, e para isso é necessário definir uma variável computacional  $\eta = \eta(x)$  tal que  $-1 \le \eta \le 1$ . Desta maneira, a solução aproximada em termos da variável computacional  $\eta$  e do tempo t fica definida como:

$$u_N(\eta, t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t) T_k(\eta),$$
(13)

e substituindo na equação de Klein-Gordon,

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} - \frac{\partial u_N^2}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}\right]_{\phi=u_N} = 0, \tag{14}$$

sendo  $V(\phi)$  dado pela eq.(2), deverá ter validade nesse mesmo intervalo. Porém a eq.(14) possui como domínio o intervalo de  $-\infty < x < \infty$ . Então, para aplicar a função de base dos polinômios de Chebyshev é necessário estabelecer um mapeamento que conecte ambos domínios, ou seja,  $-1 \le \eta \le 1$  e  $-\infty < x < \infty$ .

Existem vários tipos de mapeamento capazes de realizar essa correspondência entre domínios, como podemos citar(BOYD ; SCHONFELD ; WINGATE, 2000):

- Mapeamento logarítimico:  $x = Larctanh(\eta) \quad \eta \in [-1, 1];$
- Mapeamento algébrico:  $x = \frac{L}{\sqrt{1-\eta^2}}$   $\eta \in [-1, 1];$
- Mapeamento exponencial:  $x = L \sinh(L\eta) \quad \eta \in [-\pi, \pi],$

lembrando que x é a variável física,  $\eta$  a variável computacional e L o parâmetro de mapa, que está diretamente associado ao ajuste desta transformação. No presente trabalho, para integração numérica da eq.(14), iremos considerar o mapeamento denominado logarítmico, sugerido por(BOYD, 2001) para o estudo de ondas solitárias e choques.

Deste modo, a solução aproximada para o campo escalar fica sendo dada pela eq.(13). No que segue, a aplicação do método de colocação é direta. A solução é substituída na equação de Klein-Gordon, de modo a estabelecer a equação residual:

$$\operatorname{Res}(t,x) = \sum_{k=0}^{N} \dot{v_k} T B_k(x) - a_k(t) T B_k''(x) + \left(\frac{dV}{d\phi}\right)_{\phi_N},$$
(15)

onde  $TB_k(x) = T_k(\eta = \tanh(x/L))$ ,  $v_k(t) = \dot{a_k}(t)$ , lembrando que ' e ' representam derivadas em relação a t e a x, respectivamente. Em seguida, os coeficientes modais satisfarão equações resultantes da condição da equação residual se anular nos pontos de colocação, ou seja,

$$\operatorname{Res}(t, x_j) = 0, \tag{16}$$

onde j = 0, 1, ..., N, e os pontos de colocação  $x_j$  são determinados utilizando-se a eq.(15) e com os pontos de colocação no domínio computacional  $\eta_j$  dados por:

$$\eta_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad j = 0, 1, \dots, N,\tag{17}$$

obtemos um conjunto de N+1 equações diferenciais ordinárias para  $v_k(t)$ , ao qual devemos adicionar N+1 equações  $(a_k)=v_k$ . Por fim, em nosso procedimento, os dois primeiros

termos da eq.(15), são expressos em termos dos coeficientes modais e suas derivadas temporais de segunda ordem, ou seja, na representação espectral. Por outro lado, o último termo é tratado utilizando sua representação física, ou seja, em função dos valores do campo escalar calculado nos pontos de colocação e denotados por  $\phi_j(t) = \phi_N(t, x_j)$ . Essas representações são relacionadas uma vez que:

$$\phi_j(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t) T B_k(x_j),$$
(18)

para todo j = 0, 1, ..., N. O sistema dinâmico resultante tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{a_k} = v_k \\ \dot{v_k} = F_k(a_j, \phi_j) \end{cases},$$
(19)

sendo  $F_k(a_j, \phi_j)$  a função envolvendo os coeficientes modais e os valores do campo  $\phi$  nos pontos de colocação, de forma que as relações entre  $\phi_j$  e  $a_k$  são dadas pelas equações algébricas lineares,

$$\phi_j = \phi_j(a_k),\tag{20}$$

obtidas da eq.(18). A integração do sistema eq(19), determinará a evolução dos coeficientes modais  $a_k(t)$  e portanto a evolução do campo escalar  $\phi_N(x,t)$ . Para a integração do sistema dinâmico, eq.(19), é necessário estabelecer as configurações inicias dadas por  $\phi(0, x) \in \dot{\phi}(0, x)$ , sendo

$$\dot{\phi}(0,x) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{t=0}.$$
(21)

Uma vez especificados os coeficientes modais iniciais  $a_k(0) \in v_k(0)$ , o sistema poderá ser integrado.

## 2 ESTUDO SOBRE AS ONDAS SOLITÁRIAS

Essa seção é baseada nos primeiros capítulos de Drazin (DRAZIN; JOHNSON, 1989). Em (1+1) dimensões, a equação de onda se escreve como:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0,$$
(22)

que pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x,t) = 0.$$
(23)

Desta maneira, podemos ver que essa equação possui duas soluções,  $f(x - ct) \in f(x + ct)$ , em que a primeira consiste na solução viajando para a direita e a segunda para esquerda com velocidade c. Uma propriedade importante é que quando essas soluções viajam elas preservam sua forma. Essa propriedade se torna mais evidente quando analisamos essa solução quando a mesma é escrita em termos da superposição de ondas planas:

$$f(x \pm ct) = \int dk [a(k)\cos(kx \pm \omega t) + b(k)\sin(kx \pm \omega t)], \qquad (24)$$

onde  $\omega$  é a frequência e k o nímero de onda. Como cada onda plana viaja à mesma velocidade  $\omega/k = c$ , temos que esse pacote de ondas viajam sem distorção.

A linearidade também é uma outra propriedade importante da equação de onda. Sejam duas soluções da eq.(23),  $f_1(x-ct) \in f_2(x+ct)$ , a soma  $f_3(x,t) = f_1(x-ct)+f_2(x+ct)$ também é uma solução. Sendo essas duas soluções constituídas de dois pacotes separados, indo um ao encontro do outro, de modo que após a "colisão" as mesmas manterão suas formas. Essas duas propriedades são consequências da equação em questão ser linear e sem dispersão.

Como contra exemplo, uma equação de onda linear com dispersão:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} = 0.$$
(25)

Para este caso a relação de dispersão é  $\omega = k - k^3$ . Com isso cada onda plana se propagará com diferentes velocidades de fase para diferentes valores de comprimento de onda k,

$$\frac{\omega}{k} = 1 - k^2. \tag{26}$$

Logo, ondas com diferentes números de onda k, se propagam com velocidades de fase diferentes.

Se a equação de onda possuir termos com derivadas parciais pares, por exemplo:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0.$$
(27)

obtemos que  $\omega = (k - ik^2)$ , onde temos a solução exponencial,

$$\phi(x,t) = e^{-k^2 + ik(x-t)},$$
(28)

que tende a zero quando  $t \to \infty$ . Esse fenômeno é chamado de dissipação e ocorre quando a equação diferencial possui derivadas pares.

Outro efeito é a não linearidade. Onde encontramos termos cruzados envolvendo o produto de exponenciais complexas de diferentes frequências partindo da série de Fourier. Como por exemplo, se caso a equação diferencial possuir termos cúbicos como  $\phi^3$ , teremos a multiplicação de termos como  $e^{i(kx-\omega t)}$ ,  $e^{2i(kx-\omega t)}$  e  $e^{3i(kx-\omega t)}$  o que intuitivamente aparenta ser uma dificuldade para esse efeito de não linearidade admitir soluções de ondas viajantes que consigam manter a sua forma, por conta do descompasso de energia entre seus harmônicos a cada instante de tempo.

Existem alguns casos onde os efeitos de dispersão e não-linearidade se combinam, de maneira que é possível obter soluções que mantêm sua forma durante seu deslocamento. É definida como onda solitária uma função localizada não singular de qualquer equação não linear (ou equações acopladas se temos vários campos) cuja densidade de energia, além de ser bem localizada, tem uma dependência da forma:

$$\rho(\vec{x},t) = \rho(\vec{x} - \vec{u}t),\tag{29}$$

onde  $\vec{u}$  é um vetor velocidade de deslocamento da onda solitária (RAJARAMAN, 1982). Esta equação é equivalente a ter uma solução que viaja mantendo sua forma.

Podemos observar que qualquer solução estática representa uma solução de onda solitária para  $\vec{u} = 0$ . E também observamos que quando temos uma invariância relativística, uma solução estática pode-se transformar numa solução viajante para qualquer velocidade inferior a velocidade da luz, fazendo um "boost", ou seja, realizando uma transformação para um sistema de referência em movimento. São chamados de sólitons os tipos de ondas solitárias que conseguem se recompor após colidirem entre si (LEMOS, 2007).

#### 2.1 Obtendo soluções do tipo onda solitária em (1+1) dimensões

A equação de movimento pode ser obtida a partir de uma densidade de lagrangiana utilizando-se o princípio variacional, onde para um campo escalar  $\phi(x, t)$ , essa densidade de lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(x,t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - V(\phi).$$
(30)

A não-linearidade do problema está contida no potencial  $V(\phi)$ . Considerando sem perda de generalidade que  $V(\phi)$  é sempre positivo e igual a zero nos seus mínimos e que essa densidade de lagrangiana é um invariante de Lorentz, temos a seguinte equação de movimento a partir do princípio variacional de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}.$$
(31)

Analisando essa densidade de lagrangiana  $\mathcal{L}(x,t)$ , podemos ver que a energia é uma quantidade conservada e a mesma é dada por:

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right].$$
(32)

Os mínimos de  $V(\phi)$  são suas raízes e ocorrem em M pontos,  $M \ge 1$ . Ou seja:

$$V(\phi = g^i) = 0 \quad para \ i = 1..M.$$
 (33)

Com isso, a energia é nula nos pontos onde o campo é constante e igual a  $\phi = g^i$ . Interessados em obter soluções estáticas, temos que  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  e assim eq.(31) passa a ser:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}(x, t). \tag{34}$$

impondo a condição de se ter uma solução com energia finita a fim de obter ondas solitárias é necessário que  $\phi \to g^i$  e que  $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 = 0$  para  $x \to \pm \infty$ . Desta maneira, as soluções são trajetórias que ligam mínimos de potencial. Por isso, geralmente, elas têm forma de S e são chamadas de kinks.

Multiplicamos a eq.(34) por  $\frac{d\phi}{dx}$  e integramos dos dois lados,

$$\int \frac{d^2\phi}{dx^2} \frac{d\phi}{dx} dx = \int \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} dx,$$
(35)

logo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = V(\phi). \tag{36}$$

Tendo dois ou mais mínimos no potencial  $V(\phi)$ , podemos ver na Figura 1, teremos soluções de nosso interesse. Em resumo, se  $V(\phi)$  tem só um mínimo, não é possível ter

soluções do tipo onda solitária. Sabendo os limites de nossa solução, podemos integrar a eq.(36), obtendo :

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\bar{\phi}}{[2V(\bar{\phi})]^{1/2}},\tag{37}$$

onde  $x_0$  é um valor arbitrário (invariância translacional) e  $\phi(x_0)$  é um valor intermediário, entre os mínimos de potencial. As soluções  $\pm$  representam os dois sentidos em que podemos unir os mínimos.

Considerando agora o potencial  $\lambda \phi^4$ , que é dado por :

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda \left(\phi^2 - \frac{m^2}{\lambda}\right)^2.$$
(38)

Ele possui dois mínimos,  $\phi = \pm m/\sqrt{\lambda}$ . Substituindo esse potencial na eq.(37), temos:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\bar{\phi}}{\sqrt{\lambda/2}(\bar{\phi}^2 - m^2/\lambda)}.$$
(39)

A densidade de energia é dada por:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + V(\phi), \tag{40}$$

com isso,

$$\rho_0(x) = \frac{m^4}{2\lambda} \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right].$$
(41)

Outro potencial interessante é o do modelo de Sine-Gordon, que apesar de ser uma equação de movimento não-linear, suas soluções exatas são conhecidas. Essas soluções descrevem a propagação, interação, colisão de kinks. Seu potencial, em (1+1) dimensões, é dado por:

$$V(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m}\phi\right) \right].$$
(42)

Fazendo a mudança de variáveis  $\bar{x} = mx$ ;  $\bar{t} = mt$ ;  $\bar{\phi} = (\sqrt{\lambda}/m\phi)$ , temos que a densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{m^4}{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{t}} \right)^2 - \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] + \cos \bar{\phi} - 1 \right\},\tag{43}$$

repetindo o procedimento para o potencial Sine-Gordon, obtemos as seguintes soluções

estáticas para o "kink" e "anti-kink".

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \pm 4 \arctan(\exp\left(\bar{x} - \bar{x_0}\right)),\tag{44}$$

onde  $x_0$  é a posição onde o "kink"/"anti-kink" está centrado. Assim como  $\lambda \phi^4$ , o potencial de Sine-Gordon é invariante com respeito às transformações de Lorentz; com isso, podemos determinar a solução do "kink"/"anti-kink" em movimento,

$$\bar{\phi}(\bar{x},t) = \pm 4 \arctan\left(\exp\frac{\bar{x}-\bar{x}_0 \pm ut}{\sqrt{1-u^2}}\right),\tag{45}$$

onde u é a velocidade em que o "kink"/"anti-kink" se movimenta. Podemos ver na Figura 2 a densidade energia da solução dada pela eq.(45), com  $x_0 = 0$  e u = 0.2. A seguir iremos apresentar algumas outras soluções da equação de Seno Gordon presentes em (RAJARAMAN, 1982).

A solução que descreve a interação de dois sólitons resultando num "breather" é dada por:

$$\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = 4 \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(v\bar{t}/\sqrt{1+v^2})}{v\cosh(\bar{x}/\sqrt{1+v^2})}\right),\tag{46}$$

onde v é um parâmetro associado ao período de oscilação. Essa solução pode ser interpretada como o estado ligado de um sistema formado por um sóliton-anti-sóliton. Por ser periódica, a solução tenderá a ficar na mesma localização sempre. Apesar de não preservar a sua forma, continua tendo a propriedade de se ter uma energia localizada. O "breather" ocorre devido à interação de atração sóliton –anti-sóliton, como vemos na Figura 3, com parâmetro v = 0.2.

Além dessas soluções, a solução que representa a colisão de um "kink" e um "antikink" ((Figura 4), com cada um se deslocando com a velocidade em modulo de u,

$$\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = 4 \arctan\left(\frac{\sinh(u\bar{t}/\sqrt{1-u^2})}{u\cosh(\bar{x}/\sqrt{1-u^2})}\right).$$
(47)

Quando  $t \to +\infty$  e  $t \to -\infty$ , observamos na Figura 4 a densidade de energia do "kink" e o "anti-kink" antes e depois da colisão para uma velocidade u = 0.5. Observando que num tempo futuro a forma do "kink" e "anti-kink" é recuperada, podermos considerar não apenas "kinks", mas sim sólitons.





Legenda: Temos à esquerda, um exemplo de um potencial  $V(\phi)$  que não admite soluções de onda solitária por conta de só ter um mínimo, e à direita um potencial  $V(\phi)$  que admite soluções de onda solitária, por ter mais de um mínimo.

Fonte: O autor, 2015.

Figura 2 - Densidade de energia de um Sóliton ("kink") em movimento em Sine-Gordon com velocidade u = 0.2.



Fonte: O autor, 2015.



Figura 3 - Densidade de energia um breather em Sine-Gordon com o parâmetro v = 0.2.

Figura 4 - Densidade de energia na colisão de sóliton com anti-sóliton em Sine-Gordon com velocidade de impactou=0.5



Fonte: O autor, 2015.

Fonte: O autor, 2015.

### 2.2 Colisões em $\lambda \phi^4$

O modelo  $\lambda \phi^4$  é expresso pelo potencial :

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1-\phi^2)^2.$$
(48)

O potencial  $\lambda \phi^4$  surge em muitos contextos e é muitas vezes utilizado como um modelo fenomenológico, como por exemplo, em cosmologia é utilizado para modelar as paredes de domínio, que são defeitos topológicos importantes na descrição da evolução da estrutura no universo (ANNINOS; OLIVEIRA; MATZNER, 1991). Um resumo de cerca de dez aplicações estão descritas na introdução de (CAMPBELL; PEYRARD; SODANO, 1986). Partindo disso, a próxima etapa deste trabalho é o estudo das colisões de ondas solitárias para o potencial  $\lambda \phi^4$ .

A colisão de um kink com um anti-kink no modelo  $\lambda \phi^4$  exibe uma complexa estrutura que depende da velocidade de impacto. Para valores de velocidade maiores que a velocidade crítica  $v_c \approx 0.2598$ , as duas ondas são imediatamente refletidas após a colisão. O comportamento predominante para os valores da velocidade de impacto inferiores à velocidade crítica  $v_c$  é a formação de uma estrutura localizada e oscilante (óscilon) na origem após a colisão. Para determinadas velocidades de impacto, que se enquadra em um conjunto discreto chamados de janelas de ressonância, o kink e o antikink colidem e se distanciando com uma desaceleração, de forma retornarem e colidirem pela segunda vez tendo assim numa nova interação, onde as ondas poderão realizar um segundo ricochete, escaparem viajando em velocidade constante ou formando um óscilon central. Esse fenômeno onde os kinks colidem duas vezes após a colisão inicial, é chamado de ressonância de dois ricochetes. Uma síntese deste comportamento é mostrado na Figura 5, em que a velocidade de saída de um kink e um antikink  $v_{out}$  (pós-interação) é representada graficamente como uma função da velocidade de entrada  $v_{in}$ . Quando  $v_{out} = 0$  temos que o resultado da colisão é um estado ligado (óscilon central), já para  $0 < v_{out} < v_c$  tratasse do caso de escape com a ocorrência de ricochetes, já para  $v_{out} > v_c$ , ocorre a reflexão dos kinks imediatamente após a colisão (sem ricochetes). Os intervalos de velocidades iniciais para os quais os kinks escapam da influência um do outro depois de duas interações são denominados janelas de ressonância. Evidentemente, durante a primeira colisão, o kink e o antikink perdem energia cinética para um modo secundário de oscilação, e num dado instante eles recuperam a energia no segundo ricochete.

Um trabalho relevante para a explicação do fenômeno da ressonância de ricochetes foi publicado por Campbell, Schonfeld e Wingate (CAMPBELL; PEYRARD; SODANO, 1986), onde eles mostram através de uma série de experimentos numéricos sobre as interações kink-antikink em equações não-lineares Klein-Gordon com diferentes potenciais  $V(\phi)$ , que uma condição necessária para a ressonância de dois-ricochete existir é que o kink possua os modos internos oscilação, em que a energia cinética possa ser transferida durante a colisão. Isso na verdade retira do kink e antikink a energia de que necessitam para superar sua atração mútua. Ondas solitárias em sistemas não-integráveis muitas vezes possuem modos internos, que se manifestam como oscilações na forma, na amplitude, ou na velocidade das ondas.

Sendo a solução viajante de um kink dada por :

$$\phi_K(x,t) = \tanh\left(\frac{x - x_0 - ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right),\tag{49}$$

onde  $x_0$  e u são respectivamente a posição inicial e velocidade do kink, podemos determinar os modos internos considerando uma solução kink perturbada por uma pequena quantidade,  $\phi(x,t) = \phi_K(x,t) + \chi(x)e^{-i\omega t}$ , com isso  $\chi$  aproximadamente satisfaz a equação de movimento linearizada sobre  $\phi_K(x,t)$ . Este assume a forma de um problema de autovalores de Schrödinger onde não ocorre reflexão:

$$(\omega^2 - 2)\chi(x) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3\operatorname{sech}^2\left(\frac{x - x_0 - ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right)\right]\chi(x).$$
(50)

O sistema possui então dois modos próprios discretos: o primeiro, com  $\omega_0 = 0$ , surge a partir da invariância de translação da eq.(31) com o potencial (eq.(48)) e não participa da dinâmica. O segundo tem valor próprio  $\omega_1 = \sqrt{3}$  com a autofunção  $\chi_1(x) \propto \tanh(x) \operatorname{sech}(x)$ .

As colisões de kinks em  $\lambda \phi^4$  também podem produzir estruturas oscilantes simiares aos breather, que são denominados *óscilons*. Os óscilons são estruturas localizadas oscilante onde suas oscilações possuem períodos irregulares e a estrutura irradia uma pequena quantidade de energia a cada ciclo.

Figura 5 - Relação da velocidade de impacto e a velocidade de saída da colisão entre kink-anti-kink em $\lambda \phi^4$ 



Fonte: GOODMAN, HABERMAN, 2005, p.1197.

### 3 MODELO KINK DUPLO BAZEIA

Alguns anos atrás Bazeia et al. (BAZEIA; MENEZES; MENEZES, 2003) usaram uma nova classe de defeitos topológicos descritos por um campo escalar real em (D, 1)dimensões, onde para D = 1, temos a seguinte família de potenciais:

$$V_p(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2(\phi^{-1/p} - \phi^{1/p})^2,$$
(51)

onde o parâmetro p é um número inteiro positivo e está relacionado à forma com que o campo auto-interage. Para compreender melhor os efeitos do parâmetro p, calculamos a solução estática de eq.(31) para o potencial  $V_p(\phi)$  substituindo na equação eq.(37),

$$x - x_0 = \int \frac{d\phi_0}{\phi_0 \left(\phi_0^{-p^{-1}} - \phi_0^{p^{-1}}\right)} = p \arctan\left(\phi_0^{-p^{-1}}\right)$$
(52)

$$\rightarrow \phi_0(x) = \pm \tanh^p \left(\frac{x - x_0}{p}\right). \tag{53}$$

e para o caso viajante,

$$\phi_{K,\bar{K}} = \pm \tanh^p \left( \frac{x \mp x_0 \pm ut}{p\sqrt{1 - u^2}} \right).$$
(54)

Como a carga topológica Q é proporcional à

$$Q \propto \left[\lim_{x \to \infty} \phi_0(x) - \lim_{x \to -\infty} \phi_0(x)\right],\tag{55}$$

temos Q = 0 quando p for par e  $Q \neq 0$  quando p for ímpar. Isso implica que quando p for ímpar o potencial permite soluções topologicamente estáveis do tipo kink e quando p for par o potencial permitirá apenas soluções topologicamente instáveis, denominada "lumps", cuja tradução do inglês significa "caroço" em referência à forma do campo. Por conta disso, os lumps são considerados defeitos não-topológicos, vide Figura 6. Apesar dos campos  $\phi_0(x)$  para os kinks duplos e dos lumps serem nítidamente diferentes, seus perfis de densidade de energia são similares, como podemos ver na Figura 7. Na Figura 8 podemos observar um lump (p = 4) sendo destruído rapidamente com uma perturbação gaussiana central da ordem de 0.01. Por conta do lump ser um objeto topologicamente instável, não existe uma grande atenção da comunidade em estudá-lo, porém iremos apresentar nos próximos capítulos que o lump pode ser formado através da colisão de kinks duplos e manter sua forma por longos intervalos de tempo.



Figura 6 - Solução da eq.(53): lumps e kinks duplos .

Fonte: O autor, 2015.

Figura 7 - Solução da eq.<br/>(7): lumps e kinks duplos .



Fonte: O autor, 2015.





Fonte: O autor, 2015.

## 3.1 Modos Internos e Modos Contínuos para os kinks duplos

Os modos internos determinam diversos comportamentos dinâmicos ao se estudar a colisão de kinks e são obtidos da seguinte equação de autovalor,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2}\right]\chi_m = \omega_m^2 \chi_m.$$
(56)

por conta da dificuldade de obter uma solução analítica para  $\chi_m(x)$ , iremos utilizar recursos numéricos e analíticos para encontrar valores de  $\omega_m$  que satisfaça essa equação. Um dos procedimentos analíticos consiste em escrever as derivadas em x em termos de  $\phi$  e avaliar as condições necessárias para que a equação seja satisfeita. Desta forma,

$$\left[-\frac{dV(\phi)}{d\phi}\frac{d}{d\phi} - 2V(\phi)\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\right]\chi_m = \omega_m^2\chi_m,\tag{57}$$

podemos observar que a equação é satisfeita quando:

$$V_p(\pm 1) = \left[\frac{dV_p(\phi)}{d\phi}\right]_{\phi=\pm 1} = 0 \quad \& \quad \left[\frac{d^2V_p(\phi)}{d\phi^2}\right]_{\phi=\pm 1} = \frac{4}{p^2},\tag{58}$$

ou seja,

$$\omega_c = \frac{2}{p}.\tag{59}$$

Esse resultado coincide com o que chamamos de modos contínuos e tendem a decair com o aumento do parâmetro p. Os outros modos são os chamados modos de vibração e podem ser obtidos numericamente através de tentativa e erro, ou seja, o valor de  $\omega$  em que a função  $\chi_m(x)$ , determinado através do método do Runge Kutta, não divegir, será o valor correto. Ao realizar esse prodecimento para diversos valores de p obtemos os resultados da Tabela 1 cuja solução numérica de  $\chi_m(x)$  é apresentada Figura 9.

p	$\omega_1$
1	$\sqrt{3}$
3	0.49243
5	0.29287
7	0.20870
9	0.16216
11	0.13261
13	0.11218
15	0.09720
17	0.08585

Tabela 1 - Modos Internos  $\omega_1$ para  $V_p(\phi)$ 

Fonte: O autor, 2015.

Figura 9 - Autofunção  $\chi_1(x)$ para p=3,5,...,15ep=17



Fonte: O autor, 2015.

## 4 COLISÕES NO MODELO KINK DUPLO BAZEIA

Analisaremos primeiramente o potencial  $\lambda \phi^4$  que corresponde ao modelo de kink duplo quando p = 1, de forma que estamos interessados em testar a eficiência do método para um caso já conhecido na literatura (GOODMAN; HABERMAN, 2005) e o decaimento do erro com o aumento da ordem de truncagem N. Na seção seguinte iremos realizar as colisões para os kinks duplos com p = 3 e p = 5. Já na terceira seção, falaremos sobre a formação de lumps a partir das colisões de kinks duplos.

## 4.1 Colisões para $p = 1(\lambda \phi^4)$ : Verificação do código

Uma verificação importante do método numérico é referente ao decaimento do erro associado a conservação de energia com o aumento de da ordem de truncagem N. Para realizar essa avaliação foi fixado parâmetro de mapa L = 50 (um valor adequado para região que queremos visualizar), a distância dos kinks à origem de  $x_0 = 15$  e a velocidade u = 0.3, e foram realizadas as integrações com as ordens de truncagem N = 50, 100, 150e N = 200 até o instante t = 70 com o passo h = 0.001 no integrador de Runge-Kutta de  $4^a$  ordem, onde o erro médio quadrático percentual foi calculado pela seguinte fórmula:

$$\delta E = 100 \times \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M} |E_0 - E_k|^2}$$
(60)

sendo  $E_0$  a energia no instante inicial (valor esperado) calculada a partir de eq.(32) e M o número total de iterações realizadas na evolução temporal dado por M = t/h. Podemos ver na Figura 11 o resultado do decaimento de  $\delta E$  com o aumento da truncagem para esse caso, onde encontramos erros da ordem de  $10^{-12}\%$ , comprovando assim a eficiência do método. Partindo disso, confirmamos seguintes resultados encontrados na literatura (GOODMAN; HABERMAN, 2005) e apresentados na Figura 10:

- Para u = 0.350, foi obtido o comportamento de reflexão dos kinks após a colisão. (Figura 12)
- Para u = 0.213 o comportamento obtido foi de estado ligado, onde após a colisão, os dois kinks ficam presos criando uma estrutura oscilatória na origem. Figura (13)
- Para as velocidades u = 0.1988 (uma velocidade abaixo de u = 0.213 no qual os kinks ficam presos) encontramos o efeito de dois ricochetes, em que os kinks colidem pela primeira vez, retornam e colidem pela segunda vez em seguida escapam. Figura (14)

• Já nas velocidades u = 0.1886 e u = 0.19125 obtivemos o comportamento de dois e três ricochetes (Figuras 15 e 16)



Figura 10 - Resultados referente a colisão de kinks retirados do artigo Goodman e Haberman (2005, p.1196) a título de comparação.

Fonte: GOODMAN, HABERMAN, 2005, p.1196.



Figura 11 - Decaimento do erro em relação ao aumento da ordem N para a colisão de dois kinks em $\lambda \phi^4$ 

Fonte: O autor, 2015.

Figura 12 - Campo escalar e densidade de energia para u=0.35 em $\lambda\phi^4$ 



Fonte: O autor, 2015.



Figura 13 - Campo escalar e densidade de energia para  $u=0.213~{\rm em}~\lambda\phi^4$ 

Fonte: O autor, 2015.

Figura 14 - Densidade de energia para u=0.1988 em $\lambda\phi^4$ 



Fonte: O autor, 2015.

Figura 15 - Campo escalar para u=0.1886 em $\lambda\phi^4$ 





Figura 16 - Campo e densidade de energia para u = 0.19125 em  $\lambda \phi^4$ . Podemos observar nessa imagem o efeito de três brounces, onde os oscillos colidem três vezes antes de escaparem.



Fonte: O autor, 2015.

#### 4.2 Colisões para p = 3, p = 5 e p = 7

Depois de validada a eficiência do código para as colisões em  $\lambda \phi^4$  partimos para as colisões dos kinks duplos para os parâmetros para p = 3, 5 e p = 7. Na Figura 17 temos perfil inicial da densidade de energia de dois kinks duplos para p = 3. Ao utilizar os parâmetros de mapa L = 90 e N = 500 foi possível obter erros associados à conservação de energia abaixo de 0.001%.

#### 4.2.1 Estado ligado

O estado ligado é um dos três casos encontrados para as colisões de kinks duplos e qualitativamente é análogo para p = 3, 5 e p = 7. Com a velocidade de impacto u = 0.31e p = 3 como podemos ver na Figura 18 o produto da colisão difere significativamente do caso  $\lambda \phi^4$ , onde grande parte do campo escalar é ejetado após uma complicada interação entre os kinks. Além da grande radiação, um pequeno óscilon pode ser observado na região central, mas que representa uma porção insignificante em relação às estruturas localizadas iniciais. O fato de grande parte do campo se dispersar, numericamente é uma fonte de erro maior do que em  $\lambda \phi^4$ , tendo em vista a necessidade de uma melhor densidade de pontos de colocação distantes da origem, para a descrição dessas porções de campo. Esse problema pode ser atenuado com uma escolha de um parâmetro de mapa L grande junto ao aumento da ordem de truncagem N.

#### 4.2.2 Escape

O segundo comportamento possível na colisão de kinks duplos é o caso de escape. Esse caso ocorre quando após a interação da colisão dos kinks duplos, são formados dois kinks viajantes simples (formato de S). Avaliando densidade de energia e do campo escalar podemos afirmar são kinks estruturalmente iguais às soluções em  $\lambda \phi^4$ . Além da formação dos kinks viajantes, é comum encontrar um pequeno óscilon central, mas sem um caráter relevante por ser extremamente menor que as porções viajantes. Um fato importante é que após uma dada velocidade, que chamaremos de velocidade limite  $u_{lim}$ , todas as colisões resultaram no caso de escape. É possível encontrar escape em velocidades inferiores a essa velocidade limite em pequenos intervalos de velocidade, tal como as janelas de escape em  $\lambda \phi^4$ . Esse aspecto indica a provável existência de fractalidade e estão sempre acompanhadas ao fenômeno de ricochetes.

#### 4.2.3 Estado crítico

O terceiro caso possível na colisão dos kinks duplos (para o potencial em questão) é o que chamamos de caso crítico. Esse ocorre quando duas cristas quase estáticas são formadas após a colisão no gráfico da densidade de energia e permanecendo nessa configuração por um longo intervalo de tempo. Como vimos, quando essas cristas se deslocam temos o caso de escape e quando elas não são formadas temos o caso de estado ligado. Podemos interpretar o caso crítico como um caso intermediário, onde o valor da velocidade crítica  $u_c$  é obtido através do refinamento entre duas velocidades onde ocorre transição do comportamento de estado ligado para estado de escape, ou seja,  $u_{estado ligado} < u_c < u_{escape}$ com  $u_{escape} - u_{estado ligado} = \delta u$ , onde  $\delta u$  é pequeno suficiente para se obter a estrutura crítica. Na Figura 20 com u = 0.40553 e p = 3 observamos a formação da estrutura crítica a partir do instante  $t \approx 60$  e mantida aproximadamente até o instante  $t \approx 200$ , assim como na Figura 21, com u = 0.473927 observamos a formação e o término da estrutura crítica.

#### 4.3 Formação de lumps

Ao avaliar o comportamento das estruturas críticas formadas após a colisão, tanto para p = 3 como em p = 5 e p = 7, observamos grandes similaridades com a forma do campo escalar  $\phi(x,t)$  e da densidade de energia  $\rho(x,t)$  para o caso de um lump, como pode ser visto na Figura 7. Lembrando que as estruturas críticas formadas através da colisão são destruídas após um dado intervalo de tempo, como podemos reforçar na Figura 22 em uma colisão com p = 7 e u = 0.473927. Além da forma do campo e da densidade de energia, o caráter da duração finita da solução crítica é qualitativamente bem descrito com uma solução de lump perturbado.

Para verificar se estrutura crítica formada é uma solução do tipo lump, buscaremos obter a expressão que a descreva. Para isso, iremos generalizar a solução eq.(53),

$$\phi_q(x) = -\tanh^q(b_0 x),\tag{61}$$

que ao substituir na eq.(40) encontramos a densidade de energia

$$\rho_q(x) = \frac{b_0^2 q^2 \tanh^{2q}(b_0 x) [1 - \tanh^2(b_0 x)]^2}{\tanh^2(b_0 x)}$$
(62)

Desta forma, o objetivo é encontrar os valores de  $b_0$  e q que se ajuste as soluções críticas formadas pela colisão, ou seja, satisfazer tanto o campo escalar  $\phi(x, t)$ , como a densidade

Figura 17 - Ilustração da distribuição inicial da densidade de energia  $\rho(x, 0)$  correspondente a um kink duplo e antikink duplo para p = 3.



Fonte: O autor, 2015.

de energia  $\rho(x,t)$ . Uma forma simples e eficiente de obter o parâmetro  $b_0$  é escreve-lo em função do valor da altura do pico da densidade de energia e o seu posicionamento no eixo x,

$$b_0 = b_0(q, H) = \frac{1}{2} \frac{(q+1)^q \sqrt{H(q^2-1)^{1-q}}}{q},$$
(63)

lembrando que q é um número par e a condição acima só leva em consideração a densidade de energia, testaremos os valores de q onde o ajuste do perfil do campo escalar também seja satisfeito. Com isso, obtemos os ajustes presentes na Figura 23.

A configuração crítica aparenta ser o resultado de um equilíbrio não linear decorrente da transferência de energia entre os modos de vibração e translação dos dois kinks duplos. O equilíbrio não-linear é determinado através de um ajuste e refinamento da velocidade de impacto. Além disso, a abordagem das soluções semelhante às soluções tipo lump indica a existência de canais de atração que é um novo recurso destas soluções instáveis. Figura 18 - Densidade de energia da colisão de dois kink-duplos para u = 0.1 com p = 3. Após a complicada interação entre os kink duplo, observamos a completa destruição dos mesmos.



Fonte: O autor, 2015.

Figura 19 - Campo escalar  $\phi(x,t)$  e densidade de energia  $\rho(x,t)$  para colisão de kinks em  $V_p(\phi)$ com p = 3 e u = 0.41.





Fonte: O autor, 2015.

Figura 20 - Configuração crítica formada após a colisão de kink duplo com a velocidade de impacto u = 0.40553 para p = 3. A configuração estacionária formada por volta de  $t \approx 60$  e mantida até  $t \approx 200$ .



Fonte: O autor, 2015.

Figura 21 - Configuração crítica formada após a colisão de kink duplo com a velocidade de impacto u = 0.45004 para p = 5. Essa figura apresenta que as colisões comp = 5 também reproduzem o mesmo comportamento crítico que em p = 3.



Fonte: O autor, 2015.

Figura 22 - Campo escalar $\phi(x,t)$ e densidade de energi<br/>a $\rho(x,t)$ para colisão de kinks em  $V_p(\phi)$  <br/>comp=7 eu=0.473927



Legenda: Solução do tipo lump sendo obtidas a partir da colisão de kinks duplos com p=7 Fonte: O autor, 2015.





Fonte: O autor, 2015.

## CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi estudada a colisão de kinks duplos (BAZEIA; MENEZES; MENEZES, 2003) a partir da utilização do Método Pseudo-espectral (ou Método de Colocação) para aproximar a equação de Klein Gordon para um sistema de equações ordinárias a serem evoluídas via método de Runge-Kutta de  $4^a$  ordem. Este procedimento numérico apresentou ótimos resultados em relação ao decaimento do erro da energia com o aumento da ordem N da expansão espectral.

Foram realizadas colisões de kinks duplos para os parâmetros p = 1, 3, 5 e 7 do potencial eq.(2). Foi observado que qualquer valor do parâmetro p e da velocidade de impacto u, teremos a descaracterização da forma inicial dos kinks duplos (colisão inelástica). Contudo, dependendo da velocidade de impacto u, existem duas possibilidades após o término do processo de colisão, a primeira ocorre a irradiação de quase todo campo escalar sobrando apenas um pequeno óscilon na origem, a segunda é a formação de dois kinks viajantes similares aos de  $\lambda \phi^4$  junto a uma parcela do campo que é irradiada.

A nova característica exibida pelas experiências numéricas é a presença de estruturas intermediárias aos dois casos mencionados acima, denominado como configuração crítica. Nessa configuração, duas cristas simétricas permanecem quase estáticas durante dado intervalo de tempo após a irradiação de parte do campo escalar. O tempo em que as cristas permanecessem nessa configuração depende do ajuste fino da velocidade crítica. O mais intrigante é que essa configuração crítica pode ser aproximadamente representada por uma solução do tipo "lump", que são estruturas topológicos instáveis. Sugerimos que tal característica possa ser consequência de um equilíbrio não linear da transferência de energia entre os modos de vibração e de translação dos kink duplo.

## REFERÊNCIAS

ANNINOS, P.; OLIVEIRA, S.; MATZNER, R. A. Fractal structure in the scalar  $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$  theory. *Physical Review D*, APS, v. 44, n. 4, p. 1147, 1991.

BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. New global defect structures. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 24, p. 241601, 2003.

BOYD, J. P. Chebyshev and Fourier spectral methods. [S.I.]: Courier Corporation, 2001.

CAMPBELL, D. K.; PEYRARD, M.; SODANO, P. Kink-antikink interactions in the double sine-gordon equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, [S. l.], v. 19, n. 2, p. 165–205, 1986.

DODD, R. K. Soliton and nonlinear wave equations. London: Academic Press, 1982.

DRAZIN, P. G.; JOHNSON, R. S. Solitons: an introduction. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. v. 2.

FORNBERG, B. A practical guide to pseudospectral methods. [S.1.]: Cambridge university press, 1998.

GOODMAN, R. H.; HABERMAN, R. Kink-antikink collisions in the phi<sup>^</sup> 4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, SIAM, v. 4, n. 4, p. 1195–1228, 2005.

LEMOS, N. A. Mecânica analítica. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

LINHARES, C.; OLIVEIRA, H. de. Galerkin-method approach to nonlinear soliton classical stability. *Brazilian journal of physics*, v. 37, n. 2A, p. 368–377, 2007.

MENDONÇA, T.; OLIVEIRA, H. de. The collision of two-kinks defects. *Journal of High Energy Physics*, [S. l.], v. 2015, n. 9, p. 1–17, 2015.

MENDONÇA, T.; OLIVEIRA, H. de. A note about a new class of two-kinks. *Journal of High Energy Physics*, [S. l.], v. 2015, n. 6, p. 1–12, 2015.

RAJARAMAN, R. Introduction to solitons and instantons in quantum field theory. [s. l.]: North-Holland Publishing Company. 1982.

REBBI, C.; SOLIANI, G. Solitons and particles. [S.l.]: World Scientific, 1984.

VACHASPATI, T. Kinks and domain walls: An introduction to classical and quantum solitons. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006.