



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Ionara Oliveira Marques

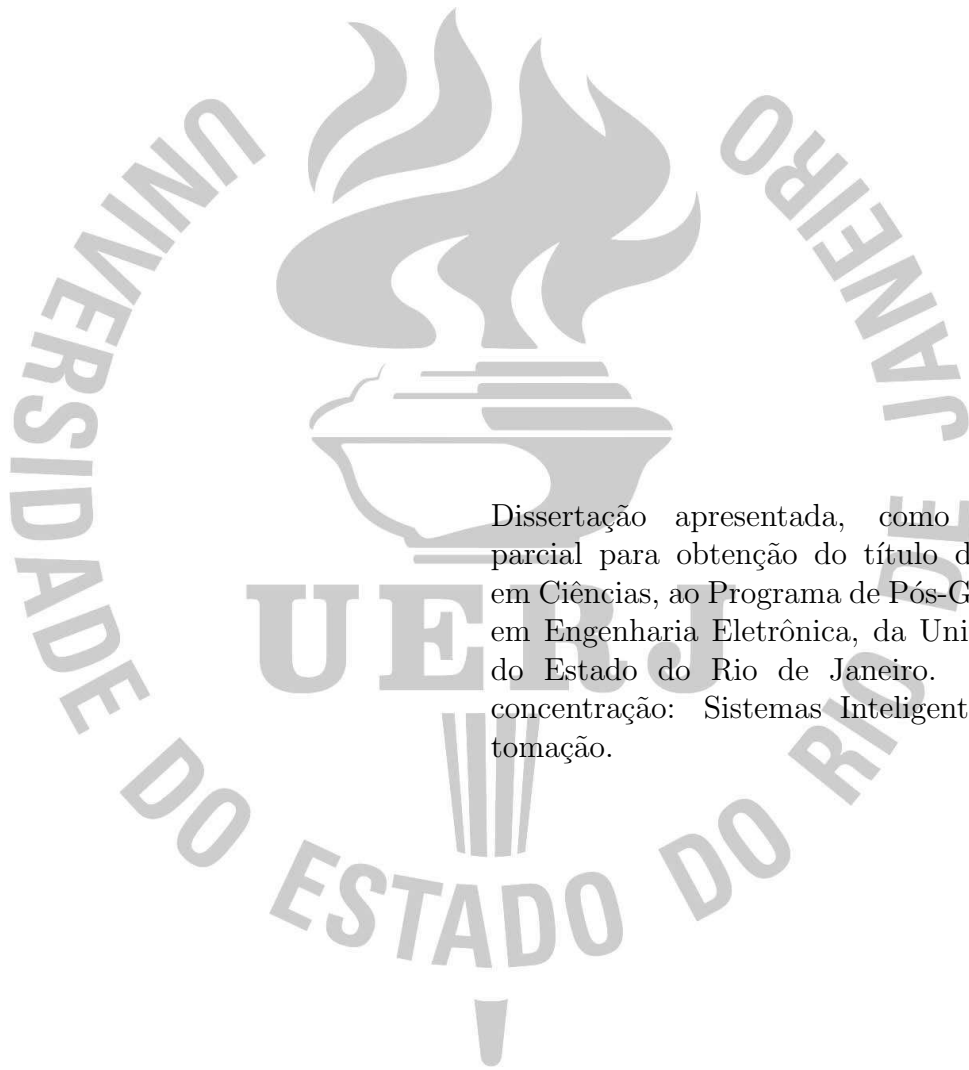
**Controle de Sistemas Lineares com Incertezas, Perturbações e  
Atraso na Saída**

Rio de Janeiro

2016

Ionara Oliveira Marques

**Controle de Sistemas Lineares com Incertezas, Perturbações e Atraso na Saída**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Orientadores: Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha  
Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

M357 Marques, Ionara Oliveira.

Controle de sistemas lineares com incertezas, perturbações e atraso na saída / Ionara Oliveira Marques. – 2016.  
164f.

Orientadores: José Paulo Vilela Soares da Cunha e Tiago Roux de Oliveira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia Eletrônica. 2. Sistemas lineares - Dissertações. 3. Realimentação (Eletrônica) - Dissertações. 4. Estabilidade Global - Dissertações. I. Cunha, José Paulo Vilela Soares da. II. Oliveira, Tiago Roux de. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. IV. Título.

CDU 681.511.4

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação.

---

Assinatura

---

Data

Ionara Oliveira Marques

**Controle de Sistemas Lineares com Incertezas, Perturbações e Atraso na  
Saída**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Sistemas Inteligentes e Automação.

Aprovado em: 29 de Março de 2016

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. José Paulo Vilela Soares da Cunha (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. Tiago Roux de Oliveira (Orientador)

Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof. Dr. Alberto Mota Simões

Instituto Militar de Engenharia - IME

---

Prof. Docteur d'Etat Liu Hsu

Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/COPPE

Rio de Janeiro

2016

*“Eu não falhei. Encontrei 10 mil soluções que não davam certo.”*  
*Thomas Edison*

## DEDICATÓRIA

Ao meu esposo, amado e companheiro *Samuel Pacheco de Oliveira*, pelo carinho,  
paciência, amizade, compreensão e incentivo incondicional!

## AGRADECIMENTO

A Deus, com seu infinito amor e misericórdia.

A minha família, por me ensinar o valor do estudo e da dedicação.

Aos meus orientadores e amigos, *Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha* e *Prof. Tiago Roux de Oliveira*, pelo apoio, empenho e pacientes ensinamentos. Obrigada pela confiança e compreensão, pois foi uma honra podermos trabalhar juntos.

Agradeço aos membros da banca *Prof. Alberto Mota Simões* e *Prof. Liu Hsu*, pelas valiosas contribuições para o aperfeiçoamento desta Dissertação.

Aos companheiros de estudo *Ernesto Rodriguez* e *Douglas Martins*, pela convivência agradável ao longo deste trabalho.

A todos aqueles que me apoiaram e ajudaram.

## RESUMO

MARQUES, Ionara Oliveira. *Controle de Sistemas Lineares com Incertezas, Perturbações e Atraso na Saída*. 164 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Eletrônica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2016.

Nesta Dissertação são propostos controladores para sistemas lineares, com realimentação de estado estimado por observadores, para as variáveis não medidas, na presença de atrasos pequenos ou arbitrários na variável de saída mensurada. As estratégias propostas são adequadas a quatro diferentes classes de sistemas de controle. No primeiro caso, trata-se sistemas apenas com atraso na saída. No segundo caso, sistemas com atraso na saída e incertezas paramétricas. No terceiro caso, sistemas com atraso e perturbação exógena. Finalmente são abordados no quarto caso, sistemas com atraso, incertezas paramétricas e perturbação exógena. Para o atraso arbitrário o estado não medido é estimado por observadores em cascata. Para todos os sistemas de controle propostos, são garantidas as propriedades de estabilidade global exponencial. Simulações ilustram a eficácia dos controladores desenvolvidos.

Palavras-chave: Sistemas com atraso; Sistemas lineares; Realimentação de estado estimado; Observadores de estado; Estabilidade global; Sistemas Incertos; Perturbações exógenas.



## ABSTRACT

MARQUES, Ionara Oliveira. *Linear Control Systems with Uncertainties, Disturbances and Delayed Output*. 164 f. Dissertation (Master Degree in Electronic Engineering) - Faculty of Engineering, University of the State of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2016.

Control schemes for linear time-delayed systems, with an estimated state feedback for unmeasured variables with a small and arbitrary delayed output is proposed. The first proposed control scheme covers a class of delayed output systems. The second scheme is able to control systems with a delayed output signal along with parametric uncertainties. In the third case, a control scheme for a delayed output and exogenous disturbance is proposed. Finally, in the fourth scheme, a system with a delayed output, parametric uncertainties and exogenous disturbance is modeled. For an arbitrary delay, the unmeasured state is estimated by cascaded observers. In all the proposed control systems, the exponential global stability is guaranteed. Simulations will illustrate the effectiveness of each approach.

Keywords: Time-Delay systems; Linear systems; Estimated state feedback; State observers; Global stability; Uncertain Systems; Exogenous disturbances.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Diagrama de blocos de dois subsistemas interconectados. ....	26
Figura 2 - Diagrama de blocos do sistema com realimentação e observador de estado. ....	33
Figura 3 - Sistema com observadores em cascata. ....	44
Figura 4 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade $\ e^{(A-LC) t}\  \leq ke^{-\eta t}$ .....	53
Figura 5 - Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $d = 0,1$ s. ....	54
Figura 6 - Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $d = 0,1$ s. ....	55
Figura 7 - Sinal de controle $u(t)$ com $d = 0,1$ s. ....	56
Figura 8 - Diagramas de Nyquist para três valores de atraso $d$ . ....	57
Figura 9 - Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,2$ s. ....	58
Figura 10- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,2$ s. ....	59
Figura 11- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,2$ s. ....	60
Figura 12- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,96$ s. ....	61
Figura 13- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,96$ s. ....	61
Figura 14- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,96$ s. ....	62
Figura 15- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 1,04$ s. ....	63
Figura 16- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 1,04$ s. ....	63
Figura 17- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 1,04$ s. ....	64
Figura 18- Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade $\ e^{[(A+\Delta BK)-LC] t}\  \leq ke^{-\eta t}$ . ....	81
Figura 19- Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade $\ e^{(A+\Delta A-BK-\Delta BK) t}\  \leq k_2e^{-\eta_2 t}$ .....	83
Figura 20- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $d = 0,085$ s. ....	84
Figura 21 - Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $d = 0,085$ s. ....	85
Figura 22- Sinal de controle $u(t)$ com $d = 0,085$ s. ....	86
Figura 23- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,17$ s. ....	87
Figura 24- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,17$ s. ....	88
Figura 25- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,17$ s. ....	89
Figura 26- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,3$ s. ....	90

Figura 27- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,3$ s. ....	90
Figura 28- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,3$ s. ....	91
Figura 29- Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade $\ e^{(\bar{A}-\bar{L}\bar{C}) t}\  \leq ke^{-\eta t}$ .....	113
Figura 30- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $d = 0,0009$ s. ....	114
Figura 31- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $d = 0,0009$ s. ....	115
Figura 32- Sinal de controle $u(t)$ com $d = 0,0009$ s. ....	116
Figura 33- Diagrama de Nyquist para três valores de atraso . ....	117
Figura 34- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,0018$ s. ....	118
Figura 35- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,0018$ s. ....	118
Figura 36- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,0018$ s. ....	119
Figura 37- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,3$ s. ....	120
Figura 38- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,3$ s. ....	120
Figura 39- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,3$ s. ....	121
Figura 40- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,36$ s. ....	122
Figura 41- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,36$ s. ....	122
Figura 42- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,36$ s. ....	123
Figura 43- Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade $\ e^{(\bar{A}-\bar{L}\bar{C}) t}\  \leq ke^{-\eta t}$ .....	148
Figura 44- Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade $\ e^{(A+\Delta A-BK) t}\  \leq k_2e^{-\eta_2 t}$ .....	149
Figura 45- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $d = 0,0009$ s. ....	150
Figura 46- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $d = 0,0009$ s. ....	151
Figura 47- Sinal de controle $u(t)$ com $d = 0,0009$ s. ....	152
Figura 48- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,0018$ s. ....	153
Figura 49- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,0018$ s. ....	153
Figura 50- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,0018$ s. ....	154
Figura 51- Estado $x(t)$ e sua estimativa $\hat{x}(t)$ atrasados com $D = 0,28$ s. ....	155
Figura 52- Sinal de saída $y(t)$ e sua estimativa $\hat{y}(t)$ atrasada com $D = 0,28$ s. ....	155
Figura 53- Sinal de controle $u(t)$ com $D = 0,28$ s. ....	156

## LISTA DE SIGLAS

DDE	Equação Diferencial de Diferenças ( <i>Differential Difference Equations</i> )
DDP	Problema de Rejeição de Perturbações ( <i>Disturbance Decoupling Problem</i> )
FOAF	Filtro de Aproximação de Primeira Ordem ( <i>First Order Approximation Filter</i> )
FDE	Equação Diferencial Funcional ( <i>Functional Differential Equations</i> )
IOSS	Estabilidade da Entrada-Saída para o Estado ( <i>Input-Output-to-State Stable</i> )
ISS	Estabilidade da Entrada para o Estado ( <i>Input-to-State Stable</i> )
LMI	Desigualdade Linear Matricial ( <i>Linear Matrix Inequality</i> )
ODE	Equação Diferencial Ordinária ( <i>Ordinary Differential Equation</i> )
PDE	Equação Diferencial a Derivadas Parciais ( <i>Partial Differential Equations</i> )
SISO	Uma Entrada e Uma Saída, Monovariável ( <i>Single-Input-Single-Output</i> )

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
1	<b>PRELIMINARES</b> .....	21
1.1	<b>Notações e Terminologia</b> .....	21
1.2	<b>Estabilidade de Sistemas sem Atraso</b> .....	22
1.3	<b>Teorema de Pequenos Ganhos</b> .....	25
1.4	<b>Estabilidade de Sistemas com Atraso</b> .....	27
1.4.1	<u>Condição Inicial</u> .....	28
1.4.2	<u>Conceito de Estabilidade</u> .....	28
1.5	<b>Lemas de Estabilidade Exponencial de Sistemas com Atraso</b> .....	29
2	<b>CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES</b> .....	31
2.1	<b>Realimentação de Estado</b> .....	31
2.2	<b>Observador de Estado</b> .....	32
2.2.1	<u>Equações dos Erros</u> .....	33
2.3	<b>Realimentação de Estado Estimado</b> .....	34
2.4	<b>Observador e Realimentação de Estado Para Sistemas Com Perturbação</b> .....	35
3	<b>CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO</b> .....	38
3.1	<b>Hipóteses Básicas</b> .....	38
3.2	<b>Sistema Linear com Atraso Pequeno na Saída</b> .....	38
3.2.1	<u>Observador de Estado e Lei de Controle</u> .....	39
3.2.2	<u>Erro de Estimação</u> .....	39
3.2.3	<u>Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada</u> .....	41
3.3	<b>Sistema Linear com Atraso Arbitrário na Saída</b> .....	43
3.3.1	<u>Observador de Estado e Lei de Controle</u> .....	43
3.3.2	<u>Erros de Estimação</u> .....	46
3.3.3	<u>Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada</u> .....	50
3.4	<b>Exemplo Numérico</b> .....	52

4	<b>CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM ATRASO</b> .....	65
4.1	<b>Hipóteses Básicas</b> .....	65
4.2	<b>Sistema Linear com Atraso Pequeno na Saída e Incertezas</b> .....	66
4.2.1	<u>Observador de Estado e Lei de Controle</u> .....	66
4.2.2	<u>Erro de Estimção</u> .....	67
4.2.3	<u>Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada</u> .....	69
4.3	<b>Sistema Linear com Atraso Arbitrário na Saída e Incertezas</b> .....	72
4.3.1	<u>Observador de Estado e Lei de Controle</u> .....	72
4.3.2	<u>Erros de Estimção</u> .....	74
4.3.3	<u>Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada</u> .....	79
4.4	<b>Exemplo Numérico</b> .....	80
5	<b>CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO E PERTURBAÇÕES EXÓGENAS</b> .....	92
5.1	<b>Hipóteses Básicas</b> .....	92
5.2	<b>Sistema Linear com Perturbações Exógenas e Atraso Pequeno na Saída</b> .....	93
5.2.1	<u>Sistema Linear com Perturbações Descasadas</u> .....	93
5.2.1.1	Observador de Estado e Lei de Controle .....	94
5.2.1.2	Erro de Estimção .....	95
5.2.1.3	Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada .....	96
5.2.2	<u>Sistema Linear com Perturbações Casadas</u> .....	99
5.3	<b>Sistema Linear com Perturbações Exógenas e Atraso Arbitrário na Saída</b> .....	101
5.3.1	<u>Sistema Linear com Perturbações Descasadas</u> .....	101
5.3.1.1	Observador de Estado e Lei de Controle .....	101
5.3.1.2	Erros de Estimção .....	103
5.3.1.3	Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada .....	108
5.3.2	<u>Sistema Linear com Perturbações Casadas</u> .....	109
5.4	<b>Exemplo Numérico</b> .....	111

6	<b>CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM ATRASO E PERTURBAÇÕES EXÓGENAS</b> .....	124
6.1	<b>Hipóteses Básicas</b> .....	124
6.2	<b>Sistema Linear com Perturbações, Incertezas na Matriz de Estados e Atraso Pequeno na Saída</b> .....	125
6.2.1	<u>Sistema Linear com Perturbações Descasadas</u> .....	125
6.2.1.1	Observador de Estado e Lei de Controle .....	126
6.2.1.2	Erro de Estimção .....	127
6.2.1.3	Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada .....	129
6.2.2	<u>Sistema Linear com Perturbações Casadas</u> .....	133
6.3	<b>Sistema Linear com Perturbações, Incertezas na Matriz de Estados e Atraso Arbitrário na Saída</b> .....	135
6.3.1	<u>Sistema Linear com Perturbações Descasadas</u> .....	136
6.3.1.1	Observador de Estado e Lei de Controle .....	136
6.3.1.2	Erros de Estimção .....	137
6.3.1.3	Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada .....	142
6.3.2	<u>Sistema Linear com Perturbações Casadas</u> .....	144
6.4	<b>Exemplo Numérico</b> .....	146
6.5	<b>Sistema Linear com Perturbações, Incertezas nas Matrizes de Estado e de Entrada e Atraso Arbitrário na Saída</b> .....	156
	<b>CONCLUSÃO</b> .....	159
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	161

## INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas dinâmicos com atrasos no tempo tem sido foco de considerável atenção por parte de vários pesquisadores, que se sentiram atraídos pela busca de um melhor critério para análise e solução de problemas causados pelo atraso (LEE; LEE, 1999). Dessa forma, o efeito do atraso na estabilidade de sistemas dinâmicos é um problema de interesse contínuo dos pesquisadores, uma vez que um pequeno atraso já é capaz de prejudicar o desempenho de certos sistemas de controle (KOLMANOVSKII; NICULESCU; GU, 1999) e (RICHARD et al., 1997).

Assim sendo, esta concentração de esforços na pesquisa de soluções de problemas para sistemas com atraso no tempo, é motivada pelo fato de que os atrasos são encontrados em muitos processos reais da engenharia (UTKIN; GULDNER; SHI, 1999), podem ser responsáveis pelo comprometimento do desempenho do controlador e, até mesmo, podem levar à instabilidade todo o sistema controlado.

Frequentemente o fenômeno de atraso é relatado como causa de instabilidade e de baixa eficiência em sistemas de controle (HA et al., 2014) e (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). No entanto, na literatura é comum a apresentação de teorias de controle que desprezam o atraso devido às dificuldades associadas à sua análise.

Em geral, os atrasos ocorrem devido a três razões distintas: ou é uma propriedade intrínseca do sistema ou é consequência de uma ação de controle ou advém da introdução intencional de atrasos no controle do sistema (SIMEÃO, 2009). Exemplos de sistemas com atrasos podem ser encontrados em reatores químicos, reatores nucleares, controle de tráfego de veículos, sistemas de teleoperação, redes de comunicação de dados (NICULESCU, 2001), o processo de maturação das células do sangue, modelo da epidemia de malária, interação neuronal (MACDONALD, 1989), etc. No âmbito industrial, podem-se ressaltar os processos de usinagem, fornos para tratamento térmico de metais e de reaquecimento (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003).

Os sistemas com atraso variável num intervalo de tempo conhecido têm sido estudados (CHEN; LIU; LU, 2006) de forma que os critérios de estabilidade existentes são geralmente classificados em *independentes do atraso* e *dependentes do atraso*. A decomposição de atraso foi proposta em (FRIDMAN; SHAKED; LIU, 2009) de forma a demonstrar uma melhoria nos limites máximos de atraso permitidos para um sistema de



controle.

O método de desigualdade dupla-integral foi proposto em (JEONG; PARK; HIM, 2012) para melhorar o conservadorismo na estabilidade de sistemas. No entanto, o método pode levar a um aumento na complexidade computacional, uma vez que algumas variáveis indesejáveis podem ser introduzidas ao sistema.

Os sistemas com atraso no tempo são também denominados sistemas com tempo morto ou de efeito retardado ou equações de diferença diferenciais (*Differential-Difference Equations - DDE*). Eles pertencem à uma classe de equações diferenciais funcionais (*Functional Differential Equations - FDE*) que são de dimensão infinita, ao contrário de equações diferenciais ordinárias (*Ordinary Differential Equations - ODE*) que possuem dimensão finita, o que dificulta ainda mais sua resolução e estudo (RICHARD, 2003).

Dessa forma, segundo (RIBEIRO, 2006) há os seguintes motivos para se estudar sistemas com atraso:

1. Sistemas com atraso são motivo de interesse de pesquisadores e engenheiros que necessitam que os modelos desenvolvidos se comportem mais próximo do real possível. Muitos processos incluem fenômenos com atraso no tempo na dinâmica interna deles. Por exemplo, (RICHARD et al., 1997) dá exemplos de atraso em biologia, química, economia, mecânica, física, onde atuadores, sensores, redes de campo podem introduzir tal atraso. Então, o interesse em sistemas com atraso continua crescendo em todas as áreas científicas especialmente em engenharia de controle.
2. Sistemas com atraso ainda não apresentam bom desempenho quando são usados muitos controladores clássicos. No entanto, ignorar os efeitos representados pelas *FDE* não é uma alternativa geral e pode levar a resultados desastrosos em termos de estabilidade e oscilações.
3. Apesar de sua complexidade, sistemas com atraso frequentemente aparecem como simples modelos de dimensão infinita na área mais complexa de equações diferenciais parciais (*Partial Differential Equations - PDE*), como mencionado em (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 1999).
4. Normalmente, a presença de atrasos no modelo do sistema é conhecida por causar diversos efeitos indesejados, como a perda de desempenho e a instabilidade do

sistema. Porém, em condições especiais, o atraso pode ser introduzido de forma propositada no sistema em malha fechada de modo a beneficiar o controle ao auxiliar o amortecimento e na estabilização do sistema, como utilizado em em (SEURET et al., 2009). Assim, o estudo do comportamento e da estabilidade do sistema com a presença de atraso torna-se essencial.

Os sistemas de controle modernos geralmente possuem perturbações e limitações nas medições que podem estar relacionadas entre si de uma forma complexa. Sendo assim, para analisar tais sistemas, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas, bem como recorrer aos computadores que podem auxiliar no projeto e simulação. Assim, com o objetivo de estabilizar sistemas com a presença de atraso, muitas são as técnicas de controle que podem ser adequadas, tais como: realimentação, observadores de estado, controle adaptativo e robusto, controle a estrutura variável, inteligência artificial, etc. (GHIGGI, 2008)

Contudo, um desafio para a engenharia de controle é modelar e controlar tais sistemas modernos e complexos. Dessa forma, o enfoque de variáveis de estado foi o método escolhido para analisar sistemas lineares incertos, com perturbações e atrasos presentes nesta Dissertação.

## **Sistemas Lineares com Atraso**

No caso de sistemas lineares estáveis, com parâmetros e atraso conhecidos, uma solução para a compensação do atraso é o uso de Preditor de Smith (SMITH, 1957), conforme descrito em (MAJHI; ATHERTON, 1998).

Na bibliografia recente de sistemas lineares com atraso, nota-se que a descrição do problema em termos de desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities - LMI*) tem sido uma das abordagens mais empregadas para a análise e síntese de controladores para sistemas com atraso. Por exemplo, os resultados apresentados por (FRIDMAN, 2001) e (FRIDMAN; SHAKED, 2003) utilizam uma representação da dinâmica do sistema através de modelos de sistemas com atraso.

O uso de observadores de estado, conforme citado em (QIANG; XIAOHONG; YANG, 2008) e (BEKIARIS-LIBERIS; KRSTIC, 2012). Entretanto, para sistemas com grandes atrasos de transporte ou quando o atraso é superior à taxa de amostragem dos sinais, estes sistemas podem possuir uma dimensão muito grande o que pode dificultar

sua análise. Assim, aumenta a complexidade ou até mesmo impossibilita a utilização de técnicas de controle desses sistemas. Assim, de forma a atenuar o efeito de um atraso arbitrário foram desenvolvidos observadores em cascata conforme abordado por (DRAKUNOV et al., 1990a, 1990b) cuja ideia é projetar um controlador para gerar o sinal de controle desejado e outro controlador para garantir que o sinal de controle real (medido) seja igual ao desejado, conforme utilizado por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHILAGARRIGUE, 2012) e (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2014).

### **Estimação do Estado em Sistemas com Sinais Atrasados**

A denominada teoria moderna de projeto de controle linear baseia-se no conhecimento do estado do sistema (CHEN, 1999). Entretanto, muitas vezes só é possível medir parte das variáveis de estado devido a aspectos técnicos ou econômicos, como por exemplo, limitação da localização dos sensores ou o custo de sua aquisição. Dessa forma, o uso de observadores de estado é uma alternativa para o problema do atraso no estado, conforme desenvolvido em (YAN; SPURGEON; EDWARDS, 2010) e (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2012).

A estimativa de estado em sistemas dinâmicos com base na medição da saída atrasada é um problema importante em muitas aplicações de engenharia. Por exemplo, quando o sistema é controlado ou monitorado por um dispositivo remoto por meio de um canal de comunicação, ou quando o processo de medição faz com que intrinsecamente um atraso no tempo seja significativo, como em reatores bioquímicos, mencionados em (CACACE; GERMANI; MANES, 2014). Por esta razão, a presença de atrasos nas equações dos sistemas ou nas variáveis de medição para a obtenção de observadores recebe cada vez mais atenção.

Observadores de estado para sistemas com atrasos de tempo na equação de estado e na equação de saída têm sido estudados por diversos autores, como (HOU; PATTON; ZITEK, 2002) e (TRINH; ALDEEN; NAHAVANDI, 2004). Dessa forma, utiliza-se nesta Dissertação um sistema linear com realimentação de saída baseado em um observador de estado para estimar o estado atual através de um observador e construir o sinal de controle por meio da realimentação do estado estimado.

Assim, a presença do atraso e incerteza nos parâmetros da planta são frequentemente a causa de instabilidade e baixo desempenho dos sistemas de controle. Por isso,

há um crescente interesse no estudo de sistemas incertos com atraso (LIU; ZINOBER; SHITESSEL, 2009).

### **Controle de Sistemas Incertos**

As abordagens para sistemas com incertezas paramétricas consideram uma compensação para o atraso, como a abordagem de sistemas com incertezas limitadas em norma, (FRIDMAN; ACOSTA; POLYAKOV, 2001) e (REES; ZHONG, 2004).

Em (RIBEIRO et al., 2006), (LOUKIANOV et al., 2006) e (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2013) aplica-se a teoria de modos deslizantes em sistemas incertos com atraso no estado. Sistemas baseados em *LMI* que garantam a estabilidade robusta para sistemas incerto, foram os métodos mais utilizados, conforme (HUI; KONG; ZHANG, 2015) e (HUI et al., 2015). No entanto, sistemas com incertezas paramétricas e a presença do atraso arbitrário na saída dificulta a convergência do valor estimado das variáveis para o valor real e, conseqüentemente, o controle do sistema.

### **Controle de Sistemas com Perturbações**

A eliminação dos efeitos das perturbações presentes em sistemas é crítica no estudo de sistemas de controle com atraso, conforme desenvolvido por (CHEN; CHEN, 2010). Além do mais, a presença do atraso em sistemas incertos e com a presença de perturbações torna o controle ainda mais difícil, visto que o observador deve prover o estado atual de um sistema incerto e perturbado para o controlador a partir de sinais atrasados. Dessa forma, os controladores projetados devem ser capazes de apresentar um desempenho satisfatório, mesmo perante condições adversas, conforme (LÉCHAPPÉ et al., 2015).

Alguns trabalhos conseguiram no entanto rejeitar as perturbações. Conforme (DÓREA; MILANI, 2003; POLYAKOV; POZNYAK, 2011; POLYAKOV, 2012), onde foi obtida uma solução e a parametrização de todos os controladores que resolvem o Problema de Rejeição de Perturbações (*Disturbance Decoupling Problem - DDP*) para uma classe particular de sistemas lineares com atraso.

## Objetivo

O problema de estabilização do sistemas com atraso de tempo tem sido uma das áreas de pesquisa mais populares nos sistemas de controle ao longo dos anos. Muitos artigos e trabalhos sobre o assunto têm sido publicados e várias soluções de abordagens para lidar com sistemas com a presença de atraso de tempo têm sido apresentadas. No entanto, ainda existe espaço para mais melhorias.

Assim, motivado pela discussão acima, os principais objetivos desta Dissertação são desenvolver e analisar algoritmos de controle baseados em realimentação de estado estimado para sistemas lineares com uma entrada e uma saída (*single-input-single-output* - *SISO*) parâmetros incertos, perturbações externas e sinais de saída arbitrariamente atrasados. A estabilidade do sistema perante estas incertezas paramétricas presentes na planta são tratadas baseado no *Teorema de Pequenos Ganhos*, onde determina-se os valores das incertezas, de forma a garantir a estabilização global do sistema.

Apesar do sistema considerado ser *SISO* e com parâmetros conhecidos, os resultados obtidos com o desenvolvimento deste controlador possuem grande relevância, visto que sistemas com atraso na saída são bem mais difíceis de se controlar do que aqueles com atraso no estado.

## Organização desta Dissertação

No **Capítulo 1** são apresentadas definições e conceitos preliminares, com ênfase em sistemas com atraso, bem como a técnica de análise da estabilidade de sistemas com atraso utilizada na Dissertação.

No **Capítulo 2** são revisados os conceitos básicos de sistemas de controle baseados na realimentação do estado estimado por observador.

No **Capítulo 3** é proposto um controlador com realimentação de saída baseado na realimentação do estado estimado para sistemas com saída com atraso pequeno ou arbitrário.

No **Capítulo 4** é proposto um controlador com realimentação de saída baseado na realimentação do estado estimado para sistemas com saída com atraso pequeno ou arbitrário e a presença de incertezas paramétricas.

No **Capítulo 5** é proposto um controlador com realimentação de saída baseado

na realimentação do estado estimado para sistemas com saída com atraso pequeno ou arbitrário e a presença de perturbações exógenas.

No **Capítulo 6** é proposto um controlador com realimentação de saída baseado na realimentação do estado estimado para sistemas com saída com atraso pequeno ou arbitrário, incertezas paramétricas e perturbações exógenas.

O trabalho será finalizado com as conclusões, discussão das contribuições, bem como as perspectivas para estudos futuros.

## 1 PRELIMINARES

Revisam-se neste Capítulo alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos algoritmos de controle nesta Dissertação.

### 1.1 Notações e Terminologia

Serão usados os conceitos e terminologias descritos a seguir:

- $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais.
- $\mathbb{C}$  é o conjunto dos números complexos.
- Considere as formas quadráticas  $x^T A x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com sinal definido, conforme (IOANNOU; SUN, 1996):

$A > 0$  : denota matriz  $A$  positiva definida;

$A < 0$  : denota matriz  $A$  negativa definida;

$A \geq 0$  : denota matriz  $A$  positiva semidefinida;

$A \leq 0$  : denota matriz  $A$  negativa semidefinida.

- A matriz  $A^T$  denota a matriz transposta de  $A$ .
- A matriz  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz identidade.
- Os autovalores máximo e mínimo da matriz  $A$  são representados por  $\lambda_{\max}(A) = \max\{\mathbb{R}[\lambda[A]]\}$  e  $\lambda_{\min}(A) = \min\{\mathbb{R}[\lambda[A]]\}$ , respectivamente, onde aqui  $\lambda[A]$  é o conjunto de autovalores da matriz  $A$ .
- A norma Euclidiana de um vetor  $x$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $A$  são denotadas por  $\|x\|$  e  $\|A\|$ , respectivamente.
- A norma  $\mathcal{L}_\infty$  de um sinal  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é definida como:

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|. \quad (1.1)$$

- Para qualquer  $p \in [1, \infty)$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  pertence a  $\mathcal{L}_p$ , se  $f$  é localmente integrável  $\forall t \in [0, +\infty]$  e  $\int_0^{\infty} |f(t)|^p dt < +\infty$ . Assim sendo, tem-se:

$$\|f\|_p = \left( \int_0^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2)$$

- Seja a norma:

$$\|h\|_1 = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt \geq \|h\|_{\infty}, \quad (1.3)$$

então a norma induzida de uma convolução dada por (ISIDORI, 1999):

$$\|h * u\|_{\infty} \leq \|h\|_1 \|u\|_{\infty}, \quad \forall u \in \mathcal{L}_{\infty}. \quad (1.4)$$

A norma da convolução que  $\|h * u\|_{\infty}$  pode ser arbitrariamente próxima de  $\|h\|_1 \|u\|_{\infty}$  caso o sinal de  $u$  seja escolhido apropriadamente.

## 1.2 Estabilidade de Sistemas sem Atraso

Considere o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente Lipschitz com  $f(0, 0) = 0$ . Convém lembrar aqui que qualquer ponto de equilíbrio pode ser deslocado para a origem por meio de uma mudança de variáveis (KHALIL, 2002). Assim, por conveniência considera-se a origem  $x = 0$  como o ponto de equilíbrio do sistema (1.5) em  $t = 0$ s. Portanto é possível afirmar que:

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.6)$$

Então, pode-se enunciar a seguinte definição de estabilidade segundo KHALIL2002:



**Definição 1 (KHALIL, 2002, Seção 4.1):** Um ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.5) é:

- *Estável* se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , tal que:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.7)$$

- *Uniformemente estável* se, para cada  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independente de  $t_0$ , tal que a condição (1.7) seja satisfeita.
- *Instável* se não é estável.
- *Assintoticamente estável* se for estável e se existe uma constante positiva  $c = c(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow +0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , para todo  $\|x(t_0)\| < c$ .
- *Uniformemente assintoticamente estável* se for uniformemente estável e se existe uma constante positiva  $c$ , independente de  $t_0$ , tal que para todo  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow +0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , uniformemente em  $t_0$ . Ou seja, para cada  $\eta > 0$ , existe um  $T = T(\eta) > 0$  tal que:

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.8)$$

- *Globalmente uniformemente assintoticamente estável* se for uniformemente estável, com  $\delta(\epsilon)$  escolhido de maneira a satisfazer  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) = \infty$  e para cada par de números positivos  $\eta$  e  $c$  existe  $T = T(\eta, c)$ , tal que:

$$\|x(t)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.9)$$

As definições acima admitem implicitamente que a solução  $x(t)$  está definida para todo  $t \geq t_0$ .

As classes de funções  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{KL}$  são extensivamente utilizadas para introduzir conceitos de estabilidade nos trabalhos de (SONTAG; WANG, 1995, Apêndice B). Nesta Dissertação, as classes  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{KL}$  serão utilizadas na análise de estabilidade do controlador proposto. Para as próximas definições, considere (KHALIL, 2002, Seção 4.4):

Classe de Funções  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}_\infty$

Uma função  $\varphi : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$  pertence à classe  $\mathcal{K}$ , denotada por  $\varphi \in \mathcal{K}$ , se verifica as duas propriedades  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(\cdot)$  não decresce no intervalo de definição. Além disso, se  $a \rightarrow +\infty$  e  $\varphi(r) \rightarrow +\infty$  quando  $r \rightarrow +\infty$ , então  $\varphi(r)$  é dita de classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

Classe de Funções  $\mathcal{KL}$

Uma função  $\beta : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$  pertence à classe  $\mathcal{KL}$ , denotada por  $\beta \in \mathcal{KL}$ , se: para cada  $s$  fixo,  $\beta(r, s)$  é de classe  $\mathcal{K}$  com respeito a  $r$  e, para cada  $r$  fixado,  $\beta(r, s)$  decresce com respeito a  $s$ . Além disso  $\beta(\cdot, s) \rightarrow 0$  quando  $s \rightarrow +\infty$ .

**Definição 2 (KHALIL, 2002, Seção 4.4):** Considerando as funções de classe  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{KL}$ , o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.5) é:

- *Uniformemente estável* se e somente se existem uma função  $\alpha$  de classe  $\mathcal{K}$  e uma constante positiva  $c$ , independente de  $t_0$ , tais que:

$$\|x(t)\| < \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.10)$$

- *Assintoticamente uniformemente estável* se e somente se existem uma função  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  e uma constante positiva  $c$ , independente de  $t_0$ , tais que:

$$\|x(t)\| < \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.11)$$

- *Globalmente assintoticamente uniformemente estável* se e somente se a condição (1.11) for satisfeita para qualquer estado inicial  $x(t_0)$ .

**Definição 3 (KHALIL, 2002, Seção 4.5):** O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.5) é:

- *Exponencialmente estável* se existem constantes positivas  $c$ ,  $k$  e  $\lambda$  tais que:

$$\|x(t)\| < k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c. \quad (1.12)$$

- *Globalmente exponencialmente estável* se a condição (1.12) for satisfeita para qualquer estado inicial  $x(t_0)$ .

Agora, para as definições a seguir, considere o seguinte sistema não-linear, com estado  $x$ , entrada  $u$  e saída  $y$  da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u), \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{1.13}$$

no qual  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  e  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é localmente Lipschitz e  $f(0, 0, 0) = 0$ ,  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  é contínua e  $h(0) = 0$ . A entrada  $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um mapeamento mensurável e localmente essencialmente limitado ( $u \in \mathcal{L}_\infty$ ). A solução definida em algum intervalo máximo de existência  $[0, t_{\max}(x_0, u))$  é denotada por  $x(t, x_0, u)$  para cada condição inicial  $x_0$  e entrada  $u$ .

**Definição 4 (KHALIL, 2002, Seção 4.9):** O sistema (1.13) é dito ser estável da entrada para o estado (*Input-to-State Stable - ISS*), se existirem  $\beta \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma \in \mathcal{K}$  (também referido como ganho-ISS), tais que  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall u \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\forall t \in [0, t_{\max})$ :

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u(t)\|_\infty).\tag{1.14}$$

**Definição 5 (KHALIL, 2002, Seção 5.2):** O sistema (1.13) é estável da entrada para a saída e para o estado (*input- output-to-state stable - IOSS*), se existirem  $\beta \in \mathcal{KL}$  e  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ , tais que para todo  $x_0$ ,  $u \in \mathcal{L}_\infty$  e  $\forall t \in [0, t_{\max})$ :

$$\|x(t, x_0, u)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma_1(\|u(t)\|_\infty) + \gamma_2(\|u(t)\|_\infty).\tag{1.15}$$

### 1.3 Teorema de Pequenos Ganhos

A seguir será apresentado o *Teorema de Pequenos Ganhos* enunciado por (ISIDORI, 1999, Seção 10.6). São considerados os sistemas interconectados conforme a Figura 1:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2),\tag{1.16}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u), \quad (1.17)$$

nos quais  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f_1(0, 0) = 0$  e  $f_2(0, 0, 0) = 0$ .

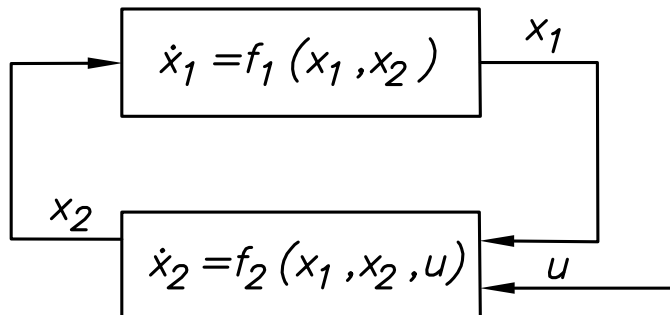


Figura 1 - Diagrama de blocos de dois subsistemas interconectados.

No sistema (1.16),  $x_1$  é o estado interno e  $x_2$  é a entrada do subsistema. Do mesmo modo, no sistema (1.17),  $x_2$  é o estado interno,  $x_1$  e  $u$  são as entradas do subsistema.

Assim sendo, a relação de estabilidade entrada-saída para o sistema (1.16) é equivalente à existência de duas funções  $\gamma_{01}(\cdot)$  e  $\gamma_1(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  de tal modo que a resposta  $x_1(\cdot)$  para qualquer entrada  $x_2(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty^{n_2}$  satisfaçam as desigualdades:

$$\|x_1(t)\| \leq \max[\gamma_{01}(\|x_1(0)\|), \gamma_1(\|x_2(\cdot)\|_\infty)], \quad \forall t \geq 0, \quad (1.18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| \leq \gamma_1 \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| \right), \quad (1.19)$$

onde  $x_1(0)$  é a condição inicial de  $x_1$ .

De forma similar, a estabilidade entrada-saída para o sistema (1.17) é equivalente a existência de duas funções  $\gamma_{02}(\cdot)$  e  $\gamma_2(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$  de tal modo que a resposta  $x_2(\cdot)$  para qualquer entrada  $x_1(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty^{n_2}$  satisfaçam as desigualdades:

$$\|x_2(t)\| \leq \max[\gamma_{02}(\|x_2(0)\|), \gamma_2(\|x_1(\cdot)\|_\infty), \gamma_u(\|u(\cdot)\|_\infty)], \quad \forall t \geq 0, \quad (1.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_2(t)\| \leq \gamma_2 \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_1(t)\| \right), \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|, \quad (1.21)$$

onde  $x_2(0)$  é a condição inicial de  $x_2$ .

Dessa forma a composição das funções  $\gamma_1(\cdot)\gamma_2(\cdot)$  é tal que:

$$\gamma_1[\gamma_2(r)] < r, \quad \forall r > 0. \quad (1.22)$$

Conclui-se que o sistema completo realimentado é ISS (*input-to-stable*). Este resultado é usualmente denominado *Teorema de Pequenos Ganhos*.

Dessa forma, se a condição (1.22) é satisfeita, o sistema formado pelas equações (1.16) e (1.17) com estado  $x = (x_1, x_2)$  será estável se existirem as funções  $\gamma_0(\cdot)$ ,  $\gamma(\cdot)$  e a entrada  $u$  de uma função classe  $\mathcal{K}$  de forma que satisfaçam as desigualdades:

$$\begin{aligned} \gamma_0(r) &= \max \{2\gamma_{01}, 2\gamma_{02}, 2\gamma_1 \circ \gamma_{02}(r), 2\gamma_2 \circ \gamma_{01}(r)\}, \\ \gamma(r) &= \max \{2\gamma_1 \circ \gamma_u(r), 2\gamma_u(r)\}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

de forma que a resposta  $x(t)$  para qualquer entrada  $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty^m$  é limitada e

$$\begin{aligned} \|x(\cdot)\|_\infty &\leq \max \{\gamma_0(\|x(0)\|), \gamma(\|u(\cdot)\|_\infty)\}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| &\leq \gamma \left( \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| \right), \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde  $x(0)$  é a condição inicial de  $x$ .

#### 1.4 Estabilidade de Sistemas com Atraso

A seguir são resumidos conceitos básicos para sistemas com atraso utilizados nesta Dissertação.

A evolução de um sistema com atraso depende não somente de seu estado atual, mas também de seu passado. Para representar esta relação de causa e efeito, são utilizadas as equações diferenciais funcionais (*Functional Differential Equations - FDE*). Portanto, considere a seguinte notação para equações diferenciais funcionais de sistemas com atraso (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, Seção 1.3).

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.25)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-d, 0], \mathbb{R}^n)$ ,  $d$  é um número real positivo que representa o atraso e  $x_t$  é o estado atrasado, ou seja, é uma função contínua no intervalo

de tempo  $(t - d, t)$ .

#### 1.4.1 Condição Inicial

Devido a presença do atraso, a solução do sistema (1.25) não pode ser unicamente determinada a partir dos valores das variáveis de estado do sistema no instante inicial  $t = t_0$ . Desta maneira, a solução a partir de um instante inicial  $t_0$  é caracterizada pelo conhecimento dos valores assumidos pelo vetor de estado  $x(t)$  no intervalo de tempo  $[t_0 - d, t_0]$ . Logo, a condição inicial deixa de ser um ponto no espaço  $\mathbb{R}^n$  para ser uma função nesse espaço dada por (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003; GHIGGI, 2008):

$$x(t_0 + \theta) = x_0(\theta), \quad \theta \in [-d, 0], \quad (1.26)$$

na qual  $x_0 : [-d, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função contínua.

#### 1.4.2 Conceito de Estabilidade

Conforme definido em (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, Seção 1.4), a estabilidade do sistema é afetada quando o comportamento da trajetória de  $x(t)$  desvia de  $y(t)$ .

Assim, define-se :

$$\|\phi\|_c =: \max_{-r \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\| \quad (1.27)$$

conforme (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003, Seção 1.2).

Dessa forma, considere  $x(t) = 0$  como *solução trivial* do sistema (1.25), tal que seja:

- *Estável* se para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$  e qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta = \delta(t_0, \epsilon) > 0$  de forma que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta$  implica em  $\|x(t)\| < \epsilon$  para  $t \geq t_0$ .
- *Assintoticamente Estável* se for *estável* para qualquer  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta_a = \delta_a(t_0, \epsilon) > 0$  de forma que  $\|x_{t_0}\|_c < \delta_a$  implica em  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .
- *Uniformemente Estável* se for *estável* para qualquer  $\delta(t_0, \epsilon)$  escolhido, independente de  $t_0$ .

- *Uniformemente Assintoticamente Estável* se for *uniformemente estável* para qualquer  $\delta_a > 0$  de forma que para qualquer  $\eta > 0$  existe um  $T = T(\delta_a, \eta)$  onde  $\|x_{t_0}\|_c < \delta$  implica em  $\|x(t)\| < \eta$  para  $t \geq t_0 + T$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$ .
- *Globalmente Assintoticamente Estável* se for *assintoticamente estável* e  $\delta_a$  possa ser arbitrariamente grande.

## 1.5 Lemas de Estabilidade Exponencial de Sistemas com Atraso

Nesta seção serão apresentados os lemas desenvolvidos a partir de resultados obtidos por (NICULESCU et al., 1998), onde são demonstradas condições suficientes de estabilidade exponencial para o sistema com atraso:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - A_d x(t-d), t \geq 0, \quad (1.28)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ ,  $d > 0$  é um atraso constante e a condição inicial é  $x(t) = \phi(t), \forall t \in [-d, 0]$ .

Assim, os principais resultados são enunciados nos Lemas a seguir:

**Lema 1.1** *Considere o sistema (1.28) assumindo-se que a matriz dinâmica  $A$  seja Hurwitz tal que a desigualdade:*

$$\|e^{At}\| \leq k_A e^{-\eta_A t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.29)$$

*seja satisfeita para  $k_A \geq 1$  e  $\eta_A > 0$  conhecidos.*

*Para um atraso  $d$  constante, se a desigualdade*

$$\frac{k_A}{\eta_A} \|A_d\| < 1, \quad (1.30)$$

*for satisfeita, então,  $\exists M \geq 1$  tal que a solução  $x(t)$  da equação (1.28) satisfaz a desigualdade:*

$$\|x(t)\| \leq M \sup_{-d \leq \theta \leq 0} (\|\phi(\theta)\|) e^{(-\frac{\sigma}{d}t)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.31)$$

onde  $\sigma > 0$  é a única solução positiva da equação transcendental:

$$1 - \frac{\sigma}{\eta A d} = \frac{k_A}{\eta_A} \|A_d\| e^\sigma. \quad (1.32)$$

**Lema 1.2** *Considere o sistema (1.28) assumindo-se que a matriz  $(A - A_d)$  seja Hurwitz tal que a desigualdade:*

$$\|e^{(A-A_d)t}\| \leq k e^{-\eta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.33)$$

seja satisfeita para  $k \geq 1$  e  $\eta > 0$  conhecidos.

Para um atraso  $d$  constante que satisfaça a desigualdade

$$\frac{k}{\eta} d (\|A_d A\| + \|A_d^2\|) < 1, \quad (1.34)$$

for satisfeita, então,  $\exists M \geq 1$  tal que a solução  $x(t)$  da equação (1.28) satisfaz a desigualdade:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq M \sup_{-d \leq \theta \leq 0} \sup(\|\phi(\theta)\|) e^{\left(\frac{-\sigma t}{d}\right)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (1.35)$$

onde  $\sigma > 0$  é a única solução positiva da equação transcendental:

$$1 - \frac{\sigma}{\eta d} = \frac{k}{\eta} \left( \frac{\sigma}{1 - \alpha} \right) d (\|A_d A\| + \|A_d^2\|). \quad (1.36)$$

Dessa forma, é possível afirmar que a equação (1.28) será robustamente exponencialmente estável com uma taxa de decaimento  $\frac{\sigma}{d}$ .

As provas dos Lemas 1.1 e 1.2 são apresentadas em (NICULESCU et al., 1998, Teoremas 1 e 2), respectivamente.

O Lema 1.1 exige que a matriz  $A$  do sistema sem controle já seja estável. Já o Lema 1.2 exige que o sistema de controle incluindo a realimentação de estado atrasado seja estável. Dessa forma, por conveniência serão utilizados os resultados apresentados no Lema 1.2 para a análise de estabilidade de sistemas desenvolvidos nos próximos capítulos.



## 2 CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES

Neste Capítulo apresentam-se as metodologias que servem de motivação e de base para o desenvolvimento do trabalho a respeito da estabilização de sistemas lineares com saída atrasada, estado não medido e perturbação exógena a serem estimados por observadores.

As condições para análise de estabilidade podem ser formuladas no domínio do tempo ou no domínio da frequência, mas sobretudo devem ser eficientes e numericamente tratáveis. Para atender a esses requisitos apresentam-se os passos para o projeto dos controladores e a análise de estabilidade.

### 2.1 Realimentação de Estado

A representação por espaço de estados é um modelo matemático conveniente, pois apresenta o modelo contendo o vetor de estado da planta. Considere o sistema SISO, linear e invariante no tempo descrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

no qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de saída,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes reais e constantes:

O controle por realimentação de estado exige que todas as variáveis de estado do sistema estejam disponíveis para serem realimentadas.

Usando realimentação de estado, cada variável de estado é multiplicada por um ganho e realimentada para o canal de entrada, de forma que:

$$u(t) = -Kx(t),\tag{2.2}$$

na qual  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é o vetor de ganhos constantes da realimentação de estado.

Aplicando-se (2.2) em (2.1), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t), \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Conforme definido por (MICHIELS; NICULESCU, Paris, 2007), se o par  $(A, B)$  for estabilizável, então pode ser escolhido uma matriz  $K$  tal que o sistema  $(A - BK)$  seja estável.

## 2.2 Observador de Estado

Em sistemas de controle baseados na realimentação de estado, é desejável que todas as variáveis de estado estejam disponíveis para realimentação. Na prática, porém, pode ocorrer que nem todas as variáveis de estado estejam disponíveis, sendo necessária a utilização de um sistema conhecido como observador de estados, capaz de estimar as variáveis de estado de forma indireta do modelo estudado (OGATA, 2011).

Conforme discutido em (CHEN, 1999) e (LEVINE, 1996) existem basicamente, duas estruturas para a implementação de um observador de estados:

- Observador de estado de ordem completa, que é capaz de estimar (observar) todas as variáveis de estado do sistema, independentemente se algumas dessas variáveis estiverem disponíveis para medição direta.
- Observador de estado de ordem reduzida, que irá apenas estimar as variáveis de estado não medidas, dispensando a estimação das variáveis que são diretamente medidas.

O observador de estado de ordem completa tradicional é uma réplica do modelo dinâmico da planta, a menos de um termo que incorpora o erro de observação de saída para estabilizar a equação do erro de estimação, para compensar as eventuais incertezas na matriz dinâmica  $A$ , na matriz de distribuição de controle  $B$  e o erro inicial entre o estado da planta e o estado estimado pelo observador. O erro de observação é o resultado da diferença entre a saída medida do sistema e a saída estimada pelo observador de estado.

Sendo assim, seguindo o sistema original apresentado pela equação (2.1) é possível

descrever as seguintes equações para o observador de estado:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)], \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

no qual  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  o estado do observador por que estimativa  $x(t)$  e  $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor de ganhos constantes do observador dado por  $L^T = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$ . A priori as matrizes reais  $A, B$  e  $C$  são as mesmas do modelo da planta.

Uma planta linear é dita observável se o seu estado inicial  $x(t_0)$  pode ser determinado para uma condição de entrada nula, unicamente a partir do conhecimento da sua saída a partir do instante  $t_0$  até um instante considerado posterior.

### 2.2.1 Equações dos Erros

Nesta Dissertação serão utilizados sistemas com realimentação de estado e observador, conforme representado na Figura 2 (CHEN, 1999) :

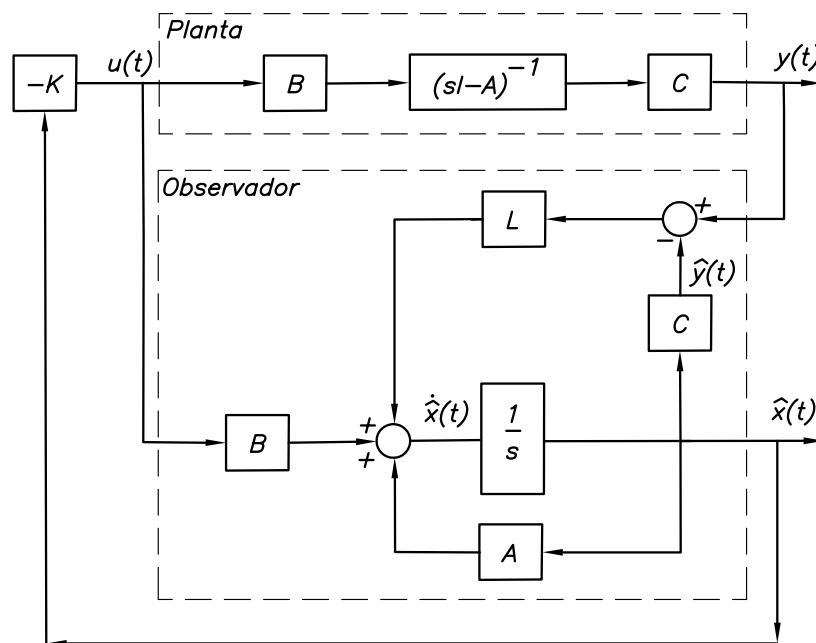


Figura 2 - Diagrama de blocos do sistema com realimentação e observador de estado.

O erro de estimação é a diferença entre o estado real e o estado estimado pelo

observador (CHEN, 1999):

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (2.5)$$

de onde se obtém:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t). \quad (2.6)$$

Dessa forma é possível calcular o erro de estimação baseado nas equações (2.1) e (2.4) apresentadas para a planta e observador de estado, respectivamente. Assim, tem-se:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t), \quad (2.7)$$

que pode ser reduzida à:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}(t). \quad (2.8)$$

Uma vez que o sistema (2.1) seja observável, é possível atribuir arbitrariamente os autovalores de  $(A - LC)$ , então é possível fazer com que o erro  $\tilde{x}$  convirja para a origem, ou equivalentemente, o estado estimado se aproximará do estado real.

### 2.3 Realimentação de Estado Estimado

Uma das formas de controle por realimentação de saída consiste em utilizar as variáveis medidas para estimar o estado por meio de um observador e construir o sinal de controle através de uma realimentação do estado estimado (SUBBARAO; MURALIDHAR, 2009).

Assim sendo, se  $\hat{x}(t)$  é uma estimativa de  $x(t)$ , então na realimentação de estado estimado utiliza-se:

$$u(t) = -K\hat{x}(t). \quad (2.9)$$

Dessa forma, considere a equação (2.1) realimentada por (2.9):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\hat{x}(t), \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Da equação (2.5) sabemos que:  $\hat{x}(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ . Assim, a equação do estado (2.10) se torna:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)],\tag{2.11}$$

que pode ser reduzida à:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK\tilde{x}(t).\tag{2.12}$$

Assim sendo, se o par  $A$  e  $B$  for controlável é possível posicionar arbitrariamente os autovalores de malha fechada, isto é, os autovalores da matriz dinâmica  $(A - BK)$ , de forma que o sistema seja estável (CHEN, 1999).

## 2.4 Observador e Realimentação de Estado Para Sistemas Com Perturbação

A seguir será apresentado o conceito de perturbação exógena em sistemas de controle conforme definido em (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, Seção 4.3).

As perturbações influenciam as variáveis do processo e podem diminuir a qualidade e a precisão do sistema de controle. Como exemplos físicos, elas podem representar rajadas de vento em uma antena estabilizada, ondas em um navio, carga sobre um motor, etc.

Assim é altamente desejável estudar a rejeição de distúrbios em sistemas de controle. Existem quatro tipos diferentes de distúrbios que são comumente usados em análises de sistemas de controle: pulso, degrau, rampa e senoidal.

Para representar essas perturbações, assume-se que o sistema seja:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{2.13}$$

no qual a perturbação  $\nu(t)$  é o sinal gerado por um sistema dinâmico fictício descrito por:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= A_w w(t), \\ \nu(t) &= C_w w(t).\end{aligned}\tag{2.14}$$

no qual  $w \in \mathbb{R}^n$ .

A matriz  $A_w$  deverá possuir os autovalores na origem ou no eixo imaginário. Um caso comum é que a perturbação  $\nu(t)$  seja uma constante, então  $A_w = 0$ . Outro caso é quando a perturbação seja senoidal de frequência conhecida  $\omega_0$  (*rad/s*), que corresponde a:

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{2.15}$$

Em todos os casos, supõe-se que o sinal da perturbação  $w(t)$  não possa ser medido. Assim, considere o vetor de estado aumentado:

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.\tag{2.16}$$

Dessa forma, o sistema (2.13) pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} z(t).\end{aligned}\tag{2.17}$$

Portanto, há um problema básico sobre posicionamento de autovalores, uma vez que o sistema (2.17) não é completamente controlável. Assim, os autovalores associados a  $A_w$  não são influenciados pela realimentação de estado. De fato isso é muito natural, porque os distúrbios são variáveis exógenas que não são influenciados pelo controlador.

No entanto, considere a lei de controle de realimentação de estado linear:

$$u(t) = -Kx(t) - K_w w(t),\tag{2.18}$$

sendo uma combinação de um termo de realimentação  $-Kx(t)$  e o termo *feedforward* da

perturbação  $-K_w w(t)$ .

Embora o estado  $w(t)$  não possa ser influenciado pela realimentação, o efeito da perturbação pode ser atenuado por uma escolha apropriada do vetor de ganhos  $K_w$ .

Dessa forma, para realizar a lei de controle (2.18) seria necessário medir a perturbação  $w(t)$ . Uma alternativa é estimá-la pelo uso de observador de estado e perturbação de forma que:

$$\dot{\hat{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} L \\ L_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad (2.19)$$

na qual o vetor de ganhos do observador seja  $L = \begin{bmatrix} L \\ L_w \end{bmatrix}$ , onde  $L \in \mathbb{R}^n$  e  $L_w \in \mathbb{R}$ .

O sistema (2.17) é observável, mas não controlável. A estimação dos distúrbios  $w(t)$  é obtida pela integração do erro do estado estimado. Dessa forma, a perturbação  $\nu(t)$  é reduzida por sua estimação  $\hat{\nu}(t)$ , que é obtida pela integração do erro do observador, conforme definido em (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, Seção 4.3).

### 3 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO

Neste capítulo será apresentado o projeto de um controlador com realimentação de saída baseado em observadores de estado. Serão considerados sistemas com saídas com atrasos pequenos ou arbitrários.

Considera-se sistemas lineares, observáveis, controláveis e com a saída atrasada, descritos pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{3.1}$$

na qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}$  é a saída atrasada. O atraso  $\tau$  pode ser  $d$  quando for pequeno ou  $D$  quando for arbitrário.

Daqui por diante, considere ao longo do capítulo que  $c_i > 0$  e  $\lambda_i > 0$  denotam constantes escalares, positivas. A condição inicial é definida por  $x(\theta) = x_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ , na qual  $\bar{\tau}$  é o atraso máximo.

#### 3.1 Hipóteses Básicas

Na seção 1.5 foram demonstradas as condições suficientes de estabilidade exponencial para sistemas de controle com a presença de atraso. Dessa forma, por conveniência serão utilizados os métodos referentes ao **Lema 1.2**.

Assim, para o sistema (3.1), considera-se as hipóteses:

**(H1)** As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conhecidas.

**(H2)** O atraso  $\tau$  é conhecido, suficientemente pequeno e satisfaz a desigualdade  $0 < \underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau} < \infty$ , onde  $\underline{\tau}$  e  $\bar{\tau}$  são limites inferior e superior, respectivamente.

#### 3.2 Sistema Linear com Atraso Pequeno na Saída

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso pequeno. Assim, considera-se que  $\tau = d$ , onde  $\underline{d}$  e  $\bar{d}$  são limites inferior e superior, respectivamente.



### 3.2.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (3.1) a ser controlado, poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t-d).\end{aligned}\tag{3.2}$$

O observador de estado utilizado é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + [y(t) - \hat{y}(t)], \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t-d).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Assim, a lei de controle utiliza o estado estimado pelo observador, ou seja:

$$u(t) = -K\hat{x}(t).\tag{3.4}$$

Dessa forma, considerando (3.4), pode-se reescrever as equações do sistema (3.2) como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\hat{x}(t), \\ y(t) &= Cx(t-d),\end{aligned}\tag{3.5}$$

e do observador (3.3) como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + LC[x(t-d) - \hat{x}(t-d)], \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t-d).\end{aligned}\tag{3.6}$$

### 3.2.2 Erro de Estimação

Considere o erro de estimação no estado  $\tilde{x}(t)$  definido como:

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t),\tag{3.7}$$

no qual a condição inicial é dada por  $\tilde{x}(\theta) = \tilde{x}_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ .

Dessa forma,  $\dot{\tilde{x}}(t)$  pode ser obtido da diferença entre as equações (3.5) e (3.6):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = Ax(t) - Bk\hat{x}(t) - A\hat{x}(t) + Bk\hat{x}(t) - LC[x(t-d) - \hat{x}(t-d)], \quad (3.8)$$

sendo reduzida à:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t-d). \quad (3.9)$$

A partir da equação (3.9) é possível conhecer o comportamento dinâmico e a estabilidade do observador.

A determinação dos coeficientes adequados para a matriz  $L$  permitirá que o comportamento dinâmico do vetor de erro  $\tilde{x}(t)$  seja exponencialmente estável e rápido para tender à origem, conforme (CHEN, 1999), no caso de observadores sem atraso. Dessa forma, tem-se a próxima hipótese para garantir a estabilidade da equação (3.9):

**(H3)** A matriz do observador  $L$  deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz  $(A - LC)$  seja Hurwitz.

Conforme assumido no **Lema 1.2** da seção 1.5 (NICULESCU et al., 1998), tal que a desigualdade:

$$\|e^{(A-LC)t}\| \leq k e^{-\eta t}, \quad (3.10)$$

seja satisfeita para  $k \geq 1$  e  $\eta > 0$  conhecidos. De forma que para um  $d$  suficientemente pequeno, os parâmetros do sistema devem satisfazer:

$$\frac{k}{\eta} (d\|LC\| + \|(LC)^2\|) < 1. \quad (3.11)$$

Conforme (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2013, 2014) a solução da equação (3.9) pode ser expressa por:

$$\tilde{x}(t) = \Phi_1(t, \tilde{x}_0), \quad (3.12)$$

na qual  $\Phi_1(t, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}^n$  é a função de transição de estados para a condição inicial  $\tilde{x}_0(t)$ .

Dessa forma, a equação (3.12) pode ser majorada por:

$$\|\Phi_1(t, \tilde{x}_0)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^*, \quad (3.13)$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$ .

Baseando-se na equação (3.13), a solução  $\tilde{x}(t)$  para a equação (3.9) satisfaz:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^*. \quad (3.14)$$

Assim, o erro de estimação  $\tilde{x}(t)$  tenderá exponencialmente a zero, conforme (3.14).

### 3.2.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

Baseado-se na equação do erro de estimação (3.7), é possível reescrever a lei de controle (3.4) como:

$$u(t) = -Kx(t) + K\tilde{x}(t), \quad (3.15)$$

Então, a equação de estado (3.5) com sinal de controle (3.15) pode ser reescrita como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)], \quad (3.16)$$

de onde se obtém:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK\tilde{x}(t). \quad (3.17)$$

Conforme definido na seção 2.3, a correta determinação dos parâmetros da matriz de realimentação  $K$  permitirá o sistema seja exponencialmente estável. Dessa forma, tem-se a próxima hipótese referente à estabilidade da equação (3.17):

**(H4)** A matriz de realimentação  $K$  deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz  $(A - BK)$  seja Hurwitz, conforme (CHEN, 1999).

Dessa forma, supondo a condição inicial do estado  $x(0) = x_0$ , a solução para a

equação dinâmica (3.17) pode ser expressa como:

$$x(t) = \Phi_2(t, x_0) + \int_0^t G_1(t, \tau)BK\tilde{x}(\tau)d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.18)$$

na qual  $x(t) = \Phi_2(t, x_0) = e^{(A-BK)t}x_0 \in \mathbb{R}^n$ . A resposta impulsiva  $G_1(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a solução da equação diferencial homogênea  $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$  com condição inicial  $x(\tau) = I_n$  para  $t > \tau$ ,  $x(t) = 0$  para  $t \leq \tau$  e  $\tau$  é o instante de aplicação do impulso de  $G_1$ . Para obter um resultado que satisfaça a equação (3.18), considera-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(t, x_0)\| &\leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^*, \\ \|G_1(t, \tau)\| &\leq c_3 e^{-\lambda_3(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

na qual  $x_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|x_0(\theta)\|$  e  $c_3 \geq c_2 \|BK\|$ .

Dessa forma, baseando-se nos majorantes acima e utilizando o resultado da equação (3.14), reescreve-se um novo majorante para a solução da equação (3.18):

$$\|x(t)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^* + c_3 e^{-\lambda_3 t} * c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^*, \quad (3.20)$$

na qual a convolução pode ser majorada conforme descrito em (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|c_3 e^{-\lambda_3 t} * c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^*\| \leq c_4 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^* + c_5 e^{-\lambda_3 t} \tilde{x}_0^*. \quad (3.21)$$

Dessa forma, a equação (3.20) se torna:

$$\|x(t)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^* + c_4 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^* + c_5 e^{-\lambda_3 t} \tilde{x}_0^*. \quad (3.22)$$

podendo ser reescrita como:

$$\|x(t)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^* + c_6 e^{-\min(\lambda_1, \lambda_3)t} \tilde{x}_0^*. \quad (3.23)$$

Deste modo, conforme (3.23) é possível verificar que o sistema  $x(t)$  será globalmente exponencialmente estável.

**Observação 3.1** *Na maioria dos sistemas reais existem atrasos. Sob o ponto de vista de controle, a presença destes atrasos pode influenciar negativamente no que diz respeito ao desempenho do sistema, caso não sejam levados em consideração no projeto de controle. No entanto, conforme demonstrado, verifica-se que um sistema de controle com atraso na saída pode ser exponencialmente estável conforme as considerações apresentadas.*

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 3.1** *Considere o sistema linear com atraso (3.2) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (3.4) que utiliza o observador de estado (3.3). Assuma que as hipóteses (H1) a (H4) sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável com:*

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.24)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{x}^T(t), x^T(t)]^T$  e  $z_0 = [\tilde{x}_0^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T$ ,  $\forall \theta \in [-\bar{d}, 0]$ .

### 3.3 Sistema Linear com Atraso Arbitrário na Saída

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso arbitrário. Assim, considere que  $\tau = D$ , onde  $\underline{D}$  e  $\bar{D}$  são limites inferior e superior, respectivamente.

#### 3.3.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (3.1) a ser controlado poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t - D). \end{aligned} \quad (3.25)$$

O controle de sistemas com atraso arbitrário foi abordado por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012) e com controle por modo deslizante que aplica observadores conectados em cascata por (COUTINHO, 2012). A grande vantagem

deste tipo de observador é estimar o valor atual das variáveis de estado através de seus valores atrasados, de forma que, para sistemas com atraso arbitrário na saída, basta adicionar observadores em cascata à medida que o atraso aumenta.

**Observação 3.2** *Para estimar o estado atual  $x(t)$  do sistema com atraso na saída, descrito por (3.25), serão utilizados observadores conectados em cascata de forma que quanto maior o tempo de atraso, maior o número de  $m$  observadores serão necessários. Cada observador estimará um vetor de estado atrasado, cujo valor do atraso é dividido em partes iguais para cada observador, dado por  $\frac{D}{m}$ .*

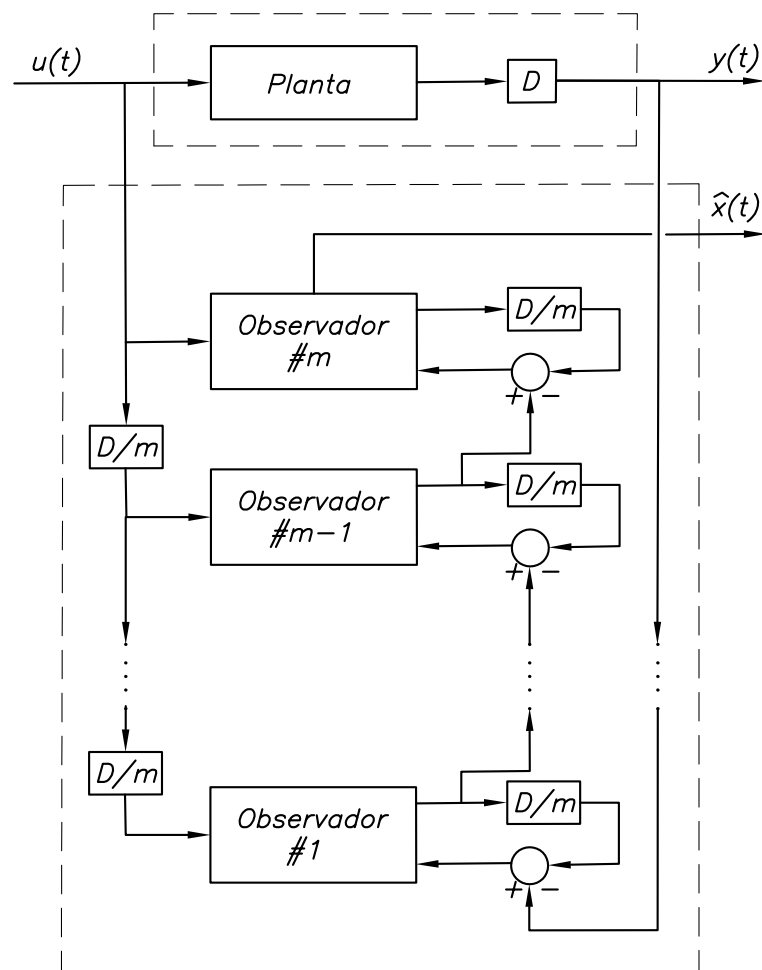


Figura 3 - Sistema com observadores em cascata.

A Figura 3 (COUTINHO; OLIVEIRA; CUNHA, 2014) representa o sistema de observadores em cascata descrito por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012).

Assim, considera-se as seguintes notações para representar o estado e o sinal de controle:

$$x_j(t) = x \left( t - D + j \frac{D}{m} \right), \quad (3.26)$$

$$u_j(t) = u \left( t - D + j \frac{D}{m} \right), \quad (3.27)$$

e para o estado do observador:

$$\hat{x}_j(t) = \hat{x} \left( t - D + j \frac{D}{m} \right), \quad (3.28)$$

na qual  $j = 1, \dots, m$ . Então, o observador para estimação do estado é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + Bu_1(t) - L \left[ C\hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y(t) \right], \\ \hat{y}_1(t) &= C\hat{x}_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_j(t) &= A\hat{x}_j(t) + Bu_j(t) - L \left[ C\hat{x}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{j-1}(t) \right], \\ \hat{y}_j(t) &= C\hat{x}_j(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_m(t) &= A\hat{x}_m(t) + Bu_m(t) - L \left[ C\hat{x}_m \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{m-1}(t) \right], \\ \hat{y}_m(t) &= C\hat{x}_m(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

O vetor  $\hat{x}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $x_j(t)$  e  $\hat{x}(t) := \hat{x}_m(t)$  é uma estimativa do estado  $x(t)$  do sistema (3.25). Todos os observadores utilizados em (3.29) possuem a mesma estrutura. Caso o atraso fosse suficientemente pequeno, somente um observador seria necessário para estimar as variáveis de estado do sistema.

Define-se a lei de controle do sistema, considerando a entrada estimada pelo observador conforme (3.4) da seção 3.2, ou seja:  $u(t) = -K\hat{x}(t)$ .

### 3.3.2 Erros de Estimação

Conforme demonstrado em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012, Teorema 1) há uma quantidade suficiente de  $m$  observadores em cascata de tal modo que o estado do último observador em (3.29) converge exponencialmente para o estado do sistema (3.25). Dessa forma, a convergência do observador em cascata será provada passo a passo pelo método de indução matemática.

Assim, baseado em (3.7) considere  $\tilde{x}_1(t)$  como o primeiro erro de estimação em cascata para o passo  $i = 1$ :

$$\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t). \quad (3.30)$$

Portanto,  $\dot{\tilde{x}}_1(t)$  pode ser obtido da diferença das equações (3.25) e (3.29):

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t) - A\hat{x}_1(t) - Bu_1(t) + L \left[ C\hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y \right], \quad (3.31)$$

na qual  $\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t)$  é a representação do sistema (3.25) com sinais atrasados que, para propósitos de análise, foi representado com o índice  $i = 1$ . Assim, obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = A\tilde{x}_1(t) + LC \left[ \hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - x(t - D) \right]. \quad (3.32)$$

No entanto, pela equação (3.26) observa-se que

$$x_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) = x(t - D), \quad (3.33)$$

o qual escolhido um número  $m$  de observadores de forma que o primeiro observador  $\hat{x}_1(t)$  possa convergir para  $x_1(t) = x \left( t - D + \frac{D}{m} \right)$ .

Dessa forma, a equação (3.32) se torna:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = A\tilde{x}_1(t) + LC \left[ \hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - x_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) \right], \quad (3.34)$$



sendo reduzida à:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = A\tilde{x}_1(t) - LC\tilde{x}_1\left(t - \frac{D}{m}\right). \quad (3.35)$$

A equação (3.35) pode ser comparada à (3.9), referente à seção 3.2 para um atraso  $\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno. Assim, tem-se uma solução majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \Pi_1, \quad (3.36)$$

na qual  $\Pi_1 \leq \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{10}^*$ , onde  $\alpha_1 > 0$  e  $\lambda_1 > 0$  denotam constantes escalares positivas.

Igualmente, de forma a provar o segundo passo da indução matemática, baseado em (3.7) considere  $\tilde{x}_2(t)$  como o segundo erro de estimação em cascata para o passo  $i = 2$ :

$$\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t). \quad (3.37)$$

Portanto, calcula-se o erro de estimação  $\dot{\tilde{x}}_2(t)$  da diferença das equações (3.25) e (3.29):

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = Ax_2(t) + Bu_2(t) - A\hat{x}_2(t) - Bu_2(t) + L\left[C\hat{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) - \hat{y}_1\right], \quad (3.38)$$

na qual  $\dot{x}_2(t) = Ax_2(t) + Bu_2(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (3.25) com o índice  $i = 2$ . Assim, obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = A\tilde{x}_2(t) + LC\hat{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) - LC\hat{x}_1(t), \quad (3.39)$$

na qual baseado em (3.37), é possível reescrever (3.39):

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = A\tilde{x}_2(t) - LC\tilde{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) + LCx_2\left(t - \frac{D}{m}\right) - LC\hat{x}_1(t). \quad (3.40)$$

Conforme em (3.26) tem-se:

$$x_2\left(t - \frac{D}{m}\right) = x\left(t - \frac{D}{m} - D + \frac{2D}{m}\right) = x\left(t - D + \frac{D}{m}\right) = x_1(t). \quad (3.41)$$

Portanto, (3.40) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = A\tilde{x}_2(t) - LC\tilde{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) + LCx_1(t) - LC\hat{x}_1(t), \quad (3.42)$$

sendo reescrita como:

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = A\tilde{x}_2(t) - LC\tilde{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) + LC\tilde{x}_1(t). \quad (3.43)$$

Dessa forma, uma vez que o sistema  $\tilde{x}_1(t)$  decai exponencialmente conforme definido em (3.36), uma solução para o sistema (3.44) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{x}_2(t)\| = \Pi_a * \Pi_b, \quad (3.44)$$

na qual  $\Pi_a \leq \alpha_a e^{-\lambda_a t} \tilde{x}_{a0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{x}_1(t)$  tendendo para a origem e  $\Pi_b \leq \alpha_b e^{-\lambda_b t} \tilde{x}_{b0}^*$  para  $\Pi_b = \|LC\tilde{x}_1(t)\| \leq \|LC\| \cdot \Pi_1$ . Considere que  $\alpha_a, \alpha_b > 0$  e  $\lambda_a, \lambda_b > 0$  denotam constantes escalares positivas. Assim, a convolução pode ser majorada conforme descrito em (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|\Pi_a * \Pi_b\| \leq \Pi_2, \quad (3.45)$$

na qual  $\Pi_2 \leq \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} \tilde{x}_{20}^*$ , onde  $\alpha_2 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$  denotam constantes escalares positivas. Contudo, a solução para o estado  $\tilde{x}_2(t)$  representado pela equação (3.44), satisfaz:

$$\|\tilde{x}_2(t)\| \leq \Pi_2. \quad (3.46)$$

Assim, de forma a validar a recorrência da convergência do erro, baseado em (3.7) considere agora o erro de estimação  $\tilde{x}_j(t)$  definido para o passo  $i = j$ :

$$\tilde{x}_j(t) = x_j(t) - \hat{x}_j(t). \quad (3.47)$$

Calcula-se o erro de estimação  $\dot{\tilde{x}}_j(t)$  pode ser obtido da diferença das equações (3.25) e (3.29):

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = Ax_j(t) + Bu_j(t) - A\hat{x}_j(t) - Bu_j(t) + L \left[ C\hat{x}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) - \hat{y}_{j-1} \right], \quad (3.48)$$

na qual  $\dot{x}_j(t) = Ax_j(t) + Bu_j(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (3.25) com o índice  $i = j$ . Dessa forma, obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = A\tilde{x}_j(t) + LC\hat{x}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) - LC\hat{x}_{j-1}(t). \quad (3.49)$$

Assim, pela equação (3.47), é possível reescrever (3.49):

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = A\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + LCx_j\left(t - \frac{D}{m}\right) - LC\hat{x}_{j-1}(t). \quad (3.50)$$

Baseado em (3.26) tem-se:

$$x_j\left(t - \frac{D}{m}\right) = x\left(t - \frac{D}{m} - D + \frac{jD}{m}\right) = x\left(t - D + (j-1)\frac{D}{m}\right) = x_{j-1}(t). \quad (3.51)$$

Portanto, (3.50) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = A\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + LCx_{j-1}(t) - LC\hat{x}_{j-1}(t). \quad (3.52)$$

O erro de estimação  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  para o passo  $i = j - 1$  é definido por:

$$\tilde{x}_{j-1}(t) = x_{j-1}(t) - \hat{x}_{j-1}(t). \quad (3.53)$$

Assim, conforme (3.53), tem-se para (3.52):

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = A\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + LC\tilde{x}_{j-1}(t), \quad (3.54)$$

Dessa forma, uma vez que por indução o sistema  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  decai exponencialmente para a origem como  $\|\tilde{x}_{j-1}(t)\| \leq \Pi_{j-1}$ , uma solução para o sistema (3.54) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| = \Pi_c * \Pi_d, \quad (3.55)$$

na qual  $\Pi_c \leq \alpha_c e^{-\lambda_c t} \tilde{x}_{c0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  tendendo para a origem e  $\Pi_d \leq \alpha_d e^{-\lambda_d t} \tilde{x}_{d0}^*$  para  $\Pi_d = \|LC\tilde{x}_{j-1}(t)\| \leq \|LC\| \cdot \Pi_{j-1}$ . Considere que  $\alpha_c, \alpha_d > 0$  e  $\lambda_c, \lambda_d > 0$  denotam constantes escalares positivas. Assim, a convolução pode

ser majorada conforme descrito em (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|\Pi_c * \Pi_d\| \leq \Pi_j, \quad (3.56)$$

na qual  $\Pi_j \leq \alpha_j e^{-\lambda_j t} \tilde{x}_{j0}^*$ , onde  $\alpha_j > 0$  e  $\lambda_j > 0$  denotam constantes escalares positivas. Contudo, a solução para o estado  $\tilde{x}_j(t)$  representado pela equação (3.55), se torna:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \Pi_j. \quad (3.57)$$

Dessa forma, por indução matemática, demonstra-se que o erro de estimação  $\tilde{x}(t)$  da planta tenderá exponencialmente a zero para ( $j = m$ ) obsservadores.

Assume-se que a quantidade de  $m$  observadores em cascata faça com que  $\frac{D}{m}$  seja suficientemente pequeno para que a influência do atraso seja pequena. Uma vez que o estágio do observador adianta a saída de  $\frac{D}{m}$  após  $m$  passos, então a saída deixa de estar atrasada. Assim um observador em cascata é um observador padrão de *Luenberger* para estimar o estado  $x(t)$ .

Portanto, é possível que seja satisfeita a condição **(H3)** de forma que a matriz  $(A - LC)$  seja Hurwitz. Assim, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação do erro de estimação total da planta, definido por:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq c_a e^{-\lambda_a t} \tilde{x}_0^*, \quad (3.58)$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-D, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$ .

### 3.3.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

De forma a garantir a estabilização do sistema, utiliza-se a lei de controle de realimentação do estado  $u(t) = -Kx(t) + K\tilde{x}(t)$  conforme equação (3.15). Assim, fazendo a realimentação da planta, tem-se para a equação do estado (3.25) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)]. \quad (3.59)$$

podendo ser reescrita como:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK\tilde{x}(t). \quad (3.60)$$

Portanto, a equação (3.60) pode ser comparada à equação (3.17) referente à seção 3.2 para um atraso  $\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno, de forma a garantir que sejam satisfeitas as hipóteses **(H3)** e **(H4)**.

Dessa forma, é possível escrever um majorante exponencial para a solução de (3.60):

$$\|x(t)\| \leq c_b \max\{x_0^*, \tilde{x}_0^*\} e^{-\lambda_b t}, \quad (3.61)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-D, 0]} \|x_0(\theta)\|$ .

Assim, conforme (3.61) o sistema  $x(t)$  será globalmente exponencialmente estável.

**Observação 3.3** *Comprova-se que se  $x_j$  converge exponencialmente para zero, então  $x_{j-1}$  também convergirá exponencialmente a zero. Dessa forma, conforme demonstrado pelas dependências dos observadores anteriores, é garantida a convergência desde o primeiro observador ( $j = 1$ ). Então, deduz-se recursivamente que, todos os erros de estimação convergem exponencialmente a zero.*

*Dessa forma, pode-se dizer que para todo atraso constante  $D$  existe um número  $m$  de observadores em cascata que satisfaça a relação:*

$$m \geq \frac{D}{d_1}, \quad (3.62)$$

*na qual  $d_1$  é o máximo atraso admitido para um único observador, de forma que tal que todos os erros de estimação convergem exponencialmente a zero.*

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 3.2** *Considere o sistema linear (3.25) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (3.4) que utiliza o observador de estado (3.29). Assuma que as hipóteses **(H1)** a **(H4)** sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero*

e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável tal que:

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \forall t \geq 0, \quad (3.63)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{x}_1^T(t), \tilde{x}_2^T(t) \dots \tilde{x}_m^T(t), x^T(t)]^T$  e

$$z_0 = [\tilde{x}_1^T(\theta), \tilde{x}_2^T(\theta) \dots \tilde{x}_m^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T, \forall \theta \in [-\bar{D}, 0].$$

### 3.4 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema linear de segunda ordem, com atraso na saída e que satisfaz as hipóteses **(H1)** a **(H4)** :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-d). \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\text{na qual } \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \text{ e } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Assim, de forma a comprovar a estabilidade do sistema (3.64), considere as condições abaixo:

- Conforme a hipótese **(H3)**:

– Escolhe-se  $L = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^T$  de forma que a matriz  $(A-LC)$  seja Hurwitz. Assim:

$$A-LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

cujos autovalores são -1 rad/s e -2 rad/s. Ou seja, a matriz  $(A-LC)$  é Hurwitz.

- A matriz  $(A-LC)$  deverá obedecer a condição de existência conforme a desigualdade (3.10),  $\|e^{(A-LC)t}\| \leq k e^{-\eta t}$ .

Dessa forma, considere os parâmetros  $k = 1,05$  e  $\eta = 0,87$  obtidos pelo *filtro de aproximação de primeira ordem (first order approximation filter - FOAF)*,

conforme critério definido em (CUNHA, 2004) de forma a minimizar a norma exponencial. Assim, tem-se:

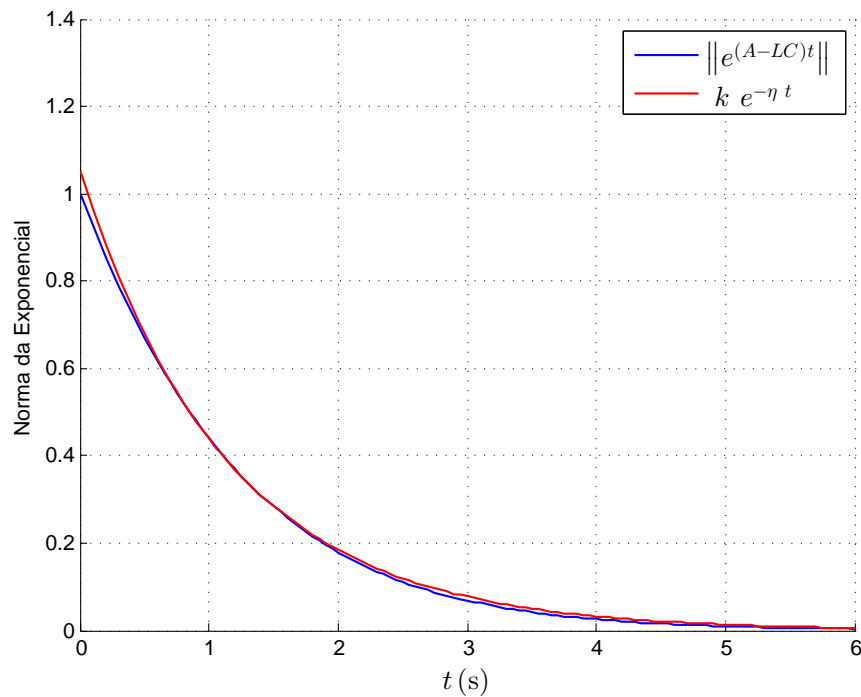


Figura 4 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade  $\|e^{(A-LC)t}\| \leq k e^{-\eta t}$ .

Pela Figura 4 é possível perceber que a curva em azul, referente a  $\|e^{(A-LC)t}\|$  é inferior à curva em vermelho, referente à  $k e^{-\eta t}$ , satisfazendo a condição.

- A matriz  $(A - LC)$  deve obedecer a condição de existência conforme a desigualdade (3.11),  $\frac{k}{\eta} (d\|LC A\| + \|(LC)^2\|) < 1$ .

Considere os mesmos  $k = 1,05$  e  $\eta = 0,87$  para um atraso máximo definido  $d = 0,1$  s para que a condição (3.11) seja atendida. Assim, o sistema retornou um valor máximo permitido de 0,9952.

- Conforme a hipótese **(H4)**:

- Define-se o ganho do controlador como  $K = [1,5 \quad 0,25]$  de forma que a matriz  $(A - BK)$  seja Hurwitz. Assim:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} [1,5 \quad 0,25], \quad (3.66)$$

cujos autovalores são -1 rad/s e -2 rad/s. Ou seja, a matriz  $(A-BK)$  é Hurwitz.

- As condições iniciais usadas nas simulações são:

- Sistema e observador, para atraso pequeno  $d$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0].$$

- Sistema e observadores em cascata, para atraso arbitrário  $D$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-D, 0].$$

Portanto, serão apresentadas simulações do sistema proposto em (3.64) de forma a ilustrar a eficácia dos controladores desenvolvidos.

A Figura 5 apresenta os sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  comparados aos sinais  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  estimados pelo observador para o atraso definido de  $d = 0,1$  s .

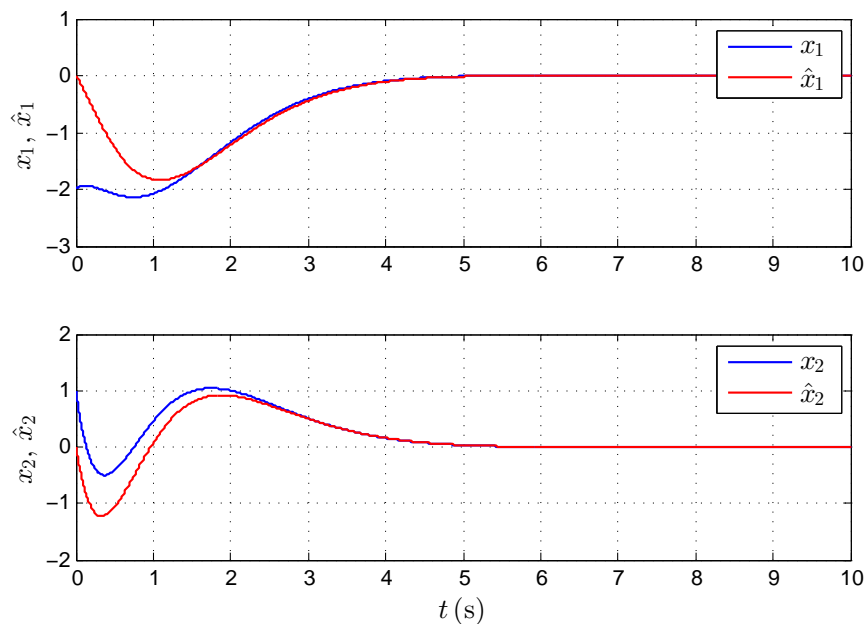


Figura 5 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $d = 0,1$  s .

Na Figura 6 pode-se observar a saída  $y(t)$  medida e a saída  $\hat{y}(t)$  estimada por um único observador, onde é possível observar a presença do atraso  $d = 0,1$  s no sistema.



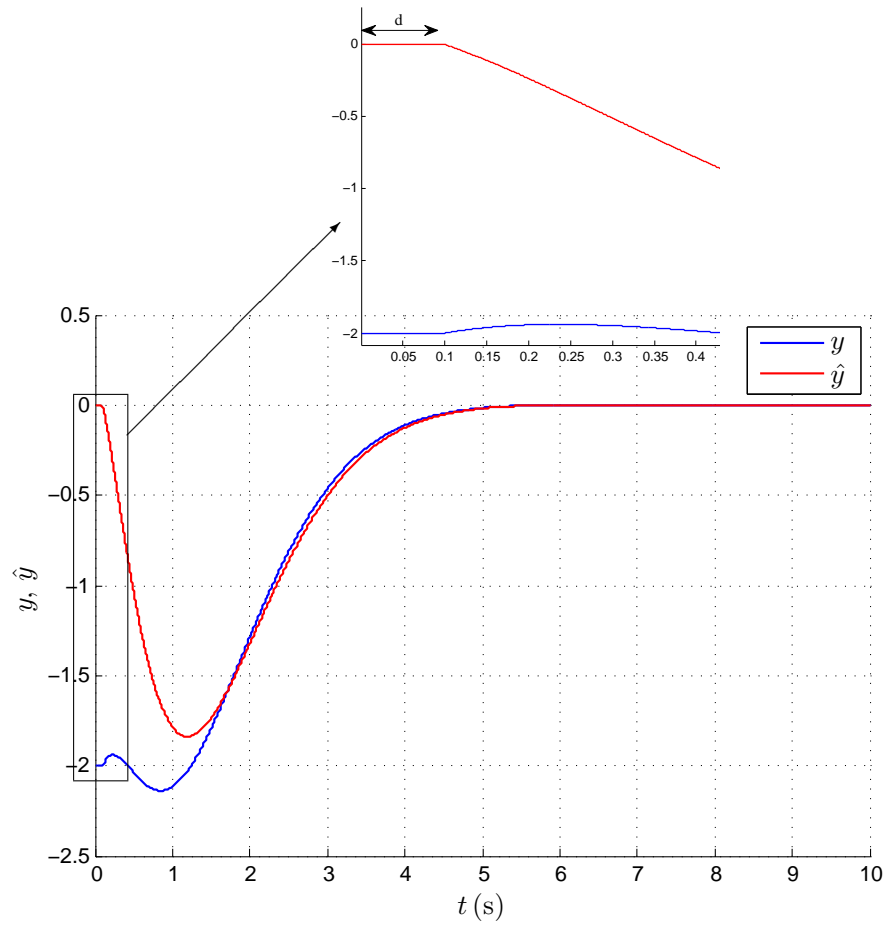


Figura 6 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $d = 0,1$  s.

Assim, verifica-se que o controle não foi prejudicado. O sinal de controle  $u(t)$  mostrado na Figura 7 é gerado a lei de controle (3.4).

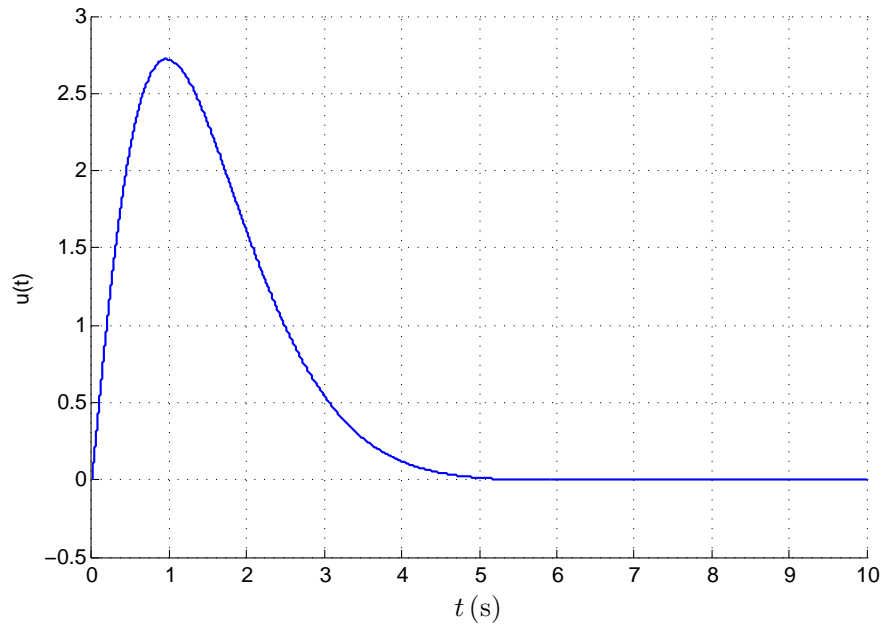


Figura 7 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $d = 0,1$  s.

Conforme descrito nas definições, o atraso máximo permitido para o sistema apresentado é  $d = 0,1$  s.

Uma vez que a matriz  $A$  possui um autovalor instável, o diagrama de Nyquist da função de transferência  $G(s) = e^{-sd}C(sI - A)^{-1}L$  deverá envolver o ponto  $-1$  no sentido anti-horário para que o observador em malha fechada seja estável. Assim, observa-se nas curvas de Nyquins na Figura 8 os atrasos de  $d = 0,48$  s e  $d = 0,5$  s, sendo o atraso máximo permitido para o sistema se manter estável. No entanto, para o atraso de  $d = 0,52$  s é possível verificar que o sistema torna-se instável, uma vez que o ponto  $-1$  não é mais envolvido pela curva no sentido anti-horário.

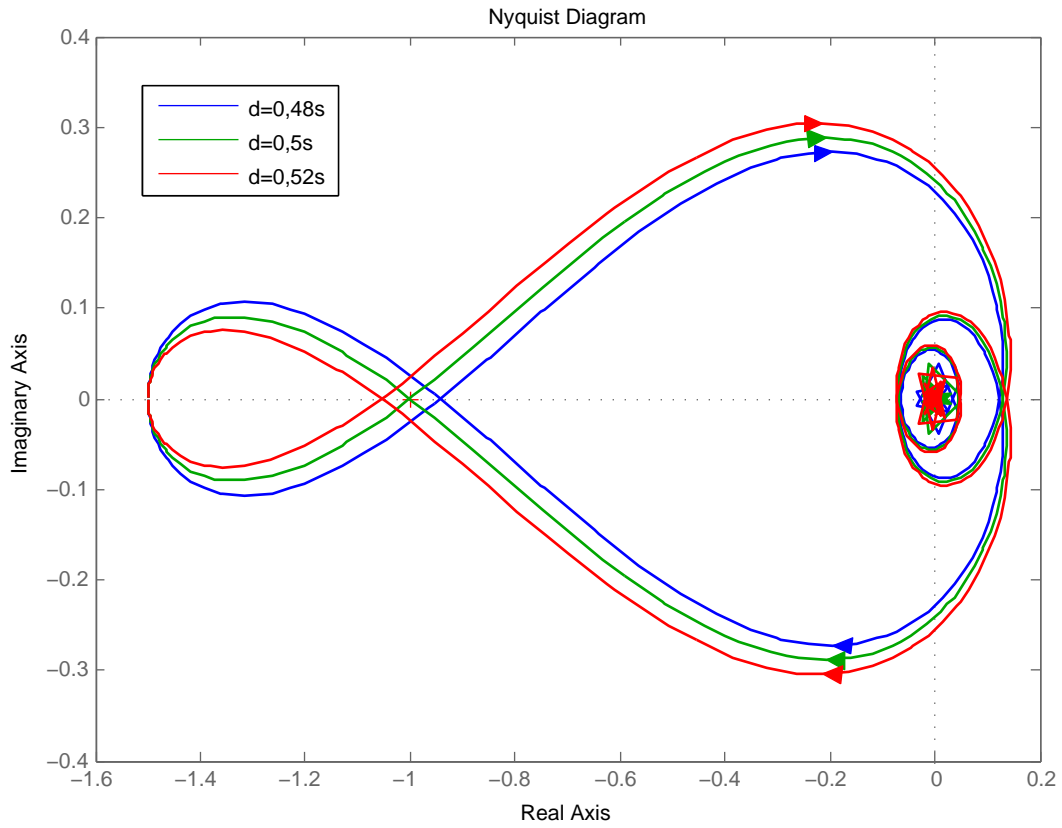


Figura 8 - Diagramas de Nyquist para três valores de atraso  $d$  .

De forma a dar continuidade ao estudo, considere um atraso para  $D = 0,2s$  onde serão utilizados dois observadores conectados em cascata ( $m=2$ ) . Assim, a Figura 9 apresenta os sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  e a Figura 10 apresenta  $y(t)$  , comparando seus valores medidos e observados, utilizando dois observadores para o atraso para  $D = 0,2s$ .

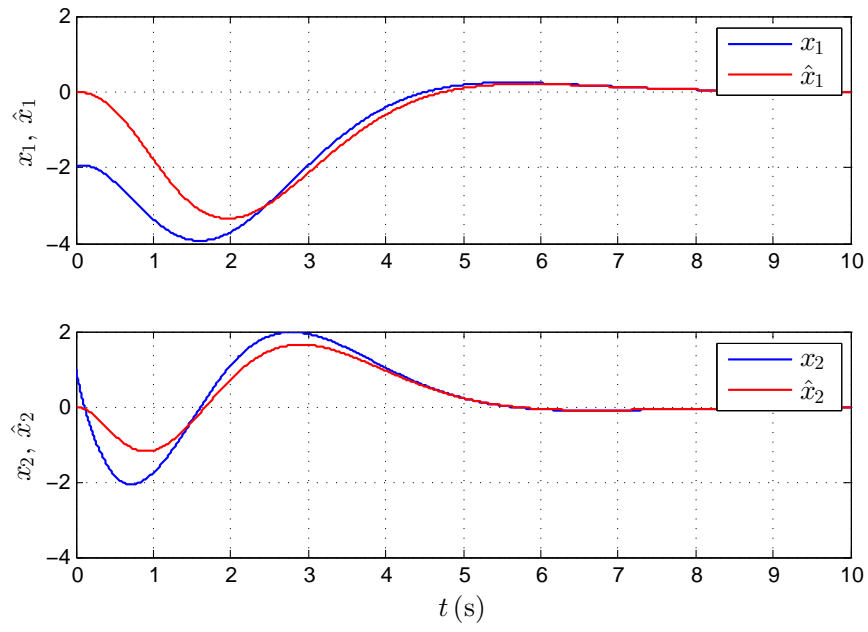


Figura 9 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,2$  s.

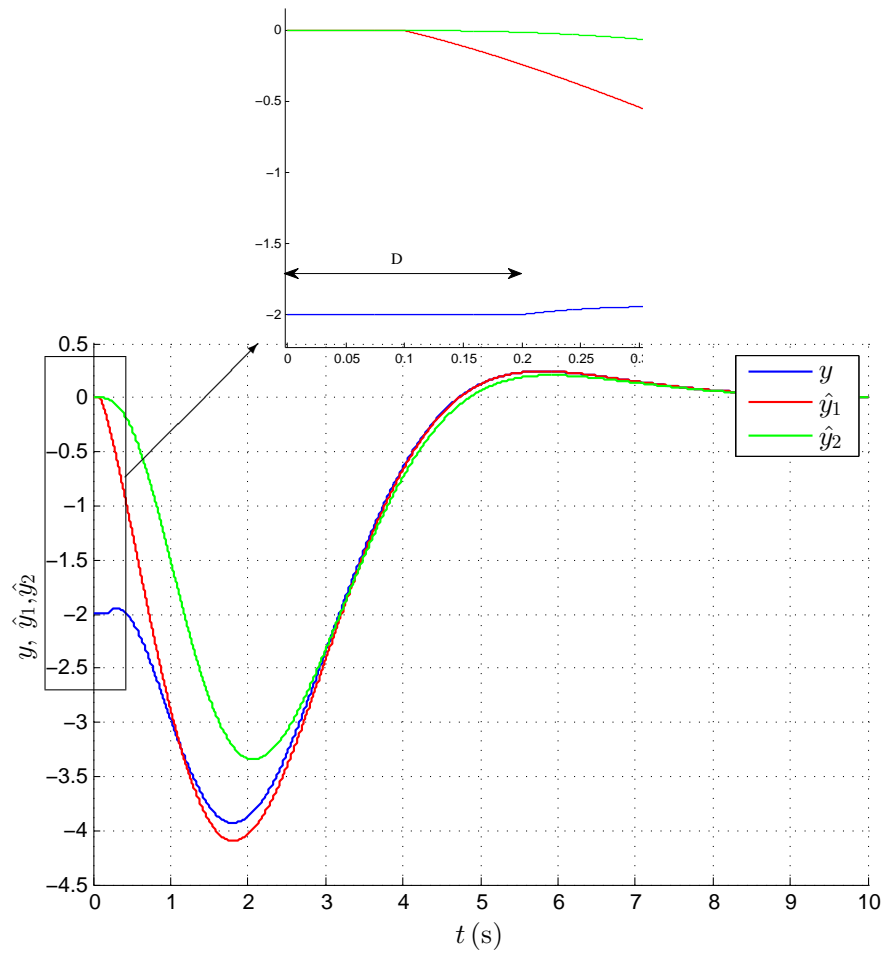


Figura 10 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,2$  s.

A Figura 11 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,2$  s.

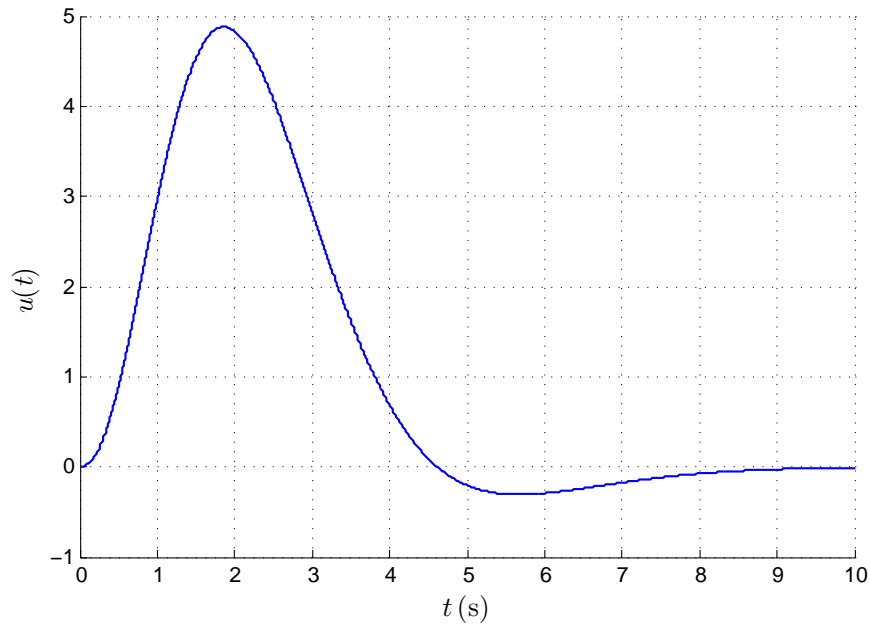


Figura 11 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,2$  s.

É importante destacar que a estabilidade e o desempenho do controlador são robustos em relação a atrasos maiores. Assim, esta quantidade de observadores para os mesmos parâmetros escolhidos permite a convergência para zero do erro de estimação e a saída do sistema. Dessa forma, ampliando-se o atraso para  $D = 0,96$  s, duas vezes o valor de referência obtido pelo gráfico de Nyquist em Figura 8, é possível observar que o sistema se mantém estável com apenas dois observadores, ao contrário do que a estimativa pela desigualdade (3.11) indicaria que seriam necessários 10 observadores conectados em cascata ( $m=10$ ).

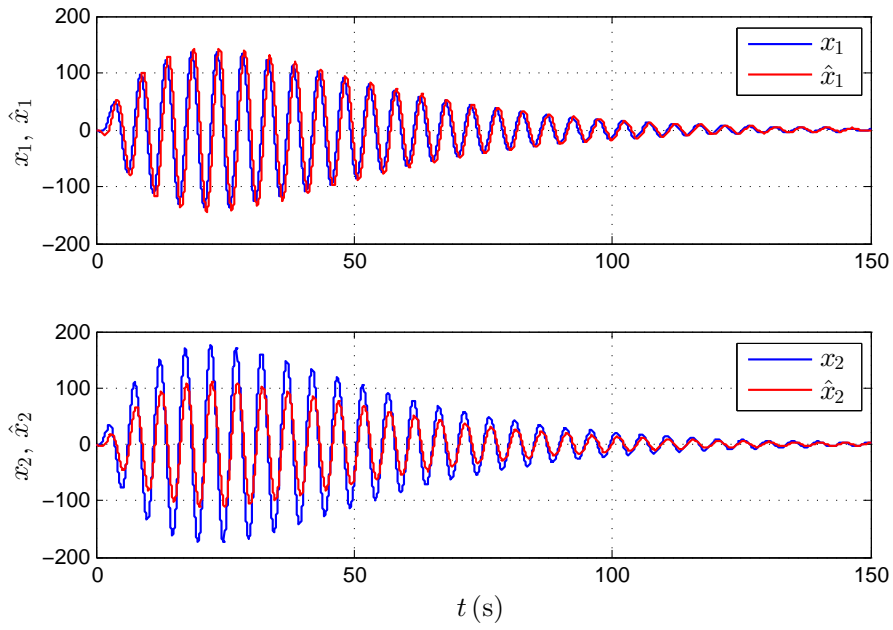


Figura 12 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,96$  s.

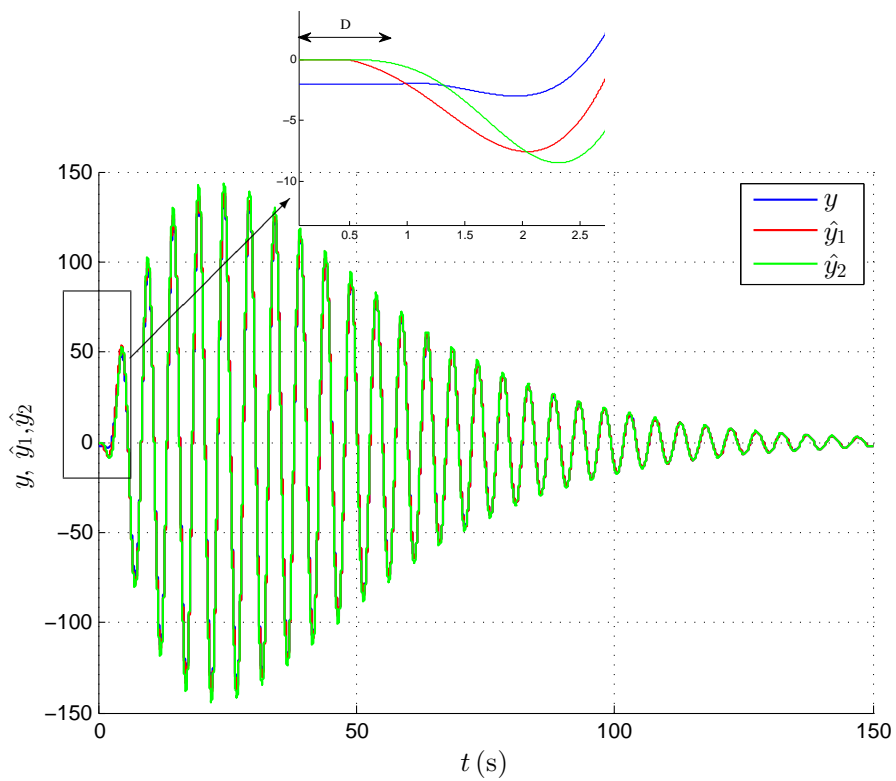


Figura 13 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,96$  s.

A Figura 14 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,96$  s .

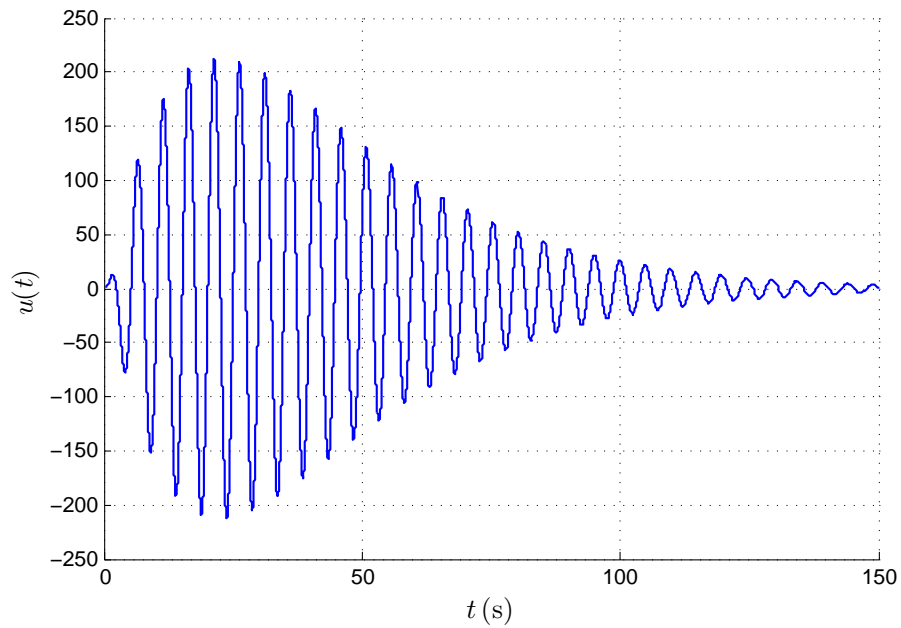


Figura 14 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,96$  s .

Isto indica que os resultados de (NICULESCU et al., 1998) podem ser bastante conservadores, uma vez que apenas dois observadores em cascata foram necessários para estabilizar o sistema, mesmo na presença de um atraso na saída  $D = 0,96$  s. No entanto, ampliando-se o atraso para  $D = 1,04$  s , duas vezes o valor de referência obtido pelo gráfico de Nyquist na Figura 8 onde o sistema seria instável, observa-se que o estado do sistema de controle não converge para a origem, conforme ilustrado nas Figuras 15 à 17.



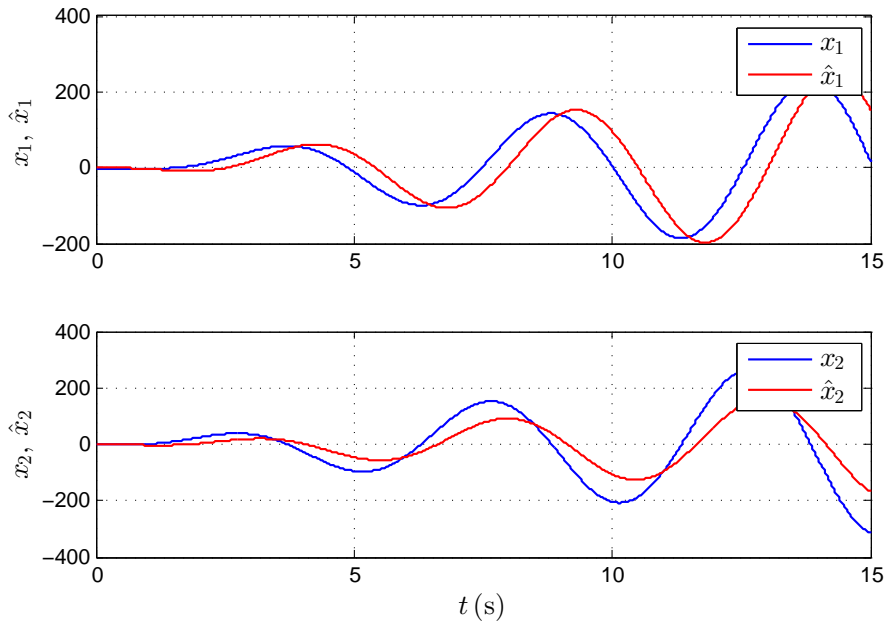


Figura 15 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 1,04$  s

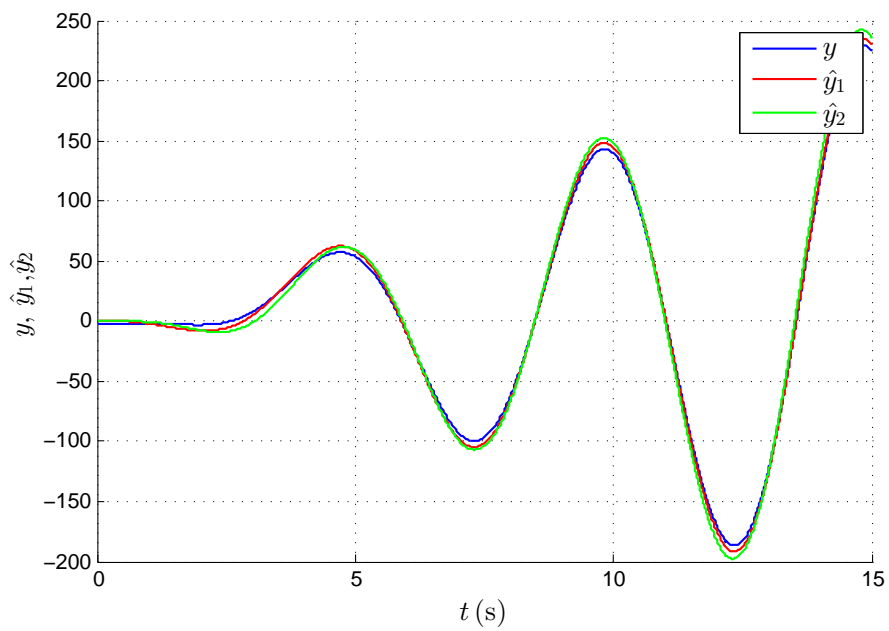


Figura 16 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 1,04$  s.

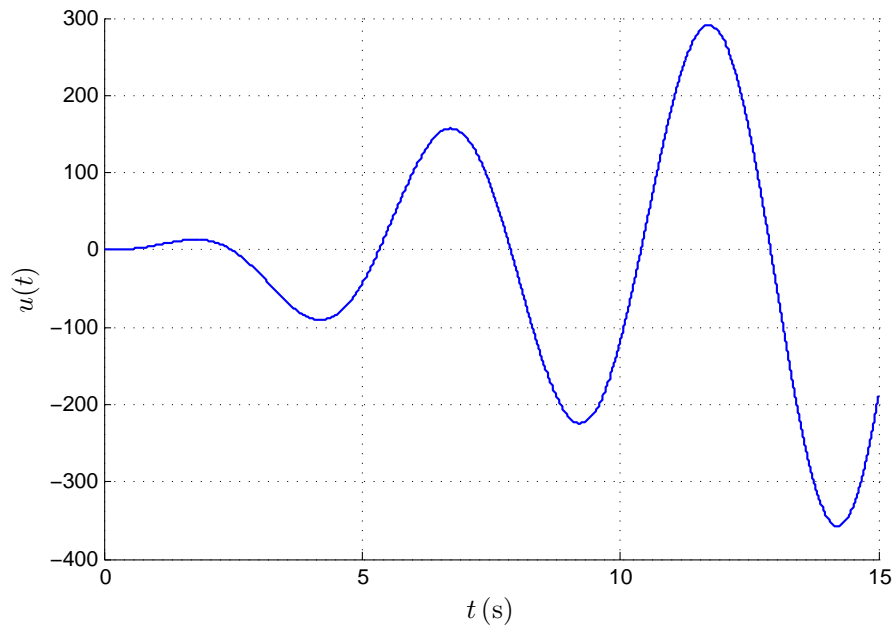


Figura 17 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 1,04$  s.

## 4 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM ATRASO

Neste capítulo será apresentado o projeto desenvolvido para o controlador com realimentação de saída baseado em observadores de estado e incertezas paramétricas. Serão considerados sistemas com atrasos pequenos ou arbitrários.

Considera-se sistemas lineares, observáveis, controláveis e com a saída atrasada, descritos pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{4.1}$$

na qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}$  é a saída atrasada. O atraso  $\tau$  pode ser  $d$  quando for pequeno ou  $D$  quando for arbitrário.

Daqui por diante, considere ao longo do capítulo que  $c_i > 0$  e  $\lambda_i > 0$  denotam constantes escalares, positivas. A condição inicial é definida por  $x(\theta) = x_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ , na qual  $\bar{\tau}$  é o atraso máximo.

### 4.1 Hipóteses Básicas

Serão utilizados os métodos referentes ao **Lema 1.2** da seção 1.5. Assim, para o sistema (4.1), considera-se as hipóteses:

- (H1) As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conhecidas.
- (H2) O atraso  $\tau$  é conhecido, suficientemente pequeno e satisfaz a desigualdade  $0 < \underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau} < \infty$ , onde  $\underline{\tau}$  e  $\bar{\tau}$  são limites inferior e superior, respectivamente.
- (H3) As normas das incertezas paramétricas satisfazem as desigualdades

$$\begin{aligned}\|\Delta A\| &\leq \delta_a, \\ \|\Delta B\| &\leq \delta_b,\end{aligned}\tag{4.2}$$

para valores suficientemente pequenos de  $\delta_a \geq 0$  e  $\delta_b \geq 0$ .

## 4.2 Sistema Linear com Atraso Pequeno na Saída e Incertezas

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso pequeno. Assim, considera-se que  $\tau = d$ , onde  $\underline{d}$  e  $\bar{d}$  são limites inferior e superior, respectivamente.

### 4.2.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (4.1) a ser controlado, poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), \\ y(t) &= Cx(t - d).\end{aligned}\tag{4.3}$$

O observador de estado utilizado é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + [y(t) - \hat{y}(t)] \\ y(t) &= C\hat{x}(t - d)\end{aligned}\tag{4.4}$$

Assim, considere a lei de controle utiliza o estado estimado pelo observador, ou seja:

$$u(t) = -K\hat{x}(t).\tag{4.5}$$

Fazendo a realimentação do sistema conforme (4.5), pode-se reescrever as equações do sistema (4.3) como :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (-B - \Delta B)K\hat{x}(t) \\ y(t) &= Cx(t - d)\end{aligned}\tag{4.6}$$

e do observador (4.4) como:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) - BK\hat{x}(t) + LC[x(t - d) - \hat{x}(t - d)] \\ y(t) &= C\hat{x}(t - d)\end{aligned}\tag{4.7}$$

### 4.2.2 Erro de Estimaco

Considere o erro de estimaco no estado  $\tilde{x}(t)$  definido como:

$$\tilde{x}(t) := x(t) - \hat{x}(t), \quad (4.8)$$

no qual a condio inicial é dada por  $\tilde{x}(\theta) = \tilde{x}_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ .

Dessa forma,  $\dot{\tilde{x}}(t)$  pode ser obtido da diferena entre as equao es (4.6) e (4.7):

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (-B - \Delta B)K\hat{x}(t) - A\hat{x}(t) + BK\hat{x}(t) - LC[x(t-d) - \hat{x}(t-d)], \quad (4.9)$$

sendo reduzida  :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t-d) + \Delta Ax(t) - \Delta BK\hat{x}(t). \quad (4.10)$$

Deste modo, verifica-se que a incerteza  $\Delta A$  e  $\Delta B$  estão presentes na equao do erro. Assim, baseado em (4.8) a equao (4.10) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t-d) + \Delta Ax(t) - \Delta BK[x(t) - \tilde{x}(t)], \quad (4.11)$$

sendo reduzida  :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t-d) + (\Delta A - \Delta BK)x(t). \quad (4.12)$$

A determinao dos coeficientes adequados para a matriz  $L$  permitirá que o comportamento dinâmico do vetor de erro  $\tilde{x}(t)$  seja exponencialmente estável e rápido para tender à origem, conforme (CHEN, 1999), no caso de observadores sem atraso. Dessa forma, considere a próxima hipótese:

**(H4)** A matriz do observador  $L$  da equao (4.12), deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz  $[(A + \Delta BK) - LC]$  seja Hurwitz.

Conforme assumido no **Lema 1.2** da seo 1.5 (NICULESCU et al., 1998), tal que a desigualdade:

$$\|e^{[(A+\Delta BK)-LC]t}\| \leq k e^{-\eta t}, \quad (4.13)$$

seja satisfeita para  $k \geq 1$  e  $\eta > 0$  conhecidos. De forma que para um  $d$  suficientemente pequeno, os parâmetros do sistema devem satisfazer:

$$\frac{k}{\eta} d (\|LC (A + \Delta BK)\| + \|(LC)^2\|) < 1. \quad (4.14)$$

Logo, a solução para (4.12) pode ser expressa por:

$$\tilde{x}(t) = \Phi_1(t, \tilde{x}_0) + \int_0^t G_1(t, \tau)(\Delta A - \Delta BK)x(\tau)d\tau, \quad (4.15)$$

na qual  $\tilde{x}(t) = \Phi_1(t, \tilde{x}_0) \in \mathbb{R}^n$  é a solução da equação homogênea (4.12) ( $\dot{x}(t) \equiv 0$ ). A resposta impulsiva  $G_1(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a solução da equação diferencial homogênea  $\dot{\tilde{x}}(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}(t) - LC\tilde{x}(t-d)$  com condição inicial  $\tilde{x}(\tau) = I_n$  para  $t > \tau$ ,  $\tilde{x}(t) = 0$  para  $t \leq \tau$  e  $\tau$  é o instante de aplicação do impulso de  $G_1$ .

De forma a obter um resultado que satisfaça a equação (4.15), considera-se os passos a seguir:

$$\|\Phi_1(t, \tilde{x}_0)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^*, \quad (4.16)$$

$$\|G_1(t, \tau)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\|(\Delta A - \Delta BK)x(t)\| \leq (\delta_a + \|K\|\delta_b)\|x(t)\| \leq c_3\|x(t)\|, \quad (4.18)$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-d, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$  e  $c_3 \geq \|\Delta A - \Delta BK\|$ .

Dessa forma, baseando-se nas equações (4.16), (4.17), (4.18) e na relação acima definida, reescreve-se uma nova equação para (4.15):

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^* + c_2 e^{-\lambda_2 t} * c_3 \|x(t)\|, \quad (4.19)$$

na qual para a convolução pode ser afirmado, conforme descrito em (DESOER; VIDYA-SAGAR, 2009):

$$\| c_2 e^{-\lambda_2 t} * 2\delta_a c_3 \|x(t)\| \|_{\infty} \leq \|c_2 e^{-\lambda_2 t}\|_1 c_3 \|x(t)\|_{\infty}, \quad (4.20)$$

Assim sendo, a equação (4.20) pode ser representada por:

$$\int_0^{\infty} |c_2 e^{-\lambda_2 t}| dt c_3 \|x(t)\|_{\infty}, \quad (4.21)$$

de onde podemos afirmar que:

$$\|c_2 e^{-\lambda_2 t}\|_1 = \int_0^{\infty} |c_2 e^{-\lambda_2 t}| dt < \frac{c_2}{\lambda_2} < \infty. \quad (4.22)$$

Dessa forma pode ser considerado para a convolução da equação (4.20):

$$\| c_2 e^{-\lambda_2 t} * c_3 \|x(t)\| \|_{\infty} \leq \frac{c_2}{\lambda_2} c_3 \|x(t)\|_{\infty} \quad (4.23)$$

De tal modo, tem-se que a equação (4.19) poderá ser reescrita na forma:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_0^* + \frac{c_2}{\lambda_2} c_3 \|x(t)\|_{\infty}, \quad (4.24)$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$ .

Assim, o erro de estimação  $\tilde{x}(t)$  tenderá exponencialmente a zero, conforme (4.24).

### 4.2.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

Baseado-se na equação do erro de estimação (4.8) , é possível reescrever a lei de controle (4.5) como:

$$u(t) = -Kx(t) + K\tilde{x}(t), \quad (4.25)$$

Então, a equação de estado (4.6) com sinal de controle (4.25) pode ser reescrita

como:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (-BK - \Delta BK)[x(t) - \tilde{x}(t)], \quad (4.26)$$

de onde se obtém:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK - \Delta BK)x(t) + (BK + \Delta BK)\tilde{x}(t) \quad (4.27)$$

Conforme definido na seção 2.3, a correta determinação dos parâmetros da matriz de realimentação  $K$  permitirá o sistema seja exponencialmente estável. Dessa forma, considere a próxima hipótese:

**(H5)** A matriz de realimentação  $K$  da equação (4.27), deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz  $(A + \Delta A - BK - \Delta BK)$  seja Hurwitz.

A hipótese **(H5)** sempre poderá ser satisfeita se o par  $A, B$  for estabilizável e se os majorantes para as incertezas  $\delta_a$  e  $\delta_b$  forem suficientemente pequenos conforme **(H3)**.

Dessa forma, supondo a condição inicial do estado  $x(0) = x_0$ , a solução para a equação dinâmica (4.27) pode ser expressa como:

$$x(t) = \Phi_2(t, x_0) + \int_0^t G_2(t, \tau)(BK + \Delta BK)\tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (4.28)$$

na qual  $x(t) = \Phi_2(t, x_0) = e^{(A+\Delta A-BK-\Delta BK)t}x_0$  é a resposta do sistema para condição inicial  $x_0$ ,  $G_2(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a solução da equação diferencial  $\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK - \Delta BK)x(t)$  com condição inicial  $x(\tau) = I_n$  para  $t > \tau$ ,  $x(t) = 0$  para  $t \leq \tau$  e  $\tau$  é o instante de aplicação do impulso de  $G_2$ .

De forma a obter um resultado que satisfaça a equação (4.28), considere:

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(t, x_0)\| &\leq c_4 e^{-\lambda_4 t} x_0^*, \\ \|G_2(t, \tau)\| &\leq c_5 e^{-\lambda_4(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|x_0(\theta)\|$  e  $c_4 \geq c_3 \|BK + \Delta BK\|$ .

Igualmente, considerando a equação (4.24) encontrada para a solução de  $\tilde{x}(t)$ , um



novo majorante para a solução da equação (4.28):

$$\|x(t)\| \leq c_3 e^{-\lambda_3 t} x_0^* + c_4 e^{-\lambda_4 t} * \|\tilde{x}(t)\|, \quad (4.30)$$

Dessa forma, pode-se afirmar para a convolução:

$$\|c_4 e^{-\lambda_4 t} * \|\tilde{x}(t)\| \|_{\infty} \leq \|c_4 e^{-\lambda_4 t}\|_1 \|\tilde{x}(t)\|_{\infty}, \quad (4.31)$$

de onde podemos assegurar que:

$$\|c_4 e^{-\lambda_4 t}\|_1 = \int_0^{\infty} |c_4 e^{-\lambda_4 t}| dt < \frac{c_4}{\lambda_4} < \infty. \quad (4.32)$$

Assim sendo a equação (4.30) poderá ser reescrita na forma:

$$\|x(t)\| \leq c_3 e^{-\lambda_3 t} x_0^* + \frac{c_4}{\lambda_4} \|\tilde{x}(t)\|_{\infty}, \quad (4.33)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|x_0(\theta)\|$ .

**Observação 4.1** *A partir das desigualdades (4.24) e (4.33), aplicando-se o teorema de pequenos ganhos conforme apresentado na seção 1.3, os estados dos sistemas (4.12) e (4.27) terão um decaimento exponencial para a origem.*

*Dessa forma, conforme a hipótese (H3),  $x(t)$  representado pela equação (4.3) será globalmente exponencialmente estável para  $\|\Delta A\| \leq \delta_a$  e  $\|\Delta B\| \leq \delta_b$ :*

$$c_3 < \frac{\lambda_4 \lambda_2}{c_2 c_5}, \quad (4.34)$$

*de forma que, para  $\delta_a$  e  $\delta_b$  suficientemente pequenos, seja atendida a relação*

$$\delta_a + \|K\| \delta_b \leq c_3. \quad (4.35)$$

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 4.1** *Considere o sistema linear com atraso (4.3) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (4.5) que utiliza o observador de estado (4.4). Assuma que*

as hipóteses **(H1)** a **(H5)** sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável para:

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.36)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{x}^T(t), x^T(t)]^T$  e  $z_0 = [\tilde{x}_0^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T$ ,  $\forall \theta \in [-\bar{d}, 0]$ .

### 4.3 Sistema Linear com Atraso Arbitrário na Saída e Incertezas

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso arbitrário. Assim, considere que  $\tau = D$ , onde  $\underline{D}$  e  $\bar{D}$  são limites inferior e superior, respectivamente.

#### 4.3.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (4.1) a ser controlado poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), \\ y(t) &= Cx(t - D). \end{aligned} \quad (4.37)$$

O controle de sistemas com atraso arbitrário foi abordado por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012), demonstrado na seção 3.3, e com controle por modo deslizante que aplica observadores conectados em cascata por (COUTINHO, 2012). A principal diferença do sistema original de referência pelo desenvolvido é o de possuir incertezas paramétricas. A grande vantagem deste tipo de observador é o de se estimar o valor atual das variáveis de estado através de seus valores atrasados. De forma que, para sistemas com atraso arbitrário na saída, basta adicionar observadores em cascata à medida que o atraso  $D$  aumenta, ao menos se não houver incertezas.

**Observação 4.2** *O observador de estados em cascata estimará um vetor de estado atrasado dado por  $\frac{D}{m}$  de forma que vetor  $\hat{x}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $x_j(t)$  e  $\hat{x}_m(t)$  é uma estimativa de  $x(t)$ .*

Assim, considere as seguintes notações para representar o estado e o sinal de con-

trole:

$$x_j(t) = x \left( t - D + j \frac{D}{m} \right), \quad (4.38)$$

$$u_j(t) = u \left( t - D + j \frac{D}{m} \right), \quad (4.39)$$

e para o estado do observador:

$$\hat{x}_j(t) = \hat{x} \left( t - D + j \frac{D}{m} \right), \quad (4.40)$$

na qual  $j = 1, \dots, m$ . Então, o observador para estimação do estado é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= A\hat{x}_1(t) + Bu_1(t) - L \left[ C\hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y(t) \right], \\ \hat{y}_1(t) &= C\hat{x}_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_j(t) &= A\hat{x}_j(t) + Bu_j(t) - L \left[ C\hat{x}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{j-1}(t) \right], \\ \hat{y}_j(t) &= C\hat{x}_j(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_m(t) &= A\hat{x}_m(t) + Bu_m(t) - L \left[ C\hat{x}_m \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{m-1}(t) \right], \\ \hat{y}_m(t) &= C\hat{x}_m(t). \end{aligned} \quad (4.41)$$

O vetor  $\hat{x}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $x_j(t)$  e  $\hat{x}(t) := \hat{x}_m(t)$  é uma estimativa do estado  $x(t)$  do sistema (4.37), onde todos os observadores (4.41) têm a mesma estrutura.

Baseado em (4.5), adota-se a lei de controle baseada no estado estimado:

$$u(t) = -K\hat{x}_m(t). \quad (4.42)$$

### 4.3.2 Erros de Estimação

Conforme demonstrado em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012, Teorema 1) há uma quantidade suficiente de  $m$  observadores em cascata de tal modo que o estado do último observador em (4.41) converge exponencialmente para o estado do sistema (4.37). Dessa forma, a convergência do observador em cascata será provada passo a passo pelo método de indução matemática.

Assim, baseado em (4.8) considere  $\tilde{x}_1(t)$  como o primeiro erro de estimação em cascata para o passo  $i = 1$ :

$$\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t). \quad (4.43)$$

Portanto,  $\dot{\tilde{x}}_1(t)$  pode ser obtido da diferença das equações (4.37) e (4.41):

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A + \Delta A)x_1(t) + (B + \Delta B)u_1(t) - A\hat{x}_1(t) - Bu_1(t) + L \left[ C\hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y \right], \quad (4.44)$$

na qual  $\dot{x}_1(t) = (A + \Delta A)x_1(t) + (B + \Delta B)u_1(t)$  é a representação do sistema (4.37) com sinais atrasados que, para propósitos de análise, foi representado com o índice  $i = 1$ . Assim, obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = A\tilde{x}_1(t) + LC \left[ \hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - x(t - D) \right] + \Delta Ax_1(t) + \Delta Bu_1(t). \quad (4.45)$$

Baseado em (4.42) e (4.43), a lei de controle do sistema para o passo  $i = 1$  é definida como:

$$u_1(t) = -K\hat{x}_1(t) = -K[x_1(t) - \tilde{x}_1(t)]. \quad (4.46)$$

Pela equação (4.38) observa-se que

$$x_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) = x(t - D), \quad (4.47)$$

o qual escolhido um número  $m$  de observadores de forma que o primeiro observador  $\hat{x}_1(t)$  possa convergir para  $x_1(t) = x \left( t - D + \frac{D}{m} \right)$ .

Dessa forma, baseado em (4.46) e (4.47) equação (4.45) se torna:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1(t) = A\tilde{x}_1(t) + LC \left[ \hat{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - x_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) \right] + \Delta A x_1(t) \\ - \Delta BK [x_1(t) - \tilde{x}_1(t)], \end{aligned} \quad (4.48)$$

sendo reduzida à:

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}_1(t) - LC\tilde{x}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) + (\Delta A - \Delta BK)x_1(t). \quad (4.49)$$

A equação (4.49) pode ser comparada à (4.12), referente à seção 4.2 para um atraso  $\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno. Assim, tem-se uma solução majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{x}_1(t)\| \leq \Pi_1 + \delta_1 \|x_1(t)\|_\infty, \quad (4.50)$$

na qual  $\Pi_1 \leq \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{10}^*$ , onde  $\alpha_1 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$  e  $\delta_1 > 0$  denotam constantes escalares positivas para um  $\delta_1$  suficientemente pequeno.

Igualmente, de forma a provar o segundo passo da indução matemática, baseado em (4.8) considere  $\tilde{x}_2(t)$  como o segundo erro de estimação em cascata para o passo  $i = 2$ :

$$\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t). \quad (4.51)$$

Portanto, calcula-se o erro de estimação  $\dot{\tilde{x}}_2(t)$  da diferença das equações (4.37) e (4.41):

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A + \Delta A)x_2(t) + (B + \Delta B)u_2(t) - A\hat{x}_2(t) - Bu_2(t) + L \left[ C\hat{x}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_1 \right], \quad (4.52)$$

na qual  $\dot{x}_2(t) = (A + \Delta A)x_2(t) + (B + \Delta B)u_2(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (4.37) com o índice  $i = 2$ . Assim, obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = A\tilde{x}_2(t) + LC\hat{x}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - LC\hat{x}_1(t) + \Delta Ax_2(t) + \Delta Bu_2(t). \quad (4.53)$$

Baseado em (4.42) e (4.51), a lei de controle do sistema para o passo  $i = 2$  é

definida como:

$$u_2(t) = -K\hat{x}_2(t) = -K[x_2(t) - \tilde{x}_2(t)]. \quad (4.54)$$

Assim, pelas equações (4.51) e (4.54), é possível reescrever (4.53):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2(t) = A\tilde{x}_2(t) - LC\tilde{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) + LCx_2\left(t - \frac{D}{m}\right) - LC\hat{x}_1(t) + \Delta Ax_2(t) \\ - \Delta BK[x_2(t) - \tilde{x}_2(t)](t). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Baseado em (4.38) tem-se:

$$x_2\left(t - \frac{D}{m}\right) = x\left(t - \frac{D}{m} - D + \frac{2D}{m}\right) = x\left(t - D + \frac{D}{m}\right) = x_1(t). \quad (4.56)$$

Portanto, (4.56) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}_2(t) - LC\tilde{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) + LCx_1(t) - LC\hat{x}_1(t) \\ + (\Delta A - \Delta BK)x_2(t), \end{aligned} \quad (4.57)$$

na qual, baseado em (4.43) torna-se:

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}_2(t) - LC\tilde{x}_2\left(t - \frac{D}{m}\right) + LC\tilde{x}_1(t) + (\Delta A - \Delta BK)x_2(t). \quad (4.58)$$

Dessa forma, uma vez que o sistema  $\tilde{x}_1(t)$  decai exponencialmente conforme definido em (4.50), uma solução para o sistema (4.58) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{x}_2(t)\| \leq \Pi_2 + \bar{\delta}_1\|x_1(t)\|_\infty + \delta_2\|x_2(t)\|_\infty, \quad (4.59)$$

na qual  $\Pi_2 \leq \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} \tilde{x}_{20}^*$ , para  $\alpha_2 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $\bar{\delta}_1, \delta_2 > 0$  denotam constantes escalares positivas para  $\bar{\delta}_1$  e  $\delta_2$  suficientemente pequenos, de forma que:

$$\Pi_2 = \Pi_a * \Pi_1, \quad (4.60)$$

na qual  $\Pi_a \leq \alpha_a e^{-\lambda_a t} \tilde{x}_{a0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{x}_1(t)$  tendendo para a origem, onde  $\alpha_a > 0$  e  $\lambda_a > 0$  denotam constantes escalares positivas.

Assim, de forma a validar a recorrência da convergência do erro, baseado em (4.8) considere  $\tilde{x}_j(t)$  como o erro de estimação em cascata para o passo  $i = j$ :

$$\tilde{x}_j(t) = x_j(t) - \hat{x}_j(t). \quad (4.61)$$

O erro de estimação  $\dot{\tilde{x}}_j(t)$  pode ser obtido da diferença das equações (4.37) e (4.41):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j(t) = & (A + \Delta A)x_j(t) + (B + \Delta B)u_j(t) - A\hat{x}_j(t) - Bu_j(t) \\ & + L \left[ C\hat{x}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{j-1} \right], \end{aligned} \quad (4.62)$$

na qual  $\dot{x}_j(t) = (A + \Delta A)x_j(t) + (B + \Delta B)u_j(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (4.37) com o índice  $i = j$ . Dessa forma, obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = A\tilde{x}_j(t) + LC\hat{x}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - LC\hat{x}_{j-1}(t) + \Delta Ax_j(t) + \Delta Bu_j(t). \quad (4.63)$$

Baseado em (4.42) e (4.61), a lei de controle do sistema com o passo  $i = j$  é definida como:

$$u_j(t) = -K\hat{x}_j(t) = -K[x_j(t) - \tilde{x}_j(t)]. \quad (4.64)$$

Assim, pelas equações (4.61) e (4.64) é possível reescrever (4.63):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{j-1}(t) = & A\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) + LCx_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - LC\hat{x}_{j-1}(t) + \Delta Ax_j(t) \\ & - \Delta BK[x_j(t) - \tilde{x}_j(t)](t). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Baseado em (4.38) tem-se:

$$x_j \left( t - \frac{D}{m} \right) = x \left( t - \frac{D}{m} - D + \frac{jD}{m} \right) = x \left( t - D + (j-1)\frac{D}{m} \right) = x_{j-1}(t). \quad (4.66)$$

Portanto, (4.66) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_j(t) = & (A + \Delta BK)\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) + LCx_{j-1}(t) + LC\hat{x}_{j-1}(t) \\ & + (\Delta A - \Delta BK)x_j(t). \end{aligned} \quad (4.67)$$

O erro de estimação  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  para o passo  $i = j - 1$  é definido por:

$$\tilde{x}_{j-1}(t) = x_{j-1}(t) - \hat{x}_{j-1}(t). \quad (4.68)$$

Assim, conforme (4.68), tem-se para (5.67):

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = (A + \Delta BK)\tilde{x}_j(t) - LC\tilde{x}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + LC\tilde{x}_{j-1}(t) + (\Delta A - \Delta BK)x_j(t). \quad (4.69)$$

Dessa forma, uma vez que por indução o sistema  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  decai exponencialmente para a origem como  $\|\tilde{x}_{j-1}(t)\| \leq \Pi_{j-1} + \bar{\delta}_{j-2}\|x_{j-2}(t)\|_\infty + \delta_{j-1}\|x_{j-1}(t)\|_\infty$ , uma solução para o sistema (4.69) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{x}_j(t)\| \leq \Pi_j + \bar{\delta}_{j-1}\|x_{j-1}(t)\|_\infty + \delta_j\|x_j(t)\|_\infty, \quad (4.70)$$

na qual  $\Pi_j \leq \alpha_j e^{-\lambda_j t} \tilde{x}_{j0}^*$ , para  $\alpha_j > 0$ ,  $\lambda_j > 0$  e  $\bar{\delta}_{j-1}, \delta_j > 0$  denotam constantes escalares positivas para  $\bar{\delta}_{j-1}$  e  $\delta_j$  suficientemente pequenos, de forma que:

$$\Pi_j = \Pi_b * \Pi_{j-1}, \quad (4.71)$$

na qual  $\Pi_b \leq \alpha_b e^{-\lambda_b t} \tilde{x}_{b0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{x}_{j-1}(t)$  tendendo para a origem, onde  $\alpha_b > 0$  e  $\lambda_b > 0$  denotam constantes escalares positivas.

Dessa forma, por indução matemática, demonstra-se que o erro de estimação de  $\tilde{x}(t)$  da planta tenderá exponencialmente a zero para ( $j = m$ ) observadores.

Assume-se que a quantidade de  $m$  observadores em cascata faça com que  $\frac{D}{m}$  seja suficientemente pequeno para que a influência do atraso seja pequena. Portanto, é possível que seja satisfeita a condição **(H4)**, de forma que a matriz  $[(A + \Delta BK) - LC]$  seja Hurwitz, de forma que o sistema seja exponencialmente estável.

Dessa forma, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação do erro de estimação total da planta, definido por:

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \Pi(t) + c_d \delta \|x(t)\|_\infty \quad (4.72)$$

na qual  $\Pi(t) = c_c e^{-\lambda_c t} \tilde{x}_0^*$ , onde  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$  para  $\delta = \max\{\delta_i, \bar{\delta}_i\}$ .



### 4.3.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

De forma a garantir a estabilização do sistema, utiliza-se a lei de controle de realimentação do estado  $u(t) = -Kx(t) + K\tilde{x}(t)$  conforme equação (4.25). Assim, fazendo a realimentação da planta, tem-se para a equação do estado para (4.37) :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (-BK - \Delta BK)[x(t) - \tilde{x}(t)], \quad (4.73)$$

sendo reduzida a:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK - \Delta BK)x(t) + (BK + \Delta BK)\tilde{x}(t) \quad (4.74)$$

Considere que a equação (4.74) é análoga à equação (4.27) da seção 4.2 de forma a garantir que sejam satisfeitas as hipóteses **(H3)** e **(H5)**.

Dessa forma, é possível escrever um majorante exponencial:

$$\|x(t)\| \leq c_e e^{-\lambda_e t} x_0^* + c_f \|\tilde{x}(t)\|_\infty. \quad (4.75)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-D, 0]} \|x_0(\theta)\|$ .

Assim, conforme (4.75) o sistema  $x(t)$  será globalmente exponencialmente estável.

**Observação 4.3** *Pode-se dizer que para todo atraso constante  $D$  existe um número  $m$  de observadores em cascata que satisfaça a relação:*

$$m \geq \frac{D}{d_1}, \quad (4.76)$$

na qual  $d_1$  é o máximo atraso admitido para um único observador, de forma que tal que todos os erros de estimação convergem exponencialmente a zero.

A partir das desigualdades (4.72) e (4.75), aplicando-se o teorema de pequenos ganhos, os estados dos sistemas  $\dot{\tilde{x}}(t)$  em cascata e (4.74), terão um decaimento exponencial para a origem.

Assim,  $x(t)$  representado pela equação (4.37) será globalmente exponencialmente

estável, onde:

$$\delta_a + \|K\|\delta_b \leq c_e. \quad (4.77)$$

Pela inequação (4.77) permite concluir a hipótese **(H3)**, onde  $\|\Delta A\| \leq \delta_a$  e  $\|\Delta B\| \leq \delta_b$  deverão ser suficientemente pequenos e por **(H5)**, deduz-se recursivamente que, todos os erros de estimação deverão convergir exponencialmente para a origem.

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 4.2** *Considere o sistema linear (4.37) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (4.42) que utiliza o observador de estado (4.41). Assuma que as hipóteses **(H1)** a **(H5)** sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável tal que:*

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad (4.78)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{x}_1^T(t), \tilde{x}_2^T(t) \dots \tilde{x}_m^T(t), x^T(t)]^T$  e

$$z_0 = [\tilde{x}_1^T(\theta), \tilde{x}_2^T(\theta) \dots \tilde{x}_m^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T, \forall \theta \in [-\bar{D}, 0].$$

#### 4.4 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema linear de segunda ordem, com atraso na saída e que satisfaz as hipóteses **(H1)** a **(H5)** :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,06 & 0,06 \end{bmatrix} \right) x(t) + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix} \right) u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-d). \end{aligned} \quad (4.79)$$

na qual  $\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$ ,  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ,  $\Delta A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,06 & 0,06 \end{bmatrix}$  e  $\Delta B = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix}$ .

Assim, de forma a comprovar a estabilidade para o sistema (4.79), considere as condições abaixo:

- Conforme a hipótese **(H4)**:

– Escolhe-se  $L = [1, 16 \ 4]^T$  de forma que a matriz  $(A + \Delta BK) - LC$  seja Hurwitz. Assim,

$$(A + \Delta BK) - LC = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,430,25 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1,16 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

cujos autovalores são -0,94 rad/s e -2,06 rad/s. Ou seja, a matriz é Hurwitz.

– A condição de existência  $\|e^{[(A+\Delta BK)-LC]t}\| \leq k e^{-\eta t}$  deve ser obedecida conforme a desigualdade em (4.13).

Dessa forma, considere os parâmetros  $k = 1,05$  e  $\eta = 0,84$  obtidos pelo *filtro de aproximação de primeira ordem (first order approximation filter - FOAF)*, conforme critério definido em (CUNHA, 2004) de forma a minimizar a norma exponencial. Assim, tem-se:

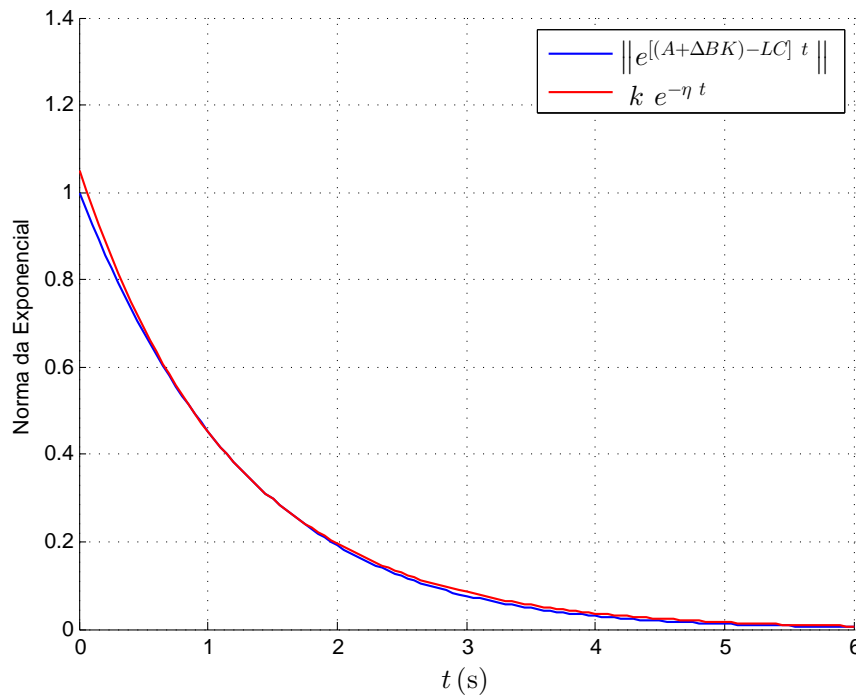


Figura 18 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade  $\|e^{[(A+\Delta BK)-LC]t}\| \leq k e^{-\eta t}$ .

Pela Figura 18 é possível perceber que a curva em azul, referente a  $\|e^{[(A+\Delta BK)-LC] t}\|$  é inferior à curva em vermelho, referente à  $k e^{-\eta t}$ , satisfazendo a condição.

- A matriz  $[(A + \Delta BK) - LC]$  deve obedecer a condição de existência conforme a desigualdade (4.14),  $\frac{k}{\eta} d (\|LC (A + \Delta BK)\| + \|(LC)^2\|) < 1$ .

Considere os mesmos  $k = 1,05$  e  $\eta = 0,87$  para um atraso máximo definido  $d = 0,085s$  para que a condição (4.14) seja atendida. Assim, o sistema retornou um valor máximo permitido de 0,9733.

- Conforme a hipótese **(H5)**:

- Define-se o ganho do controlador como  $K = [1,4292 \quad 0,2505]$  de forma que a matriz  $(A + \Delta A - BK - \Delta BK)$  seja Hurwitz. Assim:

$$A + \Delta A - BK - \Delta BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,06 & 0,06 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$- \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} [1,4292 \quad 0,2505] - \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,06 \end{bmatrix} [1,4292 \quad 0,2505],$$

cujos autovalores são -1 rad/s e -2 rad/s. Ou seja, a matriz  $(A + \Delta A - BK - \Delta BK)$  é Hurwitz.

- A condição de existência conforme a desigualdade  $\|e^{(A+\Delta A-BK-\Delta BK) t}\| \leq k_2 e^{-\eta_2 t}$  deve ser obedecida pela matriz  $(A + \Delta A - BK)$ :

Dessa forma, considere os novos parâmetros  $k_2 = 1,63$  e  $\eta_2 = 0,74$  obtidos pelo mesmo método de *filtro de aproximação de primeira ordem* de forma a minimizar a norma exponencial.

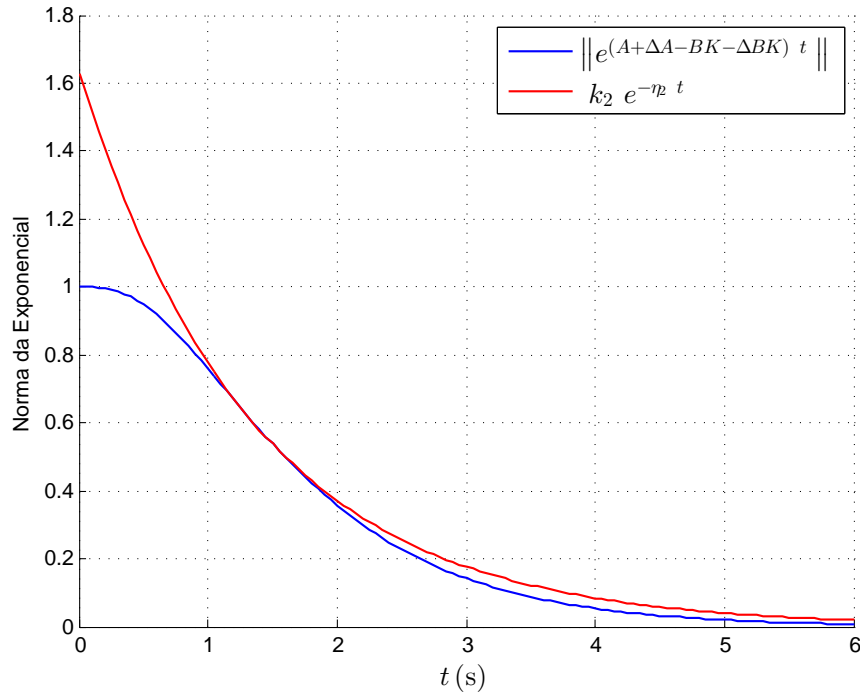


Figura 19 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade  $\|e^{(A+\Delta A-BK-\Delta BK) t}\| \leq k_2 e^{-\eta_2 t}$ .

- As condições iniciais usadas nas simulações são:

- Sistema e observador, para atraso pequeno  $d$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0].$$

- Sistema e observadores em cascata, para atraso arbitrário  $D$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-D, 0].$$

Portanto, atendidas as condições definidas serão apresentadas simulações do sistema proposto em (4.79) de forma a ilustrar a eficácia dos controladores desenvolvidos.

A Figura 20 apresenta os sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  comparados aos sinais  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  estimados pelo observador, conforme o atraso de  $d = 0,085$  s definido.

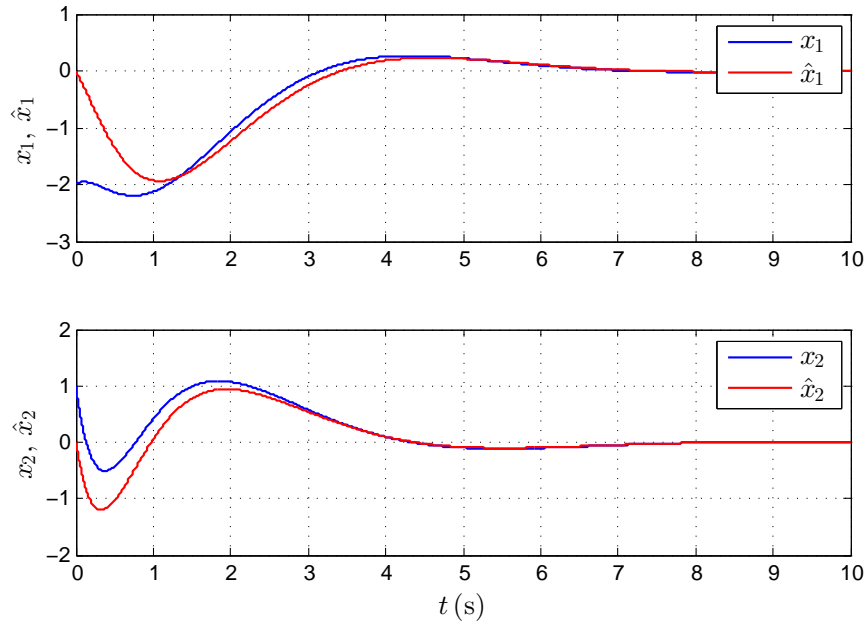


Figura 20 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $d = 0,085$  s.

Na Figura 21 pode-se observar a saída  $y(t)$  medida e a saída  $\hat{y}(t)$  estimada por um único observador, onde é possível observar a presença do atraso  $d = 0,085$  s no sistema.

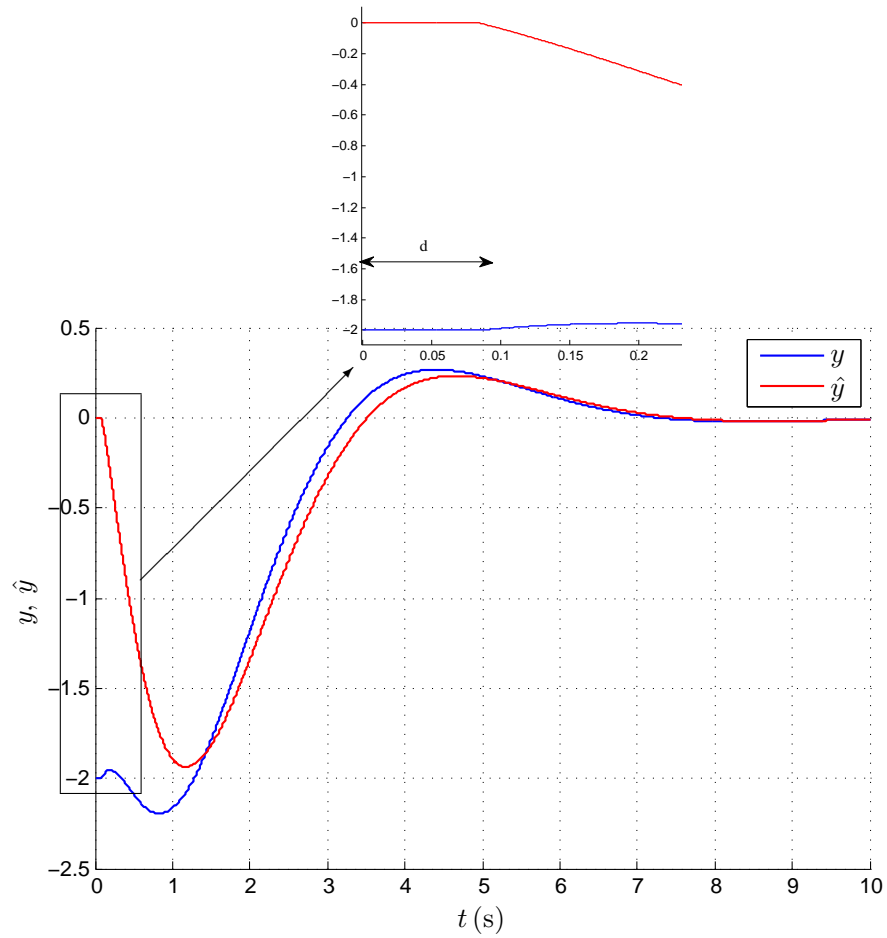


Figura 21 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $d = 0,085$  s.

Assim, verifica-se que o controle não foi prejudicado. O sinal de controle  $u(t)$  mostrado na Figura 22 é gerado a lei de controle (4.5).

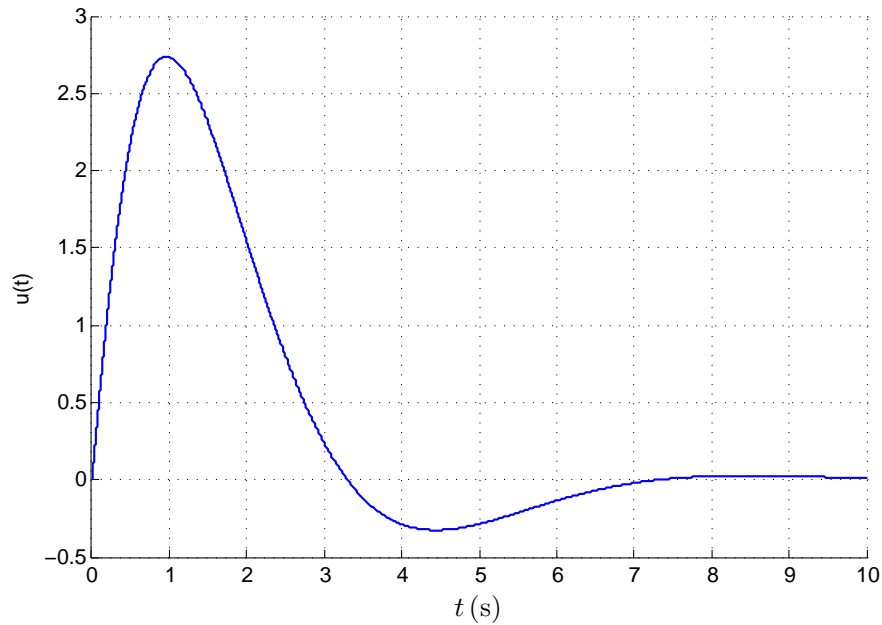


Figura 22 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $d = 0,085$  s .

Conforme descrito nas definições, o atraso máximo permitido para o sistema apresentado é de  $d = 0,085$  s. No entanto, foi observado em simulações que, para o atraso  $d = 0,085$  s , o sistema com único observador apresentou melhor desempenho que o sistema com dois observadores em cascata. Isto indica que o uso de observadores em cascata pode ser inútil e até mesmo pode não resultar numa melhoria de desempenho, contrariando a intuição.

Uma vez que a matriz  $A$  da planta é diferente da matriz  $A$  o observador, o diagrama de Nyquist da função de transferência  $G(s)$  usado no capítulo 3 perde o sentido. Assim, de forma a dar continuidade ao estudo, considere o atraso de  $D = 0,17$  s onde serão utilizados dois observadores conectados em cascata ( $m=2$ ). Assim, a Figura 23 apresenta os sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  e a Figura 24 apresenta  $y$  , comparando seus valores medidos e observados, utilizando dois observadores para o atraso para  $D = 0,17$  s .



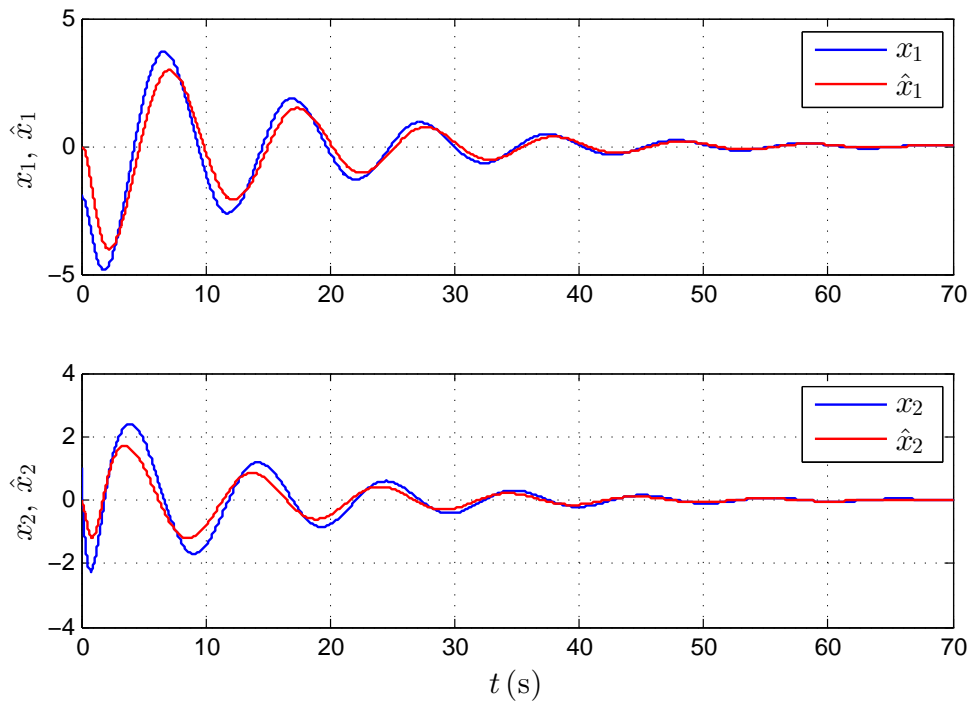


Figura 23 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,17$  s.

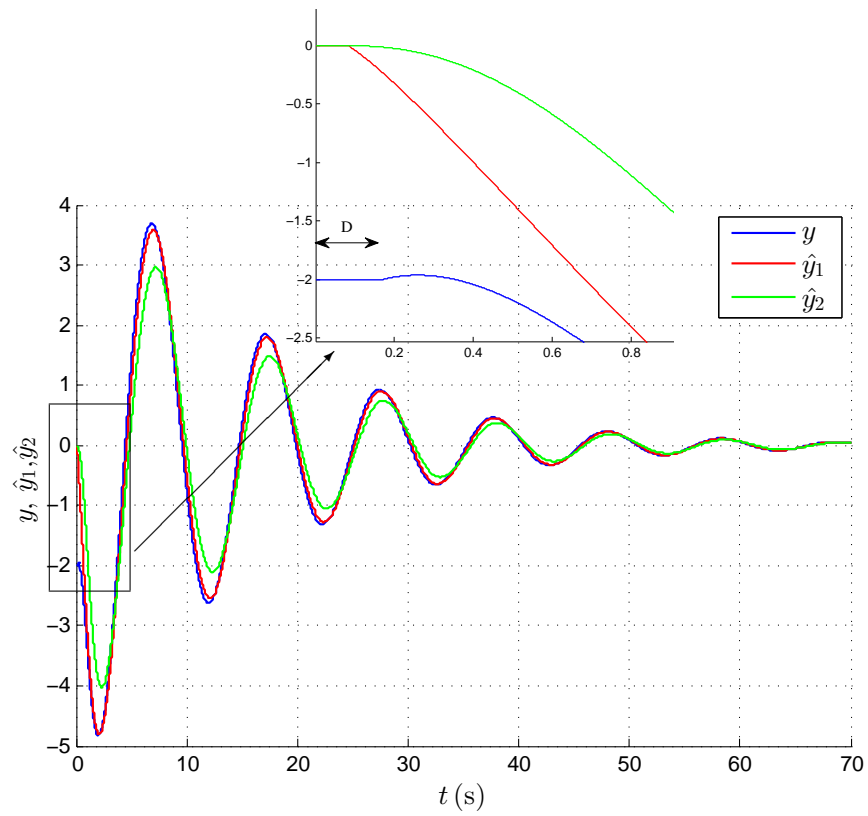


Figura 24 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,17$  s.

A Figura 25 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,17$  s .

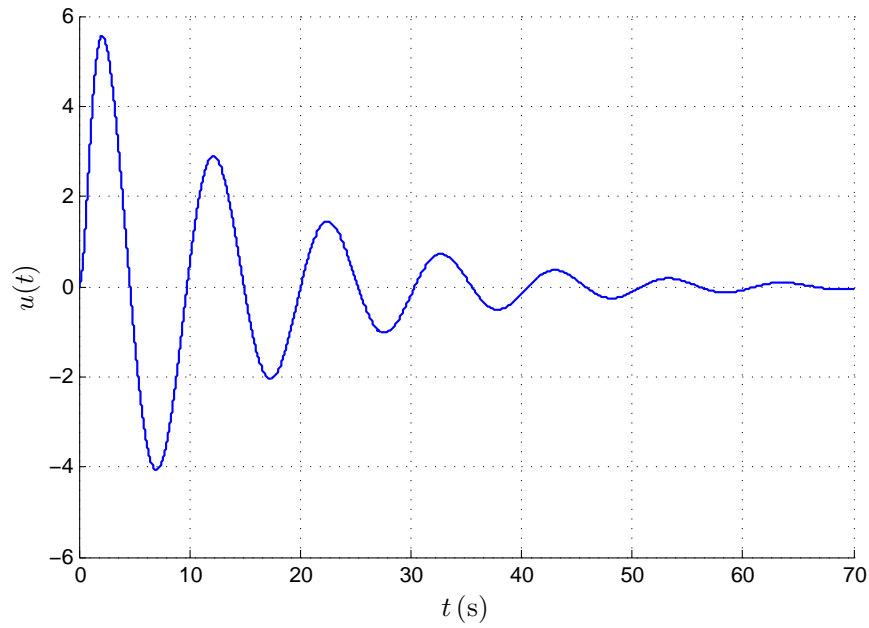


Figura 25 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,17$  s.

É importante destacar que a estabilidade e o desempenho do controlador são robustos em relação ao atraso maior. Assim, esta quantidade de observadores para os mesmos parâmetros escolhidos permite a convergência para zero do erro de estimação e a saída do sistema. Dessa forma, ampliando-se o atraso para  $D = 0,3$  s é possível observar que o sistema se mantém estável com apenas dois observadores, ao contrário do que a estimativa pela desigualdade (4.14) indicaria diz que seriam necessários pelo menos 4 observadores em cascata ( $m=4$ ).

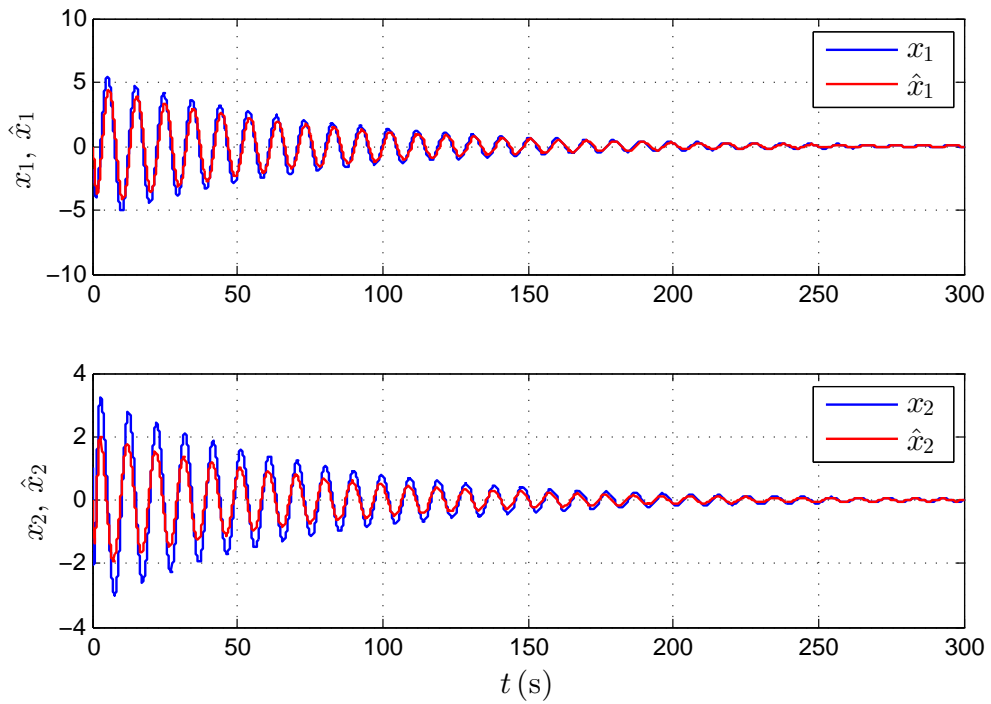


Figura 26 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,3$  s.

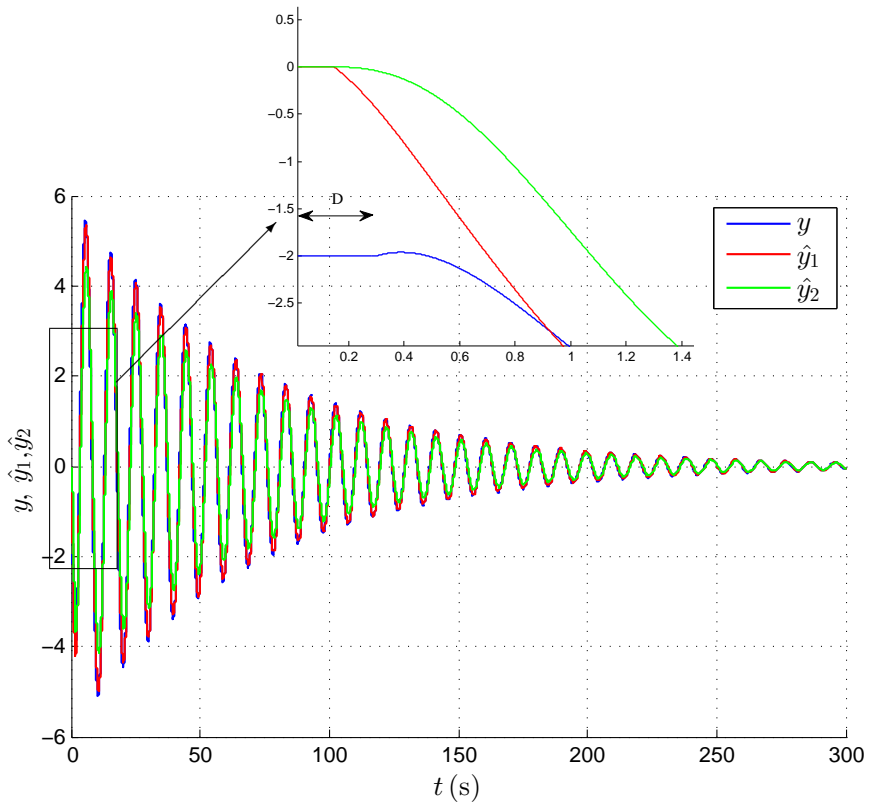


Figura 27 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,3$  s.

A Figura 28 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,3s$ .

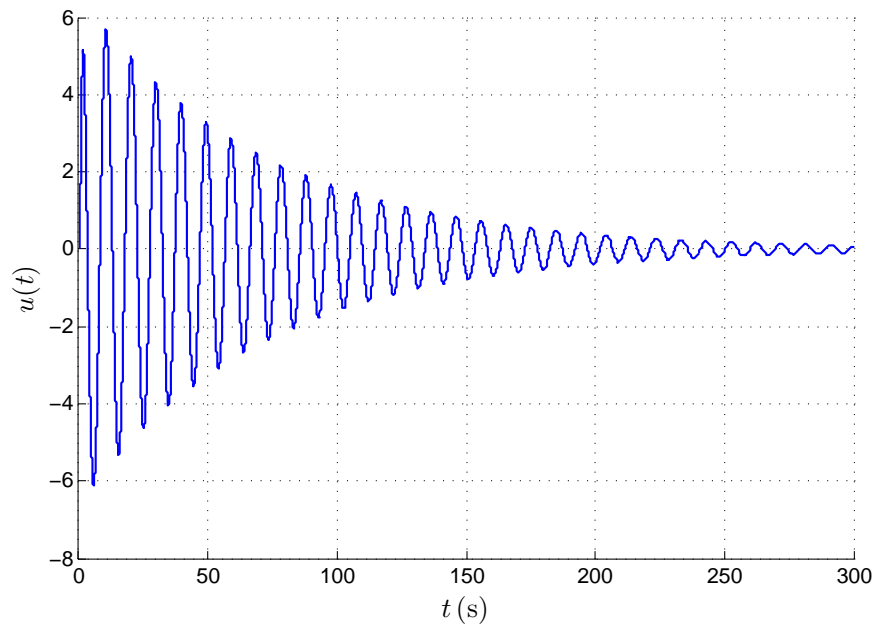


Figura 28 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,3s$ .

Isto indica que os resultados de (NICULESCU et al., 1998) podem ser bastante conservadores, uma vez que apenas dois observadores em cascata foram necessários para estabilizar o sistema, mesmo na presença de um atraso na saída  $D = 0,3s$ . No entanto, ampliando-se o atraso para valores acima de  $D = 0,3s$ , observou-se por meio de simulações que o estado do sistema de controle se torna instável.

## 5 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES COM ATRASO E PERTURBAÇÕES EXÓGENAS

Neste capítulo será apresentado o projeto desenvolvido para o controlador com realimentação de saída baseado em observadores de estado e perturbação externa. Serão considerados sistemas com atrasos pequenos ou arbitrários.

Considera-se sistemas lineares, observáveis, controláveis e com a saída atrasada, descritos pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{5.1}$$

na qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}$  é a saída atrasada e  $\nu(t) \in \mathbb{R}^n$  seja uma perturbação exógena. O atraso  $\tau$  pode ser  $d$  quando for pequeno ou  $D$  quando for arbitrário.

Daqui por diante, considere ao longo do capítulo que  $c_i > 0$  e  $\lambda > 0$  denotam constantes escalares, positivas. A condição inicial é definida por  $x(\theta) = x_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ , na qual  $\bar{\tau}$  é o atraso máximo.

### 5.1 Hipóteses Básicas

Serão utilizados os métodos referentes ao **Lema 1.2** da seção 1.5. Assim, para o sistema (5.1), considera-se as hipóteses:

**(H1)** As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conhecidas.

**(H2)** O atraso  $\tau$  é conhecido, suficientemente pequeno e satisfaz a desigualdade  $0 < \underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau} < \infty$ , onde  $\underline{\tau}$  e  $\bar{\tau}$  são limites inferior e superior, respectivamente.

**(H3)** A perturbação exógena  $\nu(t)$  pode ser gerada pelo seguinte sistema dinâmico, conforme (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997, Seção 4.3):

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= A_w w(t), \\ \nu(t) &= C_w w(t),\end{aligned}\tag{5.2}$$

de forma que os parâmetros das matrizes  $A_w$  e  $C_w$  sejam conhecidos e o estado  $w(t) \in \mathbb{R}$  seja desconhecido. Assim sendo, agregando-se (5.1) e (5.2) obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + C_w w(t), \\ \dot{w}(t) &= A_w w(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{5.3}$$

na qual se define o vetor de estados:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.\tag{5.4}$$

## 5.2 Sistema Linear com Perturbações Exógenas e Atraso Pequeno na Saída

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso pequeno. Assim, considera-se que  $\tau = d$ , onde  $\underline{d}$  e  $\bar{d}$  são limites inferior e superior, respectivamente. O sistema de controle (5.1) poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - d).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Nas próximas seções serão abordados estudos para o sistema (5.5) em que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada ou descasada com a matriz de distribuição de controle  $Bu(t)$ .

### 5.2.1 Sistema Linear com Perturbações Descasadas

Nesta seção considere que a perturbação  $\nu(t)$  seja descasada com o termo  $Bu(t)$ .

## 5.2.1.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (5.5) representado pelas equações (5.3) e (5.4) assume a forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-d) \\ w(t-d) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação do sistema (5.6) como:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \bar{A}X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t-d). \end{aligned} \quad (5.7)$$

na qual  $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$ .

Considere a equação matricial para o observador de estados, para as mesmas matrizes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} [X(t-d) - \hat{X}(t-d)], \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-d) \\ \hat{w}(t-d) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

sendo  $\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\bar{L}_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{L}_2 \in \mathbb{R}$  e  $\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ . Dessa forma, a equação (5.9) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= \bar{A}\hat{X}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{L}\bar{C}[X(t-d) - \hat{X}(t-d)], \\ \hat{y}(t) &= \bar{C}\hat{X}(t-d). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Assim, a lei de controle utiliza o estado estimado pelo observador, ou seja:

$$u(t) = -\bar{K}\hat{X}(t) = -K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t), \quad (5.10)$$



na qual  $\bar{K} = \begin{bmatrix} K & K_w \end{bmatrix}$  pode ser interpretada como a combinação do termo de realimentação  $K\hat{x}(t)$  e o termo de *feedforward*  $K_w\hat{w}(t)$ .

### 5.2.1.2 Erro de Estimação

Considere o erro de estimação  $\tilde{X}(t)$  definido como:

$$\tilde{X}(t) := X(t) - \hat{X}(t), \quad (5.11)$$

na qual a condição inicial é dada por  $\tilde{X}(\theta) = \tilde{X}_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ .

Assim, o erro de estimação pode ser obtido da diferença entre as equações (5.7) e (5.9):

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \bar{A}X(t) + \bar{B}u(t) - \bar{A}\hat{X}(t) - \bar{B}u(t) - \bar{L}\bar{C}[X(t-d) - \hat{X}(t-d)], \quad (5.12)$$

sendo reduzida à:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \bar{A}\tilde{X}(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}(t-d). \quad (5.13)$$

A determinação dos coeficientes adequados para a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  do sistema (5.13) permitirá que o comportamento dinâmico do vetor de erro seja exponencialmente estável. Assim, considere a próxima hipótese:

**(H4)** A matriz do observador  $L$  da equação (5.13) deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  seja Hurwitz.

Conforme assumido no **Lema 1.2** da seção 1.5 (NICULESCU et al., 1998), tal que a desigualdade:

$$\left\| e^{(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})t} \right\| \leq k e^{-\eta t}, \quad (5.14)$$

seja satisfeita para  $k \geq 1$  e  $\eta > 0$  conhecidos. De forma que para um  $d$  suficientemente pequeno, os parâmetros do sistema devem satisfazer:

$$\frac{k}{\eta} d \|\bar{L}\bar{C} \bar{A}\| + \|(\bar{L}\bar{C})^2\| < 1. \quad (5.15)$$

Logo, a solução para (5.13) pode ser expressa por:

$$\tilde{X}(t) = \Phi_1(t, \tilde{X}_0), \quad (5.16)$$

na qual  $\Phi_1(t, \tilde{X}_0) \in \mathbb{R}^n$  é a função de transição de estados para a condição inicial  $\tilde{X}_0(t)$ .

Dessa forma, a equação (5.16) pode ser majorada por:

$$\|\Phi_1(t, \tilde{X}_0)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^*, \quad (5.17)$$

na qual  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$ .

Baseando-se na equação (5.17), a solução  $\tilde{x}(t)$  para a equação (5.13) satisfaz:

$$\|\tilde{X}(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^*. \quad (5.18)$$

Assim, o erro de estimação  $\tilde{X}(t)$  tenderá exponencialmente a zero, conforme (5.18).

### 5.2.1.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

A equação de estado (5.6) com sinal de controle (5.10) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [-\bar{K} \hat{X}(t)], \quad (5.19)$$

de onde se obtém:

$$\dot{X}(t) = \bar{A}X(t) - \bar{B}\bar{K}\hat{X}(t). \quad (5.20)$$

Baseado em (5.11), reconsidere (5.20):

$$\dot{X}(t) = \bar{A}X(t) - \bar{B}\bar{K}[X(t) - \tilde{X}(t)], \quad (5.21)$$

sendo reescrita como:

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})X(t) + \bar{B}\bar{K}\tilde{X}(t). \quad (5.22)$$

Considere a equação do estado de (5.19):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) - BK_w\hat{w}(t) + C_w w(t). \quad (5.23)$$

Onde é possível deduzir para  $\hat{w}(t)$  e  $\hat{x}(t)$ :

$$\hat{w}(t) = w(t) - \tilde{w}(t), \quad (5.24)$$

$$\hat{x}(t) = x(t) - \tilde{x}(t). \quad (5.25)$$

Dessa forma, a equação (5.23) se torna:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)] - BK_w[w(t) - \tilde{w}(t)] + C_w w(t), \quad (5.26)$$

sendo reescrita como:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + (C_w - BK_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + K_w\tilde{w}(t)]. \quad (5.27)$$

Dessa forma, a solução para a equação dinâmica (5.27) pode ser expressa como:

$$x(t) = \Phi_2(t, x_0) + \int_0^t G_1(t, \tau) \left\{ (C_w - BK_w)[0 \ I]X(\tau) + BK[I \ 0]\tilde{X}(\tau) + BK_w[0 \ I]\tilde{X}(\tau) \right\} d\tau, \quad (5.28)$$

na qual  $x(t) = \Phi_2(t, x_0)e^{(A-BK)t}x_0 \in \mathbb{R}^n$ . A resposta impulsiva  $G_1(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a solução da equação diferencial homogênea  $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$  com condição inicial  $x(\tau) = I_n$  para  $t > \tau$ ,  $x(t) = 0$  para  $t \leq \tau$  e  $\tau$  é o instante de aplicação do impulso de  $G_1$ .

De forma a obter um resultado que satisfaça a equação (5.28), considera-se os passos a seguir:

$$\|\Phi_2(t, x_0)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^*, \quad (5.29)$$

$$\|G_1(t, \tau)\| \leq c_3 e^{-\lambda_3(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad (5.30)$$

Dessa forma, baseando-se nas equações (5.28),(5.29), (5.30) e na relação  $\tilde{X}(t)$  definida em (5.18), reescreve-se uma nova equação para (5.27):

$$\|x(t)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^* + c_3 e^{-\lambda_3 t} * c_4 \|w(t)\|_\infty + c_3 e^{-\lambda_3 t} * \|c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^*\|. \quad (5.31)$$

A primeira convolução pode ser majorada , conforme descrito em (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|c_3 e^{-\lambda_3 t} * c_4 \|w(t)\|_\infty\| \leq \|c_3 e^{-\lambda_3 t}\|_1 c_4 \|w(t)\|_\infty, \quad (5.32)$$

Assim sendo, a equação (5.32) pode ser representada por:

$$c_3 e^{-\lambda_3 t} = \int_0^\infty |c_3 e^{-\lambda_3 t}| dt c_4 \|w(t)\|_\infty, \quad (5.33)$$

de onde podemos afirmar:

$$\|c_3 e^{-\lambda_3 t}\|_1 = \int_0^\infty |c_3 e^{-\lambda_3 t}| dt < \frac{c_3}{\lambda_3} < \infty. \quad (5.34)$$

Dessa forma pode ser considerado para a convolução da equação (5.32):

$$\|c_3 e^{-\lambda_3 t} * c_4 \|w(t)\|_\infty\| \leq \frac{c_3 c_4}{\lambda_3} \|w(t)\|_\infty. \quad (5.35)$$

A segunda convolução pode ser majorada, conforme (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|c_3 e^{-\lambda_3 t} * c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^*\| \leq \|c_5 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^* + c_6 e^{-\lambda_3 t} \tilde{X}_0^*\|. \quad (5.36)$$

Assim, o sistema (5.27) será ISS com relação à  $\tilde{w}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ :

$$\|x(t)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^* + \frac{c_3 c_4}{\lambda_3} \|w(t)\|_\infty + c_5 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^* + c_6 e^{-\lambda_3 t} \tilde{X}_0^*. \quad (5.37)$$

Sendo reescrita:

$$\|x(t)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2 t} x_0^* + \frac{c_3 c_4}{\lambda_3} \|w(t)\|_\infty + c_7 e^{-\min(\lambda_1, \lambda_3)t} \tilde{X}_0^*. \quad (5.38)$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$  e  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$ .

Dessa forma, a equação (5.38) demonstra que há no sistema um resíduo da perturbação. Assim, a constante  $\frac{c_3 c_4}{\lambda_3}$  deverá ser pequena o suficiente para que os efeitos da perturbação sejam bastante atenuados.

### 5.2.2 Sistema Linear com Perturbações Casadas

Nesta seção considere que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada com o termo  $Bu(t)$ . Assim, é possível reescrever a equação de  $\dot{x}(t)$  de (5.5) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + \bar{\nu}(t)], \quad (5.39)$$

na qual  $\bar{\nu}(t) \in \mathbb{R}$  seja uma perturbação exógena, de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= A_w w(t), \\ \bar{\nu}(t) &= \bar{C}_w w(t), \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dessa forma, o sistema (5.39) pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-d) \\ w(t-d) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Supõe-se que  $C_w$  da equação (5.6) possa ser substituída por  $C_w = B\bar{C}_w$ . Assim, pode-se reescrever a equação da planta (5.41) como:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A^* X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t-d). \end{aligned} \quad (5.42)$$

de forma que  $A^* = \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$ .

Considere a equação do estado do sistema (5.41) com as devidas substituições por

(5.2) e (5.10). Assim, tem-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[-K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t) + \bar{C}_w w(t)]. \quad (5.43)$$

Das equações (5.24) e (5.25):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) + BK\tilde{x}(t) - BK_w w(t) + BK_w \tilde{w}(t) + B\bar{C}_w w(t). \quad (5.44)$$

Dessa forma a equação (5.44) se torna:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B(-K_w + \bar{C}_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + K_w \tilde{w}(t)]. \quad (5.45)$$

Uma vez que foi comprovado por (5.37) que o erro de estimação  $\tilde{x}(t)$  irá para zero e que os termos são conhecidos, pelo método de perturbação casada, pode-se definir:

$$K_w = \bar{C}_w. \quad (5.46)$$

Assim, conforme a equação (5.46), o segundo termo será cancelado. Dessa forma, é possível escrever um novo majorante para a solução da equação (5.45):

$$\|x(t)\| \leq c_{10}e^{-\lambda_{10}t}x_0^* + c_{11}e^{-\lambda_{11}t}\tilde{X}_0^*. \quad (5.47)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|x_0(\theta)\|$  e  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$ .

Dessa forma, uma vez que a perturbação poderá ser anulada, o sistema será ISS com relação à  $\tilde{w}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ , sendo globalmente exponencialmente estável.

**Observação 5.1** *A inclusão de incertezas na matriz exógena apresentada pelo sistema inicial (5.5) pode seguir os mesmos passos feitos anteriores, onde se fez uso de observadores para estimar o estado não medido, de forma a levar o sistema de controle para a estabilidade.*

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 5.1** *Considere o sistema linear com atraso (5.5) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (5.10) que utiliza o observador de estado (5.9). Assuma que*

as hipóteses **(H1)** a **(H4)** sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável para:

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad \forall t \geq 0, \quad (5.48)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{X}^T(t), x^T(t)]^T$  e  $z_0 = [\tilde{X}_0^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T$ ,  $\forall \theta \in [-\bar{d}, 0]$ .

### 5.3 Sistema Linear com Perturbações Exógenas e Atraso Arbitrário na Saída

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso arbitrário. Assim, considere que  $\tau = D$ , onde  $\underline{D}$  e  $\bar{D}$  são limites inferior e superior, respectivamente. Assim, é abordado o uso de observadores em cascata para estimação do estado. Então, o sistema (5.1) a ser controlado poderá ser reescrito:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - D). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Nas próximas seções serão abordados estudos para o sistema (5.49) em que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada ou descasada com o termo  $Bu(t)$ .

#### 5.3.1 Sistema Linear com Perturbações Descasadas

Nesta seção considere que a perturbação  $\nu(t)$  seja descasada com o termo  $Bu(t)$ .

##### 5.3.1.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (5.49) é representado pelas equações (5.3) e (5.4) assume a forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - D) \\ w(t - D) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação da planta (5.50) como:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \bar{A}X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t - D).\end{aligned}\tag{5.51}$$

O controle de sistemas com atraso arbitrário foi abordado por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012), demonstrado na seção 3.3, e com controle por modo deslizante que aplica observadores conectados em cascata por (COUTINHO, 2012). A principal diferença do sistema original de referência pelo desenvolvido é possuir ainda a perturbação exógena desconhecida. Dessa forma, para o observador de estados estimado, basta adicionar observadores em cascata a medida que o atraso  $D$  aumenta.

**Observação 5.2** *O observador de estados em cascata estimará um vetor de estado atrasado dado por  $\frac{D}{m}$  de forma que vetor  $\hat{X}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $X_j(t)$  e  $\hat{X}_m(t)$  é uma estimativa de  $X(t)$ .*

Assim, considere as seguintes notações para representar o estado e o sinal de controle:

$$X_j(t) = X\left(t - D + j\frac{D}{m}\right),\tag{5.52}$$

$$u_j(t) = u\left(t - D + j\frac{D}{m}\right),\tag{5.53}$$

e para o estado do observador:

$$\hat{X}_j(t) = \hat{X}\left(t - D + j\frac{D}{m}\right),\tag{5.54}$$

na qual  $j = 1, \dots, m$ . Então, o observador para estimação do estado é descrito pelas



seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{X}}_1(t) &= \bar{A}\hat{X}_1(t) + \bar{B}u_1(t) - \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y(t) \right], \\
\hat{y}_1(t) &= \bar{C}\hat{X}_1(t), \\
&\vdots \\
\dot{\hat{X}}_j(t) &= \bar{A}\hat{X}_j(t) + \bar{B}u_j(t) - \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{j-1}(t) \right], \\
\hat{y}_j(t) &= \bar{C}\hat{X}_j(t), \\
&\vdots \\
\dot{\hat{X}}_m(t) &= \bar{A}\hat{X}_m(t) + \bar{B}u_m(t) - \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_m \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{m-1}(t) \right], \\
\hat{y}_m(t) &= \bar{C}\hat{X}_m(t).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

O vetor  $\hat{X}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $X_j(t)$  e  $\hat{X}(t) := \hat{X}_m(t)$  é uma estimativa de  $X(t)$ .

Baseado em (5.10), adota-se a lei de controle baseada no estado estimado:

$$u(t) = -\bar{K}\hat{X}_m(t). \tag{5.56}$$

### 5.3.1.2 Erros de Estimação

Conforme demonstrado em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012, Teorema 1) há uma quantidade suficiente de  $m$  observadores em cascata de tal modo que o estado do último observador em (5.50) converge exponencialmente para o estado do sistema (5.5). Dessa forma, a convergência do observador em cascata será provada passo a passo pelo método de indução matemática.

Assim, baseado em (5.11) considere  $\tilde{X}_1(t)$  como o primeiro erro de estimação em cascata para o passo  $i = 1$ :

$$\tilde{X}_1(t) = X_1(t) - \hat{X}_1(t). \tag{5.57}$$

Portanto, é possível calcular  $\dot{\tilde{X}}_1(t)$  da diferença das equações (5.51) e (5.55):

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}X_1(t) + \bar{B}u_1(t) - \bar{A}\hat{X}_1(t) - \bar{B}u_1(t) + \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y \right], \quad (5.58)$$

na qual  $\dot{X}_1(t) = \bar{A}X_1(t) + \bar{B}u_1(t)$  é a representação do sistema (5.51) com sinais atrasados que, para propósitos de análise, foi representado com o índice  $i = 1$ . Assim, obtém-se

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}\tilde{X}_1(t) + \bar{L}\bar{C} \left[ \hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - X(t - D) \right]. \quad (5.59)$$

No entanto, pela equação (5.52) observa-se que

$$X_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) = X(t - D), \quad (5.60)$$

o qual escolhido um número  $m$  de observadores de forma que o primeiro observador  $\hat{X}_1(t)$  possa convergir para  $X_1(t) = X \left( t - D + \frac{D}{m} \right)$ .

Dessa forma, a equação (5.59) se torna:

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}\tilde{X}_1(t) + \bar{L}\bar{C} \left[ \hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - X_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) \right], \quad (5.61)$$

sendo reduzida à:

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}\tilde{X}_1(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right). \quad (5.62)$$

A equação (5.62) pode ser comparada à (5.13), referente à seção 5.2 para um atraso  $\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno. Assim, tem-se uma solução majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{X}_1(t)\| \leq \Pi_1, \quad (5.63)$$

na qual  $\Pi_1 \leq \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{10}^*$ , onde  $\alpha_1 > 0$  e  $\lambda_1 > 0$  denotam constantes escalares positivas.

Igualmente, de forma a provar o segundo passo da indução matemática, baseado em (5.11) considere  $\tilde{X}_2(t)$  como o segundo erro de estimação em cascata para o passo  $i = 2$ :

$$\tilde{X}_2(t) = X_2(t) - \hat{X}_2(t). \quad (5.64)$$

Portanto, o erro de estimação  $\dot{\tilde{X}}_2(t)$  pode ser obtido da diferença das equações (5.51) e (5.55):

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}X_2(t) + \bar{B}u_2(t) - \bar{A}\hat{X}_2(t) - \bar{B}u_2(t) + \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_1 \right], \quad (5.65)$$

na qual  $\dot{X}_2(t) = \bar{A}X_2(t) + \bar{B}u_2(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (5.51) com o índice  $i = 2$ . Assim, obtém-se

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) + \bar{L}\bar{C}\hat{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_1(t), \quad (5.66)$$

na qual baseado em (5.64), é possível reescrever (5.66):

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}X_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_1(t). \quad (5.67)$$

Conforme em (5.52) tem-se:

$$X_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) = X \left( t - \frac{D}{m} - D + \frac{2D}{m} \right) = X \left( t - D + \frac{D}{m} \right) = X_1(t). \quad (5.68)$$

Portanto, (5.67) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}X_1(t) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_1(t), \quad (5.69)$$

na qual, baseada em (5.57), torna-se:

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_1(t). \quad (5.70)$$

Dessa forma, uma vez que o sistema  $\tilde{X}_1(t)$  decai exponencialmente conforme definido em (5.63), uma solução para o sistema (5.70) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{X}_2(t)\| = \Pi_a * \Pi_b, \quad (5.71)$$

na qual  $\Pi_a \leq \alpha_a e^{-\lambda_a t} \tilde{x}_{a0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{X}_1(t)$  tendendo para a origem e  $\Pi_b \leq \alpha_b e^{-\lambda_b t} \tilde{x}_{b0}^*$  para  $\Pi_b = \|\bar{L}\bar{C}\tilde{X}_1(t)\| \leq \|\bar{L}\bar{C}\| \cdot \Pi_1$ . Considere que  $\alpha_a, \alpha_b > 0$  e  $\lambda_a, \lambda_b > 0$  denotam constantes escalares positivas. Assim, a convolução pode ser majorada conforme descrito em (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|\Pi_a * \Pi_b\| \leq \Pi_2, \quad (5.72)$$

na qual  $\Pi_2 \leq \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} \tilde{x}_{20}^*$ , onde  $\alpha_2 > 0$  e  $\lambda_2 > 0$  denotam constantes escalares positivas. Contudo, a solução para o estado  $\tilde{X}_2(t)$  representado pela equação (5.71), satisfaz:

$$\|\tilde{X}_2(t)\| \leq \Pi_2. \quad (5.73)$$

Assim, de forma a validar a recorrência da convergência do erro, baseado em (5.11) considere agora o erro de estimação  $\tilde{X}_j(t)$  definido para o passo  $i = j$ :

$$\tilde{X}_j(t) = X_j(t) - \hat{X}_j(t). \quad (5.74)$$

Calcula-se o erro de estimação  $\dot{\tilde{X}}_j(t)$  da diferença das equações (5.51) e (5.55):

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = \bar{A}X_j(t) + \bar{B}u_j(t) - \bar{A}\hat{X}_j(t) - \bar{B}u_j(t) + \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{j-1} \right], \quad (5.75)$$

na qual  $\dot{X}_j(t) = \bar{A}X_j(t) + \bar{B}u_j(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (5.51) com o índice  $i = j$ . Dessa forma, obtém-se:

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) + \bar{L}\bar{C}\hat{X}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_{j-1}(t). \quad (5.76)$$

Assim, pela equação (5.74), é possível reescrever (5.76):

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}X_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_{j-1}(t). \quad (5.77)$$

Baseado em (5.52) tem-se:

$$X_j \left( t - \frac{D}{m} \right) = X \left( t - \frac{D}{m} - D + \frac{jD}{m} \right) = X \left( t - D + (j-1)\frac{D}{m} \right) = X_{j-1}(t). \quad (5.78)$$

Portanto, (5.77) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + \bar{L}\bar{C}X_{j-1}(t) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_{j-1}(t). \quad (5.79)$$

O erro de estimação  $\tilde{X}_{j-1}(t)$  para o passo  $i = j - 1$  é definido por:

$$\tilde{X}_{j-1}(t) = X_{j-1}(t) - \hat{X}_{j-1}(t). \quad (5.80)$$

Assim, conforme (5.80), tem-se para (5.79):

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_{j-1}(t), \quad (5.81)$$

Dessa forma, uma vez que por indução o sistema  $\tilde{X}_{j-1}(t)$  decai exponencialmente para a origem como  $\|\tilde{X}_{j-1}(t)\| \leq \Pi_{j-1}$ , uma solução para o sistema (5.81) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{X}_j(t)\| = \Pi_c * \Pi_d, \quad (5.82)$$

na qual  $\Pi_c \leq \alpha_c e^{-\lambda_c t} \tilde{x}_{c0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{X}_{j-1}(t)$  tendendo para a origem e  $\Pi_d \leq \alpha_d e^{-\lambda_d t} \tilde{x}_{d0}^*$  para  $\Pi_d = \|\bar{L}\bar{C}\tilde{X}_{j-1}(t)\| \leq \|\bar{L}\bar{C}\| \cdot \Pi_{j-1}$ . Considere que  $\alpha_c, \alpha_d > 0$  e  $\lambda_c, \lambda_d > 0$  denotam constantes escalares positivas. Assim, a convolução pode ser majorada conforme descrito em (DESOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|\Pi_c * \Pi_d\| \leq \Pi_j, \quad (5.83)$$

na qual  $\Pi_j \leq \alpha_j e^{-\lambda_j t} \tilde{x}_{j0}^*$ , onde  $\alpha_j > 0$  e  $\lambda_j > 0$  denotam constantes escalares positivas. Contudo, a solução para o estado  $\tilde{X}_j(t)$  representado pela equação (5.82), se torna:

$$\|\tilde{X}_j(t)\| \leq \Pi_j. \quad (5.84)$$

Dessa forma, por indução matemática, demonstra-se que o erro de estimação  $\tilde{X}(t)$  da planta tenderá exponencialmente a zero para  $(j = m)$  observadores.

Assume-se que a quantidade de  $m$  observadores em cascata faça com que  $\frac{D}{m}$  seja suficientemente pequeno para que a influência do atraso seja pequena. Uma vez que o

estágio do observador adianta a saída de  $\frac{D}{m}$  após  $m$  passos, então a saída deixa de estar atrasada. Assim um observador em cascata é um observador padrão de *Luenberger* para estimar o estado  $X(t)$ .

Portanto, é possível que seja satisfeita a condição **(H4)** de forma que a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  seja Hurwitz. Assim, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação do erro de estimação total da planta, definido por:

$$\|\tilde{X}(t)\| \leq c_a e^{-\lambda_a t} \tilde{X}_0^*, \quad (5.85)$$

na qual  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$ .

### 5.3.1.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

Baseado em (5.10), considere a equação do estado referente ao sistema (5.50) representada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [-\bar{K}\hat{X}(t)] \quad (5.86)$$

sendo rescrita como:

$$\dot{X}(t) = \bar{A}X(t) - \bar{B}\bar{K}\hat{X}(t). \quad (5.87)$$

Baseado em (5.11), reconsidere (5.87):

$$\dot{X}(t) = \bar{A}X(t) - \bar{B}\bar{K}[X(t) - \tilde{X}(t)], \quad (5.88)$$

sendo reescrita como:

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})X(t) + \bar{B}\bar{K}\tilde{X}(t). \quad (5.89)$$

Dessa forma a equação (5.89) pode ser comparada à equação (5.22) para um atraso  $\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno. Assim, considere a equação do estado de (5.86):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) - BK_w\hat{w}(t) + C_w w(t). \quad (5.90)$$

Considere (5.24) e (5.25). Assim a equação (5.90) se torna:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)] - BK_w[w(t) - \tilde{w}(t)] + C_w w(t), \quad (5.91)$$

sendo reescrita como:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + (C_w - BK_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + K_w\tilde{w}(t)]. \quad (5.92)$$

Dessa forma, a equação (5.92) pode ser comparada à (5.27). Assim, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação:

$$\|x(t)\| \leq c_b e^{-\lambda_b t} x_0^* + c_c \|w(t)\|_\infty + c_d e^{-\lambda_d t} \tilde{X}_0^*. \quad (5.93)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|x_0(\theta)\|$  e  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$ .

Dessa forma, a equação (5.93) demonstra que há no sistema um resíduo da perturbação, onde a constante  $c_c$  deverá ser pequena o suficiente para que os efeitos da perturbação sejam bastante atenuados.

### 5.3.2 Sistema Linear com Perturbações Casadas

Supondo que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada com o termo  $Bu(t)$ . Assim, é possível reescrever a equação de  $\dot{x}(t)$  de (5.49) como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + \bar{\nu}(t)], \quad (5.94)$$

na qual  $\bar{\nu}(t) \in \mathbb{R}$ ., conforme (5.40)

Dessa forma, o sistema (5.94) pode ser representada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-D) \\ w(t-D) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Supõe-se que  $C_w$  da equação (5.50) possa ser substituída por  $C_w = B\bar{C}_w$ . Assim, pode-se reescrever a equação da planta (5.95) como:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A^*X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t - D).\end{aligned}\tag{5.96}$$

na qual  $A^* = \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$ .

Considere a equação do estado do sistema (5.94) com as devidas substituições por (5.2) e (5.10). Assim, tem-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[-K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t) + \bar{C}_w w(t)].\tag{5.97}$$

Das equações (5.24) e (5.25):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) + BK\tilde{x}(t) - BK_w w(t) + BK_w \tilde{w}(t) + B\bar{C}_w w(t).\tag{5.98}$$

Dessa forma a equação (5.98) se torna:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B(-K_w + \bar{C}_w)w(t) + B(K\tilde{x} + K_w\tilde{w}),\tag{5.99}$$

sendo a mesma equação de (5.45). Dessa forma, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação (5.99):

$$\|x(t)\| \leq c_e e^{-\lambda_e t} x_0^* + c_f e^{-\lambda_f t} \tilde{X}_0^*,\tag{5.100}$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$  e  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$ .

Dessa forma o sistema será ISS com relação à  $\tilde{w}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ , sendo globalmente exponencialmente estável.

**Observação 5.3** *Dessa forma, pode-se dizer que para todo atraso constante  $D$  existe um*



número  $m$  de observadores em cascata que satisfaça a relação:

$$m \geq \frac{D}{d_1}, \quad (5.101)$$

na qual  $d_1$  é o máximo atraso admitido para um único observador, de forma que tal que todos os erros de estimação convergem exponencialmente a zero.

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 5.2** *Considere o sistema linear (5.49) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (5.56) que utiliza o observador de estado (5.50). Assuma que as hipóteses (H1) a (H4) sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável tal que:*

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad (5.102)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{X}_1^T(t), \tilde{X}_2^T(t) \dots \tilde{X}_m^T(t), x^T(t)]^T$  e

$$z_0 = [\tilde{X}_1^T(\theta), \tilde{X}_2^T(\theta) \dots \tilde{X}_m^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T, \quad \forall \theta \in [-\bar{D}, 0].$$

#### 5.4 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema linear baseado na equação (5.6) que satisfaz as hipóteses (H1) a (H4) com perturbações casadas:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} X(t-d). \end{aligned} \quad (5.103)$$

na qual  $\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}$  e  $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ .

Considere que a perturbação casada seja dada por uma senóide onde  $A_w = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\bar{C}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ , conforme definido em (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997). Assim tem-

se para a planta que  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [0 \ 4]^T$  e  $C = [1 \ 0]$ . Onde deduz-se

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, de forma a comprovar a estabilidade para o sistema (5.103), considere as condições abaixo:

- Conforme a hipótese **(H4)**:

– Escolhe-se  $L = [8 \ 10 \ 13 \ 12]^T$  de forma que a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  seja Hurwitz.

Assim:

$$\bar{A} - \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.104)$$

cujos autovalores são -1 rad/s , -2 rad/s , -3 rad/s e -4 rad/s. Ou seja, a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  é Hurwitz.

– A a condição de existência  $\|e^{(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})t}\| \leq k e^{-\eta t}$  deve ser obedecida conforme a desigualdade (5.14).

Dessa forma, considere os parâmetros  $k = 3,01$  e  $\eta = 0,59$  obtidos pelo *filtro de aproximação de primeira ordem (first order approximation filter - FOAF)*, conforme critério definido em (CUNHA, 2004) de forma a minimizar a norma exponencial. Assim, tem-se:

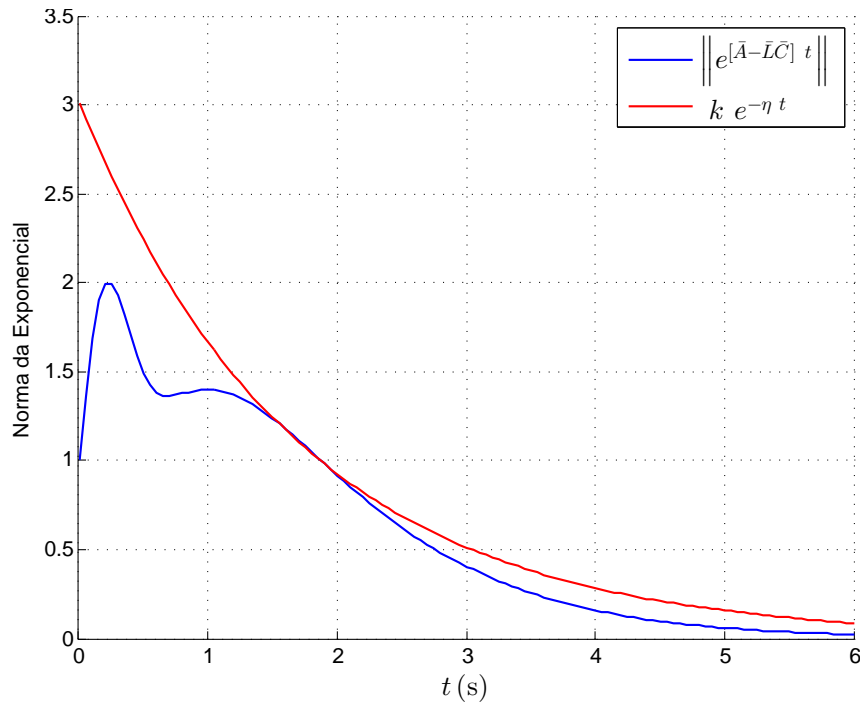


Figura 29 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade  $\|e^{(\bar{A}-\bar{L}\bar{C})t}\| \leq k e^{-\eta t}$ .

Pela Figura 29 é possível perceber que a curva em azul, referente a  $\|e^{(A-LC)t}\|$  é inferior à curva em vermelho, referente à  $k e^{-\eta t}$ , satisfazendo a condição.

- A condição de existência  $\frac{k}{\eta} d \|\bar{L}\bar{C}\bar{A}\| + \|(\bar{L}\bar{C})^2\| < 1$  deve ser obedecida conforme a desigualdade (5.15).

Considere os mesmos  $k = 3,01$  e  $\eta = 0,59$  para um atraso máximo definido  $d = 0,0009$  s para que a condição (5.15) seja atendida. Assim, o sistema retornou um valor máximo permitido de 0,9598.

- Escolhe-se o ganho do controlador como  $\bar{K} = \begin{bmatrix} K & K_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,25 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Este foi definido de tal forma que os controladores da matriz  $(A - BK)$  sejam  $-1rad/s$  e  $-2rad/s$ .
- As condições iniciais usadas nas simulações são:
  - Sistema e observador, para atraso pequeno  $d$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0].$$

– Sistema e observadores em cascata, para atraso arbitrário  $D$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-D, 0].$$

Portanto, serão apresentadas simulações do sistema proposto em (5.103) de forma a ilustrar a eficácia dos controladores desenvolvidos.

A Figura 30 apresenta os sinais  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  e  $x_4(t)$  comparados aos sinais  $\hat{x}_1(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$ ,  $\hat{x}_3(t)$  e  $\hat{x}_4(t)$  estimados pelo observador.

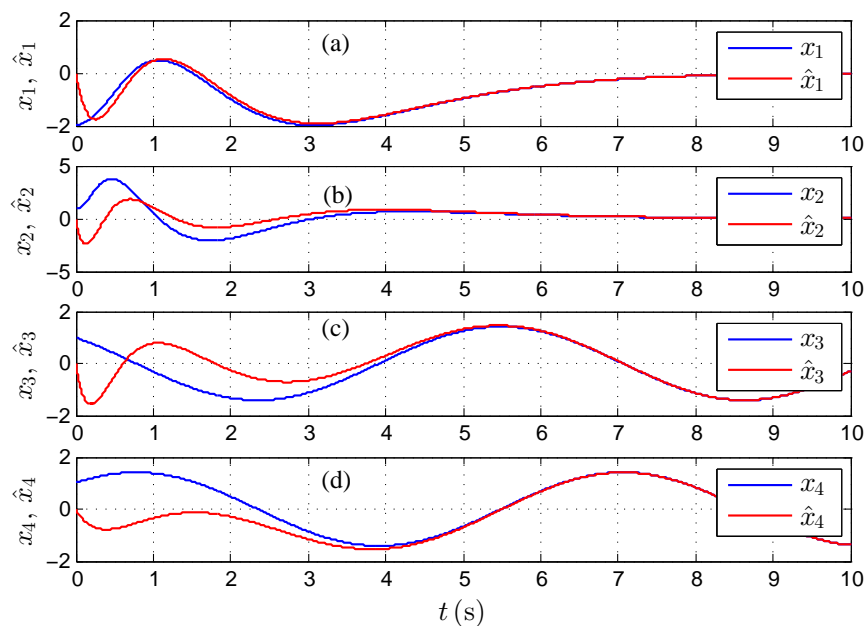


Figura 30 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $d = 0,0009$  s.

Na Figura 31 pode-se observar a saída  $y(t)$  medida e a saída  $\hat{y}(t)$  estimada por um único observador na presença do atraso  $d = 0,0009$  s no sistema.

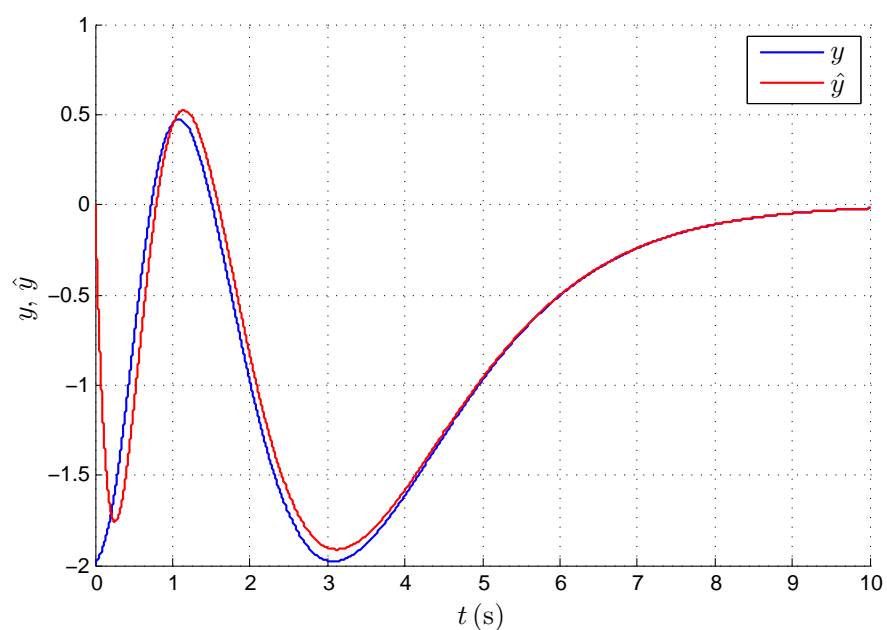


Figura 31 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $d = 0,0009$  s.

O sinal de controle  $u(t)$  mostrado na Figura 32 é gerado pela lei de controle (5.10). As oscilações senoidais no sinal de controle são resultantes da perturbação estimada e cancelam a perturbação casada. Assim, os efeitos da perturbação são eliminados no estado e na saída da planta, conforme se observa nas Figura 30(.a), Figura 30(.b) e Figura 31.

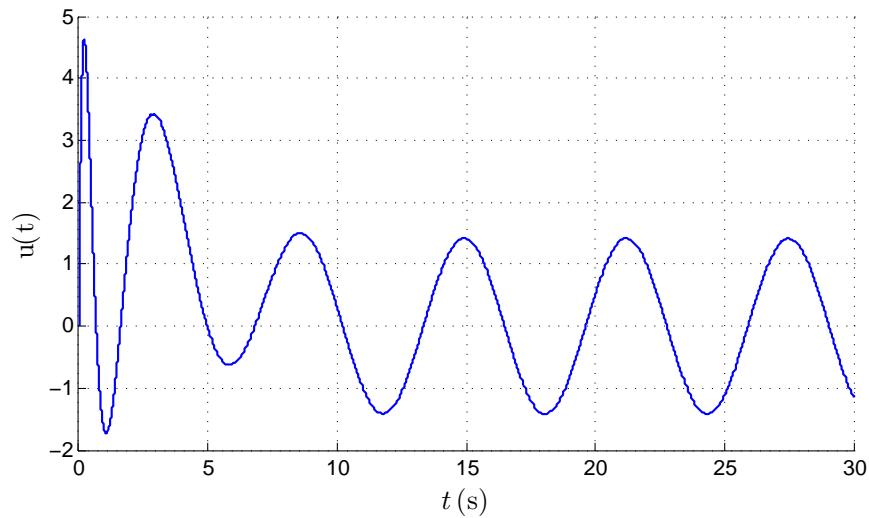


Figura 32 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $d = 0,0009$  s.

Conforme descrito nas definições, o atraso máximo permitido para o sistema apresentado é de  $d = 0,0009$  s.

Uma vez que a matriz de controle  $A$  possui um autovalor instável e dois autovalores na origem do eixo imaginário, o diagrama de Nyquist da função de transferência  $G(s) = e^{-sd}\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{L}$  deverá envolver o ponto  $-1$  no sentido anti-horário. No entanto, observa-se pela Figura 33 que não é possível verificar o sentido da trajetória, devido a escala do diagrama ser da ordem de  $10^8$ . No entanto, observou-se por meio de simulações que os atrasos de  $d = 0,12$  s e  $d = 0,15$  s, são os valores de atraso máximo permitido para o sistema se manter estável e que o valor de  $d = 0,18$  s verifica-se que o sistema torna-se instável.

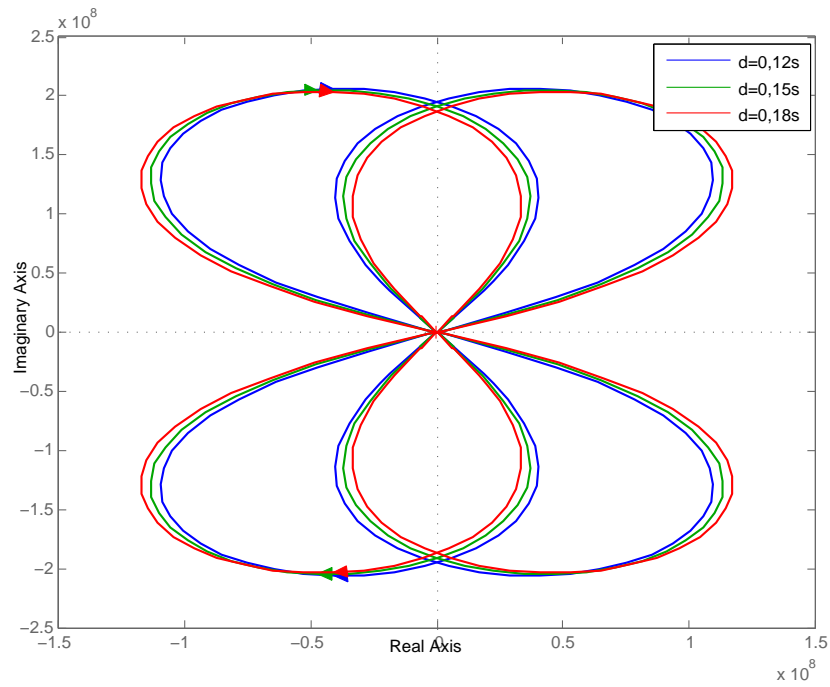


Figura 33 - Diagrama de Nyquist para três valores de atraso .

Assim, de forma a dar continuidade ao estudo, considere um atraso para  $D = 0,0018s$  onde serão utilizados dois observadores conectados em cascata ( $m=2$ ). Assim, a Figura 34 apresenta os sinais  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  e  $x_4(t)$  e a Figura 35 apresenta  $y$ , comparando seus valores medidos e observados, utilizando dois observadores para o atraso para  $D = 0,0018s$ .

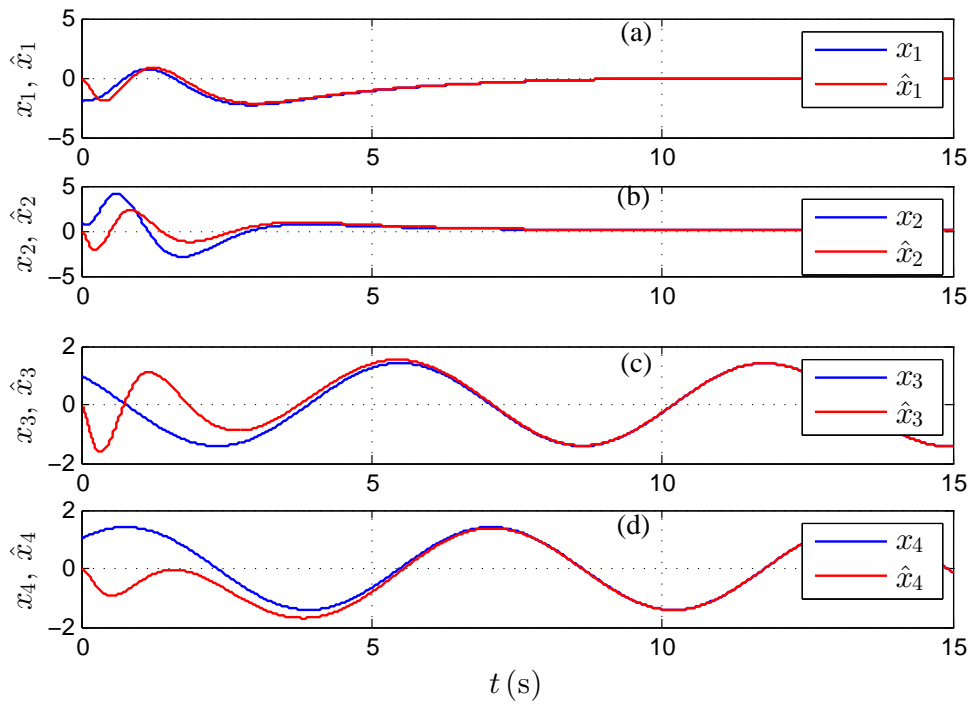


Figura 34 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,0018$  s.

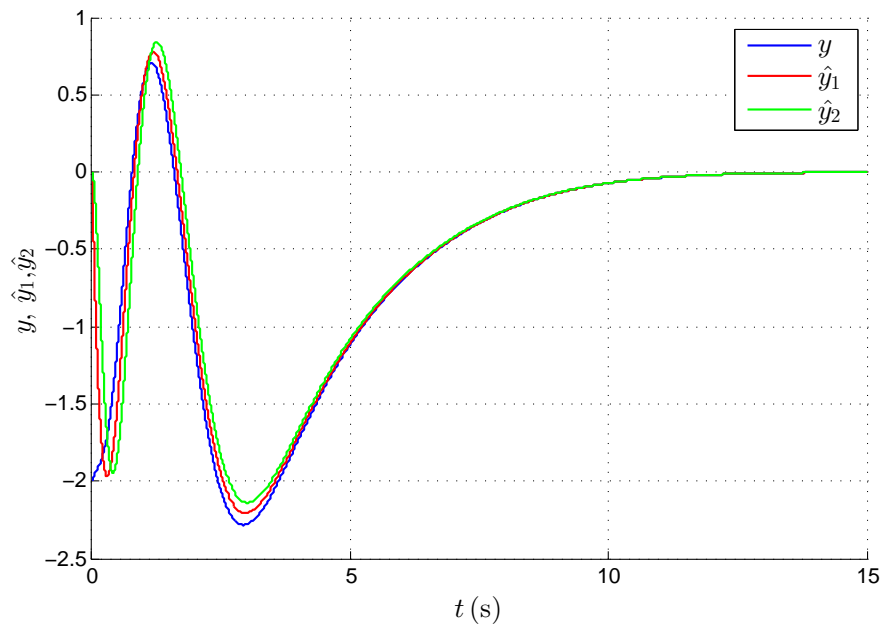


Figura 35 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,0018$  s.

A Figura 36 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,0018$  s.



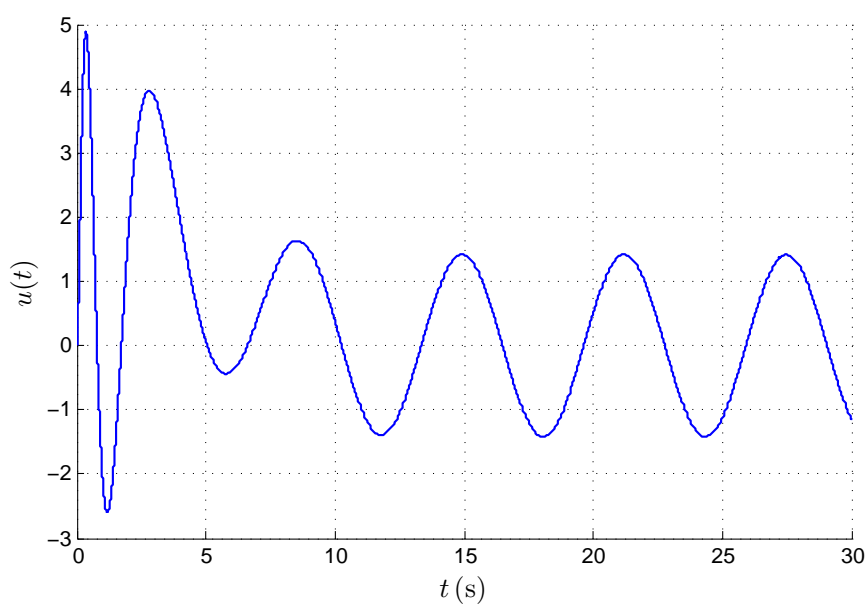


Figura 36 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,0018$  s.

É importante destacar que a estabilidade e o desempenho do controlador são robustos em relação ao atraso maior. Assim, esta quantidade de observadores para os mesmos parâmetros escolhidos permite a convergência para zero do erro de estimação e a saída do sistema. Dessa forma, ampliando-se o atraso para  $D = 0,3$  s, duas vezes o valor de referência obtido pelo gráfico de Nyquist em Figura 33, é possível observar que o sistema se mantém estável com apenas dois observadores, ao contrário do que a estimativa pela desigualdade (5.15) indicaria diz que seriam necessários 334 observadores em cascata ( $m=334$ ).

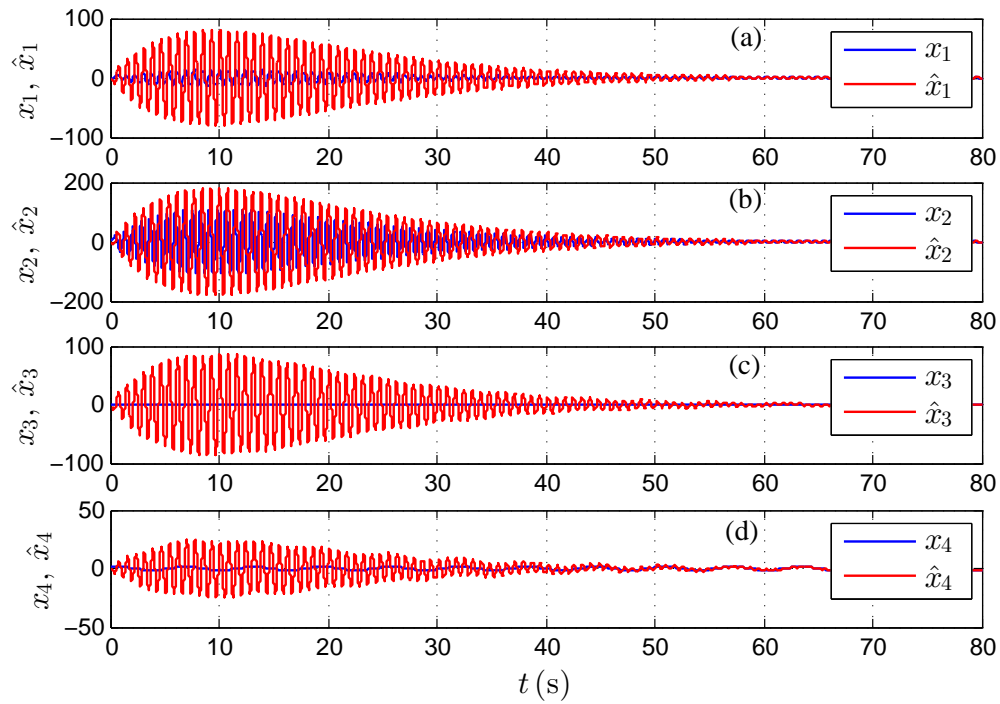


Figura 37 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,3$  s.

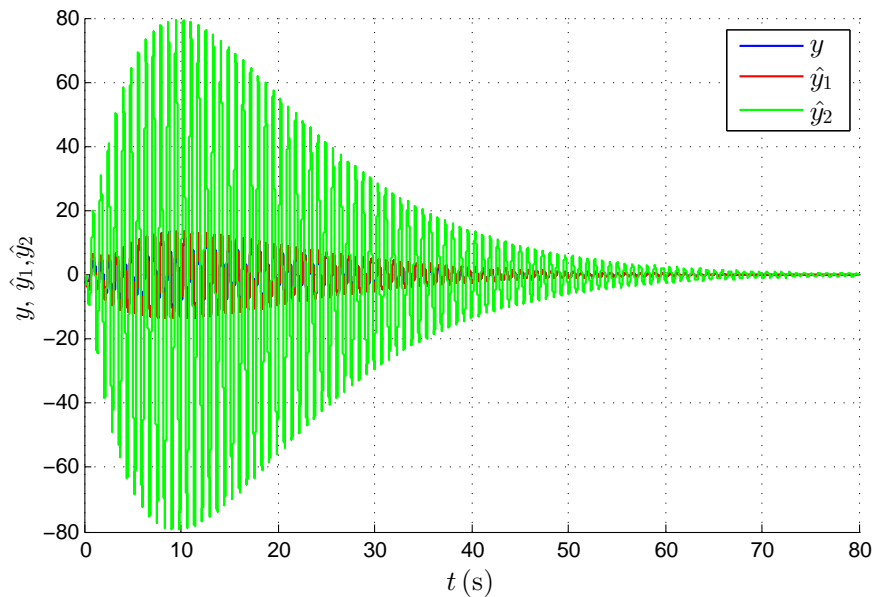


Figura 38 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,3$  s.

A Figura 39 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,3$  s.

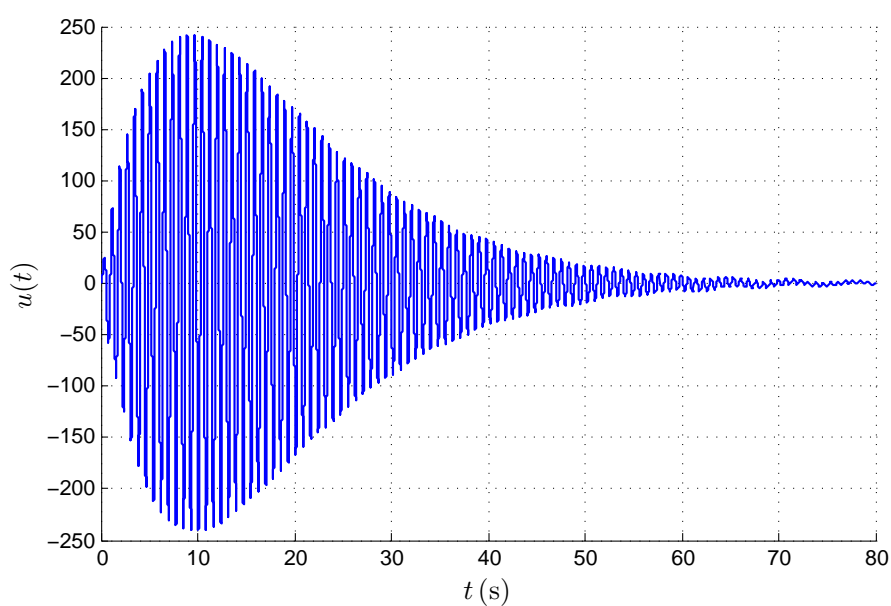


Figura 39 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,3$  s.

Isto indica que os resultados de (NICULESCU et al., 1998) podem ser bastante conservadores, uma vez que apenas dois observadores em cascata foram necessários para estabilizar o sistema, mesmo na presença de um atraso na saída  $D = 0,3$  s. No entanto, ampliando-se o atraso para  $D = 0,36$  s, duas vezes o valor de referência obtido pelo gráfico de Nyquist na Figura 33 onde o estado do sistema seria instável, observa-se que o sistema de controle não converge para a origem, conforme ilustrado nas Figuras 40 à 42.

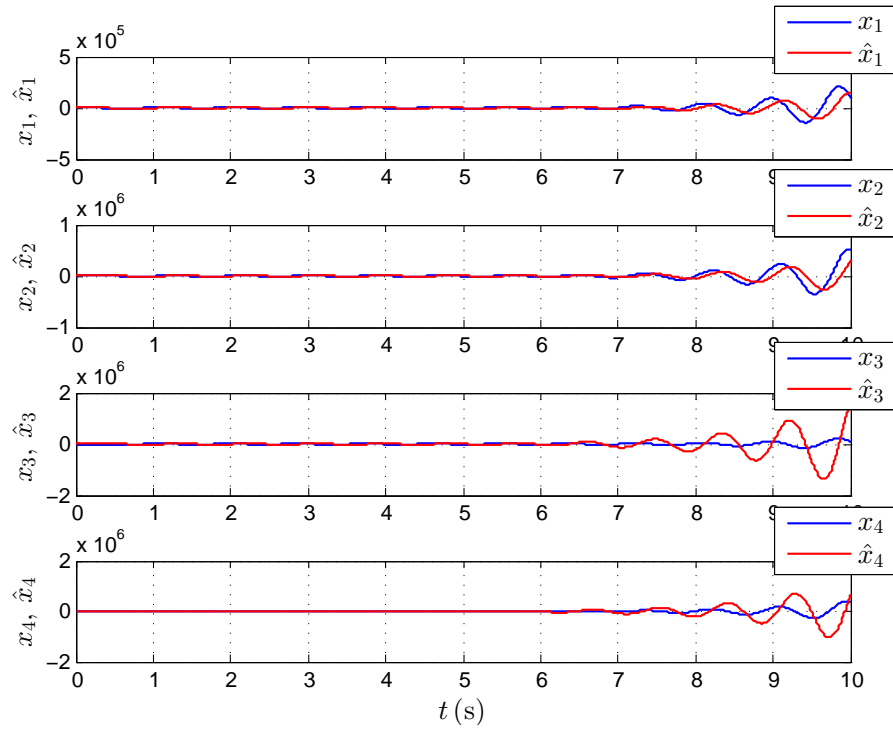


Figura 40 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,36$  s.

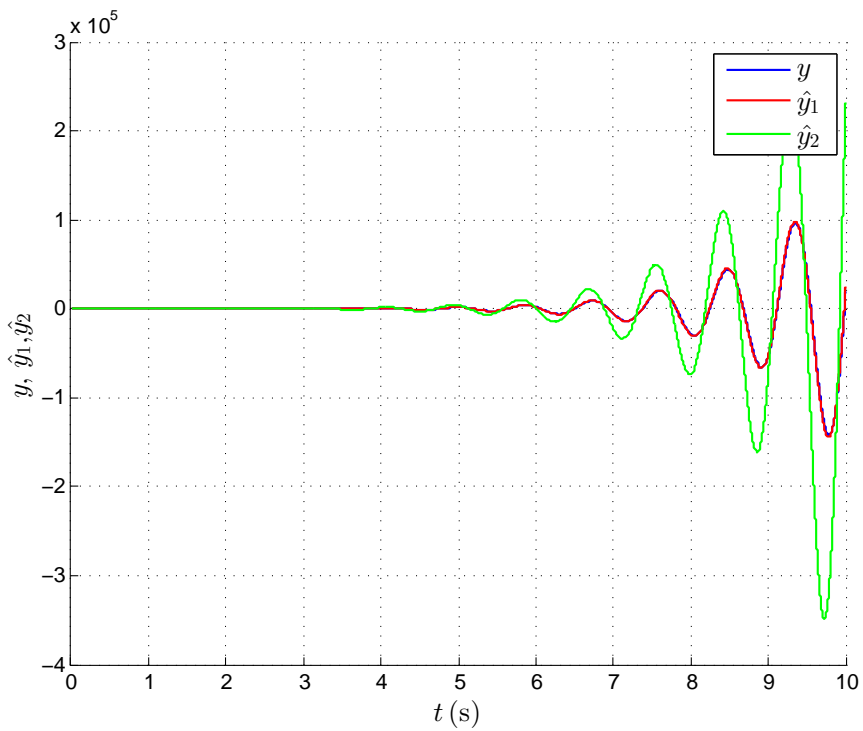


Figura 41 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,36$  s.

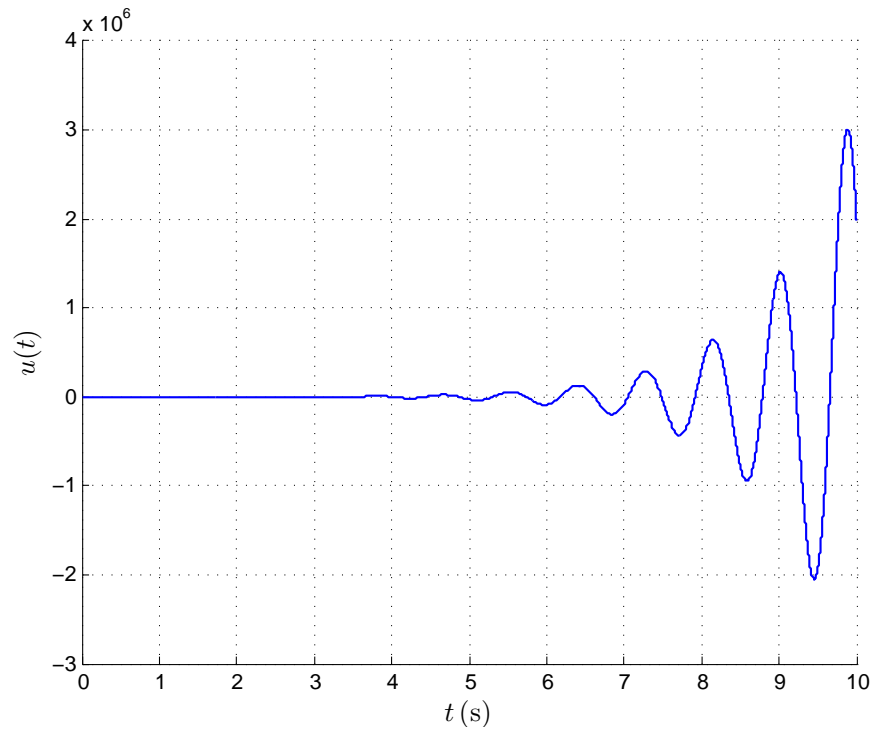


Figura 42 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,36$  s.

## 6 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS COM ATRASO E PERTURBAÇÕES EXÓGENAS

Neste capítulo será apresentado o projeto desenvolvido para o controlador com realimentação de saída baseado em observadores de estado, incertezas paramétricas na matriz de estado e perturbações exógenas. Serão considerados sistemas com atrasos pequenos ou arbitrários.

Considera-se sistemas lineares, observáveis, controláveis e com a saída atrasada, descritos pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{6.1}$$

na qual  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle,  $y(t) \in \mathbb{R}$  é a saída atrasada. O atraso  $\tau$  pode ser  $d$  quando for pequeno ou  $D$  quando for arbitrário. Sendo  $\Delta A$  a incerteza paramétrica na matriz de estado  $A$  e  $\nu(t)$  uma perturbação exógena. Não há incertezas nas matrizes  $B$  e  $C$ . Daqui por diante, considere ao longo do capítulo que  $c_i > 0$  e  $\lambda_i > 0$  denotam constantes escalares, positivas. A condição inicial é definida por  $x(\theta) = x_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ , na qual  $\bar{\tau}$  é o atraso máximo.

### 6.1 Hipóteses Básicas

Serão utilizados os métodos referentes ao **Lema 1.2** da seção 1.5. Assim, para o sistema (6.1), considera-se as hipóteses:

**(H1)** As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são conhecidas.

**(H2)** O atraso  $\tau$  é conhecido, suficientemente pequeno e satisfaz a desigualdade  $0 < \underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau} < \infty$ , onde  $\underline{\tau}$  e  $\bar{\tau}$  são limites inferior e superior, respectivamente.

**(H3)** A norma da incerteza paramétrica na matriz de estado satisfaz a desigualdade

$$\|\Delta A\| \leq \delta_a,\tag{6.2}$$

para valores suficientemente pequenos de  $\delta_a \geq 0$ .

(H4) Considere-se para a perturbação exógena  $\nu(t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= A_w w(t), \\ \nu(t) &= C_w w(t),\end{aligned}\tag{6.3}$$

de forma que os parâmetros das matrizes  $A_w$  e  $C_w$  sejam conhecidos e o parâmetro  $w(t) \in \mathbb{R}$  seja desconhecido. Assim sendo, considere a nova equação para (6.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + C_w w(t), \\ \dot{w}(t) &= A_w w(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{6.4}$$

de onde se define a matriz de estados:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}.\tag{6.5}$$

## 6.2 Sistema Linear com Perturbações, Incertezas na Matriz de Estados e Atraso Pequeno na Saída

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso pequeno. Assim, considera-se que  $\tau = d$ , onde  $\underline{d}$  e  $\bar{d}$  são limites inferior e superior, respectivamente. O sistema de controle (6.1) poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - d),\end{aligned}\tag{6.6}$$

Nas próximas seções serão abordados estudos para o sistema (6.6) em que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada ou descasada com a matriz de distribuição de controle  $Bu(t)$ .

### 6.2.1 Sistema Linear com Perturbações Descasadas

Nesta seção considere que a perturbação  $\nu(t)$  seja descasada com o termo  $Bu(t)$ .

## 6.2.1.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (6.6) representado pelas equações (6.4) e (6.5) assume a forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-d) \\ w(t-d) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação do sistema (6.7) como:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t-d), \end{aligned} \quad (6.8)$$

na qual  $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$ ,  $\Delta\bar{A} = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$ .

Considere a equação matricial para o observador de estados, para as mesmas matrizes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} [X(t-d) - \hat{X}(t-d)], \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-d) \\ \hat{w}(t-d) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

sendo  $\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\bar{L}_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{L}_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ . Dessa forma, a equação (6.10) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= \bar{A}\hat{X}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{L}\bar{C}[X(t-d) - \hat{X}(t-d)], \\ \hat{y}(t) &= \bar{C}\hat{X}(t-d). \end{aligned} \quad (6.10)$$

A lei de controle utiliza o estado estimado pelo observador, ou seja:

$$u(t) = -\bar{K}\hat{X}(t) = -K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t), \quad (6.11)$$



na qual  $\bar{K} = \begin{bmatrix} K & K_w \end{bmatrix}$  pode ser interpretada como a combinação do termo de realimentação  $K\hat{x}(t)$  e o termo de *feedforward*  $K_w\hat{w}(t)$ .

### 6.2.1.2 Erro de Estimação

Considere o erro de estimação  $\tilde{X}(t)$  definido como:

$$\dot{\tilde{X}}(t) := X(t) - \hat{X}(t), \quad (6.12)$$

na qual a condição inicial é dada por  $\tilde{X}(\theta) = \tilde{X}_0(\theta)$ ,  $\theta \in [-\bar{\tau}, 0]$ .

Assim, o erro de estimação pode ser obtido da diferença entre as equações (6.7) e (6.10):

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) + \bar{B}u(t) - \bar{A}\hat{X}(t) - \bar{B}u(t) - \bar{L}\bar{C}[X(t-d) - \hat{X}(t-d)] \quad (6.13)$$

Dessa forma, a equação (6.13) pode ser reduzida à:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \bar{A}\tilde{X}(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}(t-d) + \Delta\bar{A}X(t). \quad (6.14)$$

na qual  $\Delta\bar{A}X(t) = \begin{bmatrix} \Delta Ax(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ .

A equação (6.14) demonstra que a incerteza  $\Delta\bar{A}$  está presente na equação do erro. A determinação dos coeficientes adequados para a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  permitirá que o comportamento dinâmico do vetor de erro seja exponencialmente estável. Assim, considere a próxima hipótese:

**(H5)** A matriz do observador  $L$  da equação (6.14) deverá ser projetada adequadamente de forma que a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  seja Hurwitz.

Contudo, conforme assumido no **Lema 1.2** da seção 1.5 (NICULESCU et al., 1998), tal que a desigualdade:

$$\left\| e^{(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})t} \right\| \leq k e^{-\eta t}, \quad (6.15)$$

seja satisfeita para  $k \geq 1$  e  $\eta > 0$  conhecidos. De forma que para um  $d$  suficientemente pequeno, os parâmetros do sistema devem satisfazer:

$$\frac{k}{\eta} (d\|\bar{L}\bar{C} \bar{A}\| + \|(\bar{L}\bar{C})^2\|) < 1. \quad (6.16)$$

Assim sendo, sua solução pode ser expressa por:

$$\tilde{X}(t) = \Phi_1(t, \tilde{X}_0) + \int_0^t G_1(t, \tau) \Delta \bar{A} X(\tau) d\tau, \quad (6.17)$$

na qual  $\tilde{X}(t) = \Phi_1(t, \tilde{X}_0) \in \mathbb{R}^n$  é a resposta da equação homogênea (6.14) ( $X(t) \equiv 0$ ). A resposta impulsiva  $G_1(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a solução da equação diferencial homogênea  $\dot{\tilde{X}}(t) = \bar{A}\tilde{X}(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}(t-d)$  com condição inicial  $\tilde{X}(\tau) = I_n$  para  $t > \tau$ ,  $\tilde{X}(t) = 0$  para  $t \leq \tau$  e  $\tau$  é o instante de aplicação do impulso de  $G_1$ .

De forma a obter um resultado que satisfaça a equação (6.17), considere as equações abaixo:

$$\|\Phi_1(t, \tilde{X}_0)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^*, \quad (6.18)$$

$$\|G_1(t, \tau)\| \leq c_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad (6.19)$$

$$\|\Delta \bar{A} X(t)\| \leq \|\Delta A x(t)\| \leq \delta_a \|x(t)\|, \quad (6.20)$$

na qual  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$  e  $c_2 \geq c_1 \|\Delta \bar{A}\|$ .

Dessa forma, baseando-se nas equações (6.18), (6.19), (6.20), reescreve-se uma nova equação para (6.17):

$$\|\tilde{X}(t)\| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^* + c_2 e^{-\lambda_2 t} * \delta_a \|x(t)\|, \quad (6.21)$$

na qual para a convolução pode ser afirmado, conforme descrito em (DESOER; VIDYA-

SAGAR, 2009):

$$\| c_2 e^{-\lambda_2 t} * \delta_a \| x(t) \| \|_\infty \leq \| c_2 e^{-\lambda_2 t} \|_1 \delta_a \| x(t) \|_\infty, \quad (6.22)$$

Assim, o lado direito da equação (6.22) pode ser representada por:

$$\| c_2 e^{-\lambda_2 t} \|_1 = \int_0^\infty |c_2 e^{-\lambda_2 t}| dt \delta_a \| x(t) \|_\infty, \quad (6.23)$$

de onde podemos afirmar:

$$\| c_2 e^{-\lambda_2 t} \|_1 = \int_0^\infty |c_2 e^{-\lambda_2 t}| dt < \frac{c_2}{\lambda_2} < \infty. \quad (6.24)$$

Dessa forma, pode ser considerado para a convolução da equação (6.22):

$$\| c_2 e^{-\lambda_2 t} * c_3 \| x(t) \| \|_\infty \leq \frac{c_2}{\lambda_2} \delta_a \| x(t) \|_\infty. \quad (6.25)$$

Portanto, a equação (6.17) poderá ser reescrita na forma:

$$\| \tilde{X}(t) \| \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{X}_0^* + \frac{c_2}{\lambda_2} \delta_a \| x(t) \|_\infty, \quad (6.26)$$

na qual  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \| \tilde{X}_0(\theta) \|$ .

Assim, o erro de estimação  $\tilde{X}(t)$  tenderá exponencialmente a zero, conforme (6.26).

### 6.2.1.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

A equação de estado (6.7) com sinal de controle (6.11) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [-\bar{K} \hat{X}(t)], \\ y(t) &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t-d) \\ w(t-d) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

de onde se obtém:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) - \bar{B}\bar{K}\hat{X}, \\ y(t) &= \bar{C}X(t-d),\end{aligned}\tag{6.28}$$

Baseado em (6.12), reconsidere (6.29):

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) - \bar{B}\bar{K}[X(t) - \tilde{X}(t)],\tag{6.29}$$

sendo reescrita como:

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A} - \bar{B}\bar{K})X(t) + \bar{B}\bar{K}\tilde{X}(t).\tag{6.30}$$

Considere a equação do estado de (6.27):

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) - BK\hat{x}(t) - BK_w\hat{w}(t) + C_w w(t).\tag{6.31}$$

Onde é possível deduzir para  $\hat{w}(t)$  e  $\hat{x}(t)$ :

$$\hat{w}(t) = w(t) - \tilde{w}(t),\tag{6.32}$$

$$\hat{x}(t) = x(t) - \tilde{x}(t).\tag{6.33}$$

Dessa forma, a equação (6.31) se torna:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)] - BK_w[w(t) - \tilde{w}(t)] + C_w w(t),\tag{6.34}$$

sendo representada por:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK)x(t) + (C_w - BK_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + k_w\tilde{w}(t)].\tag{6.35}$$

Dessa forma, a solução para a equação dinâmica (6.35) pode ser expressa como:

$$x(t) = \Phi_2(t, x_0) + \int_0^t G_2(t, \tau) \left\{ (C_w - BK_w)[0 \ I]X(\tau) + BK[I \ 0]\tilde{X}(\tau) + BK_w[0 \ I]\tilde{X}(\tau) \right\} d\tau, \quad (6.36)$$

na qual  $x(t) = \Phi_2(t, x_0)e^{(A+\Delta A-BK)t}x_0 \in \mathbb{R}^n$ . A resposta impulsiva  $G_2(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a solução da equação diferencial homogênea  $\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK)x(t)$  com condição inicial  $x(\tau) = I_n$  para  $t > \tau$ ,  $x(t) = 0$  para  $t \leq \tau$  e  $\tau$  é o instante de aplicação do impulso de  $G_2$ . De forma a obter um resultado que satisfaça a equação (6.36), considera-se os passos a seguir:

$$\|\Phi_2(t, x_0)\| \leq c_3 e^{-\lambda_3 t} x_0^*, \quad (6.37)$$

$$\|G_2(t, \tau)\| \leq c_4 e^{-\lambda_4(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau \geq 0, \quad (6.38)$$

Dessa forma baseando-se nas equações (6.36), (6.37), (6.38) e na relação  $\tilde{X}(t)$  definida em (6.26) reescreve-se uma nova equação para (6.35):

$$\|x(t)\| \leq c_3 e^{-\lambda_3 t} x_0^* + c_4 e^{-\lambda_4 t} * c_5 \|w(t)\| + c_4 e^{-\lambda_4 t} * \|\tilde{X}(t)\|. \quad (6.39)$$

A primeira convolução em (6.39) pode ser majorada, conforme descrito em (DE-SOER; VIDYASAGAR, 2009):

$$\|c_4 e^{-\lambda_4 t} * c_5 \|w(t)\|\|_{\infty} \leq \|c_4 e^{-\lambda_4 t}\|_1 c_5 \|w(t)\|_{\infty}. \quad (6.40)$$

Assim sendo, a equação (6.40) pode ser representada por:

$$\int_0^{\infty} |c_4 e^{-\lambda_4 t}| dt c_5 \|w(t)\|_{\infty}, \quad (6.41)$$

de onde podemos afirmar:

$$\|c_4 e^{-\lambda_4 t}\|_1 = \int_0^{\infty} |c_4 e^{-\lambda_4 t}| dt < \frac{c_4}{\lambda_4} < \infty. \quad (6.42)$$

Portanto, pode ser considerado para a convolução da equação (6.40):

$$\| c_4 e^{-\lambda_4 t} * c_5 \| w(t) \| \|_\infty \leq \frac{c_4}{\lambda_4} c_5 \| w(t) \|_\infty. \quad (6.43)$$

Da mesma forma, a segunda convolução em (6.39) pode ser majorada:

$$\| c_4 e^{-\lambda_4 t} * \| \tilde{X}(t) \| \|_\infty \leq \| c_4 e^{-\lambda_4 t} \|_1 \| \tilde{X}(t) \|_\infty, \quad (6.44)$$

de onde podemos afirmar:

$$\| c_4 e^{-\lambda_4 t} \|_1 = \int_0^\infty |c_4 e^{-\lambda_4 t}| dt \| \tilde{X}(t) \|_\infty. \quad (6.45)$$

Utilizando a mesma referência da equação (6.42), é possível afirmar para a convolução da equação (6.45):

$$\| c_4 e^{-\lambda_4 t} * \| \tilde{X}(t) \| \|_\infty \leq \frac{c_4}{\lambda_4} \| \tilde{X}(t) \|_\infty. \quad (6.46)$$

Assim, o sistema (6.27) será ISS com relação à  $\tilde{w}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ :

$$\| x(t) \| \leq c_3 e^{-\lambda_3 t} x_0^* + \frac{c_4}{\lambda_4} c_5 \| w(t) \|_\infty + \frac{c_4}{\lambda_4} \| \tilde{X}(t) \|_\infty, \quad (6.47)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \| x_0(\theta) \|$ .

Assim, conforme (6.47) o sistema  $x(t)$  será globalmente exponencialmente estável.

**Observação 6.1** *A partir das desigualdades (6.26) e (6.47), aplicando-se o teorema de pequenos ganhos conforme apresentado na seção 1.3, os estados dos sistemas (6.14) e (6.35), terão um decaimento exponencial para a origem.*

*Dessa forma, conforme a hipótese (H3),  $x(t)$  representado pela equação (6.6) será globalmente exponencialmente estável para  $\| \Delta A \| \leq \delta_a$  suficientemente pequeno, onde:*

$$\delta_a < \frac{1}{\frac{c_2}{\lambda_2} \frac{c_4}{\lambda_4}}. \quad (6.48)$$

*Pela equação (6.48) comprova-se a hipótese (H3), onde  $\| \Delta A \| \leq \delta_a$  deverá ser suficientemente pequeno para que o sistema  $x(t)$  tenha um decaimento exponencial para*

a origem. No entanto, a equação (6.47) demonstra que há no sistema um resíduo da perturbação. Dessa forma, a constante  $\frac{c_4}{\lambda_4} c_5$  também deverá ser pequena o suficiente para que os efeitos da perturbação sejam bastante atenuados.

Assim, comprova-se que o sistema com a presença de um atraso pequeno, mesmo com incerteza paramétrica em  $A$  e perturbação exógena será globalmente exponencialmente estável.

### 6.2.2 Sistema Linear com Perturbações Casadas

Supondo que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada. Assim, é possível reescrever a equação de  $\dot{x}(t)$  do sistema (6.6):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B[u(t) + \nu(t)], \\ y(t) &= Cx(t - d).\end{aligned}\tag{6.49}$$

Dessa forma, o sistema (6.49) pode ser representado por:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - d) \\ w(t - d) \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{6.50}$$

Supõe-se que  $C_w$  da equação (6.7) possa ser substituída por  $C_w = B\bar{C}_w$ . Assim, pode-se reescrever a equação da planta (6.50) como:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (A^* + \Delta\bar{A})X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t - d).\end{aligned}\tag{6.51}$$

de forma que  $A^* = \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$ .

Considere a equação matricial para o observador de estados para o sistema (6.51):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} L_1^* \\ L_2^* \end{bmatrix} [C \ 0] [X(t-d) - \hat{X}(t-d)] \\ \hat{y}(t) &= [C \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x}(t-d) \\ \hat{w}(t-d) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

sendo  $L^* = \begin{bmatrix} L_1^* \\ L_2^* \end{bmatrix}$ , onde  $L_1^* \in \mathbb{R}^n$  e  $L_2^* \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, a equação (6.53) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= A^* \hat{X}(t) + \bar{B}u(t) + L^* \bar{C} [X(t-d) - \hat{X}(t-d)], \\ \hat{y}(t) &= \bar{C} \hat{X}(t-d). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Considere a equação do estado do sistema (6.49) com as devidas substituições por (6.4) e (6.11). Assim, tem-se:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B[-K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t) + \bar{C}_w w(t)]. \quad (6.54)$$

Das equações (6.32) e (6.33):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) - BKx(t) + BK\tilde{x}(t) - BK_w w(t) + BK_w \tilde{w}(t) \\ &+ BC_w w(t). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Dessa forma a equação (6.55) se torna:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK)x(t) + B(-K_w + \bar{C}_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + K_w \tilde{w}(t)]. \quad (6.56)$$

Uma vez que os termos são conhecidos, pelo método de perturbação casada, pode-se definir:

$$K_w = \bar{C}_w. \quad (6.57)$$

Assim, conforme a equação (6.57), o segundo termo será cancelado. Dessa forma,



é possível escrever um novo majorante para a solução da equação (6.56):

$$\|x(t)\| \leq c_{10}e^{-\lambda_{10}t}x_0^* + c_{11}e^{-\lambda_{11}t}\|\tilde{X}(t)\|_\infty, \quad (6.58)$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|x_0(\theta)\|$ .

Dessa forma, uma vez que a perturbação poderá ser anulada, o sistema será ISS com relação à  $\tilde{w}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ , sendo globalmente exponencialmente estável.

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 6.1** *Considere o sistema linear com atraso (6.6) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (6.11) que utiliza o observador de estado (6.10). Assuma que as hipóteses **(H1)** a **(H5)** sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável para:*

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.59)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{d}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{X}^T(t), x^T(t)]^T$  e  $z_0 = [\tilde{X}_0^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T$ ,  $\forall \theta \in [-\bar{d}, 0]$ .

### 6.3 Sistema Linear com Perturbações, Incertezas na Matriz de Estados e Atraso Arbitrário na Saída

Nesta seção será abordado o controle de sistemas com atraso arbitrário. Assim, considere que  $\tau = D$ , onde  $\underline{D}$  e  $\bar{D}$  são limites inferior e superior, respectivamente. O sistema (6.1) a ser controlado poderá ser reescrito pela equação de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + Bu(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - D), \end{aligned} \quad (6.60)$$

Nas próximas seções serão abordados estudos para o sistema (6.60) em que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada ou descasada com o termo  $Bu(t)$ .

### 6.3.1 Sistema Linear com Perturbações Descasadas

Nesta seção considere que a perturbação  $\nu(t)$  seja descasada com o termo  $Bu(t)$ .

#### 6.3.1.1 Observador de Estado e Lei de Controle

O sistema (6.60) representado pelas equações (6.4) e (6.5) assume a forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-D) \\ w(t-D) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação da planta (6.61) como:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t-D). \end{aligned} \quad (6.62)$$

O controle de sistemas com atraso arbitrário foi abordado por (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012), demonstrado na seção 3.3, e com controle por modo deslizante que aplica observadores conectados em cascata por (COUTINHO, 2012). A principal diferença do sistema original de referência pelo desenvolvido é possuir as incertezas paramétricas e ainda a perturbação exógena desconhecida. Dessa forma, para o observador de estados estimado, basta adicionar observadores em cascata a medida que o atraso  $D$  aumenta.

**Observação 6.2** *O observador de estados em cascata estimará um vetor de estado atrasado dado por  $\frac{D}{m}$  de forma que vetor  $\hat{X}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $X_j(t)$  e  $\hat{X}_m(t)$  é uma estimativa de  $X(t)$ .*

Assim, considere as seguintes notações para representar o estado e o sinal de controle:

$$X_j(t) = X\left(t - D + j\frac{D}{m}\right), \quad (6.63)$$

$$u_j(t) = u\left(t - D + j\frac{D}{m}\right), \quad (6.64)$$

e para o estado do observador:

$$\hat{X}_j(t) = \hat{X}\left(t - D + j\frac{D}{m}\right), \quad (6.65)$$

na qual  $j = 1, \dots, m$ . Então, o observador para estimação do estado é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_1(t) &= \bar{A}\hat{X}_1(t) + \bar{B}u_1(t) - \bar{L}\left[\bar{C}\hat{X}_1\left(t - \frac{D}{m}\right) - y(t)\right], \\ \hat{y}_1(t) &= \bar{C}\hat{X}_1(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{X}}_j(t) &= \bar{A}\hat{X}_j(t) + \bar{B}u_j(t) - \bar{L}\left[\bar{C}\hat{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) - \hat{y}_{j-1}(t)\right], \\ \hat{y}_j(t) &= \bar{C}\hat{X}_j(t), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{X}}_m(t) &= \bar{A}\hat{X}_m(t) + \bar{B}u_m(t) - \bar{L}\left[\bar{C}\hat{X}_m\left(t - \frac{D}{m}\right) - \hat{y}_{m-1}(t)\right], \\ \hat{y}_m(t) &= \bar{C}\hat{X}_m(t). \end{aligned} \quad (6.66)$$

O vetor  $\hat{X}_j(t)$  é uma estimativa do estado atrasado  $X_j(t)$  e  $\hat{X}(t) := \hat{X}_m(t)$  é uma estimativa de  $X(t)$ .

Baseado em (6.11), adota-se a lei de controle baseada no estado estimado:

$$u(t) = -\bar{K}\hat{X}_m(t). \quad (6.67)$$

### 6.3.1.2 Erros de Estimação

Conforme demonstrado em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012, Teorema 1) há uma quantidade suficiente de  $m$  observadores em cascata de tal modo que o estado do último observador em (6.66) converge exponencialmente para o estado do sistema (6.62). Dessa forma, a convergência do observador em cascata será provada passo a passo pelo método de indução matemática.

Assim, baseado em (6.12) considere  $\tilde{X}_1(t)$  como o primeiro erro de estimação em

cascata para o passo  $i = 1$ :

$$\tilde{X}_1(t) = X_1(t) - \hat{X}_1(t). \quad (6.68)$$

Portanto, é possível calcular  $\dot{\tilde{X}}_1(t)$  da diferença das equações (6.62) e (6.66):

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X_1(t) + Bu_1(t) - \bar{A}\hat{X}_1(t) - Bu_1(t) + \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - y \right], \quad (6.69)$$

na qual  $\dot{X}_1(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X_1(t) + Bu_1(t)$  é a representação do sistema (6.62) com sinais atrasados que, para propósitos de análise, foi representado com o índice  $i = 1$ . Assim, obtém-se:

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}\tilde{X}_1(t) + \bar{L}\bar{C} \left[ \hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - X(t - D) \right] + \Delta\bar{A}X_1(t). \quad (6.70)$$

Baseado em (6.67) e (6.68), a lei de controle do sistema para o passo  $i = 1$  é definida como:

$$u_1(t) = -K\hat{X}_1(t) = -K[X_1(t) - \tilde{X}_1(t)]. \quad (6.71)$$

Pela equação (6.63) observa-se que

$$X_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) = X(t - D), \quad (6.72)$$

o qual escolhido um número  $m$  de observadores de forma que o primeiro observador  $\hat{X}_1(t)$  possa convergir para  $X_1(t) = X \left( t - D + \frac{D}{m} \right)$ .

Dessa forma, baseado em (6.71) e (6.72), a equação (6.70) se torna:

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}\tilde{X}_1(t) + \bar{L}\bar{C} \left[ \hat{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) - X_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) \right] + \Delta\bar{A}X_1(t), \quad (6.73)$$

sendo reduzida à:

$$\dot{\tilde{X}}_1(t) = \bar{A}\tilde{X}_1(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_1 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \Delta\bar{A}X_1(t). \quad (6.74)$$

A equação (6.74) pode ser comparada à (6.14), referente à seção 6.2 para um atraso

$\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno. Assim, tem-se uma solução majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{X}_1(t)\| \leq \Pi_1 + \delta_1 \|X_1(t)\|_\infty, \quad (6.75)$$

na qual  $\Pi_1 \leq \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} \tilde{x}_{10}^*$ , onde  $\alpha_1 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$  e  $\delta_1 > 0$  denotam constantes escalares positivas para um  $\delta_1$  suficientemente pequeno.

Igualmente, de forma a provar o segundo passo da indução matemática, baseado em (6.12) considere  $\tilde{X}_2(t)$  como o segundo erro de estimação em cascata para o passo  $i = 2$ :

$$\tilde{X}_2(t) = X_2(t) - \hat{X}_2(t). \quad (6.76)$$

Portanto, o erro de estimação  $\dot{\tilde{X}}_2(t)$  pode ser obtido da diferença das equações (6.62) e (6.66):

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X_2(t) + Bu_2(t) - \bar{A}\hat{X}_2(t) - Bu_2(t) + \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_1 \right], \quad (6.77)$$

na qual  $\dot{X}_2(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X_2(t) + Bu_2(t)$  é a representação para propósitos de análise do sistema (6.62) com o índice  $i = 2$ . Assim, obtém-se

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) + \bar{L}\bar{C}\hat{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_1(t) + \Delta\bar{A}X_2(t). \quad (6.78)$$

Baseado em (6.67) e (6.76), a lei de controle do sistema para o passo  $i = 2$  é definida como:

$$u_2(t) = -K\hat{X}_2(t) = -K[X_2(t) - \tilde{X}_2(t)]. \quad (6.79)$$

Assim, pelas equações (6.76) e (6.79), é possível reescrever (6.78):

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}X_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_1(t) + \Delta\bar{A}X_2(t). \quad (6.80)$$

Baseado em (6.63) tem-se:

$$X_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) = X \left( t - \frac{D}{m} - D + \frac{2D}{m} \right) = X \left( t - D + \frac{D}{m} \right) = X_1(t). \quad (6.81)$$

Portanto, (6.80) pode ser reescrita como:

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}X_1(t) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_1(t) + \Delta\bar{A}X_2(t), \quad (6.82)$$

na qual, baseada em (6.68), torna-se

$$\dot{\tilde{X}}_2(t) = \bar{A}\tilde{X}_2(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_2 \left( t - \frac{D}{m} \right) + \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_1(t) + \Delta\bar{A}X_2(t). \quad (6.83)$$

Dessa forma, uma vez que o sistema  $\tilde{X}_1(t)$  decai exponencialmente conforme definido em (6.75), uma solução para o sistema (6.83) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{X}_2(t)\| \leq \Pi_2 + \bar{\delta}_1 \|X_1(t)\|_\infty + \delta_2 \|X_2(t)\|_\infty, \quad (6.84)$$

na qual  $\Pi_2 \leq \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} \tilde{x}_{20}^*$ , para  $\alpha_2 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  e  $\bar{\delta}_1, \delta_2 > 0$  denotam constantes escalares positivas para  $\bar{\delta}_1$  e  $\delta_2$  suficientemente pequenos, de forma que:

$$\Pi_2 = \Pi_a * \Pi_1, \quad (6.85)$$

na qual  $|\Pi_a| \leq \alpha_a e^{-\lambda_a t} \tilde{x}_{a0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{X}_1(t)$  tendendo para a origem, onde  $\alpha_a > 0$  e  $\lambda_a > 0$  denotam constantes escalares positivas.

Assim, de forma a validar a recorrência da convergência do erro, baseado em (6.12) considere  $\tilde{X}_j(t)$  como o erro de estimação em cascata para o passo  $i = j$ :

$$\tilde{X}_j(t) = X_j(t) - \hat{X}_j(t). \quad (6.86)$$

Assim, calcula-se o erro de estimação  $\dot{\tilde{X}}_j(t)$  da diferença das equações (6.62) e (6.66):

$$\dot{\tilde{X}}_j(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X_j(t) + Bu_j(t) - \bar{A}\hat{X}_j(t) - Bu_j(t) + \bar{L} \left[ \bar{C}\hat{X}_j \left( t - \frac{D}{m} \right) - \hat{y}_{j-1} \right], \quad (6.87)$$

na qual  $\dot{X}_j(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X_j(t) + Bu_j(t)$  é a representação para propósitos de análise do

sistema (6.62) com o índice  $i = j$ . Dessa forma, obtém-se:

$$\dot{\hat{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) + \bar{L}\bar{C}\hat{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_{j-1}(t) + \Delta\bar{A}X_j(t). \quad (6.88)$$

Baseado em (6.67) e (6.86), a lei de controle do sistema para o passo  $i = j$  é definida como:

$$u_j(t) = -K\hat{X}_j(t) = -K[X_j(t) - \tilde{X}_j(t)]. \quad (6.89)$$

Assim, pelas equações (6.86) e (6.89) é possível reescrever (6.88):

$$\dot{\hat{X}}_{j-1}(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + \bar{L}\bar{C}X_j\left(t - \frac{D}{m}\right) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_{j-1}(t) + \Delta\bar{A}X_j(t). \quad (6.90)$$

Baseado em (6.63) tem-se:

$$X_j\left(t - \frac{D}{m}\right) = X\left(t - \frac{D}{m} - D + \frac{jD}{m}\right) = X\left(t - D + (j-1)\frac{D}{m}\right) = X_{j-1}(t). \quad (6.91)$$

Portanto, (6.90) pode ser reescrita como:

$$\dot{\hat{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + \bar{L}\bar{C}X_{j-1}(t) - \bar{L}\bar{C}\hat{X}_{j-1}(t) + \Delta\bar{A}X_j(t). \quad (6.92)$$

O erro de estimação  $\tilde{X}_{j-1}(t)$  para o passo  $i = j - 1$  é definido por:

$$\tilde{X}_{j-1}(t) = X_{j-1}(t) - \hat{X}_{j-1}(t). \quad (6.93)$$

Assim, conforme (6.93), tem-se para (6.92):

$$\dot{\hat{X}}_j(t) = \bar{A}\tilde{X}_j(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_j\left(t - \frac{D}{m}\right) + \bar{L}\bar{C}\tilde{X}_{j-1}(t) + \Delta\bar{A}X_j(t). \quad (6.94)$$

Dessa forma, uma vez que por indução o sistema  $\tilde{X}_{j-1}(t)$  decai exponencialmente para a origem como  $\|\tilde{X}_{j-1}(t)\| \leq \Pi_{j-1} + \bar{\delta}_{j-2}\|X_{j-2}(t)\|_\infty + \delta_{j-1}\|X_{j-1}(t)\|_\infty$ , uma solução para o sistema (6.94) pode ser majorada pela desigualdade:

$$\|\tilde{X}_j(t)\| \leq \Pi_j + \bar{\delta}_{j-1}\|X_{j-1}(t)\|_\infty + \delta_j\|X_j(t)\|_\infty, \quad (6.95)$$

na qual  $\Pi_j \leq \alpha_j e^{-\lambda_j t} \tilde{x}_{j0}^*$ , para  $\alpha_j > 0$ ,  $\lambda_j > 0$  e  $\bar{\delta}_{j-1}, \delta_j > 0$  denotam constantes escalares positivas para  $\bar{\delta}_{j-1}$  e  $\delta_j$  suficientemente pequenos, de forma que:

$$\Pi_j = \Pi_b * \Pi_{j-1}, \quad (6.96)$$

na qual  $\Pi_b \leq \alpha_b e^{-\lambda_b t} \tilde{x}_{b0}^*$  é a resposta impulsiva, considerando a entrada  $\tilde{X}_{j-1}(t)$  tendendo para a origem, onde  $\alpha_b > 0$  e  $\lambda_b > 0$  denotam constantes escalares positivas.

Dessa forma, por indução matemática, demonstra-se que o erro de estimação de  $\tilde{X}(t)$  da planta tenderá exponencialmente a zero para ( $j = m$ ) observadores.

Assume-se que a quantidade de  $m$  observadores em cascata faça com que  $\frac{D}{m}$  seja suficientemente pequeno para que a influência do atraso seja pequena. Portanto, é possível que seja satisfeita a condição **(H5)**, de forma que a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  seja Hurwitz, forma que o sistema seja exponencialmente estável.

Dessa forma, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação do erro de estimação total da planta, definido por:

$$\|\tilde{X}(t)\| \leq \Pi(t) + c_b \delta_a \|X(t)\|_\infty \quad (6.97)$$

na qual  $\Pi(t) = c_a e^{-\lambda_a t} \tilde{X}_0^*$ , onde  $\tilde{X}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{X}_0(\theta)\|$  para  $\delta_a = \max\{\delta_i, \bar{\delta}_i\}$ .

### 6.3.1.3 Análise de Estabilidade do Sistema de Controle em Malha Fechada

Baseado em (6.11), considere a equação do estado referente ao sistema (6.7) representada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [-\bar{K} \hat{X}(t)], \quad (6.98) \\ y(t) &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t-D) \\ w(t-D) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sendo rescrita como:



$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) - \bar{B}\bar{K}\hat{X}(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t - D).\end{aligned}\tag{6.99}$$

Baseado em (6.12) , reconsidere (6.99):

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) - \bar{B}\bar{K}[X(t) - \tilde{X}(t)],\tag{6.100}$$

no qual, pode ser reescrita como:

$$\dot{X}(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A} - \bar{B}\bar{K})X(t) + \bar{B}\bar{K}\tilde{X}(t).\tag{6.101}$$

A equação (6.101) pode ser comparada à equação (6.30) para um atraso  $\frac{D}{m}$  suficientemente pequeno. Assim, considere a equação do estado de (6.100):

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) - BK\hat{x}(t) - BK_w\hat{w}(t) + C_w w(t).\tag{6.102}$$

Considere (6.32) e (6.33). Assim a equação (6.102) se torna:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) - BK[x(t) - \tilde{x}(t)] - BK_w[w(t) - \tilde{w}(t)] + C_w w(t),\tag{6.103}$$

sendo reescrita como:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK)x(t) + (C_w - BK_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + K_w\tilde{w}(t)].\tag{6.104}$$

Dessa forma, a equação (6.104) pode ser comparada à (6.35). Dessa forma, é possível escrever um majorante exponencial para a solução da equação:

$$\|x(t)\| \leq c_e e^{-\lambda_e t} x_0^* + c_d \|w(t)\|_\infty + c_e \|\tilde{X}(t)\|_\infty,\tag{6.105}$$

na qual  $x_0^* := \sup_{\theta \in [-D, 0]} \|x_0(\theta)\|$ .

**Observação 6.3** *Pode-se dizer que para todo atraso constante  $D$  existe um número de observadores em cascata que satisfaça a relação  $j \leq \frac{D}{m}$  de forma que tal que todos os erros de estimação convergem exponencialmente para zero.*

*A partir das desigualdades (6.97) e (6.105), aplicando-se o teorema de pequenos ganhos, os estados os sistemas  $\dot{X}(t)$  em cascata e (6.104), terão um decaimento exponencial para a origem.*

*Assim,  $x(t)$  representado pela equação (6.60) será globalmente exponencialmente estável, onde:*

$$\delta_a < \frac{1}{c_b c_e}. \quad (6.106)$$

*Pela equação (6.106) comprova-se a hipóteses **(H3)** onde  $\|\Delta A\| \leq \delta_a$  deverá ser suficientemente pequeno para que todos os erros de estimação convergem exponencialmente a zero.*

*No entanto, a equação (6.105) demonstra que há no sistema um resíduo da perturbação, onde a constante  $c_d$  deverá também ser pequeno o suficiente para que os efeitos da perturbação sejam bastante atenuados*

### 6.3.2 Sistema Linear com Perturbações Casadas

Supondo que a perturbação  $\nu(t)$  seja casada com o termo  $Bu(t)$ . Assim, é possível reescrever a equação de  $\dot{x}(t)$  de  $\dot{x}(t)$  (6.1) como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B[u(t) + \nu(t)], \\ y(t) &= Cx(t - D). \end{aligned} \quad (6.107)$$

Dessa forma, o sistema (6.107) pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - D) \\ w(t - D) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Supõe-se que  $C_w$  da equação (6.61) possa ser substituída por  $C_w = B\bar{C}_w$ . Assim, pode-se reescrever a equação da planta (6.108) como:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= (A^* + \Delta\bar{A})X(t) + \bar{B}u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t - D).\end{aligned}\tag{6.109}$$

de forma que  $A^* = \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}$ .

Considere a equação do estado do sistema (6.107) com as devidas substituições por (6.4) e (6.67). Assim, tem-se:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + B[-K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t) + \bar{C}_w w(t)].\tag{6.110}$$

Das equações (6.32) e (6.33):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) - BKx(t) + BK\tilde{x}(t) - BK_w w(t) + BK_w\tilde{w}(t) \\ &\quad + B\bar{C}_w w(t).\end{aligned}\tag{6.111}$$

Dessa forma a equação (6.110) se torna:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A - BK)x(t) + B(-K_w + \bar{C}_w)w(t) + B[K\tilde{x}(t) + K_w\tilde{w}(t)],\tag{6.112}$$

sendo a mesma equação de (6.56). Dessa forma, é possível prever a solução para a equação (6.112), uma vez que  $K_w = \bar{C}_w$ , conforme (6.57):

$$\|x(t)\| \leq c_f e^{-\lambda_f t} x_0^* + c_g e^{-\lambda_g t} \|\tilde{X}(t)\|_\infty,\tag{6.113}$$

na qual  $\tilde{x}_0^* := \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|\tilde{x}_0(\theta)\|$ .

Dessa forma o sistema será ISS com relação à  $\tilde{w}(t)$  e  $\tilde{x}(t)$ , sendo globalmente exponencialmente estável.

**Observação 6.4** *Dessa forma, pode-se dizer que para todo atraso constante  $D$  existe um*

número  $m$  de observadores em cascata que satisfaça a relação:

$$m \geq \frac{D}{d_1}, \quad (6.114)$$

na qual  $d_1$  é o máximo atraso admitido para um único observador, de forma que tal que todos os erros de estimação convergem exponencialmente a zero, mesmo com incerteza paramétrica em  $A$  e perturbação exógena será globalmente exponencialmente estável.

Finalmente, pode-se enunciar o seguinte Teorema:

**Teorema 6.2** *Considere o sistema linear (6.60) e a lei de controle por realimentação de estado estimado (6.67) que utiliza o observador de estado (6.66). Assuma que as hipóteses (H1) a (H5) sejam satisfeitas. Assim, o erro de saída converge exponencialmente a zero e o sistema em malha fechada será globalmente exponencialmente estável tal que:*

$$\|z(t)\| \leq c_z e^{-\lambda_z t} z_0^*, \quad (6.115)$$

na qual  $z_0^* = \sup_{\theta \in [-\bar{D}, 0]} \|z_0(\theta)\|$ ,  $z(t) = [\tilde{X}_1^T(t), \tilde{X}_2^T(t) \dots \tilde{X}_m^T(t), x^T(t)]^T$  e

$$z_0 = [\tilde{X}_1^T(\theta), \tilde{X}_2^T(\theta) \dots \tilde{X}_m^T(\theta), x_0^T(\theta)]^T, \quad \forall \theta \in [-\bar{D}, 0].$$

#### 6.4 Exemplo Numérico

Considere o seguinte sistema linear baseado na equação (6.7) que satisfaz as hipóteses (H1) a (H5) com perturbações casadas:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & B\bar{C}_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-d) \\ w(t-d) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Conforme definido em (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997), considere que a perturbação casada seja dada por uma senóide  $A_w = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\bar{C}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Assim tem-se

para a planta que  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [0 \ 4]^T$ ,  $C = [1 \ 0]$ , a incerteza na planta

$$\Delta\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,01 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Dessa forma, deduz-se } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, de forma a comprovar a estabilidade do sistema (6.116), considere as condições abaixo:

- Conforme a hipótese **(H5)**:

- Escolhe-se  $L = [8 \ 10 \ 13 \ 12]^T$  de forma que a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  deve ser Hurwitz.

Dessa forma a matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  será:

$$\bar{A} - \bar{L}\bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.117)$$

cujos autovalores são -1 rad/s , -2 rad/s , -3 rad/s e -4 rad/s ou seja, a matriz é Hurwitz.

- A matriz  $(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})$  deve obedecer a condição de existência  $\|e^{(\bar{A} - \bar{L}\bar{C})t}\| \leq k e^{-\eta t}$  conforme a desigualdade (6.15).

Dessa forma, considere os parâmetros  $k = 3,02$  e  $\eta = 0,58$  obtidos pelo *filtro de aproximação de primeira ordem (first order approximation filter - FOAF)*, conforme critério definido em (CUNHA, 2004) de forma a minimizar a norma exponencial. Assim, tem-se:

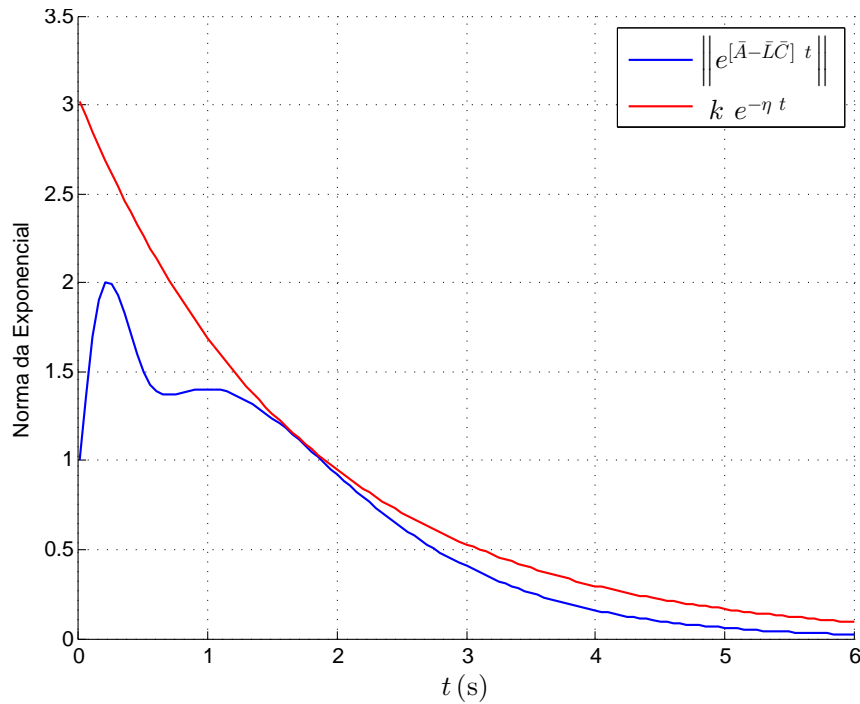


Figura 43 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade  $\|e^{(\bar{A}-\bar{L}\bar{C}) t}\| \leq k e^{-\eta t}$ .

Pela Figura 43 é possível perceber que a curva em azul, referente a  $\|e^{(A-LC)t}\|$  é inferior à curva em vermelho, referente à  $k e^{-\eta t}$ , satisfazendo a condição.

- A condição de existência  $\frac{k}{\eta} d (\|\bar{L}\bar{C}\bar{A}\| + \|(\bar{L}\bar{C})^2\|) < 1$  deve ser obedecida, conforme a desigualdade (6.16).

Considere os mesmos  $k = 3,02$  e  $\eta = 0,58$  para um atraso máximo definido  $d = 0,0009$  s para que a condição (6.16) seja atendida. Assim, o sistema retornou um valor máximo permitido de 0,9870.

- Escolhe-se o ganho do controlador como  $\bar{K} = [K K_w] = [1,505 \ 0,2550 \ 1 \ 0]$ . Este foi definido de tal forma que os controladores da matriz  $(A + \Delta A - BK)$  sejam  $-1 \text{ rad/s}$  e  $-2 \text{ rad/s}$ .
- Condição de existência para  $x(t)$  :
  - A matriz  $(A + \Delta A - BK)$  deve obedecer a condição de existência conforme a desigualdade  $\|e^{(A+\Delta A-BK) t}\| \leq k_2 e^{-\eta_2 t}$ .

Dessa forma, considere os pontos otimizados pelo *filtro de aproximação de primeira ordem* (*first order approximation filter - FOAF*), conforme critério

definido em (CUNHA, 2004)  $k_2 = 7$  e  $\eta_2 = 1,5$ .

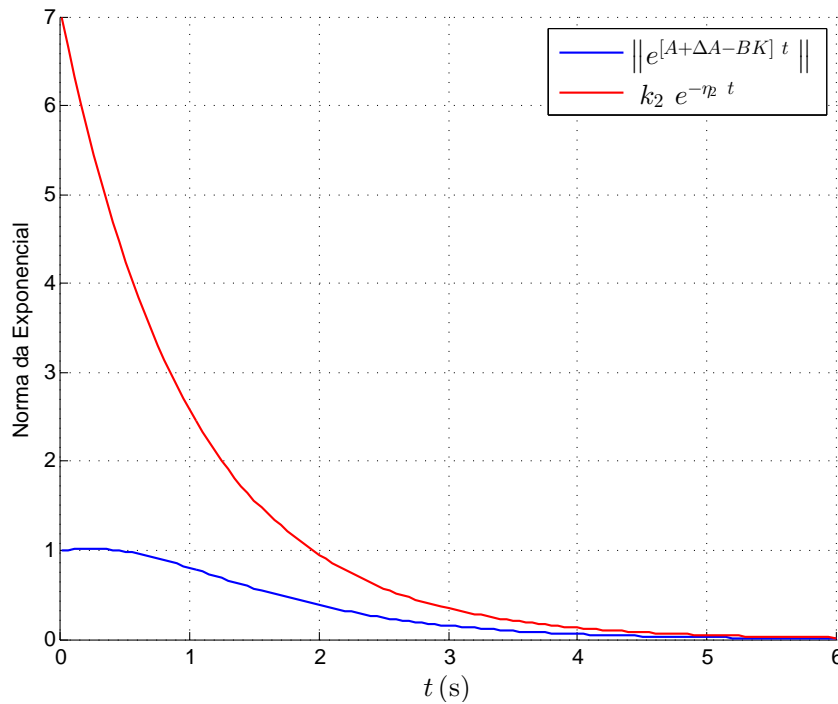


Figura 44 - Filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) que satisfaz a desigualdade  $\|e^{(A+\Delta A-BK) t}\| \leq k_2 e^{-\eta_2 t}$ .

- Dessa forma, conforme a hipótese **(H3)**:
  - Pelos valores de  $k$  e  $\eta$  da Figura 43 e de  $k_2$  e  $\eta_2$  da Figura 44 é possível determinar o valor admissível para  $\delta_a$ , onde:

$$\delta_a < \frac{1}{2 \frac{k}{\eta} \frac{k_2}{\eta_2}}. \quad (6.118)$$

na qual  $\delta_a = 0,0274$ .

- A norma induzida para a incerteza paramétrica existente no sistema devem ser tal que  $\|\Delta A\| \leq \delta_a$
- Assim, pelos valores determinados verifica-se que  $\|\Delta A\| = 0,02 \leq \delta_a$ .

- Nas simulações, as condições iniciais são:
  - Sistema e observador, para atraso pequeno  $d$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-d, 0].$$

– Sistema e observadores em cascata, para atraso arbitrário  $D$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall t \in [-D, 0].$$

Portanto, atendidas as condições definidas serão apresentadas simulações do sistema proposto em (6.116) de forma a ilustrar a eficácia dos controladores desenvolvidos.

A Figura 45 apresenta os sinais  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  comparados aos sinais  $\hat{x}_1(t)$  e  $\hat{x}_2(t)$  estimados pelo observador.

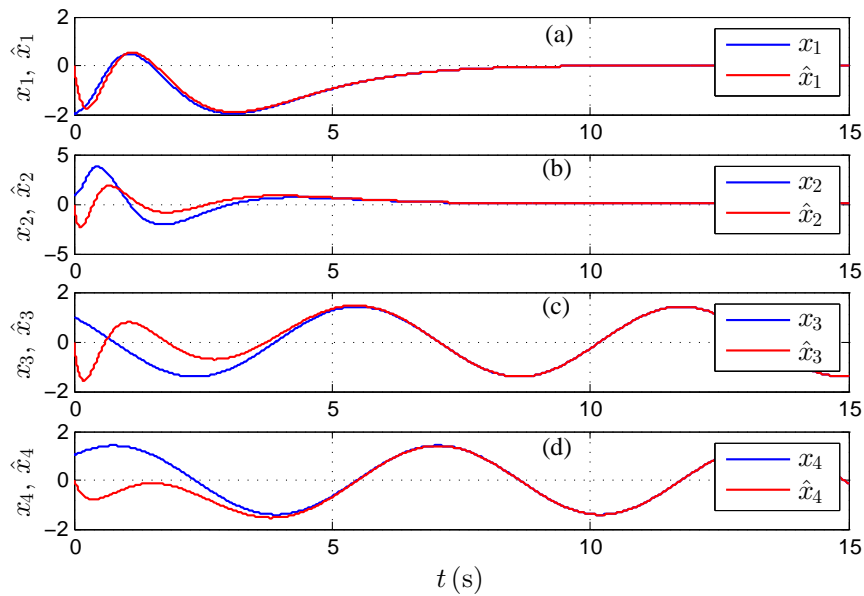


Figura 45 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $d = 0,0009$  s.

Na Figura 46 pode-se observar a saída  $y(t)$  medida e a saída  $\hat{y}(t)$  estimada por um único observador, onde é possível observar a presença do atraso  $d = 0,0009$  s no sistema.



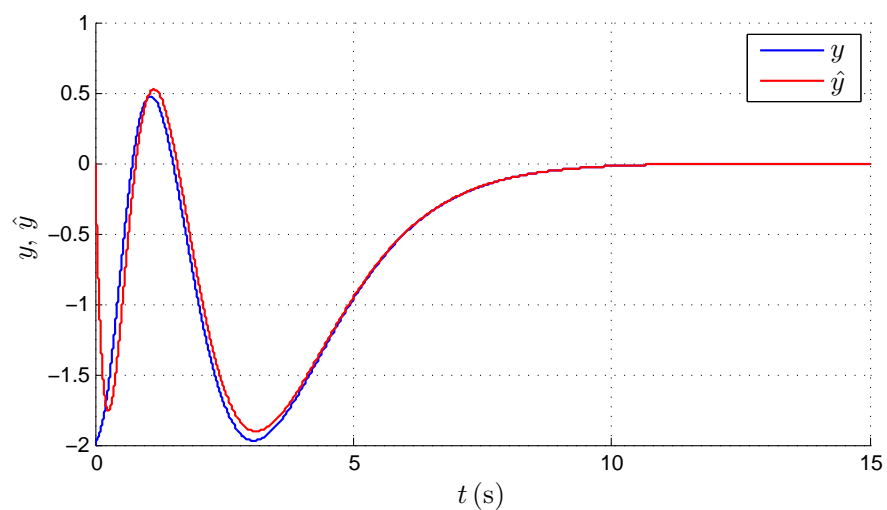


Figura 46 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $d = 0,0009$  s.

O sinal de controle  $u(t)$  mostrado na Figura 47 é gerado pela lei de controle (6.11). As oscilações senoidais no sinal de controle são resultantes da perturbação estimada e cancelam a perturbação casada. Assim, os efeitos da perturbação são eliminados no estado e na saída da planta, conforme se observa nas Figura 45(.a), Figura 45(.b) e Figura 46.

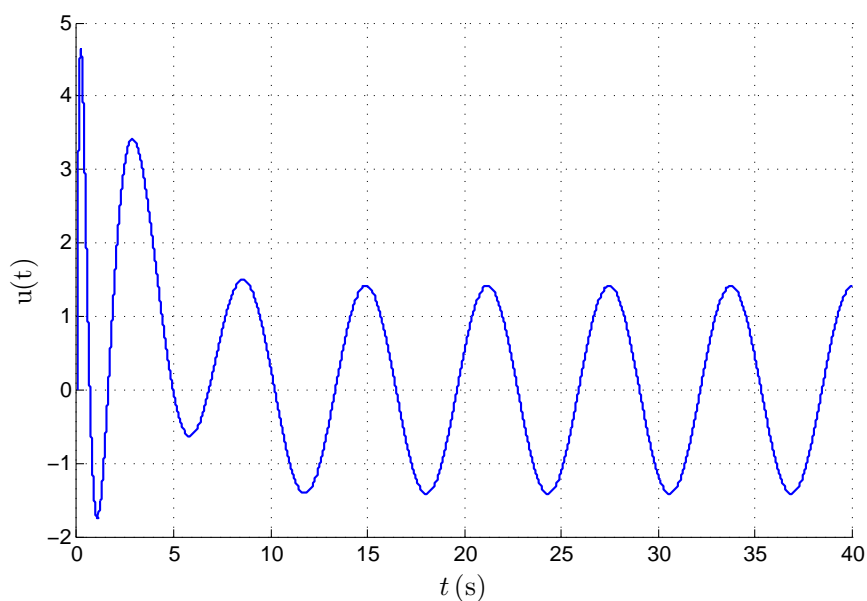


Figura 47 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $d = 0,0009$  s.

Conforme descrito nas definições, o atraso máximo permitido para o sistema apresentado é de  $d = 0,0009$  s. Uma vez que a matriz de estados  $A$  da planta é diferente da matriz de estados  $A$  do observador, o diagrama de Nyquist da função de transferência  $G(s)$  usado no capítulo 3 perde o sentido. Assim, de forma a dar continuidade ao estudo, considere o atraso de  $D = 0,0018$  s onde serão utilizados dois observadores conectados em cascata ( $m=2$ ). Dessa forma, a Figura 48 apresenta os sinais  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  e  $x_4(t)$ , enquanto a Figura 49 apresenta a saída  $y$ , comparando seus valores medidos e observados, utilizando dois observadores para o atraso para  $D = 0,0018$  s.

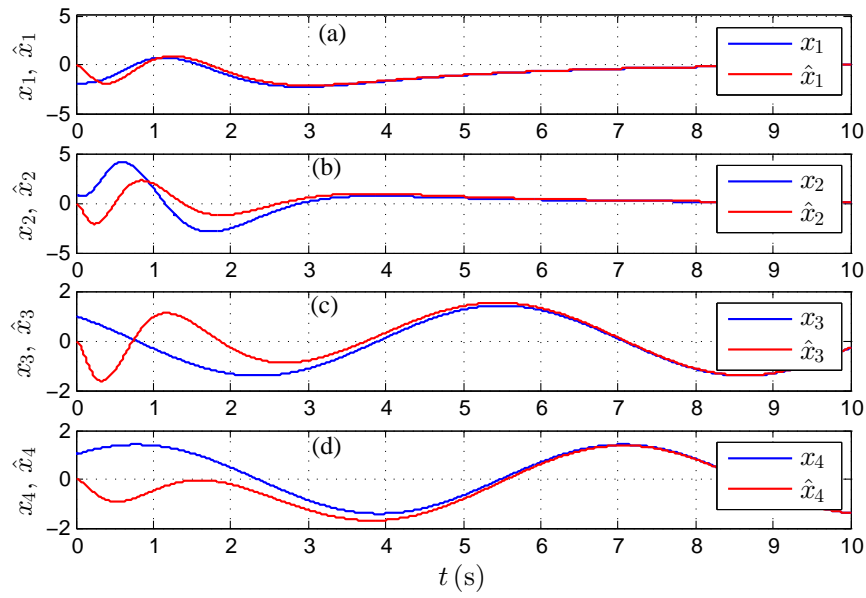


Figura 48 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,0018$  s.

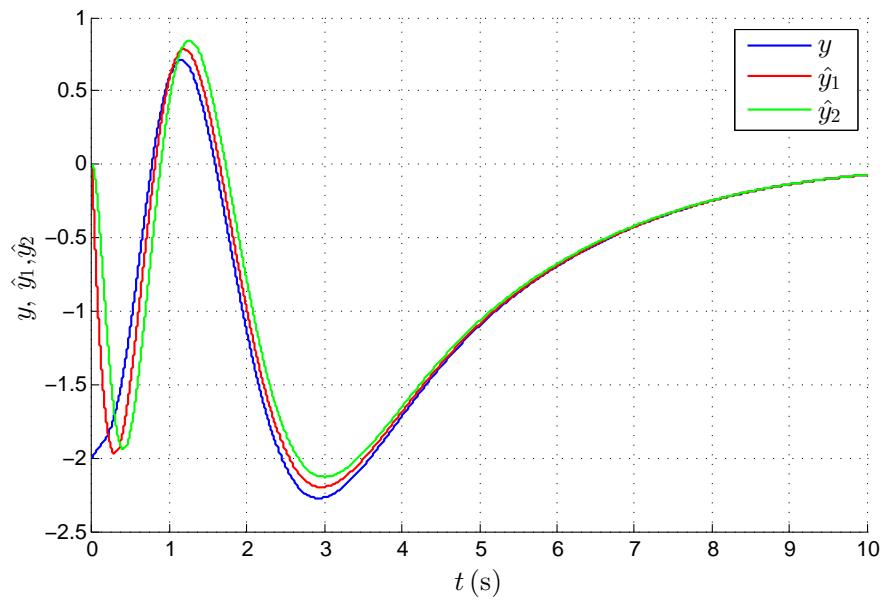


Figura 49 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,0018$  s.

A Figura 50 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,0018$  s.

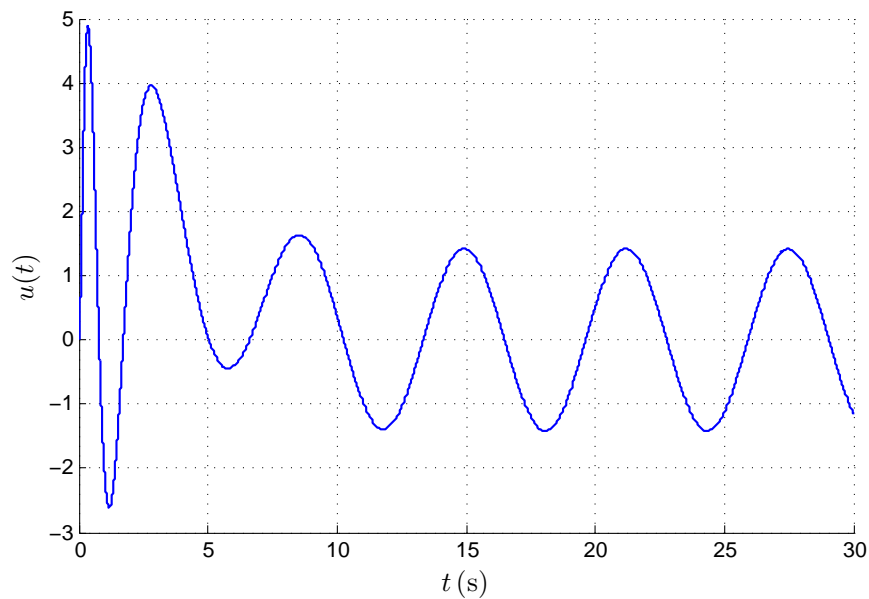


Figura 50 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,0018$  s.

É importante destacar que a estabilidade e o desempenho do controlador são robustos em relação ao atraso maior. Assim, esta quantidade de observadores para os mesmos parâmetros escolhidos permite a convergência para zero do erro de estimação e a saída do sistema. Dessa forma, ampliando-se o atraso para  $D = 0,28$  s é possível observar que o sistema se mantém estável com apenas dois observadores, ao contrário do que a estimativa pela desigualdade (6.16) indicaria diz que seriam necessários pelo menos 312 observadores em cascata ( $m=312$ ).

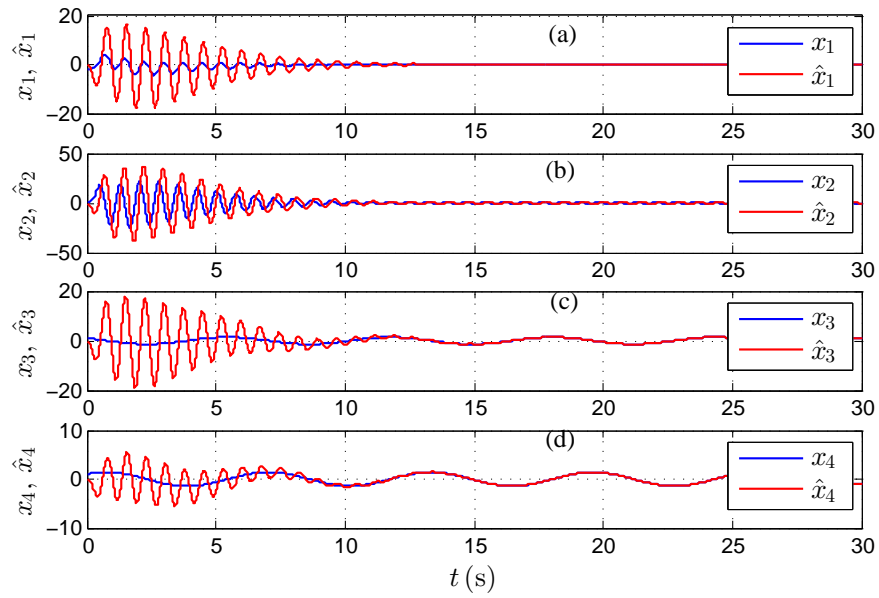


Figura 51 - Estado  $x(t)$  e sua estimativa  $\hat{x}(t)$  atrasados com  $D = 0,28$  s.

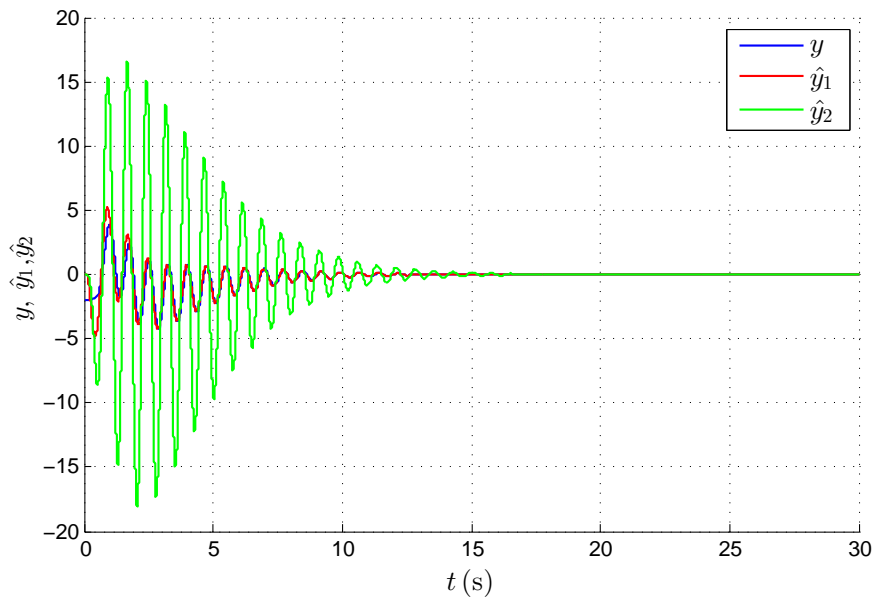


Figura 52 - Sinal de saída  $y(t)$  e sua estimativa  $\hat{y}(t)$  atrasada com  $D = 0,28$  s.

A Figura 53 apresenta o sinal de controle para o atraso para  $D = 0,28$  s.

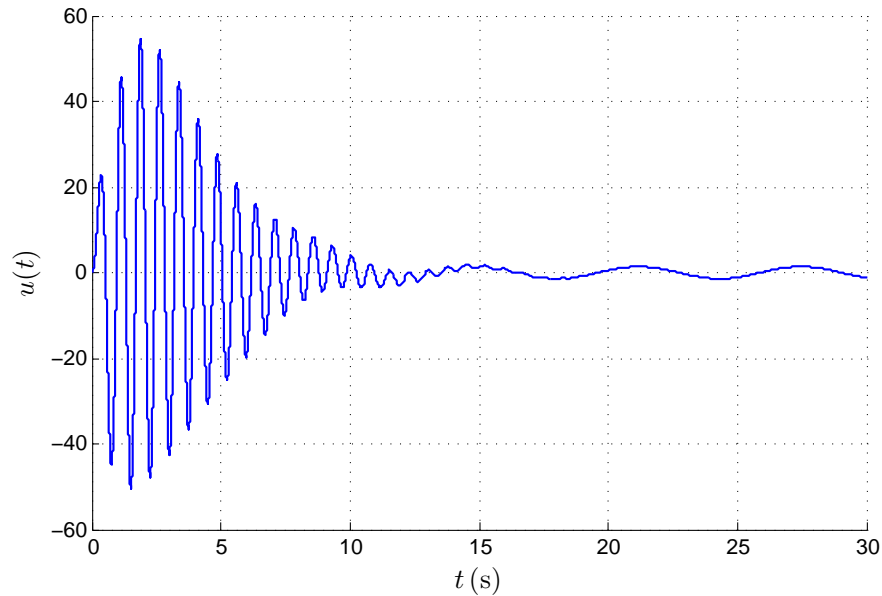


Figura 53 - Sinal de controle  $u(t)$  com  $D = 0,28$  s.

Isto indica que os resultados de (NICULESCU et al., 1998) podem ser bastante conservadores, uma vez que apenas dois observadores em cascata foram necessários para estabilizar o sistema, mesmo na presença de um atraso na saída  $D = 0,28$  s. No entanto, ampliando-se o atraso para valores acima de  $D = 0,28$  s, observou-se por meio de simulações que o estado do sistema de controle se torna instável.

### 6.5 Sistema Linear com Perturbações, Incertezas nas Matrizes de Estado e de Entrada e Atraso Arbitrário na Saída

Considere a seguinte classe de sistemas lineares contínuos, variantes no tempo, observável, com a saída atrasada, descrita pela equação de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + \nu(t), \\ y(t) &= Cx(t - \tau),\end{aligned}\tag{6.119}$$

na qual a saída atrasada  $\tau$  poderá ser  $d$  quando o atraso for pequeno ou  $D$  quando o atraso for arbitrário. A matriz  $\Delta A$  denota incertezas paramétricas na matriz de estado  $A$ ,  $\Delta B$  denota incertezas paramétricas na matriz de entrada  $B$  e  $\nu(t)$  é a perturbação

exógena.

Considere que  $\|\Delta A\| \leq \delta_a$  e  $\|\Delta B\| \leq \delta_b$  para valores pequenos de  $\delta_a > 0$  e  $\delta_b > 0$ .

Assim, o sistema (6.119) assume a forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B \\ 0 \end{bmatrix} \right) u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ w(t-\tau) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a equação da planta (6.120) como:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) + (\bar{B} + \Delta\bar{B})u(t), \\ y(t) &= \bar{C}X(t-\tau). \end{aligned} \quad (6.121)$$

Considere a equação matricial para o observador de estados, para as mesmas matrizes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  e  $\bar{C}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} [X(t-\tau) - \hat{X}(t-\tau)], \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t-\tau) \\ \hat{w}(t-\tau) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.122)$$

sendo  $\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix}$ , onde  $\bar{L}_1 \in \mathbb{R}^n$  e  $\bar{L}_2 \in \mathbb{R}$  e  $\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ . Dessa forma, a equação (6.122) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= \bar{A}\hat{X}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{L}\bar{C}[X(t-\tau) - \hat{X}(t-\tau)], \\ \hat{y}(t) &= \bar{C}\hat{X}(t-\tau). \end{aligned} \quad (6.123)$$

Considere a lei de controle, como realimentação do estado estimado conforme descrito em (6.7), onde  $u(t) = -\bar{K}\hat{X}(t) = -K\hat{x}(t) - K_w\hat{w}(t)$ . Dessa forma é possível

calcular o erro de estimação do sistema baseado em  $\tilde{X}(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}(t) = & (\bar{A} + \Delta\bar{A})X(t) + (\bar{B} + \Delta\bar{B})u(t) - \bar{A}\hat{X}(t) - \bar{B}u(t) \\ & - \bar{L}\bar{C}[X(t - \tau) - \hat{X}(t - \tau)] \end{aligned} \quad (6.124)$$

Assim, a equação (6.124) pode ser reduzida à:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \bar{A}\tilde{X}(t) - \bar{L}\bar{C}\tilde{X}(t - \tau) + \Delta\bar{A}X(t) + \Delta\bar{B}u(t). \quad (6.125)$$

na qual  $\Delta\bar{A}X(t) = \begin{bmatrix} \Delta Ax(t) \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\Delta\bar{B} = \begin{bmatrix} \Delta B \\ 0 \end{bmatrix}$ .

A equação (6.125) indica que o erro no estado  $\tilde{X}(t)$  depende de duas variáveis  $X(t)$  e  $u(t)$ . Uma vez que  $u(t) = -\bar{K}\hat{X}(t)$  conforme (6.11) e ao ser multiplicado por  $\Delta\bar{B}$  em (6.125) resulta um termo em  $\hat{X}(t)$ , o que dificulta a aplicação do teorema de pequenos ganhos.

Dessa forma, o problema foi formulado, mas não desenvolvido.



## CONCLUSÃO

Nesta Dissertação foram propostos esquemas de controle com realimentação de estado estimado por observadores de estado para sistemas lineares com atraso na saída. Dessa forma, para um atraso pequeno ou arbitrário, foram apresentados quatro diferentes sistemas de controle: sistema com atraso sem incertezas nem perturbações; sistema com atraso e incertezas paramétricas; sistema com atraso e perturbação exógena; sistema com atraso, incertezas paramétricas e perturbação exógena. As contribuições e as propostas de continuação podem ser resumidas da seguinte forma.

### Contribuições deste Trabalho

- A estratégia proposta baseia-se no controle com realimentação de estado estimado por observador de estado. O valor do atraso é definido conforme apresentado em (NICULESCU et al., 1998). No entanto, a teoria indicou ser conservadora, uma vez que por simulação o sistema demonstrou-se estável mesmo na presença de atrasos arbitrários, maiores que o calculado.
- Inclusão de incertezas paramétricas e perturbações exógenas para o atraso arbitrário, onde o estado é estimado por observadores em cascata, conforme desenvolvido em (AHMED-ALI; CHERRIER; LAMNABHI-LAGARRIGUE, 2012).
- Utilização da técnica de pequenos ganhos demonstrada em (ISIDORI, 1999) para tratar incertezas paramétricas nos sistemas.
- Desenvolvimento de controlador que rejeita as perturbações exógenas presentes no sistema, conforme (ÅSTRÖM; WITTENMARK, 1997), mesmo na presença de atraso pequeno e arbitrário na saída.
- A partir dos resultados de simulação verifica-se que o controlador proposto não só consegue preservar a estabilidade global como também mostra-se robusto a incertezas paramétricas e a perturbações exógenas de grande intensidade.

## Trabalhos Futuros

Alguns tópicos parecem interessantes para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa:

1. Analisar o sistema com atraso na saída, perturbação exógena e incertezas paramétricas na matriz dinâmica  $A$  e na matriz de distribuição de controle  $B$ . Um primeiro passo foi dado, conforme visto na Seção 6.5.
2. Para a abordagem do *atraso na saída*, estender o controle proposto para sistemas multivariáveis, não-lineares, incertos, com atraso desconhecido e variantes no tempo.
3. Desenvolver o controle a estrutura variável de sistemas incertos com perturbações e atraso.
4. Estudo que avaliasse a complexidade e a fragilidade dos controladores, de forma a investigar a influência em problemas reais de implementação, tais como, sistemas de controle em redes de comunicação e sistemas com atraso de transporte.

## REFERÊNCIAS

- AHMED-ALI, T.; CHERRIER, E.; LAMNABHI-LAGARRIGUE, F. Cascade high gain predictors for a class of nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 1, p. 224–229, January 2012.
- ÅSTRÖM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-Controlled System*. 3<sup>rd</sup>. ed. [S.l.]: Prentice–Hall, 1997.
- BEKIARIS-LIBERIS, N.; KRSTIC, M. Compensation of time-varying input and state delays for nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 134, p. 011009–1–011009–14, Jan 2012.
- CACACE, F.; GERMANI, A.; MANES, C. A chain observer for nonlinear systems with multiple time-varying measurement delays. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 52, n. 3, p. 1862–1885, 2014.
- CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. 3<sup>rd</sup>. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 1999.
- CHEN, I.; LIU, P.; LU, T. Robust stabilization for uncertain time-delay systems with delay-dependence. *International Conference on Innovative Computing*, 2006.
- CHEN, W.-H.; CHEN, M. Disturbance-observer-based robust control for time delay uncertain systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 8, n. 2, p. 445–453, 2010.
- COUTINHO, C. L. *Controle por modo deslizante para sistemas não-lineares com atraso*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica - UERJ, 2012.
- COUTINHO, C. L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Controle por modo deslizante para sistemas com atraso na saída. *CBA*, p. 2447–2452, Sept 2012.
- COUTINHO, C. L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Output-feedback sliding-mode control of multivariable systems with uncertain time-varying state delays and unmatched non-linearities. *Control Theory Applications, IET*, v. 7, n. 12, p. 1616–1623, Aug 2013.
- COUTINHO, C. L.; OLIVEIRA, T. R.; CUNHA, J. P. V. S. Output-feedback sliding-mode control via cascade observers for global stabilisation of a class of nonlinear systems with output time delay. *International Journal of Control*, v. 87, n. 11, p. 4619–4624, May 2014.
- CUNHA, J. P. V. S. *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UFRJ, Brasil., 2004.
- DESOER, C. A.; VIDYASAGAR, M. *Feedback Systems input-output properties*. [S.l.]: SIAM, 2009.

- DRAKUNOV, S. V. et al. The block control principle I. *Automation and Remote Control*, v. 51, n. 5, p. 601–609, 1990.
- DRAKUNOV, S. V. et al. The block control principle II. v. 51, n. 6, p. 737–746, 1990.
- DÓREA, C. E. T.; MILANI, B. E. A. Rejeição de perturbações por realimentação estática de saída em sistemas lineares. *Sba Controle & Automação*, v. 14, n. 1, Mach 2003.
- FRIDMAN, E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. *Systems & Control Letters*, v. 43, n. 4, p. 309–319, 2001.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Parameter dependent stability and stabilization of uncertain time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 5, p. 861–866, May 2003.
- FRIDMAN, E.; SHAKED, U.; LIU, K. New conditions for delay-derivative-dependent stability. *Automatica*, v. 45, n. 11, p. 2723–2727, 2009.
- FRIDMAN, L.; ACOSTA, P.; POLYAKOV, A. Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems. *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, p. 239–244, Dec 2001.
- GHIGGI, I. M. F. *Controle de Sistemas com Atraso no Tempo na Presença de Atuadores Saturantes*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UFRGS, 2008.
- GU, K.; KHARITONOV, V. L.; CHEN, J. *Stability of Time-Delay Systems*. [S.l.]: Birkhäuser, 2003.
- HA, Q. P. et al. Partial state estimation for linear systems with output and input time delays. *ISA Transactions*, v. 53, n. 2, p. 327–334, March 2014.
- HOU, M.; PATTON, R.; ZITEK, P. An observer design for linear time-delay systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 1, p. 121–125, Jan 2002.
- HUI, J.; KONG, X.; ZHANG, H. Delay-dependent non-fragile  $H_\infty$  control for linear systems with interval time-varying delay. *International Journal of Automation and Computing*, v. 12, p. 109–116, Feb 2015.
- HUI, J. et al. On improved delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay. *International Journal of Automation and Computing*, v. 12, p. 102–108, Feb 2015.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. *Robust Adaptive Control*. [S.l.]: Los Angeles: Prentice-Hall, 1996.
- ISIDORI, A. *Nonlinear control systems II*. [S.l.]: London, Springer, 1999.
- JEONG, C.; PARK, P.; HIM, S. H. Improved approach to robust stability and  $H_\infty$  performance analysis for systems with an interval time-varying delay. *Applied Mathematics and Computation*, v. 218, n. 21, p. 10533–10541, 2012.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. 3rd. ed. [S.l.]: New Jersey: Prentice Hall, 2002.

- KOLMANOVSKII, V. B.; MYSHKIS, A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.
- KOLMANOVSKII, V. B.; NICULESCU, S. I.; GU, K. Delay effects on stability: a survey. *IEEE Conf. on Decision and Control*, v. 2, p. 1993–1998, 1999.
- LÉCHAPPÉ, V. et al. New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances. *Automatica, Elsevier*, v. 52, n. 1, p. 179–184, 2015.
- LEE, S. M.; LEE, B. H. *A Discrete-Time Sliding Mode Controller an Observer with Computation Time Delay*. [S.l.]: Control Engineering Practice 7, 1999.
- LEVINE, W. S. *The Control Handbook: Control System Applications*. 2rd. ed. [S.l.]: CRC Press, 1996.
- LIU, G.; ZINOBER, A.; SHTESSEL, Y. B. Second-order sm approach to siso time-delay system output tracking. *IEEE Trans. Ind. Electronics*, v. 56, n. 9, p. 3638–3645, 2009.
- LOUKIANOV, A. G. et al. Integral sliding mode control for system with time delay. *International Workshop on Variable Structure Systems*, p. 256–261, Jun 2006.
- MACDONALD, N. *Biological delay systems: linear stability theory*. [S.l.]: New York, USA, 1989.
- MAJHI, S.; ATHERTON, D. A new smith predictor and controller for unstable and integrating processes with time delay. *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, v. 2, p. 1341–1345, Dec 1998.
- MICHIELS, W.; NICULESCU, S. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, Paris, 2007.
- NICULESCU, S. I. Delay effects on stability: A robust control approach. *London: Springer*, v. 269, 2001.
- NICULESCU, S. I. et al. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 43, n. 5, p. 743–748, May 1998.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011.
- POLYAKOV, A. Minimization of disturbances effects in time delay predictor-based sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 4, p. 1380–1396, 2012.
- POLYAKOV, A.; POZNYAK, A. Invariant ellipsoid method for minimization of unmatched disturbances effects in sliding mode control. *Automatica*, v. 47, n. 7, p. 1450–1454, 2011.
- QIANG, L.; XIAOHONG, J.; YANG, J. Robust dynamic output feedback stabilization for a class of nonlinear systems with state and input delay. *Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese*, p. 425–429, July 2008.

- REES, D.; ZHONG, Q.-C. Control of uncertain lti systems based on an uncertainty and disturbance estimator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 126, n. 1, p. 905–610, Dec 2004.
- RIBEIRO, J. M. S. *Controle Discreto com Modos Deslizantes em Sistemas Incertos com Atraso no Sinal de Controle*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - UNESP, 2006.
- RIBEIRO, J. M. S. et al. Discrete-time sliding mode control of input-delay systems applied on a power generation system. *IEEE ISIE 2006*, p. 1794–1798, 2006.
- RICHARD, J. P. Time delay system: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, v. 39, p. 1667–1694, April 2003.
- RICHARD, J. P. et al. *Nonlinear Delay Systems: Tools for a Quantitative Approach to Stabilization*. London: Springer, 1997.
- SEURET, A. et al. Static output feedback sliding mode control design via an artificial stabilizing delay. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 54, n. 2, p. 256–265, 2009.
- SIMEÃO, J. D. *Controle de Sistemas com Atrasos nos Estados: uma abordagem convexa*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - CEFET-MG, 2009.
- SMITH, O. J. M. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, v. 53, n. 5, p. 217–219, 1957.
- SONTAG, E. D.; WANG, Y. *On characterizations of the input-to-state stability property*. [S.l.]: Systems & Contr. Letters, 1995.
- SUBBARAO, K.; MURALIDHAR, P. C. State observer for linear systems with piece-wise constant output delays. *IET Contr. Theory and Applications*, v. 3, n. 8, p. 1017–1022, 2009.
- TRINH, H.; ALDEEN, M.; NAHAVANDI, S. An observer design procedure for a class of nonlinear time-delay systems. *Computers & electrical engineering*, v. 30, n. 1, p. 61–71, Jan 2004.
- UTKIN, V. A.; GULDNER, J.; SHI, J. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. [S.l.]: CRC press, 1999.
- YAN, X. G.; SPURGEON, S. K.; EDWARDS, C. Sliding mode control for time-varying delayed systems based on a reduced-order observer. *Automatica*, v. 46, n. 8, p. 1354–1362, 2010.