



Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Faculdade de Engenharia

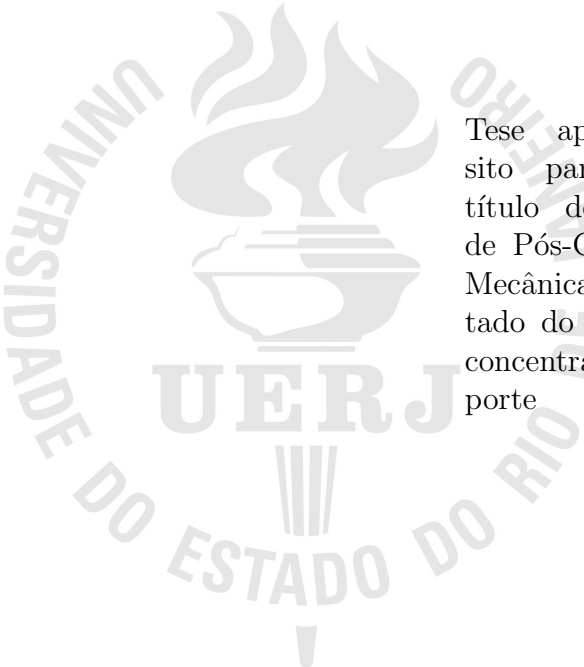
Luiz Guilherme Chagas Moraes Jardim

## **Um modelo hiperbólico para a simulação da transição saturado-insaturado em um meio poroso**

Rio de Janeiro  
2016

Luiz Guilherme Chagas Moraes Jardim

# **Um modelo hiperbólico para a simulação da transição saturado-insaturado em um meio poroso**



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama  
Coorientador: Prof. Dr. José Julio Pedrosa Filho

Rio de Janeiro  
2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

- |     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| J37 | <p>Jardim, Luiz Guilherme Chagas Moraes.<br/>Um modelo hiperbólico para a simulação da transição saturado – insaturado em um meio poroso / Luiz Guilherme Chagas Moraes Jardim. – 2016.<br/>71f.</p> <p>Orientador: Rogério Martins Saldanha da Gama.<br/>Coorientador: José Julio Pedrosa Filho.<br/>Tese (Doutorado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.</p> <p>1. Engenharia Mecânica - Teses. 2. Mecânica dos meios contínuos - Teses. 3. Riemann-Hilbert, Problemas de - Teses. I. Gama, Rogério Martins Saldanha da. II. Pedrosa Filho, José Julio. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. IV. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 531.3</p> |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Luiz Guilherme Chagas Moraes Jardim

**Um Modelo Hiperbólico para a Simulação da Transição Saturado – Insaturado em  
um Meio Poroso**

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovado em 13 de dezembro de 2016.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama (Orientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

---

Prof. Dr. José Julio Pedrosa Filho (Coorientador)  
Faculdade de Engenharia – UERJ

---

Prof. Dr. Heraldo Silva da Costa Mattos  
Dpto. de Engenharia Mecânica – UFF

---

Prof. Dra. Maria Laura Martins Costa  
Dpto. de Engenharia Mecânica – UFF

---

Prof. Dr. Felipe Acker  
Instituto de Matemática – UFRJ

---

Prof. Dr. Paulo Guilherme Santos Couto de Castro  
Escola Naval – EN

Rio de Janeiro

2016

# RESUMO

JARDIM, Luiz Guilherme Chagas Moraes. *Um modelo hiperbólico para a simulação da transição saturado-insaturado em um meio poroso*. 2016. 71 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2016.

O modelo apresentado se inspira na ideia da elasticidade da matriz porosa para permitir que um líquido preencha os poros de um meio poroso acima do limite de saturação. O objetivo é encontrar um sistema de equações que não perca a hiperbolicidade na saturação, o que torna possível aplicar o Método de Glimm. Na primeira parte, desenvolvemos a teoria de misturas de meios contínuos e discutimos equações da continuidade, momento linear e momento angular. A seguir, descrevemos o problema em detalhe e fazemos hipóteses para simplificar o escoamento, deduzindo as equações tanto do modelo novo quanto do modelo de referência. Encontramos um sistema de equações diferenciais parciais e, desse ponto em diante, o problema se torna quase puramente matemático. Discutimos o caso insaturado, mostrando que o resultado é idêntico para os dois modelos. Resolvemos também a saturação e comparamos o resultado dos dois modelos, observando que os resultados são tão próximos quanto se queira.

Palavras-chave: Meios contínuos; Misturas; Problema de Riemann; Modelo Hiperbólico.

# ABSTRACT

JARDIM, Luiz Guilherme Chagas Moraes. *A hyperbolic model for saturated-unsaturated transition simulation in a porous medium*. 2016. 71 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2016.

The model presented draws inspirations from the porous matrix elasticity to allow a liquid to fill the pores of a porous medium beyond saturation. The objective is to find a system of equations that is hyperbolic even after saturation, which makes it possible to apply the Glimm Method. In the first part, we develop mixture theory in continuum media and discuss the continuity, linear momentum and angular momentum equations. Next, we describe the problem in detail and make hypotheses to simplify the flow, deriving the equations for the new model as well as the reference model. We find a system of partial differential equations and, from that point on, the problem becomes almost purely mathematical. We discuss the unsaturated case, showing that the result is identical for both models. We also solve the saturation and compare the results from each model, checking that the results are as close as you want them to be.

Keywords: Continuum Media; Mixtures; Riemann Problem; Hyperbolic Model.

## LISTA DE FIGURAS

|    |                                                                                                                                                                                      |    |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Gráfico ilustrativo da função $\bar{p}$ em um meio poroso rígido. . . . .                                                                                                            | 22 |
| 2  | Gráfico ilustrativo exagerado da função $\bar{p}$ em um meio poroso com elasticidade. Na realidade, o segundo segmento de reta deveria estar muito mais próximo da vertical. . . . . | 24 |
| 3  | Valores explícitos de $(\phi, v)$ em uma solução do tipo rarefação-1. . . . .                                                                                                        | 32 |
| 4  | Valores de $\phi$ em função de $\xi$ em uma solução do tipo rarefação-1. . . . .                                                                                                     | 33 |
| 5  | Valores de $v$ em função de $\xi$ em uma solução do tipo rarefação-1. . . . .                                                                                                        | 33 |
| 6  | Valores explícitos de $(\phi, v)$ em uma solução do tipo rarefação-2. . . . .                                                                                                        | 34 |
| 7  | Valores de $\phi$ em função de $\xi$ em uma solução do tipo rarefação-2. . . . .                                                                                                     | 35 |
| 8  | Valores de $v$ em função de $\xi$ em uma solução do tipo rarefação-2. . . . .                                                                                                        | 35 |
| 9  | Ilustração de uma solução do tipo rarefação-1/rarefação-2. . . . .                                                                                                                   | 37 |
| 10 | Região de soluções contínuas no plano $\sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}} \times (v_R - v_L)$ . . . . .                                                                                    | 39 |
| 11 | Valores de $\phi$ em função de $\xi$ em uma solução do tipo rarefação-1/rarefação-2. . . . .                                                                                         | 40 |
| 12 | Valores de $v$ em função de $\xi$ em uma solução do tipo rarefação-1/rarefação-2. . . . .                                                                                            | 40 |
| 13 | Regiões associadas a cada tipo de solução no plano $\sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}} \times (v_R - v_L)$ . . . . .                                                                       | 42 |
| 14 | Regiões associadas a cada tipo de solução no plano $\sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}} \times (v_R - v_L)$ . . . . .                                                                       | 46 |
| 15 | Exemplo 1 . . . . .                                                                                                                                                                  | 67 |
| 16 | Exemplo 2 . . . . .                                                                                                                                                                  | 68 |
| 17 | Exemplo 3 . . . . .                                                                                                                                                                  | 69 |

# SUMÁRIO

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUÇÃO                                                                            | 7  |
| 1 Misturas em Mecânica dos Meios Contínuos                                            | 8  |
| 1.1 Massa e Densidade . . . . .                                                       | 8  |
| 1.2 Movimento . . . . .                                                               | 9  |
| 1.3 Gradiente de Deformações . . . . .                                                | 10 |
| 1.4 Teorema do Transporte de Reynolds . . . . .                                       | 11 |
| 1.5 Teorema do Transporte com uma Superfície de Descontinuidade .                     | 12 |
| 1.6 Equação da Continuidade . . . . .                                                 | 14 |
| 1.7 Equação do Momento Linear . . . . .                                               | 16 |
| 2 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES                                                                | 19 |
| 2.1 Descrição do problema . . . . .                                                   | 19 |
| 2.2 Meio Poroso . . . . .                                                             | 19 |
| 2.3 Líquido . . . . .                                                                 | 20 |
| 2.4 Gás . . . . .                                                                     | 20 |
| 2.5 Equações . . . . .                                                                | 20 |
| 2.6 Considerando um meio poroso com elasticidade . . . . .                            | 23 |
| 3 ESCOAMENTO EM UM MEIO POROSO RÍGIDO                                                 | 25 |
| 3.1 Leis de Conservação . . . . .                                                     | 25 |
| 3.2 Problema de Riemann . . . . .                                                     | 26 |
| 3.3 Autovalores associados ao problema do meio poroso insaturado .                    | 27 |
| 3.4 Estudo das possíveis soluções . . . . .                                           | 30 |
| 3.5 Rarefações simples . . . . .                                                      | 31 |
| 3.6 Rarefação-1/rarefação-2 . . . . .                                                 | 35 |
| 3.7 Admitindo descontinuidades . . . . .                                              | 39 |
| 3.8 Choque-1/choque-2, rarefação-1/choque-2 e choque-1/rarefação-2                    | 43 |
| 3.9 Saturação . . . . .                                                               | 45 |
| 4 ESCOAMENTO COM SUPERSATURAÇÃO                                                       | 49 |
| 4.1 Problema . . . . .                                                                | 49 |
| 4.2 Composto as soluções . . . . .                                                    | 49 |
| 4.3 Rarefação-1 com transição . . . . .                                               | 50 |
| 4.4 Rarefação-2 com transição . . . . .                                               | 52 |
| 4.5 Choques com transição . . . . .                                                   | 53 |
| 4.6 Casos compostos . . . . .                                                         | 54 |
| 5 SOLUÇÃO COMPLETA DO PROBLEMA DE RIEMANN                                             | 57 |
| 5.1 Caso Insaturado ( $\varphi_L, \varphi_R < \varepsilon$ ) . . . . .                | 57 |
| 5.2 Caso Supersaturado ( $\varphi_L, \varphi_R > \varepsilon$ ) . . . . .             | 62 |
| 5.3 Caso Misto ( $\varphi_L \leq \varepsilon \leq \varphi_R$ ) . . . . .              | 64 |
| 5.4 Caso Misto ( $\varphi_L \geq \varepsilon, \varphi_R \leq \varepsilon$ ) . . . . . | 66 |
| 6 RESULTADOS                                                                          | 67 |
| REFERÊNCIAS                                                                           | 71 |

# INTRODUÇÃO

O estudo de fenômenos de transporte em meios porosos começou no início do século XX, e ainda existem muitos problemas em aberto nessa área, como descrições adequadas da transição saturado-insaturado de um escoamento. Nesse texto, resolvemos analiticamente um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o escoamento de um fluido através de um meio poroso rígido ou elástico. Para isso, consideramos os seguintes componentes, que são tratados como meios contínuos: um meio poroso, um líquido (o fluido contaminado) e um gás.

No primeiro capítulo, desenvolvemos a teoria de misturas de meios contínuos, uma generalização da mecânica dos meios contínuos em que se considera vários componentes contínuos que ocupam um mesmo espaço. Cada ponto tem associado uma densidade, velocidade, etc, para cada componente da mistura. Nesse capítulo, são deduzidas equações gerais que serão reduzidas posteriormente a casos especiais que se aplicam ao problema.

No segundo capítulo, descrevemos fisicamente o problema, determinamos as propriedades de cada componente e fazemos hipóteses para simplificar as equações. Aplicamos, então, as equações do capítulo 1 ao problema, gerando um sistema de equações hiperbólico não-linear a ser resolvido. A partir de então, o problema se torna basicamente matemático. Adicionamos ainda uma equação que limita a fração de fluido. Isso garante que nenhum fluido pode ocupar um espaço maior do que existe no meio poroso. Quando a fração de fluido atinge o máximo permitido, o escoamento satura.

O terceiro capítulo começa discutindo o problema de Riemann de forma puramente matemática, depois aplica os resultados ao sistema encontrado no capítulo anterior. Encontramos os autovalores associados ao problema. Discutimos a solução para o caso insaturado e seu significado físico, para depois tratar da saturação do meio poroso.

No capítulo 4, tratamos da elasticidade do meio poroso, de modo que o problema não perca a hiporboldicidade quando se atinge a saturação. Assim, podemos tratar de todos os casos da mesma maneira, o que facilitaria a aplicação do método de Glimm. É importante observar que quando o sistema tende à rigidez, a solução do problema de Riemann tende para a solução encontrada anteriormente, sem termo de elasticidade.

Em trabalhos futuros, podemos adicionar às equações termos que tratem da distribuição de temperatura na mistura. Outra sugestão, mencionada anteriormente, seria utilizar o método de Glimm para tratar do mesmo problema assumindo uma condição inicial arbitrária.

# 1 Misturas em Mecânica dos Meios Contínuos

## 1.1 Massa e Densidade

O  $i$ -ésimo ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) componente  $\mathcal{C}_i$  de uma mistura é determinado através de uma medida  $M_i$  (definida na  $\sigma$ -álgebra usual) que associa a cada região mensurável em  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$  a massa do componente naquela região. Definimos a densidade  $\rho_i$  como a derivada de Radon-Nikodym [3] de  $M_i$  em relação ao volume  $V$ , ou seja:

$$M_i = \iiint_{\Omega} \rho_i \, dV$$

$$\rho_i = \frac{dM_i}{dV}$$

Exigiremos que essa derivada sempre exista, mas note que nesse caso ela nunca é única. Basta mudar o valor de  $\rho_i$  em um subconjunto de  $\mathcal{R}$  de medida nula, que  $M_i$  permanece inalterada.

Na prática, a Mecânica dos Meios Contínuos ignora toda a física de escala atômica e supõe que a matéria ocupa o espaço de forma bem mais "suave". Pode parecer uma hipótese muito forte, mas para obter resultados em escala macroscópica é bastante precisa [5, 4].

Outra peculiaridade que aparece na Teoria de Misturas é que um mesmo ponto é ocupado por diversos componentes, o que é impossível de acordo com a Física Clássica, que supõe a impenetrabilidade da matéria [11].

Continuando, definimos a medida  $M$ , que dá a massa de todos os componentes como a soma:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i$$

e definimos também sua derivada  $\rho$ . Como consequência direta, exceto em

um conjunto de medida nula, vale:

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i$$

## 1.2 Movimento

O movimento de um componente  $\mathcal{C}_i$  é uma função diferenciável que associa cada tempo  $t$  a uma função  $\chi_i^t$  diferenciável de inversa diferenciável:

$$\begin{aligned} \chi_i^t : \mathcal{R}_i^{\text{ref}} \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathcal{R}_i^t \subset \mathbb{R}^3 \\ \vec{X}_i &\rightarrow \chi_i^t(\vec{X}_i) = \vec{x}_i \end{aligned}$$

Também é comum definir o movimento como uma função:

$$\begin{aligned} \chi_i^t : \mathcal{R}_i^{\text{ref}} \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{X}_i &\rightarrow \chi_i(\vec{X}_i, t) = \vec{x}_i \end{aligned}$$

A segunda notação é mais simples, mas torna mais complicado falar sobre a inversibilidade da função.

A configuração de referência  $\mathcal{R}_i^{\text{ref}}$  muitas vezes é tomada como a configuração inicial  $\mathcal{R}_i^0$ , mas isso não é necessariamente verdade sempre. Escolhendo um subconjunto  $\Omega_i^{\text{ref}} \subset \mathcal{R}_i^{\text{ref}}$ , definimos a região material associada a este conjunto como a imagem de  $\Omega_i^{\text{ref}}$  pelo movimento no instante  $t$ .

$$\begin{aligned} \Omega_i^t &= \chi_i(\Omega_i^{\text{ref}}, t), \text{ ou} \\ \Omega_i^t &= \chi_i^t(\Omega_i^{\text{ref}}) \end{aligned}$$

Intuitivamente, a região material varia com o tempo acompanhando a matéria, sendo sempre formada pelas mesmas "partículas" (pontos materiais).

Note que cada componente tem seu próprio movimento. Portanto, para uma mesma configuração de referência, as regiões materiais de duas componentes podem ter regiões materiais diferentes. Isso fica evidenciado quando definimos a velocidade  $\vec{v}_i$  de cada componente, dada pela derivada de  $\vec{x}_i$  em relação ao tempo escrita na variável  $\vec{x}_i$ , ou seja:

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \circ (\chi_i^t)^{-1}$$

Existem várias maneiras de definir a velocidade da mistura  $\vec{v}$ . A mais apropriada nesse caso é definição inspirada no momento linear:

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i \quad (1.1)$$

### 1.3 Gradiente de Deformações

O gradiente de deformações  $F_i$  de um componente é definido como o gradiente do movimento:

$$F_i = \nabla \vec{X}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_i} & \frac{\partial x_i}{\partial Y_i} & \frac{\partial x_i}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial y_i}{\partial X_i} & \frac{\partial y_i}{\partial Y_i} & \frac{\partial y_i}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial z_i}{\partial X_i} & \frac{\partial z_i}{\partial Y_i} & \frac{\partial z_i}{\partial Z_i} \end{bmatrix}$$

**Teorema 1.1.**  $F_i$  é inversível e:

$$F_i^{-1} = \text{Grad } \vec{x}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} & \frac{\partial X_i}{\partial y_i} & \frac{\partial X_i}{\partial z_i} \\ \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} & \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} & \frac{\partial Y_i}{\partial z_i} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} & \frac{\partial Z_i}{\partial y_i} & \frac{\partial Z_i}{\partial z_i} \end{bmatrix}$$

*Demonstração.* Basta observarmos que:

$$\nabla \vec{X}_i \text{Grad } \vec{x}_i = \text{Grad } \vec{x}_i \nabla \vec{X}_i = I$$

O que é consequência imediata da regra da cadeia. □

## 1.4 Teorema do Transporte de Reynolds

Estamos interessados em avaliar a variação com o tempo de uma integral espacial. Tanto o integrando quanto a região de integração podem depender do tempo. Em outras palavras, queremos analisar a seguinte derivada:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi \, dV$$

Vamos assumir que  $\psi$  é um escalar que depende da posição e do tempo. Se o integrando for um tensor de ordem maior, o resultado é análogo.

**Teorema 1.2.** Seja  $\Omega_t$  a imagem de  $\Omega_{\text{REF}} \subset \mathbb{R}^3$  através de um movimento (não necessariamente o movimento de um componente). Suponha que  $\psi = \hat{\psi}(\vec{x}, t)$  seja diferenciável em toda a região  $\Omega_t$ . Nesse caso [2]:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi \, dV = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div } \psi \vec{v} \, dV \quad (1.2)$$

*Demonstração.* Podemos transformar  $\Omega_{\text{REF}}$  em  $\Omega_t$  e vice-versa através do movimento e sua inversa. Se mudarmos a região de integração através dessa mudança de coordenadas, teremos que multiplicar o integrando pelo módulo do jacobiano  $\det \tilde{F}$ .

$$\iiint_{\Omega_t} \psi(\vec{x}, t) dV = \iiint_{\Omega_{\text{REF}}} \psi(\vec{X}, t) \det \tilde{F} dV$$

Como existem as derivadas parciais de  $\psi$  e  $\det \tilde{F}$  em relação ao tempo, então o primeiro membro de (1.2) existe e:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi(\vec{x}, t) dV &= \iiint_{\Omega_{\text{REF}}} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{X}, t) \det \tilde{F} + \psi(\vec{X}, t) \frac{\partial}{\partial t} \det \tilde{F} dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi(\vec{x}, t) dV &= \iiint_{\Omega_{\text{REF}}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{X}, t) + \psi(\vec{X}, t) \operatorname{div} \vec{v} \right) \det \tilde{F} dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi(\vec{x}, t) dV &= \iiint_{\Omega_t} \frac{D\psi}{Dt}(\vec{x}, t) + \psi(\vec{x}, t) \operatorname{div} \vec{v} dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi dV &= \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\nabla \psi) \vec{v} + \psi \operatorname{div} \vec{v} dV \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi dV &= \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \psi \vec{v} dV \end{aligned}$$

□

## 1.5 Teorema do Transporte com uma Superfície de Descontinuidade

Estamos interessados na forma que a equação (1.2) toma se admitirmos que  $\psi$  é descontínua em uma superfície  $S_t$ .

Dado um ponto de  $S_t$  de vetor normal  $\vec{n}$ , definimos  $[\psi]$ , o salto de  $\psi$ , da seguinte maneira:

$$\psi_+(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \psi(\vec{x} + h\vec{n})$$

$$\psi_-(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \psi(\vec{x} - h\vec{n})$$

$$[\psi] = \psi_+ - \psi_-$$

Observe que o salto só está definido quando os dois limites estão definidos. Se definirmos o salto pelo limite das diferenças, em vez de pela diferença dos limites, temos que tomar mais cuidado com valores infinitos.

Denotamos a velocidade de cada ponto de  $S_t$  por  $\vec{u}$ .

**Teorema 1.3.** Sejam  $\Omega_t$ , uma região material associada ao componente  $\mathcal{C}_i$ , e  $\psi$  nas condições do Teorema de Reynols, exceto em uma superfície regular orientada  $S_t$  que divide  $\Omega_t$  em duas, onde  $\psi$  é descontínua. Então:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi \, dV = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div} \psi \vec{v} \, dV + \iint_{S_t} [\psi (\vec{v}_i - \vec{u})] \circ \vec{n} \, dA \quad (1.3)$$

*Demonstração.* Vamos chamar as duas regiões de  $\Omega_t^+$  e  $\Omega_t^-$ . E definiremos:

$$S_t^+ = \partial\Omega_t^+ - S_t$$

$$S_t^- = \partial\Omega_t^- - S_t$$

Observe que:

$$\partial\Omega_t = S_t^+ \cup S_t^-$$

$$\Omega_t = \Omega_t^+ \cup \Omega_t^-$$

A idéia é aplicar o Teorema do Transporte de Reynolds a cada uma dessas duas regiões e somar o resultado, tomando o cuidado de usar  $\psi_+$  e  $\psi_-$  no lugar das descontinuidades para que a função atenda às hipóteses do teorema. Usando  $\psi = \psi^+$  e  $\vec{v}_i = \vec{v}_i^+$  na superfície  $S_t$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t^+} \psi \, dV &= \iiint_{\Omega_t^+} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dV + \iint_{S_t^+} \psi \vec{v}_i \circ \vec{n} \, dA + \iint_{S_t} \psi \vec{u} \circ (-\vec{n}) \, dA \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t^+} \psi \, dV &= \iiint_{\Omega_t^+} \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dV + \iint_{\partial \Omega_t^+} \psi \vec{v}_i \circ \vec{n} \, dA + \iint_{S_t} \psi (\vec{v}_i^+ - \vec{u}) \circ \vec{n} \, dA \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t^+} \psi \, dV &= \iiint_{\Omega_t^+} \frac{\partial \psi}{\partial t} \operatorname{div}(\psi \vec{v}_i) \, dV + \iint_{S_t} \psi^+ (\vec{v}_i^+ - \vec{u}) \circ \vec{n} \, dA \end{aligned}$$

Analogamente, usando  $\psi = \psi^-$  e  $\vec{v} = \vec{v}^-$  na superfície  $S_t$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t^-} \psi \, dV = \iiint_{\Omega_t^-} \frac{\partial \psi}{\partial t} \operatorname{div}(\psi \vec{v}_i) \, dV - \iint_{S_t} \psi^- (\vec{v}_i^- - \vec{u}) \circ \vec{n} \, dA$$

Somando as duas

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \psi \, dV = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \psi}{\partial t} \operatorname{div}(\psi \vec{v}_i) \, dV + \iint_{S_t} [\psi (\vec{v}_i - \vec{u})] \circ \vec{n} \, dA$$

□

## 1.6 Equação da Continuidade

Seja  $\Omega_i^t$  uma região material arbitrária associada ao componente  $i$ . Vamos supor que todos os componentes são quimicamente inertes. Assim, a massa dessa região deve ser conservada, ou seja, não pode variar com o tempo:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \, dV = 0$$

Aplicando (1.2), ficamos com:

$$\iiint_{\Omega_i^t} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \vec{v}_i \, dV = 0$$

Como essa integral é nula para toda região material, segue que o integrando é nulo quase sempre:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \vec{v}_i = 0 \quad (1.4)$$

As equações (1.4) são chamadas Equações da Continuidade. Somando todas elas para  $i = 1, \dots, n$ , chegamos a uma equação análoga para  $\rho$  e  $\vec{v}$ :

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \vec{v}_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Se estivermos numa região com uma superfície de descontinuidade de  $\rho_i$ , então:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \, dV = 0$$

$$\iiint_{\Omega_i^t} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \vec{v}_i \, dV + \iint_{S_t} [\rho_i (\vec{v}_i - \vec{u})] \circ \vec{n} \, dA = 0$$

Pela equação da continuidade, o primeiro integrando é nulo, logo:

$$[\rho_i(\vec{v}_i - \vec{u})] \circ \vec{n} = 0 \quad (1.5)$$

Essa equação é chamada *condição de salto* ou *condição de Rankine–Hugoniot* [10].

## 1.7 Equação do Momento Linear

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton a uma região material:

$$\vec{F}_{\text{resultante}} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \vec{v}_i dV$$

Vamos assumir que a força resultante tem as seguintes fontes [5]:

- Forças de corpo externas à mistura que totalizam  $\iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \vec{b}_i dV$
- Forças de superfície que totalizam  $\iint_{\partial\Omega_i^t} \tilde{T}^i(\vec{n}) dA$ , onde  $\tilde{T}^i$  é simétrico
- Força de interação entre a componente  $i$  e a componente  $j$ , da forma<sup>1</sup>  $\iiint_{\Omega_i^t} \vec{h}_j^i dV$

Onde  $\vec{n}$  é o vetor normal unitário exterior a  $\partial\Omega_i^t$ . Somando todas as forças:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{resultante}} &= \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \vec{b}_i dV + \iint_{\partial\Omega_i^t} \tilde{T}^i(\vec{n}) dA + \sum_{j=1}^n \iiint_{\Omega_i^t} \vec{h}_j^i dV \\ \vec{F}_{\text{resultante}} &= \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \vec{b}_i + \operatorname{div} \tilde{T}^i + \sum_{j=1}^n \vec{h}_j^i dV \end{aligned}$$

Enquanto a equação (1.2) aplicada a cada componente nos dá:

---

<sup>1</sup>Como  $\vec{v}_i - \vec{v}_i = 0$ , podemos incluir o caso  $i = j$  no somatório sem problemas.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \vec{v}_i dV &= \iiint_{\Omega_i^t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \vec{v}_i) + \operatorname{div} (\rho_i \vec{v}_i \otimes \vec{v}_i) dV \\
&= \iiint_{\Omega_i^t} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \vec{v}_i + \rho_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\nabla \vec{v}_i) (\rho_i \vec{v}_i) + \vec{v}_i \operatorname{div} \rho_i \vec{v}_i dV
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Usando a igualdade (1.4), isso se resume a:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \vec{v}_i dV = \iiint_{\Omega_i^t} \rho_i \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\nabla \vec{v}_i) \vec{v}_i \right) dV$$

Igualando isso à expressão para a força resultante e levando em conta que isso vale para toda região material, podemos dizer que:

$$\rho_i \left( \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\nabla \vec{v}_i) \vec{v}_i \right) = \rho_i \vec{b}_i + \operatorname{div} \tilde{T}^i + \sum_{j=1}^n \vec{h}_j^i$$

Vamos chamar  $\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\nabla \vec{v}_i) \vec{v}_i$ . Assim:

$$\rho_i \vec{a}_i = \rho_i \vec{b}_i + \operatorname{div} \tilde{T}^i + \sum_{j=1}^n \vec{h}_j^i \tag{1.7}$$

As equações (1.7) são chamadas Equações do Momento Linear. Somando todas elas para  $i = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \left( \rho_i \vec{b}_i + \operatorname{div} \tilde{T}^i + \sum_{j=1}^n \vec{h}_j^i \right)$$

Mas pela Terceira Lei de Newton:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{h}_j^i = 0$$

E definindo:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{a}_i \\ \vec{b} &= \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{b}_i \\ T_{\sim} &= \sum_{i=1}^n T_{\sim}^i\end{aligned}$$

Note que  $T_{\sim}$  é simétrico, pois é a soma de tensores simétricos. A equação simplifica para:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{b} + \operatorname{div} T_{\sim}$$

Se estivermos numa região com uma superfície de descontinuidade de  $\rho_i \vec{v}_i$ , conseguimos uma condição de salto de maneira análoga à anterior:

$$[\rho_i \vec{v}_i \otimes (\vec{v}_i - \vec{u}) - T_{\sim}^i] \vec{n} = \vec{0}$$

## 2 DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES

### 2.1 Descrição do problema

Trabalharemos com três componentes na mistura:

- $\mathcal{C}_P$ : Um meio poroso
- $\mathcal{C}_F$ : Um líquido
- $\mathcal{C}_G$ : Um gás

Intuitivamente, o líquido escoar pelo meio poroso, enquanto o gás serve apenas para ocupar o espaço que o líquido não está ocupando. No capítulo 3 trataremos apenas o caso do meio poroso rígido, depois adicionaremos um termo de elasticidade e, por fim, compararemos os resultados.

Vamos supor que a mistura é isotérmica e todos os componentes são quimicamente inertes.

### 2.2 Meio Poroso

O meio poroso é composto de uma *matriz*, normalmente sólida, com espaços ociosos, chamados *poros*. Mais sobre esse assunto pode ser encontrado em [12, 8].

Vamos supor que todos os poros estão conectados e estão distribuídos homogênea e isotropicamente. Definimos a *porosidade*  $\varepsilon$  como a razão entre o volume dos poros e o volume total.

A porosidade é a mesma para qualquer região escolhida, já que supomos a homogeneidade do meio poroso. No mundo real, nos pontos ocupados pela matriz teríamos  $\varepsilon = 0$  e nos poros,  $\varepsilon = 1$ , mas no contexto da Teoria de Misturas, podemos trabalhar com um  $\varepsilon$  constante no intervalo  $(0, 1)$ .

Vamos supor ainda que a matriz está em repouso e, inicialmente, que é rígida, apesar de que vamos tratar também do caso elástico posteriormente. Assim, podemos dizer que  $\rho_P$  é constante e  $\vec{v}_P = \vec{0}$ , ou seja, as equações de continuidade e momento linear do componente  $\mathcal{C}_P$  não precisam ser levadas em consideração.

## 2.3 Líquido

Seja  $\rho'_F$  a massa específica do líquido, ou seja, sua densidade quando está ocupando completamente o volume de uma região. Definimos a *fração de fluido*  $\phi$  como a razão  $\frac{\rho_F}{\rho'_F}$ .

Observe que  $\rho'_F$  pode ser calculado localmente como a razão entre a massa do fluido e o volume que ele ocupa, enquanto  $\rho_F$  é a razão entre a massa do fluido e o volume total da região. Portanto, a fração de fluido é a razão entre o volume que o fluido ocupa e o volume total. Como o volume máximo que o fluido pode ocupar é o volume dos poros, temos sempre:

$$\phi \leq \varepsilon \quad (2.1)$$

Quando  $\phi < \varepsilon$ , diremos que o meio poroso está *insaturado*, enquanto  $\phi = \varepsilon$  representa uma *saturação*.

## 2.4 Gás

O componente gasoso  $\mathcal{C}_G$  tem densidade muito pequena, servindo apenas para preencher o espaço que o líquido  $\mathcal{C}_F$  não ocupa e dar compressibilidade à mistura. Sua fração de fluido vale, portanto,  $\varepsilon - \phi$ , ou seja, as equações de continuidade e momento linear desse componente podem ser ignoradas.

## 2.5 Equações

As equações que vamos usar são, portanto, as equações da continuidade e momento linear do líquido. Aplicamos a equação da continuidade (1.4) aplicada a esse componente e dividimos por  $\rho'_F$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \phi \vec{v}_F = 0$$

Para a equação do momento linear, observe que a direção do escoamento do líquido é determinada pela direção dos poros. Sendo assim, faremos a hipótese de que as forças de corpo são desprezíveis e consideraremos  $\tilde{T}^F = -p_F \tilde{I}$ .

A pressão num ponto é dada por  $p = \frac{d\tilde{F}}{dA_{\text{poros}}}$ . Por sua vez, temos  $A_{\text{poros}} = \varepsilon A$ , já que integrando esse valor através de planos paralelos temos o volume dos poros. Mas, no caso insaturado, temos:

$$\frac{\phi}{\varepsilon} = \frac{p_F}{\varepsilon p}$$

$$p_F = p\phi$$

Para as forças de interação entre os componentes, vamos considerar, conforme [7]:

$$\sum h_j^F \propto \nabla \phi$$

Vamos chamar a constante de proporcionalidade de  $-A$ , com  $A$  positivo. Substituindo na equação do momento linear (1.7), ficamos com:

$$\rho_F \vec{a}_F = \text{div}(-p\phi \tilde{I}) - A \nabla \phi$$

$$\rho_F \vec{a}_F + \nabla((p + A)\phi) = 0$$

Definimos:

$$c^2 = \frac{p + A}{\rho'_F}$$

Dividindo a equação por  $\rho'_F$ :

$$\phi \vec{a}_F + \nabla(c^2 \phi) = 0$$

Vamos chamar  $\bar{p} = c^2 \phi$ . No caso saturado,  $\bar{p}$  pode continuar crescendo.

Juntando os dois casos, temos:

$$\begin{cases} \bar{p} = c^2 \phi, \text{ se } \phi < \varepsilon \\ \bar{p} \geq c^2 \varepsilon, \text{ se } \phi = \varepsilon \end{cases} \quad (2.2)$$

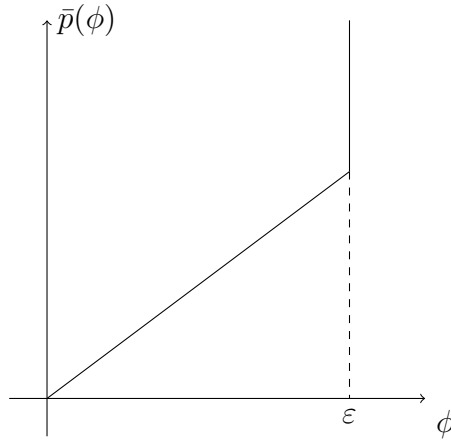


Figura 1: Gráfico ilustrativo da função  $\bar{p}$  em um meio poroso rígido.

Voltando à equação, substituindo  $\phi \vec{a}_F$  pela forma alternativa vista na equação

(1.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \vec{v}_F) + \operatorname{div}(\phi \vec{v}_F \otimes \vec{v}_F) + \nabla \bar{p} = 0$$

Portanto, as equações que governam esse escoamento são:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \phi \vec{v}_F = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi \vec{v}_F) + \operatorname{div}(\phi \vec{v}_F \otimes \vec{v}_F) + \nabla \bar{p} = 0 \end{cases}$$

Se  $\vec{v} = v(x, t)\vec{i}$  e  $\phi$  também não depende de  $y$  e  $z$ , as equações se reduzem ao caso unidimensional:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi v) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v^2 + \bar{p}) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

## 2.6 Considerando um meio poroso com elasticidade

Como veremos adiante, o modelo apresentado perde sua hiperbolicidade na saturação, dificultando a implementação do método de Glimm para generalizar a solução para uma condição inicial qualquer. Podemos considerar, então, que o meio apresenta uma elasticidade que permite que o valor de  $\phi$  ultrapasse  $\varepsilon$  um pouco. Para tal, vamos precisar modificar a função  $\bar{p}(\phi)$ .

$$\bar{p} = \begin{cases} c^2 \phi, & \text{se } \phi \leq \varepsilon \\ d^2 \phi + (c^2 - d^2)\varepsilon, & \text{se } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (2.4)$$

Observe que essa função é contínua. Observe ainda que o parâmetro  $d$  depende do módulo de Young da matriz porosa, e que quando  $d \rightarrow \infty$ , o meio tende à rigidez e a equação para  $\bar{p}$  tende à equação (2.2).

Vamos considerar que  $d$  não varia com  $\phi$ , o que faz sentido para variações pequenas de  $\phi$  além de  $\varepsilon$ , já que qualquer curva (diferenciável) pode ser aproximada por uma reta. Nesse caso, devemos tomar cuidado para garantirmos que  $\phi < 1$ , caso contrário, teríamos uma situação fisicamente impossível.

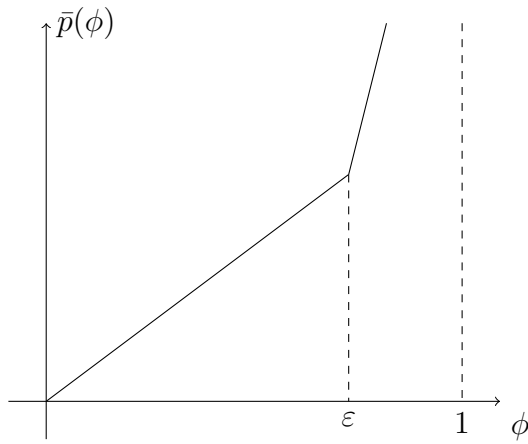


Figura 2: Gráfico ilustrativo exagerado da função  $\bar{p}$  em um meio poroso com elasticidade. Na realidade, o segundo segmento de reta deveria estar muito mais próximo da vertical.

Por esse motivo, consideramos apenas casos em que  $d$  é muito grande, ou seja, em que o meio poroso é praticamente rígido. Assim, não levaremos em consideração outros efeitos provenientes da elasticidade, como ondas de choque se propagando dentro da matriz.

### 3 ESCOAMENTO EM UM MEIO POROSO RÍGIDO

#### 3.1 Leis de Conservação

Um sistema de leis de conservação é uma equação vetorial da forma:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{u})}{\partial x} = \vec{0} \quad (3.1)$$

Onde  $\vec{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  associa cada ponto no plano  $(x, t)$  a um vetor  $\vec{u}(x, t)$ , e  $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Vamos supor, a princípio, que  $\vec{u}$  e  $\vec{f}$  sejam de classe  $C^1$ .

Seja  $\nabla \vec{f}$  a derivada de Frechet de  $\vec{f}$  avaliada no ponto  $\vec{u}$ . Aplicando a regra da cadeia à segunda parcela do primeiro membro de (3.1), obtemos:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \vec{f} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) = \vec{0} \quad (3.2)$$

Vamos estudar as curvas no plano  $(x, t)$  em que  $\vec{u}$  é constante. Seja  $(\gamma(t), t)$  uma parametrização dessa curva. Temos:

$$\begin{aligned} \vec{u}(\gamma(t), t) &= \text{const.} \\ \frac{d}{dt} (\vec{u}(\gamma(t), t)) &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \gamma'(t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Onde as derivadas parciais de  $\vec{u}$  estão sendo avaliadas no ponto  $(\gamma(t), t)$ . Juntando as equações (3.2) e (3.3), obtemos:

$$\left( \nabla \vec{f} - \gamma'(t) I \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0} \quad (3.4)$$

Portanto, para cada valor de  $t$ ,  $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{0}$  (e, portanto,  $\nabla \vec{u} = 0$ ) ou  $\gamma'(t)$  é um auto-valor de  $\nabla \vec{f}$ . Em uma região no plano  $(x, t)$  onde  $\nabla \vec{u}$  não se anula, escolhemos um ponto  $(x_0, t_0)$ . Para as curvas  $\vec{u} = \text{const.}$  passando por este ponto,  $\gamma'(t)$  pode assumir apenas um número finito de valores. Como  $\nabla \vec{f}$  é constante ao longo dessas curvas, essas curvas são retas. Se  $\nabla \vec{u}$  for identicamente nulo numa região, então qualquer curva mantém  $\vec{u}$  constante.

### 3.2 Problema de Riemann

Seja  $\vec{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua em  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ - \{(0, 0)\}$  que satisfaça o sistema de leis de conservação (3.1) na região  $t > 0$  e esteja sujeita à seguinte condição inicial:

$$\vec{u}(x, 0) = \begin{cases} \vec{u}_L, & \text{se } x < 0 \\ \vec{u}_R, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Onde  $\vec{u}_L$  e  $\vec{u}_R$  são constantes e diferentes.

As curvas  $\vec{u} = \text{const.}$ , que devem ser retas (seção 3.1), devem cruzar o eixo  $x$  na origem, caso a constante não seja  $\vec{u}_L$  ou  $\vec{u}_R$ . Portanto, podemos dizer que  $\vec{u}$  depende apenas de  $\xi = \frac{x}{t}$ . Escrevendo  $\vec{u}$  como função apenas de  $\xi$ , podemos observar que  $\vec{u}$  é contínua e derivável em  $\mathbb{R}$ . Temos, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \frac{d\vec{u}}{d\xi} \left( -\frac{x}{t^2} \right) \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} &= \frac{d\vec{u}}{d\xi} \left( \frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

Cometemos um abuso de notação ao usar o símbolo  $\vec{u}$  tanto para representar uma função de  $x$  e  $t$  quanto uma função de  $\xi$ . Agora o sistema de leis de conservação (3.2) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}}{d\xi} \left(-\frac{x}{t}\right) + \nabla \vec{f} \left(\frac{d\vec{u}}{d\xi}\right) &= \vec{0} \\ \left(\nabla \vec{f} - \xi \vec{I}\right) \frac{d\vec{u}}{d\xi} &= \vec{0}\end{aligned}\tag{3.6}$$

E as condições iniciais podem ser substituídas por:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} = \vec{u}_R \tag{3.7}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} = \vec{u}_L \tag{3.8}$$

Da equação (3.4), concluímos que  $\frac{d\vec{u}}{d\xi} = 0$  ou  $\xi$  é um autovalor de  $\nabla \vec{f}$ .

### 3.3 Autovalores associados ao problema do meio poroso insaturado

Consideremos o sistema (2.3), para o caso  $N = 0$ , com a condição inicial (3.10):

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi v) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi v^2 + \bar{p}) = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} \phi_L, & \text{se } x < 0 \\ \phi_R, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} v_L, & \text{se } x < 0 \\ v_R, & \text{se } x > 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Fazendo a substituição  $\xi = \frac{x}{t}$  conforme a seção 3.2, obtemos:

$$\begin{cases} -\xi \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\phi v) = 0 \\ -\xi \frac{d}{d\xi}(\phi v) + \frac{d}{d\xi}(\phi v^2 + \bar{p}) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Escrevendo  $\phi v^2 = (\phi v)v$ , podemos desenvolver a última derivada da seguinte maneira:

$$\frac{d}{d\xi}(\phi v^2 + \bar{p}) = (\phi v) \frac{dv}{d\xi} + v \frac{d}{d\xi}(\phi v) + \bar{p}' \frac{d\phi}{d\xi}$$

Para eliminarmos a derivada de  $v$  da equação, podemos usar a regra do produto  $\frac{d}{d\xi}(\phi v) = \phi \frac{dv}{d\xi} + v \frac{d\phi}{d\xi}$ , ou seja,  $\phi \frac{dv}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\phi v) - v \frac{d\phi}{d\xi}$ . Ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}(\phi v^2 + \bar{p}) &= v \left( \frac{d}{d\xi}(\phi v) - v \frac{d\phi}{d\xi} \right) + v \frac{d}{d\xi}(\phi v) + \bar{p}' \frac{d\phi}{d\xi} \\ &= (\bar{p}' - v^2) \frac{d\phi}{d\xi} + 2v \frac{d}{d\xi}(\phi v) \end{aligned}$$

Onde  $\bar{p}' = \frac{d\bar{p}}{d\phi}$ . Substituindo essa equação no sistema (3.11):

$$\begin{cases} -\xi \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\phi v) = 0 \\ (\bar{p}' - v^2) \frac{d\phi}{d\xi} + (2v - \xi) \frac{d}{d\xi}(\phi v) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Podemos escrever esse sistema em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ \bar{p}' - v^2 & 2v - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi}{d\xi} \\ \frac{d}{d\xi}(\phi v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde  $\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\phi v) = 0$  ou o determinante da matriz dos coeficientes é nulo:

$$\det \begin{bmatrix} -\xi & 1 \\ \bar{p}' - v^2 & 2v - \xi \end{bmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

Alternativamente, poderíamos chegar nessa equação usando os resultados

da seção 3.2. Observe que se  $\vec{u} = (u_1, u_2) = (\phi, \phi v)$ , então:

$$\begin{aligned}\phi &= u_1 \\ v &= \frac{u_2}{u_1}\end{aligned}$$

Substituindo no sistema original (3.9), temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_2^2}{u_1} + \bar{p} \right) = 0 \end{cases}$$

Como  $\bar{p}$  é função de  $\phi = u_1$ , temos que a função  $\vec{f}$  da equação (3.1) é dada por  $\vec{f} = \left( u_2, \frac{u_2^2}{u_1} + \bar{p} \right)$ . Escrevendo a derivada de Frechet de  $\vec{f}$  em forma de matriz, temos que  $\xi$  é um autovalor de:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{p}' - v^2 & 2v \end{bmatrix}$$

O que é equivalente à equação (3.13). Prosseguindo com o desenvolvimento do determinante, chegamos a:

$$\begin{aligned}-\xi(2v - \xi) - (\bar{p}' - v^2) &= 0 \\ \xi^2 - 2v\xi - (\bar{p}' - v^2) &= 0\end{aligned}$$

Usando a fórmula da equação do segundo grau para isolar  $\xi$ :

$$\xi = \frac{2v \pm \sqrt{4v^2 + 4(\bar{p}' - v^2)}}{2}$$

$$\xi = v \pm \sqrt{\bar{p}'}$$

Usando  $\bar{p} = c^2\phi$ ,  $c > 0$ , temos:

$$\xi = v \pm c$$

Vamos chamar  $\lambda_1 = v - c$  e  $\lambda_2 = v + c$ .

### 3.4 Estudo das possíveis soluções

Temos três casos:

- $\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\phi v) = 0$
- $\xi = \lambda_1$  (rarefação-1)
- $\xi = \lambda_2$  (rarefação-2)

Fazendo  $\xi \rightarrow +\infty$ , temos que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tendem para  $v_R \pm c$ , valores finitos. Portanto existe um  $\xi_R$  tal que  $\xi > \xi_R \Rightarrow \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(\phi v) = 0$ . Como as derivadas são nulas em todo o intervalo  $(\xi_R, +\infty)$ , temos que  $\phi$  e  $\phi v$  são constantes nesse intervalo. Se  $\phi$  for não-nulo, então  $v$  necessariamente é constante também, e se  $\phi = 0$ ,  $v$  sequer está definido.

Por continuidade,  $\phi$  e  $v$  assumem esse mesmo valor quando  $\xi = \xi_R$ . O raciocínio é análogo para  $\xi \rightarrow -\infty$ .

$$(\phi, v) = \begin{cases} (\phi_L, v_L), & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ (\phi_R, v_R), & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases} \quad (3.14)$$

Resta determinar  $\xi_L$ ,  $\xi_R$  e a solução no intervalo  $(\xi_L, \xi_R)$ .

### 3.5 Rarefações simples

Vamos primeiro supor que  $\xi = \lambda_1$  em todo o intervalo  $(\xi_L, \xi_R)$ . Por continuidade, temos os valores explícitos de  $\xi_L$  e  $\xi_R$ :

$$\xi_L = v_L - c$$

$$\xi_R = v_R - c$$

Também temos a solução para  $v$ :

$$v = \xi + c$$

Resta encontrar a solução para  $\phi$ . Substituindo  $\xi = \lambda_1$  na primeira equação do sistema (3.12)<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} -\xi \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\phi v) &= 0 \\ -(v - c) \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\phi v) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando a regra do produto:

$$\begin{aligned} -(v - c) \frac{d\phi}{d\xi} + \phi \frac{dv}{d\xi} + v \frac{d\phi}{d\xi} &= 0 \\ \phi \frac{dv}{d\xi} + c \frac{d\phi}{d\xi} &= 0 \\ \frac{dv}{d\xi} + \frac{c}{\phi} \frac{d\phi}{d\xi} &= 0 \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Observe que substituir na segunda equação do sistema gera o mesmo resultado

Integrando com relação a  $\xi$ :

$$v + c \ln \phi = R_1 \text{ const.}$$

$R_1$  é chamada *constante de Riemann*. Por continuidade, podemos encontrar  $R_1 = v_L + c \ln \phi_L$ , portanto encontramos a solução de  $\phi$ :

$$\phi = e^{\frac{R_1 - v}{c}}$$

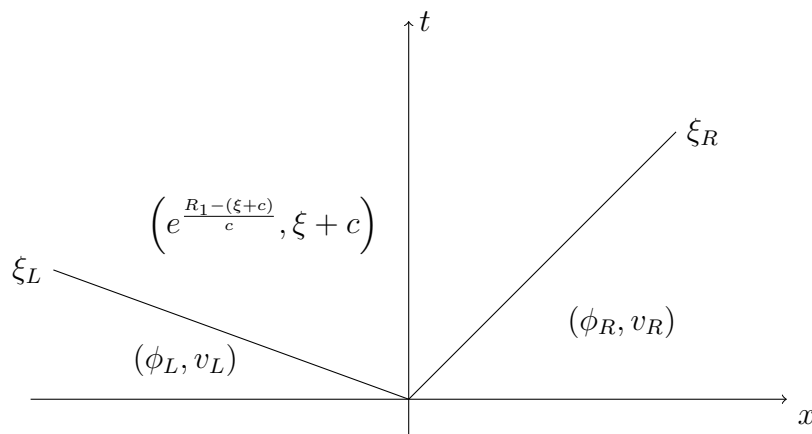


Figura 3: Valores explícitos de  $(\phi, v)$  em uma solução do tipo rarefação-1.

Nas figuras 4 e 5 estão traçados, respectivamente, os gráficos de  $\phi$  e  $v$  para os seguintes valores:

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ (\phi_L, v_L) &= \left( \frac{\varepsilon}{e}, -\frac{1}{2} \right) \\ (\phi_R, v_R) &= \left( \frac{\varepsilon}{e^3}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Porém, temos a restrição de que  $R_1$  também é igual a  $v_R + c \ln \phi_R$ , então essa solução só é válida quando:

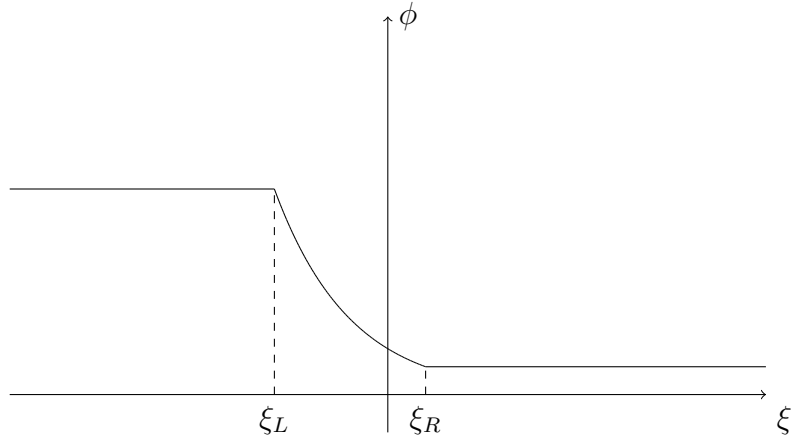


Figura 4: Valores de  $\phi$  em função de  $\xi$  em uma solução do tipo rarefação-1.

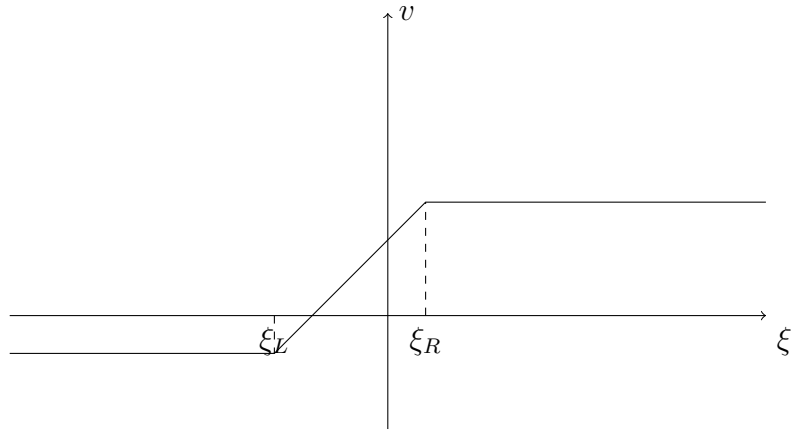


Figura 5: Valores de  $v$  em função de  $\xi$  em uma solução do tipo rarefação-1.

$$v_L + c \ln \phi_L = v_R + c \ln \phi_R$$

$$v_R - v_L = c \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}$$

Além disso, supusemos implicitamente que  $\xi_L < \xi_R$ , o que implica  $v_L < v_R$ .

A restrição se torna:

$$0 < v_R - v_L = c \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}$$

O que é um caso muito específico. Se supormos  $\xi = \lambda_2$  nesse mesmo intervalo, o resultado é análogo:

$$\xi_L = v_L + c$$

$$\xi_R = v_R + c$$

$$v = \xi - c$$

$$R_2 = v_L - c \ln \phi_L$$

$$\phi = e^{\frac{v-R_2}{c}}$$

Com a restrição:

$$0 < v_R - v_L = -c \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}$$

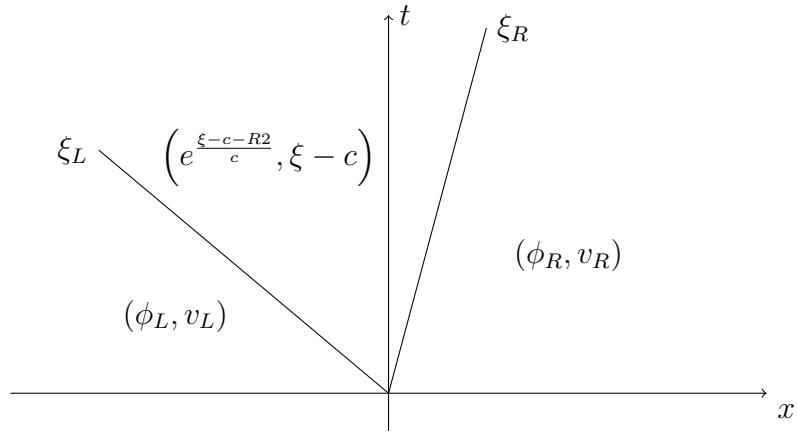


Figura 6: Valores explícitos de  $(\phi, v)$  em uma solução do tipo rarefação-2.

Nas figuras 7 e 8 estão traçados, respectivamente, os gráficos de  $\phi$  e  $v$  para os seguintes valores:

$$c = 1$$

$$(\phi_L, v_L) = \left(\frac{\varepsilon}{e^3}, 1\right)$$

$$(\phi_R, v_R) = \left(\frac{\varepsilon}{e}, 3\right)$$

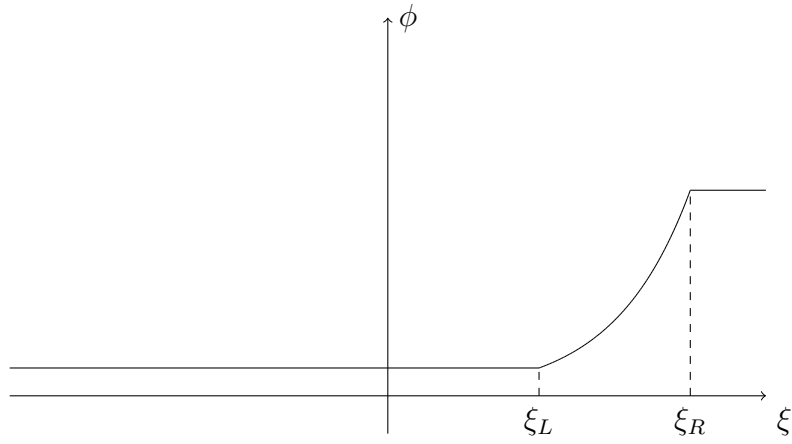


Figura 7: Valores de  $\phi$  em função de  $\xi$  em uma solução do tipo rarefação-2.

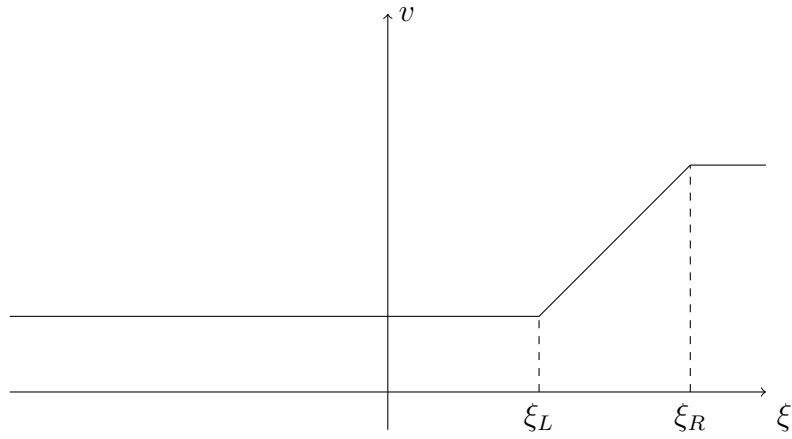


Figura 8: Valores de  $v$  em função de  $\xi$  em uma solução do tipo rarefação-2.

### 3.6 Rarefação-1/rarefação-2

Resta assumir que as duas possibilidades ocorrem. Nesse caso, como  $\lambda_1 < \lambda_2$  para um mesmo  $v$ . Não podemos ter o caso  $\xi = \lambda_1$  e o caso  $\xi = \lambda_2$  em intervalos adjacentes.

Necessariamente, deve haver um intervalo do tipo  $(\phi, v)$  constante de medida  $2c$  entre eles.

Então temos:

- $(\phi, v) = (\phi_L, v_L)$  constante em  $(-\infty, \xi_L]$
- $\xi = \lambda_1$  em  $[\xi_L, \xi^*]$
- $(\phi, v) = (\phi^*, v^*)$  constante em  $[\xi^*, \xi^* + 2c]$
- $\xi = \lambda_2$  em  $[\xi^* + 2c, \xi_R]$
- $(\phi, v) = (\phi_R, v_R)$  constante em  $[\xi_R, +\infty)$

Conforme a seção 3.5, temos:

$$\xi_L = v_L - c$$

$$\xi^* = v^* - c$$

$$\xi_R = v_R + c$$

$$v = \xi + c, \text{ e } \phi = e^{\frac{R_1 - v}{c}} \text{ em } [\xi_L, \xi^*]$$

$$v = \xi - c, \text{ e } \phi = e^{\frac{v - R_2}{c}} \text{ em } [\xi^* + 2c, \xi_R]$$

Com as restrições:

$$v_L - v^* = c \ln \frac{\phi^*}{\phi_L} \tag{3.15}$$

$$v^* - v_R = c \ln \frac{\phi^*}{\phi_R} \tag{3.16}$$

Como  $\phi_L, \phi_R, v_L, v_R$  e  $c$  são dados, podemos resolver o sistema formado pelas equações (3.15) e (3.16) para encontrar  $\phi^*$  e  $v^*$ . Subtraindo uma equação da outra:

$$v_L - 2v^* + v_R = c \ln \frac{\phi_R}{\phi_L}$$

$$v^* = \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}$$

E somando as equações:

$$v_L - v_R = c \ln \frac{\phi^{*2}}{\phi_L \phi_R}$$

$$\phi^* = \sqrt{\phi_L \phi_R} e^{\frac{v_L - v_R}{2c}}$$

E com isso  $\xi^*$  também fica determinado.

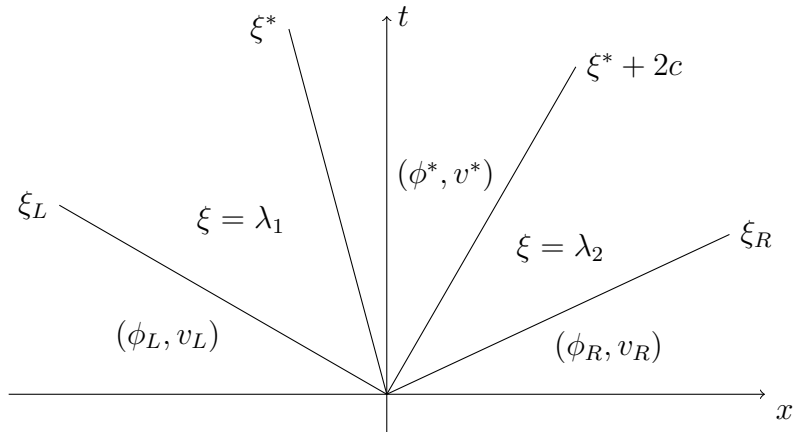


Figura 9: Ilustração de uma solução do tipo rarefação-1/rarefação-2.

Nessa solução, assumimos implicitamente que  $\xi_L < \xi^* < \xi^* + 2c < \xi_R$ . A segunda desigualdade é sempre satisfeita. A primeira leva a:

$$\begin{aligned}
\xi_L &< \xi^* \\
v_L - c &< v^* - c \\
v_L &< v^* \\
v_L &< \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \frac{\phi_L}{\phi_R} \\
v_L - v_R &< c \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}
\end{aligned}$$

Analogamente, a desigualdade  $\xi^* + 2c < \xi_R$  resulta em:

$$v_L - v_R < -c \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}$$

Juntando as duas:

$$v_R - v_L > c \left| \ln \frac{\phi_L}{\phi_R} \right|$$

Observe que essa equação já satisfaz  $v_L < v_R$ , portanto, não precisamos levar isso em consideração.

Se juntarmos ainda com as restrições da seção 3.5:

$$v_R - v_L \geq c \left| \ln \frac{\phi_L}{\phi_R} \right| \neq 0$$

Para visualizar essas restrições, vamos traçar um plano com eixo horizontal<sup>3</sup>  $x = \sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}}$  e eixo vertical  $y = \frac{v_R - v_L}{c}$ . Lembrando que  $x > 0$  e que  $(x, y) \neq (1, 0)$ , as restrições se tornam:

- Rarefação-1:  $0 < y = -2 \ln x$

---

<sup>3</sup>Não confundir com a variável espacial  $x$ , que é representada pela mesma letra.

- Rarefação-2:  $0 < y = 2 \ln x$
- Rarefação-1/Rarefação-2:  $y > 2|\ln x|$

O que é indicado na figura 10. Se as condições iniciais não estiverem no fecho região R1/R2, então não existe solução para o problema. Observe que isso é uma boa parte do semi-plano. Portanto, passamos a admitir soluções descontínuas.

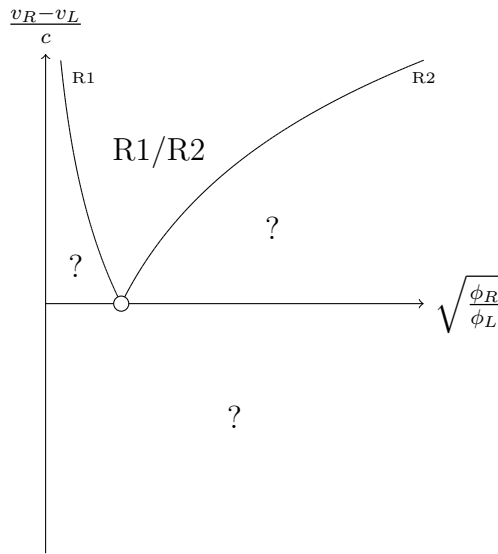


Figura 10: Região de soluções contínuas no plano  $\sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}} \times (v_R - v_L)$ .

Nas figuras 11 e 12 estão traçados, respectivamente, os gráficos de  $\phi$  e  $v$  para os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 c &= 2 \\
 (\phi_L, v_L) &= \left(\frac{\varepsilon}{2}, -2\right) \\
 (\phi_R, v_R) &= \left(\frac{\varepsilon}{2e}, 2\right)
 \end{aligned}$$

### 3.7 Admitindo descontinuidades

Cada descontinuidade deve satisfazer a condição de salto (1.5):

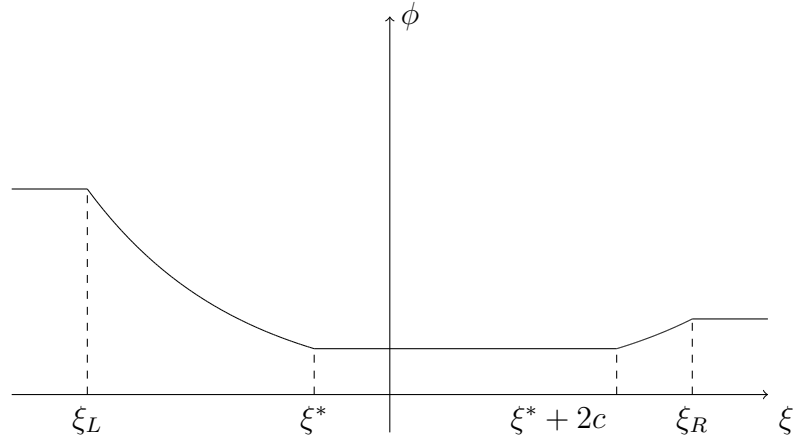


Figura 11: Valores de  $\phi$  em função de  $\xi$  em uma solução do tipo rarefação-1/rarefação-2.

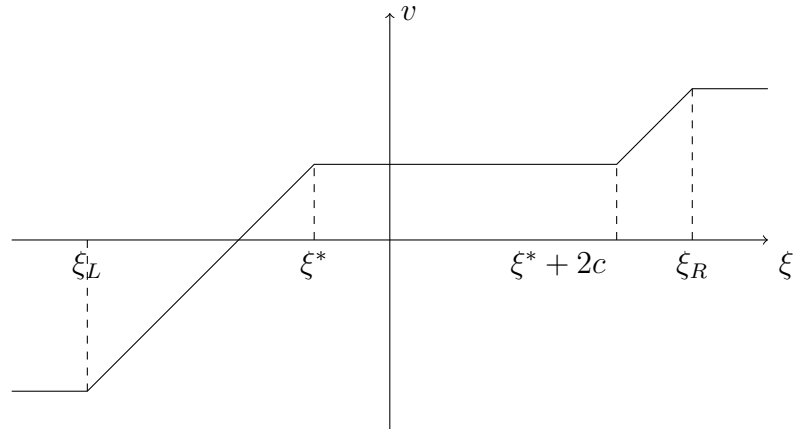


Figura 12: Valores de  $v$  em função de  $\xi$  em uma solução do tipo rarefação-1/rarefação-2.

$$\xi_{\text{descontinuidade}} = \frac{[\phi v]}{[\phi]} = \frac{[\phi v^2 + p]}{[\phi v]}$$

Indexando com  $-$  e  $+$ , respectivamente, os valores à esquerda e à direita da descontinuidade, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_+ v_+ - \phi_- v_-}{\phi_+ - \phi_-} &= \frac{\phi_+ v_+^2 + c^2 \phi_+ - \phi_- v_-^2 - c^2 \phi_-}{\phi_+ v_+ - \phi_- v_-} \\
\phi_+^2 v_+^2 - 2\phi_+ \phi_- v_+ v_- + \phi_-^2 v_-^2 &= \phi_+^2 v_+^2 + c^2 \phi_+^2 - \phi_+ \phi_- v_-^2 - c^2 \phi_+ \phi_- - \phi_+ \phi_- v_+^2 - c^2 \phi_+ \phi_- + \\
&\quad + \phi_-^2 v_-^2 + c^2 \phi_-^2 \\
\phi_+ \phi_- (v_+^2 - 2v_+ v_- + v_-^2) &= c^2 (\phi_+^2 - 2\phi_+ \phi_- + \phi_-^2) \\
\phi_+ \phi_- (v_+ - v_-)^2 &= c^2 (\phi_+ - \phi_-)^2 \\
[v] &= \pm \frac{c}{\sqrt{\phi_+ \phi_-}} [\phi]
\end{aligned}$$

Observe que em todas as soluções contínuas,  $v$  é crescente com  $\xi$ . Isso significa que para um  $t = t_0$  fixo,  $v$  é crescente com  $x$ .

Suficientemente perto de um choque, temos  $v \leq v_-$ , se  $x < x_d = \xi_d t_0$ , e  $v \geq v_+$ , se  $x > x_d$ . Após um tempo  $\Delta t$  pequeno o suficiente, as partículas que estavam em uma posição  $x < x_d$  têm que estar numa posição  $x < x_d + v_- \Delta t$ , e as partículas que estavam em uma posição  $x > x_d$  têm que estar numa posição  $x > x_d + v_+ \Delta t$ .

Desse modo, temos que ter  $v_- > v_+$ , ou  $[v] < 0$  [10]. Podemos trocar a condição de salto por:

$$[v] = -\frac{c}{\sqrt{\phi_+ \phi_-}} |[\phi]| \quad (3.17)$$

Quando  $[\phi] > 0$ , chamaremos o choque de *choque-1*. Caso contrário, de *choque-2*.

Quando as condições iniciais satisfizerem a condição de salto, a solução possui um único choque, ou seja, quando:

$$v_R - v_L = -\frac{c}{\sqrt{\phi_R \phi_L}} |\phi_R - \phi_L| \quad (3.18)$$

a solução é dada por:

$$\xi_L = \xi_R = \frac{\phi_R v_R - \phi_L v_L}{\phi_R - \phi_L}$$

$$(\phi, v) = \begin{cases} (\phi_L, v_L), & \text{se } \xi < \xi_L \\ (\phi_R, v_R), & \text{se } \xi > \xi_L \end{cases}$$

Reescrevendo a restrição (3.18) em função dos adimensionais  $x = \sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}}$  e  $y = \frac{v_R - v_L}{c}$ , ela se transforma em:

$$y = - \left| x - \frac{1}{x} \right| \quad (3.19)$$

Colocando essa informação no gráfico da figura 10, ficamos com:

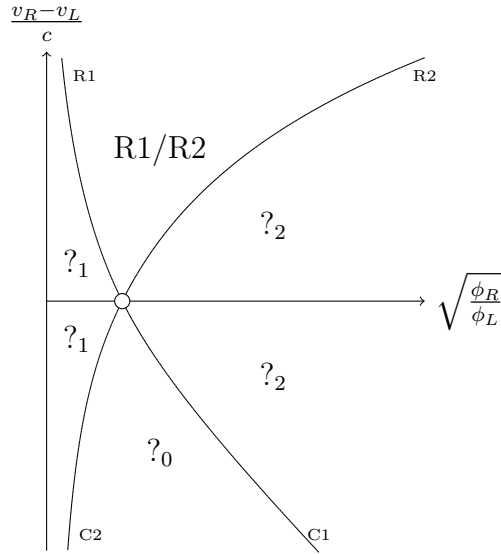


Figura 13: Regiões associadas a cada tipo de solução no plano  $\sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}} \times (v_R - v_L)$ .

Veremos que cada uma das regiões ?0, ?1 e ?2 é caracterizada por um tipo de solução.

### 3.8 Choque-1/choque-2, rarefação-1/choque-2 e choque-1/rarefação-2

Analisemos a região  $\mathcal{R}_0$ , que é descrita pela desigualdade:

$$y < -\left|x - \frac{1}{x}\right|$$

ou

$$v_R - v_L < -\frac{c}{\sqrt{\phi_R \phi_L}} |\phi_R - \phi_L|$$

Essa equação diz que  $v_L - v_R$  é grande demais para ser alcançado em apenas um choque. Como o único jeito da velocidade decrescer é através de um choque, precisaremos de dois. Esses dois choques satisfazem:

$$\begin{aligned} v^* - v_L &= -\frac{c}{\sqrt{\phi^* \phi_L}} |\phi^* - \phi_L| \\ v_R - v^* &= -\frac{c}{\sqrt{\phi_R \phi^*}} |\phi_R - \phi^*| \end{aligned}$$

Somando as duas considerando que a solução fisicamente relevante deve satisfazer  $\phi^* > \max\{\phi_L, \phi_R\}$ , encontramos uma equação que pode ser manipulada para se tornar:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{\phi_L}} + \sqrt{\frac{1}{\phi_R}}\right) \phi^* + \left(\frac{v_R - v_L}{c}\right) \sqrt{\phi^*} - \left(\sqrt{\phi_L} + \sqrt{\phi_R}\right) = 0$$

que é uma equação de segundo grau em  $\sqrt{\phi^*}$ . Resolvendo, chegamos a:

$$\phi^* = \phi_L \phi_R \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{v_L - v_R}{2c(\sqrt{\phi_L} + \sqrt{\phi_R})}$$

Depois podemos substituir o resultado de  $\phi^*$  em qualquer umas das duas equações para encontrar  $v^*$ .  $\xi_L$  e  $\xi_R$  podem então ser calculados facilmente.

As condições iniciais localizadas nas regiões  $?_1$  e  $?_2$  não admitem soluções contínuas, mas  $v_L - v_R$  é pequeno demais para um choque, ou seja, um choque decresce a velocidade além do necessário. Nesses casos, precisamos de uma rarefação para aumentar a velocidade.

Na região  $?_1$ , teremos soluções do tipo rarefação-1/choque-2.

$$v^* - v_L = -c \ln \frac{\phi^*}{\phi_L}$$

$$v_R - v^* = -\frac{c}{\sqrt{\phi_R \phi^*}} |\phi_R - \phi^*|$$

Somando as duas, encontramos uma equação para  $\phi^*$ . Após alguma manipulação, e fazendo  $z = \sqrt{\frac{\phi^*}{\phi_R}} > 1$ , temos:

$$\frac{v_L - v_R}{c} + \ln \frac{\phi_L}{\phi_R} = 2 \ln z + z - \frac{1}{z}$$

$$-y - 2 \ln x = 2 \ln z + z - \frac{1}{z} = f(z)$$

Na região  $?_1$ , o membro esquerdo é sempre positivo,  $f(z)$  é monótona crescente com  $f(1) = 0$  e  $f(z)$  tendendo a infinito quando  $z$  tende a infinito. portanto,  $f$  possui inversa. Isso garante a unicidade de  $z$  para uma dada condição inicial e, portanto, garante a unicidade de  $\phi^*$ . No entanto, a inversa de  $f$  não pode ser expressa em termos de funções elementares, sendo, de maneira geral, necessário o uso de métodos numéricos para resolver a equação.

Depois podemos substituir o resultado de  $\phi^*$  em qualquer umas das duas equações iniciais para encontrar  $v^*$ .  $\xi_L$  e  $\xi_R$  podem então ser calculados facilmente.

Para a região  $?_2$ , os resultados são análogos. Teremos soluções do tipo choque-1/rarefação-2 que satisfazem:

$$\begin{aligned} v^* - v_L &= -\frac{c}{\sqrt{\phi^* \phi_L}} |\phi^* - \phi_L| \\ v_R - v^* &= c \ln \frac{\phi_R}{\phi^*} \end{aligned}$$

Colocando essas informações no plano  $x \times y$ , categorizamos a solução para todas as condições iniciais:

### 3.9 Saturação

Até agora não levamos em consideração que  $\phi$  deve ser sempre menor ou igual a  $\varepsilon$ . Supondo  $\phi_L$  e  $\phi_R$  menores que  $\varepsilon$ , vamos analisar em quais casos pode haver saturação.

Nos casos em que a solução é apenas uma rarefação ou apenas um choque, temos automaticamente  $\forall \xi, \phi(\xi) \leq \max\{\phi_L, \phi_R\} < \varepsilon$ . O que garante que o meio poroso nunca chegará à saturação.

A rarefação-1 sempre decresce o valor de  $\phi$  e, na rarefação-2,  $\phi$  cresce. Assim, as soluções do tipo rarefação-1/rarefação-2, rarefação-1/choque e choque/rarefação-2 também satisfazem automaticamente  $\phi < \varepsilon$ .

O único caso em que pode ocorrer saturação é o choque/choque. Nesse caso,  $(\phi, v)$  assumirá os seguintes valores:

$$(\phi, v) = \begin{cases} (\phi_L, v_L), & \text{se } \xi < \xi_L \\ (\varepsilon, v^*), & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_R \\ (\phi_R, v_R), & \text{se } \xi_R < \xi \end{cases}$$

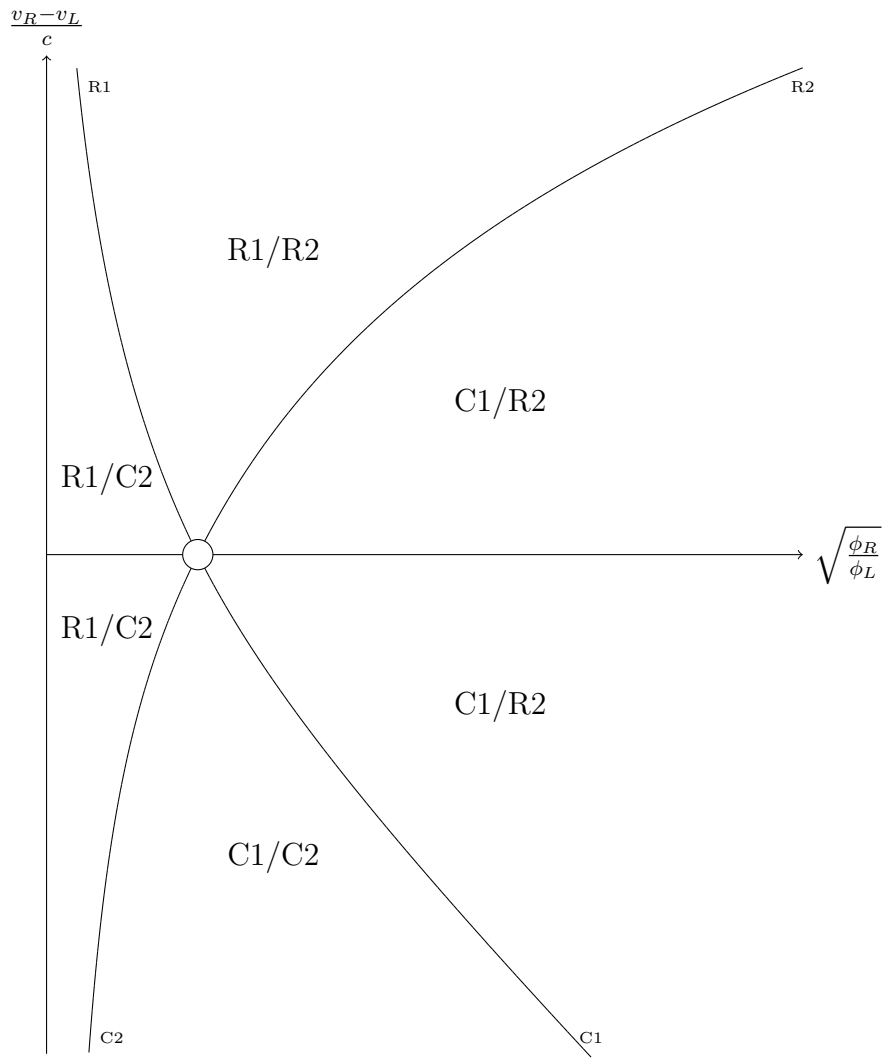


Figura 14: Regiões associadas a cada tipo de solução no plano  $\sqrt{\frac{\phi_R}{\phi_L}} \times (v_R - v_L)$ .

Resta encontrar  $\xi_L$ ,  $\xi_R$  e  $v^*$ . Lembrando que a equação  $\bar{p} = c^2\phi$  só vale para  $\phi < \varepsilon$ , teremos ainda que encontrar o valor  $\bar{p}^*$  que é assumido no intervalo  $(\xi_L, \xi_R)$ .

A condição de salto em  $\xi_L$  nos dá:

$$\begin{aligned}
\xi_L &= \frac{[\phi v]}{[\phi]} = \frac{[\phi v^2 + p]}{[\phi v]} \\
\xi_L &= \frac{\varepsilon v^* - \phi_L v_L}{\varepsilon - \phi_L} = \frac{\varepsilon v^{*2} + \bar{p}^* - \phi_L v_L^2 - c^2 \phi_L}{\varepsilon v^* - \phi_L v_L} \\
\varepsilon^2 v^{*2} - 2\phi_L v_L \varepsilon v^* + \phi_L^2 v_L^2 &= \varepsilon^2 v^{*2} + \varepsilon \bar{p}^* - \varepsilon \phi_L v_L^2 - \varepsilon c^2 \phi_L - \varepsilon v^{*2} \phi_L - \phi_L \bar{p}^* + \phi_L^2 v_L^2 + c^2 \phi_L^2 \\
\varepsilon \phi_L (v_L^2 - 2v_L v^* + v^{*2}) &= \varepsilon \bar{p}^* - \varepsilon c^2 \phi_L + \phi_L \bar{p}^* - c^2 \phi_L^2 \\
\varepsilon \phi_L (v_L - v^*)^2 &= \varepsilon (\bar{p}^* - c^2 \phi_L) + \phi_L (\bar{p}^* - c^2 \phi_L) \\
(v_L - v^*)^2 &= \frac{(\varepsilon - \phi_L)(\bar{p}^* - c^2 \phi_L)}{\varepsilon \phi_L}
\end{aligned}$$

Como a velocidade sempre diminui em um choque:

$$v_L - v^* = -\sqrt{\frac{(\varepsilon - \phi_L)(\bar{p}^* - c^2 \phi_L)}{\varepsilon \phi_L}}$$

Analogamente:

$$v^* - v_R = -\sqrt{\frac{(\phi_R - \varepsilon)(c^2 \phi_R - \bar{p}^*)}{\phi_R \varepsilon}}$$

Somando as duas equações, podemos achar  $\bar{p}^*$ . Teremos uma equação que pode ser manipulada para se tornar:

$$A(\bar{p}^*)^2 + B\bar{p}^* + C = 0$$

Onde:

$$A = ((\varphi_R - \varphi_L)\varepsilon)^2$$

$$B = -2\varphi_L\varphi_R\varepsilon \left( (\varphi_L(\varepsilon - \varphi_R) + \varphi_R(\varepsilon - \varphi_L)) \left( \frac{v_R - v_L}{c} \right)^2 + (\varphi_R - \varphi_L)^2 \right)$$

$$C = \varphi_L^2\varphi_R^2 \left( ((\varepsilon - \varphi_R) - (\varepsilon - \varphi_L))^2 + 2((\varepsilon - \varphi_R) + (\varepsilon - \varphi_L))\varepsilon \left( \frac{v_R - v_L}{c} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{v_R - v_L}{c} \right)^4 \right)$$

Que é de simples resolução. Substituindo o valor em uma das equações, achamos  $v^*$ . Em seguida, fica determinado  $\xi_L$  e  $\xi_R$ .

## 4 ESCOAMENTO COM SUPERSATURAÇÃO

### 4.1 Problema

Conforme discutido na seção 2.6, vamos considerar:

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi v) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi v^2 + p) = 0 \\ c^2 \varphi, \text{ se } 0 \leq \varphi \leq \varepsilon \\ d^2 \varphi + (c^2 - d^2)\varepsilon, \text{ se } \varphi > \varepsilon \end{cases}$$

### 4.2 Compondo as soluções

Classicamente, o problema de Riemann é separado em quatro tipos de soluções: rarefação-1/rarefação-2, rarefação-1/choque-2, choque-1/rarefação-2, choque-1/choque-2. Por questões didáticas, incluímos também os casos em que a solução possui uma única rarefação ou um único choque. E por questões computacionais (as equações mudam), é interessante separar os casos com saturação dos casos sem saturação. Desse jeito, teremos muito mais que quatro tipos de solução, porém, pode-se facilmente identificar cada solução apresentada aqui com um tipo clássico.

Vamos chamar as soluções que só usam uma rarefação ou um choque de soluções simples. O resto das soluções serão chamadas de compostas. Temos as mesmas quatro soluções simples de antes, mais quatro soluções simples em que ocorre transição saturado-insaturado. Vamos marcar essas novas soluções com um  $t$ . Compondo todas as soluções possíveis, temos 30 casos<sup>4</sup>, sendo 12 simples e 18 compostos.

---

<sup>4</sup>Os casos em que  $\varphi_L = \varepsilon$  ou  $\varphi_R = \varepsilon$  podem ser incluídos em qualquer lugar, contanto que se aceite intervalos vazios na solução.

| $\varphi_L, \varphi_R < \varepsilon$ | $\varphi_L \leq \varepsilon \leq \varphi_R$ | $\varphi_L \geq \varepsilon \geq \varphi_R$ | $\varphi_L, \varphi_R > \varepsilon$ |
|--------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------|
| R1                                   | R2t                                         | R1t                                         | R1                                   |
| R2                                   | C1t                                         | C2t                                         | R2                                   |
| C1                                   | R1R2t                                       | R1tR2                                       | C1                                   |
| C2                                   | C1tR2                                       | R1tC2                                       | C2                                   |
| R1R2                                 | C1R2t                                       | R1C2t                                       | R1R2                                 |
| R1C2                                 | C1tC2                                       | C1C2t                                       | R1tR2t                               |
| C1R2                                 |                                             |                                             | R1C2                                 |
| C1C2                                 |                                             |                                             | C1R2                                 |
| C1tC2t                               |                                             |                                             | C1C2                                 |

Para resolver um caso composto, basta acharmos  $(\varphi^*, v^*)$  e compormos as soluções simples. Os 8 casos sem transição em que  $\varphi_L, \varphi_R < \varepsilon$  já foram resolvidos, e os 8 casos correspondentes quando  $\varphi_L, \varphi_R > \varepsilon$  são análogos, bastando trocar  $c$  por  $d$  na solução. Resta resolver os 4 casos simples com transição e os 12 casos compostos com transição.

### 4.3 Rarefação-1 com transição

Vamos supor que  $\varphi_L > \varepsilon > \varphi_R$ . O caso  $\geq$  é mais geral, mas dá basicamente a mesma conta. Vamos assumir que podemos conectar esses estados por uma rarefação-1 ( $\xi = \lambda_1 = v - \sqrt{p'}$ ).

Sabemos que  $(\varphi, v) = (\varphi_L, v_L)$  para  $\xi < \xi_L = v_L - d$  e que  $(\varphi, v) = (\varphi_R, v_R)$  para  $\xi > \xi_R = v_R - c$ . Para  $\xi_L < \xi < \xi_R$ , teremos  $\xi = \lambda_1$ . Enquanto  $\varphi > \varepsilon$ , teremos  $v = \xi + d$  e  $\varphi = \varphi_L \exp\left(\frac{v_L - \xi}{d} - 1\right)$ . Isso vale até que:

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_L \exp\left(\frac{v_L - \xi_1}{d} - 1\right) = \varepsilon \\ \xi_1 &= v_L - d \left(1 + \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_L}\right)\end{aligned}$$

Observe que  $\xi_1 > \xi_L$ .

O mesmo argumento vale pela direita. Enquanto  $\xi_2 < \xi < \xi_R = v_R - c$ ,  $v = \xi + c$  e podemos achar  $\varphi = \frac{\varphi_L^{\frac{d}{c}}}{\varepsilon^{\frac{d}{c}-1}} \exp\left(\frac{v_L - \xi}{c} - 1\right)$ . Donde  $\xi_2 = v_L - d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_L} - c = \xi_1 + (d - c) > \xi_1$

Para  $\varphi = \varepsilon$ , substituímos  $\xi = v - \sqrt{p'}$  na segunda equação do sistema original (2.3) e encontramos  $v = v_L - d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_L}$ . Isso concorda com os limites de  $v$  nos casos anteriores, portanto, a solução é contínua.

$$v = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi < \xi_L \\ \xi + d, & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_1 \\ v_L - d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_L}, & \text{se } \xi_1 < \xi_L < \xi_1 + (d - c) \\ \xi + c, & \text{se } \xi_1 + (d - c) < \xi < \xi_R \\ v_R, & \text{se } \xi > \xi_R \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi < \xi_L \\ \varphi_L \exp\left(\frac{v_L - \xi}{d} - 1\right), & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_1 \\ \varepsilon, & \text{se } \xi_1 < \xi_L < \xi_1 + (d - c) \\ \frac{\varphi_L^{\frac{d}{c}}}{\varepsilon^{\frac{d}{c}-1}} \exp\left(\frac{v_L - \xi}{c} - 1\right), & \text{se } \xi_1 + (d - c) < \xi < \xi_R \\ \varphi_R, & \text{se } \xi > \xi_R \end{cases}$$

Substituindo  $\xi = \xi_R$  na quarta equação para  $\varphi$ , encontramos a condição para termos uma rarefação-1:

$$\frac{\varphi_R}{\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{\varphi_L} \right)^{\frac{d}{c}} = \exp\left(\frac{v_L - v_R}{c}\right)$$

$$v_L - v_R = c \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon} + d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_L}$$

#### 4.4 Rarefação-2 com transição

Podemos prosseguir de maneira análoga ao caso anterior, mas vamos variar o raciocínio, sem usar a derivada de  $p$  em  $\varphi = \varepsilon$ . Suponha que  $\varphi_L < \varepsilon < \varphi_R$  e queremos conectar esses estados por uma rarefação-2. Já conhecemos a solução  $\xi < \xi_L = v_L + c$  e  $\xi > \xi_R = v_R - c$ . Suficientemente próximo a  $\xi_R$  pela esquerda, teremos:

$$\begin{aligned} v &= \xi - d \\ \varphi &= \varphi_R \exp\left(\frac{\xi - v_R}{d} - 1\right) \end{aligned}$$

Isso vale até que  $\varphi(\xi_4) = \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varphi_R \exp\left(\frac{\xi_4 - v_R}{d} - 1\right) \\ \xi_4 &= v_R + d \left(1 + \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_R}\right) \end{aligned}$$

Por outro lado, suficientemente próximo de  $\xi_L$  pela direita, temos:

$$\begin{aligned} v &= \xi - c \\ \varphi &= \varepsilon \exp\left(\frac{\xi - v_\varepsilon}{c} - 1\right) \end{aligned}$$

Onde  $v_\varepsilon$  é o valor que  $v$  assume quando  $\varphi = \varepsilon$ , ou seja,  $v_\varepsilon = v_R + d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_R}$ .

As expressões acima valem até que  $\varphi(\xi_3) = \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon \exp\left(\frac{\xi_3 - v_\varepsilon}{c} - 1\right) \\ \xi_3 &= \xi_4 + (c - d) \end{aligned}$$

Como  $\xi_3 < \xi_4$ , temos uma região em que  $\phi = \varepsilon$  e  $v = v_\varepsilon$ . Nessa região, não podemos ter  $\xi = \lambda_1$  nem  $\xi = \lambda_2$ , portanto temos que  $\varphi$  e  $v$  são constantes nesse intervalo.

Finalmente, analisando o valor de  $\varphi(\xi_L)$  pela direita e pela esquerda, concluimos que a condição inicial deve satisfazer:

$$v_L - v_R = d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_R} + c \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon}$$

$$v = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi < v_L + c \\ \xi - c, & \text{se } v_L + c < \xi < v_\varepsilon + c \\ v_\varepsilon, & \text{se } v_\varepsilon + c < \xi < v_\varepsilon + d \\ \xi - d, & \text{se } v_\varepsilon + d < \xi < v_R + d \\ v_R, & \text{se } \xi > v_R + d \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi < v_L + c \\ \varepsilon \exp\left(\frac{\xi - v_\varepsilon}{c} - 1\right), & \text{se } v_L + c < \xi < v_\varepsilon + c \\ \varepsilon, & \text{se } v_\varepsilon + c < \xi < v_\varepsilon + d \\ \varphi_R \exp\left(\frac{\xi - v_R}{d} - 1\right), & \text{se } v_\varepsilon + d < \xi < v_R + d \\ \varphi_R, & \text{se } \xi > v_R + d \end{cases}$$

## 4.5 Choques com transição

Aplicando a condição de salto:

$$\begin{aligned}
\xi_{\text{descontinuidade}} &= \frac{[\varphi v]}{[\varphi]} = \frac{[\varphi v^2 + p]}{[\varphi v]} \\
[\varphi v]^2 &= [\varphi][\varphi v^2 + p] \\
(\varphi_+ v_+ - \varphi_- v_-)^2 &= (\varphi_+ - \varphi_-)(\varphi_+ v_+^2 + p_+ - \varphi_- v_-^2 - p_-) \\
\varphi_+^2 v_+^2 - 2\varphi_+ \varphi_- v_+ v_- + \varphi_-^2 v_-^2 &= \varphi_+^2 v_+^2 - \varphi_+ \varphi_- v_-^2 + \varphi_-^2 v_-^2 - \varphi_+ \varphi_- v_+^2 + (\varphi_+ - \varphi_-)(p_+ - p_-) \\
\varphi_+ \varphi_- (v_+^2 - 2v_+ v_- + v_-^2) &= (\varphi_+ - \varphi_-)(p_+ - p_-) \\
\varphi_+ \varphi_- (v_+ - v_-)^2 &= (\varphi_+ - \varphi_-)(p_+ - p_-) \\
(v_+ - v_-)^2 &= \left( \frac{1}{\varphi_-} - \frac{1}{\varphi_+} \right) (p_+ - p_-) \\
[v]^2 &= - \left[ \frac{1}{\varphi} \right] [p]
\end{aligned}$$

Como  $[v] < 0$ , temos:

$$[v] = -\sqrt{-\left[\frac{1}{\varphi}\right] [p]} \quad (4.1)$$

Desse modo, a condição para termos um choque-1 com transição é:

$$v_R - v_L = -\sqrt{\left(\frac{1}{\varphi_L} - \frac{1}{\varphi_R}\right) (d^2(\varphi_R - \varepsilon) + c^2(\varepsilon - \varphi_L))}$$

Analogamente, em um choque-2 com transição:

$$v_R - v_L = -\sqrt{\left(\frac{1}{\varphi_R} - \frac{1}{\varphi_L}\right) (d^2(\varphi_L - \varepsilon) + c^2(\varepsilon - \varphi_R))}$$

## 4.6 Casos compostos

Para os casos rarefação-1/rarefação-2 (com ou sem transições) teremos:

$$v^* - v_L = \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + \sqrt{p'^*} \ln \frac{\varepsilon}{\varphi^*}$$

$$v_R - v^* = \sqrt{p'_R} \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon} + \sqrt{p'^*} \ln \frac{\varepsilon}{\varphi^*}$$

Somando as duas equações:

$$v_R - v_L = \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + \sqrt{p'_R} \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon} + 2\sqrt{p'^*} \ln \frac{\varepsilon}{\varphi^*}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varphi^*} = \exp \left( \frac{v_R - v_L - \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} - \sqrt{p'_R} \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}}{2\sqrt{p'^*}} \right)$$

$$\varphi^* = \varepsilon \exp \left( \frac{v_L - v_R + \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + \sqrt{p'_R} \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}}{2\sqrt{p'^*}} \right)$$

Apesar de  $\varphi^*$  não estar isolado, o valor de  $p'^*$  pode ser deduzido pelo caso (R1R2, R1tR2, etc.). Desse modo,  $\varphi^*$  fica definido. Para achar  $v^*$ , basta substituir em uma das equações originais:

$$v^* = v_L + \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + \sqrt{p'^*} \ln \frac{\varepsilon}{\varphi^*}$$

$$v^* = \frac{v_R + v_L + \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} - \sqrt{p'_R} \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}}{2}$$

Para chegar à condição para que esses casos aconteça, basta verificar as desigualdades envolvendo os  $\xi$  que delimitam cada intervalo:

$$v_R - v_L > \sqrt{p'_L} \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + \sqrt{p'_R} \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}$$

Quando  $\phi_L, \phi_R > \varepsilon$ , precisamos ainda distinguir R1R2 de R1tR2t. Para isso, basta checar respectivamente  $\varphi^* < \varepsilon$  e  $\varphi^* > \varepsilon$ . Mesmo as equações para  $\varphi^*$  sendo distintas, a inequação final é a mesma. Para R1R2, vale:

$$v_L - v_R > d \ln \frac{\varepsilon^2}{\varphi_L \varphi_R}$$

Enquanto que para R1tR2t, teremos:

$$v_L - v_R < d \ln \frac{\varepsilon^2}{\varphi_L \varphi_R}$$

Nos casos rarefação-1/choque-2 (com ou sem transições),

Os casos choque-1/rarefação-2 (com ou sem transições) são análogos.

Nos casos choque-1/choque-2 (com ou sem transições) chegamos à equação:

$$\sqrt{\varphi_L \varphi^* \varphi_R} (v_L - v_R) = \sqrt{\varphi_L} \sqrt{\varphi^* - \varphi_R} \sqrt{p^* - p_R} + \sqrt{\varphi_R} \sqrt{\varphi^* - \varphi_L} \sqrt{p^* - p_L}$$

Elevando ao quadrado duas vezes, chega-se a uma equação polinomial do quarto grau, que pode ser resolvida pelo Método de Ferrari, porém a conta é muito grande, sendo mais fácil resolver de forma numérica. No caso C1C2, essa equação pode ser facilmente reduzida a uma equação do segundo grau, para obter uma solução exata, conforme a seção 3.8.

## 5 SOLUÇÃO COMPLETA DO PROBLEMA DE RIEMANN

### 5.1 Caso Insaturado ( $\varphi_L, \varphi_R < \varepsilon$ )

Rarefação-1/rarefação-2

Condição:

$$v_R - v_L \geq c \left| \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right|$$

Solução:

$$v(\xi) = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi \leq v_L - c \\ \xi + c, & \text{se } v_L - c < \xi < v^* - c \\ v^*, & \text{se } v^* - c \leq \xi \leq v^* + c \\ \xi - c, & \text{se } v^* + c < \xi < v_R + c \\ v_R, & \text{se } \xi \geq v_R + c \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi \leq v_L - c \\ \varphi_L \exp\left(\frac{v_L - \xi}{c} - 1\right), & \text{se } v_L - c < \xi < v^* - c \\ \varphi^*, & \text{se } v^* - c \leq \xi \leq v^* + c \\ \varphi_R \exp\left(\frac{\xi - v_R}{c} - 1\right), & \text{se } v^* + c < \xi < v_R + c \\ \varphi_R, & \text{se } \xi \geq v_R + c \end{cases}$$

Onde:

$$v^* = \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{c}{2} \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R}$$

$$\varphi^* = \sqrt{\varphi_L \varphi_R} \exp \left( \frac{v_L - v_R}{2c} \right)$$

### Choque-1/Rarefação-2

Condições:

$$c \left( \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} - \sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} \right) < v_R - v_L < c \ln \frac{\varphi_R}{\varphi_L}$$

Solução:

$$v(\xi) = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ v^*, & \text{se } \xi_L < \xi \leq v^* + c \\ \xi - c, & \text{se } v^* + c < \xi < v_R + c \\ v_R, & \text{se } \xi \geq v_R + c \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ \varphi^*, & \text{se } \xi_L < \xi \leq v^* + c \\ \varphi_R \exp \left( \frac{\xi - v_R}{c} - 1 \right), & \text{se } v^* + c < \xi < v_R + c \\ \varphi_R, & \text{se } \xi \geq v_R + c \end{cases}$$

Onde:

$$2 \ln z + z - 1/z = \frac{v_L - v_R}{c} + \ln \frac{\varphi_R}{\varphi_L}$$

$$\phi^* = \phi_L z^2$$

$$v^* = v_R + c \ln \frac{\varphi^*}{\varphi_R}$$

$$\xi_L = \frac{\varphi_L v_L - \varphi^* v^*}{\varphi_L - \varphi^*}$$

### Rarefação-1/Choque-2

Condições:

$$c \left( \sqrt{\frac{\varphi_R}{\varphi_L}} - \sqrt{\frac{\varphi_L}{\varphi_R}} \right) < v_R - v_L < c \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R}$$

Solução:

$$v(\xi) = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi \leq v_L - c \\ \xi + c, & \text{se } v_L - c < \xi < v^* - c \\ v^*, & \text{se } v^* - c \leq \xi < \xi_R \\ v_R, & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi \leq v_L - c \\ \varphi_L \exp \left( \frac{v_L - \xi}{c} - 1 \right), & \text{se } v_L - c < \xi < v^* - c \\ \varphi^*, & \text{se } v^* - c \leq \xi < \xi_R \\ \varphi_R, & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases}$$

Onde:

$$2 \ln z + z - 1/z = \frac{v_L - v_R}{c} - \ln \frac{\varphi_R}{\varphi_L}$$

$$\phi^* = \phi_R z^2$$

$$v^* = v_L - c \ln \frac{\varphi^*}{\varphi_L}$$

$$\xi_R = \frac{\varphi_R v_R - \varphi^* v^*}{\varphi_R - \varphi^*}$$

### Choque-1/Choque-2

Condições:

$$v_L - v_R > \frac{c}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} |\varphi_R - \varphi_L|$$

$$\varphi^* < \varepsilon$$

Solução:

$$v(\xi) = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ v^*, & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_R \\ v_R, & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ \varphi^*, & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_R \\ \varphi_R, & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{v_L - v_R}{2c(\sqrt{\varphi_L} + \sqrt{\varphi_R})} \\
\varphi^* &= \varphi_L \varphi_R \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} \right)^2 \\
v^* &= v_L - \frac{c}{\sqrt{\varphi^* \varphi_L}} (\varphi^* - \varphi_L) \\
\xi_L &= \frac{\varphi^* v^* - \varphi_L v_L}{\varphi^* - \varphi_L} \\
\xi_R &= \frac{\varphi^* v^* - \varphi_R v_R}{\varphi^* - \varphi_R}
\end{aligned}$$

### Choque-1 com transição/Choque-2 com transição

Condições:

$$\begin{aligned}
v_L - v_R &> \frac{c}{\sqrt{\varphi_R \varphi_L}} |\varphi_R - \varphi_L| \\
\varphi^* &\geq \varepsilon
\end{aligned}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
v(\xi) &= \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ v^*, & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_R \\ v_R, & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases} \\
\varphi(\xi) &= \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi \leq \xi_L \\ \varphi^*, & \text{se } \xi_L < \xi < \xi_R \\ \varphi_R, & \text{se } \xi \geq \xi_R \end{cases}
\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\varphi_L \varphi^* \varphi_R} (v_L - v_R) &= \sqrt{\varphi_L} \sqrt{\varphi^* - \varphi_R} \sqrt{p^* - p_R} + \sqrt{\varphi_R} \sqrt{\varphi^* - \varphi_L} \sqrt{p^* - p_L} \\
v^* &= v_L - \sqrt{\frac{1}{\varphi_L} - \frac{1}{\varphi^*}} \sqrt{p^* - p_L} \\
\xi_L &= \frac{\varphi^* v^* - \varphi_L v_L}{\varphi^* - \varphi_L} \\
\xi_R &= \frac{\varphi^* v^* - \varphi_R v_R}{\varphi^* - \varphi_R}
\end{aligned}$$

## 5.2 Caso Supersaturado ( $\varphi_L, \varphi_R > \varepsilon$ )

### Soluções análogas

Nesses casos, basta trocar  $c$  por  $d$  na solução:

Rarefação-1/Rarefação-2

Rarefação-1/Choque-2

Choque-1/Rarefação-2

Choque-1/Choque-2

### Rarefação-1 com transição/rarefação-2 com transição

Condições:

$$\begin{aligned}
v_R - v_L &\geq d \left| \ln \frac{\varphi_L}{\varphi_R} \right| \\
v_L - v_R &< d \ln \frac{\varepsilon^2}{\varphi_L \varphi_R}
\end{aligned}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
v &= \begin{cases} v_L, \text{ se } \xi < v_L - d \\ \xi + d, \text{ se } v_L - d < \xi < v_{\varepsilon_1} - d \\ v_{\varepsilon_1}, \text{ se } v_{\varepsilon_1} - d < \xi < v_{\varepsilon_1} - c \\ \xi + c, \text{ se } v_{\varepsilon_1} - c < \xi < v^* - c \\ v^*, \text{ se } v^* - c < \xi < v^* + c \\ \xi - c, \text{ se } v^* + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + c \\ v_{\varepsilon_2}, \text{ se } v_{\varepsilon_2} + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + d \\ \xi - d, \text{ se } v_{\varepsilon_2} + d < \xi < v_R + d \\ v_R, \text{ se } \xi > v_R + d \end{cases} \\
\varphi &= \begin{cases} \varphi_L, \text{ se } \xi < v_L - d \\ \varphi_L \exp\left(\frac{v_L - \xi}{d} - 1\right), \text{ se } v_L - d < \xi < v_{\varepsilon_1} - d \\ \varepsilon, \text{ se } v_{\varepsilon_1} - d < \xi < v_{\varepsilon_1} - c \\ \varepsilon \exp\left(\frac{v_{\varepsilon_1} - \xi}{c} - 1\right), \text{ se } v_{\varepsilon_1} - c < \xi < v^* - c \\ \varphi^*, \text{ se } v^* - c < \xi < v^* + c \\ \varepsilon \exp\left(\frac{\xi - v_{\varepsilon_2}}{c} - 1\right), \text{ se } v^* + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + c \\ \varepsilon, \text{ se } v_{\varepsilon_2} + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + d \\ \varphi_R \exp\left(\frac{\xi - v_R}{d} - 1\right), \text{ se } v_{\varepsilon_2} + d < \xi < v_R + d \\ \varphi_R, \text{ se } \xi > v_R + d \end{cases}
\end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
v_{\varepsilon_1} &= v_L - d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_L} \\
v_{\varepsilon_2} &= v_R + d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_R} \\
\varphi^* &= \frac{(\varphi_L \varphi_R)^{\frac{d}{2c}}}{\varepsilon^{\frac{d}{c}-1}} \exp \left( \frac{v_L - v_R}{2c} \right) \\
v^* &= \frac{v_L + v_R}{2} + \frac{d}{2} \ln \frac{\phi_L}{\phi_R}
\end{aligned}$$

### 5.3 Caso Misto ( $\varphi_L \leq \varepsilon \leq \varphi_R$ )

**Rarefação-1/Rarefação-2 com transição**

Condição:

$$v_R - v_L \geq c \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + d \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}$$

Solução:

$$v(\xi) = \begin{cases} v_L, & \text{se } \xi \leq v_L - c \\ \xi + c, & \text{se } v_L - c < \xi < v^* - c \\ v^*, & \text{se } v^* - c \leq \xi \leq v^* + c \\ \xi - c, & \text{se } v^* + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + c \\ v_{\varepsilon_2}, & \text{se } v_{\varepsilon_2} + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + d \\ \xi - d, & \text{se } v_{\varepsilon_2} + d < \xi < v_R + d \\ v_R, & \text{se } \xi > v_R + d \end{cases}$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_L, & \text{se } \xi \leq v_L - c \\ \varphi_L \exp\left(\frac{v_L - \xi}{c} - 1\right), & \text{se } v_L - c < \xi < v^* - c \\ \varphi^*, & \text{se } v^* - c \leq \xi \leq v^* + c \\ \varepsilon \exp\left(\frac{\xi - v_{\varepsilon_2}}{c} - 1\right), & \text{se } v^* + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + c \\ \varepsilon, & \text{se } v_{\varepsilon_2} + c < \xi < v_{\varepsilon_2} + d \\ \varphi_R \exp\left(\frac{\xi - v_R}{d} - 1\right), & \text{se } v_{\varepsilon_2} + d < \xi < v_R + d \\ \varphi_R, & \text{se } \xi \geq v_R + d \end{cases}$$

Onde:

$$v_{\varepsilon_2} = v_R + d \ln \frac{\varepsilon}{\varphi_R}$$

$$\varphi^* = \varepsilon \exp\left(\frac{v_L - v_R + c \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} + d \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}}{2c}\right)$$

$$v^* = \frac{v_R + v_L + c \ln \frac{\varphi_L}{\varepsilon} - d \ln \frac{\varphi_R}{\varepsilon}}{2}$$

**Choque-1 com transição/Rarefação-2**

**Choque-1/Rarefação-2 com transição**

**Choque-1 com transição/Choque-2**

#### **5.4 Caso Misto ( $\varphi_L \geq \varepsilon$ , $\varphi_R \leq \varepsilon$ )**

Todas as soluções são análogos às do outro caso misto.

## 6 RESULTADOS

Tendo a solução completa para todas as condições iniciais possíveis para o problema de Riemann, é possível construir um programa no computador que identifica o caso, resolve a equação e tem como saída os gráficos para  $v(\xi)$ ,  $\phi(\xi)$ ,  $v(x, t)$  e  $\phi(x, t)$ , a representação dos valores importante de  $\xi$  no plano  $x \times t$ , o tipo de solução (rarefação-1/rarefação-2, choque-1/rarefação-2, etc.) e valores relevantes ( $v^*$ ,  $\phi^*$ ,  $p^*$ ,  $\xi_L$ ,  $\xi_R$ ). O progrma também retorna erros caso  $\varepsilon$  ou  $\phi$  sejam maiores que 1 ou negativos. Para esse fim, foi usado o software open source de computação numérica SciLab.

Algumas simplificações podem ser feitas, tratando alguns casos como degenerações de outros. Por exemplo, um caso com apenas uma rarefação pode ser tratado como rarefação-1/rarefação-2 com um intervalo degenerado.

Abaixo apresentamos alguns dos resultados obtidos para condições iniciais diversas. Os parâmetros utilizados foram  $c = 1$ ,  $d = 100$  e  $\varepsilon = .7$ . Todos os valores são arbitrários e em unidades arbitrárias e não necessariamente representam uma condição inicial fisicamente possível.

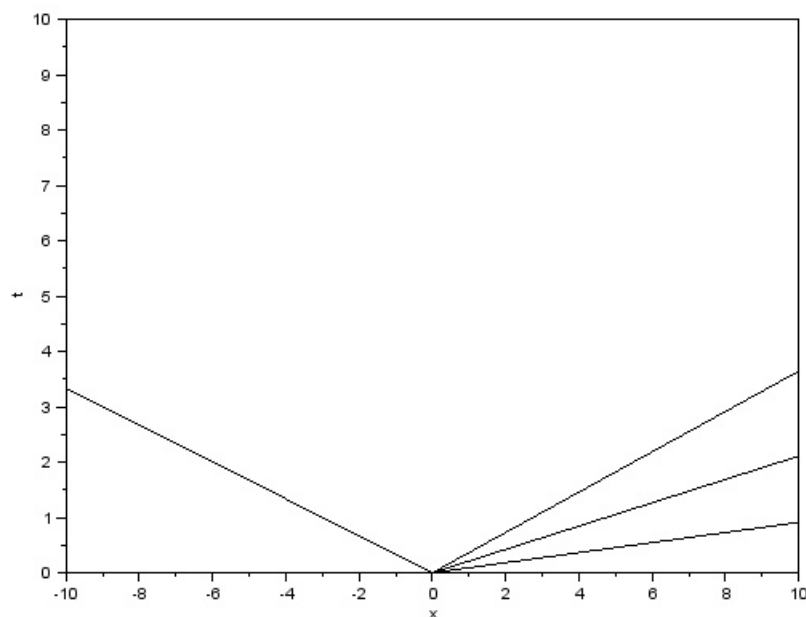


Figura 15: Exemplo 1

Nesse primeiro exemplo (figura 15), temos a condição inicial  $\phi_L = .3$ ,  $v_L = -2$ ,  $\phi_R = .5$ ,  $v_R = 10$ . A saída é do tipo rarefação-1/rarefação-2. A rarefação-1 ocorre entre  $\xi = -3$  e  $\xi = 2.74$  e a rarefação-2, entre  $\xi = 4.74$  e  $\xi = 11$ . Além disso, temos  $\phi^* = .001$  e  $v^* = 3.74$ .

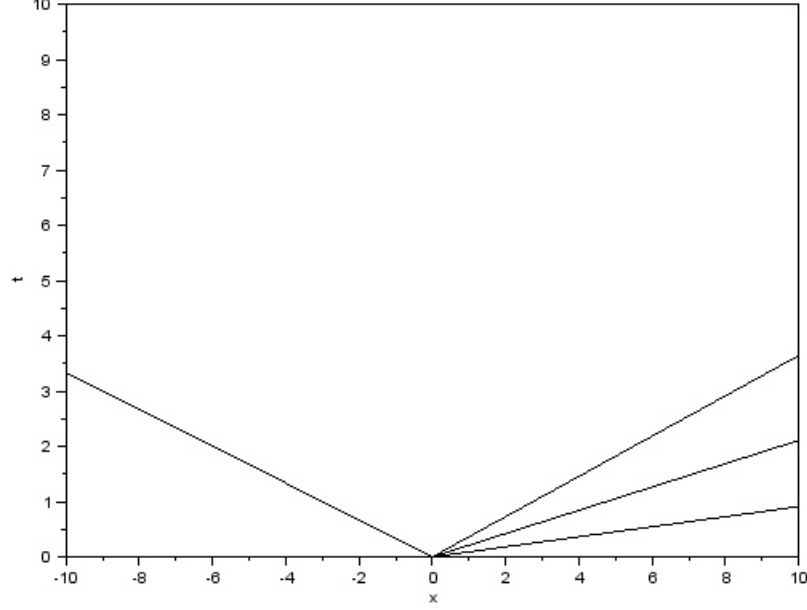


Figura 16: Exemplo 2

Na figura 16 temos o resultado para a condição inicial  $\phi_L = .3$ ,  $v_L = 2$ ,  $\phi_R = .3$ ,  $v_R = -1$ , que gera uma solução do tipo choque-1/choque-2 com saturação. Entre  $\xi_L = .62$  e  $\xi_R = 1.62$ , temos  $\phi^* = .70008$  e  $v^* = .5$ . Observe que a supersaturação é mínima, da ordem de  $10^{-4}\varepsilon$ , mesmo tendo sido usado um coeficiente  $d = 100$ , relativamente pequeno.

Por fim, a figura 17 apresenta o resultado para a condição inicial  $\phi_L = .3$ ,  $v_L = -2$ ,  $\phi_R = .71$  e  $v_R = 2$ . Nesse caso, o meio poroso já está além de sua saturação e ocorre uma rarefação-1/rarefação-2 com transição na segunda rarefação. A primeira rarefação ocorre entre  $\xi = -3$  e  $\xi = -1.8$ . Daí até  $\xi = .12$ , temos  $\phi^* = .16$  e  $v^* = -.88$ . Entre  $\xi = 1.58$  e  $\xi = 100.58$ , ocorre a transição (nessa região,  $\phi = \varepsilon$ ). A rarefação-2 continua até  $\xi = 102$ .

A partir disso, podemos fazer duas coisas. A primeira é adaptar o pro-

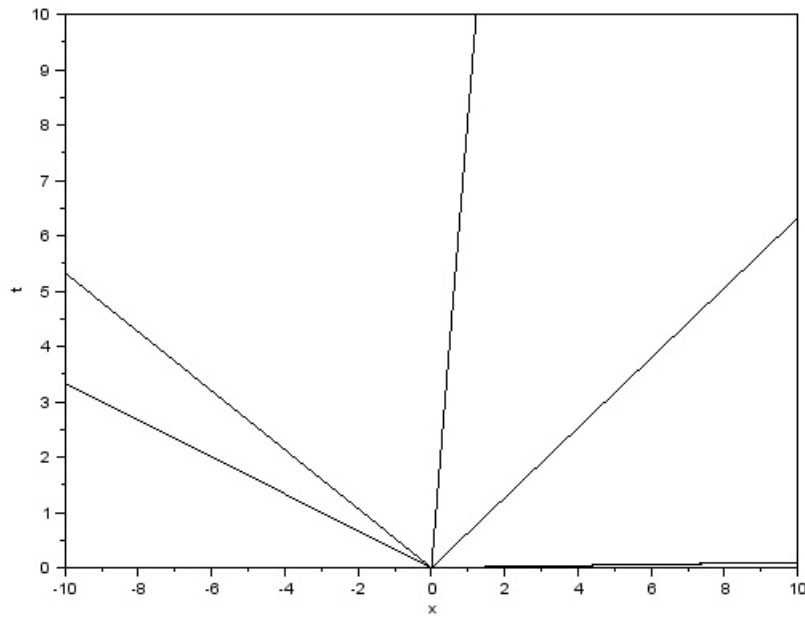


Figura 17: Exemplo 3

grama com pequenos ajustes para transformá-lo em uma função que tem como entrada as condições iniciais e um intervalo de tempo e tem como saída um vetor que representa os valores de  $\phi$  e  $v$  em função de  $x$  após esse intervalo de tempo. O objetivo dessa função é ser usada num trabalho futuro para a implementação do Método de Glimm.

A segunda é comparar os resultados obtidos para o modelo com elasticidade e sem elasticidade, para verificar o que acontece quando o meio poroso tende à rigidez, ou seja,  $d \rightarrow \infty$ . Sabemos que quando o meio poroso está insaturado e não há transição, o resultado será idêntico. O único caso que precisamos verificar é o choque-1/choque-2 com transição. Nesse caso, com as condições iniciais  $\phi_L = .3$ ,  $v_L = 2$ ,  $\phi_R = .3$  e  $v_R = -1$ , e usando os parâmetros  $c = 1$  e  $\varepsilon = .7$ , temos os seguintes resultados para diferentes valores de  $d$ :

| $d$    | $\xi_L$   | $\xi_R$   | $p^*$     | $v^*$ | $\phi^*$ |
|--------|-----------|-----------|-----------|-------|----------|
| $10^2$ | -.6247803 | 1.6247803 | 1.4811512 | .5    | .7000781 |
| $10^3$ | -.6249978 | 1.6249978 | 1.4812490 | .5    | .7000008 |
| $10^4$ | -.6250000 | 1.6250000 | 1.4812500 | .5    | .7000000 |

Enquanto isso, o modelo sem elasticidade nos dá  $\xi_L = -.625$ ,  $\xi_R = 1.625$ ,  $p^* = 1.48125$ ,  $v^* = .5$  e, trivialmente,  $\phi^* = .7$ . Observe que para  $d$  suficientemente grande, o erro se torna tão pequeno que o resultado da simulação numérica é igual. O mesmo comportamento pode ser observado para diferentes valores de condições iniciais,  $\varepsilon$  e  $c$ .

## CONCLUSÃO

O modelo apresentado gera resultados tão próximos quanto se queira do modelo de referência quando  $d \rightarrow \infty$ , portanto, pode servir, ao menos do ponto de vista numérico, como uma generalização. Porém, a grande vantagem do modelo apresentado é que ele não perde a hiperbolicidade com a transição saturado-insaturado, tornando possível a aplicação do Método de Glimm.

Além dessa sugestão para trabalhos futuros, temos ainda a generalização do modelo para duas ou três dimensões espaciais, inclusão de poluentes quimicamente inertes no líquido, análise da distribuição de temperatura.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALAZMI, B.; VAFAI, K. *Analysis of variants within the porous models*. J. Heat Transfer 122, 2000.
- [2] ARIS, R. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall, 1962.
- [3] ASPLUND, E.; BUNGART, L. *A first course in integration*. Holt, Rinehart & Winston, 1966.
- [4] ATKIN, R. J.; CRAINE, R. E. *Continuum theories of mixtures: basic theory and historical development*. Q. J. Mech. Appl. Math. 29, 1976.
- [5] CHADWICK, P. *Continuum Mechanics*. George Allen & Unwin, 1976.
- [6] GAMA, R. M. S.; PEDROSA, F. M. C. M. L. *Modeling the saturation process of flows through rigid porous media by the solution of a nonlinear hyperbolic system with one constraint unknown*. J. Appl. Math. Mech. 92, 2012.
- [7] GAMA, R. M. S.; MARTINS COSTA, M. L. *Numerical simulation of one-dimensional flows through porous media with shock waves*. Int. J. Numer. Methods Eng. 52, 2001.
- [8] SCHEIDEGGER, A. E. *The Physics of Flow Through Porous Media*. University of Toronto Press, 1974.
- [9] SLATTERY, C. *Advanced transport phenomena*. Springer-Verlag, 1999.
- [10] SMOLLER, J. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [11] SPENCER, A. J. M. *Continuum Mechanics*. Longman, 1980.
- [12] WHITAKER, S. *Advances in Theory of Fluid Motion in Porous Medium*. I/EC, 1969.