



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Rui Aquino dos Santos da Silva

**Dinâmica de Líquidos de Fermi bidimensionais com interação de
densidade e quadrupolo.**

Rio de Janeiro

2020

Rui Aquino dos Santos da Silva

Dinâmica de Líquidos de Fermi bidimensionais com interação de densidade e quadrupolo.



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci

Rio de Janeiro

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586

Silva, Rui Aquino dos Santos da.
Dinâmica de Líquidos de Fermi bidimensionais com
interação de densidade e quadrupolo / Rui Aquino dos
Santos da Silva. - 2020.
55 f.: il.

Orientador: Daniel Gustavo Barci.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares

1. Teoria quântica de campos - Teses. 2. Grupo de
renormalização - Teses. 3. Green, Funções de - Teses.
4. Férmions - Teses. I. Barci, Daniel Gustavo. II. Univer-
sidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física
Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145

Bibliotecária: Denise da Silva Gayer CRB7/5069

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Rui Aquino dos Santos da Silva

Dinâmica de Líquidos de Fermi bidimensionais com interação de densidade e quadrupolo.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 07 de maio de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Profa. Dra. Zochil González Arenas
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Luca Roberto Augusto Moriconi
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação à minha mãe. É por ela que tudo começou.

AGRADECIMENTOS

Começo agradecendo à minha família. A base de tudo que produzo e faço, e minha fortaleza quando preciso. Agradeço à minha mãe, que nessa jornada do mestrado se tornou alguém que eu discordo mais, mas que ao mesmo tempo me ensina a ser independente, ter compaixão e resiliência. Mãe, você é a pessoa mais importante da minha vida, e eu te amo profundamente. À minha irmã, fonte de inspiração e aprendizado. Tudo em você tem um impacto em mim, mesmo você não sabendo, desde os pops ruins até o curso de análise na reta. Me orgulho da pessoa que você é. Ao meu tio, que é a pessoa que mais reflete quem eu sou e mais acrescenta à pessoa que quero ser, admiro você de maneira única, espero que você consiga reconhecer isso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Agradeço pelo financiamento, ajudando no meu sustento, no da minha pesquisa, e no da minha família.

Agradeço ao meu orientador, Daniel Barci, que novamente digo que define não apenas o físico que aspiro ser, mas a pessoa que quero me tornar. Embora você tenha me aguentado por bastante tempo já, acredito que ainda não passou metade do conhecimento e sabedoria que tem. Tenho o orgulho de te chamar de mestre, e de amigo. Acredite, é difícil dizer o que você representa e representou pra mim nesses 6 anos de convivência.

Depois de anos de altos e baixos, consigo compreender agora o papel que a UERJ teve na minha formação como pessoa e como profissional. Agradeço à ela pela confiança depositada em mim, e espero que tenha trabalhado o suficiente para recompensar o investimento. Espero trabalhar ainda mais.

Agradeço ao meu bonde, Pedro, Valadão, Stark, LF, Juan e Greenhalgh, posso contar com (alguns de) vocês em todos os momentos, e fico feliz que minha loucura seja igual à de vocês. Agradeço à Ranna, Kary, Tainá, Rodolfo, Nathan, Flávia, Carlos, Katrine, Nathália, Apóllo, Ed, cada um à sua maneira, pelo apoio, risadas e momentos.

Qualidade sem resultado é inútil. Resultado sem qualidade é entediante.

Johan Cruijff

The way to get good ideas is to get lots of ideas, and throw the bad ones away.

Linus Pauling

Turns out life isn't a puzzle that can just be solved one time and it's done.

You got to wake up everyday and solve it again.

Chidi Anagonye

RESUMO

SILVA, R. A. S. *Dinâmica de Líquidos de Fermi bidimensionais com interação de densidade e quadrupolo.* 2020. 55 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Nós revisitamos o método da bosonização multidimensional, e computamos os resultados clássicos da teoria, aprendendo a proposta do método e entendendo como descrever um sistema fermiônico caracterizado por uma superfície de Fermi. Nós consideramos um modelo de líquido de Fermi com interações de densidade assim como quadrupólo do tipo "forward scattering" parametrizadas pelos parâmetros de Landau F_0 e F_2 . Usando a bosonização e uma técnica de decimação, nós computamos os modos coletivos e as funções espectrais para uma enorme variedade de interações, variando desde forte repulsão para forte atração em todos os canais de momento angular. Nós apresentamos um diagrama de fases mostrando uma região no espaço de parâmetros onde a estrutura dos modos coletivos muda abruptamente, possivelmente sinalizando uma transição de fase dinâmica.

Palavras-chave: Sistemas Fortemente Correlacionados. Líquidos de Fermi. Dinâmica. Bosonização.

ABSTRACT

SILVA, R. A. S. *Two-dimensional Fermi liquid dynamics with density-density and quadrupolar interactions*. 2020. 55 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

We revisit the multidimensional bosonization method, and compute the classical results of the theory, learning the approach and understanding how to describe a fermionic system characterized by a Fermi surface. We consider a Fermi liquid model with density-density as well as quadrupolar forward scattering interactions parametrized by the Landau parameters F_0 and F_2 . Using bosonization and a decimation technique, we compute collective modes and spectral functions for a huge range of interactions, ranging from strong repulsion to strong attraction in either angular momentum channel. We present a dynamical phase diagram showing a region of parameters where the collective mode structure changes abruptly, possibly signaling a dynamical phase transition.

Keywords: Strongly Correlated Systems. Fermi Liquids. Dynamics. Bosonization.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|----------|--|----|
| Figura 1 | - Geração dos Subespaços \mathcal{H}_i a partir do vácuo de Fock | 16 |
| Figura 2 | - Espaço de Hilbert restrito à vizinhança da superfície de Fermi | 18 |
| Figura 3 | - Visão geométrica de um dos processos de espalhamento permitidos | 20 |
| Figura 4 | - Course-grain da Superfície de Fermi | 21 |
| Figura 5 | - Modos de Deformação da superfície de Fermi | 32 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|---|----|
| Gráfico 1 - Parte real da solução da equação $D^+(s) = 0$ | 39 |
| Gráfico 2 - Parte imaginária da solução da equação $D^+(s) = 0$ | 39 |
| Gráfico 3 - Diagrama de fase dinâmico no plano $\alpha_2 - \alpha_0$ | 41 |
| Gráfico 4 - Parte real da solução da equação $D^-(s) = 0$ | 43 |
| Gráfico 5 - Parte imaginária da solução da equação $D^-(s) = 0$ | 43 |
| Gráfico 6 - Função Espectral Normalizada para os Modos Simétricos na região repulsiva | 46 |
| Gráfico 7 - Função Espectral Normalizada para os Modos Simétricos na região atrativa fraca | 47 |
| Gráfico 8 - Função Espectral Normalizada para os Modos Simétricos na região de Pomeranchuk | 47 |
| Gráfico 9 - Função Espectral Normalizada para os Modos Anti-Simétricos na região fortemente repulsiva | 48 |
| Gráfico 10 - Função Espectral Normalizada para os Modos Anti-Simétricos na região repulsiva fraca | 49 |
| Gráfico 11 - Função Espectral Normalizada para os Modos Anti-Simétricos na região de Pomeranchuk | 49 |

SUMÁRIO

| | | |
|-------|--|----|
| | INTRODUÇÃO | 11 |
| 1 | BOSONIZAÇÃO MULTIDIMENSIONAL | 13 |
| 1.1 | Espaço de Fock | 13 |
| 1.1.1 | <u>Operadores de Criação e Aniquilação</u> | 13 |
| 1.1.2 | <u>Sistemas de várias partículas</u> | 15 |
| 1.2 | Líquido de Fermi e Grupo de Renormalização | 17 |
| 1.3 | "Patches" e Construção Geométrica | 20 |
| 1.4 | Álgebra de operadores bosônicos | 24 |
| 1.5 | Integral de Caminho e Estados Coerentes | 26 |
| 1.6 | Dinâmica Semiclássica da Superfície de Fermi | 30 |
| 2 | LÍQUIDOS DE FERMI COM INTERAÇÃO DE DENSIDADE E QUADRUPOLO | 32 |
| 2.1 | Modelo para as interações | 32 |
| 2.2 | Método da Decimação | 34 |
| 2.3 | Funções de Green | 36 |
| 2.4 | Modos Coletivos | 38 |
| 2.4.1 | <u>Modos Coletivos Simétricos</u> | 38 |
| 2.4.2 | <u>Modos Anti-simétricos</u> | 42 |
| 2.4.3 | <u>Regime de Pomeranchuk</u> | 44 |
| 2.5 | Funções Espectrais | 45 |
| | CONCLUSÃO | 51 |
| | REFERÊNCIAS | 53 |

INTRODUÇÃO

Recentemente tem-se apresentado na comunidade científica um interesse por sistemas fora do equilíbrio. Embora as bases que se tem de sistemas fortemente correlacionados sejam no equilíbrio (e nessa região ainda se tem muito a caminhar), estudar a dinâmica desses sistemas tem-se mostrado um terreno fértil para toda uma gama de fenômenos (HEYL, 2018) e configurações (NESSI; IUCCI; CAZALILLA, 2014).

Paralelamente, existe o interesse no estudo de Líquidos de Fermi com interações quadrupolares. Especula-se sua relevância em descrever comportamentos não esperados em sistemas eletrônicos fortemente correlacionados (FRADKIN et al., 2010), assim como sua importância na descrição da transição de fase quântica isotrópica-nemática (OGANESYAN; KIVELSON; FRADKIN, 2001).

Unindo os dois interesses, ter uma descrição da dinâmica de sistemas fortemente correlacionados pode se mostrar de grande utilidade para a observação da resposta de sistemas que apresentam a interação quadrupolar como relevante. Supercondutores a base de Ferro (FERNANDES; CHUBUKOV; SCHMALIAN, 2014) e Sistemas Hall quânticos com níveis de Landau parcialmente preenchidos (BARCI et al., 2002; FRADKIN; KIVELSON, 1999; WEXLER; DORSEY, 2001; FELDMAN et al., 2016) são sistemas que mostram a relevância de interações quadrupolares na sua descrição.

Com essa motivação em mente, esse trabalho terá como objetivo o estudo da dinâmica de Líquidos de Fermi com interações quadrupolares e de densidade. Para a descrição do Líquido de Fermi, será usado o método da bosonização multidimensional, onde se consegue uma descrição não perturbativa do sistema e parametriza-se as deformações da superfície de Fermi em bósons quirais. Escreve-se uma equação de transporte, análoga à da Teoria de Líquidos de Fermi (BAYM; PETHICK, 1991). Usando uma base de momento angular, a equação pode ser mapeada em um conjunto de infinitos osciladores harmônicos acoplados. Cada oscilador descreve uma deformação da superfície de Fermi com uma simetria específica. Computou-se então as funções de Green exatamente usando um procedimento recursivo chamado decimação (CALVO; PASTAWSKI, 2006); uma implementação particular da teoria do grupo de renormalização no espaço real (SILVA; KOILLER, 1981; SOKOLOFF; JOSÉ, 1982; DOMANY et al., 1983). Olhando para as singularidades das funções de Green, computou-se os modos coletivos e as funções espectrais do sistema. Contrói-se um diagrama de fase dinâmico em função da intensidade das interações (constantes de acoplamento), e por fim se identifica nesse diagrama uma transição de fase dinâmica devido à mudanças abruptas da dinâmica da superfície de Fermi.

A dissertação é organizada de forma que na Seção 1.1, introduz-se a base de mecânica quântica estatística para descrever um sistema metálico com potencial químico não nulo. Nas Seções 1.2 e 1.3 aplicam-se vínculos à superfície de Fermi para bosonizar o sistema;

nas seções 1.4, 1.5 e 1.6, apresenta-se a teoria da bosonização e as bases do formalismo que vai ser usado para a descrição da dinâmica do Líquido de Fermi. Na Seção 2.1 é introduzido o modelo para as interações; na seção 2.2 é explicado o Método da Decimação; na seção 2.3 é apresentada as funções de Green; e nas seções 2.4 e 2.5 são apresentados e discutidos os resultados desse trabalho, os modos coletivos e as funções espectrais, respectivamente.

1 BOSONIZAÇÃO MULTIDIMENSIONAL

Este capítulo tem como objetivo revisar a Bosonização Multidimensional, método não-perturbativo usado para a descrição de sistemas metálicos à densidade finita. Mas antes, certos conceitos importantes serão introduzidos para que a abordagem de tais sistemas seja feita de forma mais natural possível.

1.1 Espaço de Fock

A discussão terá início introduzindo algumas noções de mecânica quântica para vários-corpos, porém não fazendo a tradicional abordagem falando das funções de onda anti-simetrizadas/simetrizadas. Será introduzido o modelo do oscilador harmônico quântico para a descrição de uma partícula e depois esse modelo será evoluído de forma que descreva sistemas de mecânica estatística quântica.

1.1.1 Operadores de Criação e Aniquilação

Em unidades naturais, define-se a hamiltoniana do oscilador harmônico quântico como

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{q}^2 + \hat{k}^2) - \frac{\omega}{2}, \quad (1)$$

Onde \hat{q} é o operador posição, \hat{k} é o operador momento, ω é a frequência angular de oscilação do sistema e o termo $\frac{\omega}{2}$ é o termo de energia de ponto zero. É importante formalizar que todos os operadores e vetores introduzidos nessa sessão pertencem a um espaço de Hilbert \mathcal{H} , definido como o espaço vetorial das funções quadrado-integráveis e complexas. As relações de comutação dos operadores são:

$$[\hat{q}, \hat{k}] = i; [\hat{q}, \hat{q}'] = [\hat{k}, \hat{k}'] = 0. \quad (2)$$

Define-se agora:

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{k}}{\sqrt{2}}; \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{k}}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger chamam-se operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Substituindo na hamiltoniana, Eq.(1), temos:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (4)$$

Usando as Eqs.(2), calcula-se as relações de comutação para os operadores de criação e aniquilação,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 ; [\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0. \quad (5)$$

O efeito destes operadores é entendido ao analisar o espectro de energia. Considerando as relações de comutação entre a hamiltoniana e esses operadores,

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega \hat{a}^\dagger \text{ e } [\hat{H}, \hat{a}] = -\omega \hat{a}, \quad (6)$$

e operando $\hat{H}\hat{a}^\dagger$ e $\hat{H}\hat{a}$ em um ket de energia $|E\rangle \in \mathcal{H}$ tal que $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$, tem-se

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger |E\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{H} |E\rangle + \omega \hat{a}^\dagger |E\rangle = (E + \omega) \hat{a}^\dagger |E\rangle \quad (7)$$

$$\hat{H}\hat{a} |E\rangle = \hat{a} \hat{H} |E\rangle - \omega \hat{a} |E\rangle = (E - \omega) \hat{a} |E\rangle. \quad (8)$$

Os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} nos permitem subir ou descer nos níveis do espectro de energia. Define-se o estado fundamental, $|0\rangle$, como o estado aniquilado por \hat{a} ,

$$\hat{a} |0\rangle = 0. \quad (9)$$

E também o operador número

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (10)$$

Note que a hamiltoniana, Eq.(4), é uma função linear do operador número. Logo, \hat{n} pode ser diagonalizado simultaneamente com \hat{H} . Denota-se um auto-estado de energia de \hat{n} pelo seus autovalores n , então

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (11)$$

Então, para finalizar, a operação de \hat{a} e \hat{a}^\dagger em $|n\rangle$ é dada por

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (12)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (13)$$

Todo esse formalismo é construído para a descrição de uma partícula, como foi tido anteriormente. Embora a discussão tenha sido motivada com o oscilador harmônico quântico,

o importante foi a introdução dos operadores de criação e aniquilação, os quais permitem representar de forma conveniente os estados de várias-partículas e os operadores de vários-corpos. Demonstrações dessa conveniência são por exemplo a habilidade de gerar todo o espaço de Hilbert \mathcal{H} a partir da aplicação desses operadores em um único estado de referência (o estado fundamental); outro exemplo é eles fornecerem uma base para a álgebra dos operadores do espaço de Hilbert (NEGELE; ORLAND, 1988).

1.1.2 Sistemas de várias partículas

Tendo introduzido a importância dos operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} , generaliza-se agora o formalismo. Pode-se rotular uma partícula por seu momento, por exemplo, \mathbf{k} , onde \mathbf{k} é um vetor. Para duas partículas, os rótulos podem ser \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 . Para construir um ket de estado para uma partícula, tem-se:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{k}\rangle. \quad (14)$$

Para duas partículas,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\rangle. \quad (15)$$

E, de forma geral,

$$\prod_{i=1}^N \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N\rangle. \quad (16)$$

O ket definido na Eq.(16) é dito um ket do estado de Fock. Como cada entrada do ket define de forma completa o estado de uma partícula, pode-se definir o Espaço de Fock \mathcal{F} como o espaço que compreende todos os estados de todas as partículas do sistema. A Eq.(14) pode ser reescrita como

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0, 0, 0, \dots, 0\rangle = |\mathbf{k}, 0, 0, \dots, 0\rangle. \quad (17)$$

Onde $|0\rangle = |0, 0, 0, \dots, 0\rangle$ é o vácuo do espaço de Fock. Já a Eq.(5) pode ser generalizada da forma,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}; [\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0. \quad (18)$$

Note que na Eq.(16), o número N de partículas está fixo. Considera-se a situação mais geral na qual a priori N não está fixo. Uma intuição ingênua diria que as entradas do ket na Eq.(16) não iriam ter fim, o que está equivocado. Ao invés disso, considera-se um

espaço de estados maior de tal forma que o número de partículas flutue. O curioso é que ao levar essa situação em conta, lida-se naturalmente com um *Ensemble Grand Canônico*, usando a terminologia de Mecânica Estatística. Dito isso, ao definir-se o Espaço de Fock de um número indefinido de partículas, naturalmente uma formalidade maior do que apresentada anteriormente será necessária.

Denota-se por \mathcal{H}_0 o espaço de Hilbert sem partículas, \mathcal{H}_1 o espaço de Hilbert com apenas uma partícula, e em geral, \mathcal{H}_N o espaço de Hilbert para N-partículas. A soma direta desses espaços,

$$\mathcal{F} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_N \oplus \dots = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i \quad (19)$$

é chamada de espaço de Fock (ALTLAND; SIMONS, 2010). Note o detalhe sutil de que a soma direta não para em N, logo, tem-se um número indefinido de partículas. Se alguém quiser trabalhar no *Ensemble Canônico*, é só parar a soma no termo N. O subespaço com nenhuma partícula é um espaço uni-dimensional composto pelo vetor $|0\rangle$, ou, o vácuo do espaço de Fock. Os subespaços com número de partículas bem definido são construídos de tal forma que são ortogonais entre si no sentido que o produto interno entre dois subespaços diferentes é zero.

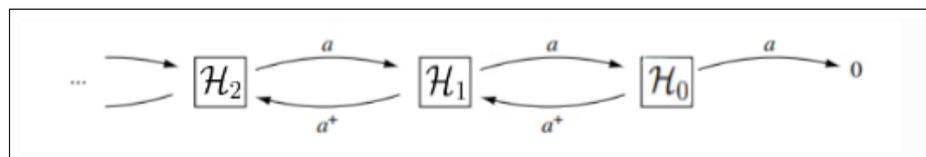
Para a construção dos operadores, lembre-se de uma das já mencionadas conveniências do formalismo dos operadores de criação e aniquilação, a de que eles formam uma base para a álgebra dos outros operadores. Isso significa que, definindo-os (ALTLAND; SIMONS, 2010) de forma que $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, e tendo como efeito a criação e aniquilação de partículas nos subespaços \mathcal{H}_i , como vemos nas equações abaixo e na Fig.(1),

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_{i-1} \quad (20)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_{i+1}, \quad (21)$$

chega-se à conclusão que qualquer operador $\hat{\mathcal{O}}$, desde que representado como função dos

Figura 1 - Geração dos Subespaços \mathcal{H}_i a partir do vácuo de Fock



Legenda: Representação Pictórica do efeito dos operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ nos Subespaços \mathcal{H}_i .

Fonte: ALTLAND; SIMONS, 2010, p.45. Adaptado pelo autor.

operadores de criação e aniquilação, $\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger]$, é bem definido no espaço de Fock. E isso independe de que \mathcal{O} atue apenas nos kets de um subespaço específico \mathcal{H}_i .

Com todo o formalismo exposto, suposições podem ser feitas, de forma que descreva-se o estado fundamental de um metal com potencial químico não nulo. Primeiro, o estado metálico é composto por férmions, logo, a hamiltoniana é escrita como função dos operadores $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger$ que anticomutam, ou, adaptando a Eq.(18),

$$\{\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} ; \{\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}\} = \{\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{c}_{\mathbf{k}'}^\dagger\} = 0. \quad (22)$$

Como estamos no ensemble grand canônico, a hamiltoniana livre é escrita como,

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= \hat{E} - \mu \hat{N} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) \hat{n}_{\mathbf{k}} - \mu \sum_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon(\mathbf{k}) - \mu] \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (23)$$

onde $\hat{n}_{\mathbf{k}} = \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}}$ é a versão generalizada do operador número, Eq.(10).

O sistema fermiônico é caracterizado então por uma Superfície de Fermi suave dada pelo conjunto de pontos de Fermi \mathbf{k}_F que satisfazem $\epsilon(\mathbf{k}_F) = \mu$, onde $\epsilon(\mathbf{k})$ é uma relação de dispersão arbitrária por hora. Por simplicidade, vamos considerar férmions sem spin. Vamos definir o estado de referência $|SF\rangle$ aplicando operadores de criação ao estado de vácuo $|0\rangle$, ocupando assim todos os estados até a Superfície de Fermi,

$$|SF\rangle = \prod_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}_F} \hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle. \quad (24)$$

Esse estado será usado para definir a ordem normal dos operadores da seguinte forma,

$$:\hat{O}: = \hat{O} - \langle SF | \hat{O} | SF \rangle. \quad (25)$$

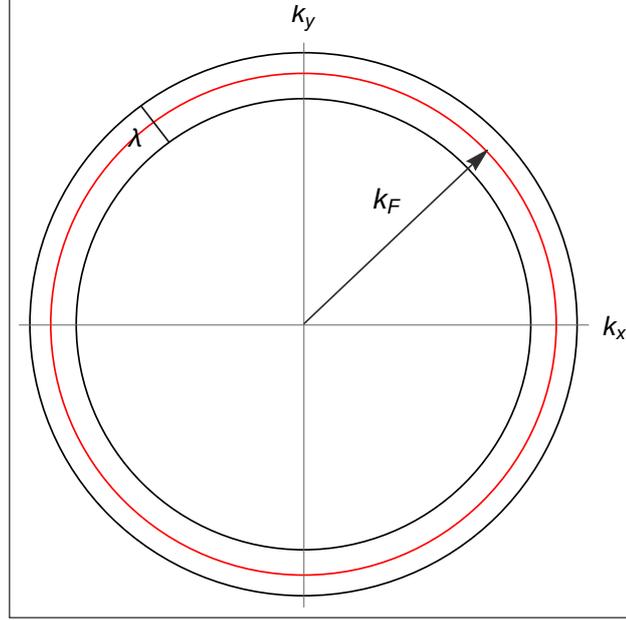
1.2 Líquido de Fermi e Grupo de Renormalização

Nesta seção o sistema será preparado para a bosonização. Por preparar entende-se que serão colocados vínculos no sistema, e será estudada as consequências destes. Primeiro, adiciona-se interação à hamiltoniana livre, Eq.(23),

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{q}) \hat{c}_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \hat{c}_{\mathbf{k}'+\frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}'-\frac{\mathbf{q}}{2}}. \quad (26)$$

Tem-se que V é o volume do sistema, $U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ codifica a interação de curto alcance entre dois corpos, e $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_F$ é o momento de um par partícula-buraco. Usa-se o grupo de renormalização (SHANKAR, 1994) para integrar os modos de alta energia do sistema. A área de integração está dada pela Fig.(2). O resultado é um hamiltoniano efetivo

Figura 2 - Espaço de Hilbert restrito à vizinhança da superfície de Fermi



Legenda: A área de integração consiste nos modos com momento $\mathbf{k} > \lambda/2$, e com momento $\mathbf{k} < -\lambda/2$.

Fonte: O autor, 2020.

para baixas energias descrevendo um Líquido de Fermi composto por quase-partículas com massa efetiva m^* . Os campos $\psi_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $\psi_{\mathbf{k}}$ criam e aniquilam, respectivamente, estas quase-partículas e são dados por,

$$\psi_{\mathbf{k}} = Z_\psi^{-1/2} \hat{c}_{\mathbf{k}}, \quad (27)$$

onde Z_ψ é o fator de renormalização da quase-partícula. A hamiltoniana para os modos de baixa energia é escrita como,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}} \\ &= Z_\psi \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon(\mathbf{k}) - \mu] \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}} + \frac{Z_\psi^2}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'(\mathbf{q})} \psi_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \psi_{\mathbf{k}'+\frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}'-\frac{\mathbf{q}}{2}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Conclui-se então que os graus de liberdade de baixa energia do sistema estão dados por uma pequena casca de comprimento $|\mathbf{k}_F| - \lambda/2 < |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F| + \lambda/2$ na vizinhança da Superfície de Fermi, como podemos ver na Fig.(2). Note que o objetivo do procedimento feito não é calcular parâmetros como m^* ou $Z_{\mathbf{k}}$, e sim estudar a teoria efetiva remanescente.

Outra maneira de entender essa integração é observar que fazendo essa restrição no momento, garante-se que o espaço de Hilbert do sistema esteja restrito à vizinhança da

Superfície de Fermi, o que é simplesmente a formalização da suposição de que os estados excitados do Líquido de Fermi estariam próximos à Superfície de Fermi, feita por Landau nos anos 50, de forma fenomenológica.

Um detalhe que deve ser observado é que essa "casca" impõe restrições aos tipos de interação que o sistema pode ter. Considere que a interação $U = U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ descreva um processo de espalhamento 2-2 na superfície de Fermi, onde as duas partículas entrando tenham momento $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, e as partículas espalhadas tenham momento dado por $(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$. A interação tem um forte vínculo cinemático devido à conservação de momento, ou seja,

$$|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4| < \lambda \quad (29)$$

No limite em que $\lambda \rightarrow 0$, todos os momentos devem estar sobre a superfície de Fermi, logo, $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_F| = k_F$. Além disso, o lado esquerdo da Eq.(29) deve zerar mais rápido do que λ , conseqüentemente, nem todo espalhamento é permitido.

Restringindo nossa análise para sistemas bidimensionais, pode-se facilmente chegar à conclusão que a única maneira de acomodar os vetores na superfície de Fermi está representada na Fig(3), do contrário, um vetor resultante de comprimento tão grande quanto $3k_F$ seria permitido, e a quase-partícula espalhada estaria fora da região permitida para os modos de baixa energia.

Usando coordenadas polares para descrever esses vetores, cada momento é tal que $\mathbf{k}_i = (k_F, \hat{\theta}_i)$, onde $\hat{\theta}_i$ é a direção angular de cada vetor e o grau de liberdade que difere cada um dos momentos.

Existem apenas três possibilidades de configuração que satisfazem a Eq.(29), dadas por,

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_3 \text{ Logo } \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_4 \quad (30)$$

$$\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_2 \text{ Logo } \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_4 \quad (31)$$

$$\hat{\theta}_1 = -\hat{\theta}_2 \text{ Logo } \hat{\theta}_3 = -\hat{\theta}_4 \quad (32)$$

Estas três configurações permitidas são chamadas de canais "Forward", Eq.(30), "Exchange", Eq.(31) e "BCS", Eq.(32). Deixando implícita a dependência em \mathbf{q} , pode-se ver a forma dessas interações,

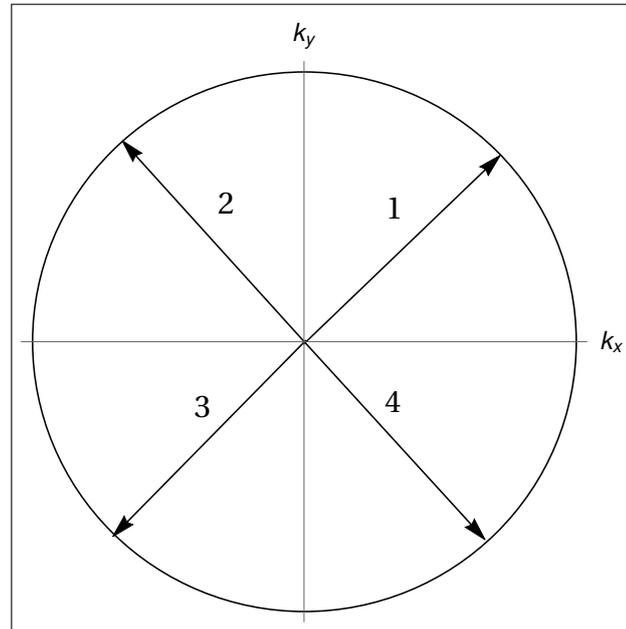
$$U[\theta_1, \theta_2, \theta_3 = \theta_1, \theta_4 = \theta_2] = F(\theta_1, \theta_2) = F(\theta_1 - \theta_2) \quad (33)$$

$$U[\theta_1, \theta_2, \theta_3 = \theta_2, \theta_4 = \theta_1] = -F(\theta_1, \theta_2) = -F(\theta_1 - \theta_2) \quad (34)$$

$$U[\theta_1, \theta_2 = -\theta_1, \theta_3, \theta_4 = -\theta_3] = V(\theta_1, \theta_3) = V(\theta_1 - \theta_3). \quad (35)$$

A Eq.(33) representa a função de Landau, introduzida por Lev Landau na Teoria dos Líquidos de Fermi (PINES; NOZIÈRES, 1966; LANDAU, 1957), e acopla pares partícula-buraco num mesmo ponto. A Eq.(34) é um pouco mais complicada, pois ela acopla pares

Figura 3 - Visão geométrica de um dos processos de espalhamento permitidos



Legenda: Vetores dispostos na superfície de Fermi de forma que a Eq.(29) seja satisfeita.

Fonte: O autor, 2020.

partícula-buraco de diferentes pontos da superfície de Fermi, e é o análogo bidimensional do canal de "Backscattering", presente em Líquidos de Luttinger unidimensional, que embora interessantes, estão fora do escopo desta dissertação. Além do mais, para férmions sem spin, a Eq.(34) se iguala à Eq.(33). Finalmente, a Eq.(35) representa a interação de Cooper, que pode levar à supercondutividade.

Embora a análise tenha sido baseada em vínculos cinemáticos de espalhamentos na superfície de Fermi, é importante pontuar que esse mesmo resultado é obtido fazendo o procedimento do Grupo de Renormalização à la Wilson, sendo todas estas interações marginais e pertencentes ao ponto fixo, pelo menos à tree-level. Para mais detalhes ver (SHANKAR, 1994; Castro Neto; FRADKIN, 1995).

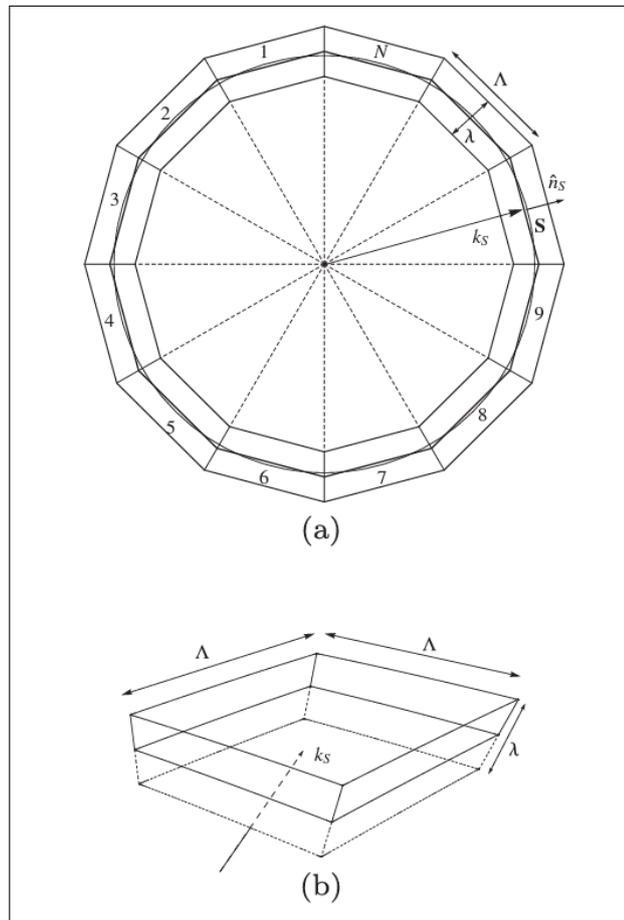
1.3 "Patches" e Construção Geométrica

O segundo vínculo é introduzido dividindo a "casca" em N regiões ($N \gg 1$) que chamaremos de patch, com dimensionalidade $\Lambda^{D-1}\lambda$. Cada patch é rotulado com um índice $S = 1, \dots, N$. É importante pontuar que a esse nível, não importa quantas dimensões $D > 1$ tem o sistema. Se ele for bidimensional, o patch é um quadrado de altura λ e comprimento Λ ; se o sistema for tridimensional, o patch será um paralelepípedo de

comprimento e largura Λ e altura λ , como vemos na Fig.(4). Nessa seção será feito o procedimento para um número de dimensões arbitrárias D , para depois fixarmos uma dimensão de interesse físico.

As dimensões do patch são tais que $\lambda \ll \Lambda \ll k_F$, o que minimiza o espalhamento entre

Figura 4 - Course-grain da Superfície de Fermi



Legenda: (a) Superfície de Fermi dividida em patches. (b) Patch com dimensões $\Lambda^{D-1}\lambda$.

Fonte: DING; SEIDEL; YANG, 2012, p. 011012-3.

patches, e $\Lambda^2/k_F \ll \lambda$ junto com $\Lambda \ll k_F$, indica que o patch é plano. Todo o procedimento é realizado para $k_B T \ll \mu$, o que define uma superfície de Fermi macroscópica. Na Fig.(4) tem-se que \hat{n}_S é a direção normal ao patch S e \mathbf{k}_S é o momento de Fermi k_F no centro de cada patch S . Para recuperar a superfície de Fermi original, faz-se o limite $N \rightarrow \infty$, $\Lambda \rightarrow 0$ com $\Lambda N = 2\pi k_F$. Considera-se o sistema imerso em uma caixa de lados L .

Introduz-se campos fermiônicos em cada patch S da seguinte forma,

$$\psi_S(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Phi_S(\mathbf{k})}{\sqrt{L^D}} \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (36)$$

$$\psi_S^\dagger(\mathbf{x}) = e^{+i\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Phi_S(\mathbf{k})}{\sqrt{L^D}} \psi_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (37)$$

Onde $\Phi_S(\mathbf{k})$ é uma distribuição com suporte dentro do patch S , ou seja, que toma os valores 1 quando \mathbf{k} está dentro do patch S , e 0 quando \mathbf{k} está fora. A relação de anticomutação $\{\psi_{\mathbf{k}}^\dagger, \psi_{\mathbf{k}'}\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ implica que,

$$\{\psi_S^\dagger(\mathbf{x}), \psi_T(\mathbf{x}')\} = \delta_{S,T}^{D-1} \delta^D(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (38)$$

O Campo fermiônico original pode ser reconstruído fazendo a seguinte soma,

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{S=1}^N e^{i\mathbf{k}_S \cdot \mathbf{x}} \psi_S(\mathbf{x}). \quad (39)$$

Note que o férmion do patch $\psi_S(\mathbf{x})$ pertence a uma representação de coordenadas mista, onde \mathbf{x} é uma variável de espaço de configuração e S é uma variável de momento. Para esta representação estar de acordo com a mecânica quântica e o princípio da incerteza de Heisenberg, pode-se entendê-la como um esquema semiclássico, dado que a mistura de momento e espaço de configuração só é possível numa escala em que $|\mathbf{x}| \ll 1/|\mathbf{k}_F|$, logo numa superfície muito grande. A teoria de Líquidos de Fermi, já citada, foi o primeiro trabalho a descrever sistemas fermiônicos com superfície de Fermi. Na teoria, a dinâmica do sistema é governada por flutuações na distribuição de partículas,

$$n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = n_{\mathbf{k}}^0 + \delta n_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t), \quad (40)$$

e essa flutuação é entendida como a criar uma quantidade de partículas com $\mathbf{k} > \mathbf{k}_F$ e buracos com $\mathbf{k} < \mathbf{k}_F$. Nesse espírito, define-se o operador partícula-buraco normal ordenado em cada patch S por,

$$\begin{aligned} \delta n_S(\mathbf{q}) &= \sum_{\mathbf{k}} \Phi_S\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \Phi_S\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \left[\psi_{\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \psi_{\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}} - \delta_{\mathbf{q},0}^D n_{\mathbf{k}} \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \Phi_S\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \Phi_S\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) : \psi_{\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \psi_{\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}} :, \end{aligned} \quad (41)$$

com $n_{\mathbf{k}}^0 = \langle FS | \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}} | FS \rangle$. Com essa definição começa-se a bosonização, ou seja, procura-se um campo com caráter bosônico construído a partir dos férmions do sistema. Pode-se computar a relação de comutação para $\delta n_S(\mathbf{q})$, usando novamente que $\{\psi_{\mathbf{k}}^\dagger, \psi_{\mathbf{k}'}\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$,

e chega-se a,

$$\begin{aligned} \left[\delta n_S(\mathbf{q}), \delta n_T(\mathbf{q}') \right] &= \delta_{S,T}^{D-1} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}^D \sum_{\mathbf{k}} \Phi_S \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \Phi_S \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}'}{2} \right) \left(n_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} - n_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}'}{2}} \right) + \hat{\epsilon} \\ &= \Omega \delta_{S,T}^{D-1} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}^D \mathbf{q} \cdot \hat{n}_S + \hat{\epsilon}. \end{aligned} \quad (42)$$

Onde $\Omega = \Lambda^{D-1} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^D$ é o número de estados em cada patch dividido por λ . Agora introduz-se um ponto fundamental da bosonização multidimensional. Enquanto que em sistemas unidimensionais, a relação de comutação (42) é exata, em sistemas com $D > 1$, a álgebra dos operadores partícula-buraco não é fechada. De fato, o primeiro termo da Eq.(42) é o termo de Schwinger análogo à bosonização unidimensional, enquanto o segundo termo representa correlações entre os patches vizinhos. Para chegar à forma do primeiro termo na segunda linha da Eq.(42), expande-se o primeiro termo para \mathbf{q} pequeno. O segundo termo, o erro $\hat{\epsilon}$, é uma pequena complicação, pois não é um número complexo, e sim um operador, que é dado por,

$$\hat{\epsilon} = \sum_{\mathbf{k}} \Phi_S(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{q}') \Phi_S(\mathbf{k}) [\Phi_S(\mathbf{k} + \mathbf{q}) - \Phi_S(\mathbf{k} + \mathbf{q}')] : \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} : . \quad (43)$$

Embora o erro, Eq.(43), pareça atrapalhar o procedimento, pode-se lidar com ele ao fazer a seguinte troca,

$$\left(\psi_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} - \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}^D n_{\mathbf{k}} \right) \rightarrow \left(1 - \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}^D \right), \quad (44)$$

onde agora tem-se um número complexo. Computa-se o volume $[\Phi_S(\mathbf{k}+\mathbf{q}) - \Phi_S(\mathbf{k}+\mathbf{q}')]$, e percebe-se que devido à subtração da Eq.(44), o erro é menor que (HOUGHTON; KWON; MARSTON, 2000; HOUGHTON; MARSTON, 1993),

$$[\hat{\epsilon}] < \Lambda^{D-2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^D \lambda^2 < \Lambda^D \left(\frac{L}{2\pi} \right)^D \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}. \quad (45)$$

Enquanto o primeiro termo da Eq.(42) é da ordem de,

$$[\Omega \delta_{S,T}^{D-1} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}^D \mathbf{q} \cdot \hat{n}_S] = \Lambda^{D-1} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^D \lambda = \Lambda^D \left(\frac{L}{2\pi} \right)^D \frac{\lambda}{\Lambda}. \quad (46)$$

Como a aproximação usada é tal que $\lambda \ll \Lambda$, no limite em que $\lambda, \Lambda \rightarrow 0$, tem-se que $\lambda/\Lambda \rightarrow 0$. Conclui-se então que nesse limite usado na teoria e com os vínculos que ela é construída, existe uma região de valores de λ/Λ na qual a álgebra dos operadores partícula-buraco é exata, de forma que o erro $\hat{\epsilon}$ seja ignorado perante o primeiro termo da Eq.(42), ou seja,

$$\left[\delta n_S(\mathbf{q}), \delta n_T(\mathbf{q}') \right] = \Omega \delta_{S,T}^{D-1} \delta_{\mathbf{q}+\mathbf{q}',0}^D \mathbf{q} \cdot \hat{n}_S. \quad (47)$$

1.4 Álgebra de operadores bosônicos

Embora tem-se um operador que, escrito a partir dos férmions originais do sistema, apresenta uma álgebra bosônica, a bosonização apresenta como resultado um mapa entre férmions e bósons. O objetivo dessa seção é desenvolver o que foi introduzido até agora e apresentar tal mapa. Primeiro, precisa-se achar o operador que aniquila o estado de referência, levando-se em consideração a ação do operador $\delta n_S(\mathbf{q})$ em $|SF\rangle$ de acordo com a definição da Eq.(41),

$$\delta n_S(\mathbf{q}) |SF\rangle = 0 \text{ para } (\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) > 0 \quad (48)$$

$$\delta n_S(-\mathbf{q}) |SF\rangle = 0 \text{ para } (\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) < 0. \quad (49)$$

Constrói-se um operador que aniquila o estado de referência pela combinação dos operadores e as respectivas restrições das Eqs.(48,49),

$$a_S(\mathbf{q}) = (\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|)^{-1/2} [\delta n_S(\mathbf{q})\Theta(\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) + \delta n_S(-\mathbf{q})\Theta(-\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S)]. \quad (50)$$

Onde o primeiro termo da Eq.(50) equivale à Eq.(48) e o segundo termo à Eq.(49), de forma que,

$$a_S(\mathbf{q}) |SF\rangle = 0. \quad (51)$$

Esse é o operador de aniquilação para nosso sistema, e aniquila pares partícula-buraco, ao invés de férmions. Usou-se na Eq.(50) o fato de que $\delta n_S^\dagger(\mathbf{q}) = \delta n_S(-\mathbf{q})$. Define-se o operador de criação como,

$$a_S^\dagger(\mathbf{q}) = (\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|)^{-1/2} [\delta n_S(-\mathbf{q})\Theta(\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) + \delta n_S(\mathbf{q})\Theta(-\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S)]. \quad (52)$$

Percebe-se que $a_S(-\mathbf{q}) = a_S(\mathbf{q})$ e $a_S^\dagger(-\mathbf{q}) = a_S^\dagger(\mathbf{q})$, que é uma manifestação da simetria de paridade do sistema. É interessante pontuar que esses operadores não mudam o número de partículas total do sistema, visto que eles criam e aniquilam excitações do tipo partícula-buraco. pode-se agora calcular a relação de comutação com estes operadores, fazendo uso da Eq.(47),

$$[a_S(\mathbf{q}), a_T^\dagger(\mathbf{q}')] = \delta_{S,T}^{D-1} (\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^D + \delta_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}^D); [a_S(\mathbf{q}), a_T(\mathbf{q}')] = [a_S^\dagger(\mathbf{q}), a_T^\dagger(\mathbf{q}')] = 0. \quad (53)$$

Nota-se que a álgebra desses operadores é bosônica. A única diferença é na equação da esquerda da Eq.(53), na qual temos um delta, $\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}^D$ que toma valores para $\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0$, ou seja, a parte superior da superfície de Fermi, e um outro delta $\delta_{\mathbf{q},-\mathbf{q}'}^D$, que leva em consideração a parte inferior da superfície de Fermi, logo, uma manifestação da geometria do sistema. É útil escrever o operador partícula-buraco em termo desses operadores de

criação e aniquilação,

$$\delta n_S(\mathbf{q}) = \sqrt{\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} \left[a_S(\mathbf{q}) \Theta(\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) + a_S^\dagger(-\mathbf{q}) \Theta(-\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) \right]. \quad (54)$$

Definidas tais quantidades, pode-se escrever o campo fermiônico Eq.(36) como (HOUGHTON; KWON; MARSTON, 2000; BARCI; OXMAN, 2003),

$$\psi_S(\mathbf{x}) = \sqrt{\Omega \lambda} U_S \exp \left[- \sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} \delta n_S(-\mathbf{q}) \right]. \quad (55)$$

De forma equivalente, usando a Eq.(54), pode-se escrever o campo fermiônico em termo dos operadores de criação e aniquilação,

$$\psi_S(\mathbf{x}) = \sqrt{\Omega \lambda} U_S \exp \left[- \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0} \frac{\{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} a_S^\dagger(-\mathbf{q}) - e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} a_S(\mathbf{q})\}}{\sqrt{\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|}} \right] = \sqrt{\Omega \lambda} U_S e^{i\varphi_S(\mathbf{x})}, \quad (56)$$

onde U_S são os chamados fatores de Klein, os quais garantem a relação de anticomutação entre operadores de diferentes patches. Para expressões explícitas dos fatores de Klein, ver (HOUGHTON; MARSTON, 1993). Define-se então, na Eq.(56), o campo bosônico,

$$\varphi_S(\mathbf{x}) = i \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0} \frac{\{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} a_S^\dagger(-\mathbf{q}) - e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} a_S(\mathbf{q})\}}{\sqrt{\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|}}, \quad (57)$$

com relação de comutação dada por,

$$[\varphi_S(\mathbf{x}), \varphi_T(\mathbf{x}')] = i\pi \delta_{S,T}^{D-1} \text{sgn}[\hat{n}_S \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]. \quad (58)$$

Usando as Eqs.(54) e (56), vê-se uma relação entre $\varphi_S(\mathbf{q})$ e $\delta n_S(\mathbf{q})$,

$$\delta n_S(\mathbf{q}) = i\Omega \hat{n}_S \cdot \mathbf{q} \varphi_S(\mathbf{q}), \quad (59)$$

ou, em espaço de configuração,

$$\delta n_S(\mathbf{q}) = \Omega \hat{n}_S \cdot \nabla \varphi_S(\mathbf{x}). \quad (60)$$

Tendo agora a relação de todas as quantidades definidas anteriormente com o campo bosônico, e também a própria relação entre o campo fermiônico e o campo bosônico, dada pela Eq.(56), pode-se agora construir um formalismo de integrais de caminho usando estados coerentes, tema da próxima seção.

1.5 Integral de Caminho e Estados Coerentes

Apesar que construiu-se operadores com uma álgebra fechada e um estado de referência de forma que possa ser gerado o espaço de Hilbert restrito à vizinhança da superfície de Fermi, não foi exposta uma interpretação física para os operadores $a_S(\mathbf{q})$ e $a_S^\dagger(\mathbf{q})$, exceto que eles geram excitações partícula-buraco. A partir desse ponto, fixa-se a dimensão $D = 2$. Para chegar à essa interpretação, de acordo com (Castro Neto; FRADKIN, 1994b; BARCI; OXMAN, 2003), cria-se um estado de várias partículas definido pelo produto direto de estados coerentes parametrizados pelo campo $\phi_S(\mathbf{q})$, ou seja,

$$|\phi\rangle = U(\phi) |FS\rangle = e^{-\Gamma(\phi)} |SF\rangle, \quad (61)$$

onde $\Gamma(\phi)$ é dado por,

$$\Gamma(\phi) = \sum_S \sum_{\mathbf{q}} (\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|)^{-1} \phi_S(\mathbf{q}) \delta n_S(-\mathbf{q}). \quad (62)$$

Usando a Eq.(54), escreve-se,

$$\Gamma(\phi) = \sum_S \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0} (\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|)^{-\frac{1}{2}} [\phi_S(\mathbf{q}) a_S^\dagger(\mathbf{q}) - \phi_S^*(\mathbf{q}) a_S(\mathbf{q})] \quad (63)$$

Tem-se que $\phi_S^*(\mathbf{q}) = \phi_S(-\mathbf{q})$ e $\Gamma^*(\phi) = -\Gamma(\phi)$, de tal forma que $U^\dagger(\phi) = U^{-1}(\phi)$. Pode-se mostrar facilmente que esse estado é um autoestado do operador $a_S(\mathbf{q})$,

$$a_S(\mathbf{q}) |\phi\rangle = -\frac{\phi_S(\mathbf{q}) \Theta(\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S) + \phi_S^*(\mathbf{q}) \Theta(-\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S)}{\sqrt{\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|}} |\phi\rangle. \quad (64)$$

A interpretação da Eq.(64) é que o estado coerente representa uma deformação da superfície de Fermi no patch S na direção de \mathbf{q} devido à uma superposição de excitações do tipo partícula-buraco. Dessa forma associamos o campo $\phi_S(\mathbf{q})$ à deformação. Esses estados coerentes, como esperado, formam uma base supercompleta (KLAUDER; SKAGERSTAM, 1985) e usando esta base, pode-se calcular a amplitude de transição, entre os instantes de tempo 0 e t ,

$$\begin{aligned} \langle [\varphi], t | [\tilde{\varphi}], 0 \rangle &= \langle [\varphi] | e^{i\hat{H}t} | [\tilde{\varphi}] \rangle = \exp \left[- \sum_{S,T} \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0} \frac{1}{2\Omega} \left(\frac{1}{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} |\varphi_S(\mathbf{q})|^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} |\tilde{\varphi}_S(\mathbf{q})|^2 \right) \right] \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* e^{iS[\phi]}, \end{aligned} \quad (65)$$

onde

$$\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* = \prod_{\tau,S,\mathbf{q}} \frac{d\phi_S(\mathbf{q},\tau)d\phi_S^*(\mathbf{q},\tau)}{\pi\Omega|\mathbf{q}\cdot\hat{n}_S|}, \quad (66)$$

e

$$-iS[\phi] = -i \sum_S \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}\cdot\hat{n}_S > 0} \int_0^t d\tau \mathcal{L}[\phi(\tau)]. \quad (67)$$

A Lagrangiana \mathcal{L} é escrita como,

$$\mathcal{L}[\phi(\tau)] = -(2i\Omega|\mathbf{q}\cdot\hat{n}_S|)^{-1} \left[\phi_S(\mathbf{q}) \frac{\partial\phi_S^*(\mathbf{q})}{\partial\tau} - \phi_S^*(\mathbf{q}) \frac{\partial\phi_S(\mathbf{q})}{\partial\tau} \right] + \frac{\langle \phi_S(\mathbf{q},\tau) | H | \phi_S(\mathbf{q},\tau) \rangle}{\langle \phi_S(\mathbf{q},\tau) | \phi_S(\mathbf{q},\tau) \rangle}. \quad (68)$$

Na Eq.(65), as condições de contorno são definidas como,

$$\phi_S(\mathbf{q}, 0) = \tilde{\varphi}_S(\mathbf{q}) \quad (69)$$

$$\phi_S^*(\mathbf{q}, t) = \varphi_S^*(\mathbf{q}). \quad (70)$$

Tomando o traço da Eq.(65), escreve-se o funcional gerador da teoria, \mathcal{Z} , este com a seguinte forma,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\phi^* e^{-i \int dt \sum_{S,\mathbf{q}} \mathcal{L}[\phi(\tau)]}, \quad (71)$$

onde $\mathcal{L}[\phi(\tau)]$ é dado pela Eq.(68), e as condições de contorno agora são periódicas. Para calcular a lagrangiana \mathcal{L} , tem-se primeiro que inferir algo sobre a forma da hamiltoniana e consequentemente sobre o sistema. Daqui para frente nesse trabalho vamos considerar que a relação de dispersão $\epsilon(\mathbf{k})$ é linear para os modos de baixa energia, ou seja, entre $|\mathbf{k}_F| - \lambda/2 < |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F| + \lambda/2$, a relação é dada por,

$$\epsilon(\mathbf{k}) \approx \epsilon(\mathbf{k}_F) + \frac{\partial\epsilon(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F) = \mu + \mathbf{v}_F \cdot \mathbf{q}, \quad (72)$$

onde $\mathbf{v}_F = \mathbf{k}_F/m^*$ é a velocidade de Fermi, que tem direção perpendicular à superfície de Fermi. Logo, $\mathbf{v}_F = v_F\hat{n}_S = \mathbf{v}_S$ e escreve-se,

$$\epsilon(\mathbf{k}) \approx \mu + \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{q}. \quad (73)$$

Fazendo isso, utilizando a parte livre da Eq.(28) e a Eq.(73), tem-se a hamiltoniana livre do sistema como,

$$H_0 = \sum_S \sum_{\mathbf{k}} \Phi_S(\mathbf{k}) \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S : \psi_{\mathbf{k}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}} :, \quad (74)$$

onde percebe-se que claramente não será possível simplesmente substituir os férmions em bósons como é possível fazer na parte interagente da Eq.(28), usando a Eq.(41). Contudo, calculando-se o comutador entre a hamiltoniana Eq.(74) e o operador partícula-burado Eq.(41),

$$[H_0, \delta n_S(\mathbf{q})] = -|\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S| \delta n_S(\mathbf{q}), \quad (75)$$

pode-se chegar também na relação de comutação entre H_0 e $a_S(\mathbf{q})$,

$$[H_0, a_S(\mathbf{q})] = -|\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S| a_S(\mathbf{q}). \quad (76)$$

Portanto, a parte não interagente da hamiltoniana pode ser escrita como,

$$H_0 = \frac{v_F}{2} \sum_S \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0} |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S| a_S^\dagger(\mathbf{q}) a_S(\mathbf{q}) \quad (77)$$

A parte interagente é dada por,

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} U_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}(\mathbf{q}) \psi_{\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \psi_{\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}} \psi_{\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}}^\dagger \psi_{\mathbf{k}' - \frac{\mathbf{q}}{2}} \quad (78)$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_{S, T} \sum_{\mathbf{q}} U_{S, T}(\mathbf{q}) \delta n_S(\mathbf{q}) \delta n_T(-\mathbf{q}) \quad (79)$$

Escolhe-se trabalhar apenas com o canal "Forward", Eq.(33), dada por $f_{S, T}(\mathbf{q})$ (METZNER; CASTELLANI; CASTRO, 1998),

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2V} \sum_{S, T} \sum_{\mathbf{q}} f_{S, T}(\mathbf{q}) \delta n_S(\mathbf{q}) \delta n_T(-\mathbf{q}) \quad (80)$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_{S, T} \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n} > 0} \sqrt{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S| |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_T|} f_{S, T}(\mathbf{q}) a_S^\dagger(\mathbf{q}) a_T(\mathbf{q}), \quad (81)$$

onde a notação $\mathbf{q} \cdot \hat{n} > 0$ significa que tanto $\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S$ quanto $\mathbf{q} \cdot \hat{n}_T$ são maiores que zero, e usou-se a Eq.(54) para escrever H_{int} em termos dos operadores $a_S(\mathbf{q})$ e $a_S^\dagger(\mathbf{q})$. escrevendo agora $\Omega = N(0)V$, onde $N(0)$ é a densidade de estados na superfície de Fermi, chega-se a forma da hamiltoniana interagente,

$$H = \frac{1}{2} \sum_S \sum_{\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S > 0} \left[v_F \delta_{S, T} |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S| + \sum_T \sqrt{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S| |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_T|} F_{S, T}(\mathbf{q}) \right] a_S^\dagger(\mathbf{q}) a_T(\mathbf{q}), \quad (82)$$

onde $F_{S,T}(\mathbf{q}) = N(0)f_{S,T}(\mathbf{q})$. Substituindo H na Eq.(68), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\langle \phi_S(\mathbf{q}, \tau) | H | \phi_S(\mathbf{q}, \tau) \rangle}{\langle \phi_S(\mathbf{q}, \tau) | \phi_S(\mathbf{q}, \tau) \rangle} &= \frac{1}{2} \left[v_F \delta_{S,T} |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S| + \sum_T \sqrt{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} \sqrt{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_T|} F_{S,T}(\mathbf{q}) \right] \times \\ &\times \frac{\phi_S(\mathbf{q}) \phi_T^*(\mathbf{q})}{\Omega \sqrt{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} \sqrt{|\mathbf{q} \cdot \hat{n}_T|}} \\ &= \frac{1}{2\Omega} \left[v_F \delta_{S,T} + \sum_T F_{S,T}(\mathbf{q}) \right] \phi_S(\mathbf{q}) \phi_T^*(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (83)$$

e a Lagrangiana, Eq.(68), fica

$$\mathcal{L}[\phi(t)] = \frac{i}{\Omega |\mathbf{q} \cdot \hat{n}_S|} \phi_S(\mathbf{q}) \frac{\partial \phi_S^*(\mathbf{q})}{\partial t} + \frac{1}{2\Omega} \left[v_F \phi_S(\mathbf{q}) \phi_S^*(\mathbf{q}) + \sum_T F_{S,T}(\mathbf{q}) \phi_S(\mathbf{q}) \phi_T^*(\mathbf{q}) \right]. \quad (84)$$

Note que o primeiro termo da Eq.(84) é um termo não local. Para contornar isso, faz-se a seguinte redefinição dos campos,

$$\phi_S(\mathbf{q}) \rightarrow (\Omega |\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S|) \varphi_S(\mathbf{q}). \quad (85)$$

E com isso, a ação fica $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}$, com

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \frac{\Omega v_F}{2V} \sum_S \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int dt \left[i |\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S| \varphi_S(\mathbf{q}) \frac{\partial \varphi_S(-\mathbf{q})}{\partial t} \varphi_S(\mathbf{q}) + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S)^2 \varphi_S(\mathbf{q}) \varphi_S(-\mathbf{q}) \right] \\ \mathcal{S}_{\text{int}} &= \frac{\Omega v_F}{2V} \sum_{S,T} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \int dt F_{S,T}(\mathbf{q}) |\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_S| \varphi_S(\mathbf{q}) |\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_T| \varphi_T(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (86)$$

No espaço de configuração, a ação fica então,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{int}} &= \frac{N(0)}{2} \sum_S \int d^2 x dt \left[-\partial_t \varphi_S \mathbf{v}_S \cdot \nabla \varphi_S - (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \varphi_S)^2 \right] + \\ &+ \frac{N(0)}{2} \sum_{S,T} \int d^2 x d^2 x' dt F_{S,T}(\mathbf{q}) [\mathbf{v}_S \cdot \nabla \varphi_S(\mathbf{x}, t)] [\mathbf{v}_T \cdot \nabla \varphi_T(\mathbf{x}', t)]. \end{aligned} \quad (87)$$

Associa-se esse campo φ_S com o campo bosônico apresentado na sessão 1.4, Eq.(57). Note que a ação Eq.(87) é quadrática. Isso se deve à linearização da relação de dispersão, Eq.(73). Termos não lineares da relação de dispersão geram interações bosônicas não quadráticas na ação. Embora esses termos são importantes próximos de pontos críticos quânticos, como as instabilidades de Pomeranchuk (POMERANCHUK, 1958), eles são irrelevantes na fase de Líquido de Fermi (BARCI; OXMAN, 2003). Como a teoria é quadrática, as equações de Euler-Lagrange são lineares. Serão estudadas essas equações na próxima sessão.

1.6 Dinâmica Semiclássica da Superfície de Fermi

As equações de Euler-Lagrange, computadas por $\delta S/\delta\varphi_S = 0$, são escritas usando a Eq.(60),

$$\frac{\partial\delta n_S(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + i(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{q}) \sum_T \{\delta_{S,T} + F_{S,T}(\mathbf{q})\} \delta n_T(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (88)$$

esta é uma equação de transporte do tipo Boltzmann, onde o termo com a delta de Kronecker $\delta_{S,T}$ vem da parte livre enquanto a interação mistura os patches por toda a superfície de Fermi. Até agora, desenvolveu-se toda a teoria e as análises usando a base dos patches como referência. A partir de agora, devido à simetria circular da superfície de Fermi, será usada a base de momento angular. Logo, como δn_S e $F_{S,T}$ são periódicas, pode-se escrever

$$\delta n_S(\mathbf{q}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} m_{\ell}(\mathbf{q}) e^{i\ell\theta_S} \quad (89)$$

$$F_{S,T}(\mathbf{q}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} F_{\ell}(\mathbf{q}) e^{i\ell(\theta_S - \theta_T)}, \quad (90)$$

onde θ_S é definido por,

$$\cos(\theta_S) = \frac{\hat{n}_S \cdot \mathbf{q}}{|\hat{n}_S||\mathbf{q}|} = \hat{n} \cdot \hat{q}. \quad (91)$$

Logo, são os ângulos entre o momento do par partícula-buraco \mathbf{q} , e a direção normal à superfície de Fermi \hat{n}_S, \hat{n}_T . Tem-se que $F_{-\ell} = F_{\ell}$, pois $F_{S,T}(\mathbf{q})$ depende unicamente da diferença entre ângulos, ou seja, $F \equiv F(|\theta_S - \theta_T|)$. Escrevendo a Eq.(88) em base de momento angular tem-se,

$$\frac{\partial m_{\ell}(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + i \frac{v_F q}{2} [\alpha_{\ell-1} m_{\ell-1}(\mathbf{q}, t) + \alpha_{\ell+1} m_{\ell+1}(\mathbf{q}, t)] = 0, \quad (92)$$

onde $\alpha_{\ell} = 1 + F_{\ell}(\mathbf{q})$. Vamos definir as seguintes variáveis, ditas simétricas e antissimétricas,

$$m_{\ell}^{\pm}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{2} [m_{\ell}(\mathbf{q}, t) \pm m_{-\ell}(\mathbf{q}, t)], \quad (93)$$

onde agora $m_{-\ell}^+ = m_{\ell}^+$ e $m_{\ell}^- = -m_{-\ell}^-$. As deformações da superfície de Fermi podem agora ser parametrizadas por esses modos m_{ℓ}^{\pm} , por

$$\delta n_S(\mathbf{q}, t) = m_0^+(\mathbf{q}, t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \{m_{\ell}^+(\mathbf{q}, t) \cos(\ell\theta_S) + m_{\ell}^-(\mathbf{q}, t) \sin(\ell\theta_S)\}. \quad (94)$$

Desta forma, as variáveis simétricas representam modos longitudinais, e as anti-simétricas modos transversais em relação à direção de propagação \mathbf{q} . Agora, eliminando as componentes ímpares e mantendo as pares, chega-se ao conjunto de equações diferenciais,

$$\frac{\partial^2 m_\ell^\pm(\mathbf{q}, t)}{\partial t^2} + \left(\frac{v_F q}{2}\right)^2 \left[A_\ell m_\ell^\pm(\mathbf{q}, t) + C_{\ell-1} m_{\ell-2}^\pm(\mathbf{q}, t) + C_{\ell+1} m_{\ell+2}^\pm(\mathbf{q}, t) \right] = 0, \quad (95)$$

com as constantes adimensionais,

$$A_\ell = \alpha_\ell(\alpha_{\ell-1} + \alpha_{\ell+1}) \quad , \quad C_\ell = \alpha_\ell \sqrt{\alpha_{\ell+1} \alpha_{\ell-1}}. \quad (96)$$

A Eq.(95) descreve um oscilador harmônico m_ℓ^\pm com frequência $\omega^2 = (v_F q/2)^2 A_\ell$ acoplado aos modos com $\ell + 1$ e $\ell - 1$. Logo, a equação de transporte Eq.(88) foi mapeada em uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados, com os modos simétricos e anti-simétricos desacoplados. Esse mapa é um ponto crucial para resolver a dinâmica dos modos coletivos de um Líquido de Fermi. Agora, tendo estabelecido toda a teoria, será fixado o modelo, de Líquidos de Fermi com interações de densidade e de quadrupolo, onde será estudado a dinâmica dos modos coletivos utilizando-se o procedimento acima.

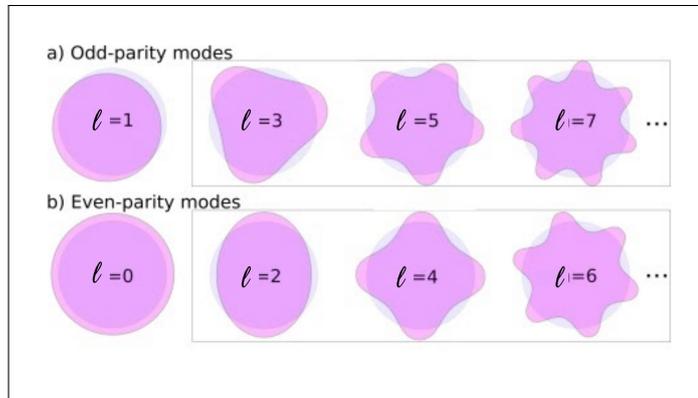
2 LÍQUIDOS DE FERMI COM INTERAÇÃO DE DENSIDADE E QUADRUPOLO

Neste capítulo será apresentado os resultados comunicados no trabalho "Two-dimensional Fermi liquid dynamics with density-density and quadrupolar interactions"(AQUINO; BARCI, 2019), onde modela-se um Líquido de Fermi com interações de densidade e quadrupolo, e estuda-se sua dinâmica, a partir da Eq.(95).

2.1 Modelo para as interações

Em um Líquido de Fermi, definir um modelo é equivalente à fixar valores aos parâmetros de Landau $F_\ell(\mathbf{q})$ na Eq.(95), que aparecem nas constantes $A_\ell = A_\ell[F_\ell(\mathbf{q})]$ e $C_\ell = C_\ell[F_\ell(\mathbf{q})]$. Cada ℓ escolhido equivale a uma deformação da superfície de Fermi com simetria específica, como vemos na Fig.(5). Os modos *even* (pares) são dados por valores pares de ℓ , e os *odd* (ímpares), por valores ímpares de ℓ . Devido ao interesse em estudar

Figura 5 - Modos de Deformação da superfície de Fermi



Legenda: Deformações da Superfície de Fermi para cada modo ℓ .

Fonte: LEDWITH; GUO; LEVITOV, 2019, p. 2.

Adaptado pelo autor.

interações de densidade e de quadrupolo, escolhe-se que o modelo tenha apenas $F_0, F_2 \neq 0$, onde F_0 parametriza a interação isotrópica de densidade, e F_2 mede a intensidade da interação quadrupolar. Ignora-se assim todas as outras componentes da interação, ou seja, $F_\ell = 0$ para $\ell \neq 0, 2$. Logo na Eq.(95), tem-se os parâmetros $\alpha_0 = 1 + F_0$ e $\alpha_2 = 1 + F_2$, com $\alpha_\ell = 1$ para todo $\ell \neq 0, 2$.

Como os modos pares e ímpares estão desacoplados, pode-se fazer a análise de forma independente para cada um. Os modos de momento angular pares $m_0^\pm(\mathbf{q}, t)$, $m_2^\pm(\mathbf{q}, t)$,

$m_4^\pm(\mathbf{q}, t), \dots$ podem ser arranjados em um vetor, $\mathbf{m}^\pm = (m_0^\pm, m_2^\pm, \dots)$, e como os modos de deformação associados às interações de densidade e quadrupolo são modos pares, o foco será dado a \mathbf{m}^\pm . Pode-se então reescrever a Eq.(95) em notação matricial. Transformando-a em Fourier no tempo e definindo a variável adimensional $s = \omega/v_F q$, onde ω é a frequência, tem-se

$$(s^2 \mathbf{I} - \mathbf{M}^\pm) \mathbf{m}^\pm = 0, \quad (97)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{M}^\pm são duas matrizes independentes que governam a dinâmica dos modos simétricos (\mathbf{M}^+) e dos anti-simétricos (\mathbf{M}^-). Computa-se agora as funções de Green,

$$\mathbf{G}^\pm(\omega, \mathbf{q}) = (s^2 \mathbf{I} - \mathbf{M}^\pm)^{-1}. \quad (98)$$

Ou seja, procura-se como inverter as seguintes matrizes,

$$[\mathbf{G}^+]^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} s^2 - \frac{\alpha_0}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}{2} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}{4} & s^2 - \frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha_2}}{4} & 0 & \\ \hline 0 & -\frac{\sqrt{\alpha_2}}{4} & s^2 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & s^2 - \frac{1}{2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \quad (99)$$

para os modos simétricos, e

$$[\mathbf{G}^-]^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} s^2 - \frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha_2}}{4} & 0 & \dots & \\ -\frac{\sqrt{\alpha_2}}{4} & s^2 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \dots & \\ \hline 0 & -\frac{1}{4} & s^2 - \frac{1}{2} & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{array} \right) \quad (100)$$

para os anti-simétricos. Note que no canal antissimétrico não existe o modo isotrópico $m_0^- \equiv 0$. Por isso, enquanto a primeira matriz age em um espaço constituído pelos modos $(m_0, m_2^+, m_4^+, \dots)$, a segunda matriz age em um espaço menor dado por (m_2^-, m_4^-, \dots) . Consequentemente, a constante de acoplamento α_0 não afeta a dinâmica dos modos anti-simétricos.

Note que a estrutura em blocos das Eqs.(99) e (100) está indicada por linhas horizontais e verticais nas matrizes. Vê-se que a matriz $[\mathbf{G}^+]^{-1}$ consiste em um bloco 2×2 , contendo os acoplamentos dos modos m_0 e m_2^+ . Tal bloco está acoplado, pelos termos $-\sqrt{\alpha_2}/4$, a um bloco tridiagonal a princípio infinito de termos que não têm constante de acoplamento. Este bloco "infinito" representa os modos de momento angular com $\ell > 2$ que não tem interação, logo agem como um banho térmico para os modos isotrópico e quadrupolar.

A segunda matriz, Eq. (100) tem uma estrutura similar, embora mais simples, devido à ausência do acoplamento isotrópico α_0 .

2.2 Método da Decimação

Para computar as funções de Green \mathbf{G}^\pm , precisa-se inverter as matrizes infinitas dadas pelas Eqs.(99) e (100). A forma tridiagonal dessas matrizes simplifica o cálculo. De fato, o modelo matemático que essas matrizes descrevem é completamente análogo a uma cadeia linear de osciladores harmônicos. Usa-se o método recursivo da Decimação, uma aplicação do grupo de renormalização no espaço real a uma cadeia unidimensional (CALVO; PASTAWSKI, 2006; SILVA; KOILLER, 1981; SOKOLOFF; JOSÉ, 1982; DOMANY et al., 1983). O método é conceitualmente simples. Começa-se truncando as matrizes das Eqs.(99) e (100) a uma ordem finita n . Inverte-se essa matriz de ordem finita achando uma relação recursiva do tipo

$$\mathbf{G}^{\pm(n+1)} = \mathbf{F} [\mathbf{G}^{\pm(n)}] \quad (101)$$

onde $\mathbf{G}^{\pm(n)}$ é a inversa das Eqs.(99) e (100), respectivamente, truncadas a ordem n . \mathbf{F} é uma função matricial qualquer. Por fim, a solução exata é encontrada tomando o limite $\bar{\mathbf{G}}^\pm = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{G}^{\pm(n)}$.

Considere, como exemplo, a matriz da Eq.(99). Primeiro, trunca-se a matriz à ordem $n = 2$. Logo, precisa-se computar,

$$\begin{pmatrix} s^2 - \frac{\alpha_0}{2} & \frac{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}{4} & s^2 - \frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{00}^+(\omega, \mathbf{q}) & G_{02}^+(\omega, \mathbf{q}) \\ G_{20}^+(\omega, \mathbf{q}) & G_{22}^+(\omega, \mathbf{q}) \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (102)$$

Nesse exemplo será calculada a componente G_{00}^+ da matriz. Invertendo a matriz 2×2 , tem-se,

$$G_{00}^{+(2)} = \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0 \alpha_2}{8} \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_2}{2}}} \quad (103)$$

onde o sobre-índice (2) indica que a matriz truncada é de ordem 2. Repetindo o procedi-

mento para matrizes truncadas à ordem $n = 3$ e $n = 4$ calcula-se,

$$G_{00}^{+(3)} = \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0\alpha_2}{8} \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2}{16} \frac{1}{s^2 - \frac{1}{2}}} \quad (104)$$

$$G_{00}^{+(4)} = \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0\alpha_2}{8} \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2}{16} \frac{1}{s^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \frac{1}{s^2 - \frac{1}{2}}}}. \quad (105)$$

Analisando cuidadosamente a estrutura de $G_{00}^{+(2)}$, $G_{00}^{+(3)}$, $G_{00}^{+(4)}$, ..., pode-se escrever a componente $G_{00}^{+(n)}$ por,

$$G_{00}^{+(n)} = \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\alpha_0\alpha_2}{8} \frac{1}{s^2 - \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_2\Pi^{(n)}(s)}} \quad (106)$$

onde $\Pi^{(n)}(s)$ é dada por,

$$\Pi^{(n+1)}(s) = \frac{1}{16} \frac{1}{s^2 - \frac{1}{2} - \Pi^{(n)}(s)} \quad (107)$$

com a condição inicial $\Pi^{(2)}(s) = 0$.

As outras componentes da função de Green, G_{02}^+ , G_{20}^+ e G_{22}^\pm podem ser computadas de forma análoga. Obtém-se para os modos simétricos

$$\bar{\mathbf{G}}^{+(n)}(s) = \frac{1}{D^{+(n)}(s)} \mathbf{N}^{+(n)}(s), \quad (108)$$

com numerador

$$\mathbf{N}^{+(n)} = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_2\left(\frac{1}{2} + \Pi^{(n)}(s)\right) & \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_2}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha_0\alpha_2}}{4} & s^2 - \frac{\alpha_0}{2} \end{pmatrix} \quad (109)$$

e denominador dado por,

$$D^{+(n)} = \left[s^2 - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} + \Pi^{(n)}(s) \right) \right] \left(s^2 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{\alpha_2\alpha_0}{8}. \quad (110)$$

De maneira similar, para os modos anti-simétricos tem-se,

$$G_{22}^{-(n)}(s) = \frac{N^{-(n)}(s)}{D^{-(n)}(s)}, \quad (111)$$

onde

$$N^{-(n)} = s^2 - \frac{1}{2} - \Pi^{(n)}(s) \quad (112)$$

e

$$D^{-(n)} = \left[s^2 - \frac{1}{2} - \Pi^{(n)}(s) \right] \left(s^2 - \frac{\alpha_2}{2} \right) - \frac{\alpha_2}{16}. \quad (113)$$

Note que ainda não foi calculada a expressão exata das funções de Green. Calculou-se a função de Green truncada à uma ordem finita n , com a recorrência nessas matrizes invertidas escrita em termos da função $\Pi^{(n)}$, dada pela Eq.(107). Para computar as expressões exatas para as funções de Green, toma-se o limite $n \rightarrow \infty$. Nesse limite, $\Pi^{(n+1)} = \Pi^{(n)}$. Definindo

$$\Pi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^{(n)}(s), \quad (114)$$

acha-se, da Eq.(107),

$$\Pi(s) = \frac{1}{16} \frac{1}{s^2 - \frac{1}{2} - \Pi(s)} \quad (115)$$

que pode ser resolvida com solução dada por,

$$\Pi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ s^2 - \frac{1}{2} \pm |s| \sqrt{s^2 - 1} \right\} & \text{for } s > 1 \\ \frac{1}{2} \left\{ s^2 - \frac{1}{2} \pm i|s| \sqrt{1 - s^2} \right\} & \text{for } s < 1 \end{cases} \quad (116)$$

Substituindo $\Pi^{(n)}(s)$ por $\Pi(s)$ nas Eqs.(109), (110), (112) e (113), acha-se as funções de Green exatas, que serão apresentadas na próxima seção.

2.3 Funções de Green

Lembrando da motivação de estudar a dinâmica dos modos isotrópico e quadrupolar, foca-se no primeiro bloco 2×2 de $\mathbf{G}^\pm(s, \mathbf{q})$, ou seja,

$$\bar{\mathbf{G}}^\pm(\omega, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} G_{00}^+(\omega, \mathbf{q}) & G_{02}^+(\omega, \mathbf{q}) \\ G_{20}^+(\omega, \mathbf{q}) & G_{22}^\pm(\omega, \mathbf{q}) \end{pmatrix}. \quad (117)$$

Note que $G_{00}^- = G_{02}^- = G_{20}^- = 0$, já que não existe modo antissimétrico isotrópico $m_0^- \equiv 0$. Logo, a função de Green para o modo antissimétrico m_2^- é simplesmente a função G_{22}^- . É importante pontuar que só é possível estudar a evolução temporal dos modos $m_2^\pm(t)$ e $m_0(t)$ se estabelecida as condições iniciais destes dois canais.

Como indicado na seção anterior, segue as funções de Green exatas do problema,

$$\bar{\mathbf{G}}^+(s, q) = \frac{1}{D^+(s, q)} \mathbf{N}^+(s, q), \quad (118)$$

com numerador dado por,

$$\mathbf{N}^+(s, q) = \begin{pmatrix} s^2 - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} + \Pi(s) \right) & \frac{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha_0 \alpha_2}}{4} & s^2 - \frac{\alpha_0}{2} \end{pmatrix} \quad (119)$$

e denominador,

$$D^+(s, q) = \left[s^2 - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} + \Pi(s) \right) \right] \left(s^2 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{\alpha_2 \alpha_0}{8}. \quad (120)$$

Para os modos anti-simétricos, acha-se os seguintes resultados,

$$\bar{\mathbf{G}}^-(s, q) = \frac{s^2 - \frac{1}{2} - \Pi(s)}{D^-(s, q)}, \quad (121)$$

com

$$D^-(s, q) = \left[s^2 - \frac{1}{2} - \Pi(s) \right] \left(s^2 - \frac{\alpha_2}{2} \right) - \frac{\alpha_2}{16}. \quad (122)$$

Sendo que nas Eqs.(119), (120), (121) and (122) tem-se que,

$$\Pi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ s^2 - \frac{1}{2} \pm |s| \sqrt{s^2 - 1} \right\} & \text{for } s > 1 \\ \frac{1}{2} \left\{ s^2 - \frac{1}{2} \pm i |s| \sqrt{1 - s^2} \right\} & \text{for } s < 1 \end{cases} \quad (123)$$

Note a estrutura desse resultado. Na função de Green truncada à ordem n , observa-se a existência de $2n$ pólos reais na região $-1 < s < 1$. No limite em que $n \rightarrow \infty$, os pólos tornam-se densos, dando origem à um corte para $s^2 < 1$, como pode ser visto na Eq.(123). Além disso, para $s^2 > 1$, $\Pi(s)$ é real, enquanto para $s^2 < 1$, ele ganha uma parte imaginária. Esta é a dissipação de Landau (PINES; NOZIÈRES, 1966). Observe que não colocou-se nenhum termo dissipativo na ação dada pela Eq.(87), essa dissipação acontece devido ao limite $n \rightarrow \infty$.

2.4 Modos Coletivos

Um ponto essencial do modelo escolhido é a existência de modos anti-simétricos. Eles tem sua origem da consideração do Parâmetro de Landau F_2 ser diferente de zero. De modo geral, em um Líquido de Fermi com Parâmetros de Landau com momento angular $\ell > 0$, existirão modos coletivos anti-simétricos. Do contrário, em um Líquido de Fermi com interação isotrópica, apenas modos coletivos simétricos existirão. Nessa seção será analisado cada modo coletivo do sistema.

2.4.1 Modos Coletivos Simétricos

Para computar os modos coletivos simétricos, procura-se soluções de $D^+(s) = 0$, ou seja,

$$D^+(s, q) = \left[s^2 - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} + \Pi(s) \right) \right] \left(s^2 - \frac{\alpha_0}{2} \right) - \frac{\alpha_2 \alpha_0}{8} = 0 \quad (124)$$

com $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, e $\Pi(s)$ é dado Eq.(123).

Note que $D^+(0) = 0$ independente das interações α_0 ou α_2 . Este modo zero é associado com reparametrizações estáticas locais da superfície de Fermi e com isso, é um modo não físico. Nesta seção serão discutidas soluções da Eq.(124) com $s \neq 0$. Na próxima seção será abordado em mais detalhe esse modo zero. Em um primeiro momento, olha-se para soluções para $\alpha_2 = 1$, ou seja, para o sistema apenas com interações de densidade α_0 . Nessa situação, tem-se

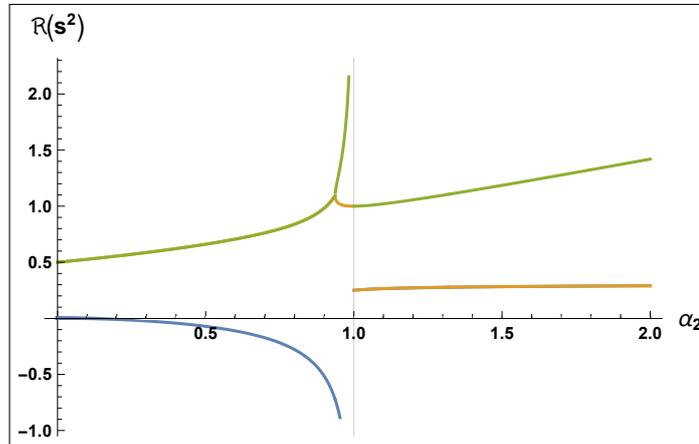
$$s^2 = \frac{\alpha_0^2}{2\alpha_0 - 1} = \frac{(1 + F_0)^2}{1 + 2F_0}, \quad (125)$$

este é o conhecido modo (som) zero de Landau em duas dimensões (NILSSON; NETO, 2005). Isto é uma boa notícia, pois confirma a consistência do método. Modos coletivos equivalentes ao modo zero no caso de interações quadrupolares puras, ou seja, $\alpha_0 = 1$ e $\alpha_2 \neq 1$ existem. Nesse caso, a Eq.(124) se reduz à uma equação polinomial cúbica em s^2 ,

$$(s^2)^3 - \frac{1}{2}(2 + \alpha_2)(s^2)^2 + \frac{(4 - 5\alpha_2^2)}{16(1 - \alpha_2)}s^2 + \frac{\alpha_2^2}{16(1 - \alpha_2)} = 0 \quad (126)$$

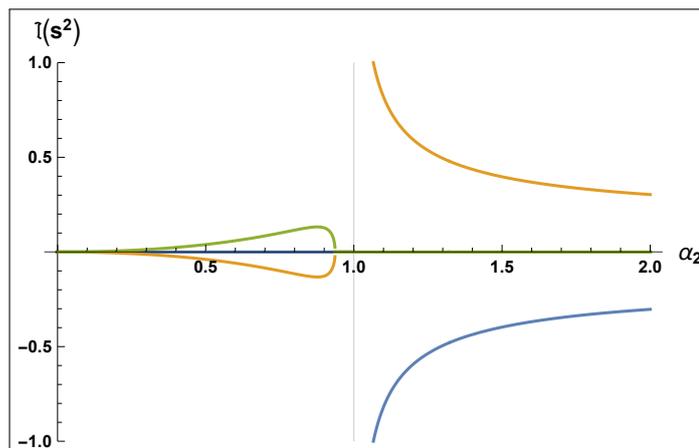
Nos Gráficos (1) e (2) são apresentadas as raízes da Eq.(126) como função da interação quadrupolar α_2 . Em ambos os gráficos foi fixado $\alpha_0 = 1$.

No Gráfico (1), mostra-se a parte real das raízes, enquanto que no Gráfico (2) mostra-se a parte imaginária. Para interações repulsivas, $\alpha_2 > 1$, o sistema apresenta uma raiz real e positiva com $s^2 > 1$. Esta raiz é a análoga ao modo zero de Landau para

Gráfico 1 - Parte real da solução da equação $D^+(s) = 0$ 

Legenda: Foi plotado $\Re[s^2(\alpha_2)]$.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-4.

Gráfico 2 - Parte imaginária da solução da equação $D^+(s) = 0$ 

Legenda: Foi plotado $\Im[s^2(\alpha_2)]$.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-4.

interação quadrupolar. Para repulsão fraca e forte, a expressão analítica desse modo é dada por,

$$s^2 = \begin{cases} 1 + 4(\alpha_2 - 1)^2 + \dots & \text{for } \alpha_2 \gtrsim 1 \\ \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\alpha_2 + O(1/\alpha_2) & \text{for } \alpha_2 \gg 1 \end{cases} \quad (127)$$

Além disso, tem-se ainda uma raiz complexa e sua conjugada, que representam modos amortecidos,

$$s^2 \sim \begin{cases} \frac{1}{4} \pm i \frac{1}{4\sqrt{\alpha_2-1}} & \text{for } \alpha_2 \gtrsim 1 \\ \frac{5}{16} \pm \frac{4}{25}i + O(1/\alpha_2) & \text{for } \alpha_2 \gg 1 \end{cases} \quad (128)$$

Este modo está dentro do contínuo de partícula-buraco no espectro. Muito perto do gás de Fermi, quando $\alpha_2 \rightarrow 1^+$, a raiz real $s^2 \rightarrow 1$ e a parte imaginária da raiz complexa divergem, pois no caso livre apenas o modo $s^2 = 1$ deve sobreviver.

O caso atrativo quadrupolar é mais interessante. Nesse caso, existe um modo que se propaga com um amortecimento supercrítico em todo o regime atrativo ($0 < \alpha_2 < 1$), dado por,

$$s^2 = \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_2}} & \text{for } \alpha_2 \lesssim 1 \\ -\frac{\alpha_2^2}{4} & \text{for } \alpha_2 \gtrsim 0 \end{cases} \quad (129)$$

Ainda no regime atrativo, para atração fraca $\alpha_2 \lesssim 1$, existem dois modos coletivos estáveis, bem separados do contínuo de partícula-buraco. Eles tomam a forma,

$$s_1^2 \sim 1 + \frac{19}{4} (1 - \alpha_2) + O((1 - \alpha_2)^2), \quad (130)$$

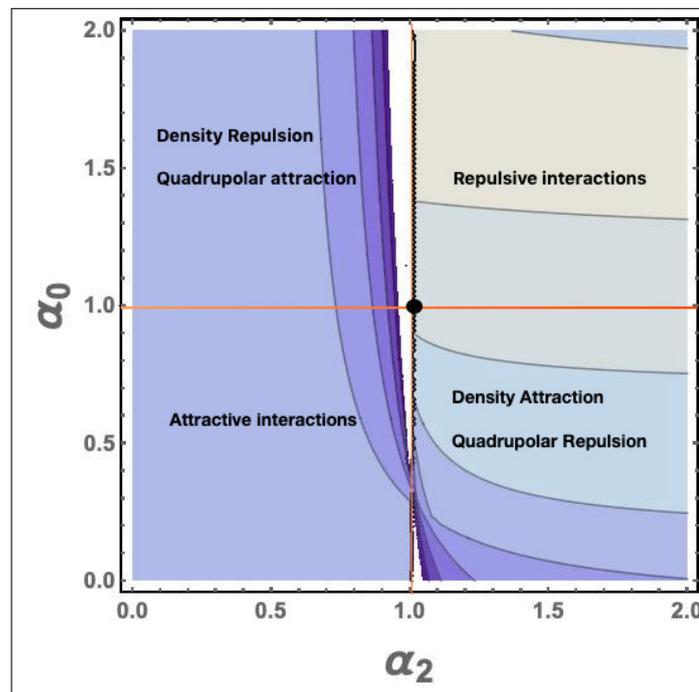
$$s_2^2 \sim \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_2}} + O((1 - \alpha_2)^{-3/2}). \quad (131)$$

s_1 é a continuação no regime fracamente atrativo do som zero quadrupolar observado no caso repulsivo. Por outro lado, s_2 é próprio de interações atrativas e não tem uma parte no regime repulsivo. Esse modo s_2 começa em altas frequências e move-se para frequências mais baixas quanto mais a atração aumenta. Para atração moderada, esses dois modos se encontram, se fundindo em um modo amortecido que permanece no limite de forte atração. Vê-se assim dois pontos em que a dinâmica muda de forma drástica. O ponto $\alpha_2 = 1$, que é o gás de Fermi, e a transição entre o regime repulsivo para atrativo, e o ponto $\alpha_{2c} \sim 0.93$, o qual os dois pólos reais se transformam num pólo duplo na função de Green, adquirindo uma parte imaginária para $\alpha_2 < \alpha_{2c}$. Este ponto é um exemplo de ponto excepcional, estudado na literatura de Hamiltonianos Efetivos não Hermetianos

(ROTTER; BIRD, 2015).

Interações isotrópicas repulsivas, $\alpha_0 > 1$, não mudam a estrutura das raízes. De fato, o único efeito é aumentar a região com dois modos estáveis. Para interações isotrópicas atrativas, $\alpha_0 < 1$, essa região é diminuída, e desaparece em certo momento. Estes dois modos reaparecem para interação isotrópica suficientemente forte. Indica-se esse comportamento no Gráfico (3), onde apresenta-se um diagrama de fases no plano $\alpha_2 - \alpha_0$. A região branca representa a região onde as duas raízes reais estão presentes.

Gráfico 3 - Diagrama de fase dinâmico no plano $\alpha_2 - \alpha_0$



Legenda: O ponto central $\alpha_0 = \alpha_2 = 1$ corresponde ao Gás de Fermi. $\alpha_{0,2} > 1$ ($\alpha_{0,2} < 1$) representa interações repulsivas (atrativas).

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-5.

A borda mais à esquerda na região branca do Gráfico (3) é uma linha de pontos excepcionais, ou seja, representa aonde acontece uma das mudanças abruptas da estrutura dos modos coletivos, sinalizando uma transição de fase dinâmica. A outra mudança está em $\alpha_2 = 1$. A física por trás dessa transição é entendida ao perceber-se que o modelo se comporta como um *sistema quântico pequeno*, contendo poucos graus de liberdade (no caso um modo isotrópico e uma excitação quadrupolar), em contato com um reservatório composto por um conjunto infinito de excitações de momento angular, ou, um banho térmico. O acoplamento entre o sistema pequeno efetivo e o reservatório é governado por $\sqrt{\alpha_2}$. A Hamiltoniana efetiva é não Hermitiana, permitindo assim o comportamento dissipativo do sistema reduzido.

Note que a não Hermiticidade provoca que os autovalores possam ser complexos, e assim

podendo ocorrer o cruzamento dos níveis de energia. Essa situação, que caracteriza uma transição de fase dinâmica, ocorre em alguns tipos de reservatórios, e provoca uma mudança drástica em algumas propriedades das autofunções, como ortogonalidade e rigidez de fase (ROTTER; BIRD, 2015). Essa fenomenologia de pontos e superfícies excepcionais hoje em dia é uma realidade experimental, tendo realizações em sistemas óticos e fotônicos (MIRI; ALÛ, 2019), e em aparatos unicamente feitos para a observação destes objetos (ZHANG et al., 2019).

O termo "transição de fase dinâmica" é também usada em outro contexto denotando a falta de analiticidade em algumas funções de correlação dependentes do tempo. Este ponto de vista é usualmente aplicado ao estudo de sistemas fechados, onde a evolução temporal é unitária. Se existe uma relação entre as duas abordagens, não se é conhecido (HEYL, 2018).

2.4.2 Modos Anti-simétricos

Para os modos coletivos Anti-simétricos, precisa-se resolver $D^-(s) = 0$, ou seja,

$$D^-(s, q) = \left[s^2 - \frac{1}{2} - \Pi(s) \right] \left(s^2 - \frac{\alpha_2}{2} \right) - \frac{\alpha_2}{16} = 0. \quad (132)$$

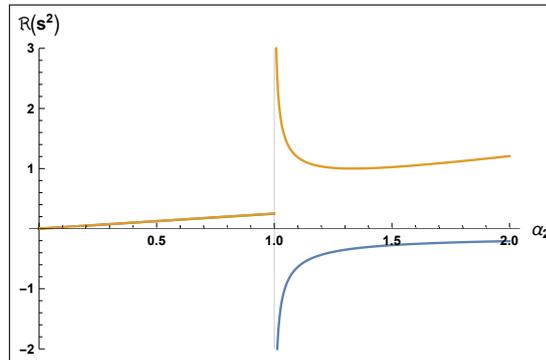
Note que essa expressão não depende de α_0 . As soluções são dadas por:

$$s^2 = \frac{\alpha_2}{4} \begin{cases} 1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} & \text{for } \alpha_2 > 1 \\ 1 \pm i\sqrt{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}} & \text{for } \alpha_2 < 1 \end{cases} \quad (133)$$

Estas soluções são apresentadas nos Gráficos (4) e (5). Novamente, nos gráficos foi fixado $\alpha_0 = 1$.

Para interação quadrupolar repulsiva ($\alpha_2 > 1$), tem-se um modo super amortecido e um modo estável. Estes modos só existem devido à interações com momento angular alto. Note que ambas as raízes divergem no limite $\alpha_2 \rightarrow 1$. Na região atrativa, existe um modo amortecido que prevalece por toda a região até chegar à região da instabilidade de Pomeranchuk, região que será abordada a seguir.

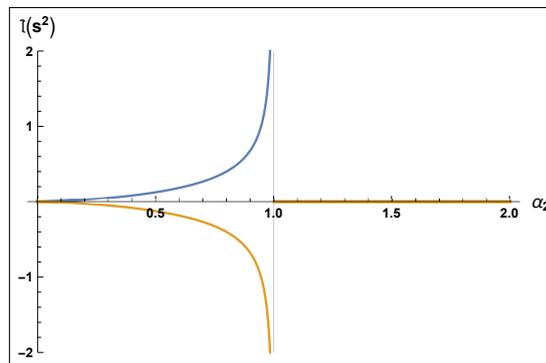
Gráfico 4 - Parte real da solução da equação
 $D^-(s) = 0$



Legenda: Foi plotado $\text{Re}[s^2(\alpha_2)]$.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-6.

Gráfico 5 - Parte imaginária da solução da
 equação $D^-(s) = 0$



Legenda: Foi plotado $\text{Im}[s^2(\alpha_2)]$.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-6.

2.4.3 Regime de Pomeranchuk

A análise feita levou em consideração valores positivos de α_0 e α_2 . O motivo para isso é que, de forma geral, tem-se para todos os momentos angulares ℓ a seguinte condição de estabilidade (POMERANCHUK, 1958),

$$\alpha_\ell = 1 + F_\ell > 0. \quad (134)$$

Logo, para valores de $F_\ell \leq -1$, a teoria torna-se instável. O exato ponto em que $F_\ell = -1$ são as chamadas instabilidades de Pomeranchuk. Com isso, nos pontos $\alpha_0 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$, a aproximação harmônica usada torna-se inválida. As instabilidades de Pomeranchuk são um exemplo de ponto crítico quântico, e a instabilidade de Pomeranchuk de $\alpha_2 = 0$ é associada com a transição de fase isotrópica-nemática quântica (LAWLER et al., 2006; OGANESYAN; KIVELSON; FRADKIN, 2001).

Logo, não é tão simples estudar os modos coletivos próximo a $\alpha_2 \gtrsim 0$. Colocando o valor $\alpha_2 = 0$ e usando o formalismo, a instabilidade se manifesta com a aparição do modo $s^2 = 0$ em $\alpha_2 = 0$. Isso se explica pois até agora foi considerado que o modelo tenha interações altamente localizadas. De fato, na Eq.(87), foi considerado $F_{S,T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv F_{S,T}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, o que torna os parâmetros α_0 e α_2 constantes.

Isto torna o modelo inadequado perto da instabilidade de Pomeranchuk e precisa-se considerar então interações de alcance finito. Com isso, considera-se parâmetros que dependam do momento, ou seja, $\alpha_0 \equiv \alpha_0(q)$ e $\alpha_2 \equiv \alpha_2(q)$. E finalmente, para interações de curto alcance, pode-se expandir as constantes de acoplamento em série de Taylor da seguinte forma,

$$\alpha_0(q) = \alpha_0 + \kappa_0 q^2 \quad (135)$$

$$\alpha_2(q) = \alpha_0 + \kappa_2 q^2, \quad (136)$$

onde κ_0^2 e κ_2^2 são o alcance de curta distância típico para interações de densidade e quadrupolo, respectivamente. Como a fase de líquido de Fermi longe das instabilidades de Pomeranchuk é homogênea, esses termos quadráticos no momento são desprezíveis e é suficiente considerar Parâmetros de Landau constantes. Expandindo os modos simétricos e anti-simétricos em potências de $\alpha_2(q) \gtrsim 0$ e colocando a condição de Pomeranchuk $\alpha_2 = 0$, acha-se

$$s^2 \sim \frac{\alpha_0}{2} \quad \rightarrow \omega \sim \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} v_F q \quad \text{simétrico} \quad (137)$$

$$s^2 \sim -\frac{\alpha_2^2(q)}{4} \quad \rightarrow \omega \sim i\frac{1}{2}\kappa_2 v_F q^3 \quad \text{simétrico} \quad (138)$$

$$s^2 \sim \frac{\alpha_2(q)}{4} \quad \rightarrow \omega \sim \frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2} v_F q^2 \quad \text{anti-simétricos} \quad (139)$$

Vê-se um modo linear e estável, Eq.(137), e um modo super amortecido cúbico, dado pela Eq.(138), associados com os modos coletivo simétricos. Por parte dos modos coletivos anti-simétricos, tem-se um modo estável quadrático Eq.(139). O modo cúbico super amortecido foi identificado como relevante para descrever a transição de fase isotrópica-nemática, tendo sua correspondente na fase de simetria quebrada como um modo de Goldstone (LAWLER et al., 2006).

2.5 Funções Espectrais

Como dito anteriormente, a função de Green para os modos coletivos simétricos diverge para $s \rightarrow 0$. O motivo para isso é a existência de um autovalor zero da matriz \mathbf{M}^+ na Eq.(97). Esse modo zero não depende das interações, e aparece até para o Gás de Fermi, onde $\alpha_0 = \alpha_2 = 1$.

Dito isso, para entender fisicamente esse modo, foca-se no caso estático e livre, usando a Eq.(88).,

$$(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{q}) \delta n_S(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (140)$$

Se $(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{q}) \neq 0$ então $\delta n_S(\mathbf{q}) = 0$ para todo S . Entretanto, se $(\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{q}) = 0$ então tem-se uma solução não trivial de $\delta n_S(\mathbf{q})$ constante, e $\mathbf{q} \perp \mathbf{v}_S$. Interpretamos então que estes modos zeros são deslocamentos constantes perpendiculares à velocidade de Fermi em cada patch, e são soluções da equação de movimento.

Entretanto, deslocamentos tangenciais não deformam a superfície de Fermi, eles apenas são reparametrizações da superfície. Para mais uma visualização desse resultado, usa-se a base de momento angular. Da Eq.(92), ainda para o caso estático e livre, tem-se soluções não triviais da forma $m_{\ell-1} = -m_{\ell+1}$. Isto significa que $m_0 = -m_{\pm 2} = m_{\pm 4} = -m_{\pm 6}, \dots$ são soluções não triviais da equação $\mathbf{M}^+ \mathbf{m}^+ = 0$. Logo, o vetor $\mathbf{m}^+ = m_0(1, -1, 1, -1, \dots)$ é um autovetor de \mathbf{M} com autovalor zero. Substituindo esse vetor na Eq.(89), tem-se,

$$\delta n_S(\mathbf{q}) = m_0 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell e^{i2\ell\theta_S} = m_0 \delta\left(\theta_S - \frac{\pi}{2}\right). \quad (141)$$

Logo, o modo zero representa uma excitação do tipo partícula-buraco com momento \mathbf{q} perpendicular à velocidade de Fermi em cada patch. Como dito, esse modo não é físico, e se livrar dele se mostra uma tarefa simples. O ponto é perceber que esse modo não físico forma um subespaço de soluções ortogonal ao subespaço físico. Logo, computa-se a função de Green no espaço restrito ao subespaço ortogonal à esse autovetor do modo zero. De forma prática, expande-se a função de Green em frações parciais e define-se uma

função de Green modificada pela subtração da contribuição do modo zero, a função de Green modificada tem a seguinte forma,

$$\mathbf{G}_R(s, q) = \sum_j \frac{B_j(s, q)}{(s^2 - s_j^2)}, \quad (142)$$

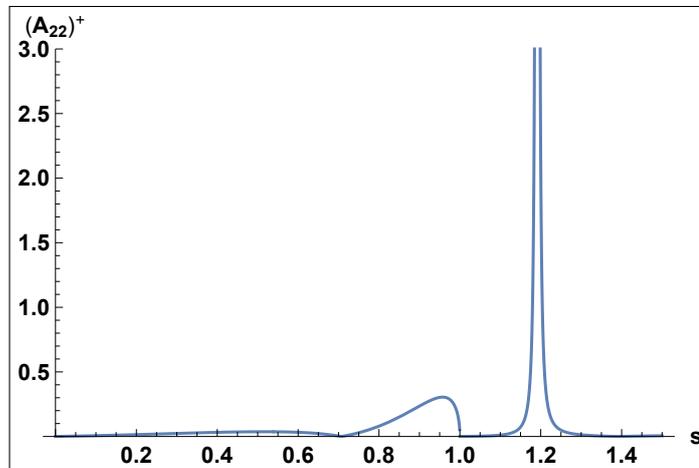
onde $s_j^2 \neq 0$ são as raízes computadas na seção anterior e as funções $B_j(s, q)$ são computadas pela expansão em frações parciais.

A densidade de estados é relacionada com a parte imaginária da função de Green retardada \mathbf{G}_R ou, de forma mais geral, com a função espectral definida como: ,

$$\mathbf{A}^\pm(\omega, \mathbf{q}) = \mathcal{N}^{-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im}[\mathbf{G}_R^\pm(\omega + i\epsilon, \mathbf{q})], \quad (143)$$

onde as constantes de normalização \mathcal{N}^{-1} são escolhidas de tal maneira que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\omega, \mathbf{q}) d\omega = 1$ para \mathbf{q} fixo. Nos Gráficos (6),(7) e (8), mostra-se $A_{22}^+(s, \mathbf{q})$ para diferentes valores do acoplamento quadrupolar α_2 , e para $\alpha_0 = 1$, de forma que as raízes coincidam com as mostradas nos Gráficos (1) e (2).

Gráfico 6 - Função Espectral Normalizada para os Modos Simétricos na região repulsiva

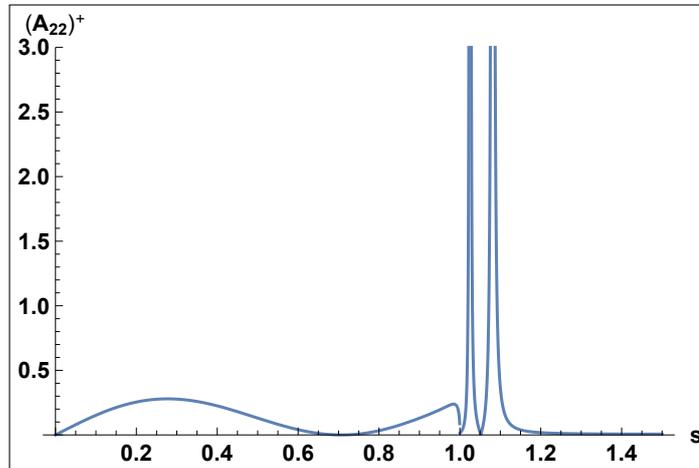


Legenda: Foi fixado $\alpha_2 = 2$, dentro da região repulsiva.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-7.

No Gráfico (6) foi fixado $\alpha_2 = 2$, dentro da região repulsiva, observa-se o som zero de Landau quadrupolar como um pico no regime quadrupolar repulsivo. Além disso, tem-se também uma distribuição contínua de partículas-buraco para $s < 1$. Esta ressonância move-se para a esquerda quando α_2 diminui e alcança o modo livre $s^2 = 1$ para $\alpha_2 = 1$. No Gráfico (7), foi mostrado a função espectral para atração fraca com $\alpha_2 = 0.94$, nesta região vê-se um resultado inesperado, existem duas ressonâncias. A ressonância próxima a $s \gtrsim 1$ é a continuação do som zero na região atrativa. Além disso, existe um segundo

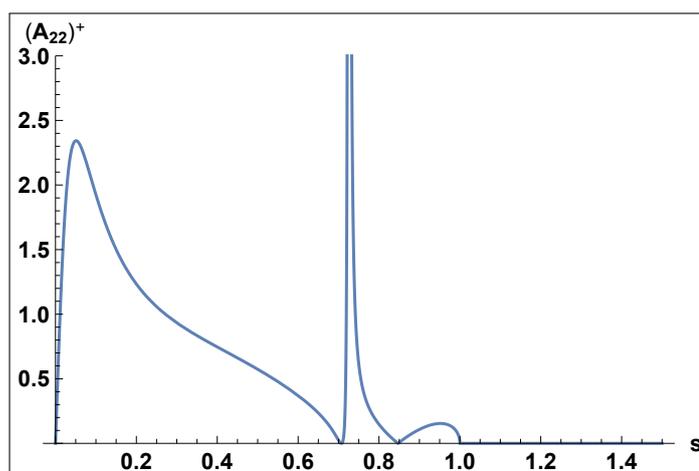
Gráfico 7 - Função Espectral Normalizada para os Modos Simétricos na região atrativa fraca



Legenda: Foi fixado $\alpha_2 = 0.94$, de forma que se está na região fracamente atrativa (região branca do Gráfico (3)).

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-7.

Gráfico 8 - Função Espectral Normalizada para os Modos Simétricos na região de Pomeranchuk



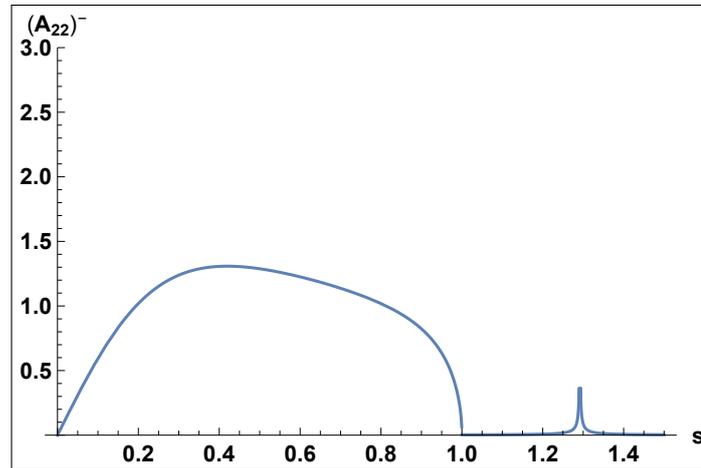
Legenda: Foi fixado $\alpha_2 = 0.1$, ou seja, próximo à instabilidade de Pomeranchuk.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-7.

modo, começando em frequências altas e movendo-se para frequências mais baixas quanto mais a interação atrativa aumenta. Este comportamento é o mesmo que o apresentado no Gráfico (1). As ressonâncias se encontram em um α_2 crítico dado por $\alpha_{2c} \sim 0.93$, onde tem um pólo de segunda ordem na função de Green. A localização de desse α_{2c} depende do valor de α_0 , como foi discutido no diagramas de fase dinâmico (3). Para valores pequenos de α_2 , o modo se torna dissipativo e existe uma transferência de peso espectral para o modo cúbico super amortecido, bem próximo à instabilidade de Pomeranchuk nemática. Esse comportamento foi exposto no Gráfico (8), onde foi fixado $\alpha_2 = 0.1$.

Foi plotado também os Gráficos (9), (10) (11) onde mostra-se as funções espectrais para os modos anti-simétricos, $A_{22}^-(s, q)$, em função de $s = \omega/v_F q$ e para \mathbf{q} fixo. As raízes coincidem com as dos Gráficos (4) e (5), pois, novamente, foi fixado $\alpha_0 = 1$.

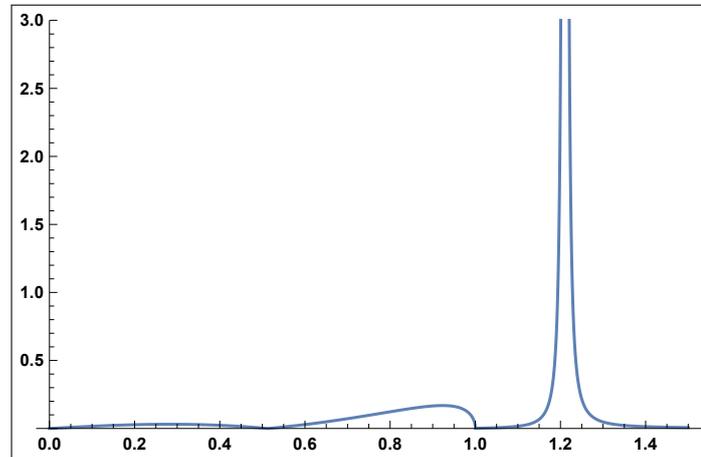
Gráfico 9 - Função Espectral Normalizada para os Modos Anti-Simétricos na região fortemente repulsiva



Legenda: Foi fixado $\alpha_2 = 2$, bem dentro da região repulsiva.

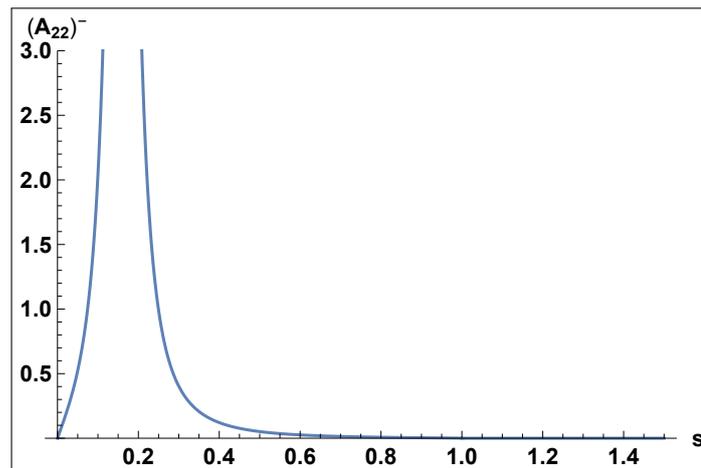
Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-7.

Gráfico 10 - Função Espectral Normalizada para os Modos Anti-Simétricos na região repulsiva fraca



Legenda: Foi fixado $\alpha_2 = 1.5$, ou seja, para repulsão fraca.
 Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-7.

Gráfico 11 - Função Espectral Normalizada para os Modos Anti-Simétricos na região de Pomeranchuk



Legenda: Foi fixado $\alpha_2 = 0.1$, próximo à instabilidade de Pomeranchuk.

Fonte: AQUINO; BARCI, 2019, p. 115117-7.

Nesses gráficos encontra-se mais um resultado. Geralmente, para Líquidos de Fermi com interação isotrópica F_0 , não existe modos anti-simétricos, como dito anteriormente, logo, poucos modelos foram capazes de mensurá-los. Dito isso, recentemente, foram computados modos anti-simétricos para Líquidos de Fermi com interações F_0 e F_1 (KHOO; VILLADIEGO, 2019) e para a instabilidade de de Pomeranchuk nemática (LAWLER et al., 2006). Nesse trabalho, como esperado, foi encontrado o mesmo tipo de modo para interações quadrupolares em todo o regime de interação. Para interações repulsivas muito fortes, o peso espectral do modo é muito pequeno, comparado com a distribuição contínua de partícula-buraco, como vê-se no Gráfico (9). Para repulsão fraca, fixando assim $\alpha_2 = 1.5$, o modo é definido, e bem separado do contínuo de partícula-buraco, como apresentado no Gráfico (10). Por fim, para interação atrativa, o modo torna-se amortecido, e bem próximo à instabilidade de Pomeranchuk, $s \sim 0$, este pega a maior parte do peso espectral, produzindo um modo com relação de dispersão quadrática.

CONCLUSÃO

Esse trabalho pode ser dividido em duas partes. No primeiro capítulo, revisitou-se o método da Bosonização Multidimensional, partindo do modelo do oscilador harmônico quântico e desenvolvendo as ideias e formalismo até chegar à descrição de um sistema fermiônico com superfície de Fermi a partir de um conjunto de campos bosônicos quirais. Revisitou-se resultados dos trabalhos clássicos da bosonização, como a construção de operadores que descrevem as excitações elementares do sistema como a criação e aniquilação de pares partícula-buraco (Castro Neto; FRADKIN, 1994b), até o formalismo de estados coerentes e integrais de caminho (Castro Neto; FRADKIN, 1994a; BARCI; OXMAN, 2003).

No segundo capítulo, apresentou-se em detalhe o método e os resultados do estudo da dinâmica de Líquidos de Fermi com interações de densidade e quadrupolo (AQUINO; BARCI, 2019). Primeiramente se mapeou a dinâmica do sistema partindo de uma equação de transporte vinda da variação da ação do sistema bosonizado na seção anterior, em uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados. Usando uma aplicação do grupo de renormalização, foi calculado as funções de Green dos modos simétricos e anti-simétricos de forma não perturbativa. Por fim, a partir das funções de Green foi apresentado um estudo bem detalhado dos modos coletivos em uma variedades de regimes de interação, e foi calculado as funções espectrais para cada um desses regimes.

Dentre os modos estudados nesse sistema, alguns são pouco debatidos na literatura, como os modos transversais (anti-simétricos), que bem recentemente foram reportados em um modelo diferente do usado nesse trabalho (KHOO; VILLADIEGO, 2019). O motivo disso são os poucos modelos que estudaram modelos de Líquidos de Fermi com interações diferentes da interação isotrópica α_0 . Da parte dos modos simétricos, tem-se o zero som de Landau modificado pela interação quadrupolar, no regime repulsivo. No regime atrativo, tem-se um resultado interessantíssimo, que abre possibilidades de novas investigações nessa região. Para atração fraca, tem-se um modo que é a continuidade do som zero de Landau para a região atrativa, e um modo novo que vêm de altas frequências e se fundi com o som zero em atrações mais moderadas, esse encontro dos dois modos provoca uma profunda mudança na dinâmica do sistema, visto que esse modo fundido adquire uma dissipação. E exatamente no ponto crítico α_{2c} , chamado ponto excepcional, a função de Green adquire um pólo duplo. Para atrações bem fortes, próximo da região de Pomeranchuk, um modo super amortecido ganha peso espectral desse modo amortecido e domina a região com $\alpha_2 \gtrsim 0$. Este comportamento é visto no Gráfico das funções espectrais (10) e (11).

No Gráfico (3) foi estudado o comportamento dessa estrutura dos modos coletivos simétricos levando-se em consideração a interação isotrópica α_0 . Chegou-se a conclusão que a

estrutura não muda, a região atrativa em que existe dois modos simétricos sem dissipação na verdade aumenta, identificando-se toda uma linha de pontos excepcionais definindo aonde a dinâmica do sistema muda, definindo uma transição de fase dinâmica. Essa região eventualmente desaparece, e, surpreendentemente, reaparece na região com $\alpha_0 < 1$ e $\alpha_2 > 1$.

O próximo passo desse trabalho é a total caracterização do ponto excepcional. Seja como um sistema não Hermitiano que apresenta esse tipo de estrutura (ROTTER; BIRD, 2015), seja como uma transição de fase dinâmica (HEYL, 2018), com uma configuração de quench (NESSI; IUCCI; CAZALILLA, 2014) ou outro paradigma. Esta caracterização, se confirmada, se mostrará como o primeiro sistema de Líquido de Fermi que apresenta tal estrutura.

REFERÊNCIAS

- ALTLAND, A.; SIMONS, B.D. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge: Cambridge Academic Press, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=GpF0Pgo8CqAC>. Acesso em 12 fev. 2021
- AQUINO, R.; BARCI, D. G. Two-dimensional Fermi liquid dynamics with density-density and quadrupolar interactions. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 100, p. 115117, 2019. DOI: 10.1103/PhysRevB.100.115117. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.115117>. Acesso em 23 fev. 2021
- BARCI, D. G. *et al.* Theory of the quantum Hall Smectic Phase. I. Low-energy properties of the quantum Hall smectic fixed point. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 65, p. 245319, 2002. DOI: 10.1103/PhysRevB.65.245319. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.65.245319>. Acesso em 12 fev. 2021.
- BARCI, D. G.; OXMAN, L. E. Strongly correlated fermions with nonlinear energy dispersion and spontaneous generation of anisotropic phases. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 67, n. 9, p. 205108, 2003. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.205108. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.67.205108>. Acesso em 12 fev. 2021.
- BAYM, G.; PETHICK, C. *Landau Fermi-Liquid Theory: Concepts and Applications*. [S.l.]: Wiley, 1991. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=zDBnNEPAu2MC>. Acesso em 12 fev. 2021.
- CALVO, H. L.; PASTAWSKI, H. M. Dynamical phase transition in vibrational surface modes. *Brazilian Journal of Physics*, [S.l.], v. 36, n. 9, p. 963 - 966, 2006. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.205108. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332006000600044&nrm=iso. Acesso em 12 fev. 2021.
- CASTRO NETO, A. H.; FRADKIN, E. Bosonization of Fermi Liquids. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 49, p. 10877, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.10877>. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.10877>. Acesso em 23 fev. 2021
- CASTRO NETO, A. H.; FRADKIN, E. Bosonization of the Low Energy Excitations of Fermi Liquids. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 72p. 1393, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.1393>. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.1393>. Acesso em 23 fev. 2021
- CASTRO NETO, A. H.; FRADKIN, E. Exact Solution of the Landau Fixed Point via Bosonization. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 51, p. 4084, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.4084>. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.4084>. Acesso em 13 fev. 2021
- DING, W.; SEIDEL, A.; YANG, K. Entanglement Entropy of Fermi Liquids via Multidimensional Bosonization. *Phys. Rev. X*, [S.l.], v. 2, p. 011012, 2012. DOI: 10.1103/PhysRevX.2.011012. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.2.011012>. Acesso em 15 fev. 2021
- DOMANY, E. *et al.* Solutions to the Schrodinger equation on some fractal lattices. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 28, p. 3110--3123, 2011. DOI: 10.1103/PhysRevB.28.3110. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.28.3110>. Acesso em 12 fev. 2021
- FELDMAN, B. E. *et al.* Observation of a nematic quantum Hall liquid on the surface of bismuth. *Science*, [S.l.], v. 354, p. 316--321, 2016. DOI: 10.1126/science.aag1715. Disponível em: <https://science.sciencemag.org/content/354/6310/316>. Acesso em 12 fev. 2021.
- FERNANDES, R. M.; CHUBUKOV, A. V; SCHMALIAN, J. What drives nematic order in iron-based superconductors?. *Nature Physics*, [S.l.], v. 10, p. 97 EP -, 2014. DOI:

<https://doi.org/10.1038/nphys2877>. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nphys2877>. Acesso em 12 fev. 2021.

FRADKIN, E.; KIVELSON, S. A. Liquid-crystal phases of quantum Hall systems. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 59, p. 8065--8072, 1999. DOI: 10.1103/PhysRevB.59.8065. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.59.8065>. Acesso em 12 fev. 2021.

FRADKIN, E. *et al.* Nematic Fermi Fluids in Condensed Matter Physics. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, [S.l.], v. 1, p. 153-178, 2017. DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-070909-103925. Disponível em: <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-conmatphys-070909-103925>. Acesso em 11 fev. 2021.

HEYL, M. Dynamical quantum phase transitions: a review. *Reports on Progress in Physics*, [S.l.], v. 81, p. 054001, 2017. DOI: 10.1088/1361-6633/aaaf9a. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F1361-6633%2Faaaf9a>. Acesso em 11 fev. 2021.

HOUGHTON, A.; KWON, H. J.; MARSTON, J. B. Multidimensional Bosonization. *Adv. Phys.*, [S.l.], v. 49, p. 141--228, 2000. DOI: 10.1080/000187300243363. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1080/000187300243363>. Acesso em 11 fev. 2021.

HOUGHTON, A.; J.; MARSTON, J. B. Bosonization and fermion liquids in dimensions greater than one. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 48, p. 7790, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.48.7790>. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.48.7790>. Acesso em 11 fev. 2021.

KHOO, J. Y.; VILLADIEGO, I. S. Shear sound of two-dimensional Fermi liquids. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 99, p. 075434, 2019. DOI: 10.1103/PhysRevB.99.075434. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.99.075434>. Acesso em 11 fev. 2021.

KLAUDER, J. R.; SKAGERSTAM, B.S. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*. [S.l.]: World Scientific, 2010. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7GqHpAqYiwIC>. Acesso em 12 fev. 2021

LANDAU, L.D. The Theory of a Fermi Liquid. *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, [S.l.], v. 3, p. 920-925, 1957.

LAWLER, M. J. *et al.* Nonperturbative behavior of the quantum phase transition to a nematic Fermi fluid. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 73, p. 085101, 2006. DOI: 10.1103/PhysRevB.73.085101. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.085101>. Acesso em 11 fev. 2021.

LEDWITH, P. J. GUO, H.; LEVITOV, L. The hierarchy of excitation lifetimes in two-dimensional Fermi gases. *Annals of Physics*, [S.l.], v. 411, p. 167913, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aop.2019.167913>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000349161930168X> Acesso em 11 fev. 2021.

METZNER, W.; CASTELLANI, C; DI CASTRO, C. Fermi systems with strong forward scattering. *Advances in Physics*, [S.l.], v. 47, p. 317-445, 1998. DOI: 10.1080/000187398243528. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/000187398243528>. Acesso em 11 fev. 2021.

MIRI, M; ANDREA, A. Exceptional points in optics and photonics. *Science*, [S.l.], v. 363, n. 6422, 2019. DOI: 10.1126/science.aar7709. Disponível em: <https://science.sciencemag.org/content/363/6422/ear7709>. Acesso em 11 fev. 2021.

NEGELE, J.W.; ORLAND, H.. *Quantum many-particle systems*. [S.l.]: Addison-Wesley Pub. Co., 1988. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=EV8sAAAAYAAJ>. Acesso em 23 fev. 2021

NESSI, N.; IUCCI, A.; CAZALILLA, M. A. Quantum Quench and Prethermalization Dynamics in a Two-Dimensional Fermi Gas with Long-Range Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 113, p. 210402, 2014. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.210402. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.210402>. Acesso em 11 fev. 2021.

- NILSSON, J.; CASTRO NETO, A. H. Heat bath approach to Landau damping and Pomeranchuk quantum critical points. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 72, p. 195104, 2005. DOI: 10.1103/PhysRevB.72.195104. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.72.195104>. Acesso em 11 fev. 2021.
- OGANESYAN, V.; KIVELSON, S. A.; FRADKIN, E. Quantum theory of a nematic Fermi fluid. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 64, p. 195109, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.64.195109>. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.195109>. Acesso em 11 fev. 2021.
- PINES, D.; NOZIERES, P. *The Theory of Quantum Liquids*. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- POMERANCHUK, I. I. On the Stability of a Fermi Liquid. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, [S.l.], v. 8, p. 361, 1958. Disponível em: <http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/e/index/e/8/2/p361?a=list>. Acesso em 11 fev. 2021.
- ROTTER I.; BIRD, J. P. A review of progress in the physics of open quantum systems: theory and experiment. *Reports on Progress in Physics*, [S.l.], v. 78, p. 114001, 2015. DOI: 10.1088/0034-4885/78/11/114001. Disponível em: <https://doi.org/10.1088%2F0034-4885%2F78%2F11%2F114001>. Acesso em 11 fev. 2021.
- SHANKAR, R. Renormalization-group approach to interacting fermions. *Rev. Mod. Phys.*, [S.l.], v. 66, p. 129--192, 1994. DOI: 10.1103/RevModPhys.66.129. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.66.129>. Acesso em 11 fev. 2021
- SILVA, C.E.T.; KOILLER, B. Local density of states in a disordered chain: A renormalization group approach. *Solid State Communications.*, [S.l.], v. 40, p. 215 - 219, 1981. DOI: [https://doi.org/10.1016/0038-1098\(81\)90743-2](https://doi.org/10.1016/0038-1098(81)90743-2). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0038109881907432>. Acesso em 11 fev. 2021.
- SOKOLOFF, J. B.; JOSÉ, J. V Localization in an Almost Periodically Modulated Array of Potential Barriers. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 49, p. 334--337, 1982. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.334. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.334>. Acesso em 11 fev. 2021.
- WEXLER, C.; DORSEY, A. T. Disclination unbinding transition in quantum Hall liquid crystals. *Phys. Rev. B*, [S.l.], v. 64, p. 115312, 2001. DOI: 10.1103/PhysRevB.64.115312. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.64.115312>. Acesso em 11 fev. 2021.
- ZHANG, X. *et al.* Experimental Observation of an Exceptional Surface in Synthetic Dimensions with Magnon Polaritons. *Phys. Rev. Lett.*, [S.l.], v. 123, p. 237202, 2019. DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.237202. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.237202>. Acesso em 11 fev. 2021.