



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Lucas Gondim Câmara

**Transições de fase em sistemas de campos escalares com efeitos
de dimensão finita**

Rio de Janeiro

2021

Lucas Gondim Câmara

Transições de fase em sistemas de campos escalares com efeitos de dimensão finita



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr Rudnei de Oliveira Ramos

Rio de Janeiro

2021

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

C172t Câmara, Lucas Gondim.
Transições de fase em sistemas de campos escalares
com efeitos de dimensão finita / Lucas Gondim Câmara. –
2021.
66 f. : il.

Orientador: Rudnei de Oliveira Ramos.
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Transformações de fase (Física estatística) - Teses.
2. Simetria (Física) – Teses. 3. Teoria quântica de campos -
Teses. 4. Teoria de campos escalares – Teses. I. Ramos,
Rudnei de Oliveira. II. Universidade do Estado do Rio de
Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 536.42

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Lucas Gondim Câmara

Transições de fase em sistemas de campos escalares com efeitos de dimensão finita

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de Março de 2021.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Rudnei de Oliveira Ramos (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Marcus Emmanuel Benghi Pinto
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Nami Fux Svaiter
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Rio de Janeiro

2021

DEDICATÓRIA

A minha mãe, Cléia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional.

Agradeço ao meu amor, Giovanna, pelo apoio e compreensão.

Ao professor Dr. Rudnei Ramos, pela orientação e confiança.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Muito obrigado pelo apoio financeiro para dedicação dessa dissertação.

E a todos que contribuíram de alguma forma para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

CÂMARA, L. G. *Transições de fase em sistemas de campos escalares com efeitos de dimensão finita*. 2021. 66 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Neste trabalho nós discutimos os fenômenos de quebra inversa de simetria e a não restauração de simetria no contexto de uma teoria escalar de múltiplos campos à temperatura e dimensão finita. Apresentamos as consequências que a temperatura e uma dimensão finita tem nas propriedades críticas do sistema estudado. Além disso, analisamos como os efeitos das correções sobre os acoplamentos impactam no modelo estudado. Nesse estudo fazemos uso de dois tipos diferentes de condições de fronteira na parte espacial finita: periódica e Dirichlet.

Palavras-chave: Transições de Fase. Modelo de Campo Escalar. Dimensões Finitas.

Teoria $\lambda\phi^4$.

ABSTRACT

CÂMARA, L. G. *Phase transitions in scalar field systems with finite dimension effects*. 2021. 66 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

In this work, we discuss the phenomena of inverse symmetry breaking and symmetry non-restoration in the context of multi-scalar field theory at finite temperature and finite dimension. We present the consequences that the temperature and a finite dimension have on the critical properties of the studied system. In addition, we also study how the effects of the temperature and finite dimension corrections on the couplings impact on the critical properties for the model. In the coupled two-scalar field theory model studied here, we consider two different types of boundary conditions, namely, periodic and Dirichlet, and we discuss how each one of these boundaries affect the results that we have obtained.

Keywords: Scalar Field Model. Theory $\lambda\phi^4$. Finite Dimension. Phase Transition.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	- Representação diagramática para λ_ϕ à 1-laço	35
Figura 2	- Representação diagramática para λ_χ à 1-laço	35
Figura 3	- Representação diagramática para o termo inter-acoplamento λ à 1-laço	36
Figura 4	- Correções na aproximação de 1-laço e 2-laços na aproximação de bolha (tadpole) para a massa em (a) e (b) e correções ao vértice em (c), (d) e (e).	43
Figura 5	- Diagrama de bolhas do método FTRG	44
Figura 6	- Comparação entre o método perturbativo e não-perturbativo	45
Figura 7	- Massa efetiva $M_\phi(T, L)$ como função da temperatura e um valor fixado de comprimento $L = 2000 \text{ eV}^{-1}$	48
Figura 8	- Massa efetiva $M_\phi(T, L)$ como função do comprimento e um valor fixado de comprimento $T = 9 \times 10^{-4} \text{ eV}$	49
Figura 9	- Acoplamento efetivo $\lambda_\phi(T, L)$ como função da temperatura e um valor fixado de comprimento $L = 2000 \text{ eV}^{-1}$	50
Figura 10	- Acoplamento efetivo $\lambda_\phi(T, L)$ como função do comprimento e um valor fixado de temperatura $T = 9 \times 10^{-4} \text{ eV}$	51
Figura 11	- Diagrama de fase para um campo escalar	52
Figura 12	- Massa efetiva $M_\phi^{2,PBC}(T, L)$ como função do comprimento T para diferentes valores de comprimento.	54
Figura 13	- Massa efetiva $M_\phi^{2,PBC}(T, L)$ como função do comprimento T para diferentes valores de comprimento.	54
Figura 14	- Massa efetiva $M_\phi^2(T, L)$ como função do comprimento L para um valor de temperatura fixada, $T = 9 \times 10^{-4} \text{ eV}$	55
Figura 15	- Diagrama de fases para ϕ no $\phi - \chi$ sistema de dois campos escalares para DBC. 2º gráfico	56
Figura 16	- Diagrama de fases para χ no $\chi - \phi$ sistema de dois campos escalares para DBC. 2º gráfico	57

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TQC	Teoria Quântica de Campos
TFT	<i>Thermal Field Theory</i>
PBC	<i>Periodic Boundary Conditions</i>
DBC	<i>Dirichlet Boundary Conditions</i>
ISB	<i>Inverse Symmetry Breaking</i>
SNR	<i>Symmetry Non Restoration</i>
FTRG	<i>Finite Temperature Renormalization Group</i>

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	INTRODUÇÃO TEÓRICA	13
1.1	Teoria Quântica de Campos	13
1.1.1	<u>Teoria Escalar $\lambda\phi^4$</u>	13
1.1.2	<u>Funcional gerador</u>	14
1.1.3	<u>Função de 2-pontos</u>	15
1.2	Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita	16
1.2.1	<u>Mudanças na função de 2-pontos</u>	18
1.2.2	<u>Extensão do formalismo de Matsubara para compactificações espaciais</u>	19
2	EFEITOS TÉRMICOS PARA A MASSA	21
2.1	Modelo $O(N)$	21
2.2	Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ sem dimensão finita	24
2.3	Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ com dimensão finita	26
2.3.1	<u>Condições de Contorno Periódicas</u>	27
2.3.2	<u>Condições de Contorno de Dirichlet</u>	29
3	EFEITOS TÉRMICOS PARA OS ACOPLAMENTOS	34
3.1	Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ sem dimensão finita	34
3.2	Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ com dimensão finita	39
3.2.1	<u>Condições de contorno periódicas</u>	39
3.2.2	<u>Condições de contorno de Dirichlet</u>	41
3.3	Refinamento do cálculo das autoenergias	42
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	46
4.1	Resultado para o caso de um campo escalar	47
4.2	Resultado para o caso de múltiplos campos escalares	53
	CONCLUSÃO	58
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A – Demonstração do domínio e frequência discretas para as condições de contorno	64
	APÊNDICE B – Expressão da massa efetiva para o caso $2 + 1$ sem compactificação	66

INTRODUÇÃO

As transições de fase, na física moderna, representam uma parcela significativa de fenômenos importantes. Estas estão presentes em diversas áreas da física, como: cosmologia, matéria condensada, física de partículas, física nuclear entre outras. Por definição, uma fase constitui uma parte homogênea de um sistema. Uma parte homogênea do sistema é toda aquela que possui as mesmas propriedades físico-químicas macroscópicas, tais como, densidade. Falando do líquido mais abundante do nosso planeta, em condições ordinárias, a água possui três fases: líquida, gasosa e sólida. As transições de fase são as mudanças entre uma fase e outra. Isso ocorre quando algum parâmetro externo é modificado, estes podem ser: temperatura, volume, pressão e assim por diante.

Transições de fase e propriedades de simetria de um sistema física estão intimamente relacionadas entre si. Por definição, simetria é a invariância de um sistema frente a certas transformações particulares. Exemplos dessas transformações podem ser: rotações, reflexões, paridade, temporalidade, carga e outros semelhantes.

Matematicamente podemos definir o conjunto de operações de simetria e caracterizá-lo em termos de *grupo*. A representação de um grupo é o mapeamento de cada elemento em uma matriz (COLEMAN, 1985). Os tipos de grupos mais usados em física são os grupos de Lie, grupos matriciais contínuos que unem a estrutura algébrica com a estrutura de uma variedade diferenciável. Esses grupos foram estudados por Sophus Lie por volta de 1870 (NIJENHUIS et al., 1959), buscando compreender equações diferenciais a partir de seus grupos de simetria (MARTIN, 2017).

O grupo de interesse desse trabalho é o grupo $O(N)$, cujo mapeamento se dá em matrizes reais ortogonais, onde N representa as dimensões das matrizes. Toda rotação pode ser representada por matrizes ortogonais, o grupo $O(N)$ diz respeito exatamente sobre as rotações em N dimensões. Já no grupo $O(N_1) \times O(N_2)$ são consideradas duas matrizes em conjunto. Mais a frente vamos perceber que essa segunda matriz está relacionada com a adição de um novo campo na densidade de Lagrangiana e que se transforma independente pelo segundo grupo.

Quando há transições de fase muitas das vezes ocorre a quebra de uma determinada simetria do sistema. Seja um sistema físico definido através da sua Hamiltoniana H que deve ser invariante sob as transformações de um grupo. Se dentro deste grupo houver um elemento distinto dessa simetria, então, é dito que há uma quebra de simetria nesse sistema (COLEMAN, 1985).

Um forma menos teórica de entender é através do exemplo do ferromagneto de Heisenberg (CHAIKIN; LUBENSKY, 1995). Este possui uma Hamiltoniana com interação spin-spin dos átomos que é invariante frente a rotações.

Em altas temperaturas os spins dos átomos são aleatórios, desprezando os efeitos

das bordas, este sistema satisfaz a simetria rotacional. Entretanto ao diminuir a temperatura os spins vão se alinhando, mesmo que essa direção seja arbitrária, essa escolha a torna distinta das demais. Este é um exemplo de quebra de simetria. Se novamente aumentarmos a temperatura teremos a restauração da simetria original.

Se pegar o exemplo anterior, do ferromagneto de Heisenberg, nota-se que a medida que a temperatura diminui o sistema fica menos simétrico. O contrário também é verdade, isto é, com um aumento de temperatura o sistema torna-se mais simétrico. Usualmente é isso que se espera dos sistemas físicos. Entretanto na natureza existem determinados elementos e materiais capazes de fazer o oposto.

A quebra inversa de simetria, do inglês "Inverse Symmetry Breaking" (ISB), se dá quando o aumento da temperatura causa a diminuição da simetria do sistema. Exemplo, os isótopos He^3 e He^4 que passam da fase líquida para a fase cristalina com o aumento da temperatura, em uma pressão entre 25 e 30 bar e temperatura abaixo de $1K$ (SCHUPPER; SHNERB, 2005). Sal de Rochelle que apresenta uma estrutura monoclinica entre $255K$ e $297K$ fora desta faixa as células unitárias do cristal são ortorrômbicas. Isso significa que em $255K$ há uma ISB, uma vez que a estrutura ortorrômbica é mais simétrica que a monoclinica. (TATSUMI; MATSUO; SUGA, 1978)

A não restauração de simetria, do inglês "Symmetry Non-Restoration" (SNR), acontece quando o aumento da temperatura não restaura a simetria original. Para mais explicações, exemplos e aplicações veja a referência (BORUT, 2000).

Na tentativa de entender como sistemas de partículas elementares teriam suas simetrias restauradas em altas temperaturas, Steven Weinberg explorou o modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ com dois campos escalares ϕ e χ (WEINBERG, 1974). Usando aproximações à 1-laço, ele conseguiu mostrar a possibilidade de haver ISB e SNR para valores específicos dos acoplamentos. O que pode colocar essa ideia em xeque é o fato de usar apenas a aproximação à 1-laço, e se esses resultados deveriam persistir mesmo em altíssimas temperaturas. A fim de dar conta desse problema, diversos estudos têm sido empregados para analisar essa questão. Os resultados no entanto permanecem altamente controversos, seja por não encontrar evidência para ISB/SNR e outros que favorecem o fenômeno, para mais informações sobre esses estudos confira nas referências (PINTO; RAMOS, 2000; LAISSARDIERE; MAYOU; MAGAUD, 2012; ORLOFF, 1997; HONG; KOGUT, 2001; BIMONTE; LOZANO, 1996; GAVELA et al., 1998).

Dentro do vasto campo de estudo das transições de fase, existe uma tentativa de entender e investigar melhor como alguns sistemas confinados, isto é, que possui uma dimensão finita, afetam suas propriedades críticas. Desta forma o objetivo do presente trabalho é investigar como modelos de ISB/SNR são afetados por terem uma das dimensões finitas. Mais especificamente falando será tratado um sistema com uma separação L , por exemplo, um material plano de espessura L , que aparece com bastante frequência em estudos de matéria condensada (BRANKOV; DANCHEV; TONCHEV, 2000). Neste trabalho

estamos interessados em estudar como tal dimensão finita pode afetar as propriedades críticas de um sistema de campos escalares acoplados, como no caso do modelo de Weinberg mencionado acima.

Este trabalho é dividido em 5 capítulos. O 2° capítulo trata de uma introdução teórica ao ferramental que será usado para o trabalho, fazendo uma breve apresentação sobre a teoria quântica de campos, sobre a teoria de campos térmicos, bem como uma exposição do modelo escalar que será utilizado no estudo. No 3° capítulo apresentamos como são calculadas as correções térmicas às autoenergias da teoria estudada. No 4° capítulo, quase que como continuação do 3°, serão calculadas as correções dos acoplamentos da teoria. No 5° capítulo serão apresentados os resultados obtidos. No 6° capítulos apresentaremos um resumo decorrentes dos resultados.

Nesta dissertação vamos estar sempre trabalhando em termos das unidades naturais, tal que $c = \hbar = k_b = 1$. Usando a assinatura $diag(+1, -1, -1, -1)$ para a métrica de Minkowski quando for necessário.

1 INTRODUÇÃO TEÓRICA

1.1 Teoria Quântica de Campos

Na primeira metade do século XX duas teorias distintas surgiram e foram ganhando força com suas descobertas e previsões, foram elas: mecânica quântica e relatividade especial. A mecânica quântica na sua formulação inicial é considerada uma teoria não relativística, em outras palavras, a dinâmica que esta teoria descreve não abarca objetos com velocidades próximas a luz. A tentativa, bem sucedida, de unificar as duas teorias ficou conhecida como Teoria Quântica de Campos (TQC) (RYDER, 1996).

A TQC lida com sistemas de infinitos graus de liberdade. Os campos quânticos, são os campos clássicos, como o campo eletromagnético, porém obedecendo as regras de comutação da mecânica quântica. As partículas, nessa teoria, são entendidas como excitações desse campo.

Embora a TQC seja uma ideia orgânica que une campos clássicos, mecânica quântica e relatividade, para obter resultados que descrevem o mundo real, necessita usar artefatos matemáticos pouco intuitivos como a renormalização. Mesmo com esse contraponto, não há como negar que é uma das maiores conquistas científicas, por descrever todas as partículas subatômicas com incrível precisão, no modelo que ficou conhecido como "Modelo Padrão das Partículas Elementares".

1.1.1 Teoria Escalar $\lambda\phi^4$

Em TQC, teoria escalar $\lambda\phi^4$ é um sistema que segue a seguinte densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4, \quad (1)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$. O primeiro termo é o termo cinético, relacionado à propagação das partículas, o segundo diz respeito à massa, enquanto que o último é interpretado como um termo de interações quárticas.

A densidade Lagrangiana é invariante do tipo $O(N)$ para quando o campo possuir N componentes, $\phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_N)$. Para o caso de uma única componente, podemos fazer uma rotação de 180° em uma coordenada, chama-se isso de reflexão discreta, tal que

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad (2)$$

após a substituição, obtém-se a mesma Lagrangiana, sendo assim invariante frente a transformações do tipo Z_2 para o caso em que ϕ tenha apenas uma componente.

Este modelo $\lambda\phi^4$ é particularmente importante para a Física de Partículas em especial para modelar o setor de Higgs do modelo padrão de Glashow-Weinberg-Salam (SALAM, 1968), (WEINBERG, 1967) e (GLASHOW, 1961).

1.1.2 Funcional gerador

Neste trabalho vamos usar o formalismo de Feynman de integrais de trajetória para a quantização dos campos (FEYNMAN, 1948).

Na TQC uma das peças fundamentais é tentar encontrar a amplitude de probabilidade de um sistema que esteja no vácuo em $(t \rightarrow -\infty)$ em seu estado fundamental, age sobre ele uma fonte externa e posteriormente volta ao seu estado fundamental em $(t \rightarrow +\infty)$. Essa amplitude de probabilidade é chamada de transição vácuo-vácuo, sendo também o funcional gerador de qualquer função de Green. Por isso, seu papel fundamental na TQC. Sua definição e derivação geral encontra-se em diversos livros-textos de TQC (ZEE, 2010), (DAS, 2006) e (BELLAC; BARTON et al., 1991), e é definido, para o caso de um campo escalar ϕ , por

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)}, \quad (3)$$

onde N é um termo de normalização, $\mathcal{D}\phi$ é a medida da integral funcional, $J(x)$ é o termo de fonte e \mathcal{L} é a densidade de Lagrangiana para bósons escalares sem spin, cujo campo escalar ϕ pode ser escrito como uma transformada de Fourier na forma (RYDER, 1996)

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} [\phi(p)e^{ip \cdot x} + \phi^*(p)e^{-ip \cdot x}], \quad (4)$$

onde D é a dimensão total do espaço-tempo, que nesse caso é 4.

A função de Green de n-pontos pode ser obtida como (RYDER, 1996)

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0|T[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)]|0\rangle = (-i)^n \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}. \quad (5)$$

Esta equação também gera as correções a nível quântico.

1.1.3 Função de 2-pontos

A função de 2-pontos é definida como

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = - \left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0}, \quad (6)$$

calculando para o caso de um campo escalar livre, cuja densidade de lagrangiana é dada por $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi$, obtemos a seguinte expressão

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2), \quad (7)$$

note que estamos tratando da função de Green da equação de Klein-Gordon, Δ_F , que é chamado de propagador livre de Feynman, pode ser então definido como (RYDER, 1996)

$$\Delta_F(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (8)$$

Este propagador no espaço de momento, considerando¹ $p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$, toma a seguinte forma

$$\tilde{\Delta}_F(p_0, \mathbf{p}) = \frac{i}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (9)$$

Vamos agora considerar no cálculo da função de Green de 2-pontos a teoria escalar $\lambda\phi^4$, cuja densidade de Lagrangiana é dada por (1). A função de Green de 2-pontos, calculada perturbativamente em λ , fica agora dado por (RYDER, 1996)

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{\lambda}{2}\Delta_F(0) \int dz \Delta_F(z - x_1)\Delta_F(z - x_2) + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (10)$$

onde mostramos explicitamente a correção de ordem λ para o propagador livre de Feynman (8). Essa equação também pode ser reescrita da seguinte forma

¹ Aqui tomamos a métrica definida no espaço de Minkowski, cujo tensor métrico é $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e a notação de um quadri-vetor usual é dado por $x \equiv x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1, x_2) &\simeq i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\
&\simeq i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{p^2 - m^2 - \frac{1}{2} i \lambda \Delta_F(0) + i\epsilon},
\end{aligned} \tag{11}$$

que é equivalente a (10), quando expandindo até ordem λ .

Nas expressões acima $\Delta_F(0)$ é dado por

$$\Delta_F(0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{12}$$

1.2 Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita

A TQC é uma teoria que descreve muito bem para descrever observáveis mensuráveis em um espaço-tempo vazio, como as partículas em um acelerador de partículas. Porém no nosso mundo sempre lidamos com grandezas que estão relacionadas a termodinâmica, de forma mais geral, com a Mecânica Estatística. Devemos então utilizar uma teoria capaz de unir estes conceitos. Esta é chamada de Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita ou Teoria de Campos Térmicos em tradução literal de "Thermal Field Theory" (TFT).

O formalismo que vamos trabalhar neste trabalho começou a ser montado do meio para o final dos anos 1950, principalmente encabeçada por Takeo Matsubara (MATSUBARA, 1955). No qual, a ideia é explorar a grande semelhança que existe entre o gerador funcional das funções de Green e a função de partição da Mecânica Estatística, definida com uma temperatura $T = \frac{1}{\beta}$. Esta não é a única forma de inserir a temperatura na TQC. Outra forma, por exemplo, é o formalismo de tempo real de Schwinger-Keldysh (SCHWINGER, 1961), (KELDYSH, 1964).

Comparando a função de partição da mecânica estatística com a amplitude de transição da TQC, podemos fazer uma analogia entre as expressões e escrever a função de partição como uma integral de trajetória no tempo complexo (Euclidiano). Neste caso podemos fazer uma mudança de variável tal que associa-se $\beta = i(t' - t) = \tau' - \tau$, onde $\tau = it$ é o tempo Euclidiano. A função de partição para campos pode então ser escrita da seguinte forma (BELLAC; BARTON et al., 1991).

$$Z(\beta, J) = N \int_{\text{funções periódicas}} \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\beta) + \int_0^\beta d\tau \int d^3x J(x)\phi(x)}, \tag{13}$$

onde o termo S_E é a ação em termos dos campos definidos no tempo imaginário τ . Essa mudança também implica um espaço-tempo diferente, isto é, em vez de trabalhar no espaço-tempo de Minkowski $diag(+1, -1, -1, -1)$, agora trabalha-se no espaço-tempo Euclidiano $diag(+1, +1, +1, +1)$. Isto é análogo a uma rotação de Wick do tipo $t \rightarrow -i\tau$, realizando uma mudança do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano.

A implicação da integração sobre o tempo imaginário no intervalo $\tau \in [0, \beta]$, é a condição que todos os campos ϕ sejam periódicos no tempo imaginário, $\phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau + \beta)$. Este requisito afirma que a periodicidade no formalismo de tempo imaginário é equivalente a formular a teoria em uma topologia toroidal do tipo $\Gamma_4^1 = (S^1) \times \mathbf{R}^3$, onde (S^1) é uma circunferência de comprimento proporcional ao inverso da temperatura. Portanto, para a função de partição ser escrita em associação com a amplitude de transição no formalismo funcional das integrais de trajetória, é identificado o inverso da temperatura $\beta = \frac{1}{T}$ com o *tempo-imaginário* $\tau = it$. Isto é permitido pois a variável temporal no formalismo de Matsubara não tem papel relevante para a descrição física do sistema, pois estamos tratando de um sistema no equilíbrio termodinâmico. Assim, este formalismo de tempo imaginário na teoria de campos pode ser denominado como uma teoria de campos Euclideana.

Devido ao campo agora satisfazer a condição de periodicidade $\phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau + \beta)$ implica que sua transformada de Fourier no tempo imaginário leva a uma discretização no espectro de energia, cujos valores de frequência, $\omega \rightarrow \omega_n$, são chamadas de *frequências de Matsubara*, as quais passam a assumir valores discretos dependendo da natureza dos campos, bosônicos ou fermiônicos.

Para a elucidação destas consequências do formalismo de tempo-imaginário, tomamos como exemplo o funcional gerador das funções de Green para bósons escalares (13), agora pode ser explicitamente escrita como,

$$Z[\beta, J] = N \int_{\phi(\tau, x) = \phi(\tau + \beta, x)} \mathcal{D}\phi e^{\int_0^\beta d\tau \int d^d x [\mathcal{L}_E + J\phi]}, \quad (14)$$

onde o fator N é uma constante de normalização que não altera a termodinâmica, o fator J , como usual, representa uma fonte de campos externa, e a densidade de Lagrangiana Euclidiana \mathcal{L}_E . Vimos que D é a dimensão total do espaço-tempo, mas que podemos reescrever como $D = 1 + d$, onde d é o número de dimensões espaciais. Escrevendo a solução de $\phi(x)$ adaptada ao formalismo de tempo-imaginário, são feitas as mudanças

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \rightarrow \frac{i}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}, \quad t = -i\tau, \quad \omega = i\omega_n \quad (15)$$

isto é, a integral na parte temporal do momento Euclidiano é alterada por uma soma, que será realizada sobre as frequências de Matsubara ω_n . Logo, a expressão de $\phi(x)$ toma a

forma

$$\phi(x) = \frac{i}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [\phi_n(\mathbf{p}) e^{i(\omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + \phi_n^*(\mathbf{p}) e^{-i(\omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}]. \quad (16)$$

Devido a condição de periodicidade dos campos $\phi(\tau, \mathbf{x})$, as frequências de Matsubara para o caso bosônico podem ser determinadas, isto é, da condição

$$\phi(\tau, \mathbf{x}) = \phi(\tau + \beta, \mathbf{x}) \quad (17)$$

e usando a (16) obtemos que as frequências discretas são

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Desta forma, podemos agora obter as funções de Green térmicas para o campo escalar livre, que de forma geral no formalismo de tempo-imaginário é dado por,

$$G(\tau_1, \dots, \tau_n, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \frac{1}{Z[\beta]} \frac{\delta^n Z[\beta, J(\tau, \mathbf{x})]}{\delta J(\tau_1, \mathbf{x}_1) \dots \delta J(\tau_n, \mathbf{x}_n)} \Big|_J = 0, \quad (19)$$

com $Z[\beta]$ é a função de partição para $J \rightarrow 0$, isto é, $Z[\beta] = Z[\beta, J = 0]$.

1.2.1 Mudanças na função de 2-pontos

A nova expressão escrita em (19) acompanha mudanças nas expressões para a função de Green de 2-pontos. De forma a sintetizar essas modificações, tomamos como exemplo a equação (11), que no formalismo de tempo imaginário torna-se

$$G_E^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_2) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + \lambda \Delta_{FE}(0)}, \quad (20)$$

onde $\Delta_{FE}(0)$ é agora modificado para

$$\Delta_{FE}(0) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (21)$$

Uma vez seguindo os procedimentos para a mudança de variável e troca da integral pela soma das frequências discretas, pode-se escrever as expressões nesse formalismo. O propagador livre de Feynman, usando o formalismo do tempo imaginário, é então simplesmente

$$\tilde{\Delta}_{FE}(\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (22)$$

1.2.2 Extensão do formalismo de Matsubara para compactificações espaciais

No formalismo de Matsubara a dimensão temporal torna-se compactificada, sendo associada ao inverso da temperatura do sistema, e conseqüentemente levando a uma discretização das coordenadas temporais dos quadrimomentos. Porém, existe sistemas onde os efeitos da dimensão espacial finita também assume papel fundamental no estudo das transições de fase, como por exemplo na dependência da temperatura crítica com a dimensão espacial finita em filmes e fios supercondutores (STRONGIN et al., 1970a), e principalmente no efeito Casimir, cuja origem do fenômeno deve-se exclusivamente a dimensão finita das placas alocadas paralelamente entre si, com uma pequena separação entre elas, gerando uma força atrativa entre as placas neutras (FUKUTO; YANO; PERSHAN, 2005).

Em busca de contabilizar os efeitos da dimensão espacial finita na TQC, é possível uma generalização do formalismo de Matsubara, no caso de condições de contorno periódicas, para incluir dimensões espaciais compactificadas, ver por exemplo (KHANNA et al., 2009), (KHANNA, 2014), no qual o espaço agora é definido numa topologia $\Gamma_D^{d_c} = (\mathbf{S}^1)^{d_c} \times \mathbf{R}^{D-d_c}$, onde D é a dimensão total do espaço-tempo e d_c é o número de dimensões compactificadas sobre o toroide $(\mathbf{S}^1)^{d_c}$, tal que $d_c \leq D$, as quais são impostas condições de contorno periódicas. Desta forma continuamos a descrever o sistema em equilíbrio térmico porém com efeitos das condições de contorno espaciais.²

Supondo nosso sistema com D -dimensões do espaço-tempo e com um número de d_c - dimensões espaciais compactificadas, portanto o momento p é dado por,

$$p = (p_0, \dots, p_{d_c}, \mathbf{p}_{D-d_c}) \quad (23)$$

onde \mathbf{p} são os momentos associados as dimensões não compactificadas de dimensão $d - d_c$, e $p_0 \equiv i\omega_n$ é a frequência de Matsubara e p_1, \dots, p_{d_c} são os momentos discretos associados as dimensões compactificadas. A compactificação no tempo imaginário introduz um inverso da temperatura $\beta = 1/T$, enquanto que a compactificação de uma direção espacial conduz a um comprimento finito L . Para $i = 0$ tomamos $L_0 \equiv \beta$, para $i > 0$ podemos associar $L_i \equiv L_1, L_2, \dots, L_{d_c}$. Como vimos a condição de contorno no tempo imaginário

² Para o caso de condições de contorno que não são periódicas, trataremos explicitamente mais para frente

Tabela 1 - Domínios e frequências das condições de contorno utilizadas no trabalho

Condições de contorno	Domínio	ω_n
Periódico (PBC)	\mathbb{Z}	$2\pi n/L$
Dirichlet (DBC)	$\mathbb{N}_{>0}$	$\pi n/L$

Legenda: A demonstração dos domínios e frequências discretas encontram-se no Apêndice A.

Fonte: O autor, 2021.

necessariamente precisa ser periódica, no caso bosônico. Entretanto, há uma liberdade em relação a condição de contorno quando compactificamos alguma dimensão espacial.

Embora haja na literatura diferentes tipos de condições de contorno que podem ser impostas nos campos (ELIZALDE, 2012), nesta dissertação vamos nos concentrar em duas em particular, ou seja, a condições de contorno periódicas, do inglês "periodic boundary condition" (PBC) e condição de contorno de Dirichlet, do inglês "Dirichlet boundary condition" (DBC), que impõe a condição $\phi(x_i = 0) = \phi(x_i = L_i) = 0$. Isto porque PBC é análoga as condições de contorno impostas nos campos bosônicos à temperatura finita sendo, portanto, bastante usada em geral (MALBOUISSON et al., 2004). Enquanto que DBC pode encontrar aplicações naquelas situações onde exige-se que o campo se anula nos contornos. Isso fisicamente pode ser esperado, por exemplo, em sistemas de matéria condensada que podem ser de interesse. Oportunamente, num trabalho futuro, esperamos contrastar os resultados aqui obtidos com PBC e DBC com outros tipos de condições de contorno, por exemplo Neumann (MALBOUISSON et al., 2004). A Tabela 1 sintetiza as características relevantes quando estas condições de contorno, que aqui utilizamos, são aplicadas nas compactificações de uma dimensão espacial (CAVALCANTI et al., 2019).

Quando aplicada essas condições de contorno a integral de momento torna-se uma soma sobre as frequências. No caso PBC e DBC, temos as seguintes relações, respectivamente

$$\int \frac{dp_i}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_i} \sum_{n_i=-\infty}^{\infty}, \quad \omega_{n_i} = \frac{2\pi n_i}{L_i}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad (24)$$

$$\int \frac{dp_j}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{L_j} \sum_{l_j=1}^{\infty}, \quad \omega_{n_i} = \frac{\pi n_i}{L_i} \quad n_i \in \mathbb{N}_{>0}. \quad (25)$$

2 EFEITOS TÉRMICOS PARA A MASSA

Neste capítulo vamos estudar como os efeitos térmicos se manifestam quando calculamos a massa efetiva para o campo, ou seja, a massa do campo livre adicionando as correções perturbativas para a mesma.

2.1 Modelo $O(N)$

Neste seção será tratado um modelo simples, que tem como objetivo traçar uma linha didática e comparativa.

A densidade de Lagrangiana do modelo $O(N)$ é dada por (1), no caso do campo ϕ com N componentes. A função de Green de 2-pontos assumindo esta densidade de Lagrangiana é dada em termos da equação (20), que, no espaço de momentos, pode ser reescrita como

$$G^{(2)} = \frac{1}{p^2 + m^2 + \lambda\Delta_{FE}(0)}, \quad (26)$$

onde $\lambda\Delta_{FE}(0) \equiv \Sigma_T$ representa a autoenergia do campo e p é o momento no espaço Euclidiano em D dimensões. A autoenergia vai ser uma quantidade fundamental para o nosso estudo, uma vez que, saber a sua forma e como se comporta com a temperatura vai nos sinalizar a ocorrência ou não de transições de fase.

Da equação (26) podemos definir a massa efetiva do campo escalar como

$$M_{ef}^2 = m^2 + \lambda\Delta_{FE}(0) = m^2 + \Sigma_T, \quad (27)$$

essa expressão diz em outras palavras, que a presença de interações modifica a massa do campo.

Para saber a expressão de M_{ef}^2 deve-se calcular Σ_T , que é dado em ordem λ , análogo da expressão (21),

$$\Sigma_T = \left(\frac{N+2}{6}\right) \lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (28)$$

onde $(N+2)/6$ é o fator de simetria do diagrama de 1-laço para o modelo $\lambda\phi^4$ no caso de simetria $O(N)$. Usando transformação no domínio das temperaturas finitas em termos das frequências de Matsubara, temos que

$$\Sigma_T = \left(\frac{N+2}{6} \right) \lambda \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (29)$$

Fazendo $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ e realizando a soma sobre as frequências de Matsubara (KAPUSTA; LANDSHOFF, 1989), obtemos

$$\Sigma_T = \left(\frac{N+2}{6} \right) \left[\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} + \lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E(e^{\beta E} - 1)} \right], \quad (30)$$

como a primeira integral é divergente no ultravioleta, precisamos renormalizá-la de forma apropriada. Nesta dissertação vamos estar trabalhando a renormalização com regularização dimensional. Já a segunda integral é convergente no ultravioleta devido ao fator exponencial de Bose-Einstein. Dentro do procedimento de regularização dimensional a equação (30) pode então ser escrita da forma (PESKIN; SCHROEDER, 1995)

$$\Sigma_T = \left(\frac{N+2}{6} \right) \left[\frac{\lambda \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^{3/2-d/2}}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + m^2)^{1/2}} + 2\lambda T^2 \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2)(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1)} \right], \quad (31)$$

onde a dimensão espacial agora se escreve como $d = 3 - 2\epsilon$, ϵ é o termo de regularização dimensional, μ é um parâmetro arbitrário com unidade de massa utilizando o esquema \overline{MS} e também fizemos o uso da mudança de variável $m/T \equiv y$ e $p/T \equiv x$, na integral envolvendo a dependência na temperatura. O resultado da integração por regularização dimensional está exposto na seguinte expressão

$$\Sigma_T = \left(\frac{N+2}{6} \right) \left[\frac{\lambda \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^{3/2-d/2}}{2} \frac{\Gamma(1/2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(1/2)} \frac{1}{m^{(1-d)}} + 2\lambda T^2 h(y) \right]. \quad (32)$$

O termo $h(y)$ encontra-se logo a seguir com a sua série para $y \ll 1$, que pode ser encontrada com mais detalhes no apêndice em (KAPUSTA; LANDSHOFF, 1989)

$$h(y) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2)(e^{\sqrt{x^2+y^2}} - 1)} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi} y - \frac{1}{16\pi^2} y^2 \left[\ln \left(\frac{y}{4\pi} \right) + \gamma_E - \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O}(y^3). \quad (33)$$

Resolvendo a primeira parte da equação (32) quando se faz $\epsilon \rightarrow 0$, tem-se

$$\Sigma_T = 2 \left(\frac{N+2}{6} \right) \left[\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(-\frac{1}{\epsilon} + \ln \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right) + 2\lambda T^2 h(y) \right], \quad (34)$$

onde γ_E é a constante de Euler-Mascheroni.

O termo divergente é dado por

$$\Sigma_{diver} = -2 \left(\frac{N+2}{6} \right) \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon}, \quad (35)$$

que pode ser subtraído através da introdução de contra-termos apropriados na densidade de Lagrangiana, ou seja, redefinimos \mathcal{L} tal que

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT}, \quad (36)$$

onde \mathcal{L}_{CT} é a densidade de Lagrangiana de contra-termos dada por

$$\mathcal{L}_{CT} = \mathcal{A} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \mathcal{B} \frac{m^2}{2} \phi^2 - \mathcal{C} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \mathcal{D}, \quad (37)$$

tal que podemos escrever

$$\Sigma_{diver} = \mathcal{B} m^2 \rightarrow \mathcal{B} = \left(\frac{N+2}{6} \right) \frac{\lambda}{16\pi^2 \epsilon}, \quad (38)$$

os termos restantes \mathcal{A} , \mathcal{C} e \mathcal{D} subtraem correções divergentes para a autoenergia em ordem superior a λ , para as constantes de acoplamento e para a energia de vácuo, respectivamente.

O termo de autoenergia renormalizado calculado a partir de \mathcal{L}_R é então

$$\Sigma_T = 2 \left(\frac{N+2}{6} \right) \left[\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} - 1 \right) + 2\lambda T^2 h(y) \right]. \quad (39)$$

Se considerar a aproximação de altas temperaturas, $m/T \ll 1$, a expressão acima pode ser aproximada só por sua contribuição na temperatura em ordem mais relevante, ou seja,

$$\Sigma_T \simeq \left(\frac{N+2}{6} \right) \frac{\lambda T^2}{12}. \quad (40)$$

Desta forma a massa térmica renormalizada $M_{ef,R}^2(T)$ é dada pela seguinte expressão

$$M_{ef,R}^2(T) \simeq m^2 + \left(\frac{N+2}{6} \right) \frac{\lambda T^2}{12}. \quad (41)$$

Dessa equação podemos retirar a temperatura crítica que seria a responsável pela transição de fase nesse modelo, dado que o sinal de $M_{ef,R}^2(T)$ determina se estamos numa fase simétrica, $M_{ef,R}^2(T) > 0$, ou quebrada, $M_{ef,R}^2(T) < 0$, o comportamento de (41) vai nos informar sobre a fase do sistema. Façamos $M_{ef,R}^2(T) = 0$, temos

$$T_c = \sqrt{-\frac{72m^2}{(N+2)\lambda}}, \quad (42)$$

como obrigatoriamente λ é positivo, então para que tenhamos um resultado com uma temperatura real, temos que estipular um valor negativo para m^2 . Isso é comum, dizemos que quando m^2 está com o valor negativo desde o início significa que o sistema já está partindo de uma simetria quebrada. O aumento da temperatura faz com que a simetria volte a ser restaurada, neste caso quando $T \geq T_c$. Caso m^2 seja positivo o sistema sempre se mantém na fase simétrica, nesse caso não há transição de fase.

2.2 Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ sem dimensão finita

Nesta seção vamos trabalhar com o modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$. Esse foi o modelo teórico analisado por Weinberg (WEINBERG, 1974) no estudo da possibilidade de ISB e SNR. A densidade de Lagrangiana nesse caso é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 - \frac{\lambda_\phi}{4!} \phi^4 \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{\lambda_\chi}{4!} \chi^4 - \frac{\lambda}{4} \phi^2 \chi^2, \end{aligned} \quad (43)$$

esse modelo é composto por dois campos escalares ϕ e χ , com N_ϕ e N_χ componentes, respectivamente. O interessante desse modelo é que os campos podem ter uma interação que é mediada pelo termo $\frac{\lambda}{4} \phi^2 \chi^2$ e respeitando a simetria $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$. Embora λ_ϕ e λ_χ estejam restritos a valores positivos para o potencial ser limitado, o mesmo não se pode dizer de λ que pode assumir valores negativos que justificariam uma interação do tipo atrativa entre os campos.

As condições que os acoplamentos λ_ϕ , λ_χ e λ devem satisfazer estão relacionados com o potencial ser inferiormente limitado. Isso está intrinsecamente ligado com o fato da teoria ser estável. A relação entre os acoplamentos pode ser encontrada em (WEINBERG, 1974) e é dada por

$$\lambda_\phi \lambda_\chi > 9\lambda^2, \quad \lambda_\phi > 0, \quad \lambda_\chi > 0. \quad (44)$$

A obtenção da correção térmica para as massas é feita da mesma forma que a explicada na seção 3.2. Para o caso de um único campo ϕ agora obtemos

$$M_\phi^2 = m_\phi^2 + \Sigma_{T,\phi}, \quad (45)$$

e para o campo χ

$$M_\chi^2 = m_\chi^2 + \Sigma_{T,\chi}. \quad (46)$$

Os termos de correção $\Sigma_{T,\phi}$ e $\Sigma_{T,\chi}$ são análogos ao que calculamos anteriormente, porém com a adição que corresponde a λ , de interação entre os campos. Para o campo ϕ temos explicitamente que

$$\Sigma_{T,\phi} = \frac{(N_\phi + 6)}{2} \lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_\phi^2} + \frac{N_\chi \lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_\phi^2}, \quad (47)$$

e para o campo χ , temos que

$$\Sigma_{T,\chi} = \frac{(N_\chi + 6)}{2} \lambda \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_\chi^2} + \frac{N_\phi \lambda}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m_\chi^2}. \quad (48)$$

Substituindo pelos resultados já conhecidos feitos na seção 3.1, as equações (45) e (46) para a massa efetiva renormalizada, tornam-se

$$M_i^2(T) \simeq m_i^2 + \frac{T^2}{12} \left[\lambda_i \frac{1}{2} \left(\frac{N_i + 2}{3} \right) + \lambda \frac{N_j}{2} \right], \quad \text{onde } i, j = \phi, \chi, \quad (49)$$

e consideramos mais uma vez a aproximação de altas temperaturas, $m/T \ll 1$.

Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, podemos achar a temperatura crítica fazendo $M_i^2(T) = 0$, assim temos

$$T_{c,i} = \sqrt{-\frac{12m_i^2}{\lambda_i \frac{1}{2} \left(\frac{N_i+2}{3}\right) + \lambda \frac{N_j}{2}}}. \quad (50)$$

A partir da equação acima podemos perceber alguns exemplos de transições de fase que podem acontecer.

Fazendo $m_i^2 > 0$, para que haja uma temperatura crítica o denominador da equação (50) tem que ser negativo. Uma vez que $\lambda_i > 0$, portanto a única possibilidade se encontra no valor de λ satisfazer

$$|\lambda| > \frac{\lambda_i}{N_j} \left(\frac{N_i+2}{3}\right). \quad (51)$$

Dependendo da escolha de i, j na equação (51) teremos uma transição de fase em uma das direções ϕ ou χ . Ter ambas as massas positivas implica que saímos de uma fase simétrica, entretanto com o aumento da temperatura é possível encontrar uma temperatura crítica no qual a fase simétrica se torna quebrada em uma direção, caracterizando uma ISB.

Fazendo $m_i^2 < 0$ e $\lambda < 0$ dependendo dos valores para os acoplamentos haverá uma quebra de simetria na direção de ϕ , isto é, a massa ϕ deixará de ser negativa e passará a ser positiva, enquanto que na outra direção χ a massa será sempre negativa independente do aumento de temperatura, configurando uma SNR. Esse fenômeno pode ocorrer, uma vez que na equação (50) dada uma escolha particular para os acoplamentos, tanto numerador quanto denominador podem ser negativos.

Dependendo dos valores escolhidos para os acoplamentos, também é possível encontrar essas e outras transições de fase. Outro exemplo, fazemos $m_\phi^2 < 0$ enquanto $m_\chi^2 > 0$ em altas temperatura pode induzir a seguinte quebra $O(N_\phi) \times O(N_\chi) \rightarrow O(N_\phi - 1) \times O(N_\chi)$. No caso contrário $m_\phi^2 > 0$ enquanto $m_\chi^2 < 0$ induzirá a quebra $O(N_\phi) \times O(N_\chi) \rightarrow O(N_\phi) \times O(N_\chi - 1)$

Outro caso possível é $m_i^2 < 0$ e $\lambda > 0$, só tem restauração de simetria usual nas duas direções em $T = T_{c,\phi}$ e $T_{c,\chi}$.

2.3 Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ com dimensão finita

Nesta seção nós queremos estender a análise feita anteriormente, agora considerando a compactificação de uma das dimensões espaciais. Em outras palavras, queremos discutir a ISB/SNR quando há a presença de dimensões finitas. Também vamos considerar dois tipos de condições de contorno, PBC e DBC.

2.3.1 Condições de Contorno Periódicas

Considerando as equações (45), (46), (47) e (48) podemos escrever a massa efetiva de uma forma mais compacta,

$$M_i^2(T) = m_i^2 + \frac{\lambda_i}{2} \left(\frac{N_i + 2}{3} \right) \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m_i^2} + \frac{\lambda}{2} N_j \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m_j^2}, \quad (52)$$

onde $i, j = \phi, \chi$.

Trabalhando com PBC, para cada compactificação de dimensão, com comprimento finito L_i , nós podemos escrever a integral de momento como as equações (24) e (25). Para $d_c < D$ compactificações, a integral de momento da equação (52) se torna

$$I_{D-d_c}^{(\alpha)} = \frac{1}{L_1 \cdots L_{d_c}} \sum_{n_1, \dots, n_{d_c}} \int \frac{d^{D-d_c} p}{(2\pi)^{D-d_c}} \frac{1}{\left(\omega_{n_1}^2 + \cdots + \omega_{n_{d_c}}^2 + p_{D-d_c}^2 + m_i^2 \right)^\alpha}, \quad (53)$$

onde $p_{D-d_c}^2$ é o momento Euclidiano em $(D - d_c)$ -dimensões.

A integral de momento da equação (53) pode ser calculada na regularização dimensional. Trabalhando com a dimensão $\delta \equiv D - d_c$, com $D = 4 - 2\epsilon$ no esquema- $\overline{\text{MS}}$, obtemos como resultado a equação a seguir

$$I_{D-d_c}^{(\alpha)} = \frac{1}{L_1 \cdots L_{d_c}} \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(\nu)}{(4\pi)^{(D-d_c)/2} \Gamma(\alpha)} \sum_{n_1, \dots, n_{d_c}} \left(\omega_{n_1}^2 + \cdots + \omega_{n_{d_c}}^2 + m_i^2 \right)^{-\nu}, \quad (54)$$

onde $\nu = \alpha - (D - d_c)/2$.

A soma do lado direito da equação acima pode ser identificada como a função zeta de Epstein-Hurwitz (ELIZALDE, 2012) e pode ser expressa como

$$G_{d_c}^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_{d_c}) = \sum_{n_1, \dots, n_{d_c} = -\infty}^{\infty} (c^2 + a_1^2 n_1^2 + \dots + a_{d_c}^2 n_{d_c}^2)^{-\nu}, \quad (55)$$

onde $c = m_i$, $a_j = 2\pi/L_j$, $j = 1, \dots, d_c$ and $\nu = \alpha - \delta/2$.

Seguindo as referências (MALBOUISSON; MALBOUISSON; SANTANA, 2002), nós podemos também expressar a equação (55) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
G_{d_c}^{c^2}(\nu; a_1, \dots, a_{d_c}) &= \frac{\pi^{d_c/2}}{2^{\nu-d_c/2-1}\Gamma(\nu)\sqrt{a_1^2 \dots a_{d_c}^2}} [2^{\nu-d_c/2-1}\Gamma(\nu-d_c/2)c^{d_c-2\nu} \\
&+ \frac{2}{(2\pi)^{d_c/2-\nu}} \sum_{i=1}^{d_c} \sum_{n_i=1}^{+\infty} \left(\frac{ca_i}{n_i}\right)^{d_c/2-\nu} K_{\nu-d_c/2}\left(\frac{2\pi cn_i}{a_i}\right) \\
&+ \frac{2^{d_c}}{(2\pi)^{d_c/2-\nu}} \sum_{n_1, \dots, n_{d_c}=1}^{\infty} \left(\frac{c}{\sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{n_{d_c}^2}{a_{d_c}^2}}}\right)^{d_c/2-\nu} K_{\nu-d_c/2}\left(2\pi c \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{n_{d_c}^2}{a_{d_c}^2}}\right) \Big].
\end{aligned} \tag{56}$$

onde $K_\alpha(x)$ é a função de Bessel modificada de segunda ordem.

Como estamos trabalhando com temperaturas no formalismo do tempo imaginário uma dessas compactificações está associada com as frequências discretas de Matsubara para bósons, isto é, $\omega_{n_1} = 2\pi/L_1$ e $L_1 \equiv 1/T$. Outra dessas compactificações está relacionada com a compactificação de uma dimensão de comprimento L . Isso significa que a nossa expressão acima está com $d_c = 2$ que são as dimensões compactificadas, ou seja, uma dimensão temporal e a outra espacial compactificadas. A equação (54) usando as equações (55) e (56), com $D = 4 - 2\epsilon$ e $\alpha = 1$, torna-se

$$\begin{aligned}
I_2^{(1)}(m_i, T, L) &= \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(-1+\epsilon)(m_i^2)^{1-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \\
&+ \frac{m_i T}{2\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1} K_1\left(\frac{m_i}{T} n_1\right) + \frac{m_i}{2\pi^2 L} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1} K_1(m_i L n_1) \\
&+ \frac{M_i}{\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n_1^2}{T^2} + n_2^2 L^2}} K_1\left(M_i \sqrt{\frac{n_1^2}{T^2} + n_2^2 L^2}\right).
\end{aligned} \tag{57}$$

O primeiro termo na equação (57) corresponde a contribuição do vácuo a 1-laço para a autoenergia do campo associado,

$$\begin{aligned}
I_{2,\text{vacuum}}^{(1)}(m_i) &= \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(-1+\epsilon)(m_i^2)^{1-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \\
&= -\frac{m_i^2}{16\pi^2 \epsilon} + \frac{m_i^2}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{m_i^2}{\mu^2}\right) - 1 \right].
\end{aligned} \tag{58}$$

Note que o primeiro termo, que é divergente, pode ser cancelado adicionando na densidade de Lagrangiana (43) contra-termos apropriados de renormalização, isto é, dada a

densidade de Lagrangiana renormalizada $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT}$, onde \mathcal{L}_{CT} é dado pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CT} &= \mathcal{A}_\phi \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \mathcal{A}_\chi \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mathcal{B}_\phi \frac{m_\phi^2}{2} \phi^2 - \mathcal{B}_\chi \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 \\ &- \mathcal{C}_\phi \frac{\lambda_\phi}{4!} \phi^4 - \mathcal{C}_\chi \frac{\lambda_\chi}{4!} \chi^4 - \mathcal{D} \frac{\lambda}{4!} \phi^2 \chi^2, \end{aligned} \quad (59)$$

redefinindo a massa do campo como $m_\phi^2 \rightarrow m_\phi^2 + \delta m_\phi^2$ e $m_\chi^2 \rightarrow m_\chi^2 + \delta m_\chi^2$, onde os contra-termos das massa são, respectivamente, dados por

$$\mathcal{B}_\phi = \frac{1}{32\pi^2\epsilon} \left(\lambda_\phi \frac{N_\phi + 2}{3} m_\phi^2 + \lambda N_\chi m_\chi^2 \right), \quad (60)$$

and

$$\mathcal{B}_\chi = \frac{1}{32\pi^2\epsilon} \left(\lambda_\chi \frac{N_\chi + 2}{3} m_\chi^2 + \lambda N_\phi m_\phi^2 \right). \quad (61)$$

Desta forma a massa efetiva renormalizada à 1-laço para o campo ϕ e χ , respectivamente, são

$$M_{i,ef,R}^2(T, L) = m_i^2 + \frac{\lambda_i}{2} \left(\frac{N_i + 2}{3} \right) I_{2,R}^{(1)}(M_i, T, L) + \frac{\lambda}{2} N_j I_{2,R}^{(1)}(M_j, T, L), \quad (62)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{2,R}^{(1)}(m_i, T, L) &= \frac{m_i^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] \\ &+ \frac{m_i T}{2\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1} K_1 \left(\frac{m_i}{T} n_1 \right) + \frac{m_i}{2\pi^2 L} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{1}{n_1} K_1(m_i L n_1) \\ &+ \frac{m_i}{\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n_1^2}{T^2} + n_2^2 L^2}} K_1 \left(m_i \sqrt{\frac{n_1^2}{T^2} + n_2^2 L^2} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

2.3.2 Condições de Contorno de Dirichlet

No caso DBC a equação [53] acompanha uma modificação que envolve a distância entre as duas extremidades z , como mostram as seguintes referências (FOSCO; SVAITER, 2001), (CAICEDO; SVAITER, 2004) e (SVAITER, 2004). Assim a integral torna-se

$$\mathcal{I}_{D-d_c}^{(\alpha)}(m_i, T, L, z) = \frac{1}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{n'\pi z}{L} \right) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(\frac{n'\pi}{L})^2 + (\frac{2n\pi}{\beta})^2 + \vec{p}^2 + m_i^2]^\alpha},$$

(64)

onde o termo seno quebra a invariância translacional do modelo. Nesses casos é necessário introduzir na densidade de Lagrangiana contratermos de superfície. A expressão dependente de z possui singularidades em $z = 0$ e $z = L$, ou seja, nas fronteiras, que devem ser removidas adequadamente pelos contratermos de superfície na densidade de Lagrangiana.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{CT} &= \mathcal{A}_\phi \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \mathcal{A}_\chi \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mathcal{B}_\phi \frac{m_\phi^2}{2} \phi^2 - \mathcal{B}_\chi \frac{m_\chi^2}{2} \chi^2 \\
&- \mathcal{C}_\phi \frac{\lambda_\phi}{4!} \phi^4 - \mathcal{C}_\chi \frac{\lambda_\chi}{4!} \chi^4 - \mathcal{D} \frac{\lambda}{4!} \phi^2 \chi^2 \\
&+ c_1(\eta) \phi^2(\vec{r}, 0) + c_2(\eta) \phi^2(\vec{r}, L) + c_3(\eta) \phi^4(\vec{r}, 0) + c_4(\eta) \phi^4(\vec{r}, L) \\
&+ c_5(\eta) \chi^2(\vec{r}, 0) + c_6(\eta) \chi^2(\vec{r}, L) + c_7(\eta) \chi^4(\vec{r}, 0) + c_8(\eta) \chi^4(\vec{r}, L) \\
&+ c_9(\eta) \phi^2(\vec{r}, 0) \chi^2(\vec{r}, 0) + c_{10}(\eta) \phi^2(\vec{r}, L) \chi^2(\vec{r}, L),
\end{aligned} \tag{65}$$

onde \mathcal{A}_ϕ , \mathcal{A}_χ , \mathcal{B}_ϕ , \mathcal{B}_χ , \mathcal{C}_ϕ , \mathcal{C}_χ e \mathcal{D} são os contratermos usuais (DIAZ; SVAITER, 2016) (FORD; SVAITER, 1995) e c_i para $i = 1, \dots, 10$ são os contratermos de superfícies adicionais devido as divergências em z (SVAITER, 2004).

Podemos calcular as contribuições não dependentes de z uma vez que os termos singulares serão removidos, além de podemos separar essa variável (SVAITER, 2004)

$$\mathcal{I}_{D-d_c}^{(\alpha)}(m_i, T, L, z) = I_{D-d_c}^{(\alpha)}(m_i, T, L) + I_{D-d_c}^{(\alpha)}(m_i, T, L, z), \tag{66}$$

Desta forma retomamos a resolução da equação [53] para o caso DBC. Vamos repetir o procedimento da seção 3.3.1. Nós temos a equação (55) que se modifica para

$$G_{\text{DBC}}^{c^2}(\nu; a_T, a_L) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} (c^2 + a_T^2 n^2 + a_L^2 l_1^2)^{-\nu}, \tag{67}$$

onde $a_T = 2\pi T$, $a_L = \pi/L$ e $\nu = \alpha - (D - 2)/2$, com $D = 4 - 2\epsilon$.

Note que a equação (67) pode ser reescrita como

$$G_{\text{DBC}}^{c^2}(\nu; a_T, a_L) = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c^2 + a_T^2 n^2)^{-\nu} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l_1 \in \mathbb{Z}} (c^2 + a_T^2 n^2 + a_L^2 l_1^2)^{-\nu}, \tag{68}$$

o último termo desta equação tem a mesma forma da equação (55), enquanto que para o primeiro termo podemos fazer uma continuação analítica com o método da função zeta,

tal que usando o resultado (ELIZALDE, 2012)

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c^2 + a_T^2 n^2)^{-\nu} &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu - 1/2)}{a_T \Gamma(\nu)} c^{1-2\nu} \\ &+ \frac{4\pi^\nu}{\Gamma(\nu)} a_T^{-1/2-\nu} c^{1/2-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(2\pi n c/a_T). \end{aligned} \quad (69)$$

Conseqüentemente, na equação (62), a função $I_{2,R}^{(1)}$, no caso de DBC, é modificada para

$$\begin{aligned} I_{2,R}^{(1),\text{DBC}}(m_i, T, L) &= \frac{m_i^2}{16\pi^2} \left[\ln \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] + \frac{m_i}{8\pi L} + \frac{T}{4\pi L} \ln(1 - e^{-m_i/T}) \\ &+ \frac{m_i T}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} K_1 \left(\frac{m_i}{T} n \right) + \frac{m_i}{4\pi^2 L} \sum_{l_1=1}^{+\infty} \frac{1}{l_1} K_1(2m_i L l_1) \\ &+ \frac{m_i}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l_1=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{T^2} + 4l_1^2 L^2}} K_1 \left(m_i \sqrt{\frac{n^2}{T^2} + 4l_1^2 L^2} \right). \end{aligned} \quad (70)$$

Podemos trabalhar com a aproximação de pequenas massas comparadas com T e $1/L$, isto é, $m_i/T \ll 1$ e $m_i L \ll 1$. Neste caso, nós podemos diretamente expandir, por exemplo, a equação (68)

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} (m_i^2 + a_T^2 n^2 + a_L^2 l_1^2)^{-\nu} &\equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} L^{2\nu} [(m_i L)^2 + (2\pi T L)^2 n^2 + \pi^2 l_1^2]^{-\nu} \\ &\xrightarrow{m_i L \ll 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} L^{2\nu} [(2\pi T L)^2 n^2 + \pi^2 l_1^2]^{-\nu} \\ &\quad - \nu (m_i L)^2 L^{2\nu} [(2\pi T L)^2 n^2 + \pi^2 l_1^2]^{-1-\nu} \\ &\quad + \mathcal{O}(m_i^4 L^4). \end{aligned} \quad (71)$$

Usando a identidade,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} [(2\pi T L)^2 n^2 + \pi^2 l_1^2]^{-\beta} = \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} (\pi^2 l_1^2)^{-\beta} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \sum_{l_1 \in \mathbb{N}_{>0}} [(2\pi T L)^2 n^2 + \pi^2 l_1^2]^{-\beta}, \quad (72)$$

onde o primeiro termo é dado pela função zeta de Epstein usual

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \implies \sum_{l_1 \geq 1} (\pi^2 l_1^2)^{-\beta} = \pi^{-2\beta} \zeta(2\beta) \quad (73)$$

O segundo termo em (72) representa uma função zeta Epstein em duas dimensões

(ELIZALDE; ROMEO, 1989)

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2)^{-s} &= -\frac{a_2^{-s}}{2} \zeta(2s) + \frac{a_2^{-s}}{2} \left(\frac{\pi a_2}{a_1} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \zeta(2s-1) \\
&+ \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} a_1^{-s/2-1/4} a_2^{-s/2+1/4} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} n_1^{s-1/2} n_2^{-s+1/2} K_{s-1/2} \left(2\pi \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} n_1 n_2 \right)
\end{aligned} \tag{74}$$

Na equação acima, nós podemos escolher a_1 e a_2 podendo ser $(2\pi TL)^2$ ou π^2 . Escolhendo, por exemplo, $a_1 = \pi^2$ e $a_2 = (2\pi TL)^2$, nós temos para o último termo em (72) a expressão (onde o expoente s pode ser também $\nu \equiv \alpha - (D-2)/2$ ou $1 + \nu \equiv 1 + \alpha - (D-2)/2$, a partir da equação (71)),

$$\frac{2\pi^{-s}}{\Gamma(s)} (2TL)^{-s+1/2} \sum_{n, l_1=1}^{\infty} \left(\frac{l_1}{n} \right)^{s-1/2} K_{s-1/2}(4\pi TL n l_1), \tag{75}$$

ou, fazendo a escolha de $a_1 = (2\pi TL)^2$ e $a_2 = \pi^2$, nós temos que

$$\frac{2\pi^{-s}}{\Gamma(s)} (2TL)^{-s-1/2} \sum_{n, l_1=1}^{\infty} \left(\frac{l_1}{n} \right)^{-s+1/2} K_{s-1/2} \left(\frac{\pi}{TL} n l_1 \right). \tag{76}$$

Obviamente as duas escolhas são completamente equivalentes, entretanto, no caso onde $TL > 1/2$, a primeira expressão tem uma melhor convergência que a segunda. Enquanto que para $TL < 1/2$ nós temos o oposto, a segunda expressão exibe uma melhor convergência. Dado isso, na prática, em todos os nossos resultados numéricos, nós trabalhamos com uma versão interpolada dessas expressões, favorecendo um caso ou outro dependendo dos valores de TL . Esta estratégia é similar ao que foi usado na referência (MOGLIACCI; KOLBÉ; HOROWITZ, 2020).

Usando as expressões acima, nós obtemos uma expressão para massas pequenas da equação (70), para o caso de $TL \geq 1/2$, dado por

$$\begin{aligned}
I_{2,R}^{(1),\text{DBC}}(m_i, T, L) &\simeq -\frac{T}{4\pi L} \ln(2LT) - \frac{T}{2\pi L} \ln[\eta(2iTL)] \\
&+ \frac{m_i^2}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) + \frac{\pi}{12TL} + 2 \ln[\eta(2iTL)] \right\},
\end{aligned} \tag{77}$$

enquanto que para $TL < 1/2$, nós temos que

$$\begin{aligned}
I_{2,R}^{(1),\text{DBC}}(m_i, T, L) &\simeq -\frac{T}{2\pi L} \ln(\eta[i/(2TL)]) \\
&+ \frac{m_i^2}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\mu L} \right) + \frac{\pi}{12TL} + 2 \ln(\eta[i/(2TL)]) \right\},
\end{aligned} \tag{78}$$

onde nas expressões acima $\eta(x)$ é a função eta de Dedekind, definida como (OGG, 1969)

$$\eta(x) = e^{i\pi x/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n x}). \quad (79)$$

A massa efetiva renormalizada fica da seguinte forma

$$M_{i,ef,R}^{2,DBC}(T, L) = m_i^2 + \frac{\lambda_i}{2} \left(\frac{N_i + 2}{3} \right) I_{2,R}^{(1),DBC}(m_i, T, L) + \frac{\lambda}{2} N_j I_{2,R}^{(1),DBC}(m_j, T, L), \quad (80)$$

onde a função $I_{2,R}^{(1)}$ é dada pela equação (70), ou uma de suas aproximações (77) ou (78).

3 EFEITOS TÉRMICOS PARA OS ACOPLAMENTOS

Neste capítulo vamos estudar como os efeitos térmicos se manifestam quando calculamos as correções para os acoplamentos dos campos.

Os efeitos térmicos nos três acoplamentos, derivam-se da função de Green de 4-pontos, similar a equação (5) para $n = 4$, tomando somente as contribuições relevantes para as interações. Sabe-se, através da teoria de perturbação, que a expressão para a função de Green de 4-pontos, é uma série de potências em λ . Se fizermos a aproximação de $\lambda \ll 1$ podemos considerar termos até segunda ordem em λ que serão necessários para as correções nos acoplamentos.

O procedimento é similar ao encontrado na referência (PINTO; RAMOS; PARREIRA, 2005). A contribuição a 1-laço para os acoplamentos efetivos podem ser expressos analogamente a equação (52), e são explicitamente da seguinte forma

$$\bar{\lambda}_\phi = \lambda_\phi - \frac{(N_\phi + 8)\lambda_\phi^2}{6} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\phi^2)^2} - \frac{3N_\chi \lambda^2}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\chi^2)^2}, \quad (81)$$

$$\bar{\lambda}_\chi = \lambda_\chi - \frac{(N_\chi + 8)\lambda_\chi^2}{6} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\chi^2)^2} - \frac{3N_\phi \lambda^2}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\phi^2)^2}, \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda - 2\lambda^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\phi^2)(p^2 + m_\chi^2)} - \frac{(N_\phi + 2)\lambda\lambda_\phi}{6} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\phi^2)^2} \\ &\quad - \frac{(N_\chi + 2)\lambda\lambda_\chi}{6} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\chi^2)^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

Em termos dos diagramas de Feynman as contribuições para λ_ϕ , λ_χ e λ estão ilustradas nas Figuras 1, 2 e 3, respectivamente.

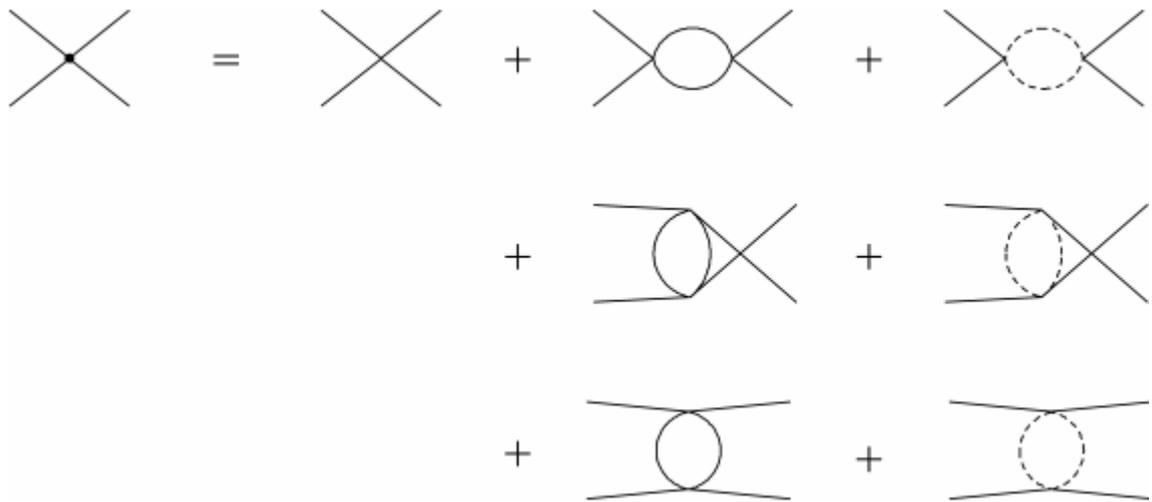
3.1 Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ sem dimensão finita

Nesta seção vamos resolver as integrais de forma análoga ao que foi realizado nas seções 3.1 e 3.2. Observe que a primeira integral da equação (83), cuja expressão é

$$\mathcal{I} = \lambda^2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\phi^2)(p^2 + m_\chi^2)}, \quad (84)$$

se diferencia das demais pelo seu denominador, vamos usar uma parametrização de Feynmann (WEINBERG, 1995) (KANNIKE, 2007) para torná-la igual as outras. A parametrização de Feynmann pode ser explicitamente escrita da seguinte forma

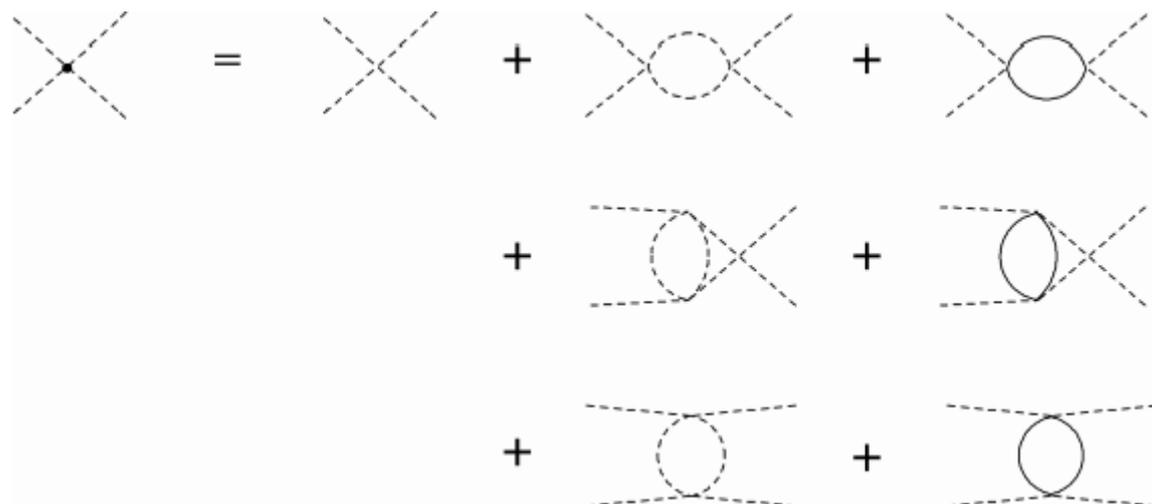
Figura 1 - Representação diagramática para λ_ϕ à 1-laço



Legenda: A linha sólida é para o propagador de ϕ . A linha traceja é para o propagador de χ .

Fonte: PINTO; RUDNEI; PARREIRA; 2005, f. 123519-4.

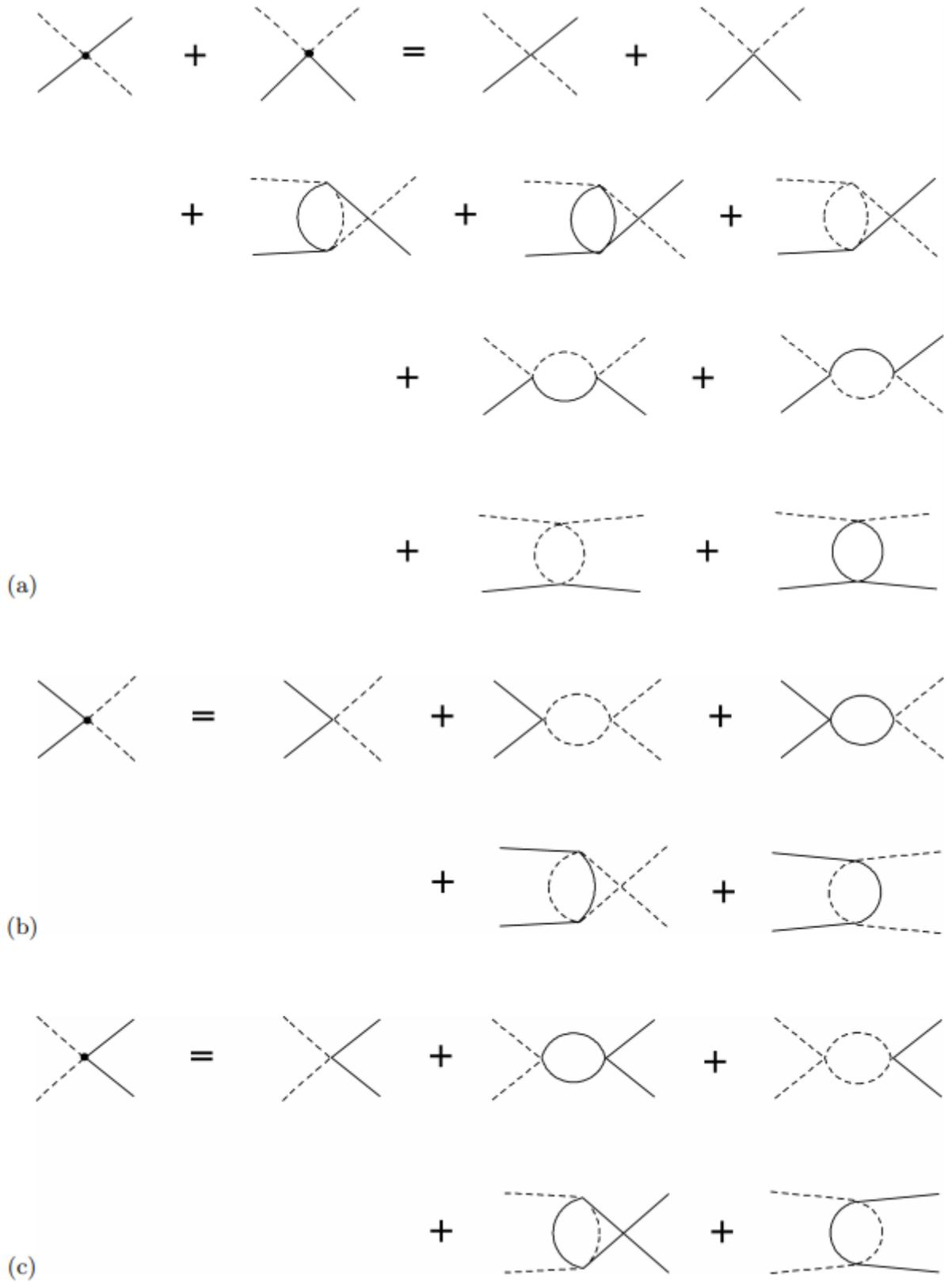
Figura 2 - Representação diagramática para λ_χ à 1-laço



Legenda: A linha sólida é para o propagador de ϕ . A linha traceja é para o propagador de χ .

Fonte: PINTO; RUDNEI; PARREIRA; 2005, f. 123519-4.

Figura 3 - Representação diagramática para o termo inter-acoplamento λ à 1-laço



Legenda: Onde temos os processos: (a) $\phi\chi \rightarrow \phi\chi$, (b) $\phi\phi \rightarrow \chi\chi$ e (c) $\chi\chi \rightarrow \phi\phi$.

Fonte: PINTO; RUDNEI; PARREIRA; 2005, f. 123519-4.

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{[A\alpha + B(1-\alpha)]^2}, \quad (85)$$

substituindo pelos devidos denominadores que serão utilizados

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 + m_\phi^2} \frac{1}{p^2 + m_\chi^2} &= \int_0^1 \frac{d\alpha}{[p^2 + m_\chi^2 \alpha (m_\phi^2 - m_\chi^2)]^2} \\ &= \int_0^1 \frac{d\alpha}{[p^2 + \Omega^2]^2}, \end{aligned} \quad (86)$$

onde $\Omega^2 = m_\chi^2 + \alpha(m_\phi^2 - m_\chi^2)$. Portanto a integral em (84) torna-se simplesmente

$$\mathcal{I} = \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{[p^2 + \Omega^2]^2}, \quad (87)$$

esta integral é mais geral, uma vez resolvida, inclui também os resultados das outras integrais nas equações (81), (82) e (83). Partindo para sua resolução, façamos para temperaturas finitas no formalismo do tempo imaginário

$$\mathcal{I} = \lambda^2 \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\omega_n^2 + E_\Omega^2)^2}, \quad (88)$$

onde $E_\Omega^2 = l^2 + \Omega^2$. Podemos escrever o denominador como uma derivada, e realizando a soma sobre as frequências de Matsubara, obtemos

$$\mathcal{I} = \left[-\frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\Omega} \frac{d}{dE_\Omega} \left(\frac{1}{E_\Omega} \right) - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_\Omega} \frac{d}{dE_\Omega} \left(\frac{1}{E_\Omega} \frac{1}{e^{\beta E_\Omega} - 1} \right) \right], \quad (89)$$

a primeira integral é independente da temperatura, vamos usar o mesmo método de regularização dimensional, mas agora redefinindo o acoplamento em vez da massa como feito na seção 3.1 (com $d = 3 - 2\epsilon$, $\lambda \rightarrow \lambda' (\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi})^{3/2-d/2}$ no esquema \overline{MS}). Na segunda integral vamos fazer as substituições de variáveis $p^2/T^2 \equiv x^2$ e $\Omega^2/T^2 \equiv y^2$. A equação (89) com as modificações proposta, fica assim

$$\mathcal{I} = - \left[\frac{\lambda^2 (\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi})^{3/2-d/2}}{4} \int_0^1 d\alpha \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})(\Omega^2)^{3/2-d/2}} + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{y} \frac{d}{dy} h(y) \right], \quad (90)$$

onde $h(y)$ é a mesma expressão da equação (33). Substituindo os valores de d e organizando os termos na equação acima, temos

$$\mathcal{I} = - \left[\frac{\lambda^2}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 d\alpha \frac{\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^\epsilon + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{y} \frac{d}{dy} h(y) \right]. \quad (91)$$

Fazendo uma expansão das funções que contém ϵ , em torno de $\epsilon \rightarrow 0$ e desconsiderando termos de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ e superiores. Além também de substituir a função $h(y)$ por sua série até termos de ordem y^2 , tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & - \left[\frac{\lambda^2}{16\pi^2} \int_0^1 d\alpha \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln \left(\frac{\mu}{\Omega} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_0^1 d\alpha \left[-\frac{T\pi}{\Omega} - \ln \left(\frac{\Omega}{T} \right) + \mathcal{O}(\Omega/T) \right] \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

O termo $1/\epsilon$ será removido via renormalização. Usando a aproximação de pequenas massas, $T \gg \Omega$, os termos que contém essas expressões podem ser desconsiderados nessa aproximação.

$$\mathcal{I} \simeq -\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \int_0^1 d\alpha \frac{T\pi}{m_\chi^2 + \alpha(m_\phi^2 - m_\chi^2)} \right\} \quad (93)$$

$$\simeq -\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{2\pi T}{m_\phi + m_\chi} \right\}, \quad (94)$$

portanto, temos finalmente que o resultado pode ser escrito da seguinte forma só considerando os termos dependentes da temperatura

$$\mathcal{I} \simeq -\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) + \frac{2\pi T}{m_\phi + m_\chi} \right]. \quad (95)$$

Fazendo $m_\phi = m_\chi$, obtemos

$$\mathcal{I}_i \simeq -\frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) + \frac{\pi T}{m_i} \right], \quad (96)$$

onde $i = \phi, \chi$

Substituindo esse resultado nas equações (81), (82) e (83), podemos escrever os acoplamentos efetivos renormalizados em termos da temperatura.

$$\bar{\lambda}_{i,ef,R}(T) = \lambda_i + \frac{(N_i + 8)}{6} \frac{\lambda_i^2}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{\pi T}{m_i} \right] + \frac{3N_j}{2} \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{\pi T}{m_j} \right], \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{ef,R}(T) &= \lambda + \frac{(N_\phi + 2)\lambda_\phi}{6} \frac{\lambda}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{\pi T}{m_\phi} \right] + \frac{(N_\chi + 2)\lambda_\chi}{6} \frac{\lambda}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{\pi T}{m_\chi} \right] \\ &+ 2\lambda \frac{\lambda}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{2\pi T}{m_\phi + m_\chi} \right], \end{aligned} \quad (98)$$

onde $i, j = \phi, \chi$.

Em termos de acoplamentos efetivos, temos que a condição de estabilidade do potencial, $\lambda_\phi \lambda_\chi > 9\lambda^2$, pode então ser expressada em termos de uma razão (PINTO; RAMOS; PARREIRA, 2005).

$$R_T = \frac{\bar{\lambda}_{\phi,ef,R}(T) \bar{\lambda}_{\chi,ef,R}(T)}{[3\bar{\lambda}(T)]^2}, \quad (99)$$

observe que essa relação deve ser sempre maior que 1.

3.2 Modelo $O(N_\phi) \times O(N_\chi)$ com dimensão finita

3.2.1 Condições de contorno periódicas

Para $d_c < D$ compactificações, a integral de momento das equações (81), (82) e (83) podem ser todas reexpressas em termos da generalização da equação (53), com $\alpha = 2$,

$$I_{D-d_c}^{(2)} = \frac{1}{L_1 \cdots L_{d_c}} \sum_{n_1, \dots, n_{d_c}} \int \frac{d^{D-d_c} p}{(2\pi)^{D-d_c}} \frac{1}{\left(\omega_{n_1}^2 + \cdots + \omega_{n_{d_c}}^2 + p_{D-d_c}^2 + m_i^2 \right)^2}, \quad (100)$$

e ao solucionar a integral de momento em (100) na regularização dimensional como na equação (53), nós obtemos o seguinte resultado

$$I_{D-d_c}^{(2)} = \frac{1}{L_1 \cdots L_{d_c}} \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(2 - \delta/2)}{(4\pi)^{\delta/2}} \sum_{n_1, \dots, n_{d_c}} \left(\omega_{n_1}^2 + \cdots + \omega_{n_{d_c}}^2 + m_i^2 \right)^{\delta/2-2}, \quad (101)$$

e a soma no lado direito da equação acima pode novamente ser identificada como a função zeta de Epstein-Hurwitz como nas equações (55) e (56), fazendo a identificação agora que $\nu = 2 - \delta/2$. Assim, com as mesmas duas compactificações identificadas anteriormente, com $L_1 \equiv 1/T$ e $L_2 \equiv L$, nós obtemos

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)}(m_i, T, L) &= \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(\epsilon)(m_i^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \\
&+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} K_0 \left(\frac{m_i}{T} n_1 \right) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} K_0(m_i L n_1) \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} K_0 \left(m_i \sqrt{\frac{n_1^2}{T^2} + n_2^2 L^2} \right). \tag{102}
\end{aligned}$$

Na equação (83) temos aquela integral que difere das demais, que pode ser expressa como (quando $m_\phi \neq m_\chi$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 + m_\phi^2)(p^2 + m_\chi^2)} &= \frac{1}{m_\chi^2 - m_\phi^2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{p^2 + m_\phi^2} - \frac{1}{p^2 + m_\chi^2} \right) \\
&= \frac{1}{m_\chi^2 - m_\phi^2} \left[I_2^{(1)}(m_\phi, T, L) - I_2^{(1)}(m_\chi, T, L) \right], \tag{103}
\end{aligned}$$

quando $m_\phi = m_\chi$, recuperamos o resultado da equação (102).

O primeiro termo na equação (102) corresponde a contribuição a 1-laço do vácuo para os acoplamentos, cujo resultado é divergente. Dessa forma devemos renormalizá-la apropriadamente, separando em termos divergente e convergentes.

$$\begin{aligned}
I_{2,\text{vacuum}}^{(2)}(m_i) &= \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(\epsilon)(m_i^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \\
&= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon} - \frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right). \tag{104}
\end{aligned}$$

Mais uma vez, devemos retirar os termos divergentes advindos da contribuição de vácuo para os acoplamentos, adicionando contra-termos a densidade Lagrangiana (59) que cancelam adequadamente essas divergências. Os contratermos para as constantes de acoplamento, são respectivamente, dados por

$$\mathcal{C}_\phi = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon} \left(\lambda_\phi^2 \frac{N_\phi + 8}{3} + 3\lambda^2 N_\chi \right), \tag{105}$$

$$\mathcal{C}_\chi = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon} \left(\lambda_\chi^2 \frac{N_\chi + 8}{3} + 3\lambda^2 N_\phi \right), \tag{106}$$

$$\mathcal{D} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon} + \frac{\lambda}{96\pi^2 \epsilon} [\lambda_\phi(N_\phi + 2) + \lambda_\chi(N_\chi + 2)], \tag{107}$$

Os termos \mathcal{C}_ϕ e \mathcal{C}_χ subtraem correções divergentes para a autoenergia de ordem λ_ϕ^2 e λ_χ^2 . O termo \mathcal{D} subtrae correções divergentes para a autoenergia em ordem de λ^2 . Os

acoplamentos efetivos renormalizados para PBC, são então

$$\bar{\lambda}_{i,ef,R}(T, L) = \lambda_i - \frac{(N_i + 8)\lambda_i^2}{6} I_{2,R}^{(2)}(m_i, T, L) - \frac{3N_j\lambda^2}{2} I_{2,R}^{(2)}(m_j, T, L), \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{ef,R}(T, L) &= \lambda - \frac{2\lambda^2}{m_\chi^2 - m_\phi^2} \left[I_{2,R}^{(1)}(m_\phi, T, L) - I_{2,R}^{(1)}(m_\chi, T, L) \right] \\ &\quad - \frac{(N_\phi + 2)\lambda\lambda_\phi}{6} I_{2,R}^{(2)}(m_\phi, T, L) - \frac{(N_\chi + 2)\lambda\lambda_\chi}{6} I_{2,R}^{(2)}(m_\chi, T, L), \end{aligned} \quad (109)$$

onde $i, j = \phi, \chi$, também temos que

$$\begin{aligned} I_{2,R}^{(2)}(m_i, T, L) &= -\frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} K_0 \left(\frac{m_i}{T} n_1 \right) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} K_0(m_i L n_1) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n_1=1}^{+\infty} \sum_{n_2=1}^{+\infty} K_0 \left(m_i \sqrt{\frac{n_1^2}{T^2} + n_2^2 L^2} \right), \end{aligned} \quad (110)$$

e $I_{2,R}^{(1)}(m_i, T, L)$ na equação (98) é dado pela equação (63).

3.2.2 Condições de contorno de Dirichlet

As equações para os acoplamentos efetivos tem a mesma forma que as equações (108) e (109). Deve ser feita uma modificação em $I_{2,R}^{(2)}(m_i, T, L)$ de modo a satisfazer as condições de Dirichlet. A função $I_{2,R}^2$ para o caso de Dirichlet é

$$\begin{aligned} I_{2,R}^{(2),\text{DBC}}(m_i, T, L) &= -\frac{1}{16\pi^2} \ln \left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{16\pi L m_i} - \frac{1}{8\pi L m_i} \frac{1}{e^{m_i/T} - 1} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} K_0 \left(\frac{m_i}{T} n \right) + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l_1=1}^{+\infty} K_0(2m_i L l_1) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l_1=1}^{+\infty} K_0 \left(m_i \sqrt{\frac{n^2}{T^2} + 4l_1^2 L^2} \right), \end{aligned} \quad (111)$$

a qual é obtida seguindo o mesmo procedimento exposto na seção 3.3.2.

Nós podemos obter a expansão para pequenas massas da equação (111), para o caso $TL \geq 1/2$, e obter

$$\begin{aligned}
I_{2,R}^{(2),DBC}(m_i, T, L) &\simeq \frac{1}{8\pi^2} \left\{ \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) - \frac{\pi}{12TL} - 2 \ln [\eta(2iTL)] \right\} \\
&+ \frac{1}{32\pi^4} \frac{m_i^2}{T^2} \left\{ \frac{\pi^3}{180LT} - \frac{4\pi^3(LT)^3}{45} - \frac{\zeta(3)}{2} \right. \\
&\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{e^{4\pi LTn} (1 + 4\pi LTn) - 1}{(e^{4\pi LTn} - 1)^2} \right\}, \tag{112}
\end{aligned}$$

enquanto que para o caso $TL < 1/2$, nós temos que

$$\begin{aligned}
I_{2,R}^{(2),DBC}(m_i, T, L) &\simeq \frac{1}{8\pi^2} \left\{ -\ln \left(\frac{1}{2\mu L} \right) - \frac{\pi}{12TL} - 2 \ln (\eta[i/(2TL)]) \right\} \\
&+ \frac{1}{32\pi^4} \frac{m_i^2}{T^2} \left\{ -2(TL)^2 \zeta(3) \right. \\
&\left. - 4TL \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{e^{\pi n/(LT)} (TL + \pi n) - TL}{(e^{\pi n/(LT)} - 1)^2} \right\}, \tag{113}
\end{aligned}$$

onde a expressão $\eta(x)$ aparece novamente, é a função eta de Dedekind, dada pela equação (79).

Note que na equação (112) e (113) o somatório do último termo converge rapidamente, devido aos fatores exponenciais.

Os acoplamentos efetivos renormalizados para DBC, são

$$\bar{\lambda}_{i,ef,R}^{DBC}(T, L) = \lambda_i - \frac{(N_i + 8)\lambda_i^2}{6} I_{2,R}^{(2),DBC}(m_i, T, L) - \frac{3N_j\lambda^2}{2} I_{2,R}^{(2),DBC}(m_j, T, L), \tag{114}$$

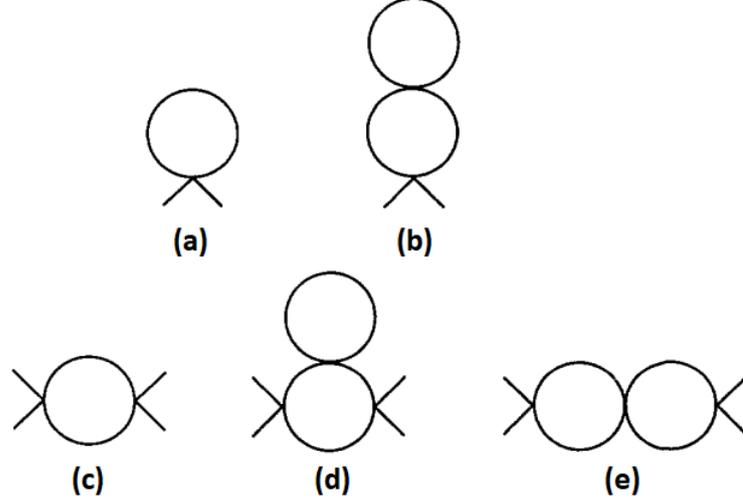
$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{ef,R}^{DBC}(T, L) &= \lambda - 2\lambda^2 \frac{1}{m_\chi^2 - m_\phi^2} \left[I_{2,R}^{(1),DBC}(m_\phi, T, L) - I_{2,R}^{(1),DBC}(m_\chi, T, L) \right] \\
&- \frac{(N_\phi + 2)\lambda\lambda_\phi}{6} I_{2,R}^{(2),DBC}(m_\phi, T, L) - \frac{(N_\chi + 2)\lambda\lambda_\chi}{6} I_{2,R}^{(2),DBC}(m_\chi, T, L), \tag{115}
\end{aligned}$$

3.3 Refinamento do cálculo das autoenergias

As autoenergias foram calculadas no capítulo 3. Percebe-se que as massas efetivas renormalizadas também são funções dos acoplamentos λ 's. Porém, nas seções foram calculadas as correções aos acoplamentos. Vamos inserir essas correções nas massas e comparar com o resultado puramente perturbativo com acoplamentos nus. O que devemos fazer agora é inserir nas expressões das massas os respectivos acoplamentos corrigidos.

Uma aproximação possível, melhorando as expressões perturbativas obtidas anteriormente é inserir nas expressões das massas efetivas renormalizadas os respectivos

Figura 4 - Correções na aproximação de 1-laço e 2-laços na aproximação de bolha (tadpole) para a massa em (a) e (b) e correções ao vértice em (c), (d) e (e).



Fonte: O autor, 2021.

acoplamentos corrigidos. Em outras palavras, até agora as correções correspondem a aproximação de 1-laço, como foram mencionadas nas seções anteriores e que diagramaticamente são representadas na Figura 4.

O segundo método, que vamos chamar de não-perturbativo, consiste do uso das soluções do grupo de renormalização a temperatura finita, do inglês "Finite Temperature Renormalization Group" (FTRG) para os acoplamentos e massas, que foi primeiramente investigado por Matsumoto et al (MATSUMOTO; NAKANO; UMEZAWA, 1984). Este formalismo considera "diagramas de bolhas", onde ressomamos as correções à 1-laço (FUNAKUBO; SAKAMOTO, 1987). Diagramaticamente são representadas na Figura 5, o que é equivalente a resolver as equações de gap para massas e acoplamentos ressomando as contribuições de ordem 1-laço.

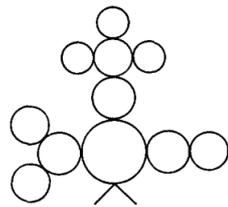
Realizar o cálculo não-perturbativo pelo método de revestimento de bolha (ou anel) mencionado anteriormente, considerando ambos os efeitos de temperatura e dimensão finita autoconsistentes usando tanto a equação de gap para massa quanto para os acoplamentos, que é a forma usual considerada nos estudos (ROOS, 1996; PINTO; RAMOS; PARREIRA, 2005; PINTO; RAMOS, 2006; PHAT et al., 2007). Neste caso, a solução é equivalente a resolver o sistema de equações acopladas a seguir

$$M_\phi^2 = m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{2} \left(\frac{N_\phi + 2}{3} \right) I_{2,R}^{(1)}(M_\phi, T, L) + \frac{\lambda}{2} N_\chi I_{2,R}^{(1)}(M_\chi, T, L), \quad (116)$$

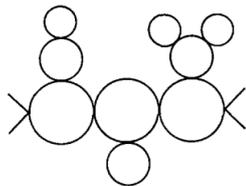
$$M_\chi^2 = m_\chi^2 + \frac{\lambda_\chi}{2} \left(\frac{N_\chi + 2}{3} \right) I_{2,R}^{(1)}(M_\chi, T, L) + \frac{\lambda}{2} N_\phi I_{2,R}^{(1)}(M_\phi, T, L), \quad (117)$$

$$\bar{\lambda}_\phi = \lambda_\phi - \frac{(N_\phi + 8)\lambda_\phi \bar{\lambda}_\phi}{6} I_{2,R}^{(2)}(M_\phi, T, L) - \frac{3N_\chi \lambda \bar{\lambda}}{2} I_{2,R}^{(2)}(M_\chi, T, L), \quad (118)$$

Figura 5 - Diagrama de bolhas do método FTRG



(a)



(b)

Legenda: Exemplos de diagramas de bolhas contribuindo para a massa (a) e para o acoplamento (b).

Fonte: FUNAKUBO; SAKAMOTO, 1987, f. 208.

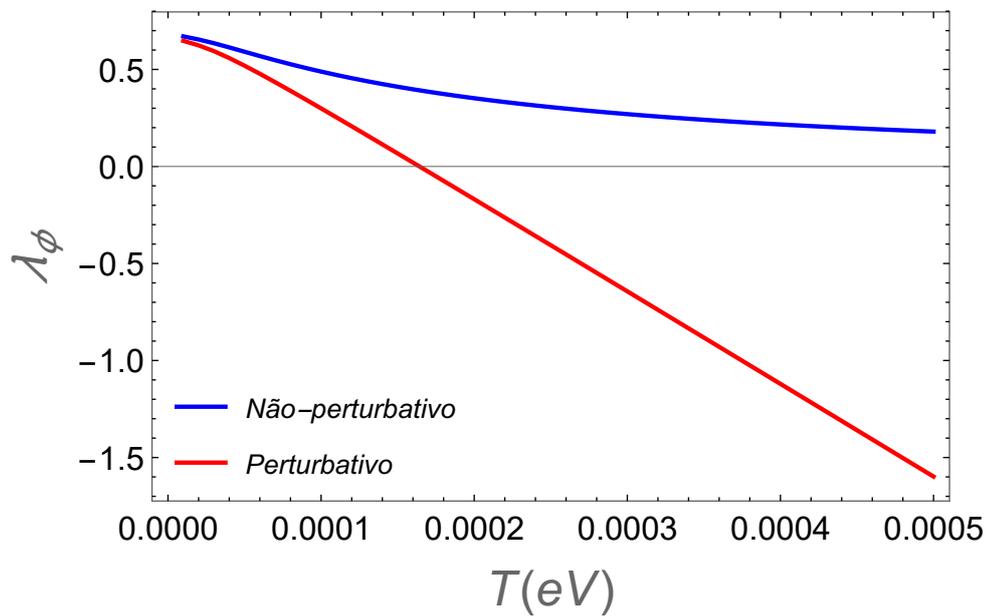
$$\bar{\lambda}_\chi = \lambda_\chi - \frac{(N_\chi + 8)\lambda_\chi \bar{\lambda}_\chi}{6} I_{2,R}^{(2)}(M_\chi, T, L) - \frac{3N_\phi \lambda \bar{\lambda}}{2} I_{2,R}^{(2)}(M_\phi, T, L), \quad (119)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \lambda - 2\lambda \bar{\lambda} I_{2,R}^{(2)}(M_\phi, M_\chi, T, L) - \frac{(N_\phi + 2)(\lambda \bar{\lambda}_\phi + \bar{\lambda} \lambda_\phi)}{12} I_{2,R}^{(2)}(M_\phi, T, L) \\ &- \frac{(N_\chi + 2)(\lambda \bar{\lambda}_\chi + \bar{\lambda} \lambda_\chi)}{12} I_{2,R}^{(2)}(M_\chi, T, L). \end{aligned} \quad (120)$$

observe que a massa corrigida agora também se encontra dentro das integrais $I_{2,R}^{(1)}$ e $I_{2,R}^{(2)}$.

Infelizmente a teoria de perturbação quebra em altas temperaturas e, em particular perto de pontos críticos (BELLAC; BARTON et al., 1991) (FUNAKUBO; SAKAMOTO, 1987) mesmo quando levado em conta a massa térmica explicitamente. Quando não levamos em conta a massa térmica para valores cada vez maiores de temperatura os acoplamentos tomarão valores fora da faixa aceitável para uma teoria estável, enquanto que no método não-perturbativo isso não ocorre, como ilustra a Figura 6, que serve como exemplo. Os valores numéricos usados nessa figura serão explicados no próximo capítulo.

Figura 6 - Comparação entre o método perturbativo e não-perturbativo



Legenda: Foi usada a equação (108) e sua versão pela equação de gap como a não-perturbativa. A linha vermelha toma valores negativos a partir de $T = 0.0011\text{eV}$, que é o momento que a teoria de perturbação quebra devido a um ponto crítico em $L = 1660.1\text{eV}^{-1}$. Valores numéricos para criação do gráfico $N_\phi = 1$, $N_\chi = 1$, $m_\phi = 10^{-4}\text{eV}$, $m_\chi = 10^{-5}\text{eV}$, $\lambda_\phi = 8 \times 10^{-1}$, $\lambda_\chi = 7 \times 10^{-2}$, $\lambda = -7.5 \times 10^{-2}$, $\mu = 0.0026$, $L = 3000\text{eV}^{-1}$.

Fonte: O autor, 2021.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Estamos principalmente interessados em explorar os parâmetros possivelmente relevantes para sistemas em matéria condensada, onde este tipo de sistemas compactados aparecem com mais frequência, por exemplo, ao estudar filmes finos com uma dada espessura L , muito menor do que a largura dos planos. Esses sistemas podem, por exemplo, descrever materiais do tipo isolante e condutor (MARINO, 2004). Note que embora a motivação é a aplicação das expressões obtidas em sistemas de matéria condensada, estamos ainda fazendo uso dessas expressões obtidas no contexto relativístico. A motivação aqui seriam materiais que podem ser bem descritos por relações de dispersão relativística. Isso é o caso, por exemplo de sistemas envolvendo excitons magnéticos, ou materiais com relação de dispersão linear (FERREIRA; CONTINENTINO; MARINO, 2004). Adicionalmente, trabalhamos com o caso de $N_\phi = N_\chi = 1$ por simplicidade também. O estudo com valores de $N_\phi, N_\chi \neq 1$ é qualitativamente equivalente com relação a termodinâmica aqui estudada. Com isso em mente, olhamos para comprimentos de tamanho L da ordem do milímetro e menores. Da mesma forma, exploramos temperaturas no máximo da ordem da temperatura ambiente e menores, $T \lesssim 300K$, correspondendo a cerca de $T \lesssim 0.026$ eV. Como nosso modelo com campos escalares acoplados pretende representar uma descrição eficaz para este tipo de sistemas, também é natural definir a escala de regularização μ como a escala ultravioleta (UV) efetiva para nosso modelo. Portanto, é natural também definir $\mu = 0.026$ eV. A partir de agora, todos os nossos resultados numéricos assumirão esta escala UV efetiva. Quanto aos possíveis valores para os acoplamentos, permanecemos em valores de acoplamentos onde acredita-se que as correções de ordem superior para nosso esquema de ressonância em bolha permaneça sob controle, ou seja, o diagrama de bolha de 1-laço e sua ressonância para as massas efetivas e os acoplamentos continuam sendo a contribuição dominante. Finalmente, dados os valores para a temperatura T e o comprimento L , os valores para as massas a nível de árvore m_ϕ e m_χ são escolhidos de forma que as correções de bolha ainda sejam grandes o suficiente para levar a uma possível transições de fase no modelo. Isso é evidente a partir da forma das correções de 1-laço, nas equações (63) e (110) no caso de PBC, ou nas equações (70) e (111) no caso de DBC, que mostram que os valores para as massas tais que $m_i/T \gg 1$ e $m_i L \gg 1$, as correções de bolha dependentes de T e L são efetivamente suprimidas exponencialmente (isto é uma reminiscência da supressão de Boltzmann em T pequeno e/ou L grande).

Uma vez que a região de interesse para o presente trabalho foi especificada, vamos aos resultados para as quantidades relevantes.

4.1 Resultado para o caso de um campo escalar

É útil primeiro analisar o caso de apenas um campo, por exemplo ϕ . Neste caso, podemos resolver analiticamente para as funções da massa efetiva e constante de acoplamento. Os resultados são:

$$M_\phi^2(T, L) = -m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{2} \frac{N_\phi + 2}{3} I_{2,R}^{(1)}(m_\phi, T, L), \quad (121)$$

$$\lambda_\phi(T, L) = \lambda_\phi - \frac{(N_\phi + 8)\lambda_\phi^2}{6} I_{2,R}^{(2)}(M_{\phi,NP}, T, L), \quad (122)$$

$$M_{\phi,NP}^2(T, L) = -m_\phi^2 + \frac{\lambda_\phi}{2} \frac{N_\phi + 2}{3} I_{2,R}^{(1)}(M_{\phi,NP}, T, L), \quad (123)$$

$$\bar{\lambda}_{\phi,NP}(T, L) = \lambda_\phi - \frac{(N_\phi + 8)\lambda_\phi \bar{\lambda}_{\phi,NP}}{6} I_{2,R}^{(2)}(M_{\phi,NP}, T, L), \quad (124)$$

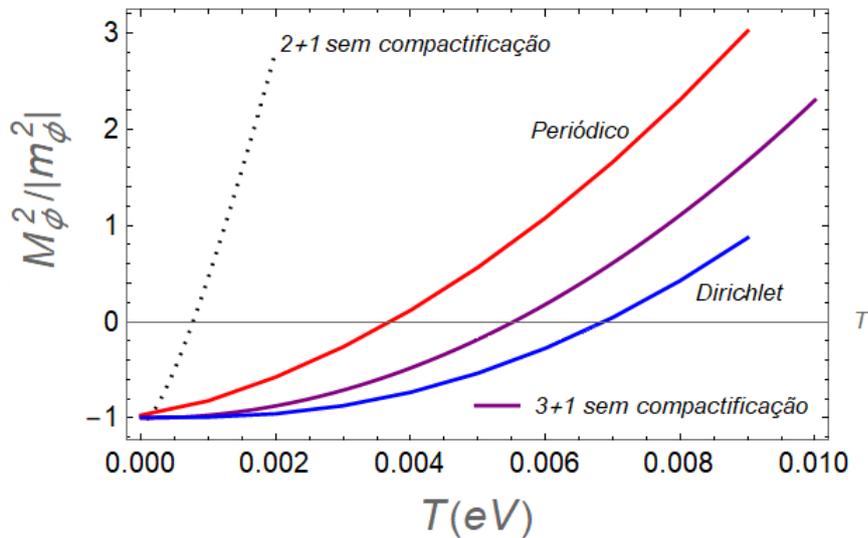
onde NP é não-perturbativo representa o método das ressonâncias. As integrais $I_{2,R}^{(1)}$ e $I_{2,R}^{(2)}$ são para o caso PBC, para o caso de DBC, tornam-se $I_{2,R}^{(1)} \rightarrow I_{2,R}^{(1),DBC}$ e $I_{2,R}^{(2)} \rightarrow I_{2,R}^{(2),DBC}$.

Uma vez que a correção de uma bolha $I_2^{(1)}$ é positiva definida, a transição de fase só pode acontecer quando já se começa com uma fase quebrada no vácuo (ou seja, quando $T = 0$). Definimos o termo quadrado de massa em nível de árvore no potencial como negativo.

Na figura 7 mostramos $M_{\phi,NP}(T, L)$ em PBC e DBC, como função da temperatura para um valor de comprimento $L = 2000 \text{ eV}^{-1}$ fixo. Observamos apenas uma transição de fase do tipo restauração de simetria em ambos os casos na temperatura $T_c = 0.0037 \text{ eV}$ e 0.0069 eV para PBC e DBC, respectivamente. O caso $3 + 1$ sem compactificação tem temperatura crítica $T_c = 0.0055 \text{ eV}$. O caso $2 + 1$ sem compactificação tem temperatura crítica $T_c = 0.00077 \text{ eV}$, para mais detalhes ver Apêndice B.

Na figura 8 mostramos $M_\phi(T, L)$ e $M_{\phi,NP}(T, L)$ em PBC e DBC, como função do comprimento para um valor de temperatura fixo $T = 9 \times 10^{-4} \text{ eV}$. Conseguimos perceber que para o caso DBC obtemos dois comprimentos críticos $L_{c1} = 1013.13 \text{ eV}^{-1}$ e $L_{c2} = 2602.04 \text{ eV}^{-1}$, isso significa que temos alguns comportamentos diferentes além dos vistos na figura 7. Antes de L_{c1} o gráfico da massa por temperatura é somente positivo. Entre L_{c1} e L_{c2} o gráfico da massa por temperatura apresenta um ponto crítico com a temperatura crítica aumentando. Depois de L_{c2} o gráfico de massa por temperatura continua da mesma forma porém com a diferença que a temperatura crítica vai diminuindo, conforme aumenta o valor do comprimento. Para L muito grande recuperamos o caso do modelo de um campo escalar. Para o caso PBC obtemos apenas um ponto crítico em $L_c = 242.89 \text{ eV}^{-1}$. Antes desse ponto crítico o gráfico de massa por temperatura é somente positivo. Depois de L_c o gráfico de massa por temperatura apresenta um ponto crítico. Para L muito grande recuperamos o resultado para o caso de um único campo escalar sem compactificação.

Figura 7 - Massa efetiva $M_\phi(T, L)$ como função da temperatura e um valor fixado de comprimento $L = 2000 \text{ eV}^{-1}$



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4} \text{ eV}$, $\lambda_\phi = 0.8$, $\mu = 0.026 \text{ eV}$ e $\lambda = 0$.

Fonte: O autor, 2021.

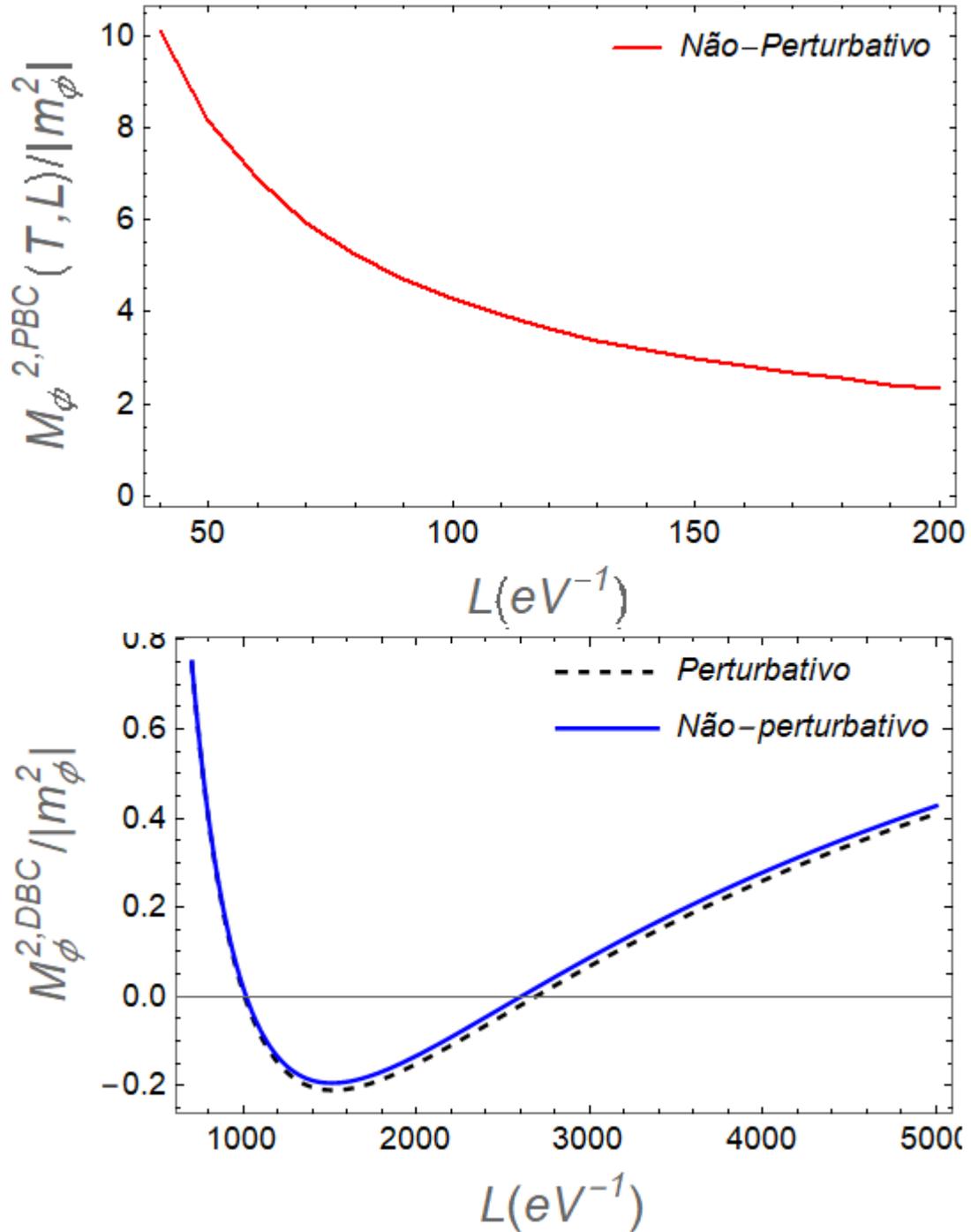
Veremos com mais detalhes quando estudarmos a seguir o caso de dois campos, pois essas mesmas características reaparecem.

Na figura 9 mostramos os acoplamentos $\lambda_\phi(T, L)$ e $\bar{\lambda}_{\phi, NP}(T, L)$ em PBC e DBC, como função da temperatura para um valor fixo de comprimento $L = 2000 \text{ eV}^{-1}$.

Na figura 10 mostramos os acoplamentos $\lambda_\phi(T, L)$ e $\bar{\lambda}_{\phi, NP}(T, L)$ em PBC e DBC, como função do comprimento para um valor fixo de temperatura $T = 9 \times 10^{-4} \text{ eV}$.

Finalmente, na Figura 11, que é válida somente para o caso DBC, nós mostramos o diagrama de fase para o modelo de um campo escalar, onde é dado o comprimento crítico em função da temperatura crítica $L_c(T_c)$. As regiões de quebra de simetria, $\langle \phi \rangle \neq 0$, e simetria restaurada, $\langle \phi \rangle = 0$, são indicadas. Para completar, nós também indicamos a região de parâmetros tal que a aproximação de pequenas massas $M_\phi/T, m_\phi L < 1$ não é mais válida.

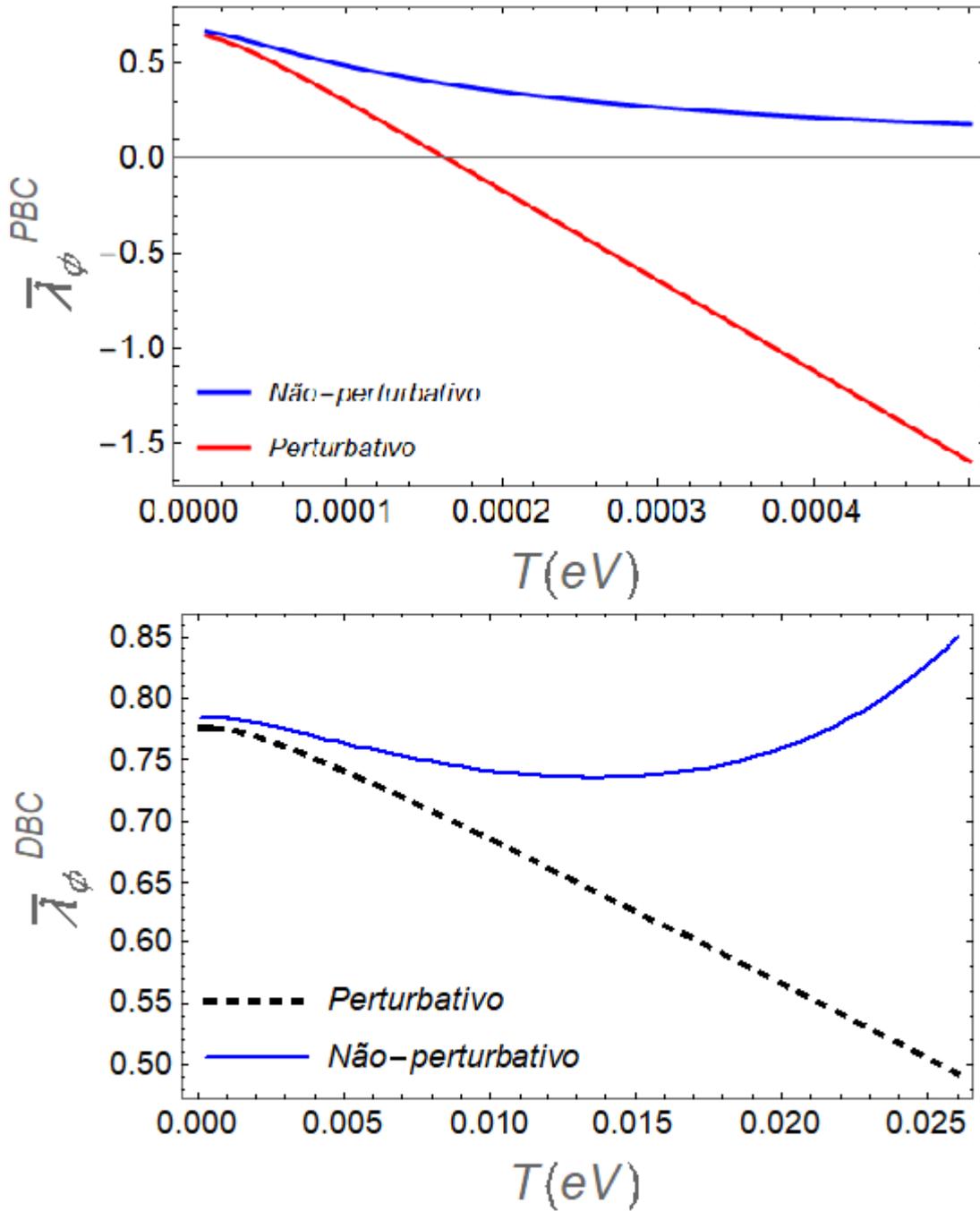
Figura 8 - Massa efetiva $M_\phi(T, L)$ como função do comprimento e um valor fixado de comprimento $T = 9 \times 10^{-4}$ eV



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\mu = 0.026$ eV e $\lambda = 0$.

Fonte: O autor, 2021.

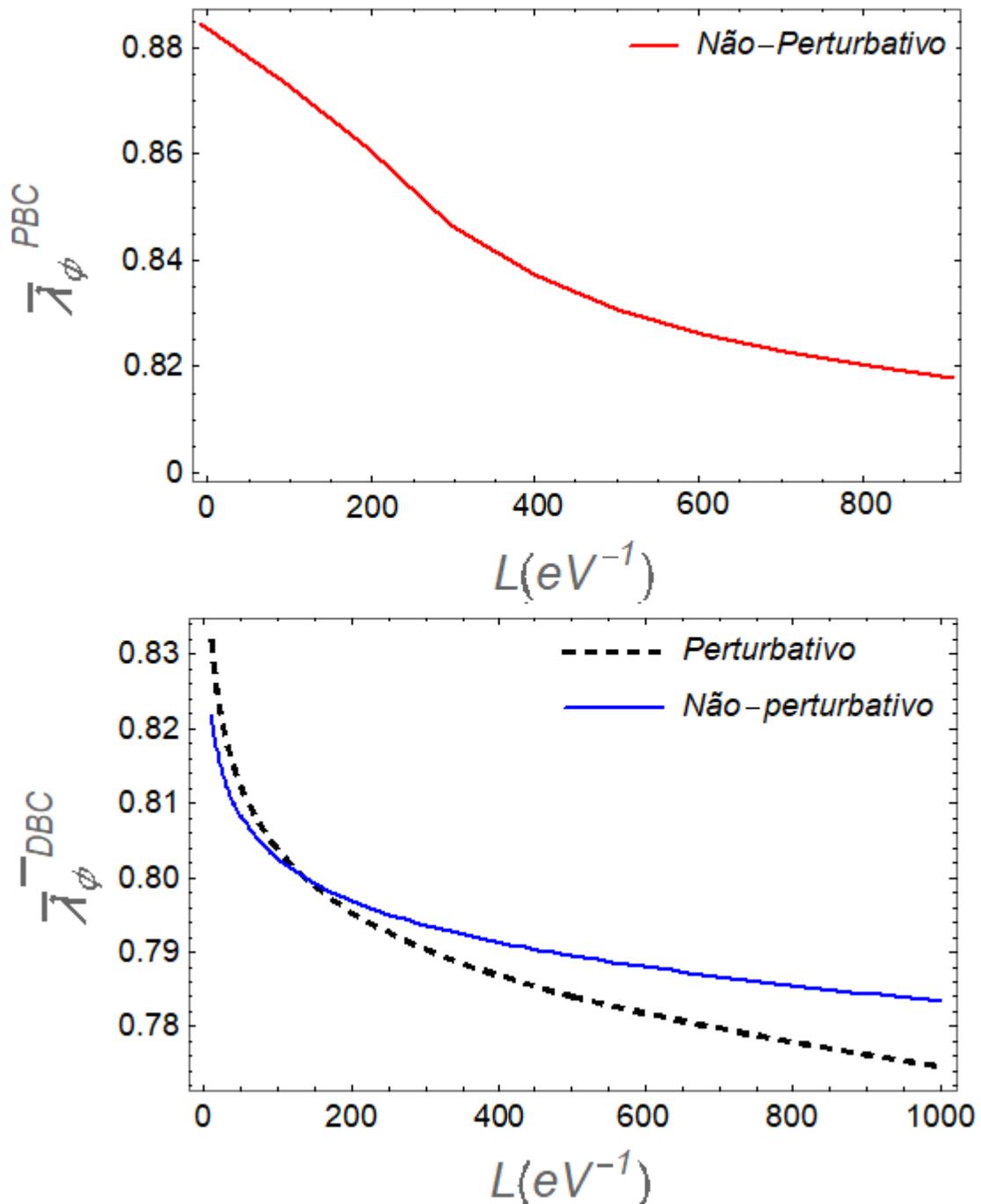
Figura 9 - Acoplamento efetivo $\lambda_\phi(T, L)$ como função da temperatura e um valor fixado de comprimento $L = 2000\text{eV}^{-1}$



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\mu = 0.026$ eV e $\lambda = 0$.

Fonte: O autor, 2021.

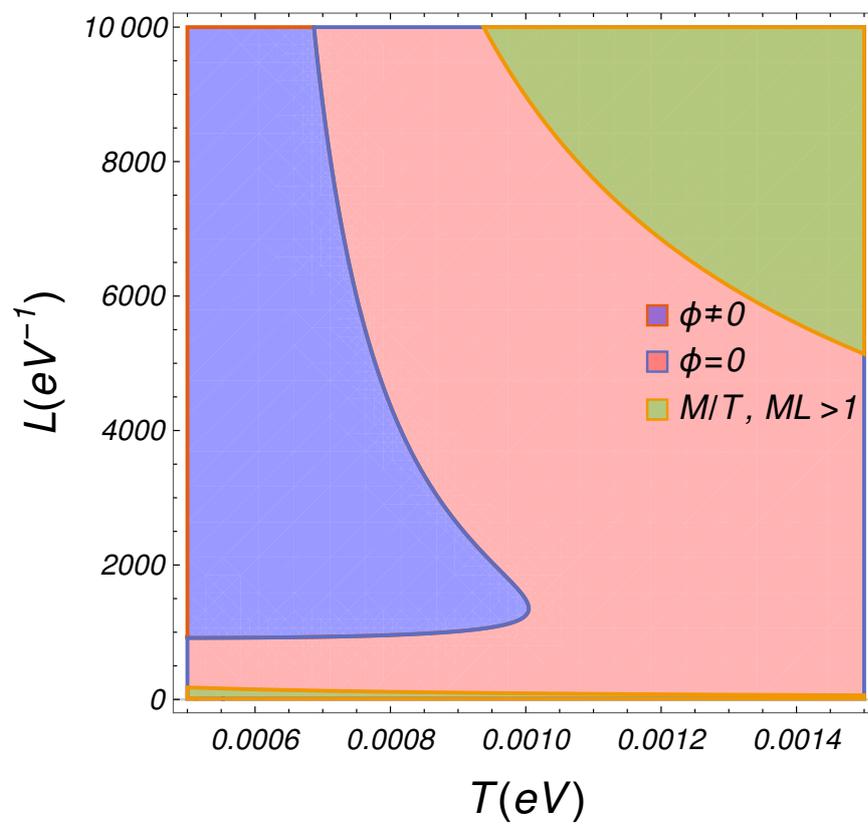
Figura 10 - Acoplamento efetivo $\lambda_\phi(T, L)$ como função do comprimento e um valor fixado de temperatura $T = 9 \times 10^{-4}$ eV



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\mu = 0.026$ eV e $\lambda = 0$.

Fonte: O autor, 2021.

Figura 11 - Diagrama de fase para um campo escalar



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4}$ eV e $\lambda_\phi = 0.8$.

Fonte: O autor, 2021.

4.2 Resultado para o caso de múltiplos campos escalares

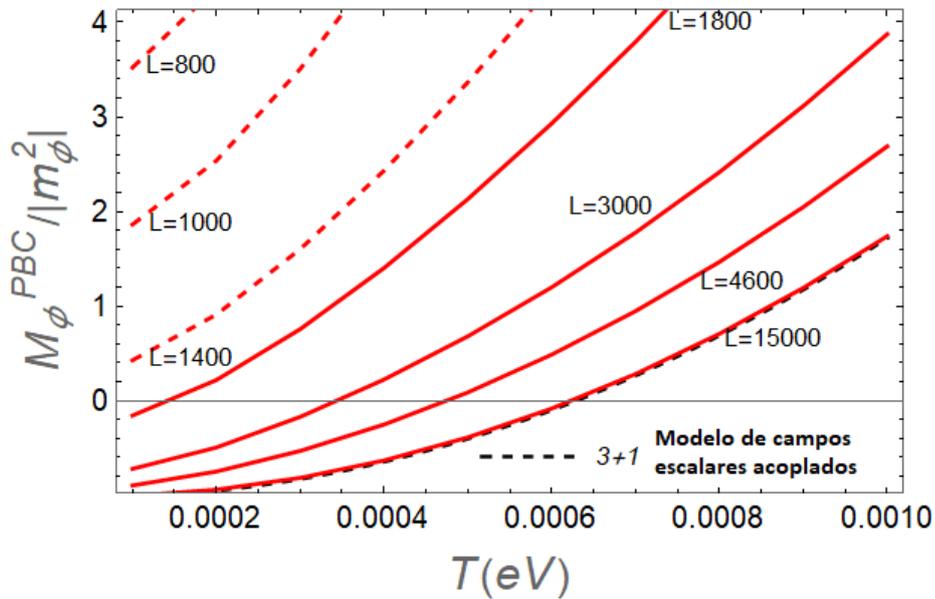
Vamos agora estudar o caso de múltiplos campos escalares, isto é, incluindo os dois ϕ e χ com um valor diferente de zero para o acoplamento λ . O caso de interesse é a situação onde no vácuo tem uma simetria quebrada na direção de ϕ , $m_\phi^2 = -|m_\phi^2|$, e tem uma simetria restaurada na direção de χ , isto é, um valor positivo para m_χ^2 , com os acoplamentos λ_ϕ , λ_χ e λ escolhidos de maneira apropriada para um possível aparecimento de ISB/SNR na direção de ϕ .

Nas Figuras 12 e 13 temos a massa efetiva calculada de modo não-perturbativo em função da temperatura para diferentes tipos de comprimentos no caso PBC e DBC, respectivamente. A linha pontilhada indica a passagem por um comprimento crítico.

Na Figura 14, tanto o modelo DBC quanto o modelo PBC iniciam com fase simétrica, uma vez que $|m_\phi^2| < 0$, contrariando o modelo estudado na seção 3.2 de referência, cujo o esperado é iniciar da fase quebrada. Isto mostra os efeitos da temperatura e comprimento finito na simetria inicial do sistema. Para PBC observa-se que no método não-perturbativo há a quebra de simetria com o aumento do comprimento em $L = 1550.9 \text{ eV}^{-1}$. Para DBC há uma fase reentrante, o modelo contém uma ISB que evolui para uma restauração de simetria. Há duas transições de fase a primeira em $L = 936.08 \text{ eV}$ (para perturbativo $L = 929.145 \text{ eV}$) e a segunda em $L = 3063.69 \text{ eV}$ (para o perturbativo $L = 3176.5 \text{ eV}$).

Nosso resultado para o diagrama de fase no caso DBC, similar ao caso de um campo, são mostrados nas Figuras 15 e 16, temos explicitamente identificados também as regiões para o qual o potencial se torna ilimitado, isto é, a condição de contorno $R_{\text{eff}} > 1$ é explicitamente violada, com R_{eff} dado pela equação (99), com os acoplamentos substituídos por seus efetivos, obtidos da solução do sistema de equações (116) - (120) no caso da aproximação de pequenas massa em DBC.

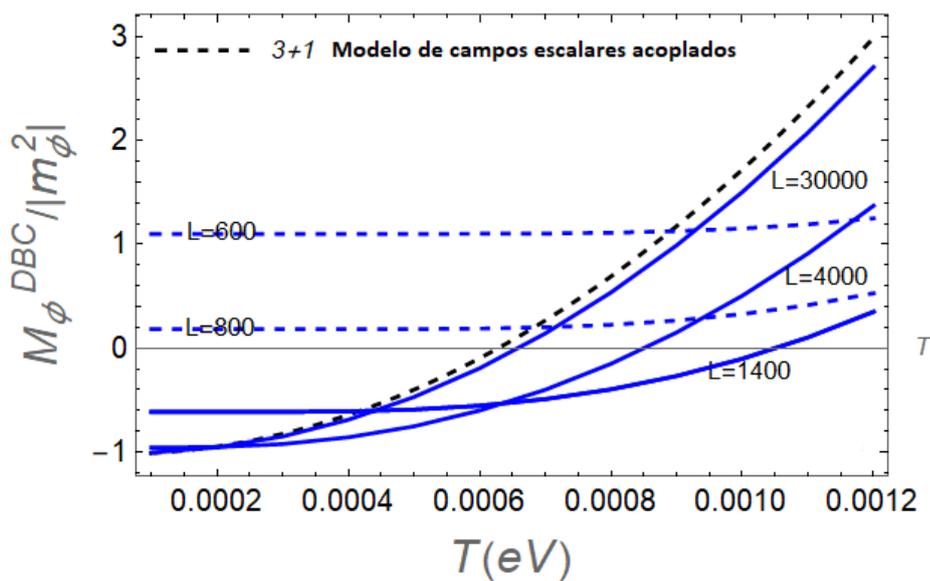
Figura 12 - Massa efetiva $M_\phi^{2,PBC}(T, L)$ como função do comprimento T para diferentes valores de comprimento.



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $N_\chi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4}$ eV, $m_\chi = 10^{-5}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\lambda_\chi = 0.07$, $\lambda = -0.075$ e $\mu = 0.026$. Os valores de L estão em eV^{-1} .

Fonte: O autor, 2021.

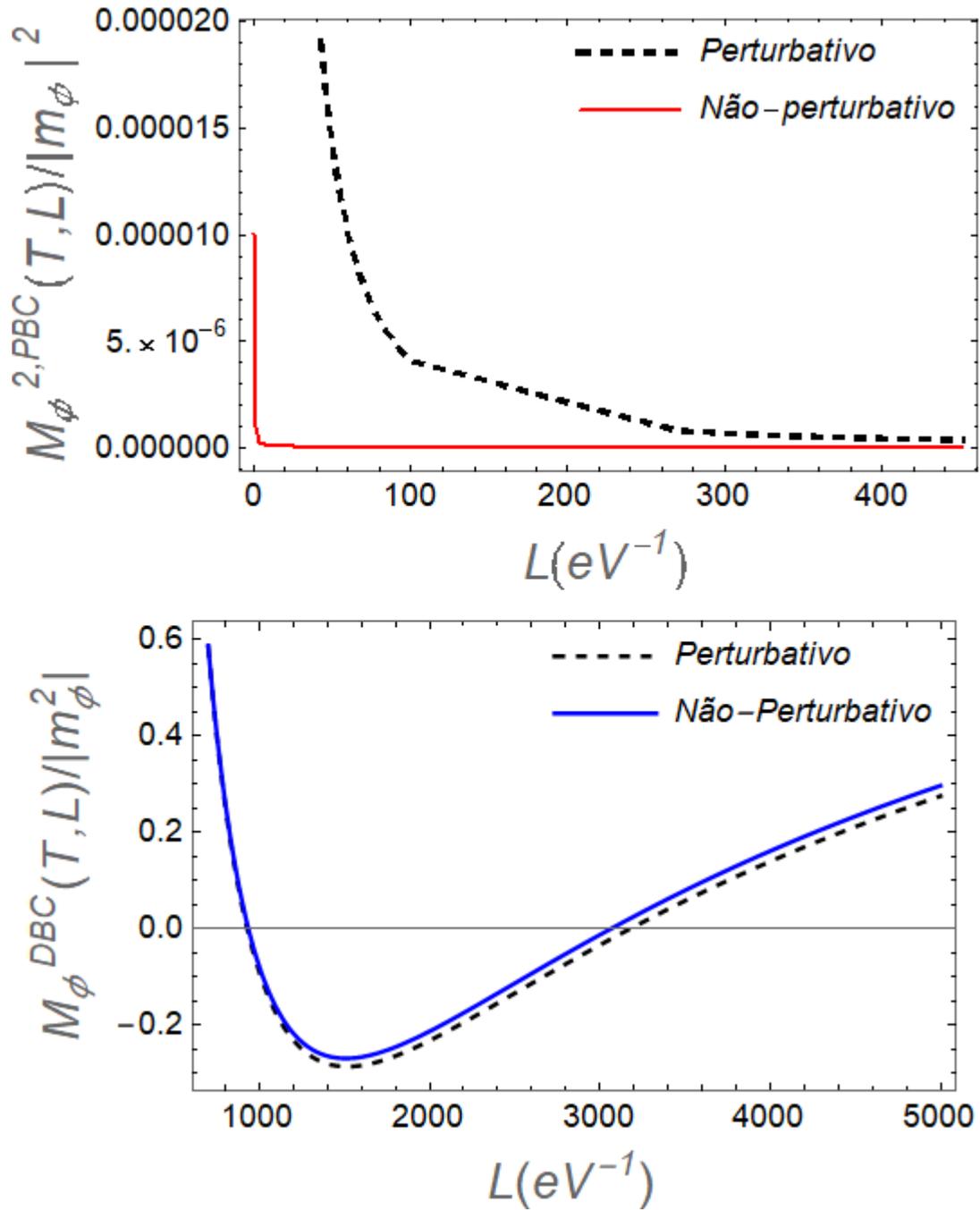
Figura 13 - Massa efetiva $M_\phi^{2,PBC}(T, L)$ como função do comprimento T para diferentes valores de comprimento.



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $N_\chi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4}$ eV, $m_\chi = 10^{-5}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\lambda_\chi = 0.07$, $\lambda = -0.075$ e $\mu = 0.026$. Os valores de L estão em eV^{-1} .

Fonte: O autor, 2021.

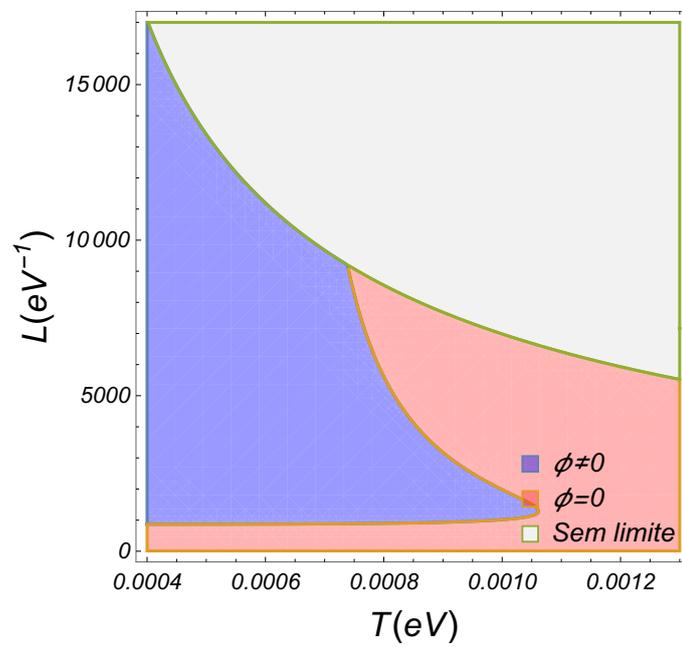
Figura 14 - Massa efetiva $M_\phi^2(T, L)$ como função do comprimento L para um valor de temperatura fixada, $T = 9 \times 10^{-4} \text{eV}$.



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $N_\chi = 1$, $|m_\phi| = 10^{-4} \text{eV}$, $m_\chi = 10^{-5} \text{eV}$, $\lambda_\phi = 0.8$, $\lambda_\chi = 0.07$, $\lambda = -0.075$ e $\mu = 0.026$.

Fonte: O autor, 2021.

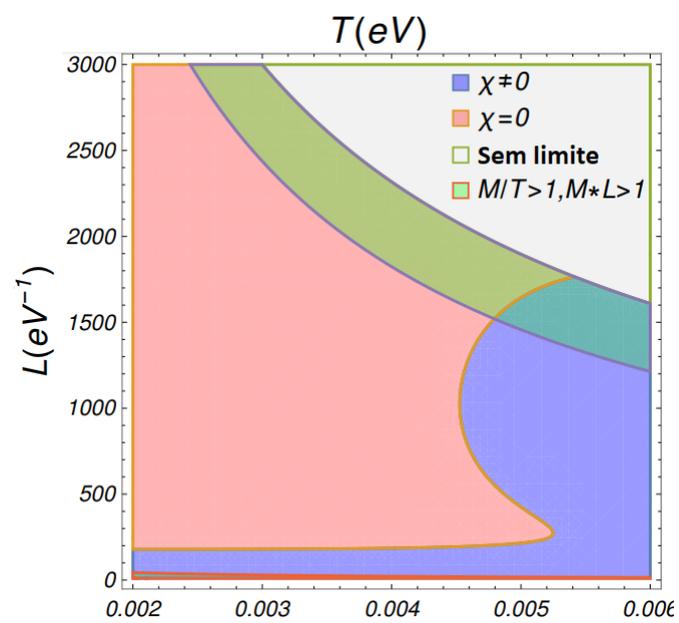
Figura 15 - Diagrama de fases para ϕ no $\phi - \chi$ sistema de dois campos escalares para DBC. 2º gráfico



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $N_\chi = 1$, $|m_\phi| = 4 \times 10^{-5}$ eV, $m_\chi = 4 \times 10^{-5}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\lambda_\chi = 0.07$ e $\lambda = -0.075$.

Fonte: O autor, 2021.

Figura 16 - Diagrama de fases para χ no $\chi - \phi$ sistema de dois campos escalares para DBC. 2º gráfico



Legenda: Os parâmetros considerados são $N_\phi = 1$, $N_\chi = 1$, $|m_\phi| = 4 \times 10^{-5}$ eV, $m_\chi = 4 \times 10^{-5}$ eV, $\lambda_\phi = 0.8$, $\lambda_\chi = 0.07$ e $\lambda = -0.075$.

Fonte: O autor, 2021.

CONCLUSÃO

O modelo escalar com simetria $Z_2 \times Z_2$ foi investigado em termos de quebra e restauração de simetria ocorridas com os efeitos da temperatura e comprimento finito. Este modelo é particularmente importante para sistemas em Matéria Condensada, podendo representar sistemas como materiais filme (STRONGIN et al., 1970b) (MOROHASHI; HASUO, 1987). Além disso, esse modelo pode representar o setor de Higgs de teorias de grande unificação, ou em extensões do modelo padrão de física de partículas com mais de um campo escalar, sendo relevante para a Cosmologia em suas fases do Universo primordial, usando sem compactificação espacial, porém modelos de branas podem ser aplicadas onde efeitos de compactificações são importantes. Fizemos o uso de dois tipos de abordagem para entender e comparar melhor os fenômenos, a primeira consiste de levar em conta apenas o método perturbativo à 1-laço e o segundo trata-se do método não-perturbativo de ressonâncias autoconsistentes onde consideram-se "diagramas de bolhas" no grupo de renormalização à temperatura finita.

Os efeitos da temperatura e comprimento finito impactaram diretamente no comportamento das massas efetivas, isto é, dada uma massa $-|m_\phi|^2$, no modelo de campos escalares acoplados (sem compactificação na dimensão) é esperado que o sistema comece na fase quebrada, entretanto como visto nesse trabalho, o efeito da temperatura e compactificação muda a fase inicial.

Um efeito particularmente interessante foram as fases reentrantes vistas no caso DBC para massa e acoplamentos dependentes da dimensão compactificada, implicando duas transições de fase, sendo uma delas ISB, um exemplo de tal comportamento foi mostrado na Figura 14. Um exemplo desse tipo de fase reentrante ocorre no caso do modelo de campos escalares acoplados não relativísticos (PINTO; RAMOS; PARREIRA, 2005). Esse efeito de fases reentrantes não foram observadas para o caso PBC. Essa diferença que existe entre as duas condições de contorno, estão relacionadas com seus respectivos acoplamentos e suas dependências com a temperatura e comprimento finito.

Um fator em que o modelo usando DBC ganha em relação ao modelo usando PBC é a facilidade no cálculo dos parâmetros de interesse. Devido ao domínio diferente para os dois métodos como mostrado na seção 2.2.2, em consequência a forma de proceder os cálculos também são distintas. De modo que para o caso PBC não há como trabalhar com aproximações, sendo necessário o advento de técnicas matemáticas como Abel-Plana para computar as somas infinitas e suas convergências numéricas, que ajudaram, em alguns casos, a diminuir o longo tempo de processamento computacional. No caso DBC fizemos aproximações para valores de $T \times L$, como mostrado na seção 3.3.2, que facilitaram muito os cálculos e o tempo de processamento computacional, além de garantir a convergência numérica.

Futuramente, esperamos explorar outras compactificações em mais dimensões espaciais. Também pretendemos estudar outras condições de contorno.

REFERÊNCIAS

- BELLAC, M. L.; BARTON, G. et al. *Quantum and statistical field theory*. [S.l.]: Clarendon Press Oxford, 1991.
- BIMONTE, G.; LOZANO, G. Symmetry nonrestoration and inverse symmetry breaking on the lattice. *Physics Letters B*, v. 388, n. 4, p. 692–701, 1996. ISSN 0370-2693.
- BORUT, B. High temperature symmetry nonrestoration. *COSMO-99*, World Scientific, p. 247, 2000.
- BRANKOV, J. G.; DANCHEV, D. M.; TONCHEV, N. S. *Theory of critical phenomena in finite-size systems: scaling and quantum effects*. [S.l.]: World Scientific, 2000.
- CAICEDO, M. I.; SVAITER, N. F. Effective lagrangians for scalar fields and finite size effects in field theory. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 45, n. 1, p. 179, 2004. ISSN 0022-2488.
- CAVALCANTI, E. et al. Effect of boundary conditions on dimensionally reduced field-theoretical models at finite temperature. *Physical Review D*, APS, v. 100, n. 2, p. 025008, 2019.
- CHAIKIN, P. M.; LUBENSKY, T. C. *Principles of condensed matter physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995.
- COLEMAN, S. *Aspects of Symmetry, Ch. 7*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1985.
- DAS, A. *Field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2006.
- DIAZ, R. A.; SVAITER, N. F. Finite-size effects in disordered lambda phi 4 model. *International Journal of Modern Physics B*, World Scientific, v. 30, n. 30, p. 1650207, Nov 2016. ISSN 1793-6578.
- ELIZALDE, E. *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*. [S.l.]: Berlin: Springer, 2012. 227 p.
- ELIZALDE, E.; ROMEO, A. Regularization of General Multidimensional Epstein Zeta Functions. *Rev. Math. Phys.*, v. 1, p. 113–128, 1989.
- FERREIRA, A. S.; CONTINENTINO, M. A.; MARINO, E. C. Quantum corrections to the phase diagram of heavy-fermion superconductors. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 70, p. 174507, Nov 2004.
- FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 20, p. 367–387, Apr 1948.
- FORD, L. H.; SVAITER, N. F. One-loop renormalization of a self-interacting scalar field in nonsimply connected spacetimes. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 51, n. 12, p. 6981–6989, Jun 1995. ISSN 0556-2821.
- FOSCO, C. D.; SVAITER, N. F. Finite size effects in the anisotropic lambda phi 4 model. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 42, n. 11, p. 5185–5194, Nov 2001. ISSN 1089-7658.

- FUKUTO, M.; YANO, Y. F.; PERSHAN, P. S. Critical casimir effect in three-dimensional ising systems: Measurements on binary wetting films. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 94, p. 135702, Apr 2005.
- FUNAKUBO, K.; SAKAMOTO, M. Higher order contributions in finite temperature renormalization group. *Physics Letters B*, v. 186, n. 2, p. 205–210, 1987. ISSN 0370-2693.
- GAVELA, M. B. et al. Fading of symmetry nonrestoration at finite temperature. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 59, n. 2, Dec 1998. ISSN 1089-4918.
- GLASHOW, S. L. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, v. 22, n. 4, p. 579–588, 1961. ISSN 0029-5582.
- HONG, S.-I.; KOGUT, J. B. Symmetry nonrestoration in a Gross-Neveu model with random chemical potential. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 085014, 2001.
- KANNIKE, K. *Notes on Feynman parametrization and the Dirac delta function*. 2007.
- KAPUSTA, J. I.; LANDSHOFF, P. Finite-temperature field theory. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, IOP Publishing, v. 15, n. 3, p. 267, 1989.
- KELDysh, L. V. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 47, p. 1515–1527, 1964.
- KHANNA, F. C. et al. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. [S.l.]: World Scientific Books, 2009. v. 1.
- KHANNA, F. e. a. Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications. *Physics Reports*, Elsevier, v. 539, n. 3, p. 135–224, 2014.
- LAISSARDIERE, G. T.; MAYOU, D.; MAGAUD, L. Numerical studies of confined states in rotated bilayers of graphene. *Physical Review B*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 12, Sep 2012. ISSN 1550-235X.
- MALBOUISSON, A.; MALBOUISSON, J.; SANTANA, A. Spontaneous symmetry breaking in compactified $\lambda\phi^4$ theory. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 631, n. 1, p. 83–94, 2002.
- MALBOUISSON, A. et al. Boundary behaviour of the four-point function in the 3-dimensional gross-neveu model. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 583, n. 3, p. 373–378, 2004.
- MARINO, E. C. Applications of quantum field theory in condensed matter. *Brazilian Journal of Physics*, scielo, v. 34, p. 1322 – 1326, 12 2004. ISSN 0103-9733.
- MARTIN, L. A. B. S. *Grupos de Lie*. [S.l.]: Editora Unicamp, 2017.
- MATSUBARA, T. A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress of Theoretical Physics*, v. 14, p. 351, 1955.
- MATSUMOTO, H.; NAKANO, Y.; UMEZAWA, H. Renormalization group at finite temperature. *Physical Review D*, APS, v. 29, n. 6, p. 1116, 1984.

- MOGLIACCI, S.; KOLBé, I.; HOROWITZ, W. Geometrically confined thermal field theory: Finite size corrections and phase transitions. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 11, Dec 2020. ISSN 2470-0029.
- MOROHASHI, S.; HASUO, S. Experimental investigations and analysis for high-quality Nb/Al-AlO_x/Nb Josephson junctions. *Journal of applied physics*, American Institute of Physics, v. 61, n. 10, p. 4835–4849, 1987.
- NIJENHUIS, A. et al. Poincaré groups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 65, n. 6, p. 338–341, 1959.
- OGG, A. Modular forms and Dirichlet series. [New York] Wiley-Interscience, v. 39, 1969.
- ORLOFF, J. The UV price for symmetry non-restoration. *Physics Letters B*, v. 403, n. 3, p. 309–315, 1997. ISSN 0370-2693.
- PESKIN, M.; SCHROEDER, D. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC Press, 1995.
- PHAT, T. H. et al. High temperature symmetry nonrestoration and inverse symmetry breaking in the Cornwall-Jackiw-Tomboulis formalism. *Physical Review D*, APS, v. 76, n. 12, p. 125027, 2007.
- PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Nonperturbative study of inverse symmetry breaking at high temperatures. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 61, n. 12, May 2000. ISSN 1089-4918.
- PINTO, M. B.; RAMOS, R. O. Inverse symmetry breaking in multi-scalar field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 39, n. 21, p. 6649–6655, May 2006. ISSN 1361-6447.
- PINTO, M. B.; RAMOS, R. O.; PARREIRA, J. E. Phase transition patterns in relativistic and nonrelativistic multi-scalar-field models. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 71, n. 12, Jun 2005. ISSN 1550-2368.
- ROOS, T. G. Wilson renormalization group study of inverse symmetry breaking. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 54, n. 4, p. 2944–2959, Aug 1996. ISSN 1089-4918.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- SALAM, A. Weak and Electromagnetic Interactions. *Conf. Proc. C*, v. 680519, p. 367–377, 1968.
- SCHUPPER, N.; SHNERB, N. M. Inverse melting and inverse freezing: a spin model. *Physical Review E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, v. 72, n. 4 Pt 2, p. 046107, October 2005. ISSN 1539-3755.
- SCHWINGER, J. Brownian Motion of a Quantum Oscillator. *Journal of Mathematical Physics*, v. 2, n. 3, p. 407–432, maio 1961.
- STRONGIN, M. et al. Destruction of superconductivity in disordered near-monolayer films. *Physical Review B*, APS, v. 1, n. 3, p. 1078, 1970.

STRONGIN, M. et al. Destruction of superconductivity in disordered near-monolayer films. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 1, p. 1078–1091, Feb 1970.

SVAITER, N. F. Finite size effects in thermal field theory. *Journal of Mathematical Physics*, AIP Publishing, v. 45, n. 12, p. 4524–4538, Dec 2004. ISSN 1089-7658.

TATSUMI, M.; MATSUO, T.; SUGA, H. Phase transitions of rochelle salt as studied by high-resolution heat capacity measurements. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, v. 39, n. 4, p. 427, 1978.

WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 19, p. 1264–1266, Nov 1967.

WEINBERG, S. Gauge and Global Symmetries at High Temperature. *Phys. Rev. D*, v. 9, p. 3357–3378, 1974.

WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. v. 2.

ZEE, A. *Quantum field theory in a nutshell*. [S.l.]: Princeton University Press, 2010.

APÊNDICE A – Demonstração do domínio e frequência discretas para as condições de contorno

Seja a equação de Klein-Gordon em uma dimensão espacial no espaço Euclidiano

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \phi(x, \tau) = 0. \quad (125)$$

Podemos fazer separação de variáveis se consideramos uma solução do tipo $\psi(x)\xi(\tau)$. Substituindo na equação acima, temos

$$\psi \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \xi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - m^2 \psi \xi = 0, \quad (126)$$

dividindo por $\psi\xi$, obtemos

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - m^2 = 0, \quad (127)$$

como estas equações são independentes, podemos separar e resolver para cada variável separadamente

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = -\omega_n^2, \quad (128)$$

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \omega_n^2 + m^2 = -k^2, \quad (129)$$

lembrando que estamos no tempo Euclidiano, onde $\omega_n^2 = -k_0^2$ a equação (A.5) fica da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \psi \quad (130)$$

Cujas soluções são

$$\xi(\tau) \propto e^{i\omega_n \tau}, \quad (131)$$

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (132)$$

Aplicando as condições de contorno periódicas $\xi(0) = \xi(\beta)$ para a equação (131), obtemos a seguinte expressão

$$e^{i\omega_n \beta} = 1 \iff \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (133)$$

observe que n podem assumir qualquer valor discreto, isto é, $n \in \mathbb{Z}$.

Aplicando as condições de contorno periódicas $\psi(0) = \psi(L)$ para a equação (A.8), obtemos a seguinte expressão

$$A = A\cos(kL) + B\sin(kL) \quad (134)$$

para que isso seja uma expressão válida, temos a condição que

$$k = \frac{2\pi n}{L} \quad (135)$$

observe que n podem assumir qualquer valor discreto, isto é, $n \in \mathbb{Z}$.

Aplicando as condições de contorno de Dirichlet $\psi(0) = \psi(L) = 0$ para a equação (A.8), a primeira parte da condição implica que $A = 0$, já a segunda temos

$$B\sin(kL) = 0 \quad (136)$$

a solução dessa equação implica que

$$k = \frac{\pi l}{L}, \quad (137)$$

note que se $l = 0$ temos a solução trivial e as solução para $l < 0$ são as mesmas que para $l > 0$. Assumindo apenas valores discretos temos que o domínio é $l \in \mathbb{N}_{>0}$.

APÊNDICE B – Expressão da massa efetiva para o caso $2 + 1$ sem compactificação

Usando o mesmo princípio do capítulo 3.1, a expressão para a massa em $D = 3$ é a seguinte

$$M^2(T) = m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2} + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{k^2 + m^2}/T} - 1}, \quad (138)$$

onde $D = 3 - 2\epsilon$, $\lambda \rightarrow \lambda' \left(\frac{\mu^2 e^\gamma}{4\pi}\right)^{3/2 - D/2}$ no esquema \overline{MS} . Neste caso $D = 3$ o resultado para a última integral (B.1) é analítica explicitamente. O resultado obtido para a massa efetiva é

$$M^2(T) = m^2 - \frac{\lambda m}{8\pi} - \frac{\lambda}{4\pi} T \ln(1 - e^{-m/T}). \quad (139)$$

Como em $D = 3$ o acoplamento λ tem unidade de energia, é conveniente definir $\lambda \rightarrow \bar{\lambda} m$. Obtemos assim que a massa efetiva (sem compactificação espacial) à temperatura finita em $D = 3$ fica dada por

$$M^2(T) = m^2 - \frac{\bar{\lambda} m^2}{8\pi} - \frac{\bar{\lambda} m}{4\pi} T \ln(1 - e^{-m/T}). \quad (140)$$