



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Anderson Mendonça da Silva

**Aplicação da biblioteca de múltipla precisão na investigação de  
caos em trajetórias de partículas em torno de buracos negros**

Rio de Janeiro

2012

Anderson Mendonça da Silva

**Aplicação da biblioteca de múltipla precisão na investigação de caos em trajetórias de partículas em torno de buracos negros**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.



Orientador: Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea

Rio de Janeiro

2012

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

S586a Silva, Anderson Mendonça da.  
Aplicação da biblioteca de múltipla precisão na investigação de caos em trajetórias de partículas em torno de buracos negros / Anderson Mendonça da Silva. - 2012.  
96 f. : il.

Orientador: James Ewan Faskin Skea.  
Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Buracos negros (Astronomia) – Partículas – Programas de computador – Teses. 2. Relatividade geral (Física) – Teses. 3. Comportamento caótico nos sistemas – Teses. 4. Runge-Kutta, Fórmulas de – Teses. I. Skea, James Ewan Faskin. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 524.88:004.42

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Anderson Mendonça da Silva

**Aplicação da biblioteca de múltipla precisão na investigação de caos em trajetórias de partículas em torno de buracos negros**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de Outubro de 2012.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. James Ewan Faskin Skea (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Luiz Guilherme Silva Duarte  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Joras  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2012

## DEDICATÓRIA

A Deus, pelo dom da vida; aos meus pais pelo aprendizado de humildade, exemplo de amor e fé; e à minha esposa Jessica, companheira e amiga.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me fazer louco e fraco. Pelo contrário, Deus escolheu as coisas loucas do mundo para confundir os sábios; e Deus escolheu as coisas fracas do mundo para confundir as fortes. (1º Coríntios 1:27)

Agradeço ao meu professor e orientador Dr. James Skea (Jim), por entender minhas limitações de tempo, oferecendo-me a oportunidade de continuar estudando e me aperfeiçoando, oportunidade que outros não me concederam e, com paciência, fez-me capaz de realizar este trabalho.

Agradeço a minha amada esposa Jessica pelo carinho, pela compreensão e pelo ânimo nos momentos das minhas quase desistências.

Aos meus pais José Carlos e Monica pela educação que me ofereceram, pelo esforço e abnegação de tantos anos, pelo carinho e amor incondicional. Aproveito esta oportunidade para dizer AMO MUITO VOCÊS.

Aos meus colegas da pós graduação que junto compartilhamos o desafio de nos tornarmos pesquisadores.

Aos professores da pós graduação pelos ensinamentos e experiências transmitidos com muito empenho e qualidade.

Aos meus colegas de trabalho da Fiscalização Administrativa do Batalhão Central de Manutenção e Suprimento do Exército Brasileiro.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, possibilitaram a realização deste trabalho.

A maturidade começa a manifestar-se  
quando sentimos que nossa preocupação  
é maior pelos demais que por nós mesmos.

*Albert Einstein*

## RESUMO

SILVA, A. M. *Aplicação da biblioteca de múltipla precisão na investigação de caos em trajetórias de partículas em torno de buracos negros*. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

O movimento de partículas massivas imersas em um campo magnético externo a um buraco negro pode ser determinado pelo formalismo hamiltoniano adaptado à Relatividade Geral, com o tempo próprio definido como variável independente. Esses sistemas dinâmicos, em geral, não são integráveis, possibilitando o surgimento de movimentos caóticos. Por isso é interessante utilizar métodos numéricos de integração precisos e eficientes para determinar as trajetórias das partículas. O presente trabalho tem como objetivo principal desenvolver programas que sejam simultaneamente rápidos e altamente precisos, com um nível de acurácia adaptável às necessidades. Por esse fim, foi implementado um integrador de equações diferenciais baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem, usando C++ e a biblioteca de múltipla precisão MPFR. O programa foi comparado com implementações equivalentes em dupla precisão em C e em Maple, mostrando-se mais preciso do que a primeira, e mais rápido do que a segunda. Como aplicação, o programa foi usado para investigar caos em trajetórias de partículas em torno de buracos negros.

Palavras-chave: Buracos negros. Caos. Computação de alto desempenho. Método de Runge-Kutta.

## ABSTRACT

SILVA, A, M. *Application of multiple precision libraries in chaos investigation of particle trajectories around black holes*. 2012. 96 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

The motion of massive particles in an external magnetic field around a black hole can be found using the Hamiltonian formalism adapted for General Relativity, with the particle's proper time serving as the independent variable. The resulting dynamical systems are, in general, non-integrable, opening up the possibility of chaotic motion. It is therefore interesting to develop and apply numerical integration methods which are both efficient and precise for calculating the particle trajectories. The main aim of the work presented in this dissertation is to develop programs which are both fast and highly accurate, with a precision which can be adapted according to the application and needs of the user. To this end, we have implemented a program for integrating differential equations based on the fourth-order Runge-Kutta method, using C++ and the multiple precision library MPFR. The program was compared with equivalent implementations in double precision C and Maple, and showed greater accuracy than the former, while being faster than the latter at the same level of precision. As a physical application, the program was used to investigate chaos in particle trajectories around black holes.

Keywords: Black holes. Chaos. High-performance computing. Runge-Kutta method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Geodésicas nulas e cones de luz da solução de Schwarzschild: coordenadas de Schwarzschild. . . . .	20
Figura 2	- Geodésicas e cones de luz da solução de Schwarzschild em coordenadas Eddington-Finkelstein avançadas. . . . .	21
Figura 3	- Geodésicas e cones de luz da solução de Schwarzschild em coordenadas Eddington-Finkelstein retardadas. . . . .	21
Figura 4	- Diagrama de espaço-tempo da solução de Kruskal. . . . .	22
Figura 5	- Horizontes de eventos, limite estacionário e singularidade da solução de Kerr. . . . .	26
Figura 6	- Partícula livre em torno de um Buraco Negro de Schwarzschild. . . . .	66
Figura 7	- Movimento de uma partícula livre em torno de um BN de Schwarzschild, planos equatorial (esquerda) e poloidal (direta). . . . .	67
Figura 8	- Partícula livre, girando no mesmo sentido do Buraco Negro. . . . .	69
Figura 9	- Movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	70
Figura 10	- Movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	71
Figura 11	- Movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	72
Figura 12	- Movimento de uma partícula livre, girando no sentido contrário a um Buraco Negro. . . . .	74
Figura 13	- Movimento de uma partícula livre girando no sentido contrário a um Buraco Negro. . . . .	75
Figura 14	- Movimento de uma partícula livre girando no sentido contrário a um Buraco Negro. . . . .	76
Figura 15	- Movimento de uma partícula livre girando no sentido contrário a um Buraco Negro. . . . .	77
Figura 16	- Plano equatorial do movimento de uma partícula livre em torno de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	78
Figura 17	- Partícula em um campo magnético externo a um Buraco Negro de Schwarzschild. . . . .	79
Figura 18	- Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Schwarzschild. . . . .	80
Figura 19	- Partícula em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	83

Figura 20 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	84
Figura 21 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	85
Figura 22 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr. . . . .	86
Figura 23 - Seção de Poincaré . . . . .	87

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Valores aproximados do raio, massa e horizonte de eventos de alguns objetos. . . . .	18
Tabela 2	- Oscilador harmônico com frequência angular igual a 1. . . . .	63
Tabela 3	- Tempo médio em segundos para calcular de $10^4$ a $10^6$ de iterações. . . .	64
Tabela 4	- Condições iniciais para o movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um BN de Kerr. . . . .	68
Tabela 5	- Condições iniciais para o movimento de uma partícula livre, girando em sentido contrário a um BN de Kerr. . . . .	73
Tabela 6	- Condições iniciais para o movimento de uma partícula, carregada em um campo magnético externo a um BN de Kerr. . . . .	81

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
1	<b>BURACOS NEGROS</b>	16
1.1	<b>Introdução</b>	16
1.2	<b>Métrica de Schwarzschild</b>	18
1.2.1	<u>Singularidade e Horizonte de Eventos</u>	18
1.3	<b>A Métrica de Kerr</b>	22
1.3.1	<u>Propriedades da Solução de Kerr</u>	23
1.3.2	<u>Singularidade e horizonte de eventos</u>	25
1.3.3	<u>Ergosfera</u>	26
1.4	<b>Outras Métricas</b>	26
2	<b>MECÂNICA APLICADA À RELATIVIDADE GERAL</b>	29
2.1	<b>Introdução</b>	29
2.2	<b>Vínculos</b>	29
2.3	<b>Coordenadas Generalizadas e Lagrangiana</b>	29
2.4	<b>Cálculo Variacional</b>	30
2.5	<b>Princípio de Hamilton e Equação de Lagrange</b>	32
2.6	<b>As Equações de Hamilton</b>	32
2.7	<b>Mecânica Analítica Aplicada à Relatividade Geral</b>	33
3	<b>CAMPO EXTERNO</b>	37
3.1	<b>Introdução</b>	37
3.2	<b>O Formalismo de Tétradas na Relatividade Geral</b>	37
3.3	<b>Transformações de Tétradas</b>	39
3.4	<b>Derivadas Direcional e Covariante</b>	39
3.5	<b>Tétradas de Newman-Penrose</b>	41
3.6	<b>Tensor Eletromagnético</b>	42
3.7	<b>O Campo Externo</b>	44
3.8	<b>A Equação de Teukolsky</b>	46
3.9	<b>Potencial-Vetor</b>	49
4	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO</b>	53
4.1	<b>Introdução</b>	53
4.2	<b>O método de Euler</b>	53
4.3	<b>Método de Euler Aperfeiçoado</b>	54
4.4	<b>Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem</b>	54
4.5	<b>Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem</b>	56
4.6	<b>Ordem das Equações</b>	60
4.7	<b>Tipos de Linguagens e Bibliotecas de Múltipla Precisão</b>	61

4.8	<b>Um Exemplo Simples: o Oscilador Harmônico</b> . . . . .	62
5	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	65
5.1	<b>Introdução</b> . . . . .	65
5.2	<b>Partícula Livre</b> . . . . .	65
5.2.1	<u>Buraco Negro de Schwarzschild</u> . . . . .	66
5.2.2	<u>Buraco Negro de Kerr: Partícula Girando no Mesmo Sentido</u> . . . . .	68
5.2.3	<u>Buraco Negro de Kerr: Partícula Girando em Sentido Contrário</u> . . . . .	73
5.3	<b>Partícula em um Campo Magnético Externo</b> . . . . .	79
5.3.1	<u>Buraco Negro de Schwarzschild</u> . . . . .	79
5.3.2	<u>Buraco Negro de Kerr</u> . . . . .	81
	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	88
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	90
	<b>APÊNDICE A</b> – Método de Runge-Kutta de quarta ordem com a biblioteca MPFR aplicada ao oscilador harmônico unidimensional . . . . .	93
	<b>APÊNDICE B</b> – Método de Runge-Kutta de quarta ordem com a biblioteca MPFR acompanhado do <i>wrapper</i> aplicada ao oscilador harmônico unidimensional . . . . .	95

## INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Geral (RG), formulada por Einstein, conduziu a uma visão geométrica do espaço-tempo em que a métrica,  $g_{\mu\nu}$ , determina sua curvatura. A RG tem como fundamento as equações de campo de Einstein (EINSTEIN, 1915) que podem ser usadas para determinar a geometria do espaço-tempo em torno de objetos massivos, tais como Buracos Negros (BNs).

Os BNs são corpos que produzem um campo gravitacional tão intenso que nada pode escapar deles, nem mesmo a luz. No seu entorno existe uma fronteira que separa duas regiões: a região em que pode haver escape (região externa ao BN), e a região onde o escape não pode ocorrer (região interna). Esta fronteira é denominada o *horizonte de eventos*. Um observador que ultrapasse o horizonte de eventos não pode mais se comunicar com a região externa. Os BNs contêm uma *singularidade* escondida no interior do horizonte de eventos. O termo “escondido” deve-se ao fato de que um observador na região externa jamais receberá um sinal vindo da região interna e, portanto, da singularidade. Em BNs em rotação e/ou com carga elétrica, pode não haver formação de horizonte de eventos e a singularidade ficaria descoberta. Este fenômeno é denominado singularidade nua (PENROSE, 1969).

Várias soluções das equações de Einstein já foram encontradas (STEPHANI et al., 2009). As soluções que descrevem a geometria em torno de concentrações de massa, por exemplo, podem ser assintoticamente planas, ou seja, à medida que se afaste da massa, a métrica se aproxima cada vez mais da métrica de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu}$ , da Relatividade Restrita. Com a inclusão de uma constante cosmológica (EINSTEIN, 1917),  $\Lambda$ , surgem mais dois tipos importantes de comportamento assintótico: com  $\Lambda > 0$  espera-se que o espaço-tempo a grandes distâncias da fonte seja descrito pela métrica de de Sitter (DE SITTER, 1917), um espaço-tempo com curvatura constante e positiva; se  $\Lambda < 0$ , o análogo com curvatura negativa, o espaço-tempo é denominado Anti de Sitter. A consideração de campos além do campo gravitacional (por exemplo um campo eletromagnético) abre a possibilidade de soluções mais gerais. Uma vez que se tenha um espaço-tempo específico é interessante estudar como a geometria influencia o comportamento de partículas teste. No caso de espaços-tempo associados aos BNs, o movimento de partículas pode ser descrito pelos formalismos lagrangiano ou hamiltoniano aplicado à RG, ou ainda diretamente pelas equações geodésicas, que geram as equações de movimento da partícula na forma de um sistema dinâmico. Porém, devido à complexidade destas equações, na maioria das vezes, não é possível encontrar soluções analíticas. Por isso, é necessário usar métodos numéricos para calcular as trajetórias.

Métodos numéricos de integração são formas de solução de equações diferenciais partindo-se apenas do conhecimento das condições de contorno do sistema, sem a ne-

cessidade de uma solução geral. Diferente de métodos que fornecem soluções analíticas, métodos numéricos não são exatos: sua precisão depende do método de integração escolhido e o número de algarismos retidos nos cálculos. Hoje em dia, esses cálculos são realizados quase que exclusivamente em computadores.

Devido à não-linearidade da RG, as equações de Einstein podem produzir sistemas dinâmicos caóticos<sup>1</sup>. É evidente que, se a trajetória calculada for altamente sensível às condições iniciais, é extremamente importante que o método de integração seja capaz de resolver as equações com o grau de precisão adequado. Outro ponto importante a ser levado em conta é o tempo de execução do programa, talvez não seja viável utilizar um programa que produza soluções com alta precisão, se o tempo de execução for muito grande.

Um fator que afeta o tempo de execução de um aplicativo é a linguagem em que está escrito. De modo geral, linguagens de computação são divididas em dois tipos: linguagens interpretadas e compiladas. Processadores efetuam cálculos com base em linguagem de máquina, por isso as chamadas linguagens de alto nível (as linguagens usadas por programadores) precisam ser traduzidas em instruções para que o processador as execute. Numa linguagem interpretada (BASIC), cada comando é traduzido e executado na hora de “rodar” o programa. Nas linguagens compiladas (C e C++) os comandos são traduzidos uma única vez pelo compilador, gerando um arquivo executável, já em linguagem de máquina.

Mesmo levando em conta o tempo de compilação, aplicativos baseados em linguagens compiladas quase sempre são mais rápidos, pois as linguagens interpretadas sofrem com a sobrecarga da tradução do código-fonte em linguagem de máquina durante processo de execução. Porém linguagens compiladas geralmente sofrem com uma limitação: a quantidade de algarismos significativos que podem armazenar.

Para combinar as vantagens de alta precisão e rapidez na execução, é possível usar uma linguagem compilada, mas com extensões que possibilitem manipular números (tanto inteiros quanto de ponto flutuante) com mais algarismos do que as especificações da linguagem original permitem. C e C++ têm, nas definições das linguagens, um objeto **structure** - [estrutura] que permite que o usuário construa novos tipos de variáveis como, por exemplo, números complexos. O usuário, então, pode escrever seus próprios procedimentos para manipular esses objetos. Pode-se definir estruturas que armazenem inteiros com mais do que os 16 dígitos usuais: usando um **structure** com dois inteiros, cada um representando 16 dígitos, tem-se um inteiro de 32 dígitos.

Felizmente, já existem bibliotecas de aritmética de múltipla (arbitrária) precisão. Essas bibliotecas definem estruturas que permitem a determinação de números inteiros

---

<sup>1</sup> Embora não exista um consenso sobre a definição matemática de caos, uma característica comum a sistemas caóticos é a sensibilidade com respeito às condições iniciais.

e de ponto flutuante com precisões arbitrárias, bem como uma vasta gama de operações e funções com esses números. Duas bibliotecas de *software* livre muito populares são: a biblioteca GMP (*GNU Multiple Precision*) - [GNU Precisão Múltipla], para C e MPFR (*Multiple Precision Floating-Point Reliable*) - [Confiável Múltipla Precisão em Ponto-Flutuante] para C e C++. MPFR tem um *wrapper* - [envólucro] muito útil para C++ e, principalmente por esse motivo, foi a biblioteca escolhida neste trabalho.

O objetivo deste trabalho, portanto, é calcular as trajetórias de partículas em torno de alguns tipos de BNs com alta precisão. Foi implementado o método de Runge-Kutta de quarta ordem em várias linguagens: Maple, C padrão, C++ com MPFR (com e sem *wrapper*) e foram feitos testes comparativos de eficiência e velocidade. Usando C++ com MPFR e *wrapper*, foram inicialmente calculadas as trajetórias de partículas teste com pequenas diferenças nas condições iniciais, para as métricas de Schwarzschild e Kerr sem nenhum campo adicional. Para essas configurações espera-se trajetórias bem comportadas, que servem para testar a estabilidade dos programas. Finalmente foi acrescentado um campo magnético externo para o qual espera-se trajetórias caóticas, situação em que a computação de alta precisão deva ser relevante.

A fim de facilitar a compreensão, o presente trabalho é dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 são discutidas as principais propriedades e características das métricas de Schwarzschild e Kerr associadas a BNs; os horizontes de eventos são definidos e as singularidades atribuídas a estas métricas estudadas. São apresentadas outras métricas e discutidas algumas consequências do acréscimo da constante cosmológica nas equações de Einstein.

O capítulo 2 trata-se da aplicação da mecânica clássica em RG, a fim de generalizar os formalismos lagrangiano e hamiltoniano para obter as equações de movimento associadas a partículas em torno de um BN.

No capítulo 3 é apresentado o formalismo de tétradas aplicado à RG. As tétradas nulas do formalismo de Newman Penrose são obtidas, e um dipolo magnético associado ao disco de acreção que orbita ao redor de um BN é descrito.

No capítulo 4 são discutidos métodos numéricos de integração, com ênfase no método de Runge-Kutta de quarta ordem, e a aplicação destes métodos a equações diferenciais de ordem arbitrária. As principais características das linguagens de programação são abordadas, bibliotecas de múltipla precisão apresentadas e, ao final, estuda-se um exemplo que demonstra a utilidade e eficiência da biblioteca.

O capítulo 5 apresenta os resultados da integração numérica das equações de movimento de partículas livres em torno de BNs de Schwarzschild e Kerr, bem como apresenta resultados similares para partículas carregadas movendo-se em um campo magnético gerado por um dipolo magnético associado a um disco de acreção.

Por fim, no capítulo 6, são feitas as considerações finais, conclusões e perspectivas futuras para a aplicação da metodologia em outros trabalhos.

# 1 BURACOS NEGROS

## 1.1 Introdução

Em 1915, Albert Einstein apresentou a Teoria da Relatividade Geral, que tem como fundamento suas equações de campo<sup>2</sup>:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor e escalar de Ricci respectivamente e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. Insatisfeito com a falta de uma solução cosmológica estática para suas equações, em 1917, Einstein acrescentou uma constante, a constante cosmológica,  $\Lambda$ , às equações. Assim, as equações tornam-se:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2)$$

As equações de campo de Einstein podem ser usadas para determinar o tensor métrico e conseqüentemente o elemento de linha  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  ligado à geometria de um espaço-tempo. Uma solução cosmológica de equação (2), hoje conhecida como o Universo Estático de Einstein, equilibra a atração gravitacional da matéria com a constante cosmológica repulsiva. Uma forma da métrica dessa solução é:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{1 - C^2r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3)$$

onde  $C$  é constante,  $t$  uma coordenada tipo tempo;  $r$  é a coordenada radial; e  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas angulares.

Também em 1917, Willem de Sitter, refazendo os cálculos de Einstein, encontrou outra solução cosmológica das novas equações, cuja métrica é:

$$ds^2 = (1 - Kr^2) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - Kr^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4)$$

onde  $K \equiv \Lambda/3$ .

A solução de de Sitter pode ser interpretada como um universo vazio (vácuo) em expansão caso  $\Lambda > 0$  ou em contração caso  $\Lambda < 0$ . Por ser vazio, o modelo de de Sitter não pode descrever o universo no seu estado atual, mas pode servir em casos onde a influência da matéria seja irrelevante.

---

<sup>2</sup> Neste trabalho, foram usadas unidades geométricas ( $c = G = 1$ ), letras gregas para índices referentes coordenadas e -2 como a assinatura da métrica.

Com a observação do afastamento das galáxias através do *redshift* - [desvio para o vermelho] pelo astrônomo americano Edwin Hubble (HUBBLE, 1929), em 1929, chegou-se à conclusão que o universo na verdade se expandia e, por isso, a constante cosmológica foi abandonada.

No fim dos anos 90, observações sugeriram que a expansão do universo na verdade é acelerada (RIESS et al., 1998; PERMUTTER et al., 1999), e a constante cosmológica ( $\Lambda > 0$ ) ressurgiu como uma possível explicação deste fato. Agora,  $\Lambda$  é normalmente vinculada à densidade de energia do vácuo. A discussão sobre a causa da expansão acelerada está em aberto até hoje.

Além das soluções cosmológicas, a RG também pode ser usada para obter a métrica do espaço-tempo em torno de corpos massivos. Em regiões muito afastadas destes corpos (limite assintótico), a métrica tende ao pano de fundo do universo. A possibilidade mais comum é supor que esse pano de fundo seja plano e a métrica  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ . Na presença da constante cosmológica, o pano de fundo não é mais plano, mas ligado à métrica de de Sitter, um espaço-tempo com curvatura constante.

A RG prevê que qualquer objeto massivo gere efeitos de curvatura no espaço-tempo ao seu redor: quanto maior a sua massa, maiores serão esses efeitos. Porém, não é unicamente o valor da massa que define a formação de um BN. Pode haver, por exemplo, estrelas com massas muito grandes que não formem necessariamente BNs, como também pode haver BNs formados a partir de colisões de partículas subatômicas.

Pode-se dizer que um BN se forma quando o horizonte de eventos (termo que será discutido posteriormente) se encontra além das dimensões do corpo. Para que isso ocorra é necessário que a concentração de massa do objeto seja suficientemente grande. A tabela a seguir faz uma comparação entre o raio físico, a massa e os possíveis horizontes de eventos de alguns objetos da natureza<sup>3</sup> (OROSZ et al., 2011; BOWER, 2006).

Os BNs podem ser formados por estrelas que entrem em colapso gravitacional<sup>4</sup>. A métrica que descreve o estado final do BN dependerá dos atributos da estrela original (massa, carga, momento angular) e do universo em que está imerso. Corpos grandes não tendem a acumular cargas significativas, mas momento angular é importante em evolução estelar. Por isso, é provável que a maior parte dos BNs formados por estrelas colapsadas seja determinada pela métrica de Kerr ou Kerr-de-Sitter, que descrevem objetos em rotação. Nos BNs em rotação acredita-se que formam os chamados discos de acreção que são estruturas achatadas com simetria axial compostas de materiais difusos em movimento orbital ao redor do BN. Este disco pode gerar um campo eletromagnético, por exemplo, um dipolo magnético próximo ao horizonte de eventos.

---

<sup>3</sup> Não foi encontrado na literatura uma estimativa para o raio de Cygnus X-1.

<sup>4</sup> Fenômeno que ocorre quando uma estrela deixa de realizar fusões nucleares de seus elementos químicos já esgotados, sucumbindo sobre si mesmo.

Tabela 1 - Valores aproximados do raio, massa e horizonte de eventos de alguns objetos.

Corpo	Massa (Kg)	Raio (m)	Horizonte de Eventos (m)
Próton	$1,67 \times 10^{-27}$	$8,70 \times 10^{-16}$	$2,48 \times 10^{-54}$
Terra	$5,97 \times 10^{24}$	$6,37 \times 10^6$	$8,84 \times 10^{-3}$
Sol	$1,99 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^8$	$2,95 \times 10^3$
Cygnus X-1	$2,95 \times 10^{31}$	-	$4,37 \times 10^4$
Sgr A*	$8,16 \times 10^{36}$	$\leq 1,61 \times 10^{11}$	$1,21 \times 10^{10}$

Fonte: O autor 2012.

Este capítulo tem como objetivo apresentar as métricas de Schwarzschild e Kerr, discutir algumas propriedades relevantes a este trabalho e, ao final, citar algumas métricas que descrevem outros tipos de BNs e suas características.

## 1.2 Métrica de Schwarzschild

A primeira solução exata para as equações de Einstein foi encontrada pelo alemão Karl Schwarzschild em janeiro de 1916 (SCHWARZSCHILD, 1916), período em que servia ao exército alemão na Primeira Guerra Mundial. A métrica de Schwarzschild é válida para o espaço-tempo em torno de uma massa  $M$  (massa de Schwarzschild) com simetria esférica, estática no vácuo. O elemento de linha desta métrica é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (5)$$

onde  $(t, r, \theta, \phi)$  são as coordenadas de Schwarzschild e  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . A solução de Schwarzschild é assintoticamente plana, ou seja, para o limite  $r \rightarrow \infty$  a métrica  $g_{ij} \rightarrow \eta_{ij}$ .

### 1.2.1 Singularidade e Horizonte de Eventos

Ao examinar a geometria vinculada à métrica de Schwarzschild, nota-se que há, aparentemente, duas singularidades, uma em  $r = 0$  e outra em  $r = 2M$ . Para  $r = 0$ , as componentes da métrica  $g_{00}$  e  $g_{11}$  tendem a infinito e a zero respectivamente; para  $r = 2M$ ,  $g_{00}$  e  $g_{11}$  tendem a zero e a infinito. Para verificar se estas singularidades são consequências da escolha das coordenadas ou se são singularidades físicas, é necessário utilizar um objeto que seja independente do sistema de coordenadas (por exemplo, um escalar). Um escalar

que pode ser formado a partir das componentes do tensor de Riemann,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ , é o escalar de Kretschmann:

$$k \equiv R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (6)$$

A forma de  $k$  mostra que existe uma singularidade física (singularidade do espaço tempo) em  $r = 0$ . Porém, a aparente singularidade em  $r = 2M$  é devida à escolha das coordenadas. Deduz-se, então, que o sistema de coordenadas de Schwarzschild não é bom na superfície  $r = 2M$ . Contudo, essas coordenadas são úteis para descrever trajetórias de partículas em regiões de campo fraco, ou seja, longe da fonte.

Uma forma de mostrar o comportamento problemático associado ao sistema de coordenadas de Schwarzschild é estudar o movimento radial ( $d\theta = d\phi = 0$ ) de um fóton perto de  $r = 2M$ . Para isso, utiliza-se geodésicas tipo luz ( $ds^2 = 0$ ), parametrizadas por  $\lambda$  (parâmetro afim que será discutido no capítulo seguinte). Com essas condições impostas tem-se:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \Rightarrow dt = \pm \frac{r dr}{r - 2M}, \quad (7)$$

com soluções:

$$t = \pm(r + 2M \ln |r - 2M|) + c, \quad (8)$$

onde  $c$  é a constante de integração. O sinal positivo representa os fótons emergentes ( $r \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ ) e o sinal negativo os imergentes. A figura 1, mostra as geodésicas emergentes e imergentes próximas à superfície  $r = 2M$ .

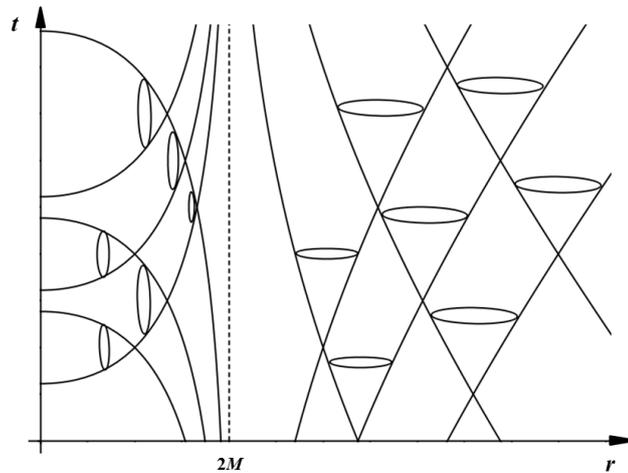
Esta superfície divide o espaço-tempo em duas regiões. Na região interna ( $r < 2M$ ), os fótons imergentes inevitavelmente caem na singularidade, os fótons emergentes não ultrapassam a fronteira  $r = 2M$  e os cones de luz estão virados em direção à singularidade. Na região externa ( $r > 2M$ ) os fótons não cruzam a fronteira e os cones de luz ficam mais estreitos à medida que se aproximam de  $r = 2M$ . Arthur Eddington (EDDINGTON, 1924) e David Finkelstein (FINKELSTEIN, 1958) tentaram resolver o problema do sistema de coordenadas definindo uma nova coordenada tipo tempo  $\bar{t}$ , tal que:

$$\bar{t} \equiv t \pm 2M \ln |r - 2M|, \quad (9)$$

com o sinal positivo representando as coordenadas de Eddington-Finkelstein avançadas e o sinal negativo, as coordenadas de Eddington-Finkelstein retardadas.

A idéia deste novo sistema de coordenadas é fazer com que os fótons emergentes (sinal positivo) e imergentes (sinal negativo) sigam retas  $\bar{t} = \pm r + c$ . O espaço-tempo de

Figura 1 - Geodésicas nulas e cones de luz da solução de Schwarzschild: coordenadas de Schwarzschild.



Fonte: D'INVERNO, 1992, p. 217. Adaptado pelo autor.

Schwarzschild neste novo sistema de coordenadas é dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 \mp \frac{4M}{r} d\bar{t}d\bar{r} - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) d\bar{r}^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (10)$$

observando a métrica (10), nota-se que não há mais singularidade em  $r = 2M$ .

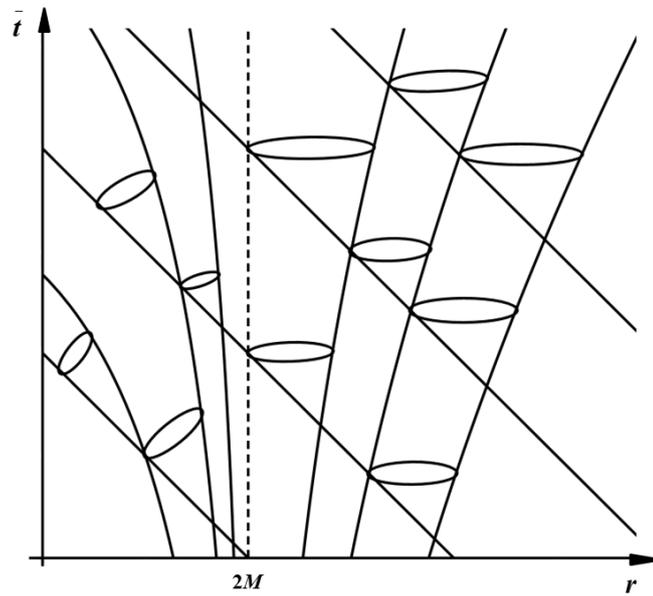
O sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein representa uma extensão analítica das coordenadas de Schwarzschild pois coincidem com essas na região  $r > 2M$ , todavia incorporam também uma descrição contínua para  $r \leq 2M$ . Contudo, próximo a  $r = 2M$ , ainda existem geodésicas com comportamento anômalo (veja figuras 2 e 3).

O problema perdurou bastante tempo, até que em 1960 Martin Kruskal (KRUSKAL, 1960) e George Szekeres (SZEKERES, 1960) encontraram um sistema de coordenadas que não é singular em  $r = 2M$ . As coordenadas de Kruskal-Szekeres  $\{u, v\}$  são obtidas de  $t$  e  $r$  pela transformação:

$$\begin{cases} u = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M}, \\ v = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M}, \end{cases} \quad r > 2M,$$

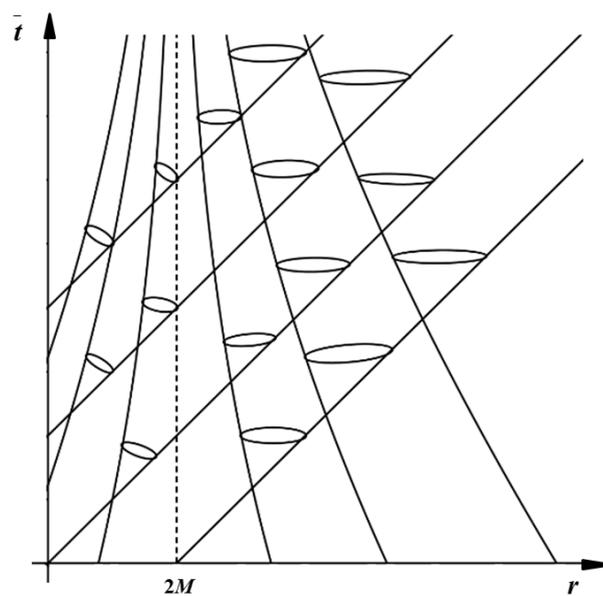
$$\begin{cases} u = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh \frac{t}{4M}, \\ v = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh \frac{t}{4M}, \end{cases} \quad r < 2M.$$

Figura 2 - Geodésicas e cones de luz da solução de Schwarzschild em coordenadas Eddington-Finkelstein avançadas.



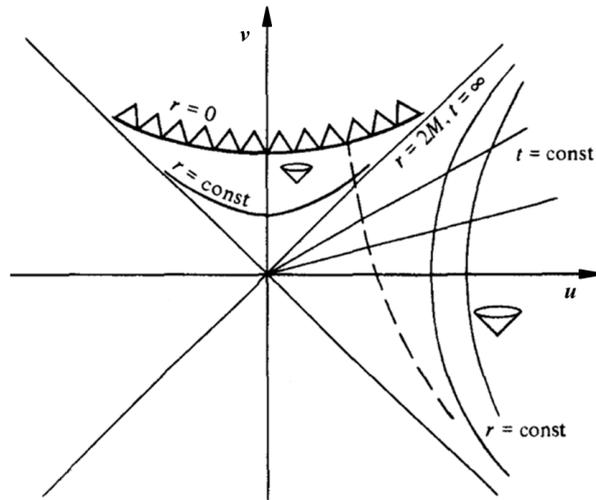
Fonte: D'INVERNO, 1992, p. 220. Adaptado pelo autor.

Figura 3 - Geodésicas e cones de luz da solução de Schwarzschild em coordenadas Eddington-Finkelstein retardadas.



Fonte: D'INVERNO, 1992, p. 222. Adaptado pelo autor.

Figura 4 - Diagrama de espaço-tempo da solução de Kruskal.



Fonte: SCHUTZ, 2009, p. 302. Adaptado pelo autor.

O elemento de linha do espaço-tempo de Schwarzschild, neste sistema de coordenadas é:

$$ds^2 = \frac{3M^3}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) - r^2 d\Omega^2, \quad (11)$$

com  $r$  dada implicitamente por:

$$\left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M} = u^2 - v^2. \quad (12)$$

A figura 4 mostra o diagrama do espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas Kruskal-Szekeres.

A superfície  $r = 2M$  é representada por uma reta que forma um ângulo de  $45^\circ$  com os eixos coordenados  $u$  e  $v$ , a geodésica é a linha tracejada. Como os fótons (ou qualquer outra partícula) não podem escapar do cone de luz, que neste sistema de coordenadas está sempre a  $45^\circ$  do eixo  $u$ , uma vez ultrapassando a superfície  $r = 2M$ , não podem mais voltar. Assim fica definida uma fronteira limite conhecida como o horizonte de eventos.

### 1.3 A Métrica de Kerr

A métrica de Kerr descreve a geometria do espaço-tempo ao redor de um corpo massivo em rotação. Essa famosa solução exata foi descoberta em 1963 pelo matemático neozelandês Roy Kerr (KERR, 1963). O elemento de linha em coordenadas Boyer-Lindquist

$(t, r, \theta, \phi)$  é:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4Mar}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{A}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (13)$$

onde  $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$  e  $A \equiv (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$ .

### 1.3.1 Propriedades da Solução de Kerr

A métrica de Kerr depende de dois parâmetros: a massa  $M$  e uma constante real,  $a$ . As componentes da métrica são independentes das coordenadas  $t$  e  $\phi$  e, por isso, a solução é dita estacionária e axialmente simétrica. Nota-se também que a métrica não é invariante com respeito à mudança  $\phi \rightarrow -\phi$ , mas é invariante frente à mudança simultânea de coordenadas:

$$t \rightarrow -t, \quad \phi \rightarrow -\phi. \quad (14)$$

A mesma análise se faz para a mudança simultânea:

$$t \rightarrow -t, \quad a \rightarrow -a, \quad (15)$$

sugerindo que o parâmetro  $a$  esta ligado à velocidade angular do BN.

Definindo as coordenadas tipo cartesiano (CHANDRASEKHAR; CHANDRASEKHAR, 1998):

$$\begin{aligned} x^0 &= u + r, \\ x &= r \sin \theta \cos \tilde{\phi} + a \sin \theta \sin \tilde{\phi}, \\ y &= r \sin \theta \sin \tilde{\phi} - a \sin \theta \cos \tilde{\phi}, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (16)$$

a métrica (13) pode ser escrita como:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} k^2, \quad (17)$$

onde

$$k \equiv (dx^0) - \frac{1}{r^2 + a^2} [r(xdx + ydy) + a(xdy - ydx)] - \frac{z}{r} dz, \quad (18)$$

e as variáveis  $u$  e  $\tilde{\phi}$  podem ser obtidos a partir de:

$$\begin{aligned} du &= dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \\ d\tilde{\phi} &= d\phi - \frac{a}{\Delta} dr. \end{aligned} \quad (19)$$

Definindo  $R^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta$  e fazendo a expansão para  $r \gg a$ , tem-se:

$$R = r + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{2r} - \frac{a^4 \sin^4 \theta}{8r^3} + \dots, \quad (20)$$

mostrando que  $R$  coincide com  $r$  assintoticamente, ou seja Schwarzschild é um caso particular de Kerr para  $a = 0$ . Vê-se que no limite  $R \rightarrow \infty$  as componentes da métrica de Kerr tendem às do espaço de Minkowski.

Expandindo a equação (17), em termos de potências de  $1/r$ , encontra-se:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \dots\right) (dx^0)^2 + \frac{4Ma}{r^3} (xdy - ydx) dx^0 + \dots \quad (21)$$

sugerindo que o momento angular,  $J$ , seja proporcional a  $Ma$ , em torno do eixo  $z$ . Para encontrar, definitivamente, a relação entre o momento angular do BN e o parâmetro  $a$ , pode-se utilizar a Integral de Komar <sup>5</sup> (WALD, 1984):

$$J = \frac{1}{16\pi} \oint_{S^2} dS_{\mu\nu} \nabla^\mu m^\nu, \quad (22)$$

onde:  $S^2$  é a 2-esfera;  $dS_{\mu\nu}$  é o elemento de área e  $m^\nu$  é o vetor de Killing definido como  $m^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^\nu$ . Desenvolvendo a integral, tem-se:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{16\pi} \oint_{S^2} dS_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu m^\beta = \frac{1}{16\pi} \oint_{S^2} dS_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha 3}^\nu \\ &= \frac{-Ma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{[a^4 - 3r^2 a^2 + a^2 (a^2 - r^2) \cos 2\theta - 6r^4] \sin^3 \theta}{(a^2 \cos 2\theta + a^2 + 2r^2)^2} d\theta d\phi \\ &= Ma. \end{aligned} \quad (23)$$

Uma outra propriedade da solução de Kerr está ligada à componente  $g_{00}$  da métrica. Anulando essa componente, tem-se:

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (24)$$

---

<sup>5</sup> exercício 6, capítulo 11 do livro: "General Relativity". Wald R. M. University of Chicago Press, 1984

que remete às raízes:

$$r_{s\pm} = M \pm (M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (25)$$

Esses dois valores de  $r$  correspondem às superfícies denominadas *limites estacionários*. Quando  $a = 0$ ,  $r_{s-}$  e  $r_{s+}$  coincidem com a singularidade e o horizonte de eventos de Schwarzschild, respectivamente.

### 1.3.2 Singularidade e horizonte de eventos

O escalar de Kretschmann do espaço-tempo de Kerr em coordenadas Boyer–Lindquist é:

$$k = \frac{48m^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} (r^2 + 4ar \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 - 4ar \cos \theta + a^2 \cos^2 \theta) \quad (26)$$

Observa-se que o espaço-tempo de Kerr tem uma singularidade física quando:

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (27)$$

Aplicando a transformação de coordenadas (16) à equação (27), a singularidade assume a forma:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0. \quad (28)$$

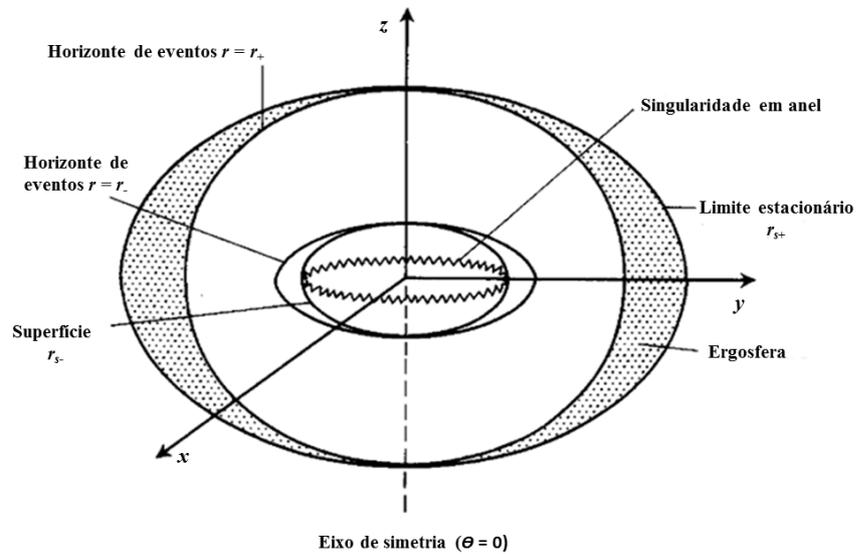
Diferente de Schwarzschild, a singularidade do espaço-tempo de Kerr é um anel circular de raio  $a$  no plano  $z = 0$ . Análogo ao espaço-tempo de Schwarzschild, a métrica de Kerr, em coordenadas Boyer-Lindquist, também exhibe singularidades devido ao sistema de coordenadas. Estas singularidades são observadas quando  $g_{11} \rightarrow \infty$ , ou seja quando

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0 \Rightarrow r = r_{\pm} \equiv M \pm (M^2 - a^2)^{1/2}. \quad (29)$$

Para  $a < M$ ,  $r_{\pm}$  definem duas superfícies que, quando  $a = 0$ , coincidem com a singularidade e o horizonte de eventos de Schwarzschild. As superfícies  $r = r_{\pm}$  correspondem a dois horizontes de eventos: o horizonte exterior,  $r_+$ , e o interior,  $r_-$ . Quando  $a = M$ , conhecido como o caso extremo de Kerr, os horizontes coincidem em  $r = M$ . Para os casos em que  $a > M$  não há formação de horizonte de eventos, a singularidade fica descoberta (singularidade nua) e o BN é descaracterizado.

Utilizando a transformação de coordenadas da equação (16) e a definição de  $R$ , é

Figura 5 - Horizontes de eventos, limite estacionário e singularidade da solução de Kerr.



Fonte: D'INVERNO, 1992, p. 255. Adaptado pelo autor.

possível mostrar que os horizontes de eventos  $r = r_{\pm}$  são elipsoides dados por:

$$\frac{x^2 + y^2}{r_{\pm}^2 + a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad (30)$$

### 1.3.3 Ergosfera

A região compreendida entre o horizonte de eventos externo  $r_+$  e o limite estacionário externo  $r_{s+}$  é denominado *ergosfera*. Nessa região, o campo gravitacional do BN arrasta tanto o espaço-tempo, que os fótons (ou qualquer outra partícula) são obrigados a girar no mesmo sentido que o BN. Partículas que entram na ergosfera podem escapar, extraindo energia do BN através do chamado processo Penrose.

A figura 5 mostra a singularidade e as várias superfícies de um BN em rotação:

## 1.4 Outras Métricas

As métricas de Schwarzschild e Kerr são métricas provenientes das equações de campo de Einstein com constante cosmológica nula. Outra métrica que tem a mesma origem é a métrica de Kerr-Newman (NEWMAN et al., 1965) que, além dos parâmetros  $M$  e  $a$  da solução de Kerr, apresenta um parâmetro,  $Q$ , ligado à carga elétrica intrínseca

ao BN. O elemento de linha associado à métrica de Kerr-Newman é matematicamente igual ao elemento de linha de Kerr com o acréscimo de  $Q^2$  a  $\Delta$ , ou seja,

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2. \quad (31)$$

Essa mudança não altera a natureza da singularidade, que continua sendo um anel circular, e tampouco altera o comportamento assintótica. Já os horizontes de eventos se tornam:

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2}, \quad (32)$$

que são definidos apenas quando  $M^2 \geq a^2 + Q^2$ .

A solução de Kerr-Newman não tem sido especialmente útil para descrever fenômenos físicos, pois observações não têm detectado uma carga apreciável em objetos astronômicos. Um caso particular da métrica de Kerr-Newman ocorre quando  $a = 0$ : essa métrica é conhecida como métrica de Reissner-Nordstrom (REISSENER, 1916).

A métrica mais geral associada aos BNs com parâmetros físicos reais<sup>6</sup> é a solução de Kerr-Newman-de-Sitter (CARTER, 2009) (KNdS). Essa solução apresenta um parâmetro adicional, que pode ser interpretado como uma constante cosmológica. O elemento de linha em coordenadas Boyer-Lindquist é:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\Delta_r - a^2 \sin^2 \theta \Delta_\theta}{\lambda^2 \Sigma} dt^2 + \frac{2a \sin^2 \theta [(r^2 + a^2) \Delta_\theta - \Delta_r]}{\lambda^2 \Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 \\ &- \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \frac{\sin^2 \theta [(r^2 + a^2)^2 \Delta_\theta - a^2 \sin^2 \theta \Delta_r]}{\lambda^2 \Sigma} d\phi^2, \end{aligned} \quad (33)$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) (r^2 + a^2) - 2Mr + Q^2, \\ \Delta_\theta &= 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \cos^2 \theta, \\ \lambda &= 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2. \end{aligned} \quad (34)$$

A singularidade física também ocorre quando  $\Sigma = 0$ . Os horizontes de eventos são as soluções reais positivas da equação:

$$\Delta_r = \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) (r^2 + a^2) - 2Mr + Q^2 = 0. \quad (35)$$

Como essa equação é de quarta ordem em  $r$ , pode haver até quatro raízes reais. Porém,

---

<sup>6</sup> Também existe a solução Kerr-NUT, mas não há uma interpretação física para o parâmetro NUT que aparece nessa métrica.

para valores físicos dos parâmetros existem, no máximo, três raízes reais e positivas e consequentemente três horizontes de eventos (RAYAN, 2007): por exemplo quando  $\Lambda > 0$ ,  $\Lambda^2 \ll 1$  e  $a^2 + Q^2 \ll M^2 \ll \Lambda^{-1}$ .

Tomando como base a métrica de KNdS, é possível relacionar uma métrica análoga a cada espaço-tempo já vista anteriormente, acrescida da constante cosmológica. A métrica de Kerr, por exemplo, possui a sua análoga Kerr-de-Sitter, definida pelos parâmetros  $M$ ,  $a$  e pela constante cosmológica,  $\Lambda$ .

Uma característica importante da métrica de KNdS e todas as outras com  $\Lambda \neq 0$  é o fato de não serem assintoticamente planas. Pode-se ver isso contraindo as equações de Einstein (2):

$$R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2}R\delta^\mu{}_\mu + \Lambda\delta^\mu{}_\mu = 8\pi T^\mu{}_\mu. \quad (36)$$

Para o vácuo ou para o campo eletromagnético, o traço do tensor energia-momento  $T^\mu{}_\mu = 0$  e  $R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$ , então:

$$R = 4\Lambda, \quad (37)$$

mostrando que, no limite assintótico, o espaço-tempo KNdS apresenta curvatura constante. Porém, a ordem de grandeza da constante cosmológica observada ( $\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ ) faz com que os efeitos da curvatura sejam mínimos em escalas não-cosmológicas.

## 2 MECÂNICA APLICADA À RELATIVIDADE GERAL

### 2.1 Introdução

O objetivo deste trabalho é calcular trajetórias de partículas em espaços-tempos que representam BN. As trajetórias serão as soluções das equações geodésicas no espaço-tempo relacionado ao tipo de BN escolhido. Na Mecânica Analítica (LEMOS, 2007), as equações de movimento de partículas na física newtoniana podem ser obtidas pelos formalismos lagrangiano ou hamiltoniano. Neste capítulo os dois formalismos serão estendidos para que possam ser aplicados à RG e, em particular, ao movimento de partículas em torno de BNs.

### 2.2 Vínculos

Restrições de natureza geométricas ou cinemáticas que limitam o movimento de um sistema mecânico são denominados *vínculos*. Os vínculos podem ser *holônomos* ou *não-holônomos*.

Se  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  são coordenadas arbitrárias, usadas para descrever a configuração de um sistema mecânico, um vínculo é chamado holônomo quando pode ser expresso por um equação da forma:

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t) = 0. \quad (38)$$

Um exemplo deste tipo de vínculo é:

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - l^2 = 0, \quad (39)$$

vínculo entre duas partículas ligadas a uma haste rígida de comprimento  $l$ .

Vínculos que não obedecem a equação (38) são chamados de não-holônomos. Por exemplo, uma partícula com vetor posição  $\vec{r}(x, y, z)$  confinada em uma caixa de dimensões  $a, b, c$ , sofre as restrições  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  e  $0 < z < c$ .

### 2.3 Coordenadas Generalizadas e Lagrangiana

Em sistemas holônomos, é possível introduzir um certo número  $n$  de variáveis independentes, denotadas por  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , denominadas coordenadas generalizadas, de forma que a posição de cada partícula é determinada univocamente em cada instante

pelos valores dos  $q_n$ 's. O espaço descrito pelas coordenadas generalizadas é chamado de *espaço de configurações* do sistema. Pode-se também, introduzir as variáveis  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ , denominadas velocidades generalizadas, onde:

$$\dot{q}_i(t) \equiv \frac{dq_i(t)}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (40)$$

A partir das coordenadas e velocidades generalizadas, define-se a lagrangiana que caracteriza o sistema com:

$$L[q(t), \dot{q}(t), t] = T[q(t), \dot{q}(t), t] - V[q(t), \dot{q}(t), t], \quad (41)$$

onde  $T$  e  $V$  são as energias cinética e potencial do sistema <sup>7</sup>.

## 2.4 Cálculo Variacional

O Cálculo das Variações, ou Cálculo Variacional tem por finalidade encontrar os máximos ou mínimos de funcionais. Um funcional é um objeto matemático cujo domínio é um espaço de funções e contradomínio é um corpo de escalares (muitas vezes os números reais). Um funcional associa um número (real) a uma determinada função de uma classe de funções para as quais o funcional está definido. O problema básico do cálculo das variações pode ser formulado da seguinte maneira: dado o funcional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x), y'(x), x] dx, \quad (42)$$

onde  $f[y(x), y'(x), x]$  é uma função conhecida, encontrar dentre todas as funções continuamente diferenciáveis  $y(x)$  que satisfaçam as condições de contorno  $y(x_1) = y_1$  e  $y(x_2) = y_2$ , aquela que extremiza o funcional  $J$ .

Seja a função  $y(x)$  aquela que extremiza  $J$ . Considere agora a função  $\bar{y}(x)$ :

$$\bar{y}(x) \equiv y(x) + \epsilon \eta(x), \quad (43)$$

onde  $\epsilon$  é uma parâmetro arbitrária e  $\eta$  é uma função continuamente diferenciável com  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Esta condição é importante para que a função variada  $\bar{y}(x)$  também passe pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Substituindo  $y(x)$  por  $\bar{y}(x)$  em (42), o resultado é uma função de  $\epsilon$ :

$$\Phi(\epsilon) \equiv J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} f[\bar{y}(x), \bar{y}'(x), x] dx. \quad (44)$$

---

<sup>7</sup> As variáveis  $q(t)$  e  $\dot{q}(t)$  representam o conjunto das variáveis  $q_n(t)$  e  $\dot{q}_n(t)$ .

Como, por hipótese,  $y(x)$  extremiza  $J$ , a função  $\Phi(\epsilon)$  deve passar por um extremo em  $\epsilon = 0$ , pois neste caso,  $\bar{y}(x)$  se torna idêntica à  $y(x)$ . Logo, para que  $y(x)$  extremiza  $J$  é necessário que:

$$\left(\frac{d\Phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \epsilon}\right) dx = 0. \quad (45)$$

A partir da definição de  $\bar{y}(x)$ , e lembrando que  $\bar{y}(x) = y(x)$  para  $\epsilon = 0$ , é possível reescrever (45) como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta'\right) dx = 0. \quad (46)$$

Integrando por partes o segundo termo da integral, e usando  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx. \quad (47)$$

Logo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta dx = 0. \quad (48)$$

Pode-se, agora, inferir uma equação diferencial para  $y(x)$  apelando-se para um resultado importante.

**Lema fundamental do cálculo das variações** – Se  $M(x)$ ,  $x_1 < x < x_2$ , é uma função contínua tal que  $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0$ , qualquer que seja a função contínua  $\eta(x)$  com  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , então  $M(x) \equiv 0$  para  $[x_1, x_2]$ .

A partir deste lema pode-se concluir que uma função  $y(x)$  que fornece um valor extremo de (42) soluciona a equação de Euler:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \quad (49)$$

Definindo a variação de  $y$  como  $\delta y \equiv \epsilon \eta$ , é possível escrever a equação (45) na forma equivalente:

$$\delta J = \epsilon \left(\frac{d\Phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y dx = 0. \quad (50)$$

Assim, a condição necessária para um extremo do funcional  $J[y]$ , é que sua variação  $\delta J$  anule-se para  $\delta y$  arbitrário, exceto nas extremidades do intervalo de integração onde  $\delta y = 0$ . É importante notar que não há nenhuma garantia que a curva  $y(x)$  forneça um máximo ou mínimo do funcional (apenas um valor estacionário).

## 2.5 Princípio de Hamilton e Equação de Lagrange

Dado um sistema mecânico descrito pela lagrangiana  $L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]$ , seu movimento do instante  $t_1$  para o instante  $t_2$  é tal que a ação:

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] dt, \quad (51)$$

é, em geral, estacionária. Esse princípio é conhecido como o Princípio de Hamilton ou Princípio da Mínima Ação, embora seria mais rigoroso chamá-lo de Princípio da Ação Estacionária. A aplicação desse princípio a (51) conduz à condição  $\delta S = 0$ . Comparando a equação (42) com a equação (51), conclui-se:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (52)$$

que são as chamadas equações de Euler-Lagrange.

## 2.6 As Equações de Hamilton

O formalismo lagrangiano fornece um sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem para as  $n$  coordenadas  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ . O desenvolvimento do sistema é representado por sua trajetória no espaço de configurações. As  $n$  velocidades  $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)$ , que formam um vetor tangente à trajetória, são obtidas como as derivadas das coordenadas. Diferentemente do formalismo lagrangiano, no formalismo hamiltoniano, o estado do sistema é descrito por um conjunto de  $2n$  variáveis,  $n$  das quais são as coordenadas  $q_i(t)$ , com as demais sendo os *momentos canônicos*,  $p_i(t)$  definido por:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (53)$$

As coordenadas e momentos juntos formam o *espaço de fases* pelo qual o sistema se desloca, com as trajetórias obtidas através da solução de  $2n$  equações diferenciais de primeira ordem. Estas equações são as chamadas equações de Hamilton.

Para obter as equações de movimento do formalismo hamiltoniano, aplica-se novamente o princípio da mínima ação, adaptando a integral para as novas variáveis  $\{q(t), p(t)\}$ . Essa mudança requer o uso de uma transformação de Legendre:

$$H[q(t), p(t), t] \equiv \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L[q(t), \dot{q}(t), t], \quad (54)$$

onde  $H[q(t), p(t), t]$  é a função hamiltoniana e, por suposição, as velocidades são expressas por  $\dot{q}_i(t) = f[q_i(t), p_i(t), t]$ , resultante da equação (53).

Tomando a diferencial da equação (54) vem:

$$dH[q(t), p(t), t] = \sum_{i=1}^n (d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i) - \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right], \quad (55)$$

que se reduz à:

$$dH[q(t), p(t), t] = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (56)$$

onde se vê claramente que a função  $H \equiv H[q(t), p(t), t]$ . Então:

$$dH[q(t), p(t), t] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (57)$$

e, comparando as equações (56) e (57), é possível concluir que as equações de Hamilton são:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (58)$$

e como subproduto,  $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$ .

## 2.7 Mecânica Analítica Aplicada à Relatividade Geral

Na aplicação da Mecânica Analítica à RG, enfrenta-se duas dificuldades imediatas: o espaço-tempo é quadridimensional, e não é definido mais um tempo absoluto como na física newtoniana. O primeiro problema é fácil de contornar, simplesmente acrescentando uma quarta variável dependente para cada partícula do sistema; para resolver a falta de um tempo absoluto, as trajetórias são parametrizadas por um parâmetro  $\lambda$  que, mais tarde, no caso de uma partícula massiva e isolada, será associada ao seu tempo próprio  $\tau$ .

Como acontece na física newtoniana, as geodésicas fornecem valores estacionários da integral

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L} d\lambda, \quad (59)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro,  $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$  e  $\mathcal{L} = \dot{s}$  faz o papel de lagrangiana de uma partícula livre. A raiz quadrada do integrando torna os cálculos difíceis e, por esse motivo, é mais

comum usar as equações de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L}^2 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ . Porém, um extremo de  $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L} d\lambda$  talvez não seja um extremo de  $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathcal{L}^2 d\lambda$ . Contudo, escolhendo apropriadamente o parâmetro  $\lambda$ , é possível mostrar que as duas formas são equivalentes.

Se  $\mathcal{L} \neq 0$ , ou seja, se a geodésica não for nula, as equações de Euler-Lagrange são equivalentes à:

$$2\mathcal{L} \left[ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \right] = 0. \quad (60)$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} = 2\mathcal{L} \left[ \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \right] + 2 \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}. \quad (61)$$

Desenvolvendo o primeiro termo do lado esquerdo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 2g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu, \quad (62)$$

cuja derivada com respeito à  $\lambda$  é:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 2 \left( \frac{dg_{\alpha\mu}}{d\lambda} \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right). \quad (63)$$

Como:

$$\frac{dg_{\alpha\mu}}{d\lambda} = \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = g_{\alpha\mu,\beta} \dot{x}^\beta, \quad (64)$$

então:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 2 \left( g_{\alpha\mu,\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu + g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu \right). \quad (65)$$

Desenvolvendo o segundo termo de (61),

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (66)$$

e, conclui-se que:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial x^\alpha} = 2g_{\alpha\mu} \ddot{x}^\mu + (g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu\beta,\alpha}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\beta, \quad (67)$$

onde o termo entre parênteses é igual a  $2\Gamma_{\alpha\mu\beta}$ . Subindo o índice  $\alpha$  do símbolo de Christoffel,

tem-se:

$$2g_{\alpha\nu}(\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\beta), \quad (68)$$

que tem a forma das equações geodésicas. É necessário agora, igualar o lado direito de (61) a zero. Para isso desenvolve-se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{1}{2\mathcal{L}} g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu. \quad (69)$$

Como  $\mathcal{L} = \dot{s}$ , então:

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad (70)$$

que será igual a zero se  $\ddot{s} = 0$ .

Com a parametrização  $\lambda = as + b$ , com  $a \neq 0$ , a equação acima é satisfeita, e como consequência desta parametrização:

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2, \quad (71)$$

onde  $\lambda = \tau/m$ ,  $m$  é a massa de repouso e o momento  $p^\mu$  é definido como:

$$p^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (72)$$

**Obs:** O parâmetro  $\lambda$  não se aplica a geodésicas nulas pois neste caso o tempo próprio  $\tau$  é uma constante.

A mesma parametrização pode ser aplicada à lagrangiana (CARTER, 1968) dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + q A_\mu \dot{x}^\mu, \quad (73)$$

onde,  $q$  é a carga da partícula e  $A_\mu$  é a componente covariante do potencial-vetor, ligada a um campo eletromagnético externo.

A hamiltoniana  $\mathcal{H}$  (MISNER; THORNE; WHEELER, 1970), poder ser obtida a partir de (54), substituindo as velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  por  $\dot{x}^\mu$  e identificando o momento canônico  $p_i$  com a componente covariante  $\pi_\mu$  dada por:

$$\pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + q A_\mu. \quad (74)$$

Então:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\pi_\mu - qA_\mu)(\pi_\nu - qA_\nu), \quad (75)$$

e as equações de Hamilton escritas em termos de  $x^\mu$  e  $\pi_\mu$  são:

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\lambda} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_\mu}, \\ \frac{d\pi_\mu}{d\lambda} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (76)$$

As equações de Hamilton, neste caso, só se aplicam a corpos massivos isolados, pois o tempo próprio é característica de cada partícula individualmente, sendo impossível defini-lo como parâmetro das equações de Hamilton para um conjunto de partículas.

### 3 CAMPO EXTERNO

#### 3.1 Introdução

Processos eletromagnéticos próximos a BNs em rotação são descritos pela combinação das equações de Einstein e Maxwell. Contudo, em muitas situações, em particular quando o campo eletromagnético não é tão forte a ponto de modificar significativamente a geometria do espaço-tempo, uma aproximação linear é válida. Nesses casos, a configuração pode ser descrita usando a métrica de Kerr como pano de fundo e uma pequena perturbação, que satisfaz as equações de Maxwell, no exterior. Numa série de três artigos (TEUKOLSKY, 1973; PRESS; TEUKOLSKY, 1973; TEUKOLSKY; PRESS, 1974), Saul Teukolsky obteve equações desacopladas que descrevem as perturbações da solução de Kerr para campos de *spin*  $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$  e  $\pm 2$ .

Um pouco mais tarde, Petterson (PETTERSON, 1975) resolveu as equações de Teukolsky para o caso de um campo eletromagnético (*spin*  $\pm 1$ ), estacionário com simetria axial em torno do BN, apresentando a solução numa forma multipolar. Considerando o caso particular de um BN de Schwarzschild, Prasanna e Varma (PRASANNA; VARMA, 1977) fizeram um truncamento da solução para descrever um dipolo magnético, e estudaram as trajetórias de partículas carregadas no plano equatorial. Mais tarde, Prasanna e Vishveshwara (PRASANNA; VISHVESHWARA, 1978) fizeram um tratamento semelhante do espaço-tempo de Kerr. Em 2009, Takahashi e Koyama (TAKAHASHI; KOYAMA, 2009) generalizaram esse trabalho, permitindo movimento no plano polar. Nesse caso, o dipolo seria gerado por um disco de acreção próximo ao horizonte de eventos de um BN em rotação.

Neste capítulo os cálculos de Petterson são revisados e alguns erros corrigidos. Para tal, é necessário apresentar o formalismo de tétradas de Newman Penrose (NP) a fim de usá-lo como ferramenta no desenvolvimento dos resultados encontrados por Petterson.

#### 3.2 O Formalismo de Tétradas na Relatividade Geral

Uma *tétrada* é um conjunto de eixos que formam uma base  $\{\tilde{\gamma}^i\}$  do espaço de covetores ou, equivalentemente, formam uma base  $\{\vec{\gamma}_i\}$  do espaço de vetores. Em geral, os eixos dependem do ponto  $x^\mu$  do espaço-tempo em que são definidos. O caso mais comum são as tétradas ortogonais ou lorentzianas nas quais os eixos formam um referencial localmente inercial em cada ponto, tal que os produtos escalares entre os eixos  $\vec{\gamma}_i \cdot \vec{\gamma}_j = \eta_{ij}$ .

De forma geral, a métrica de tetradas é:

$$\vec{\gamma}_i \cdot \vec{\gamma}_j = \gamma_{ij}. \quad (77)$$

Para prosseguir analisando as tetradas, é necessário definir um objeto que transforme de um referencial de tetradas em um referencial de coordenadas,  $\vec{g}_\mu$ . Esse objeto é chamado de *vierbein* - [quatro pernas], e pode ser representado por uma matriz  $4 \times 4$  com 16 componentes independentes,  $e_i^\mu$ . Assim <sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_i &= e_i^\mu \vec{g}_\mu, \\ \tilde{\gamma}^i &= e^i_\mu \tilde{g}^\mu. \end{aligned} \quad (78)$$

onde  $e^i_\mu$  é o inverso matricial de  $e_i^\mu$ , tal que:

$$e^i_\mu e_i^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad e^i_\mu e_j^\mu = \delta_j^i. \quad (79)$$

Com isso, pode-se inverter (78) para obter:

$$\begin{aligned} \vec{g}_\mu &= e^i_\mu \vec{\gamma}_i, \\ \tilde{g}^\mu &= e_i^\mu \tilde{\gamma}^i. \end{aligned} \quad (80)$$

O elemento de linha pode ser reescrito como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (\vec{g}_\mu \cdot \vec{g}_\nu) dx^\mu dx^\nu = \gamma_{ij} e^i_\mu e^j_\nu dx^\mu dx^\nu = \gamma_{ij} \tilde{\gamma}^i \otimes \tilde{\gamma}^j, \quad (81)$$

de onde:

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{ij} e^i_\mu e^j_\nu. \quad (82)$$

No formalismo de tetradas existem dois tipos de índices: os referentes às tetradas e os referentes às coordenadas. Similarmente ao que é feito com os índices de coordenadas, usa-se a métrica de tetradas  $\gamma_{ij}$  e o seu inverso  $\gamma^{ij}$  para subir e descer índices de tetrada. Estas manipulações de índices são válidas para (componentes de) tensores de tetrada.

**Obs:** Daqui por diante, omitir-se-á as *eta* e os *til* sobre as bases de vetores e covetores respectivamente, pois é evidente quais símbolos representam esses objetos.

---

<sup>8</sup> O primeiro índice do vierbein será sempre o índice referente à tetrada, que neste trabalho são os índices latinos.

### 3.3 Transformações de Tétradas

Todas as tétradas apresentadas neste capítulo, que incluem tétradas lorentzianas, transformam-se de acordo com:

$$\gamma_i \rightarrow \gamma_{i'} = L^j_{i'} \gamma_j, \quad (83)$$

onde  $L^j_{i'}$  é uma transformação de Lorentz. Estas transformações mantêm as mesmas coordenadas  $x^\mu$ . Para tétradas ortogonais, a matriz  $L^j_{i'}$  tem a forma usual da Relatividade Restrita. Em geral, um tensor de tétrada é um objeto cujas componentes se transformam de acordo com:

$$A^{k'l'...}_{m'n'...} = L^{k'}_a L^{l'}_b \cdots L^c_{m'} L^d_{n'} A^{ab...}_{cd...} \quad (84)$$

Deve-se lembrar que o fato de ter índices de tétrada não garante que o objeto seja um tensor: suas componentes devem obedecer a lei de transformação apropriada.

### 3.4 Derivadas Direcional e Covariante

No formalismo de tétradas, o análogo da derivada parcial é a derivada na direção de um dos eixos da tétrada, ou derivada direcional,  $\partial_i$ , que é definida como:

$$\partial_i \equiv \gamma_i g^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = e_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (85)$$

Em geral as derivadas direcionais  $\partial_i$  não comutam. Define-se o *comutador* como:

$$[\partial_i, \partial_j] \equiv e_i^\mu \frac{\partial e_j^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - e_j^\nu \frac{\partial e_i^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (d^k_{ji} - d^k_{ij}) \partial_k \quad (86)$$

onde:

$$d^k_{ij} \equiv e^k_\mu e_j^\nu \frac{\partial e_i^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (87)$$

A derivada covariante de tétrada,  $\nabla_i$ , é completamente análoga à derivada covariante de coordenadas. As derivadas parciais de coordenadas são substituídas por derivadas direcionais; e os símbolos de Christoffel são substituídos por conexões de tétradas.

Seja  $\phi$  um escalar. Já que  $\phi$  não depende de uma base, sua derivada covariante de tétrada é igual à derivada direcional:

$$\nabla_i \phi = \partial_i \phi, \quad (88)$$

que são as componentes de um covetor (de téttrada).

Se  $A^i$ , por construção, são as componentes de um vetor de téttrada então  $\partial_j A^i$  e  $\partial_j A_i$  não são tensores de téttrada. Porém o vetor  $\vec{A} = A^i \gamma_i$  é um invariante tanto com respeito às transformações de téttrada quanto às transformações de coordenadas. Então:

$$\partial_i \vec{A} = \partial_i (\gamma_k A^k) = A^k \partial_i \gamma_k + \gamma_k \partial_i A^k. \quad (89)$$

No primeiro termo, existe uma derivada direcional de um dos eixos da téttrada, cujo resultado será uma combinação linear dos eixos da própria téttrada, que pode ser escrito como:

$$\partial_i \gamma_j = \Gamma_{ji}^k \gamma_k, \quad (90)$$

com  $\Gamma_{ji}^k$  sendo as componentes da *conexão de téttradas*. Assim:

$$\partial_i \vec{A} = \gamma_k (\partial_i A^k + A^j \Gamma_{ji}^k) = \gamma_k (\nabla_i A^k), \quad (91)$$

é um vetor de téttrada, cujas componentes são as derivadas covariantes:

$$\nabla_i A^k = \partial_i A^k + A^j \Gamma_{ji}^k. \quad (92)$$

De forma semelhante:

$$\partial_i \vec{A} = \gamma^k (\partial_i A_k - A_j \Gamma_{ki}^j) = \gamma^k (\nabla_i A_k). \quad (93)$$

A derivada covariante de um tensor de téttrada é dada genericamente por:

$$\nabla_i A^{kl\dots}_{mn\dots} = \partial_i A^{kl\dots}_{mn\dots} + \Gamma_{ji}^k A^{jl\dots}_{mn\dots} + \Gamma_{ji}^l A^{kj\dots}_{mn\dots} + \dots - \Gamma_{mi}^j A^{kl\dots}_{jn\dots} - \Gamma_{ni}^j A^{kl\dots}_{mj\dots} - \dots \quad (94)$$

onde os termos positivos de  $\Gamma$  são associados aos índices contravariantes e os termos negativos, associados aos índices covariantes.

Já que os símbolos de Christoffel e as conexões de téttradas não são tensores, não deve ser nenhuma surpresa que suas componentes não sejam relacionadas por uma transformação de *vierbein*. A relação entre eles é demonstrada a partir do desenvolvimento de  $\partial_i \gamma_j = \Gamma_{ji}^k \gamma_k$ , resultando em:

$$\Gamma_{ijk} - d_{ijk} = e_i^\mu e_j^\nu e_k^\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha} \quad (95)$$

### 3.5 Tétradas de Newman-Penrose

As tétradas lorentzianas são indicadas para aplicações em métricas diagonais, pois é fácil escrever a tetrada em termos das coordenadas. Porém outros tipos de tétradas são melhor adaptadas para descrever radiação (eletromagnética ou gravitacional) que se propaga em direções associadas às coordenadas nulas.

A métrica de uma tetrada semi-nula é:

$$\gamma_{ij} = \gamma^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

e a tetrada associada,  $\gamma_{i'}$  pode ser escrita em termos de uma tetrada ortogonal da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \gamma_{0'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 + \gamma_1), \\ \gamma_{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 - \gamma_1), \\ \gamma_{2'} = \gamma_2, \\ \gamma_{3'} = \gamma_3. \end{cases} \quad (97)$$

**Obs:** Nesta seção, o uso de uma linha nos índices não significa que exista uma transformação lorentziana entre as duas tétradas. Ela é meramente usada para distinguir tétradas de classes diferentes.

Também é possível definir uma tetrada com respeito à métrica de tetrada:

$$\gamma_{ij} = \gamma^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

A tetrada associada a essa métrica pode ser construída a partir de uma tetrada lorentziana, como:

$$\begin{aligned} \gamma_{0'} &= \gamma_0, \\ \gamma_{1'} &= \gamma_1, \\ \gamma_{2'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_2 + i\gamma_3), \\ \gamma_{3'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_2 - i\gamma_3). \end{aligned} \quad (99)$$

Tais tétradas têm propriedades especiais, quando aplica-se rotações no plano  $yz$  e, às vezes, são chamadas de tétradas espinoriais.

Finalmente as tétradas nulas ou tétradas de NP combinam as propriedades de ambas as tétradas anteriores, tendo como métrica de tetrada:

$$\gamma_{ij} = \gamma^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Uma notação comum para os elementos de uma tetrada nula é escrevê-los como  $\{l, n, m, \bar{m}\}$  então:

$$(l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu) = (e^\mu_{0'}, e^\mu_{1'}, e^\mu_{2'}, e^\mu_{3'}). \quad (101)$$

Este sistema de tétradas satisfaz à relação de pseudo-ortogonalidade:

$$l^\mu n_\mu = -m^\mu \bar{m}_\mu = 1, \quad (102)$$

com todos os outros produtos escalares nulos. Por isso as tétradas são ditas nulas.

Agora, é possível escrever a métrica  $g_{\mu\nu}$  em termos da tetrada de NP, usando as equações (82) e a relação de pseudo-ortogonalidade:

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu - m_\mu \bar{m}_\nu - m_\nu \bar{m}_\mu. \quad (103)$$

Similarmente, para a métrica contravariante:

$$g^{\mu\nu} = l^\mu n^\nu + l^\nu n^\mu - m^\mu \bar{m}^\nu - m^\nu \bar{m}^\mu. \quad (104)$$

### 3.6 Tensor Eletromagnético

O campo eletromagnético no formalismo de NP é caracterizado por três valores complexos independentes,  $\phi_0, \phi_1$  e  $\phi_2$  dados por:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \\ \phi_2 &= F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu, \end{aligned} \quad (105)$$

e, inversamente, as componentes contravariantes do tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu}$  são dadas por:

$$F^{\mu\nu} = \text{Re} \left\{ \phi_0 \bar{m}^{[\mu} n^{\nu]} + \phi_1 (n^{[\mu} l^{\nu]} + m^{[\mu} \bar{m}^{\nu]}) + \phi_2 l^{[\mu} m^{\nu]} \right\}, \quad (106)$$

onde  $\text{Re}\{x\}$  representa a parte real de  $x$  e os colchetes sobrescritos denotam antissimetriação.

No formalismo NP, as derivadas direcionais,  $\partial_i$ , recebem nomes especiais<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} D &= l^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ \delta &= m^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ \bar{\delta} &= \bar{m}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \\ \Delta &= n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \end{aligned} \quad (107)$$

As componentes covariantes da conexão, também conhecidas como *coeficientes de rotação de Ricci* ou *coeficientes de spin*, podem ser calculadas usando a expressão:

$$\gamma_{ijk} \equiv \nabla_\nu e_{i\mu} e_j^\mu e_k^\nu. \quad (108)$$

---

<sup>9</sup> Seguindo a notação usual,  $\Delta$  nas equações (110), refere-se ao operador descrito acima; e  $\Delta$  nas demais equações é a função  $\Delta = r^2 - 2rM + a^2$ .

Novamente há uma notação especial para esses objetos:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(\nabla_\nu l_\mu n^\mu \bar{m}^\nu - \nabla_\nu m_\mu \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu), \\
\beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(\nabla_\nu l_\mu n^\mu m^\nu - \nabla_\nu m_\mu \bar{m}^\mu m^\nu), \\
\gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(\nabla_\nu l_\mu n^\mu n^\nu - \nabla_\nu m_\mu \bar{m}^\mu n^\nu), \\
\epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(\nabla_\nu l_\mu n^\mu l^\nu - \nabla_\nu m_\mu \bar{m}^\mu l^\nu), \\
\pi &= -\gamma_{241} = -\nabla_\nu n_\mu \bar{m}^\mu l^\nu, \\
\mu &= -\gamma_{243} = -\nabla_\nu n_\mu \bar{m}^\mu m^\nu, \\
\rho &= \gamma_{134} = \nabla_\nu l_\mu m^\mu \bar{m}^\nu, \\
\kappa &= \gamma_{131} = \nabla_\nu l_\mu m^\mu l^\nu, \\
\nu &= -\gamma_{242} = -\nabla_\nu n_\mu \bar{m}^\mu m^\nu, \\
\sigma &= \gamma_{133} = \nabla_\nu l_\mu m^\mu m^\nu, \\
\lambda &= -\gamma_{244} = -\nabla_\nu n_\mu \bar{m}^\mu m^\nu, \\
\tau &= \gamma_{132} = \nabla_\nu l_\mu m^\mu n^\nu.
\end{aligned} \tag{109}$$

As equações de Maxwell para o campo eletromagnético no formalismo NP são, então:

$$\begin{aligned}
(D - 2\rho)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 + \kappa\phi_2 &= 2\pi J_l, \\
(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 + \sigma\phi_2 &= 2\pi J_m, \\
(D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 + \lambda\phi_0 &= 2\pi J_{\bar{m}}, \\
(\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 + \nu\phi_0 &= 2\pi J_n,
\end{aligned} \tag{110}$$

onde  $J_i$  são as componentes da densidade de corrente.

### 3.7 O Campo Externo

Assumindo que a solução de Kerr descrita na equação (13) é o pano de fundo do espaço-tempo, e que a métrica no formalismo de NP é dada segundo a equação (104),

uma tétrada nula  $l^\mu, n^\mu, m^\mu$  e  $\bar{m}^\mu$  é:

$$\begin{aligned}
 l^\mu &= \left( \frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right), \\
 n^\mu &= \frac{1}{2\Sigma} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a), \\
 m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)} \left( ia \sin \theta, 0, 1, \frac{i}{\sin \theta} \right), \\
 \bar{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia \cos \theta)} \left( -ia \sin \theta, 0, 1, \frac{-i}{\sin \theta} \right).
 \end{aligned} \tag{111}$$

As derivadas direcionais são:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\partial}{\partial r}, \\
 \delta &= -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 \bar{\delta} &= -\frac{\rho}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\
 \Delta &= -\frac{\Delta}{2\Sigma} \frac{\partial}{\partial r},
 \end{aligned} \tag{112}$$

e os coeficientes de *spin* são:

$$\begin{aligned}
 \rho &= -\frac{1}{r - ia \cos \theta}, \\
 \alpha &= \pi - \bar{\beta}, \\
 \beta &= -\bar{\rho} \frac{\cot \theta}{2\sqrt{2}}, \\
 \gamma &= \mu + \frac{(r - M)}{2\Sigma}, \\
 \pi &= ia\rho^2 \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \\
 \mu &= \rho \frac{\Delta}{2\Sigma}, \\
 \tau &= -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2}\Sigma}, \\
 \epsilon &= \kappa = \nu = \sigma = \lambda = 0.
 \end{aligned} \tag{113}$$

Considerando que não há fontes,  $J_i = 0$  e, substituindo os coeficientes de *spin* e os operadores diferenciais nas equações de Maxwell (110), e definindo  $\phi_1 \equiv \rho^2 \Phi_1$ , para

simplificar as equações resultantes, tem-se:

$$\begin{aligned}
-\sqrt{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{\rho} + ia \sin \theta \right) \phi_0, \\
\sqrt{2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= \left( \frac{\Delta}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2(r-M)}{\rho} + \Delta \right) \phi_0, \\
-\frac{\rho^3}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} - \rho \right) \phi_2, \\
\frac{\Delta \rho^2}{\sqrt{2}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - ia \sin \theta + \frac{\cot \theta}{\rho} \right) \phi_2.
\end{aligned} \tag{114}$$

Eliminando  $\partial \Phi_1 / \partial \theta$ , a partir da segunda e terceira equações, ou eliminando  $\partial \Phi_1 / \partial r$ , a partir da primeira e terceira, é possível mostrar que:

$$\phi_2 = -\frac{\rho^2 \Delta}{2} \phi_0. \tag{115}$$

### 3.8 A Equação de Teukolsky

Estudando as perturbações da métrica de Kerr, Saul A. Teukolsky (TEUKOLSKY, 1973; PRESS; TEUKOLSKY, 1973; TEUKOLSKY; PRESS, 1974) mostrou que, para um campo,  $\psi$ , de *spin*  $s$ , as equações de Newman-Penrose podem ser combinadas numa única equação-mestre, hoje conhecida como a Equação de Teukolsky:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \phi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \\
&- \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta^{s+1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[ \frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \\
&- 2s \left[ \frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \psi = 4\pi \Sigma T,
\end{aligned} \tag{116}$$

onde  $s$  é o peso de *spin*, e a forma de  $T$  depende da fonte.

Considerando o caso sem fontes  $T = 0$ , Teukolsky mostrou que a equação é separável, com solução:

$$\psi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} R_0(r) S(\theta), \tag{117}$$

com  $R_0(r)$  e  $S(\theta)$  resolvendo respectivamente:

$$\begin{aligned} \Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left( \Delta^{s+1} \frac{dR_0}{dr} \right) + \left( \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R_0 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left( a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - 2a\omega s \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{2ms \cos \theta}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + s + A \right) S = 0, \end{aligned} \quad (118)$$

com  $K \equiv (r^2 - a^2)\omega - am$ ,  $\lambda \equiv A + a^2\omega^2 - 2ma\omega$  onde  $A, \omega$  e  $m$  são as constantes de separação<sup>10</sup>.

Este trabalho trata o caso de uma perturbação por um campo eletromagnético, para o qual  $s = \pm 1$ . O papel do campo perturbativo,  $\psi$ , em (117) é cumprido por  $\phi_0$  ou por  $\phi_2$ . Como já foi encontrada uma relação entre  $\phi_0$  e  $\phi_2$ , é suficiente resolver as equações em  $\phi_0$ . A equação de Teukolsky para  $\phi_0 = R_0(r)S(\theta)$  e  $s = +1$ , já separada e considerando o caso axissimétrico ( $m = 0$ ) e estacionário ( $\omega = 0$ ), tem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \left( \Delta^2 \frac{dR_0}{dr} \right) - (l-1)(l+2)R_0 &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] S &= 0, \end{aligned} \quad (119)$$

onde  $\lambda = A = (l-1)(l+2)$ .

Fazendo  $R_0(r) = \Delta^{-1/2}R(r)$  e  $u = (r-M)(M^2 - a^2)^{-1/2}$ , a equação radial se transforma em:

$$(1-u^2) \frac{d^2 R}{du^2} - 2u \frac{dR}{du} + \left[ l(l+1) - \frac{1}{1-u^2} \right] R. \quad (120)$$

As equações radial (120), e angular, têm a forma das equações associadas de Legendre, cujas soluções são as funções associadas de Legendre de primeira ordem  $P_1^1(u)$ ,  $Q_1^1(u)$  e  $P_1^1(\cos \theta)$ . Assim,  $\phi_0$  tem a forma:

$$\phi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \Delta^{-1/2} [\alpha_l' P_l^1(u) + \beta_l' Q_l^1(u)] P_l^1(\cos \theta), \quad (121)$$

onde o fator  $\sqrt{2}$  foi incluído por conveniência.

---

<sup>10</sup> Neste caso,  $A$  não representa a função encontrada na métrica de Kerr em (13),  $\lambda$  não é um coeficiente de *spin* e  $m$  não é a massa de repouso da partícula

Usando  $\Delta = (u^2 - 1)(M^2 - a^2)$ , pode-se escrever as relações diferenciais <sup>11</sup>:

$$\begin{aligned}\frac{dP_l(u)}{dr} &= i\Delta^{-1/2}P_l^1(u), \\ \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} &= P_l^1(\cos\theta),\end{aligned}\tag{122}$$

uma relação similar a primeira pode ser obtida para  $Q_l(u)$ . Assim, a expressão final para  $\phi_0$  é dada por<sup>12</sup>:

$$\phi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2} \left[ \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right] \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta},\tag{123}$$

onde  $\alpha_l = i\alpha'_l$  e  $\beta_l = i\beta'_l$  são complexos.

Para obter  $\Phi_1$ , substitui-se  $\phi_0$  nas primeiras duas equações em (114) com  $\beta_l = 0$ . Então:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} &= \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{d^2P_l(\cos\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \right] + ia \sin\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \right\}, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} &= \alpha_l \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\rho} \left[ \Delta \frac{d^2P_l(u)}{dr^2} + 2(r-M) \frac{dP_l(u)}{dr} \right] + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} \right\}.\end{aligned}\tag{124}$$

Com o auxílio da equação de Legendre nos formatos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P_l(\cos\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} &= -l(l+1)P_l(\cos\theta), \\ \Delta \frac{d^2P_l(u)}{dr^2} + 2(r-M) \frac{dP_l(u)}{dr} &= l(l+1)P_l(u),\end{aligned}\tag{125}$$

as equações podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} &= \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} \left[ \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(\cos\theta) - ia \sin\theta \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \right], \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta} &= \alpha_l \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \left[ \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(u) + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} \right],\end{aligned}\tag{126}$$

integrando a primeira equação por partes e identificando:

$$l(l+1)P_l(u) = \frac{d}{dr} \left[ \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} \right],\tag{127}$$

---

<sup>11</sup> Erro no artigo de Petterson na primeira equação em (122).

<sup>12</sup> Erro no artigo de Petterson na equação (123).

tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \alpha_l \left[ \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(u) P_l(\cos \theta) - ia \sin \theta P_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} P_l(\cos \theta) \right] \\ &+ f(\theta). \end{aligned} \quad (128)$$

Derivando  $\Phi_1$  em relação a  $\theta$ :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \alpha_l \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \left[ \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(u) + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} \right] + f'(\theta). \quad (129)$$

Comparando com a segunda equação em (126), nota-se que  $f$  é necessariamente uma constante. Essa constante é identificada com um excesso de carga,  $Q$ , do BN. Assim a expressão final para  $\phi_1$  é:

$$\phi_1 = \rho^2 Q + \sum_{l=1}^{\infty} \rho^2 [\alpha_l A_l(r, \theta) + \beta_l B_l(r, \theta)], \quad (130)$$

onde:

$$A_l = \frac{l(l+1)}{\rho} P_l(u) P_l(\cos \theta) - ia \sin \theta P_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} P_l(\cos \theta), \quad (131)$$

$$B_l = \frac{l(l+1)}{\rho} Q_l(u) P_l(\cos \theta) - ia \sin \theta Q_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} + \Delta \frac{dQ_l(u)}{dr} P_l(\cos \theta). \quad (132)$$

### 3.9 Potencial-Vetor

Como o campo eletromagnético deve ser estacionário e axissimétrico, as componentes  $A_r$  e  $A_\theta$  do potencial-vetor devem desaparecer. Com isso, o potencial-vetor é definido apenas pelas componentes  $A_t(r, \theta)$  e  $A_\phi(r, \theta)$ , dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_t}{\partial r} &= -F_{tr}, \\ \frac{\partial A_\phi}{\partial r} &= -F_{\phi r}. \end{aligned} \quad (133)$$

As componentes covariantes  $F_{tr}$  e  $F_{\phi r}$  podem ser obtidas usando a métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} F_{tr} &= g_{rr}(g_{tt}F^{tr} + g_{t\phi}F^{\phi r}), \\ F_{\phi r} &= g_{rr}(g_{t\phi}F^{tr} + g_{\phi\phi}F^{\phi r}). \end{aligned} \quad (134)$$

Então, é suficiente encontrar  $F^{tr}$  e  $F^{\phi r}$  para determinar o potencial-vetor. Para isso

utiliza-se a equação (106):

$$\begin{aligned}
F^{tr} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} \phi_1 + \frac{ia\bar{\rho} \sin \theta}{\sqrt{2}} \left( \phi_2 - \frac{\rho^2 \Delta}{2} \phi_0 \right) \right\}, \\
F^{\phi r} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{a}{\Sigma} \phi_1 + \frac{i\bar{\rho}}{\sqrt{2} \sin \theta} \left( \phi_2 - \frac{\rho^2 \Delta}{2} \phi_0 \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{135}$$

Inserindo  $\rho$ ,  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , e escolhendo a parte externa do campo ( $\alpha_l = 0$ ), tem-se:

$$\begin{aligned}
\Sigma F^{tr} &= \frac{(r^2 + a^2)}{\Sigma^2} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) Q + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^r \left[ \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} B_1 P_l(\cos \theta) - D_1 \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right] \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^i \left[ \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} B_2 P_l(\cos \theta) + D_2 \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right], \\
\Sigma F^{\phi r} &= \frac{a}{\Sigma^2} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) Q + \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^r \left[ \frac{a}{\Sigma} B_1 P_l(\cos \theta) - D_3 \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right] \\
&\quad - \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^i \left[ \frac{a}{\Sigma} B_2 P_l(\cos \theta) + D_4 \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right],
\end{aligned} \tag{136}$$

onde <sup>13</sup>:

$$\begin{aligned}
\beta_l &= \beta_l^r + i\beta_l^i, \\
B_1 &= \frac{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma} \Delta \frac{dQ_l(u)}{dr} - l(l+1)rQ_l(u), \\
B_2 &= a \cos \theta \left[ 2r \frac{\Delta}{\Sigma} - l(l+1)Q_l(u) \right], \\
D_1 &= \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{\Sigma} \left[ \Delta \frac{dQ_l(u)}{dr} - \frac{2r(r^2 + a^2)}{\Sigma} Q_l(u) \right], \\
D_2 &= \frac{a \sin \theta}{\Sigma} \left[ r \Delta \frac{dQ_l(u)}{dr} - (r^2 + a^2) \frac{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma} Q_l(u) \right], \\
D_3 &= a \cos \theta \left[ \frac{\Delta}{\sin \theta \Sigma} \frac{dQ_l(u)}{dr} - \frac{2a^2 r \sin \theta}{\Sigma^2} Q_l(u) \right], \\
D_4 &= \frac{r}{\sin \theta} \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{dQ_l(u)}{dr} - a^2 \sin \theta \frac{(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2} Q_l(u).
\end{aligned} \tag{137}$$

Agora, integrando as equações (133), obtem-se as componentes do potencial-vetor:

<sup>13</sup> No coeficiente  $D_5$  do artigo de Petterson, cujo equivalente é  $D_3$  neste trabalho, falta um fator de  $1/\Sigma$  no primeiro termo.

$$\begin{aligned}
-A_t(r, \theta) &= \frac{rQ}{\Sigma} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{dQ_l(u)}{dr} P_l(\cos \theta) (r\beta_l^r - a \cos \theta \beta_l^i) \right. \\
&\quad \left. + \frac{a \sin \theta}{\Sigma} Q_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} (a \cos \theta \beta_l^r + r\beta_l^i) \right] + \beta_t, \\
A_\phi(r, \theta) &= a \sin^2 \theta \frac{rQ}{\Sigma} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[ a \sin^2 \theta \frac{\Delta}{\Sigma} \frac{dQ_l(u)}{dr} P_l(\cos \theta) (r\beta_l^r - a \cos \theta \beta_l^i) \right. \\
&\quad \left. + \sin \theta \frac{r^2 + a^2}{\Sigma} Q_l(u) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} (a \cos \theta \beta_l^r + r\beta_l^i) - \frac{\sin \theta}{l(l+1)} \beta_l^i \frac{dQ_l(u)}{dr} \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right] \\
&\quad + \beta_\phi,
\end{aligned} \tag{138}$$

onde  $\beta_t$  e  $\beta_\phi$  são constantes.

Esse resultado é a solução multipolar para o potencial-vetor, válido no caso de um campo externo ao BN. Para obter as soluções internas basta fazer a transformação  $\beta, Q_l(u) \rightarrow \alpha, P_l(u)$ . Para um dipolo magnético, considera-se apenas o primeiro termo do somatório ( $l = 1$ ). As componentes do potencial-vetor são, então:

$$\begin{aligned}
A_t(r, \theta) &= \frac{a\beta_1^i}{\Sigma} \left\{ [r(r-M) + (a^2 - Mr) \cos^2 \theta] \frac{1}{2\gamma} \ln \left( \frac{r-r_-}{r-r_+} \right) \right. \\
&\quad \left. - (r - M \cos^2 \theta) \right\} - \frac{\beta_1^r \cos \theta}{\Sigma} \{ \dots \}, \\
A_\phi(r, \theta) &= \frac{\beta_1^i \sin^2 \theta}{2\Sigma} \left\{ (r-M)a^2 \cos^2 \theta + r(r^2 + Mr + 2a^2) \right. \\
&\quad \left. - [r(r^3 - 2Ma^2 + a^2r) + \Delta a^2 \cos^2 \theta] \frac{1}{2\gamma} \ln \left( \frac{r-r_-}{r-r_+} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{a\beta_1^r \sin^2 \theta \cos \theta}{\Sigma} \{ \dots \},
\end{aligned} \tag{139}$$

onde  $\gamma \equiv (M^2 - a^2)^{1/2}$  e  $r_\pm$  são os horizontes de eventos.

Considerando que a métrica de Kerr é assintoticamente plana, ou seja, o dipolo magnético descrito pela equação (139) precisa ser idêntico a um dipolo definido na Relatividade Restrita quando  $r \rightarrow \infty$  (SENGUPTA, 1996), conclui-se que  $\beta_1^r = 0$  e que  $\beta_1^i = \mp \frac{3\mu}{2\gamma^2}$ , onde os sinais de  $\beta_1^i$  representam o momento antiparalelo e paralelo ao momento angular do BN respectivamente. Assim, o resultado final para um dipolo magnético

externo a um BN em rotação é dado como:

$$\begin{aligned}
 A_t(r, \theta) &= -\frac{3a\mu}{2\gamma^2\Sigma} \left\{ [r(r-M) + (a^2 - Mr) \cos^2 \theta] \frac{1}{2\gamma} \ln \left( \frac{r-r_-}{r-r_+} \right) \right. \\
 &\quad \left. - (r - M \cos^2 \theta) \right\}, \\
 A_\phi(r, \theta) &= -\frac{3\mu \sin^2 \theta}{4\gamma^2\Sigma} \left\{ (r-M)a^2 \cos^2 \theta + r(r^2 + Mr + 2a^2) \right. \\
 &\quad \left. - [r(r^3 - 2Ma^2 + a^2r) + \Delta a^2 \cos^2 \theta] \frac{1}{2\gamma} \ln \left( \frac{r-r_-}{r-r_+} \right) \right\},
 \end{aligned} \tag{140}$$

para um dipolo antiparalelo ao eixo de rotação<sup>14</sup>.

---

<sup>14</sup> Para manter a notação utilizada nos artigos, o termo  $(M^2 - a^2)^{1/2}$  e o momento de dipolo magnético são denominados por  $\gamma$  e  $\mu$  respectivamente. Neste caso, eles não representam os coeficientes de *spin*.

## 4 MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRAÇÃO

### 4.1 Introdução

Uma área importante na física contemporânea é a Física Computacional, área em que se utiliza de métodos numéricos para solucionar problemas que não podem ser resolvidos analiticamente. A aplicação de métodos numéricos de integração neste trabalho se faz necessária devido à complexidade das equações que descrevem o movimento de partículas em torno de BNs. Evidentemente, os métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais possuem imprecisões que dependem de fatores como o método escolhido, o número de iterações, o grau de complexidade das equações, etc.

Neste capítulo, estuda-se alguns métodos numéricos de integração, de precisão (ou ordem) crescente, começando com um método de primeira ordem, o Método de Euler, e terminando com um método de quarta ordem, o Método de Runge-Kutta. Limitações computacionais desses métodos, devido às operações de precisão finita disponíveis nos processadores, são abordadas, e técnicas para contornar essas restrições usando aritmética de múltipla precisão são discutidas.

### 4.2 O método de Euler

O método de Euler é o método mais simples para resolver numericamente uma equação diferencial. Embora ele não seja usado em trabalhos científicos devido a sua instabilidade, o método é didático e serve como introdução a métodos mais avançados.

Considere a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = f[x, y(x)], \quad (141)$$

e a condição de contorno  $y(x_0) \equiv y_0$ . Para estimar  $y$  em outro valor de  $x$ , digamos  $x = x_0 + h$ , onde  $h$  é o *passo*, pode-se usar a expansão em série de Taylor até a primeira ordem:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + O(h^2) \approx y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (142)$$

Para estimar  $y(x_0 + 2h)$  aproveita-se o valor de  $y(x_0 + h)$ , calculado anteriormente e repete-se o procedimento. Assim, é possível estimar  $y(x_0 + nh)$  para qualquer inteiro positivo,  $n$ . Repare que cada ponto é calculado com base no ponto anterior, que já é uma estimativa, o que faz com que os erros tendam a acumular. Depois de  $n$  passos o erro será

aproximadamente:

$$\epsilon \approx \frac{nh^2}{2!}y''(x_0), \quad (143)$$

no qual  $y''(x_0)$  é uma estimativa da segunda derivada no intervalo de integração. Obviamente, um valor menor de  $h$  diminui o erro *por passo* todavia, em compensação, o número de iterações <sup>15</sup> necessárias para alcançar um ponto determinado aumenta, bem como o tempo de computação. Por construção, o método de Euler reproduz a série de Taylor até a ordem  $h$  e, por isso, é chamado de método de primeira ordem, escrito  $O(h)$ . O erro devido ao truncamento é de segunda ordem, ou seja,  $O(h^2)$ .

### 4.3 Método de Euler Aperfeiçoado

O método de Euler utiliza o valor da derivada no início do intervalo  $h$  porém, em geral, a derivada varia ao longo deste intervalo. O método Aperfeiçoado usa a média aritmética das derivadas nos extremos do intervalo para aumentar a precisão. Assim, substitui-se a fórmula  $y(x_0 + h) = y_0 + f(x_0, y_0)h$  por:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{2} \{f(x_0, y_0) + f[x_0 + h, y(x_0 + h)]\} h. \quad (144)$$

Note que  $f[x_0 + h, y(x_0 + h)]$  depende de  $y(x_0 + h)$ , e a equação (144) não pode ser resolvida diretamente. Para resolvê-la é necessário fazer uma primeira estimativa do valor de  $y(x_0 + h)$ , usando o método de Euler. A partir deste valor auxiliar de  $y$  calcula-se  $f[x_0 + h, y(x_0 + h)]$ . Já que esse método leva em conta a variação da primeira derivada no intervalo, espera-se que ele inclua o efeito da segunda derivada na série de Taylor e, portanto, seja de segunda ordem, o que será demonstrado mais à frente.

### 4.4 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

O método de Runge-Kutta de segunda ordem usa a ideia de média ponderada dos valores das derivadas no intervalo  $h$  para calcular os valores de  $y(x_0 + h)$  da seguinte forma:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \bar{f}, \quad (145)$$

---

<sup>15</sup> Cálculo de cada valor de  $y(x_n)$ .

onde  $\bar{f} = a_1 k_1 + a_2 k_2$ , os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  são os pesos, e os valores de  $k_1$  e  $k_2$  são dados por:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k_1), \end{aligned} \quad (146)$$

cujos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  especificam um ponto intermediário dentro do intervalo . Fazendo  $f(x_0, y_0) = f_0$  e expandido  $k_2$  em série de Taylor até o termo de primeira ordem, obtém-se:

$$k_2 = h \left( f_0 + \alpha h \frac{\partial f_0}{\partial x} + \beta k_1 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right). \quad (147)$$

Substituindo  $\bar{f}$  em (145) e lembrando que  $k_1 = hf(x_0, y_0)$ , tem-se:

$$y(x_0 + h) = y_0 + (a_1 + a_2)f_0 h + \left( a_2 \alpha \frac{\partial f_0}{\partial x} + a_2 \beta f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) h^2. \quad (148)$$

Por outro lado, expandindo  $y(x_0 + h)$  em torno de  $x_0$ , até segunda ordem:

$$y(x_0 + h) = y_0 + f_0 h + \frac{1}{2} \frac{df_0}{dx} h^2. \quad (149)$$

Como  $f(x, y) = f[x, y(x)]$ , então:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad (150)$$

e, substituindo em (149):

$$y(x_0 + h) = y_0 + f_0 h + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{1}{2} f_0 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) h^2. \quad (151)$$

Comparando as equações (148) e (151), é possível ver que os parâmetros obedecem as seguintes relações:

$$a_1 + a_2 = 1, \quad \alpha a_2 = \beta a_2 = \frac{1}{2}. \quad (152)$$

Como são quatro equações e três incógnitas, existe uma certa liberdade na escolha dos parâmetros. Uma escolha possível é:  $a_1 = a_2 = 1/2$  e  $\alpha = \beta = 1$ , escolha que remete ao método de Euler Aperfeiçoado.

O método é conhecido como Runge-Kutta de segunda ordem porque o cálculo de  $y(x_0 + h)$  inclui termos de  $O(h^2)$ .

#### 4.5 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

Seguindo a mesma ideia do método de segunda ordem, o método de Runge-Kutta de quarta ordem (INCE, 1956) calcula os valores de  $y(x_0 + h)$  da seguinte forma:

$$y(x_0 + h) = y_0 + \tilde{f}, \quad (153)$$

onde  $\tilde{f} = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4$ , os parâmetros  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são os pesos e  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  são dados por:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k_1), \\ k_3 &= hf(x_0 + \gamma h, y_0 + \delta k_1 + \epsilon k_2), \\ k_4 &= hf(x_0 + \eta h, y_0 + \mu k_1 + \nu k_2 + \xi k_3). \end{aligned} \quad (154)$$

Simplificando a notação, adota-se  $\partial f_0/\partial x = \partial_x f_0$  e  $\partial f_0/\partial y = \partial_y f_0$ . Para expandir  $k_2$  em série de Taylor com duas variáveis, primeiro define-se o operador  $D_1^m$  como:

$$D_1^m = \left( \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta f_0 \frac{\partial}{\partial y} \right)^m. \quad (155)$$

Então:

$$k_2 = h \left( f_0 + hD_1 f_0 + \frac{h^2}{2!} D_1^2 f_0 + \frac{h^3}{3!} D_1^3 f_0 + \dots \right). \quad (156)$$

Para  $k_3$ , o operador  $D_2^m$  é:

$$D_2^m = \left[ \gamma \frac{\partial}{\partial x} + (\delta + \epsilon) f_0 \frac{\partial}{\partial y} \right]^m, \quad (157)$$

logo:

$$\begin{aligned} \gamma h \frac{\partial}{\partial x} + (\delta k_1 + \epsilon k_2) \frac{\partial}{\partial y} &= hD_2 \\ &+ h^2 \epsilon \left( D_1 f_0 + \frac{h}{2!} D_1^2 f_0 + \frac{h^2}{3!} D_1^3 f_0 + \dots \right) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (158)$$

e:

$$\begin{aligned} k_3 &= h \left( f_0 + hD_2 f_0 + \frac{h^2}{2!} D_2^2 f_0 + \frac{h^3}{3!} D_2^3 f_0 + \dots \right) \\ &+ h^3 \epsilon \left[ \partial_y f_0 D_1 f_0 + \frac{h}{2!} \partial_y f_0 D_1^2 f_0 + h D_1 f_0 D_2 (\partial_y f_0) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (159)$$

Para  $k_4$  o operador  $D_3^m$  é:

$$D_3^m = \left[ \eta \frac{\partial}{\partial x} + (\mu + \nu + \xi) f_0 \frac{\partial}{\partial y} \right]^m, \quad (160)$$

logo:

$$\begin{aligned} \eta h \frac{\partial}{\partial x} + (\mu k_1 + \nu k_2 + \xi k_3) \frac{\partial}{\partial y} &= h D_3 + h^2 \left\{ \nu \left( D_1 + \frac{h^2}{2!} D_1^2 f_0 + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi \left[ D_2 f_0 + \frac{h}{2!} (D_2^2 f_0 + 2\epsilon \partial_y f_0 D_1 f_0) + \dots \right] \right\} \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (161)$$

portanto:

$$\begin{aligned} k_4 &= h \left( f_0 + h D_3 f_0 + \frac{h^2}{2!} D_3^2 f_0 + \frac{h^3}{3!} D_3^3 f_0 + \dots \right) \\ &\quad + h^3 (\nu D_1 f_0 + \xi D_2 f_0) \partial_y f_0 \\ &\quad + \frac{h^4}{2!} (\nu D_1^2 f_0 + \xi D_2^2 f_0 + 2\epsilon \xi \partial_y f_0 D_1 f_0) \partial_y f_0 \\ &\quad + h^4 (\nu D_1 f_0 + \xi D_2 f_0) D_3 (\partial_y f_0) + \dots \end{aligned} \quad (162)$$

Agora, expandindo  $y(x_0 + h)$  em torno de  $x_0$ , e lembrando que  $f(x, y) = f[x, y(x)]$ , tem-se:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y_0 + f_0 h + \frac{h^2}{2!} D f_0 + \frac{h^3}{3!} (D^2 f_0 + \partial_y f_0 D f_0) \\ &\quad + \frac{h^4}{4!} [D^3 f_0 + \partial_y f_0 D^2 f_0 + (\partial_y f_0)^2 D f_0 + 3 D f_0 D (\partial_y f_0)] + \dots, \end{aligned} \quad (163)$$

onde:

$$D^m \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x} + f_0 \frac{\partial}{\partial y} \right)^m. \quad (164)$$

Para obter um resultado válido até quarta ordem, descarta-se os termos de ordens superiores. Substituindo  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  em (153) e comparando com (163), nota-se que os parâmetros  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, \mu, \nu, \xi$  obedecem ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1, \\ a_2 D_1 f_0 + a_3 D_2 f_0 + a_4 D_3 f_0 &= \frac{1}{2} D f_0, \\ a_2 D_1^2 f_0 + a_3 D_2^2 f_0 + a_4 D_3^2 f_0 &= \frac{1}{3} D^2 f_0, \\ a_2 D_1^3 f_0 + a_3 D_2^3 f_0 + a_4 D_3^3 f_0 &= \frac{1}{4} D^3 f_0, \\ a_3 \epsilon D_1 f_0 + a_4 (\nu D_1 f_0 + \xi D_2 f_0) &= \frac{1}{6} D f_0, \\ a_3 \epsilon D_1^2 f_0 + a_4 (\nu D_1^2 f_0 + \xi D_2^2 f_0) &= \frac{1}{12} D^2 f_0, \\ a_3 \epsilon D_1 f_0 D_2 (\partial_y f_0) + a_4 (\nu D_1 f_0 + \xi D_2 f_0) D_3 (\partial_y f_0) &= \frac{1}{8} D f_0 D (\partial_y f_0), \\ a_4 \epsilon \xi D_1 f_0 &= \frac{1}{24} D f_0. \end{aligned} \quad (165)$$

O primeiro passo para simplificar esse sistema é desenvolver a segunda equação e mostrar que:

$$\begin{aligned} a_2\alpha + a_3\gamma + a_4\eta &= \frac{1}{2}, \\ a_2\beta + a_3(\delta + \epsilon) + a_4(\mu + \nu + \xi) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (166)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ \gamma &= \delta + \epsilon, \\ \eta &= \mu + \nu + \xi. \end{aligned} \quad (167)$$

Como resultado disso, tem-se :  $D_1 = \alpha D$ ;  $D_2 = \gamma D$ ;  $D_3 = \eta D$ , as oito equações do sistema se tornam independentes da função  $f(x_0, y_0)$ , e obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1, \\ a_2\alpha + a_3\gamma + a_4\eta &= \frac{1}{2}, \\ a_2\alpha^2 + a_3\gamma^2 + a_4\eta^2 &= \frac{1}{3}, \\ a_2\alpha^3 + a_3\gamma^3 + a_4\eta^3 &= \frac{1}{4}, \\ a_3\alpha\epsilon + a_4(\alpha\nu + \gamma\xi) &= \frac{1}{6}, \\ a_3\alpha^2\epsilon + a_4(\alpha^2\nu + \gamma^2\xi) &= \frac{1}{12}, \\ a_3\alpha\gamma\epsilon + a_4(\alpha\nu + \gamma\xi)\eta &= \frac{1}{8}, \\ a_4\alpha\epsilon\xi &= \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (168)$$

Como há oito equações para dez parâmetros, há uma certa liberdade nos valores das constantes. Uma escolha óbvia é exigir que o intervalo seja compartilhado de uma forma simétrica, impondo as condições:  $a_1 = a_4$  e  $a_2 = a_3$ , que fornece os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{8}, & \alpha &= \frac{1}{3}, & \epsilon &= 1, & \xi &= 1, \\ a_2 &= \frac{3}{8}, & \beta &= \frac{1}{3}, & \eta &= 1, \\ a_3 &= \frac{3}{8}, & \gamma &= \frac{2}{3}, & \mu &= 1, \\ a_4 &= \frac{1}{8}, & \delta &= -\frac{1}{3}, & \nu &= -1. \end{aligned}$$

Os valores de  $k_1, k_2, k_3$ , e  $k_4$  são dados por:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1 - k_2 + k_3), \end{aligned} \tag{169}$$

e o valor de  $\tilde{f}$  é:

$$\tilde{f} = \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4). \tag{170}$$

Esse esquema é atribuído a Kutta.

Outra escolha que pode ser feita é:  $\alpha = \gamma = 1/2$ , que remete a:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6}, & \alpha &= \frac{1}{2}, & \epsilon &= \frac{1}{2}, & \xi &= 1, \\ a_2 &= \frac{1}{3}, & \beta &= \frac{1}{2}, & \eta &= 1, \\ a_3 &= \frac{1}{3}, & \gamma &= \frac{1}{2}, & \mu &= 0, \\ a_4 &= \frac{1}{6}, & \delta &= 0, & \nu &= 0, \end{aligned}$$

com  $k_1, k_2, k_3$ , e  $k_4$ , dados por:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3), \end{aligned} \tag{171}$$

e o valor de  $\tilde{f}$  é:

$$\tilde{f} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{172}$$

Esse esquema é atribuído a Runge.

A escolha dos valores de Runge neste trabalho foi motivada pela sua maior eficiência computacional, pois além de fazer menos cálculos, ela também faz operações matemáticas com valores na base 2, mais facilmente executado pelo computador. Evidentemente, existem muitas outras possibilidades na escolha das constantes. Porém, não há nenhuma garantia que uma determinada escolha forneça maior precisão quando for aplicado a uma equação geral.

Depois de  $n$  passos o erro do método de Runge-Kutta de quarta ordem será de,

aproximadamente:

$$\epsilon \approx \frac{nh^5}{5!}y^{(5)}(x_0), \quad (173)$$

onde  $y^{(5)}(x_0)$  é uma estimativa da quinta derivada no intervalo de integração.

#### 4.6 Ordem das Equações

Todos os métodos vistos até agora são aplicáveis às equações diferenciais de primeira ordem. Contudo, pode-se utilizá-los para equações diferenciais de ordens maiores. Para demonstrar esta afirmação, considere a equação diferencial de ordem  $n$ :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y). \quad (174)$$

Usando a substituição:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v(x, y), \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= w(x, y), \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} &= z(x, y), \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= f(x, y), \end{aligned} \quad (175)$$

a equação (174) é equivalente ao conjunto de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= v(x, y), \\ \frac{dv}{dx} &= w(x, y), \\ &\vdots \\ \dots &= z(x, y), \\ \frac{dz}{dx} &= f(x, y). \end{aligned} \quad (176)$$

Obviamente, aplicar esse recurso para equações de segunda ordem, seria fisicamente o mais útil.

## 4.7 Tipos de Linguagens e Bibliotecas de Múltipla Precisão

Métodos numéricos podem ser implementados em quase todas as linguagens de computação. Porém, a escolha da linguagem é de vital importância e deve levar em conta os objetivos da pesquisa. Este trabalho preocupa-se principalmente com dois aspectos: o tempo de execução e a precisão, que, por sua vez, serão dependentes do grau de complexidade das equações a serem resolvidas.

Como foi visto na introdução deste trabalho, existem dois tipos básicos de linguagem de programação: as interpretadas e as compiladas. As linguagens interpretadas (por exemplo BASIC e Maple) são mais convenientes, pois não requerem o passo adicional de compilação e geralmente são mais fáceis de *debugar*<sup>16</sup>. Entretanto, a execução de programas neste tipo de linguagem é lenta, pois os cálculos são realizados juntamente com a tradução do código-fonte em linguagem de máquina. Este fato torna ineficiente a aplicação de linguagens interpretadas em equações muito complexas ou que exijam um número muito grande de iterações.

Por isso, este trabalho concentra-se nas linguagens compiladas, em particular C e C++ em parte, devido à sua extensibilidade, ou seja, a facilidade de criar novas estruturas; e em parte devido às bibliotecas disponíveis para cálculos numéricos de precisões arbitrárias.

A desvantagem principal de C e C++ reside no nível de precisão padrão dos números de ponto flutuante: o tipo `double` usa 64 bits, dos quais 53 representam os algarismos significativos de um número real, enquanto os demais são reservados para armazenar o sinal e o expoente. Traduzindo os 53 bits para a base decimal, fornece  $2^{53} \approx 10^{16}$ , ou seja, 16 dígitos decimais significativos. Em princípio C e C++ definem o tipo `long double`, porém a implementação desse formato depende de um conjunto de fatores, como o processador, o compilador e até o sistema operacional, sendo muitas vezes simplesmente convertido em `double`. Para muitas aplicações a precisão oferecida por uma variável `double` é razoável. Contudo, em aplicações que exijam um número muito grande de iterações, os erros, devido ao truncamento na série de Taylor, podem se acumular, fugindo da precisão desejada.

Uma forma de superar essa limitação é a utilização de bibliotecas de múltipla precisão, que permitem trabalhar com números com mais de 16 algarismos decimais, criando um novo tipo de objeto no qual os números são particionados em vários blocos de 64 bits. Novas versões das operações matemáticas são definidas. Elas manipulam esses blocos de uma forma que os resultados dos cálculos superem os 16 dígitos usuais.

---

<sup>16</sup> É usado em uma situação em que precisa-se analisar um determinado bloco de programação ou a execução de um programa para localizar possíveis erros ou "bugs" de sistema e também erros de programação.

Essas manipulações acarretam em um custo adicional no tempo de execução do programa, todavia, ainda assim, espera-se que a combinação de linguagem compilada e a biblioteca seja mais rápida do que o mesmo programa implementado numa linguagem interpretada.

Para C e C++ existem duas principais bibliotecas de múltipla precisão: GMP - GNU *Multiple Precision* e GNU MPFR - *Multiple Precision Floating-Point Reliable* (THE... , 2018). Contudo, a sintaxe, ou seja, a forma de escrever o código-fonte, se torna bem mais complexa do que na linguagem C/C++ padrão. Um caso ilustrativo dessa complexidade pode ser visto, comparando a componente da métrica  $g^{\theta\theta} = -1/\Sigma$ , escrita de duas formas diferentes: em C/C++ e utilizando a biblioteca MPFR.

C/C++:

```
gee=-1/(v[1]*v[1] + a*a*cos(v[2])*cos(v[2]));
```

MPFR:

```
mpfr_mul(rr,v[1],v[1],MPFR_RNDN);
mpfr_mul(aa,a,a,MPFR_RNDN);
mpfr_cos(c,v[2],MPFR_RNDN);
mpfr_mul(cc,c,c,MPFR_RNDN);
mpfr_mul(aacc,aa,cc,MPFR_RNDN);
mpfr_add(sig,rr,aacc,MPFR_RNDN);
mpfr_ui_div(gee,-1,sig,MPFR_RNDN);
```

A grande vantagem na escolha de MPFR é a possibilidade de usar um *wrapper* (WRAPPER... , 2012) para C++. O *wrapper* é um tipo de pré-compilador que traduz a sintaxe usual de C++ para a sequência de instruções equivalente da biblioteca MPFR. A eficiência do *wrapper* depende de sua implementação e dificilmente gera código-fonte mais rápido do que o escrito diretamente em MPFR. Mesmo assim, o tempo de execução de programas escritos com o auxílio do *wrapper* é muito menor do que o tempo de execução dos mesmos em linguagem interpretada.

#### 4.8 Um Exemplo Simples: o Oscilador Harmônico

É bastante didático utilizar a equação do oscilador harmônico unidimensional para ilustrar o uso de métodos numéricos combinados com bibliotecas de múltipla precisão e assim testar a eficiência do código-fonte.

Tabela 2 - Oscilador harmônico com frequência angular igual a 1.

Tempo	Exato	Dupla Precisão	MPFR
0,001	0,99999950000004166667	0,999999500000041(78560)	0,99999950000004166667
0,01	0,99995000041666527778	0,99995000041666(481927)	0,99995000041666527778
0,1	0,99500416527802576610	0,99500416527802(459932)	0,99500416527802576610
1	0,54030230586813971740	0,5403023058681(4165238)	0,54030230586813971(810)
2	-0,4161468365471423870	-0,41614683654714(196281)	-0,41614683654714238(548)
3	-0,9899924966004454572	-0,98999249660044(863485)	-0,98999249660044545(692)
4	-0,6536436208636119146	-0,65364362086361(016413)	-0,65364362086361191(716)
5	0,28366218546322626447	0,28366218546322(863325)	0,28366218546322626(047)

Fonte: O autor, 2012.

Especificamente, considere a equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad (177)$$

com  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , cuja solução analítica é  $x = \cos(t)$ .

Fazendo  $dx/dt = z(x, t)$ , tem-se o sistema de EDOs equivalente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= z, \\ \frac{dz}{dt} &= -x. \end{aligned} \quad (178)$$

O método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo de  $h = 10^{-4}$  foi aplicado para resolver esse sistema de duas diferentes formas; em linguagem C (dupla precisão) e utilizando a biblioteca GNU MPFR, com precisão de 128 bits (aproximadamente 38 algarismos significativos). Nesse contexto, comparando com os primeiros 20 algarismos do valor exato tem-se:

Como o método utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem, espera-se uma imprecisão por passo da ordem de  $f^{(5)}h^5/5!$ , como no caso do oscilador harmônico  $|f^{(5)}| < 1$ , essa imprecisão corresponde aproximadamente a  $10^{-22}$ . Esse valor já está além da capacidade dos 16 significativos da dupla precisão, que pode ser visto em todos os valores da terceira coluna da tabela. Com os 38 dígitos de precisão usados, os valores calculados pelo MPFR não sofrem com o arredondamento no computador, mas o erro do método aos poucos se acumula. A partir de  $t = 1$ , ou 10.000 passos, esse erro é apreciável e, de fato, corresponde a  $10^4 \times 10^{-22} = 10^{-18}$ .

Na tabela seguinte, são comparados os tempos de execução do mesmo programa

Tabela 3 - Tempo médio em segundos para calcular de  $10^4$  a  $10^6$  de iterações.

Iterações	C (Dupla Precisão)	MPFR	Wrapper	Maple
$10^4$	0,110	0,250	0,344	1,781
$10^5$	0,672	1,828	2,829	16,718
$10^6$	6,360	18,031	27,812	169,590

Fonte: O autor, 2012.

(ver Apêndices) escrito em C, MPFR, MPFR com *wrapper* e Maple <sup>17</sup>.

É possível ver que, para as quatro versões, o tempo de execução é aproximadamente proporcional ao número de iterações, embora exista um custo adicional na inicialização dos programas, que é mais evidente na versão em C.

Como foi esperado, a versão interpretada em Maple é, de longe, a mais lenta, levando mais do que seis vezes o tempo da versão com *wrapper* e sendo quase dez vezes mais lenta que a versão em MPFR.

Finalmente, o uso do *wrapper*, embora facilite a elaboração do código-fonte, significa um aumento de aproximadamente 50% no tempo de execução. Vale a pena ressaltar que o sistema de equações do oscilador harmônico é muito simples, quando for comparado às equações que descrevem as trajetórias de partículas em torno de BNs. Nesse caso, o impacto do *wrapper* pode ser ainda maior. Mesmo assim, devido à complexidade das equações, o uso do *wrapper* compensa, pois a economia de tempo no desenvolvimento do código-fonte é muito grande.

Apesar de simples, esse exemplo mostra a funcionalidade da biblioteca. Não há limites quanto à precisão: para aumentá-la ainda mais, basta diminuir o valor do passo. Contudo, isso implica em mais iterações e, por consequência, mais tempo de execução.

<sup>17</sup> Todos os resultados computacionais deste trabalho foram obtidos utilizando-se um computador com a seguinte configuração: processador Intel(R) Core(TM)2 Duo CPU T5750 @2.00GHz; 3 Gb de memória; emulador de Linux para Windows Cygwin e compilador g++ (GCC) 4.5.3. Onde for possível, foi usada uma precisão de 38 algarismos significativos.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Introdução

sistema dinâmico que descreve a trajetória de uma partícula massiva em torno de um BN de Schwarzschild ou Kerr é integrável, se existem quatro constantes de movimento (CARTER, 1968). Destas, três constantes são óbvias:  $E \equiv p_t$ , associada à energia da partícula e  $L \equiv -p_\phi$ , ligada ao seu momento angular. As constantes  $E$  e  $L$  são conseqüências diretas de uma métrica estacionária (estática para o caso de Schwarzschild) e axial respectivamente, que implica em uma hamiltoniana (75) independente de  $t$  e  $\phi$ . A terceira constante de movimento é a massa de repouso determinada pela equação (71) como  $m = (g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu)^{1/2}$ . Para uma partícula livre, existe uma quarta constante, conhecida como constante de Carter, dada por:

$$\mathcal{Q} \equiv p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[ a^2(m^2 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (179)$$

Com essas quatro constantes independentes, o sistema é integrável e, neste caso, as trajetórias não terão comportamento caótico. Na presença de um campo externo com potencial-vetor  $A_\mu$ , apenas três constantes de movimento podem ser definidas:  $E \equiv \pi_t = p_t + qA_t$ ,  $L \equiv -\pi_\phi = -(p_\phi + qA_\phi)$  e novamente, a massa  $m$ , definida anteriormente. Assim, as trajetórias de partículas com essa configuração podem ter comportamentos caóticos (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992; KARAS; VOKROUHLICKÝ, 1992), pois o sistema não é integrável.

Para determinar numericamente as diversas trajetórias, para as quais este trabalho foi proposto, é necessário integrar as equações de Hamilton descritas em (76). Para isso, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem programado em C++ com a biblioteca de múltipla precisão MPFR acompanhada do *wrapper*. Em todos os casos foram atribuídos os seguintes valores iniciais para as coordenadas:  $r_0 = 10,5M$ ,  $\theta_0 = \pi/2$  e  $\phi_0 = 0$ . Devido à liberdade na escolha dos sinais, impõe-se:  $p_r > 0$  e  $p_\theta < 0$ <sup>18</sup>.

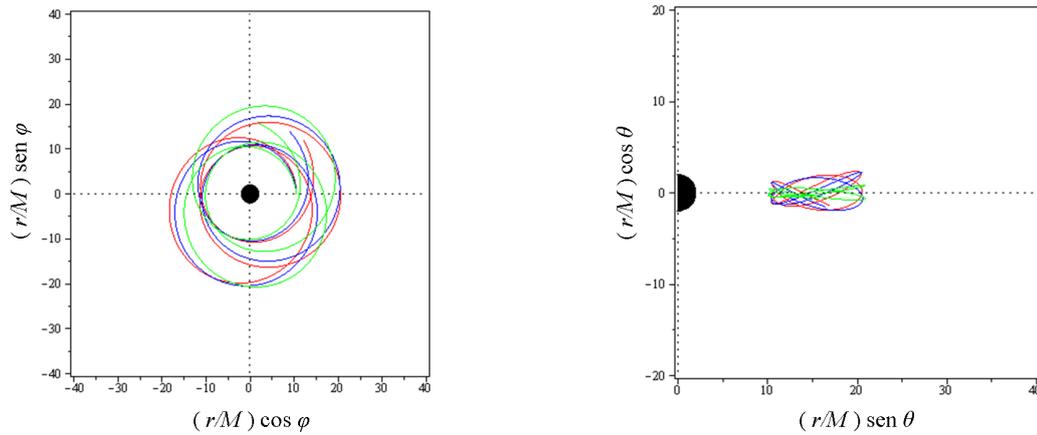
### 5.2 Partícula Livre

Para integrar as órbitas de partículas livres são necessárias: as constantes de movimento  $E, L, m, \mathcal{Q}$ ; e os valores iniciais das coordenadas  $r_0, \theta_0, \phi_0$ . É importante ressaltar

---

<sup>18</sup> Todas as unidades foram adaptadas para que a hamiltoniana fosse adimensional.

Figura 6 - Partícula livre em torno de um Buraco Negro de Schwarzschild.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita),  $Q/m^2 = 0,25227794117647058175$ ;  $p_r/m = 0$  e  $p_\theta/m = -0,50227277566723699717$  (vermelho);  $Q/m^2 = 0,21657794117647058170$ ;  $p_r/m = 0,02$  e  $p_\theta/m = -0,46537935190172606292$  (azul);  $Q/m^2 = 0,029152941176470581696$ ;  $p_r/m = 0,05$  e  $p_\theta/m = -0,17074232391668616883$  (verde).

Fonte: O autor, 2012.

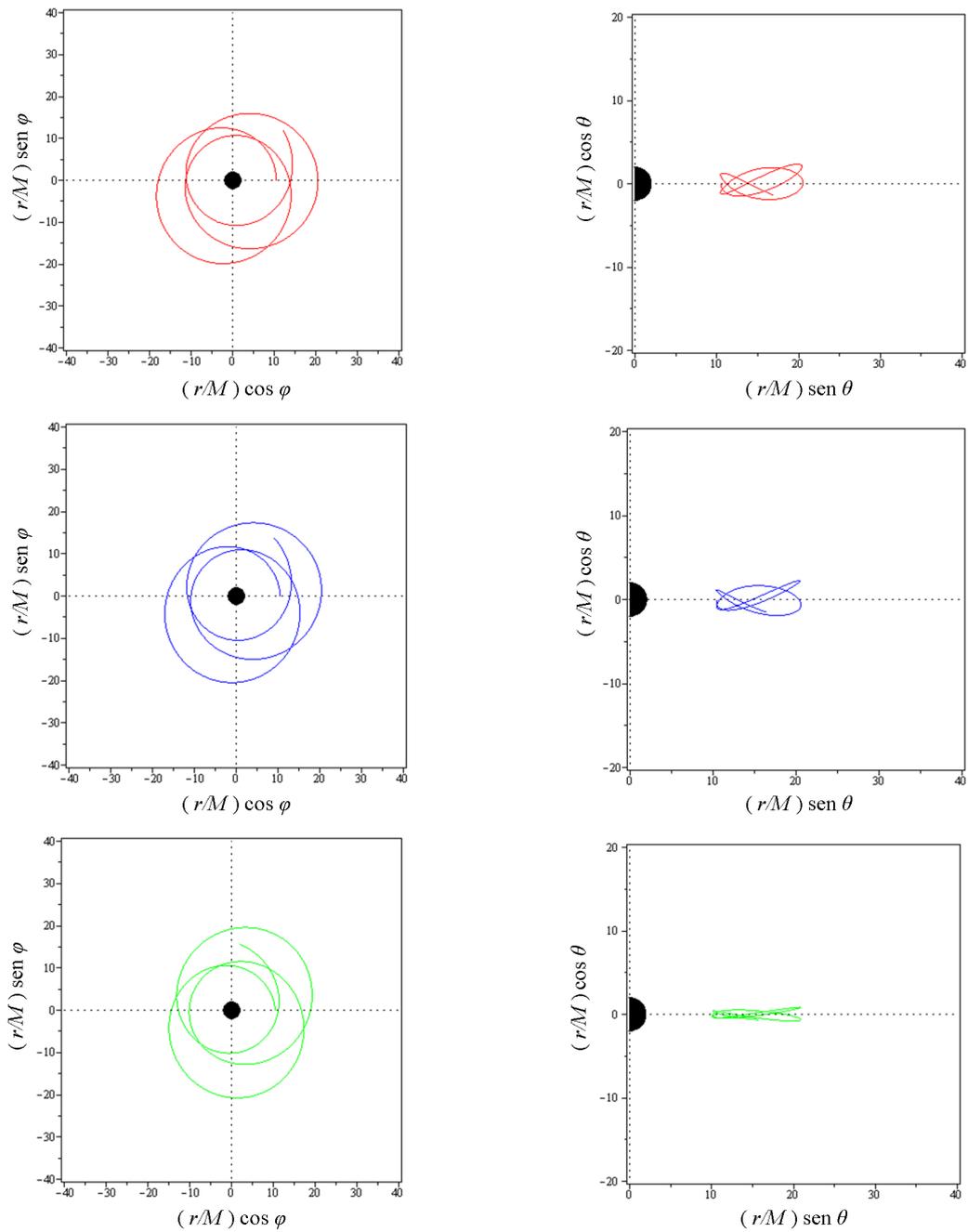
que os valores desses parâmetros precisam respeitar a relação (71). A descrição das trajetórias de partículas livres são importantes para testar a estabilidade do método e visualizar algumas características das métricas tanto de Schwarzschild quanto de Kerr.

### 5.2.1 Buraco Negro de Schwarzschild

Nas integrações a seguir, as constantes de movimento  $E$  e  $L$  foram fixadas em  $E/m = 0,97$  e  $L/m = 4,2M$ .

Nos três casos pode ser observada a precessão do periastro da partícula. Como era de se esperar em um sistema integrável, as trajetórias não apresentam comportamento caótico. É possível observar também que pequenas variações nas condições iniciais não resultaram em grandes mudanças nas órbitas da partícula. Os gráficos na figura 7 mostram separadamente o movimento para cada conjunto de condições iniciais.

Figura 7 - Movimento de uma partícula livre em torno de um BN de Schwarzschild, planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita).



Fonte: O autor, 2012.

Tabela 4 - Condições iniciais para o movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um BN de Kerr.

$a/M$	$\mathcal{Q}/m^2$	$p_r/m$	$p_\theta/m$	Cor
0,3	2,3404986568166554715	0	-1,5298688364747663790	vermelho
	2,3047626568166554713	0,02	-1,5181444782419937621	azul
	2,1171486568166554717	0,05	-1,4550424931309241567	verde
0,6	1,8023125209240040148	0	-1,3425023355376347407	vermelho
	1,7664685209240040149	0,02	-1,3290855957853143534	azul
	1,5782875209240040147	0,05	-1,2562991367202335281	verde
1,0	1,1354019390581717543	0	-1,0655524102821839867	vermelho
	1,0993019390581717542	0,02	-1,0484760078600615047	azul
	0,90977693905817175395	0,05	-0,9538222785499255437	verde

Fonte: O autor, 2012.

### 5.2.2 Buraco Negro de Kerr: Partícula Girando no Mesmo Sentido

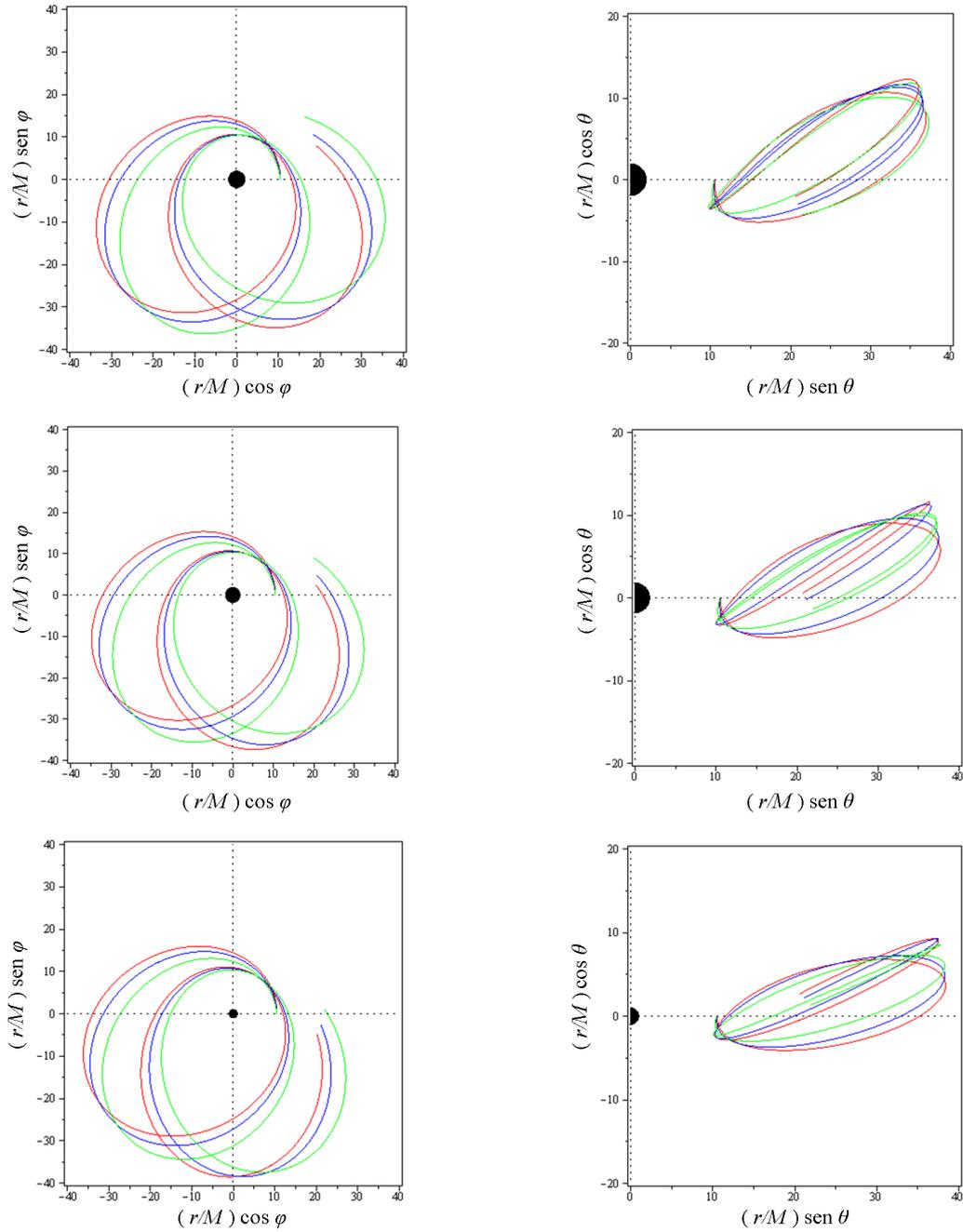
No caso do BN de Kerr, além de mudar os parâmetros  $E$ ,  $L$  e  $\mathcal{Q}$ , existe a possibilidade de variar seu momento angular por unidade de massa,  $a = J/M$ . Os gráficos da figura 8 mostram o movimento de uma partícula livre nos planos equatorial e poloidal para os momentos angulares  $a = 0,3M$ ;  $a = 0,6M$  e  $a = M$ , respectivamente. O último caso corresponde ao chamado BN de Kerr extremo, com horizontes de eventos iguais a  $r_\pm = M$ .

Para cada valor do momento angular,  $a$ , são traçadas três trajetórias que correspondem aos valores fixos;  $E/m = 0,98$  e  $L/m = 4,2$ . Já, os valores  $\mathcal{Q}$ ,  $p_r$  e  $p_\theta$  variam de acordo com a tabela 4. Como  $a$  e  $L$  têm o mesmo sinal, a partícula gira no mesmo sentido do BN.

Pode-se ver nos gráficos da figura 8 que a partícula traça uma órbita estável, exibindo uma precessão de periastro que é mais acentuada para valores menores de  $a/M$ .

Uma análise da projeção no plano poloidal mostra uma oscilação em torno do plano equatorial que diminui à medida que  $a/M$  aumenta. Vale a pena destacar que, para condições iniciais equivalentes, o movimento da partícula é mais amplo do que no caso de Schwarzschild.

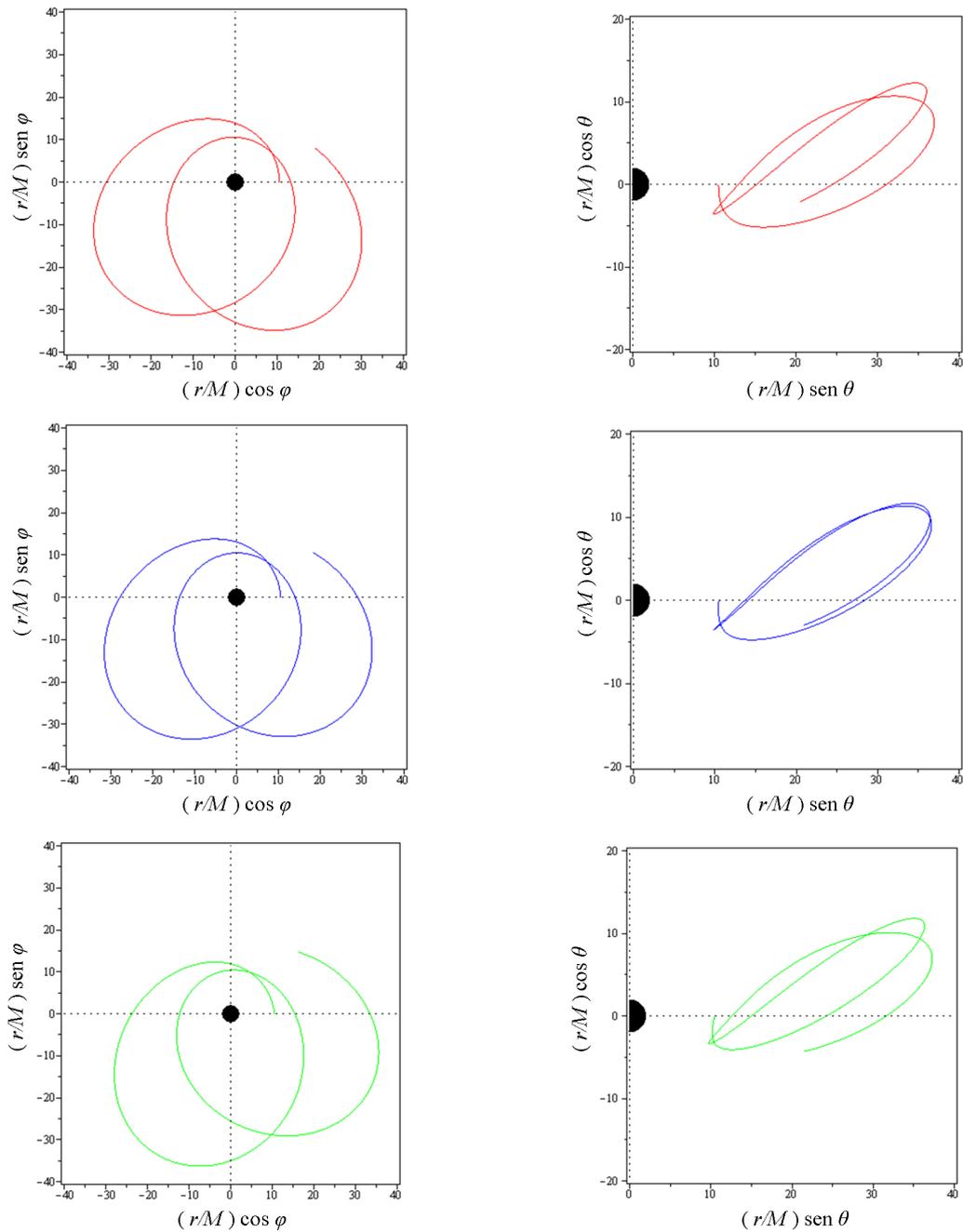
Figura 8 - Partícula livre, girando no mesmo sentido do Buraco Negro.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = 0,3M$ ;  $a = 0,6M$  e  $a = M$ , respectivamente.

Fonte: O autor, 2012.

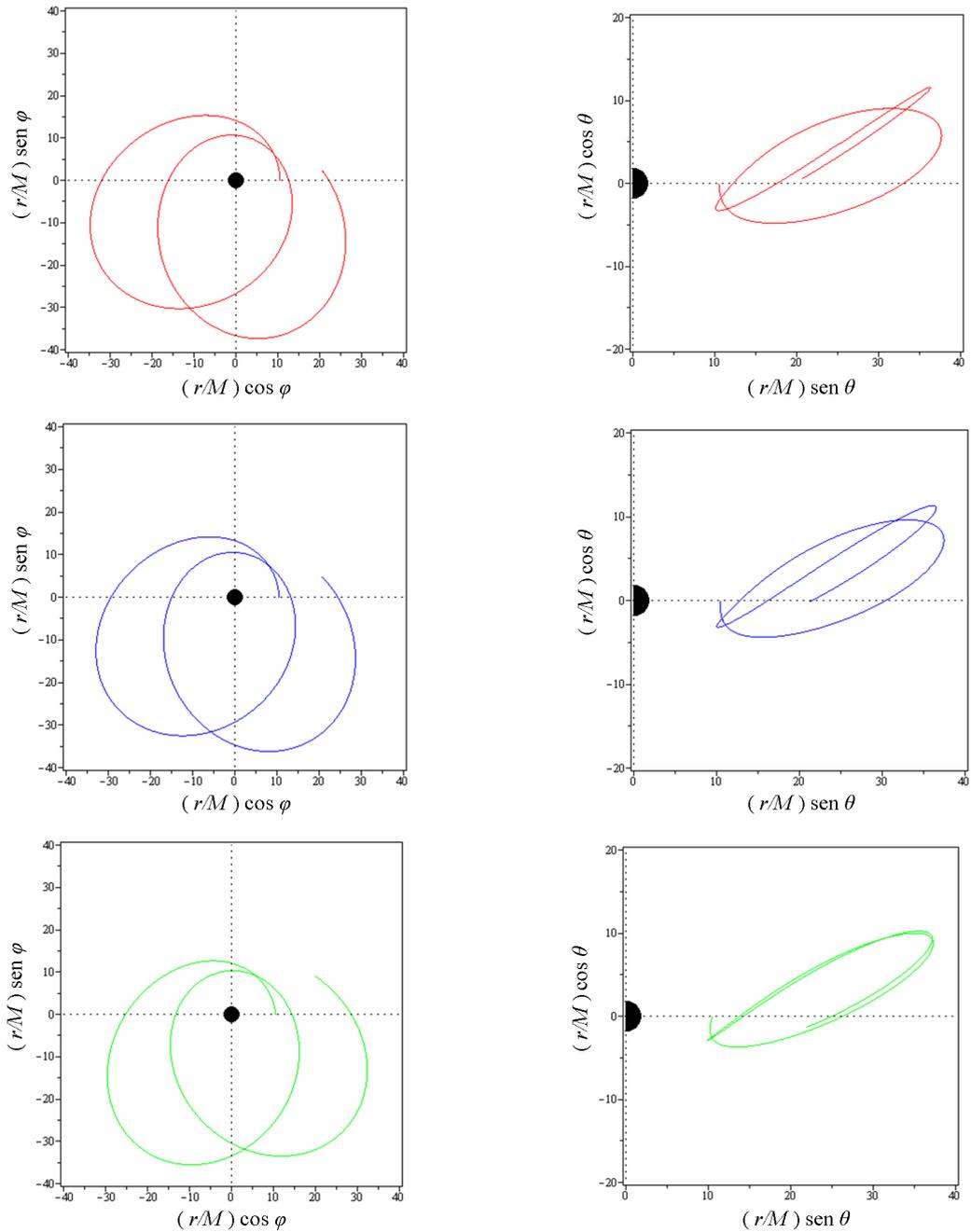
Figura 9 - Movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direta):  $a = 0, 3M$ .

Fonte: O autor, 2012.

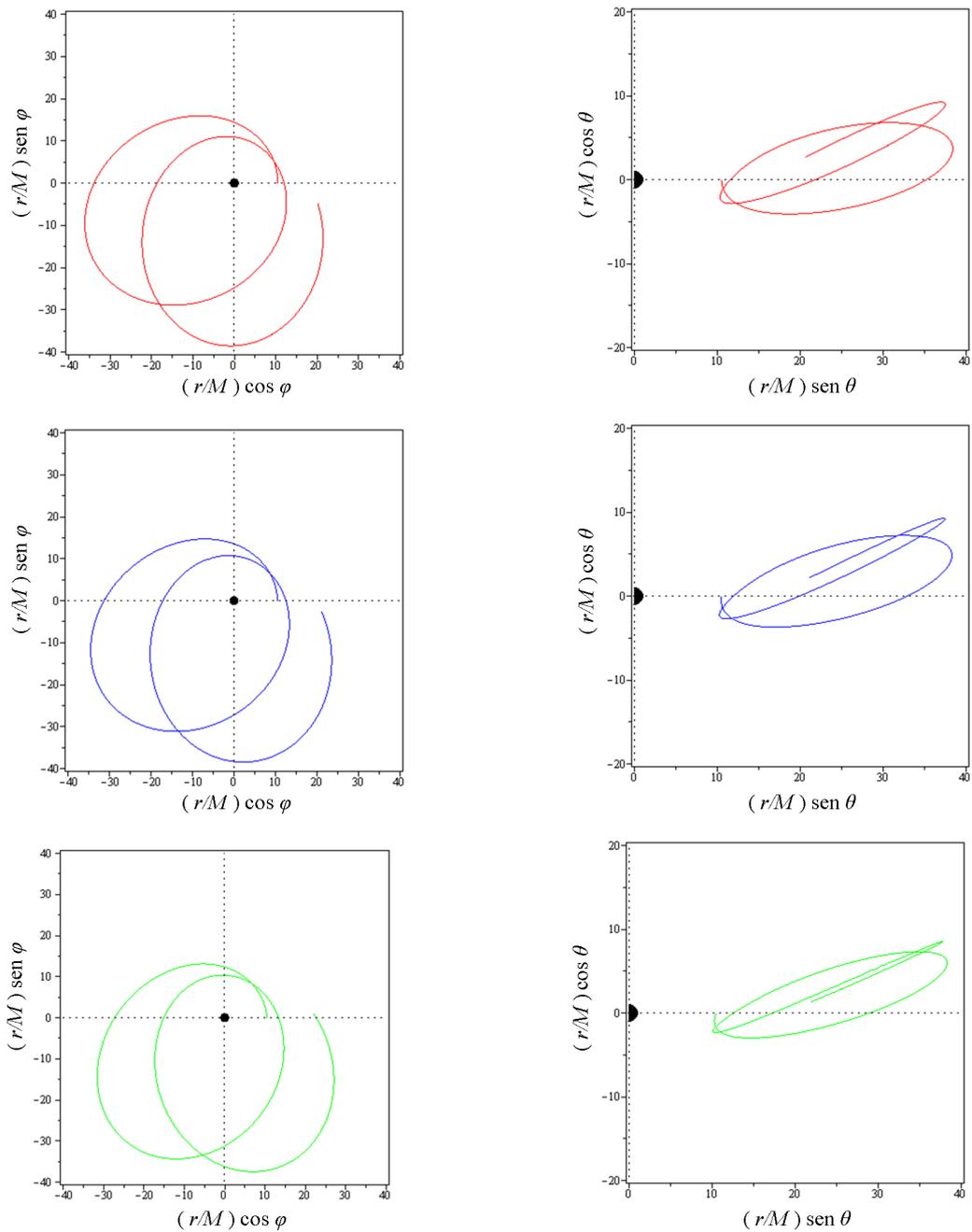
Figura 10 - Movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = 0,6M$ .

Fonte: O autor, 2012.

Figura 11 - Movimento de uma partícula livre, girando no mesmo sentido de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = M$ .

Fonte: O autor, 2012.

Tabela 5 - Condições iniciais para o movimento de uma partícula livre, girando em sentido contrário a um BN de Kerr.

$a/M$	$\mathcal{Q}/m^2$	$p_r/m$	$p_\theta/m$	Cor
0,3	3,5014926124916051021	0	-1,8712275683335806129	vermelho
	3,4657566124916051020	0,02	-1,8616542677123497256	azul
	3,2781426124916051023	0,05	-1,8105641696696654508	verde
0,6	4,1173041513223970512	0	-2,0291141296936446722	vermelho
	4,0814601513223970517	0,02	-2,0202623966510877598	azul
	3,8932791513223970512	0,05	-1,9731394150749705834	verde
1,0	4,9663603878116343578	0	-2,2285332368649192659	vermelho
	4,9302603878116343580	0,02	-2,2204189667293950491	azul
	4,7407353878116343575	0,05	-2,1773229865620843065	verde

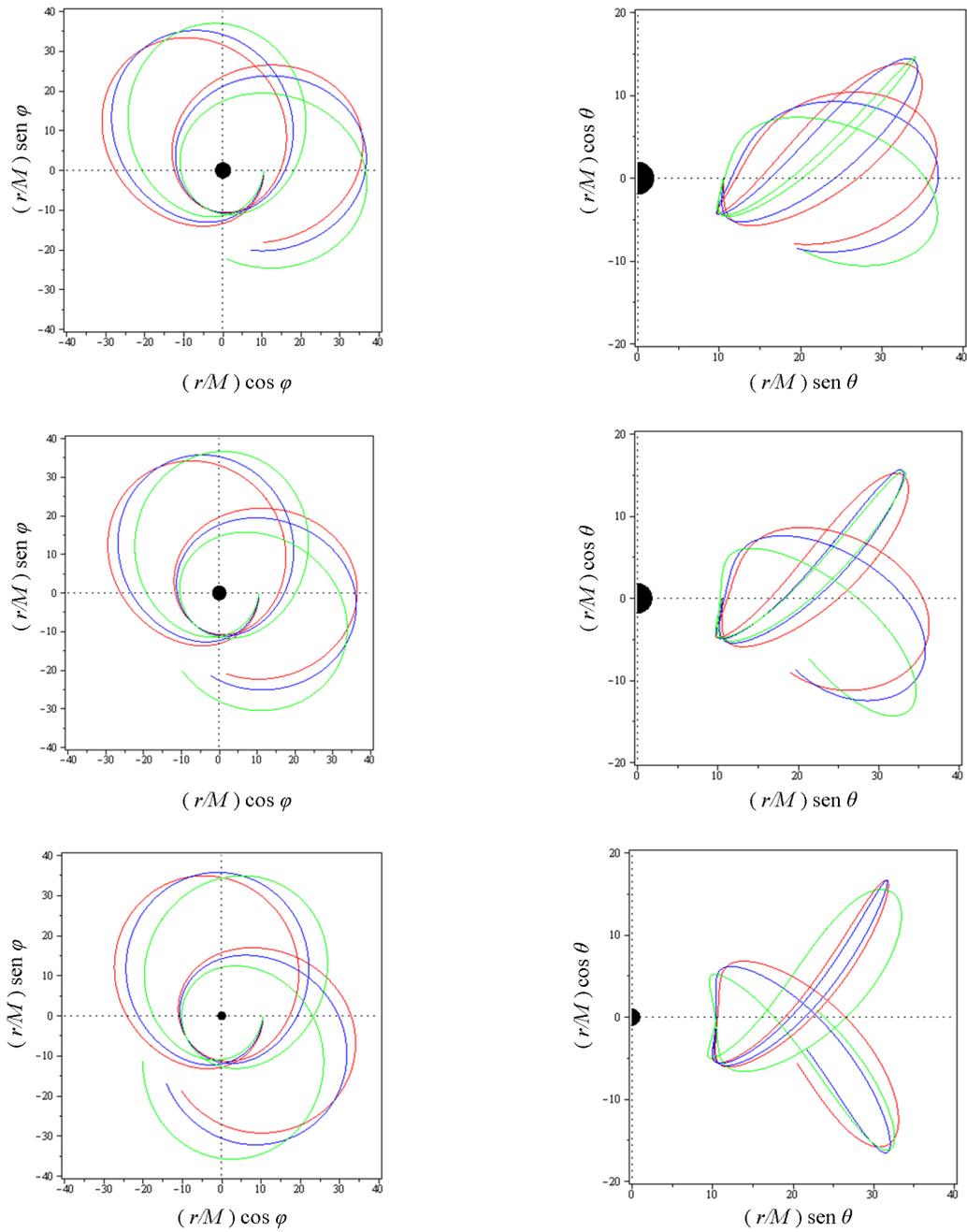
Fonte: O autor, 2012.

### 5.2.3 Buraco Negro de Kerr: Partícula Girando em Sentido Contrário

A mesma análise realizada na subseção anterior também foi feita para uma partícula girando em sentido contrário ao BN, ou seja, quando  $a$  e  $L$  possuem sinais contrários. Os valores das duas primeiras constantes de movimento para este fim foram fixos em  $E/m = 0,98$ ,  $L/m = -4,2M$ ; e a constante de Carter  $\mathcal{Q}$ ,  $p_r$  e  $p_\theta$  são dados a partir dos valores de  $a$  de acordo com a tabela 5.

Nos gráficos da figura 12, pode-se ver que a partícula traça uma órbita estável nos três casos. A precessão de periastro se acentua, conforme  $a/M$  aumenta. Analisando as projeções no plano poloidal, observa-se que o movimento nesse caso é mais amplo do que o movimento encontrado para partículas, girando no mesmo sentido do BN.

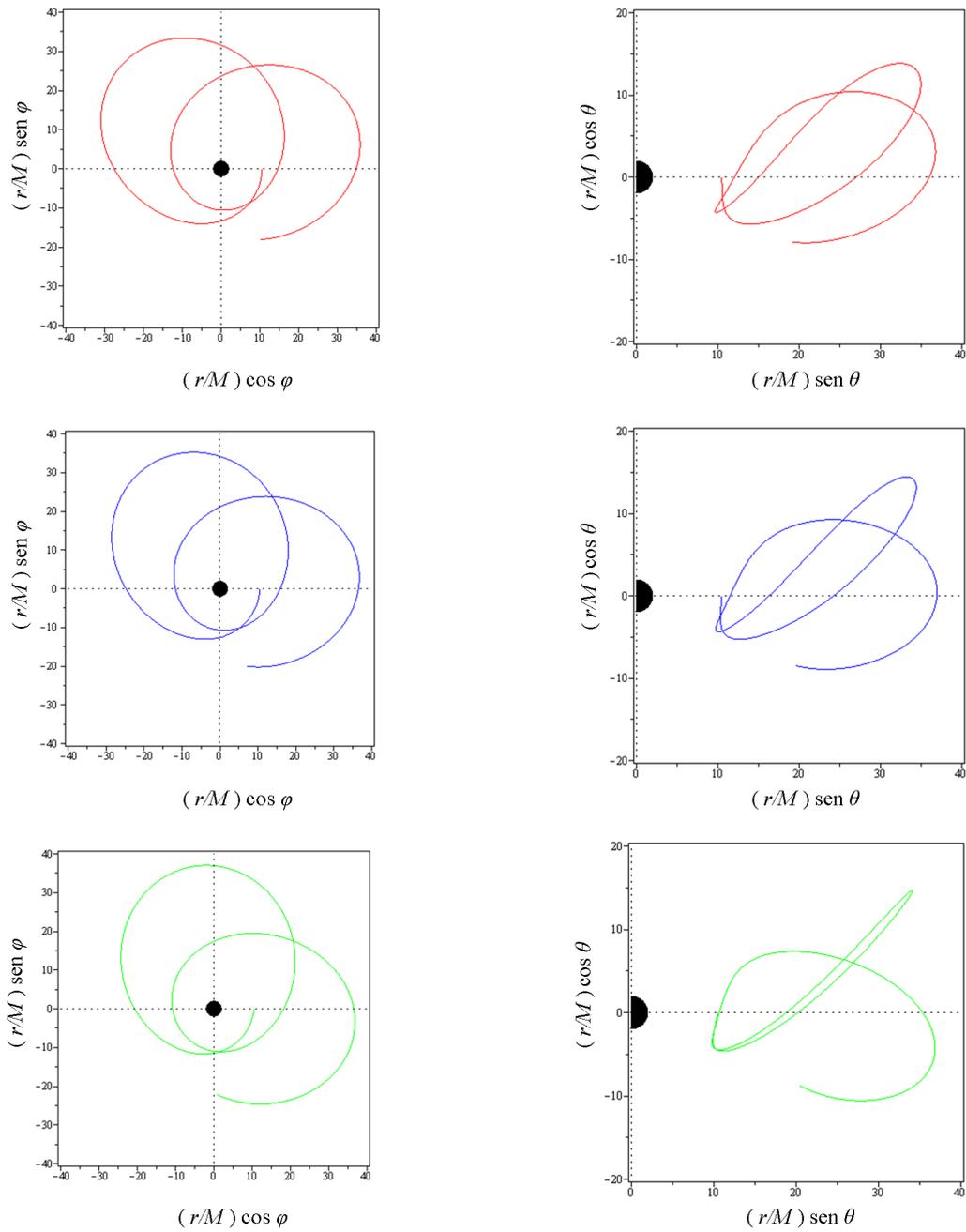
Figura 12 - Movimento de uma partícula livre, girando no sentido contrário a um Buraco Negro.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direta):  $a = 0, 3M$ ;  $a = 0, 6M$  e  $a = M$ , respectivamente.

Fonte: O autor, 2012.

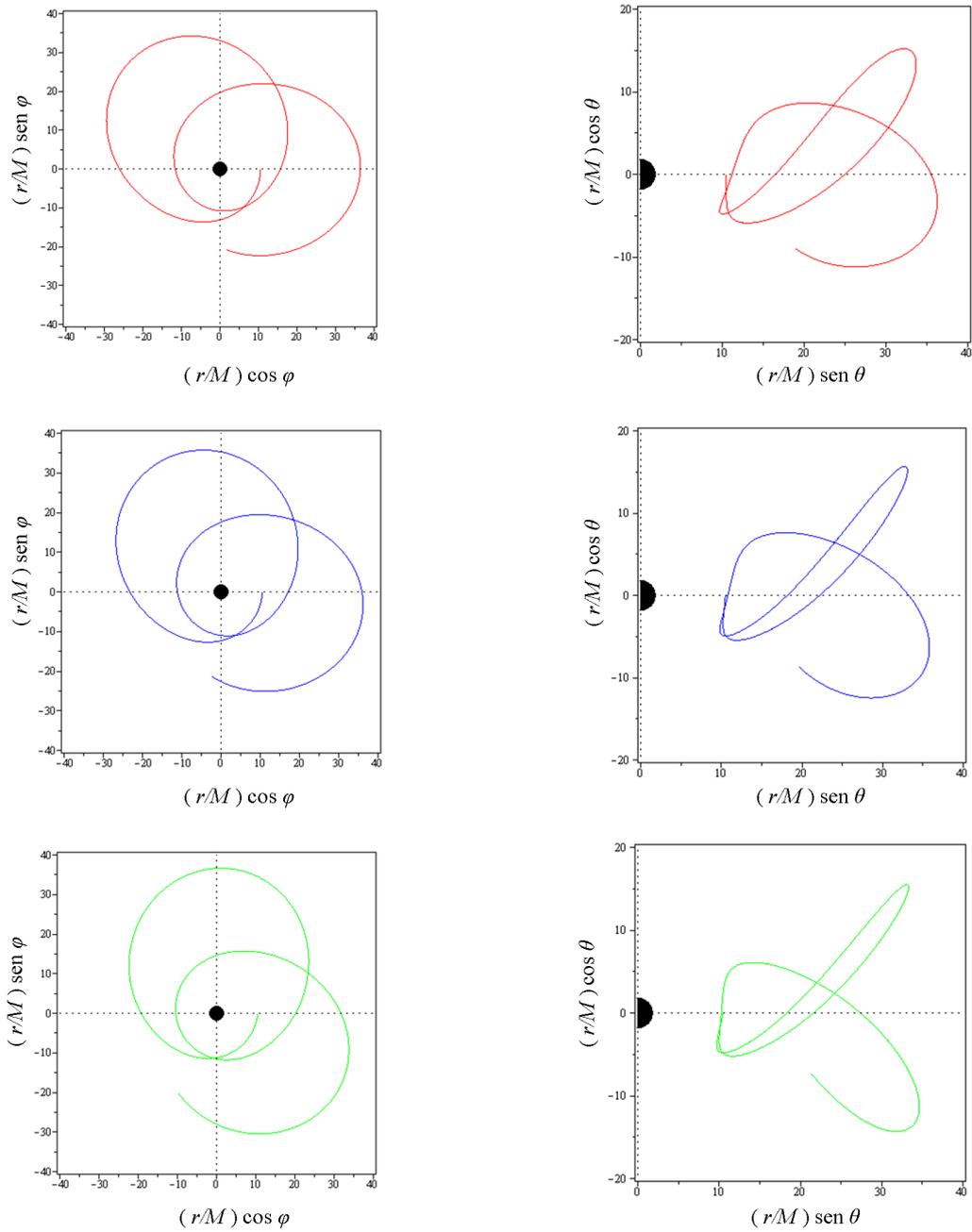
Figura 13 - Movimento de uma partícula livre girando no sentido contrário a um Buraco Negro.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direta):  $a = 0, 3$ .

Fonte: O autor, 2012.

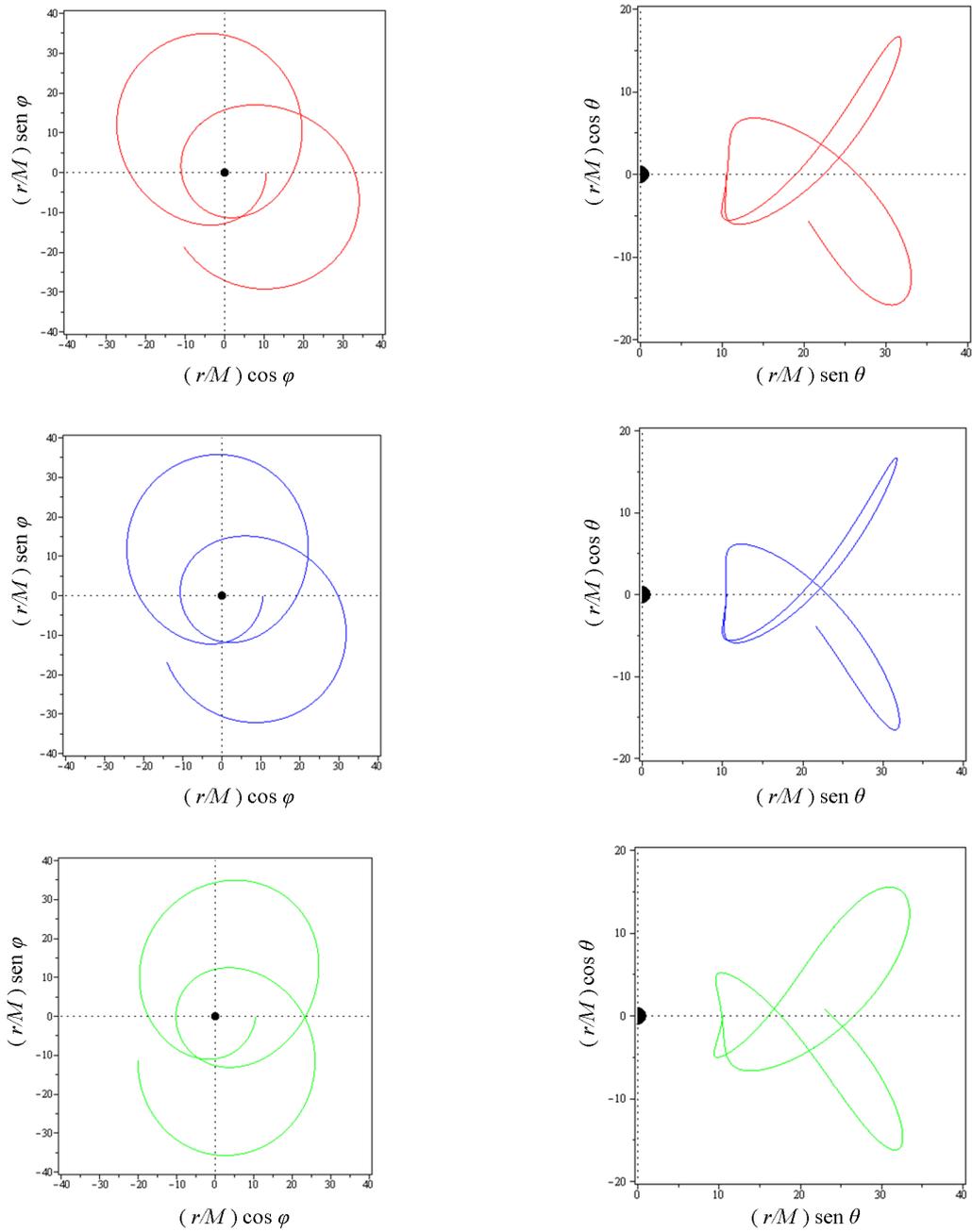
Figura 14 - Movimento de uma partícula livre girando no sentido contrário a um Buraco Negro.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direta):  $a = 0,6M$ .

Fonte: O autor, 2012.

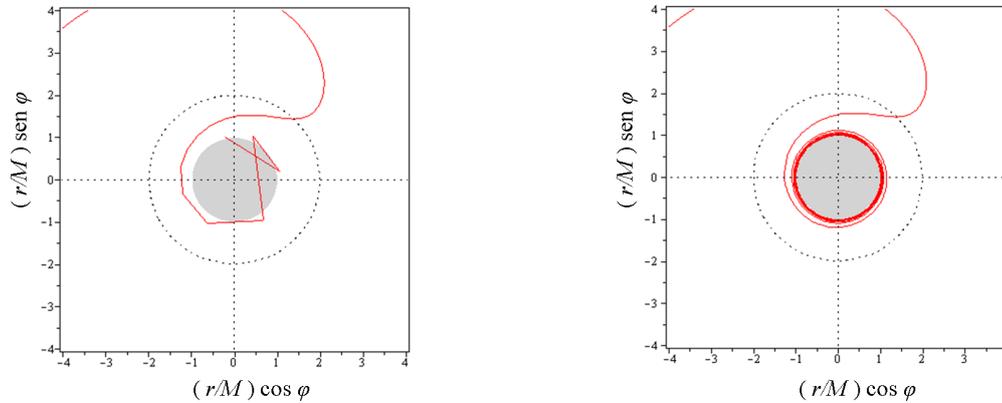
Figura 15 - Movimento de uma partícula livre girando no sentido contrário a um Buraco Negro.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direta):  $a = M$ .

Fonte: O autor, 2012.

Figura 16 - Plano equatorial do movimento de uma partícula livre em torno de um Buraco Negro de Kerr.



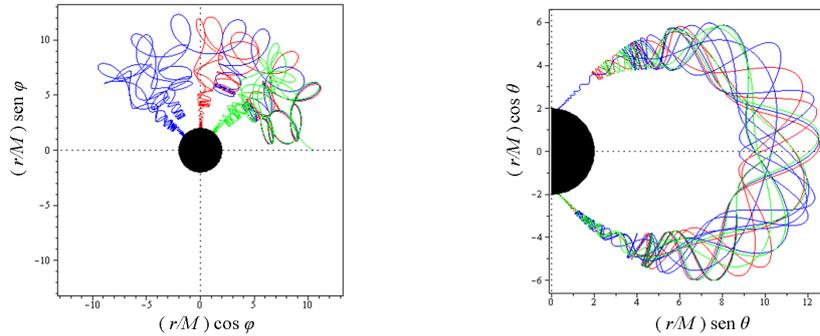
Legenda: Passo fixo em  $h = 10^{-2}$  (esquerda); passo variando entre  $h = 10^{-2}$  e  $h = 10^{-6}$  (direita),  $Q/m^2 = 2,3581353878116343575$ ;  $p_r/m = 0,17$  e  $p_\theta/m = -1,5356221500784736849$ .

Fonte: O autor, 2012.

Utilizando o caso de Kerr extremo, como exemplo e atribuindo condições iniciais específicas, é possível produzir trajetórias que, aparentemente, caem no horizonte de eventos, como acontece na figura 16. Conforme a partícula se aproxima do horizonte de eventos, as derivadas crescem e os pontos da trajetória calculados com  $h$  fixo ficam muito distantes uns dos outros. Uma vez que o erro por passo na integração numérica, depende das derivadas, esse também cresce, resultando em uma diminuição na precisão do método. Uma análise dos dados mostrou que a maior variação ocorreu na coordenada  $\phi$ . A fim de recuperar a precisão, o programa foi modificado para trabalhar com um passo variável: quando a variação,  $\Delta\phi$ , entre dois pontos consecutivos, excede 0,01, o passo é reduzido por um fator que visa manter o valor de  $\Delta\phi$  menor do que 0,01. Para evitar que  $h$  diminua indefinidamente, foi especificado um valor mínimo,  $h_{min} = 10^{-6}$ , para o passo. Quando  $h$  atinge esse valor, a integração para.

É evidente que não se pode estimar de forma segura o erro, pois não são conhecidos os valores da derivada quinta. Porém, a imprecisão do algoritmo para  $h = 10^{-6}$  é  $\epsilon \approx 10^{-32} f^{(5)}$ . Supondo que  $f^{(5)}$  não seja muito diferente de 1, esse erro é compatível com os 38 algarismos utilizados no programa, mas é muito além das possibilidades de um programa escrito com dupla precisão, mostrando a utilidade da biblioteca de múltipla. É interessante observar o comportamento da partícula próxima à ergosfera: em torno de  $r = 2,45M$  o sentido de rotação da partícula, que era contrário ao BN, inverte mostrando o efeito de arrasto do espaço-tempo em torno do BN por seu momento angular.

Figura 17 - Partícula em um campo magnético externo a um Buraco Negro de Schwarzschild.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $p_r/m = 0,187$  e  $p_\theta/m = -1,1288940582394043851$  (vermelho);  $p_r/m = 0,188$  e  $p_\theta = -1,1139717432359905867$  (azul);  $p_r/m = 0,189$  e  $p_\theta/m = -1,0987655776953661646$  (verde).

Fonte: O autor, 2012.

### 5.3 Partícula em um Campo Magnético Externo

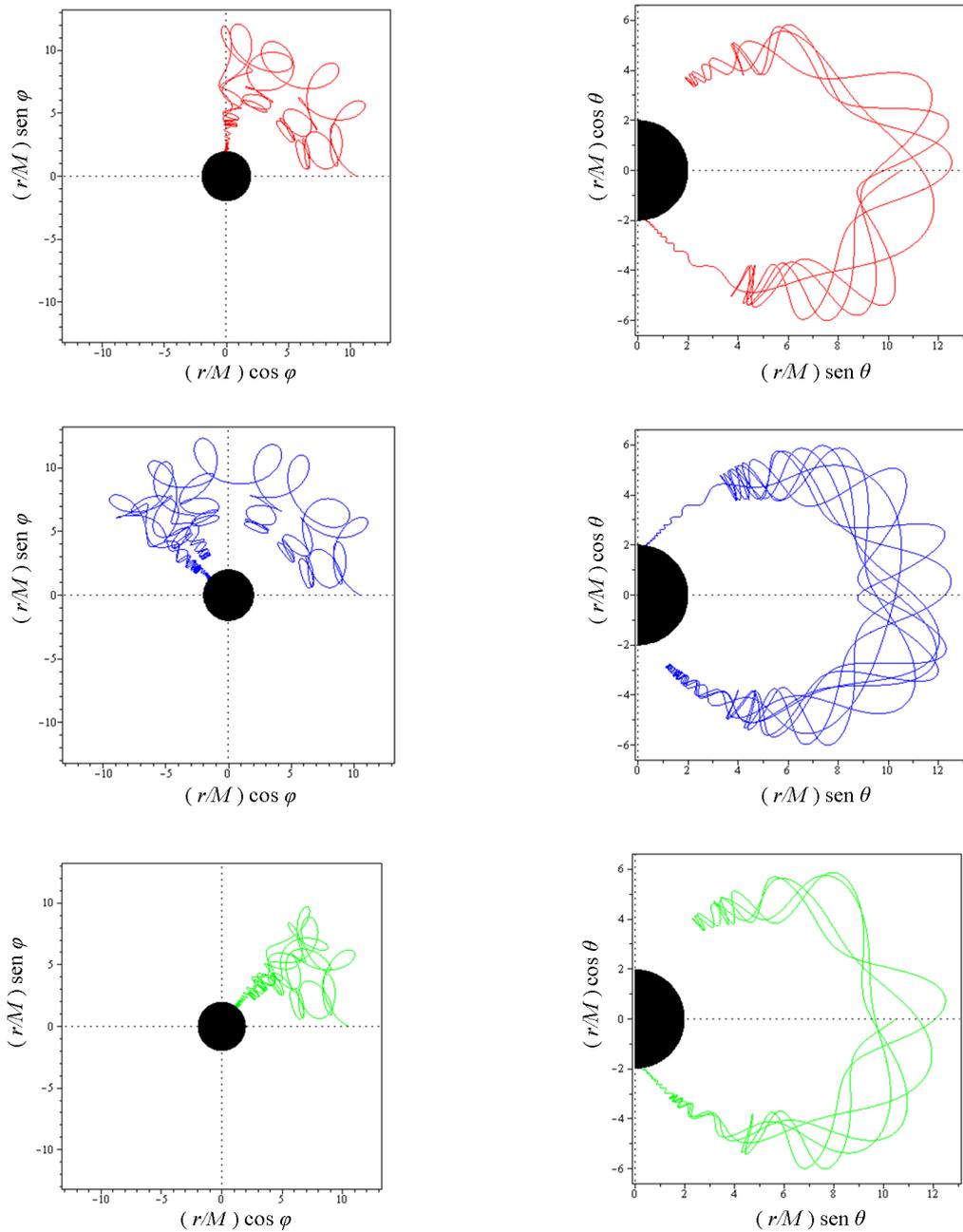
Para o movimento de partículas com carga,  $q$ , em um campo magnético externo ao BN,  $Q$  não é mais uma constante, o sistema dinâmico não é integrável, e, por isso, trajetórias caóticas podem surgir. Nesse caso, um novo parâmetro,  $Q_d$ , associado à carga da partícula e ao momento de dipolo magnético,  $\mu$ , do campo externo é definido como  $Q_d \equiv (q/m)\mu$ . Em todas as trajetórias apresentadas a seguir, foi monitorado o valor da massa de repouso,  $m$ , que serve para verificar a precisão do programa. O passo  $h = 0,001$  foi escolhido de modo que o valor de  $m$  não divergisse além da precisão desejada.

#### 5.3.1 Buraco Negro de Schwarzschild

Nas integrações a seguir, as constantes de movimento  $E$  e  $L$ ; e o parâmetro  $Q_d$  foram fixados <sup>19</sup> em  $E/m = 0,92$ ;  $L/m = -7M$  e  $Q_d = 70M^2$ . Estudando os gráficos na figura 18, vê-se que as partículas sempre caem no horizonte de eventos. Também observa-se que pequenas alterações nas condições iniciais geraram diferenças significativas nas trajetórias, sugerindo um comportamento caótico. Repara-se em particular que, embora o valor inicial de  $p_r$  varie suavemente do primeiro ao terceiro gráfico, os pontos em que a partícula atinge o horizonte de eventos são bem afastados.

<sup>19</sup> Para um elétron em torno dos buracos negros considerados, esse valor de  $Q_d$ , em unidades gaussianas, equivale um campo magnético de  $10^{-3}$  Gauss, validando sua interpretação como uma perturbação.

Figura 18 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Schwarzschild.



Legenda: Planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita).

Fonte: O autor, 2012.

Tabela 6 - Condições iniciais para o movimento de uma partícula, carregada em um campo magnético externo a um BN de Kerr.

$a/M$	$p_r/m$	$p_\theta/m$	Cor
	0	-1,4430250599261012843	vermelho
0,3	0,02	-1,4305891526132610107	azul
	0,05	-1,3634409864657612686	verde
	0	-2,1772958617123738356	vermelho
0,6	0,02	-2,1690489320044922696	azul
	0,05	-2,1252275806204446417	verde
	0	-2,7207614715396672303	vermelho
0,9	0,02	-2,7141331922023825867	azul
	0,05	-2,6790656925530391809	verde

Fonte: O autor, 2012.

### 5.3.2 Buraco Negro de Kerr

Nas integrações para a métrica de Kerr, também foram fixados os valores:  $E/m = 0,9$ ;  $L/m = -7M$  e  $Qd = 70M^2$ ;  $a$ ,  $p_r$  e  $p_\theta$  foram dados conforme a tabela 6.

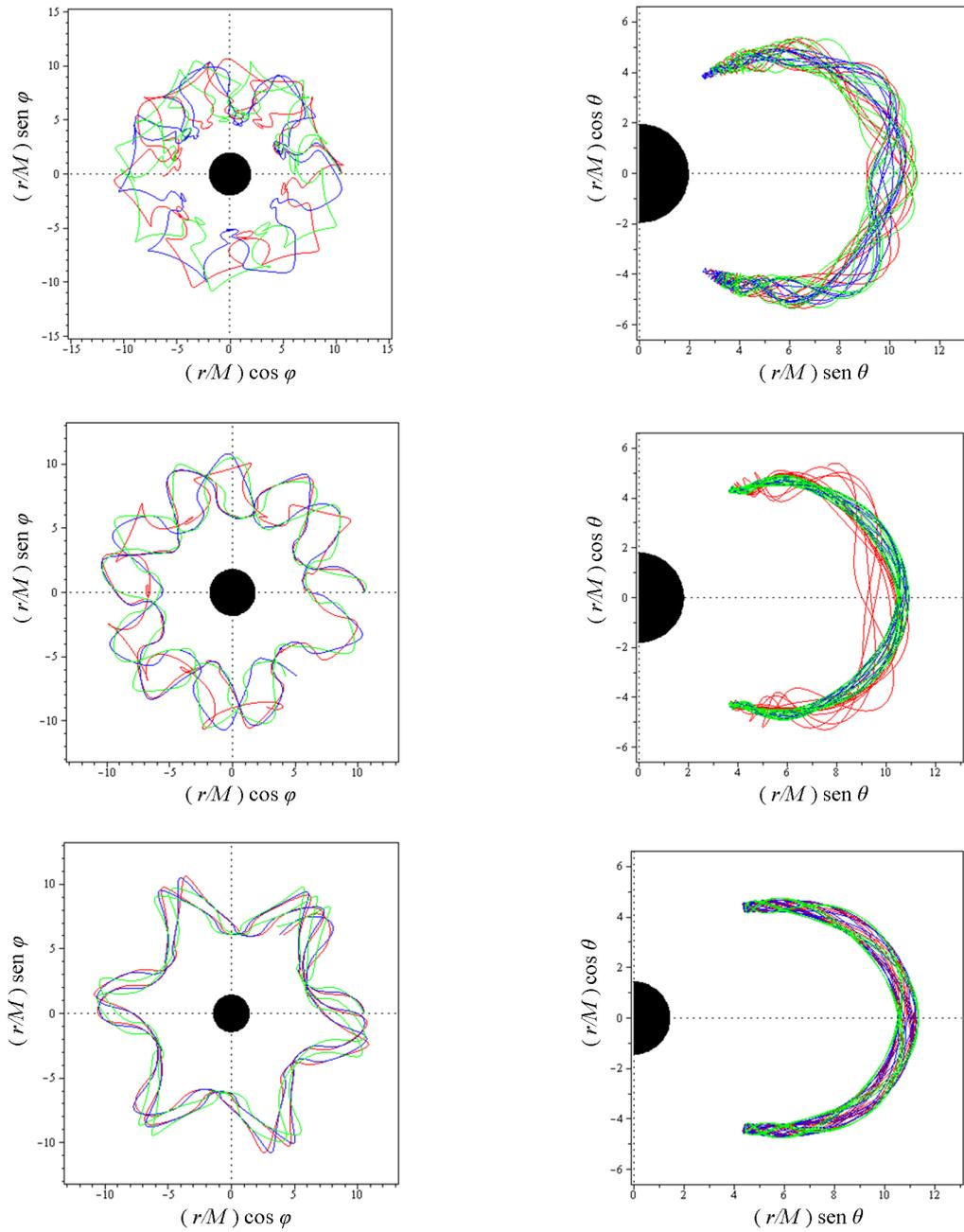
Nos gráficos da figura 19 observa-se que as partículas se aproximam mais do horizonte de eventos, e as trajetórias são, aparentemente, mais caóticas para  $a = 0,3M$ . Aumentando o valor de  $a$ , há uma aparente diminuição do comportamento caótico, pois as trajetórias são mais parecidas.

Embora não exista uma definição padrão para caos, uma ferramenta muito utilizada para estudar o nível de caos de um sistema dinâmico é a chamada seção de Poincaré (WIGGINS, 2003), em que escolhe-se um plano (ou outra superfície) do espaço de fases e, cada vez que a partícula cruzar este plano, marca-se o ponto. Nos gráficos desta dissertação foram usadas cores diferentes para distinguir os sentidos em que a partícula atravessa o plano. À medida que o nível de caos do sistema aumenta, a distribuição dos pontos tende a ser menos estruturada.

Para observar este comportamento, foi definido o plano  $\theta = \pi/2$ , e utilizados: o primeiro exemplos da figura 20 ( $a = 0,3M$ ); o segundo gráfico da figura 21 ( $a = 0,6M$ ); e a terceira ilustração da figura 22 ( $a = 0,9M$ ).

Observando as seções de Poincaré na figura 23, nota-se que o nível de caos dos exemplos utilizados está ligado ao momento angular do BN. À medida que o valor de  $a$  aumenta, diminui o nível de caos das trajetórias. Embora possam ser feitos muitos outros testes, por exemplo, manter fixo o valor de  $a$ , e analisar como o caos depende de  $E$  ou  $Q_d$ , fica claro que o método numérico apresentado neste trabalho funciona bem para descrever sistemas dinâmicos caóticos com precisão.

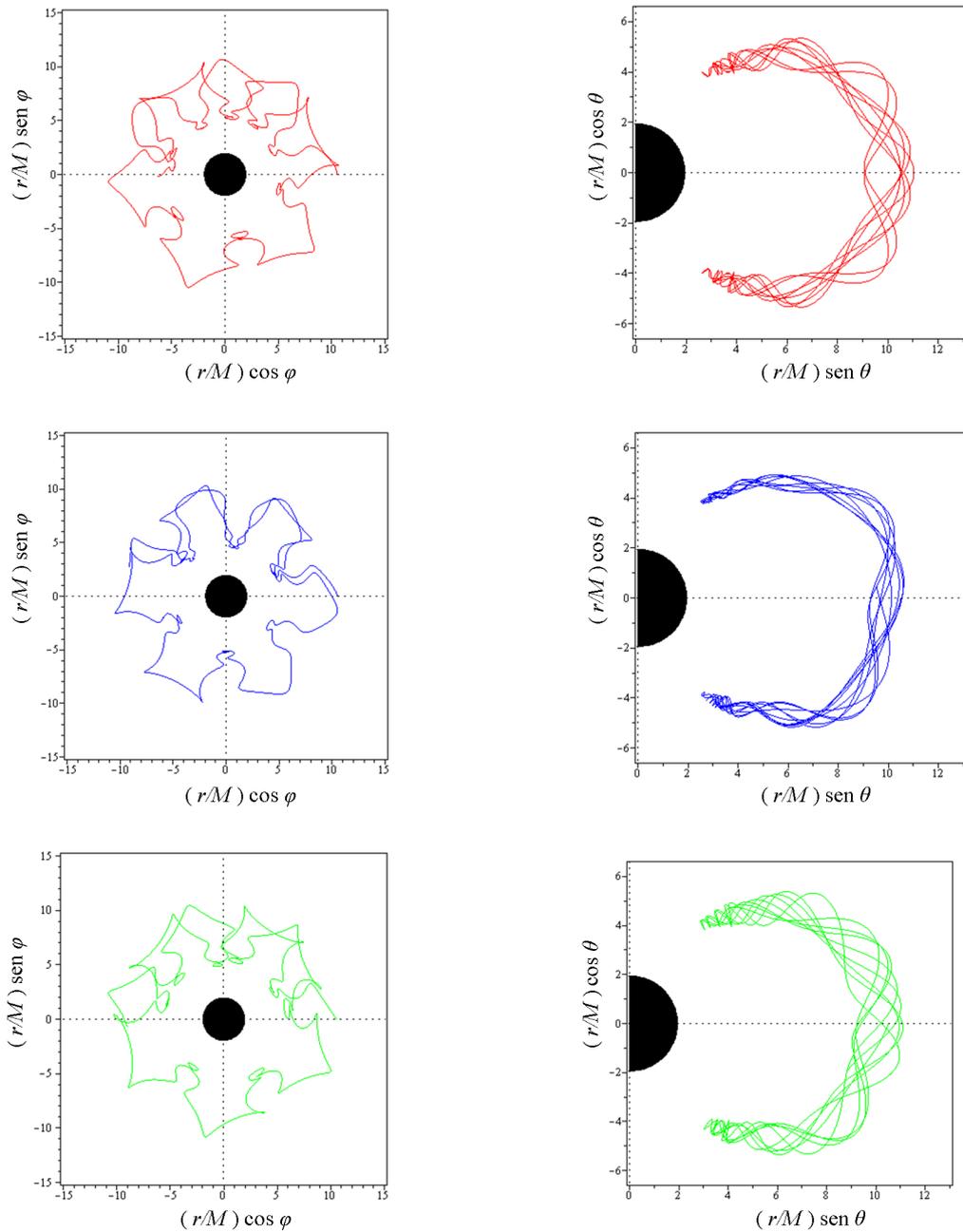
Figura 19 - Partícula em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = 0,3M$ ;  $a = 0,6M$  e  $a = 0,9M$ , respectivamente.

Fonte: O autor, 2012.

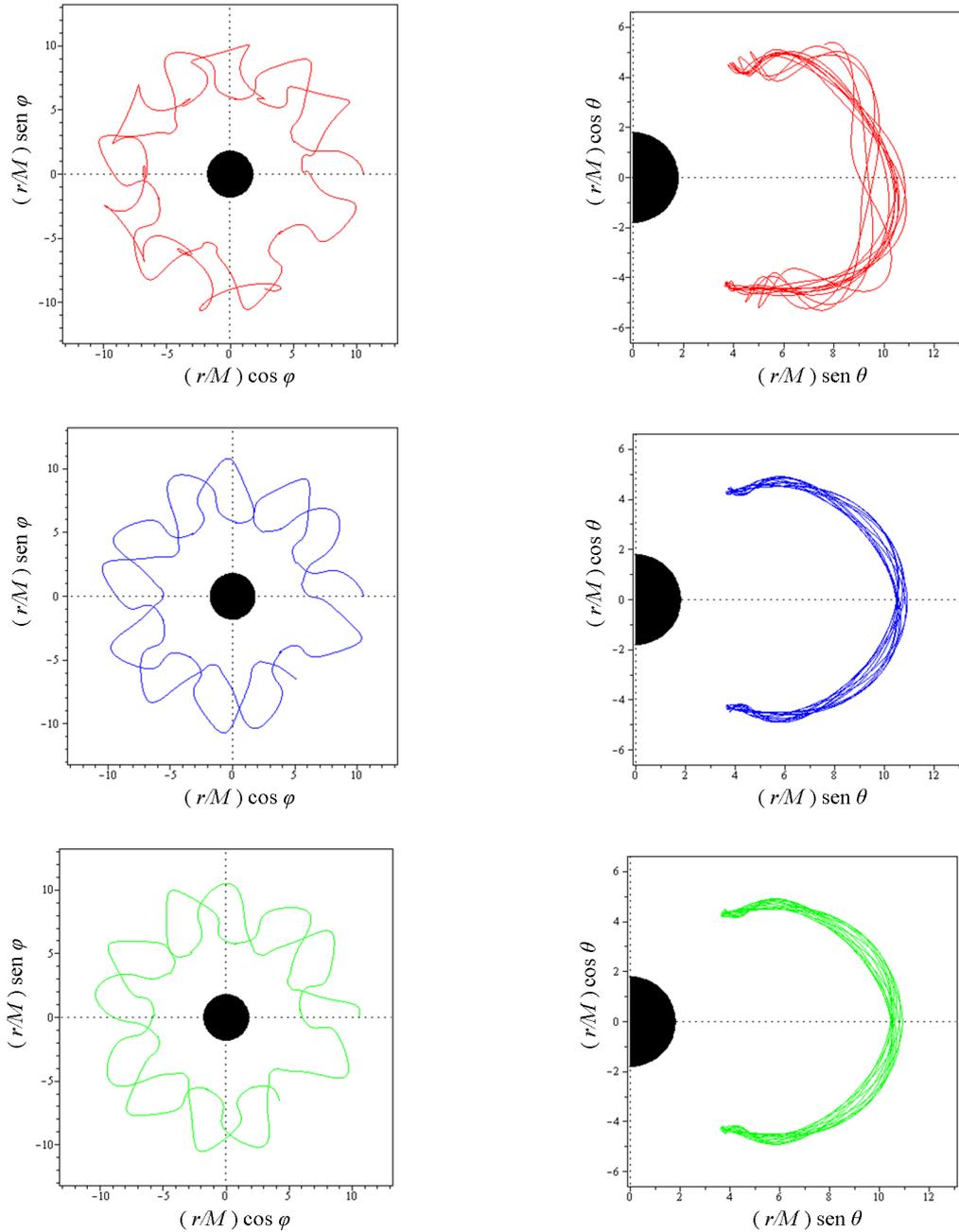
Figura 20 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = 0, 3M$ .

Fonte: O autor, 2012.

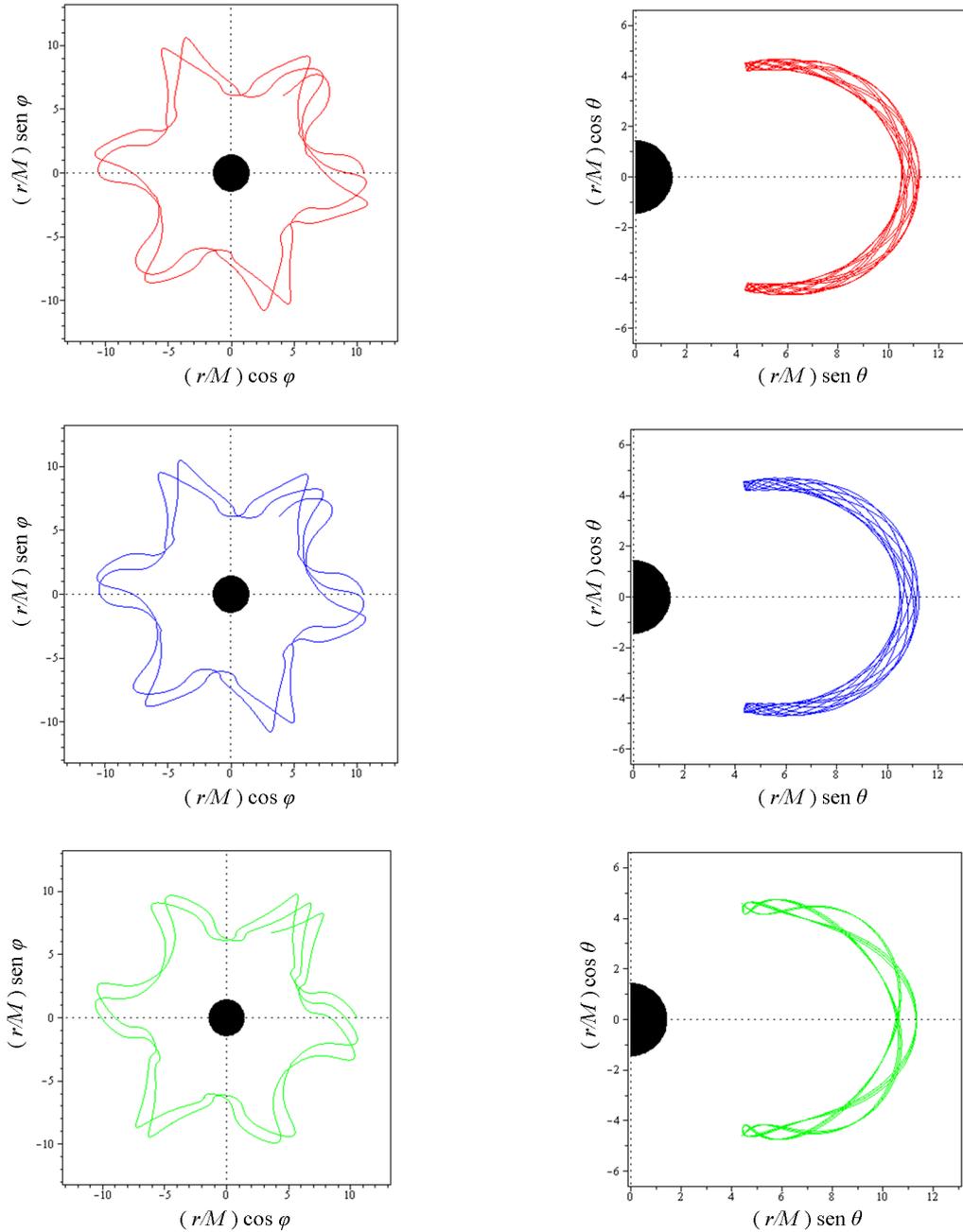
Figura 21 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = 0,6M$ .

Fonte: O autor, 2012.

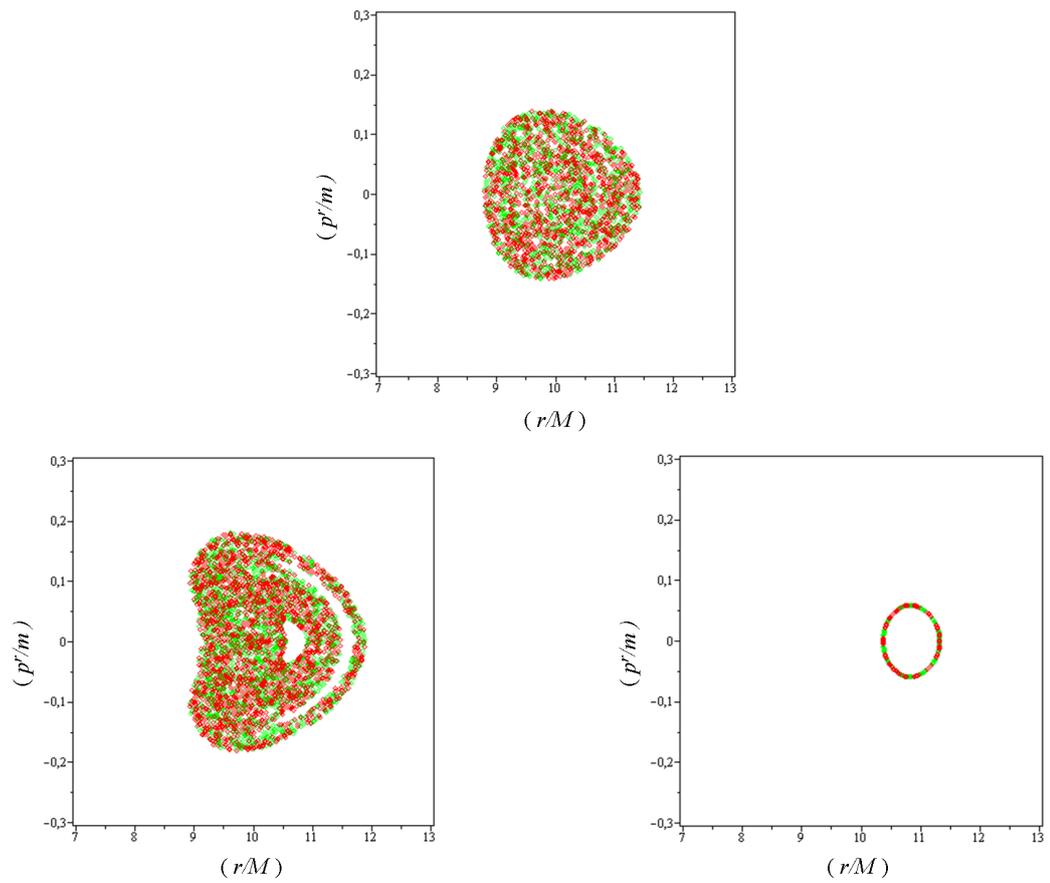
Figura 22 - Movimento de uma partícula imersa em um campo magnético externo em torno de um Buraco Negro de Kerr.



Legenda: planos equatorial (esquerda) e poloidal (direita):  $a = 0,9M$ .

Fonte: O autor, 2012.

Figura 23 - Seção de Poincaré



Buraco Negro de Kerr:  $a = 0,3M$ ;  $a = 0,6M$ ;  $a = 0,9M$ , respectivamente.  
 Fonte: O autor, 2012.

## CONCLUSÃO

Sistemas dinâmicos não-lineares são importantes em diversos ramos da Ciência. Além da física, onde sua aplicação mais óbvia é na modelagem de turbulência, sistemas dinâmicos aparecem na Ecologia, na Economia, na Meteorologia, etc. Por sua natureza, poucos desses sistemas possuem soluções analíticas e, portanto, o estudo de sua evolução exige o uso de métodos numéricos e, inevitavelmente, a implementação desses na forma de aplicativos em computadores. Uma característica comum a sistemas não-lineares é a possibilidade de comportamento caótico ou, pelo menos, uma dependência sensível às condições iniciais.

Dentro da Física, a RG é uma área famosa pela complexidade matemática e não-linearidade de suas equações de campo, que faz dela uma fonte em potencial de sistemas dinâmicos caóticos, e um palco excelente para testar e comparar a precisão e eficiência de métodos numéricos.

Um programa para investigar sistemas caóticos deve exibir duas características importantes: rapidez de execução e a possibilidade de trabalhar com um alto nível de precisão. A elaboração desse tipo de programa requer ferramentas que sejam capazes de trabalhar simultaneamente com esses dois aspectos. Nesse intuito, o presente trabalho dedicou-se a buscar soluções eficazes para investigar sistemas dinâmicos caóticos em RG, aplicando-as ao movimento de partículas em torno de BNs. Especificamente, foram usadas a linguagem de programação C++ que, por ser compilável, produz um programa executável eficiente, e a biblioteca MPFR para alcançar uma precisão arbitrária na aritmética. Em conjunto, foi usado um *wrapper* para facilitar a transcrição das equações físicas ao código fonte.

Foi estudado o movimento de uma partícula massiva carregada em torno de BNs de Schwarzschild e de Kerr em duas situações: no vácuo e com um campo magnético externo. O primeiro caso é muito conhecido, as trajetórias são bem comportadas, e serviu para verificar o funcionamento dos programas, bem como avaliar sua velocidade e estabilidade. A inclusão de um campo magnético torna o sistema não-integrável e abre a possibilidade da existência de trajetórias caóticas. Na presença do campo magnético, foram estudados BNs com diversos valores de momento angular, variando as condições iniciais da partícula em cada caso.

Foi observado que pequenas alterações nas condições iniciais mudaram significativamente as trajetórias nos casos em que o momento angular do BN era pequeno, indicando a existência de caos. Para aprofundar a análise foram elaboradas seções de Poincaré que confirmaram o vínculo entre momento angular e o grau de caos.

Apesar de, neste trabalho, ser aplicado especificamente ao contexto da RG, o programa pode ser usado para resolver qualquer equação diferencial na qual se deseje um

alto nível de precisão.

Analisando os resultados encontrados no trabalho, tanto do ponto de vista da precisão quanto do ponto de vista da velocidade de execução, as ferramentas escolhidas (método de Runge-Kutta de quarta ordem, linguagem C++, biblioteca MPFR e *wrapper*), se mostraram eficazes na resolução das equações de movimento, em particular naquelas com maior grau de complexidade, abrindo a possibilidade de estudar de forma mais confiável sistemas dinâmicos caóticos.

Há várias extensões possíveis deste trabalho:

- Adaptar o programa para calcular trajetórias de partículas (massivas ou não) em métricas mais gerais, tais como Schwarzschild-de-Sitter ou Kerr-de-Sitter, acrescentando um campo externo e analisando o efeito da constante cosmológica sobre o caos;
- Implementar métodos de Runge-Kutta de ordens superiores (por exemplo de oitava ordem), a fim de diminuir o número de iterações e verificar se isso torna a execução do programa mais rápida.
- Adaptar os programas para rodar em um sistema distribuído (*cluster*), em que seria possível calcular simultaneamente trajetórias com condições iniciais diferentes, quantas os processadores permitirem.

## REFERÊNCIAS

- BOWER, G. C. High resolution imaging of Sagittarius A. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.I.], 2006. v. 54, n. 1, p. 370–376.
- CARTER, B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, APS, [S.I.], v. 174, n. 5, p. 1559–1571, 1968.
- CARTER, B. Republication of: Black hole equilibrium states. *General Relativity and Gravitation*, Springer, [S.I.], v. 41, n. 12, p. 2873–2938, 2009.
- CHANDRASEKHAR, S.; CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. [S.I.]: Oxford university press, 1998. v. 69.
- DE SITTER, W. On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein's latest hypothesis. *Oninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings*, [S.I.], v. 19II, p. 1217–1225, 1917.
- EDDINGTON, A. S. A comparison of Whitehead's and Einstein's formulæ. *Nature*, Nature Publishing Group, [S.I.], v. 113, n. 2832, p. 192–192, 1924.
- EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. *Koninklijke Preußische Akademie der Wissenschaften Sitzungsberichte*, [S.I.], v. 1915, p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A. Cosmological considerations in the general theory of relativity. *Koninklijke Preußische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, [S.I.], v. 1917, p. 142–152, 1917.
- FINKELSTEIN, D. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Physical Review*, APS, [S.I.], v. 110, n. 4, p. 965–967, 1958.
- HUBBLE, E. P. Relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, [S.I.], v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- INCE, E. L. *Ordinary Differential Equations [in Russian]*, DNTVU, Kharkov (1939). [S.I.]: Dover Publications Inc, New York, 1956.
- KARAS, V.; VOKROUHLICKÝ, D. Chaotic motion of test particles in the Ernst space-time. *General relativity and gravitation*, Springer, [S.I.], v. 24, n. 7, p. 729–743, 1992.
- KERR, R. P. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, APS, [S.I.], v. 11, n. 5, p. 237–238, 1963.
- KRUSKAL, M. D. Maximal extension of Schwarzschild metric. *Physical review*, APS, [S.I.], v. 119, n. 5, p. 1743–1745, 1960.
- LEMOIS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.I.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics*. [S.I.]: Springer, 1992. v. 38.

- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.I.]: San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1970.
- NEWMAN, E. T. et al. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, [S.I.], v. 6, n. 6, p. 918–919, 1965.
- OROSZ, J. A. et al. The mass of the black hole in Cygnus x-1. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, [S.I.], v. 742, n. 2, p. 84, 2011.
- PENROSE, R. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, [S.I.], v. 1, p. 252, 1969.
- PERMUTTER, S. et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999.
- PETTERSON, J. A. Stationary axisymmetric electromagnetic fields around a rotating black hole. *Physical Review D*, APS, [S.I.], v. 12, n. 8, p. 2218–2225, 1975.
- PRASANNA, A. R.; VARMA, R. K. Charged particle trajectories in a magnetic field on a curved space-time. *Pramana*, Springer, [S.I.], v. 8, n. 3, p. 229–244, 1977.
- PRASANNA, A. R.; VISHVESHWARA, C. V. Charged particle motion in an electromagnetic field on Kerr background geometry. *Pramana*, Springer, [S.I.], v. 11, n. 4, p. 359–377, 1978.
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A. Perturbations of a rotating black hole. II. Dynamical stability of the Kerr metric. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 185, p. 649–673, 1973.
- RAYAN, S. *Particle dynamics in Kerr-Newman-de Sitter spacetimes*. Dissertação (Mestrado) — University, Montréal - Québec, 2007.
- REISSNER, H. On the self-gravity of the electric field according to Einstein's theory. *Annalen der Physik*, [S.I.], v. 355, n. 9, p. 106–120, 1916.
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant. *The Astronomical Journal*, [S.I.], v. 116, n. 3, p. 1009–1038, 1998.
- SCHWARZSCHILD, K. About the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften*, [S.I.], v. 42, p. 190–197, 1916.
- SENGUPTA, S. a newtonian interpretation of the parameter “a” associated with the Kerr metric. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, [S.I.], v. 11, n. 18, p. 1445–1451, 1996.
- STEPHANI, H. et al. *Exact solutions of Einstein's field equations*. [S.I.]: Cambridge university press, 2009.
- SZEKERES, G. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7, [S.I.], v. 7, p. 285, 1960.

TAKAHASHI, M.; KOYAMA, H. Chaotic motion of charged particles in an electromagnetic field surrounding a rotating black hole. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, [S.I.], v. 693, n. 1, p. 472–485, 2009.

TEUKOLSKY, S. A. Perturbations of a rotating black hole.I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 185, p. 635–647, 1973.

TEUKOLSKY, S. A.; PRESS, W. Perturbations of a rotating black hole. III-Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *The Astrophysical Journal*, [S.I.], v. 193, p. 443–461, 1974.

THE GNU Multiple-Precision Floating-Point. 2018. Disponível em: <https://www.mpfr.org>. Acesso em: 01 maio de 2018.

WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.: s.n.], 1984.

WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 2.

WRAPPER (MPFR C++). 2012. Disponível em: <http://www.holoborodko.com/pavel/mpfr>. Acesso em: 25 setembro de 2012.

**APÊNDICE A** – Método de Runge-Kutta de quarta ordem com a biblioteca MPFR aplicada ao oscilador harmônico unidimensional

```

#include <stdio.h>
#include<time.h>
#include <mpfr.h>
#define N 2
void dif(mpfr_t x[], mpfr_t dx[]){
mpfr_set(dx[0],x[1],MPFR_RNDN);
mpfr_neg(dx[1],x[0],MPFR_RNDN);}
int main(){
mpfr_t x[N], dx[N], a[N], da[N], h, h2, h6, b;
int i, j, cont;
clock_t start, end;
FILE *saida;
double elapsed, t;
start=clock();
saida=fopen("oscilador.dat","w");
mpfr_set_default_prec(128);
for (i = 0; i < N; i++){
mpfr_inits(x[i], a[i],dx[i],da[i], (mpfr_ptr) 0);}
mpfr_inits(h, h2, h6, b, (mpfr_ptr) 0);
mpfr_set_str(h,"0.0001",10,MPFR_RNDN);
mpfr_div_2ui(h2,h,1,MPFR_RNDN);
mpfr_div_ui(h6,h,6,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(x[0],"1",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(x[1],"0",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(a[0],"1",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(a[1],"0",10,MPFR_RNDN);
t=0;
cont=0;
for (i = 0; i <= 100000; i++){
if (cont==10){
mpfr_out_str(saida,10,0,x[0],MPFR_RNDN);
fprintf (saida,"%6.5f\n",t);
cont=0;}
cont++;
dif(x,da);

```

```

for ( j=0; j <N; j++){
mpfr_mul(b,h2,da[j],MPFR_RNDN);
mpfr_add(x[j],a[j],b,MPFR_RNDN);
mpfr_set(dx[j],da[j],MPFR_RNDN);}
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
mpfr_mul(b,h2,da[j],MPFR_RNDN);
mpfr_add(x[j],a[j],b,MPFR_RNDN);
mpfr_mul_2ui(b,da[j],1,MPFR_RNDN);
mpfr_add(dx[j],dx[j],b,MPFR_RNDN);}
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
mpfr_mul(b,h,da[j],MPFR_RNDN);
mpfr_add(x[j],a[j],b,MPFR_RNDN);
mpfr_mul_2ui(b,da[j],1,MPFR_RNDN);
mpfr_add(dx[j],dx[j],b,MPFR_RNDN);}
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
mpfr_add(dx[j],dx[j],da[j],MPFR_RNDN);
mpfr_mul(b,h6,dx[j],MPFR_RNDN);
mpfr_add(x[j],a[j],b,MPFR_RNDN);
mpfr_set(a[j],x[j],MPFR_RNDN);}
t+=h;}
fclose(saida);
end = clock();
elapsed =((double) (end - start))/CLOCKS_PER_SEC;
printf("% f\n",elapsed);
return(0);}

```

**APÊNDICE B** – Método de Runge-Kutta de quarta ordem com a biblioteca MPFR acompanhado do *wrapper* aplicada ao oscilador harmônico unidimensional

```

#include <iostream>
#include <fstream>
#include <ctime>
#include <cmath>
#include "mpreal.h"
using namespace mpfr;
using namespace std;
const int N=2;
void dif(mpreal x[], mpreal dx[]){
dx[0]=x[1];
dx[1]=-x[0];}
int main(){
mpreal::set_default_prec(128);
mpreal x[N], dx[N], a[N], da[N], h, h2, h6;
int i, j, cont;
ofstream saida;
clock_t start, end;
double elapsed, t;
start=clock();
saida.open("oscilador.dat");
mpfr_set_str(h,"0.0001",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(x[0],"1",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(x[1],"0",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(a[0],"1",10,MPFR_RNDN);
mpfr_set_str(a[1],"0",10,MPFR_RNDN);
h6=h/6;
h2=h/2;
t=0;
cont=0;
for (i = 0; i <= 100000; i++){
if (cont==10){
saida.precision (30);
saida<<x[0]<<t<<"\n";
cont=0;}
cont++;

```

```
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
x[j]=a[j] + h2*da[j];
dx[j]=da[j];}
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
x[j]=a[j] + h2*da[j];
dx[j]+=2*da[j];}
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
x[j]=a[j] + h*da[j];
dx[j]+=2*da[j];}
dif(x,da);
for ( j=0; j <N; j++){
dx[j]+=da[j];
x[j]= a[j] + h6*dx[j];
a[j]=x[j];}
t+=h;}
saida.close();
end=clock();
elapsed=((double) (end - start))/CLOCKS_PER_SEC;
printf("% f\n",elapsed);
return(0);}
```