



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Tiago dos Santos Mendonça

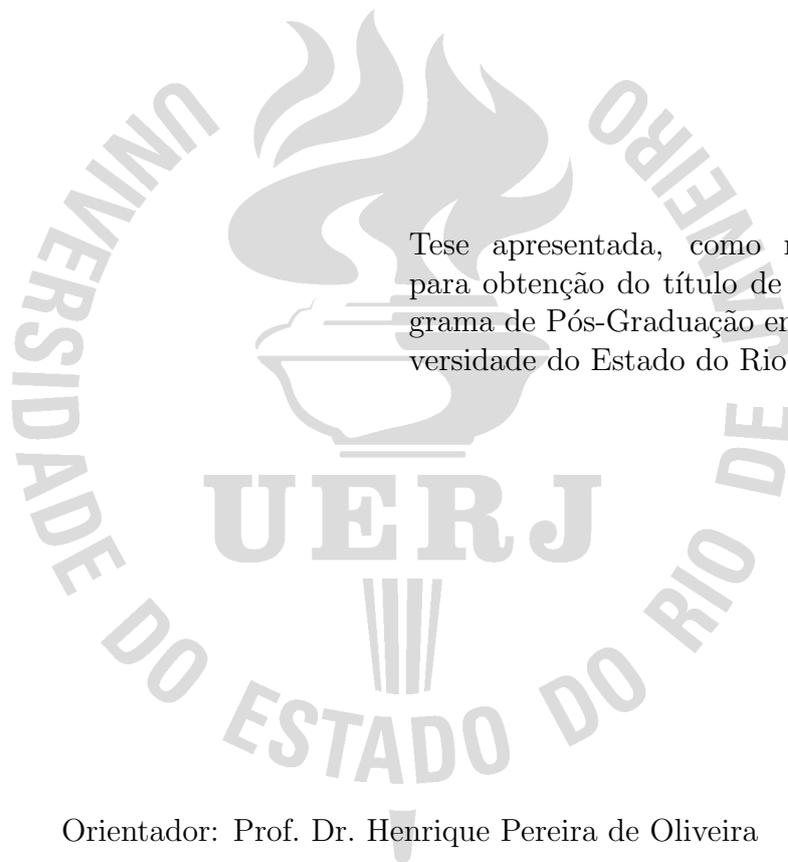
**Métodos espectrais aplicados à dinâmica de defeitos topológicos
e óscilons**

Rio de Janeiro

2019

Tiago dos Santos Mendonça

Métodos espectrais aplicados à dinâmica de defeitos topológicos e óscilons



Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ/ REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

M539m Mendonça, Tiago dos Santos.
Métodos espectrais à dinâmica de defeitos topológicos
e óscilons / Tiago dos Santos Mendonça. – 2019.
110 f. : il.

Orientador: Henrique Pereira de Oliveira.
Tese (doutorado) - Universidade do Estado do Rio de
Janeiro, Instituto de Física Armando Dias Tavares.

1. Teoria de campos (Física) – Equações diferenciais -
Teses. 2. Klein-Gordon, Equação de – Teses. 3. Equações
diferenciais – Soluções numéricas - Teses. I. Oliveira,
Henrique Pereira de. II. Universidade do Estado do Rio de
Janeiro. Instituto de Física Armando Dias Tavares. III. Título.

CDU 530.145:517.9

Bibliotecária: Teresa da Silva CRB7/5209

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou
parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Tiago dos Santos Mendonça

Métodos espectrais aplicados à dinâmica de defeitos topológicos e óscilons

Tese apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor, ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 22 de Maio de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira (Orientador)
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Willians Oswaldo Barreto Acevedo
Instituto de Física Armando Dias Tavares - UERJ

Prof. Dr. Eduardo Rodrigues Lima
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Dra. Raissa Fernandes Pessoa Mendes
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer especialmente ao meu orientador, Professor Dr. Henrique P. de Oliveira que, nesses últimos 8 anos, sem dúvidas, foi um divisor de águas, não só na minha formação como Físico mas também como pessoa, me incentivando a perpassar as barreiras das dificuldades, sobretudo buscando a qualidade nas ideias, estimulando a minha criatividade e o meu amadurecimento como profissional.

Agradeço à minha família por todo suporte financeiro e afetivo, sendo imprescindível para minha dedicação com o doutorado. Agradeço à minha namorada Agnes Léa pela companhia.

Agradeço também à Professora Ma. Ignez Athayde e todos os amigos do Colégio Militar do Rio de Janeiro, que me mostraram a física sob uma ótica social, contribuindo significativamente para a melhoria da minha comunicação em diversos contextos.

Ao Professor Dr. Pedro Carlos Pereira, do departamento de matemática da UFRRJ, que em 2009.2, quando tinha desistido da física para cursar Agronomia, aconselhou o meu retorno ao curso de Física, certamente, por ter tido a sensibilidade de perceber que eu estava no lugar errado.

Agradeço à UERJ por ter chegado até aqui.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Ninguém pode servir a dois senhores
pois odiará a um e amará o outro,
ou se dedicará a um e desprezará o outro.
Bíblia Sagrada. Mateus 6:24

RESUMO

MENDONÇA, T. S. *Métodos espectrais aplicados à dinâmica de defeitos topológicos e óscilons*. 2019. 110 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

Esse texto consiste em resolver numericamente as equações diferenciais não lineares (equação de Klein-Gordon) que regem a dinâmica dos kinks (1+1) e óscilons (3+1), através dos métodos pseudoespectrais. Tanto os kinks como os óscilons estão presentes em diversos contextos da física, como matéria condensada, física de partículas, cosmologia, fibras óticas e etc. Para resolução dessas equações foi desenvolvida uma forma alternativa para utilização dos métodos pseudoespectrais para aproveitar os recursos de multiprocessamento através de operações matriciais permitindo um grande volume de integrações. A partir disso, estudamos as estruturas formadas para os potenciais $V_p(\phi) = 1/2 \phi^2 (\phi^{-p-1} - \phi^{p-1})^2$ e $V_n(\phi) = 1/2 (1 - \phi^{2n})^2$, onde ambos se reduzem o potencial $\lambda\phi^4$ quando $p = 1$ e $n = 1$.

Palavras-chave: Métodos Numéricos. Relatividade Numérica. Teoria de campos. Defeitos Topológicos.

ABSTRACT

MENDONÇA, T. S. *Spectral methods applied to topological defects and oscillons*. 2019. 110 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

In this work, we solve the Klein-Gordon equation numerically using spectral methods to describe the dynamics of kinks (1 + 1) and oscillons (3 + 1). We remark that kinks and oscillons appear in distinct areas such as particle physics, condensed matter, cosmology, optics, etc. We implemented efficient codes based on spectral methods taking advantage of multiprocessing resources through matrices. To be more specific, we have studied the interaction of the so-called two-kinks described by the potential $V_p(\phi) = 1/2\phi^2(\phi^{-p-1} - \phi^{p-1})^2$, with $p = 1, 3, 5, \dots$. Also, we have studied the interaction of kinks belonging to the potential $V_n(\phi) = 1/2(1 - \phi^{2n})^2$, $n = 2, 3, 4, \dots$. These topological defects are of compactlike kinks. In the last part of the thesis, we have considered the dynamics of oscillons; in other words, we have integrated the Klein-Gordon equation numerically in 3+1 dimensions. We first recovered the known results of the case of the ϕ^4 model, and in the sequence, we explore oscillons described by the potentials cited previously.

Keywords: Numerical Methods. Numerical Relativity. Field theory. Topological defect.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Gráfico da função $f = \arcsin(\eta)$ (linha contínua) e a solução aproximada eq.(9) (círculos vermelho) para $N = 5$	25
Figura 2 - Histograma para $N = 100$ para o mapeamento $x = L_0 \arctanh(\eta)$ com $L_0 = 5$ e $L_0 = 20$	28
Figura 3 - Gráfico da função $f = e^{-x^2}$ (linha contínua) e a solução aproximada dada pela eq.(34) (pontos vermelhos) para $N = 3, 4, 5, 6, 7$ e $N = 8$	28
Figura 4 - Gráfico da discrepância $ e^{-x^2} - u(x) $ para $N = 16$ e $L_0 = 2$ e o gráfico do decaimento do erro com aumento de N para dois mapeamentos diferentes.	29
Figura 5 - Gráfico comparativo entre a solução exata eq.(46) e a solução aproximada	34
Figura 6 - Perfil inicial campo e densidade de energia do kink e do antikink com $x_0 = 0$ e $u = 0.1$	40
Figura 7 - Perfil inicial campo e densidade de energia da colisão kink + antikink com $x_0 = 5$ e $u = 0.1$	41
Figura 8 - Decaimento dos coeficientes não-nulos a_{2k} para o dado inicial da colisão kink+antikink com $N = 300$, $L_0 = 10$, $x_0 = 5$ e $u = 0.1$	42
Figura 9 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$: Colisão em $\lambda\phi^4$, $u = 0.1, x_0 = 5$ com formação de óscilon.	43
Figura 10 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$: Colisão em $\lambda\phi^4$, $u = 0.3, x_0 = 5$ com formação de kinks.	43
Figura 11 - Campos escalares $\phi(x, t)$ para colisão de kinks em $\lambda\phi^4$ com velocidade entre $u = 0.05$ e $u = 0.27$	45
Figura 12 - Campo escalar $\phi(x, t)$: Colisão em $\lambda\phi^4$, $u = 0.19125, x_0 = 5$, 3 Bounces.	46
Figura 13 - Decaimento do erro máximo $E(\%)$ versus ordem de truncagem N	46
Figura 14 - Autofunção $\chi_m(x)$ em $\lambda\phi^4$ para $\omega = \sqrt{3}$ e $\omega = \sqrt{3} \pm 0.01$	48
Figura 15 - Autofunção numérica $\chi_m(x)$ em $\lambda\phi^4$ com $\omega = 1.732050807568877$ (modo discreto).	49
Figura 16 - Autofunção numérica $\chi_m(x)$ em $\lambda\phi^4$ com $\omega = 2$ (modo contínuo).	50
Figura 17 - Solução da eq.(114): lumps e 2-kinks	52
Figura 18 - Perfil da densidade de energia $\rho(x, 0)$ de um 2-kink com $p = 3$ (à direita) e de um lump com $p = 4$ (à esquerda). (18): 2-kinks e lumps	52
Figura 19 - Evolução de uma solução do tipo lump com $n = 4$ sendo adicionada uma perturbação gaussiana central de amplitude 0.01	53
Figura 20 - Autofunção $\chi_1(x)$ para $p = 3, 5, \dots, 15$ e $p = 17$	55
Figura 21 - Dissipação dada por eq.(118) com $x_{abs} = 80$ e $K_{abs}^2 = 0.0001$	55

Figura 22 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.1$	57
Figura 23 - Fração de energia nos limites $x_{lim} = [-40, 40]$ para o óscilon formado com a velocidade $u = 0.1$ para $\lambda\phi^4$ (Figura 9) e $p = 3$ (Figura 22).	58
Figura 24 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.41$	58
Figura 25 - Decaimento do erro máximo $E(\%)$ (sem dissipação) versus ordem de truncagem N para a colisão da Figura 22.	59
Figura 26 - Campo escalar $\phi(x, t)$ para $p = 3$ com 16 velocidades entre $u = [0.05, 0.46]$	60
Figura 27 - Oscilação do valor da altura de um kink pós-colisão e kink criado a partir da colisão de 2-kinks com $p = 3$ sendo descrito por um kink em $\lambda\phi^4$	61
Figura 28 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.407292$	62
Figura 29 - Ajuste da solução crítica da Figura 28 (linha contínua) com uma solução do tipo lump (círculos).	63
Figura 30 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 5$ e $u = 0.08$	64
Figura 31 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 5$ e $u = 0.45$	64
Figura 32 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 7$ e $u = 0.474$	65
Figura 33 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 7$ e $u = 0.08$	65
Figura 34 - Campo escalar $\phi(x, t)$ para $p = 5$ com 16 velocidades entre $u = [0.05, 0.46]$	66
Figura 35 - Campo escalar $\phi(x, t)$ para $p = 7$ com 16 velocidades entre $u = [0.05, 0.48]$	67
Figura 36 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 7$ e $u = 0.473927$	68
Figura 37 - Ajuste do lump criado na Figura 36 com $q = 4$ e $b = 0.1409$	68
Figura 38 - Perfil inicial do campo escalar $\phi(x, 0)$ e da densidade de energia $\rho(x, 0)$ do lump simetricamente perturbado.	70
Figura 39 - Perturbação simétrica do lump $p = 4$ com $B_0 = [0.1, 0.6]$ em 10 partes.	70
Figura 40 - Perturbação simétrica do Lump com $B_0 = 0.438796$, $x_p = 30$ e $b_0 = 1$	71
Figura 41 - Estado final do Lump perturbado ajustado com um lump $b_0 = 0.255986$ e $q = 4$	71
Figura 42 - Gráfico do potencial $V_n(\phi) \times \phi$ para $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$	73
Figura 43 - Solução da eq.(133): Perfil estático do campo $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$	74
Figura 44 - Perfil estático da densidade de energia ρ_0 para $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$	74

Figura 45 - Dado inicial da densidade de energia da colisão de dois compactons ρ_0 para $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$	75
Figura 46 - Autofunções χ para as autofrequências da Tabela 2 para $n = 1, 2, ..7$ e $n = 8$	76
Figura 47 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_n(\phi)$ com $n = 4$ e $u = 0.080622$	79
Figura 48 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $u = 0.134285$	79
Figura 49 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $u = 0.16733$	80
Figura 50 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 2$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$	81
Figura 51 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 4$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$	82
Figura 52 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 6$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$	83
Figura 53 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 8$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$	84
Figura 54 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 1, 2, 8$ e $n = 16$ para velocidade $u = 0.30$	86
Figura 55 - 2,3,4 e 5 Bounces para $V_n(\phi)$ com $n = 2$	87
Figura 56 - 2,4,6 e 8 bounces para $V_n(\phi)$ com $n = 4$	88
Figura 57 - 8 bounces para $V_n(\phi)$ com $n = 8$ e 6 bounces para $n = 16$	88
Figura 58 - Janelas de escape para $V_n(\phi)$ com $n = 2, 4, 5$ e $n = 8$	89
Figura 59 - Estrutura metaestável para $V_n(\phi)$ com $n = 8$ e $u = 0.26940$	90
Figura 60 - Óscilons para o potencial teste, $V_L(\phi)$. Comparação da solução eq.(158) com a solução numérica. Campo $\phi(r, t)$	94
Figura 61 - Óscilon para o potencial $\lambda\phi^4$. Comparação da solução exata eq.(158) com a solução numérica. Campo $\phi(r, t)$	95
Figura 62 - Campo $\phi(0, t)$ para óscilon para o potencial $\lambda\phi^4$	96
Figura 63 - Campo $\phi(0, t)$ para óscilon para o potencial $V_p(\phi)$ com $p = 3$	97
Figura 64 - Campo $\phi(0, t)$ para óscilon para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$	97
Figura 65 - “Óscilon perpétuo” para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$ com $r_0 \approx 1.56688$	98
Figura 66 - Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $\lambda\phi^4$	99
Figura 67 - Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $\lambda\phi^4$ com $r_0 = 2.4$	100
Figura 68 - Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$	100
Figura 69 - “Óscilon eterno” Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $r_0 = 1.14$	101
Figura 70 - Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 3$	101

Figura 71 - Óscilon em $\lambda\phi^4$ com $r_0 = 3.9$	103
Figura 72 - Óscilon em $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $r_0 = 1.0$	104
Figura 73 - Óscilon em $V_n(\phi)$ com $n = 3$ e $r_0 = 1.857143$	105

LISTA DE SÍMBOLOS

Os vetores (matriz linha ou coluna) serão indicados usualmente com uma seta $\vec{\cdot}$, acima de uma letra,

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_N \end{bmatrix}.$$

Tendo como referência a notação utilizada em Boyd (2001), usaremos duas setas $\vec{\vec{\cdot}}$, acima de uma letra para indicar uma matriz,

$$\vec{\vec{A}} = \begin{bmatrix} A_{00} & \dots & A_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N0} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}.$$

Será funcional realizar as seguintes definições:

1. Seja $g = g(y)$ uma função escalar. Usaremos “ \cdot ” para indicar a operação $g(y)$ em que,

$$g(\vec{\vec{A}}) = g\left(\begin{bmatrix} A_{00} & \dots & A_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N0} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} g(A_{00}) & \dots & g(A_{0N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(A_{N0}) & \dots & g(A_{NN}) \end{bmatrix}.$$

2. Definimos o “produto termo a termo”: essa operação é chamada no manual do Matlab (MATHWORKS, 2019a; MATHWORKS, 2019b), como “Multiplication times” e escrita como “ \cdot ” , em nosso caso “ \cdot ”, e para potenciação dos elementos da matriz, “Element-wise power” dada por “ \wedge ”, onde:

$$\vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{B}} = \begin{bmatrix} A_{00} & \dots & A_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N0} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & \dots & B_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{N0} & \dots & B_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00}B_{00} & \dots & A_{0N}B_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N0}B_{N0} & \dots & A_{NN}B_{NN} \end{bmatrix},$$

$$\left(\vec{\vec{A}}\right)^n = \begin{bmatrix} A_{00} & \dots & A_{0N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N0} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (A_{00})^n & \dots & (A_{0N})^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{N0})^n & \dots & (A_{NN})^n \end{bmatrix}.$$

Caso o ponto “ \cdot ”, esteja ausente em alguma operação, elas serão realizadas de forma convencional.

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	15
1	MÉTODOS ESPECTRAIS	18
1.1	Aplicação dos métodos de colocação (Pseudoespectral)	19
1.2	Método de colocação (Pseudoespectral) para um domínio qualquer.	25
1.3	Resolução de equações diferenciais ordinárias com o método pseudoespectral.	29
1.4	Resolução de equações diferenciais parciais com o método pseudoespectral.	35
2	COLISÕES DE KINKS EM $\lambda\phi^4$ VIA MÉTODOS PSEUDOESPECTRAIS	38
2.1	Introdução	38
2.2	Obtenção de soluções estáticas do tipo kink em $\lambda\phi^4$	38
2.3	Vetor de evolução temporal	41
2.4	Modos Internos e Modos Contínuos	47
2.4.1	<u>Modos de vibração</u>	47
2.4.2	<u>Modos contínuos</u>	49
3	KINKS PARA O POTENCIAL $V_P(\phi)$	51
3.1	Modos Internos e Modos Contínuos para kinks com potencial $V_p(\phi)$	53
3.2	Dissipação adiabática	54
3.3	Procedimento numérico e discussões	56
3.4	Formação de soluções do tipo kink ($\lambda\phi^4$) como produto da colisão de 2-kinks	57
3.5	Formação de soluções do tipo lump como produto da colisão de 2-kinks	61
3.6	Colisões em $V_p(\phi)$ com $p = 5$ e $p = 7$	63
3.7	Formação de Lumps metaestáveis através de perturbações especiais	69
4	COLISÕES DE KINKS DO TIPO COMPACTO	72
4.1	Soluções estáticas	72
4.2	Modos Internos e Modos Contínuos para kinks com potencial $V_n(\phi)$	75
4.3	Colisões de Kinks do Tipo Compacto (KTC)	77
4.3.1	<u>Óscilon do tipo compacto (OTC)</u>	77
4.3.2	<u>Fragmentação do OTC</u>	77
4.4	Escape de KTC, bounces e fractalidade	84
5	ÓSCILONS EM (3+1) DIMENSÕES.	91
5.1	Procedimento numérico e sua validação	92

5.1.1	Validação do código $V_L(\phi)$	93
5.2	Óscilons em (3+1) dimensões em $\lambda\phi^4$	94
5.3	Óscilons em (3+1) dimensões em $V_p(\phi)$ e $V_n(\phi)$	94
5.4	Espaço de fase e colapso dos óscilons	98
5.5	Resultados com óscilons em (2+1) Dimensões	102
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	106
	REFERÊNCIAS	108

INTRODUÇÃO

Em Agosto de 1834, o engenheiro, arquiteto naval e construtor de navios John Scott Russell fez o seguinte relato (REBBI; SÓLIANI, 1984, p.1):

Estava observando o movimento de um barco que era puxado velozmente ao longo de um canal estreito por dois cavalos, quando de repente o barco parou subitamente – mas não a massa de água no canal que havia posto em movimento; esta acumulou-se ao entorno da proa do barco num estado de violenta agitação e, posteriormente, deixando-o repentinamente para trás, rolando para frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação, um monte de água arredondado, suave e bem definido, que prosseguiu seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudança de forma e variação de velocidade. Segui a cavalo e a alcancei ainda movimento com uma velocidade constante de oito ou nove milhas por hora, preservando seu formato original de uns trinta pés de comprimento por um pé a um pé e meio de altura. Diminuía gradativamente sua altura, depois de uma perseguição de uma ou duas milhas, a perdi nos meandros do canal.

Este foi o primeiro registro sobre o surgimento de uma onda solitária (kink). No trabalho Bullough (1988) encontramos detalhadamente os primeiros desdobramentos das descobertas experimentais e teóricas da época sobre o assunto. As ondas solitárias ou “kinks” (devido ao seu formato de dobra ou S) são configurações de campo com energia finita e localizada, que se deslocam sem aceleração e sem mudar a sua forma. São chamados de sólitons, os kinks que recuperam sua forma após a colisão com seu equivalente (colisão kink+antikink ou sóliton+antisóliton) (LEMONS, 2007). Os kinks são típicos fenômenos presentes em teoria de campos não-lineares (LEE, 1981). Após esse período a “onda de translação” (termo utilizado por Russell para ondas solitárias) foi vista apenas como uma curiosidade sem muitas motivações. A partir dos anos 60, o avanço tecnológico possibilitou com uso de computadores o estudo numérico de ondas não lineares. Nos anos 80 tivemos grandes contribuições com os trabalhos iniciados por Campbell et. al (GOODMAN; HABERMAN, 2005) utilizando o potencial $\lambda\phi^4$, que não possui solução exata para colisões de kinks (CAMPBELL; PEYRARD, 1986; CAMPBELL; SCHONFELD; WINGATE, 1983; PEYRARD; CAMPBELL, 1983; CAMPBELL; PEYRARD; SODANO, 1986).

Os kinks estão presentes em diversas áreas da física, além da motivação inicial originada pela mecânica dos fluidos. Uma das principais fontes de aplicação dos kinks é o desenvolvimento de fibras ópticas, tendo em vista sua propriedade de se propagar por longas distâncias mantendo sua forma (TAPPERT, 1998; CUNDIFF et al., 1999; TANG et al., 2008). Na física nuclear, sob determinadas condições, temos que os núcleos atômicos podem apresentar comportamentos similares aos sólitons (IWATA; STEVENSON, 2019). Sólitons também estão relacionados à Biologia em relação a alguns movimentos específicos das proteínas e do DNA (SINKALA, 2006) e de alguns estudos recentes associando sólitons à condução de sinais dentro dos neurônios (HEIMBURG; JACKSON, 2005; HEIMBURG; JACKSON, 2007; ANDERSEN; JACKSON; HEIMBURG,

2009), além disso há aplicações em matéria condensada (ABDULLAEV, 1989), cosmologia (APOSTOLOPOULOS; SIOPSIS; TETRADIS, 2009) e etc. Estruturas esfericamente simétricas como os óscilons (que serão apresentados a seguir) em mais de uma dimensão espacial são de grande interesse em diversos contextos da física, como por exemplo, em modelos inflacionários.(GLEISER, 2007).

Dependendo da velocidade de impacto u na colisão de kinks, eles podem ficar presos formando um estado ligado denominado “óscilon”, que trata-se de uma estrutura com densidade de energia localizada e oscilante. O artigo feito por Anninos, Oliveira e Matzner (1991) foi uma grande contribuição ao estudo das fractalidades(repetição de comportamentos obtidos ao refinar intervalos específicos da velocidade de impacto) existentes nas colisões de kinks em $\lambda\phi^4$. Essas fractalidades ocorrem abaixo da velocidade limite u_{lim} , velocidade a partir da qual todos os kinks escapam após a colisão, e são mediadas por um fenômeno chamado “bounce”, que são ricochetes dos kinks após seu primeiro contato e que podem resultar em escape. Anninos et.al atribuíram a ocorrência de bounces à transferência de energia dos modos internos de vibração para os modos de translação.

É definida uma quantidade chamada carga topológica Q , onde para uma dimensão espacial, $Q \propto [\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)]$, sendo $\phi(x)$ o campo escalar que descreve as soluções supracitadas. Se $Q \neq 0$ dizemos que a solução representa um defeito topológico, caso $Q = 0$ temos um defeito não-topológico (RAJARAMAN, 1982). Defeitos topológicos são estáveis sob pequenas perturbações, diferentemente dos defeitos não-topológicos, que são instáveis. Os kinks são exemplos de defeitos topológicos e os óscilons de defeitos não-topológicos, mas que vivem por grandes intervalos de tempo, sendo muitas vezes considerados “pseudoestáveis”(KAWASAKI; NAKANO; SONOMOTO, 2020). A partir de $(D + 1)$ dimensões com $D \geq 2$, o teorema de Derrick (BERESTYCKI; LIONS, 1983), demonstra a impossibilidade de se obter soluções estacionárias localizadas estáveis, porém é possível encontrar soluções numéricas pseudoestáveis de óscilons, que vivem por longos intervalos de tempo (COPELAND; GLEISER; MÜLLER, 1995).

Para resolver as equações que regem a dinâmica dos defeitos topológicos e dos óscilons, utilizamos os métodos espectrais, que basicamente consistem em determinar os coeficientes de uma expansão tipo série de Fourier mas podendo escolher outras funções de base além de senos e cossenos. Segundo CANUTO et al. (2006) os métodos espectrais foram utilizados para cálculos em larga escala na dinâmica de fluidos, sendo originalmente propostos em 1944 por Blinova e implementados pela primeira vez em 1954 por Silberman. Praticamente abandonados até meados da década de 1960 e reavivados em 1969-70 por Orszag e Eliason, Machenhauer e Rasmussen, foram desenvolvidos para sofisticadas aplicações na década de 1970, estendendo uma grande variedade problemas, sendo a principal corrente da computação científica nos anos 90. Os métodos pseudoespectrais tratam de uma das várias classificações dos métodos espectrais, que se baseiam em obter os coeficientes da série através da interpolação dos chamados “pontos de colocação”, definidos

como $\eta_i = \cos(i\pi/N)$ com $i = 0..N$, sendo $N + 1$ o número de coeficientes. Utilizando os métodos pseudoespectrais em termos de matrizes, podemos fazer uso de uma eficiente ferramenta de cálculo chamada “Numpy”, que é um pacote para Python dedicado a operações matriciais com alto desempenho e baixo custo computacional (OLIPHANT, 2007). Outro ponto fundamental para a realização desse trabalho foi a escolha de funções de base dos polinômios de Chebyshev compostos com funções tangentes hiperbólicas $T_k(\operatorname{arctanh}(x/L_0))$ e $T_k(2\operatorname{arctanh}(r/L_0) - 1)$, sendo L_0 uma constante positiva. Existem diversas possibilidades de escolha das funções de base, mas essa se mostrou expressivamente superior às demais para os nossos problemas em específico.

Esse texto tem como proposta central a apresentação objetiva de algoritmos otimizados para os métodos pseudoespectrais (colocação) através da operação de matrizes construídas com base espectral dos polinômios de Chebyshev nos pontos de colocação, sendo capaz de encontrar com rapidez a solução aproximada de equações não lineares com excelente custo computacional, precisão e de fácil adaptação para outros problemas. Será direcionado à aplicação desses algoritmos para resolução de equações referentes aos kinks e óscilons. Será detalhada no Capítulo 1 a construção numérica das matrizes dos polinômios de Chebyshev nos pontos de colocação e que servirão genericamente para as aplicações desse texto. No Capítulo 2 exploramos as conhecidas colisões de kinks para o potencial $\lambda\phi^4$, com o intuito de validação do código e exposição de aspectos que serão utilizados nas seções posteriores, como comportamentos básicos de escape de kinks e estado ligado, janelas de bounces, estimativa numérica dos modos internos de vibração e etc. É explorada no Capítulo 3 uma nova classe de defeitos topológicos intitulados “2-kinks” e de defeitos não-topológicos chamados “lump” através de colisões e perturbações, obtendo como principais resultados a formação de lumps através da colisão de 2-kinks e a metaestabilidade a partir da perturbação do lump (MENDONÇA; OLIVEIRA, 2015; MENDONÇA; OLIVEIRA, 2019). No Capítulo 4 estudamos colisões de ondas solitárias que se “compatificam” com o aumento do parâmetro inteiro “n” chamados de kinks do tipo compacto (KTC), onde temos a partir de colisões para determinadas faixas de velocidade a formação de estruturas ligadas ressonantes que se destroem violentamente se fragmentando em óscilons viajantes, além da existência de fractalidades (BAZEIA et al., 2019). São investigados no Capítulo 5, os óscilons em (3+1) dimensões, resgatando os resultados já conhecidos pela literatura e obtendo soluções para os potenciais dos 2-kinks e em especial dos KTC, onde obtemos óscilons que vivem por intervalos de tempo indefinidamente longos. E no último capítulo são apresentadas as considerações finais junto às perspectivas futuras são apresentadas.

1 MÉTODOS ESPECTRAIS

Métodos espectrais constituem uma classe de técnicas utilizadas em matemática aplicada e computação científica para resolver numericamente equações diferenciais. A ideia consiste em escrever a solução da equação diferencial como uma combinação linear de funções de base, como por exemplo a série de Fourier, que é uma combinação linear de senos e cossenos, e em seguida determinar os coeficientes dessa combinação. A solução aproximada é dada por:

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \psi_k(x), \quad (1)$$

onde a_n com $n = 0, 1, 2, \dots, N$, são os chamados coeficientes modais, N a ordem da truncagem (quanto maior o valor de N mais precisa será a solução); e $\psi_n(x)$ são as funções de base, que são obtidas das soluções de equações diferenciais do tipo Sturm-Liouville, como os polinômios de Legendre, Chebyshev e funções de Fourier.

Para a resolução via métodos espectrais de um problema dado por:

$$\begin{cases} Hu(x) - f = 0 & x \in U \subset \mathbb{R}^n \\ Bu(y) = 0 & y \in \partial U \end{cases}, \quad (2)$$

onde H é um operador diferencial, B um operador diferencial associado às condições de contorno, f uma função das variáveis do problema, U o domínio da equação e ∂U a fronteira associada ao domínio U , teremos que determinar completamente a solução aproximada $u_N(x)$, ou seja obter todos os coeficientes modais a partir das condições de contorno. Substituindo a solução aproximada $u_N(x)$ na equação diferencial, obtemos chamada a função residual,

$$R(x, a_0, a_1, \dots, a_N) = Hu_N(x) - f. \quad (3)$$

É de se esperar que a função residual $R(x, a_j)$ seja pequena, e o tão pequena que ela seja, depende também (além do valor de N) da escolha das chamadas funções de teste $\phi_i(x)$. O produto interno entre a função de teste e a função residual fornecerá a partir da relação abaixo as condições para determinar os coeficientes modais a_n ,

$$\langle R, \phi_i \rangle = \int_a^b \omega(x) R(x, a_0, a_1, \dots, a_N) \phi_i^*(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (4)$$

$\omega(x)$ são chamadas função de peso e são definidas a partir da escolha da função de teste $\phi_i(x)$. Essa relação fornece um sistema de $N + 1$ equações, cuja solução é o valor dos

$N + 1$ coeficientes da expansão espectral. A eq.(4) implica que, quando $N \rightarrow \infty$, a função residual é ortogonal a todas as funções de teste $\phi_i(x)$ e converge para zero na média (BOYD, 2001). Se a função residual converge para zero na média e $u_N(x)$ satisfaz as condições de contorno, é de se esperar que esta solução aproximada irá convergir para a solução exata da eq.(2).

1.1 Aplicação dos métodos de colocação (Pseudoespectral)

Existem diversas classificações sobre os métodos espectrais em relação à escolha das funções de teste. Iremos dar atenção ao Método *Espectral de Colocação* também conhecido como *Pseudoespectral* (BOYD, 2001), pois foi o método utilizado na integração das equações referentes a esse trabalho. O método de colocação consiste em utilizar deltas de Dirac como a função de teste e com função de peso $\omega(x) = 1$. Com isso, podemos reescrever a eq.(4) como:

$$\langle R, \phi_i \rangle = R(\eta_i, a_0, a_1, \dots, a_N) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

sendo

$$\eta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

os chamados *Pontos de Colocação*, que são os pontos onde a equação residual se anula.

Prosseguindo com a discussão sobre métodos pseudoespectrais, vamos limitar sua aplicação a funções $f(\eta)$ com domínio $D : \eta = [-1, 1]$ e posteriormente estenderemos para domínios maiores. Sobre a escolha das funções de base $\psi_k(\eta)$, iremos nos concentrar apenas no uso dos polinômios de Chebyshev,

$$\psi_k(\eta) = T_k(\eta), \quad (7)$$

ou combinações dos polinômios de Chebyshev,

$$\psi_k(\eta) = \psi_k(T_k(\eta)), \quad (8)$$

pelo fato de os polinômios de Chebyshev minimizarem o chamado “Fenômeno de Runge” que trata-se de um inconveniente numérico que surge nas bordas do intervalo quando se realiza uma interpolação polinomial com o aumento da ordem de truncagem, similar ao fenômeno de Gibbs nas séries de Fourier (BOYD, 2001).

Exemplo 1: Obter a solução aproximada $u_N(\eta) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(\eta)$ referente à função $f(\eta) = \arcsin(\eta)$, com a ordem de truncagem $N = 5$

1. Impor que a solução exata é igual à solução aproximada nos pontos de colocação η_i ,

$$a_0 + a_1 \eta_i + a_2 (2 \eta_i^2 - 1) + a_3 (4 \eta_i^3 - 3 \eta_i) + a_4 (8 \eta_i^4 - 8 \eta_i^2 + 1) + a_5 (16 \eta_i^5 - 20 \eta_i^3 + 5 \eta_i) = \arcsin(\eta_i);$$

2. Substituir $\eta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)$, obtendo um sistema linear de $N + 1$ equações:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 9.426; \\ a_0 + 0.8090 a_1 + 0.309 a_2 - 0.309 a_3 - 0.810 a_4 - 1.000 a_5 &= 5.655; \\ a_0 + 0.3090 a_1 - 0.8090 a_2 - 0.8090 a_3 + 0.3091 a_4 + 1.0 a_5 &= 1.885; \\ a_0 - 0.3090 a_1 - 0.8090 a_2 + 0.8090 a_3 + 0.3091 a_4 - 1.0 a_5 &= -1.885; \\ a_0 - 0.8090 a_1 + 0.309 a_2 + 0.309 a_3 - 0.810 a_4 + 1.000 a_5 &= -5.655; \\ a_0 - 1.0 a_1 + a_2 - 1.0 a_3 + a_4 - 1.0 a_5 &= -9.426; \end{aligned}$$

3. Resolvendo o sistema linear acima obtemos os coeficientes modais

$$a_0 \approx 0; a_1 = 1.316; a_2 = 0.002; a_3 = 0.1911; a_4 \approx 0; a_5 = 0.0634$$

4. Substituir os coeficientes modais calculados na função aproximada

$$u_N = -0.0002256 + 1.060 \eta + 0.00024 \eta^2 - 0.5036 \eta^3 + 0.00016 \eta^4 + 1.014 \eta^5 \quad (9)$$

Na Figura 1 é apresentada uma comparação entre as funções eq.(9) e $f = \arcsin(\eta)$. Vale lembrar que a ordem de truncagem desse procedimento é relativamente baixa e foi utilizada exclusivamente a título de apresentação; porém, existem sérias desvantagens técnicas nessa forma de obter os coeficientes para valores grandes de N e para funções mais complicadas, no que diz respeito ao custo computacional. Para contornar isso (ainda para o exemplo proposto) iremos reescrever $u_N(\eta) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(\eta)$ como um produto de duas matrizes,

$$u_N(\eta) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} T_0(\eta) \\ T_1(\eta) \\ T_2(\eta) \\ T_3(\eta) \\ T_4(\eta) \\ T_5(\eta) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

e que nos pontos de colocação $u_N(\eta_i)$ é igual à função $f = \arcsin(\eta_i)$. Generalizando para qualquer ordem de truncagem N ,

$$\vec{\alpha} \bullet \vec{\tau}_0(\eta) = f(\eta), \quad (11)$$

com

$$\vec{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_0 & \dots & \eta_N \end{bmatrix}, \quad (12)$$

sendo $\vec{\alpha}$ a matriz linha (vetor) contendo os valores dos coeficientes modais,

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} a_0 & \dots & a_N \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$\vec{\tau}_0(\eta)$ a matriz coluna contendo os polinômios de Chebyshev a partir de $T_0(\eta)$,

$$\vec{\tau}_0(\eta) = \begin{bmatrix} T_0(\eta) \\ \vdots \\ T_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

ao substituir todos os $N + 1$ pontos de colocação em $\vec{\tau}_0(\eta)$ obtemos a matriz $\vec{\tau}_0$,

$$\vec{\tau}_0 \equiv \begin{bmatrix} T_0(\eta_0) & \dots & T_0(\eta_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_N(\eta_0) & \dots & T_N(\eta_N) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

O índice “0” indica que a matriz armazena os valores a partir do elemento de base $T_0(\eta)$. Mais adiante a finalidade dessa notação será melhor justificada, pois utilizaremos combinações lineares dos polinômios de Chebyshev, como $\Psi_k(\eta) = T_{k+2}(\eta) - T_k(\eta)$, onde a matriz associada a T_{k+2} nos pontos de colocação será,

$$\vec{\tau}_2 \equiv \begin{bmatrix} T_2(\eta_0) & \dots & T_2(\eta_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N+2}(\eta_0) & \dots & T_{N+2}(\eta_N) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Lembrando que $f(\vec{\eta})$ é o vetor contendo os valores da função a ser interpolada nos pontos de colocação η_i ,

$$f(\vec{\eta}) = \begin{bmatrix} f(\eta_0) & \dots & f(\eta_N) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Desto forma, os coeficientes modais serão dados simplesmente por:

$$\vec{\alpha} = f \cdot (\vec{\eta}) \bullet \vec{\tau}_0^{-1}. \quad (18)$$

Para determinar os valores numéricos de $\vec{\tau}_0$ utilizamos as relações (MASON; HANDS-COMB, 2002)

$$T_0(\eta_i) = 1 \quad (19)$$

$$T_1(\eta_i) = \eta_i, \quad (20)$$

$$T_{k+2}(\eta_i) = 2\eta_i T_{k+1}(\eta_i) - T_k(\eta_i), \quad k = 3, \dots, N \quad i = 0, \dots, N. \quad (21)$$

Com isso para o caso do exemplo acima ($N = 5$),

$$\vec{\tau}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.8090 & 0.3090 & -0.3090 & -0.8090 & -1.0 \\ 1.0 & 0.309 & -0.8090 & -0.8090 & 0.309 & 1.0 \\ 1.0 & -0.309 & -0.8090 & 0.8090 & 0.309 & -1.0 \\ 1.0 & -0.810 & 0.3091 & 0.3091 & -0.810 & 1.0 \\ 1.0 & -1.000 & 1.0 & -1.0 & 1.000 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

e sua inversa,

$$\vec{\tau}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1001 & 0.2001 & 0.2002 & 0.2001 & 0.1998 & 0.0999 \\ 0.2001 & 0.3235 & 0.1233 & -0.1237 & -0.3233 & -0.1999 \\ 0.1999 & 0.1238 & -0.3234 & -0.3238 & 0.1235 & 0.2001 \\ 0.1999 & -0.1238 & -0.3234 & 0.3238 & 0.1235 & -0.2001 \\ 0.2001 & -0.3235 & 0.1234 & 0.1237 & -0.3233 & 0.1999 \\ 0.1000 & -0.2001 & 0.2002 & -0.2001 & 0.1998 & -0.0999 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

com os valores de $f \cdot (\vec{\eta})$,

$$f \cdot (\vec{\eta}) = \left[\arcsin(\eta_0) \quad \arcsin(\eta_1) \quad \arcsin(\eta_2) \quad \arcsin(\eta_3) \quad \arcsin(\eta_4) \quad \arcsin(\eta_5) \right]$$

$$f \cdot (\vec{\eta}) = \left[1.571 \quad 0.9426 \quad 0.3142 \quad -0.3142 \quad -0.9426 \quad -1.571 \right] \quad (24)$$

Substituindo os valores de eq.(24) e eq.(23) na eq.(18) obtemos os coeficientes modais,

$$\vec{\alpha} = \left[0.0000 \quad 1.316 \quad 0.0000 \quad 0.1912 \quad 0.0000 \quad 0.0634 \right] \quad (25)$$

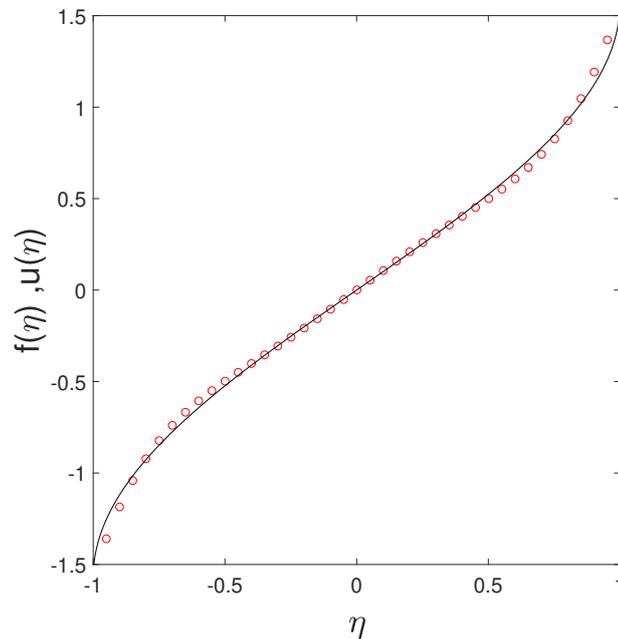
Em geral, as operações matriciais são extremamente convenientes do ponto de vista computacional, por conta dos softwares como o Matlab e o Python utilizarem nativamente os recursos de multiprocessamento para multiplicação e inversão de matrizes. Para o caso do Python, temos que o desempenho é substancialmente superior ao Matlab, porém para um melhor entendimento do texto e por ser uma linguagem mais “intuitiva”, nesse trabalho os algoritmos serão apresentados na sua versão para Matlab. Segue abaixo um exemplo de um código otimizado através da construção e operação de matrizes,

```

1 % Ordem da Truncagem
2 N=5;
3
4 %Pontos de Colocacao
5 eta=cos((0:N)*pi/N);
6
7 %Primeira coluna da Matriz-Chebyshev-Colocacao: T_0(eta)=1
8 T(1,1:N+1)=1;
9 %Segunda coluna da Matriz-Chebyshev-Colocacao: T_1(eta)=eta
10 T(2,1:N+1)=eta;
11
12 %Determinacao das proximas linhas de T
13 for i=3:N+1
14 T(i,1:N+1)=2*eta.*T(i-1,1:N+1)-T(i-2,1:N+1);
15 end
16 %Funcao f nos pontos de colocacao.
17 f=asin(eta);
18
19 a=f*inv(T)

```

Figura 1 - Gráfico da função $f = \arcsin(\eta)$ (linha contínua) e a solução aproximada eq.(9) (círculos vermelho) para $N = 5$



Fonte: O autor, 2019.

1.2 Método de colocação (Pseudoespectral) para um domínio qualquer.

No exemplo da seção anterior, ajustamos uma função $f(\eta) = \arcsin(\eta)$ a uma expansão espectral cuja base era os polinômios de Chebyshev, onde ambos possuíam em comum o domínio $D(u) = D(f) : [-1, 1]$. Estaremos interessados em utilizar os métodos pseudoespectrais para domínios infinitos $D(f(x)) = \{x \in \mathbb{R}\}$ e seminfinitos, $D(f(r)) = \{r \in \mathbb{R}_+\}$. Para realizar esse procedimento, será necessário fazer uma substituição de variáveis denominada “mapeamento”. Existem diversos tipos de mapeamentos (BOYD, 2001) onde podemos destacar:

$$x = L_0 \operatorname{arctanh}(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1 \rightarrow -\infty < x < \infty; \quad (26)$$

$$x = \frac{L_0 \eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \rightarrow -\infty < x < \infty; \quad (27)$$

$$r = \frac{L_0 (\eta + 1)}{1 - \eta}, \quad -1 \leq \eta \leq 1 \rightarrow 0 < r < \infty; \quad (28)$$

$$r = L_0 \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\right), \quad -1 \leq \eta \leq 1 \rightarrow 0 < r < \infty, \quad (29)$$

onde L_0 é chamado de constante de mapeamento, que é uma constante associada ao espaçamento dos pontos de pontos $x(\eta_i)$ ou $r(\eta_i)$, implicando diretamente a precisão sobre a região que se quer ajustar com o método de colocação. Com L_0 pequeno os pontos $x(\eta_i)$

ou $r(\eta_i)$ estarão mais concentrados na origem, já para valores maiores de L_0 os pontos $x(\eta_i)$ ou $r(\eta_i)$ estarão mais afastados da origem, como podemos ver na Figura 2. Após a substituição do mapeamento escolhido, a expansão espectral passará a ser

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(\eta(x)). \quad (30)$$

Exemplo: Encontrar os coeficientes da expansão espectral eq.(30) que se aproximam da função $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Primeiramente definimos a ordem de truncagem $N = 5$ e como a função $f(x)$ possui o domínio $D(x) : [-\infty, \infty]$ utilizaremos o mapeamento $x = L_0 \operatorname{arctanh}(\eta)$ com o parâmetro de mapa $L_0 = 1$ e substituiremos na função,

$$f(\eta) = e^{-\operatorname{arctanh}(\eta)^2}. \quad (31)$$

2. Calculamos $f \cdot (\vec{\eta})$,

$$f \cdot (\vec{\eta}) = \left[0.0 \quad 0.2826 \quad 0.9030 \quad 0.9030 \quad 0.2826 \quad 0.0 \right]. \quad (32)$$

3. Substituindo a eq.(32) e eq.(23) na eq.(18) obtemos os coeficientes modais $\vec{\alpha}$,

$$\vec{\alpha} = \left[0.4742 \quad 0.0 \quad -0.5146 \quad 0.0 \quad 0.04034 \quad 0.0 \right]. \quad (33)$$

4. Dispondo dos coeficientes $\vec{\alpha}$, podemos escrever finalmente a função aproximada eq.(30),

$$u_N(x) = 1.029125 - 1.351813 (\tanh(x))^2 + 0.3226880 (\tanh(x))^4 \quad (34)$$

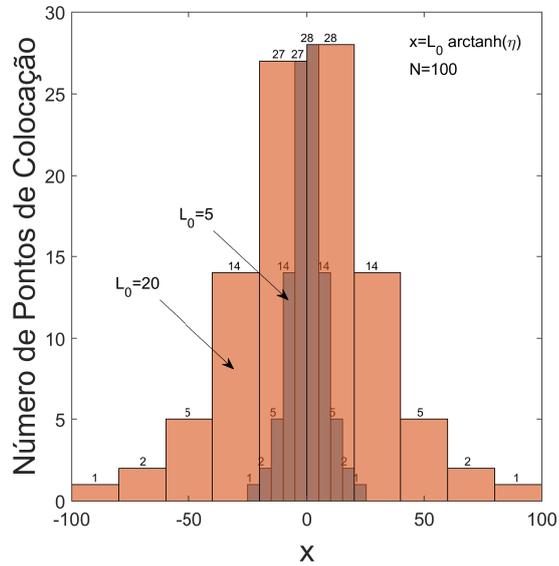
Reforçamos a ideia da utilização de ordens de truncagens baixa para uma melhor visualização do procedimento. Obtemos, mesmo assim, para $N = 5$ uma solução aproximada razoável em relação a $f(x) = e^{-x^2}$, vide Fig.(3). Abaixo segue um código mais eficiente para realizar a determinação dos coeficientes:

```

1 % Ordem da Truncagem
2 N=16;
3
4 % Parametro de mapa
5 L0=2;
6
7 %Pontos de Colocacao
8 eta=cos((0:N)*pi/N);
9
10 %Primeira coluna da Matriz-Chebyshev-Colocacao: T_0(eta)=1
11 T(1,1:N+1)=1;
12 %Segunda coluna da Matriz-Chebyshev-Colocacao: T_1(eta)=eta
13 T(2,1:N+1)=eta;
14
15 %Determinacao das proximas linhas de T
16 for i=3:N+1
17 T(i,1:N+1)=2*eta.*T(i-1,1:N+1)-T(i-2,1:N+1);
18 end
19 %Funcao f(x)=exp(-x^2) mapeada nos pontos de colocacao.
20 f=exp( - L0*atanh(eta) .^2 ) ;
21
22 a=f*inv(T)

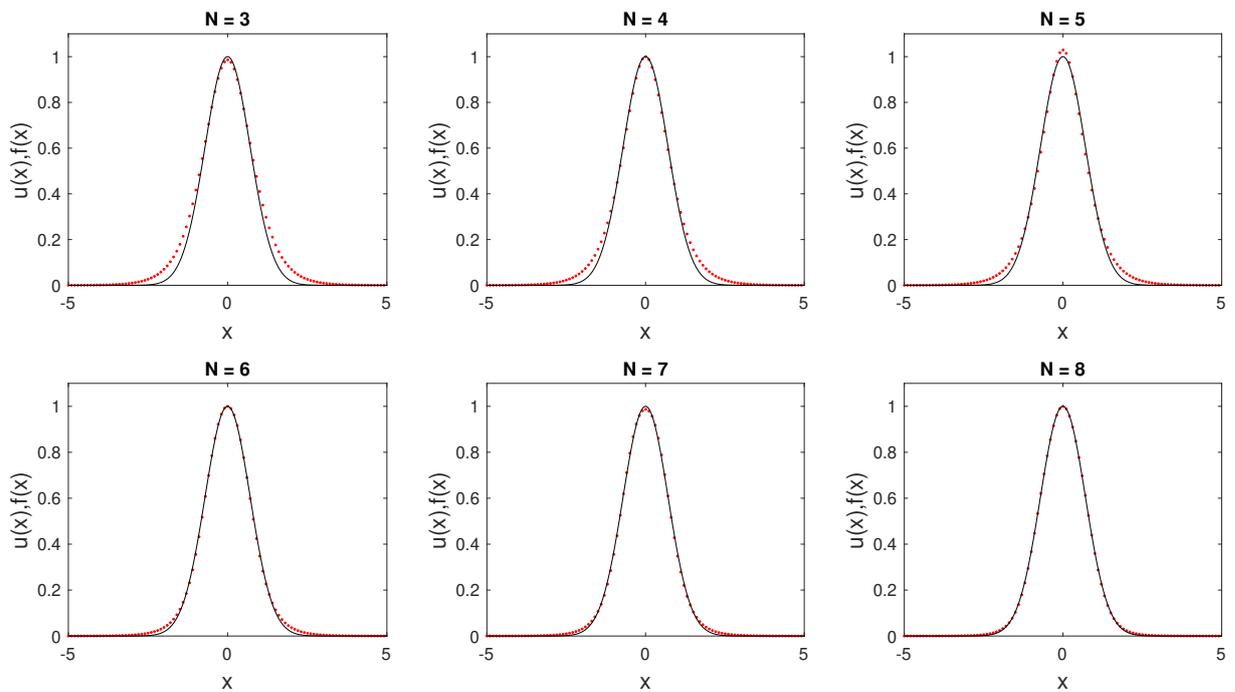
```

Figura 2 - Histograma para $N = 100$ para o mapeamento $x = L_0 \operatorname{arctanh}(\eta)$ com $L_0 = 5$ e $L_0 = 20$



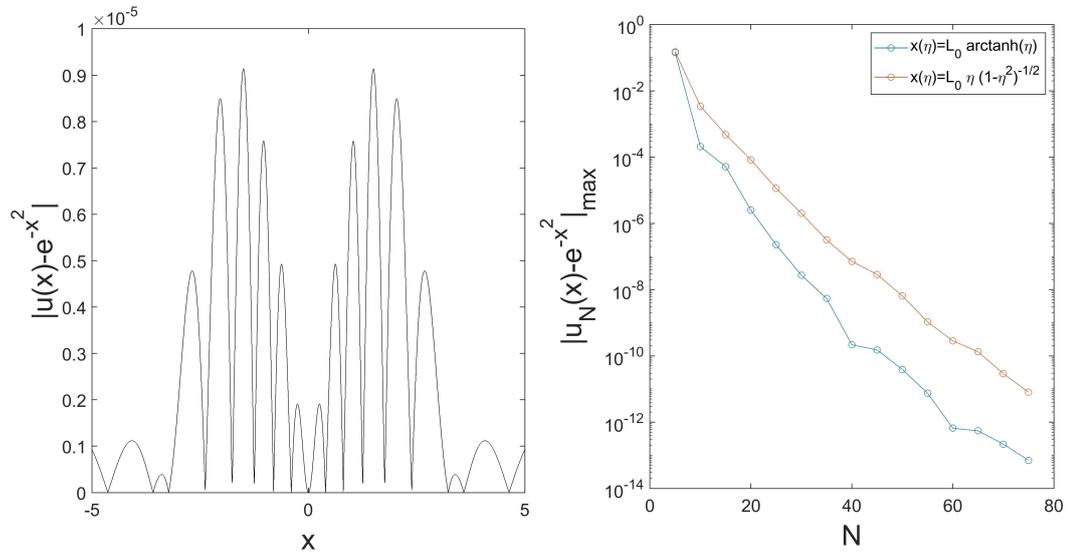
Fonte: O autor, 2019.

Figura 3 - Gráfico da função $f = e^{-x^2}$ (linha contínua) e a solução aproximada dada pela eq.(34) (pontos vermelhos) para $N = 3, 4, 5, 6, 7$ e $N = 8$



Fonte: O autor, 2019.

Figura 4 - Gráfico da discrepância $|e^{-x^2} - u(x)|$ para $N = 16$ e $L_0 = 2$ e o gráfico do decaimento do erro com aumento de N para dois mapeamentos diferentes.



Fonte: O autor, 2019.

A Figura 4 apresenta a discrepância entre as soluções $u(x)$ e $f(x) = e^{-x^2}$ com a ordem de truncagem $N = 16$ e o parâmetro de mapa $L_0 = 2$, onde podemos observar que a discrepância máxima é inferior à 10^{-5} . Também é apresentado na figura o decaimento da discrepância com o aumento da ordem de truncagem N chegando próximo ao limite da precisão dupla a partir da ordem de truncagem $N = 75$ para esse mesmo mapeamento. Outro detalhe importante que podemos destacar na Figura 4 é que ao utilizar o mapeamento $x(\eta) = L_0\eta(1 - \eta^2)^{-1/2}$ a discrepância decaiu mais lentamente do que o mapeamento $x(\eta) = L_0\text{arctanh}(\eta)$. Isso se deve ao comportamento da função a ser ajustada. Usaremos em nossas próximas aplicações o mapeamento $x(\eta) = L_0\text{arctanh}(\eta)$ e suas variações por ser mais adequado à descrição das ondas solitárias (BOYD, 2001), como será visto no capítulo seguinte. Para justificar essa decisão da escolha do mapa, na Figura 8 apresentamos o decaimento dos coeficientes modais para os mapas $x(\eta) = L_0\text{arctanh}(\eta)$ e $x(\eta) = L_0\eta(1 - \eta^2)^{-1/2}$ para uma solução estática de uma onda solitária, onde o mapa $x(\eta) = L_0\text{arctanh}(\eta)$ é expressivamente superior para nossas aplicações.

1.3 Resolução de equações diferenciais ordinárias com o método pseudo-espectral.

Finalmente nos aproximamos do objetivo de utilizar os métodos pseudo-espectrais na resolução de equações diferenciais. O procedimento consiste basicamente em resolver a

equação matricial que surge ao substituir a expansão aproximada nos pontos de colocação na EDO, ou seja, dada a equação diferencial

$$f = f \left(\frac{d^0 u}{d\eta^0}, \dots, \frac{d^m u}{d\eta^m} \right), \quad (35)$$

substituindo nos pontos de colocação,

$$\vec{f} = \vec{f} \left(\vec{\alpha} \bullet \frac{d^0 \vec{\Psi}_0}{d\eta^0}, \dots, \vec{\alpha} \bullet \frac{d^m \vec{\Psi}_0}{d\eta^m} \right). \quad (36)$$

Como as equações que iremos resolver nesse trabalho não dependem de derivadas superiores a de segunda ordem e as funções de base serão os polinômios de Chebyshev ou combinação desses polinômios, será necessário para nossas aplicações, calcular pelo menos até a segunda ordem, as derivadas $\frac{d\vec{\tau}_0}{d\eta}$ e $\frac{d^2\vec{\tau}_0}{d\eta^2}$. Derivando as relações de recorrência eq.(21), temos que :

$$\frac{dT_0}{d\eta}(\eta_i) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{dT_1}{d\eta}(\eta_i) = 1, \quad (38)$$

$$\frac{dT_{k+2}}{d\eta}(\eta_i) = 2\eta_i \frac{dT_{k+1}}{d\eta}(\eta_i) + 2T_{k+1}(\eta_i) - \frac{dT_k}{d\eta}(\eta_i) \quad (39)$$

e para a segunda derivada,

$$\frac{d^2T_0}{d\eta^2}(\eta_i) = 0, \quad (40)$$

$$\frac{d^2T_1}{d\eta^2}(\eta_i) = 0, \quad (41)$$

$$\frac{d^2T_{k+2}}{d\eta^2}(\eta_i) = 2 \frac{dT_{k+1}}{d\eta}(\eta_i) + 2\eta_i \frac{d^2T_{k+1}}{d\eta^2}(\eta_i) + 2 \frac{dT_{k+1}}{d\eta}(\eta_i) - \frac{d^2T_k}{d\eta^2}(\eta_i). \quad (42)$$

Utilizando as expressões acima, podemos calcular as matrizes $\frac{d\vec{\tau}_0}{d\eta}$ e $\frac{d^2\vec{\tau}_0}{d\eta^2}$ para $N = 5$:

$$\frac{d\vec{\tau}_0}{d\eta} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 4.0 & 9.0 & 16.0 & 25.0 \\ 0.0 & 1.0 & 3.236 & 4.854 & 4.0 & -0.01 \\ 0.0 & 1.0 & 1.236 & -1.854 & -4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -1.236 & -1.854 & 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & -3.236 & 4.854 & -4.0 & -0.01 \\ 0.0 & 1.0 & -4.0 & 9.0 & -16.0 & 25.0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\frac{d^2 \vec{\tau}_0}{d\eta^2} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 4.0 & 24.0 & 80.0 & 200.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & 19.42 & 46.83 & 72.32 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & 7.409 & -6.851 & -27.63 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & -7.409 & -6.851 & 27.63 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & -19.42 & 46.83 & -72.32 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & -24.0 & 80.0 & -200.0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Exemplo: Resolver através dos métodos pseudoespectrais a equação com $N = 5$,

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} - 4 \frac{du}{d\eta} + 4u = e^\eta - \frac{4e}{1+e^2} \quad u(-1) = u(1) = 0, \quad (45)$$

cuja solução exata é

$$u_{exata} = \frac{e^x + e^{x+2} - e^{2x+1}}{1+e^2} + \frac{e^1}{1+e^2}. \quad (46)$$

1. Primeiramente é necessário escolher um conjunto de base $\Psi_k(\eta)$ compatível com as condições de contorno $u(-1) = u(1) = 0$, de preferência, sendo uma combinação dos polinômios de Chebyshev. Por exemplo:

$$\Psi_k(\eta) = T_{k+2}(\eta) - T_k(\eta) \quad (47)$$

2. Como já calculamos as matrizes $\vec{\tau}_0, \frac{d\vec{\tau}_0}{d\eta}$ e $\frac{d^2\vec{\tau}_0}{d\eta^2}$ referente à $T_k(\eta)$ para $N = 5$, agora referente a $T_{k+2}(\eta)$ iremos calcular $\vec{\tau}_2, \frac{d\vec{\tau}_2}{d\eta}$ e $\frac{d^2\vec{\tau}_2}{d\eta^2}$ para construção das funções de base $\Psi_k(\eta)$ e suas derivadas nos pontos de colocação $\vec{\Psi}, \frac{d\vec{\Psi}}{d\eta}$ e $\frac{d^2\vec{\Psi}}{d\eta^2}$,

$$\vec{\tau}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 0.309 & -0.309 & -0.810 & -1.000 & -0.81 & -0.303 \\ -0.8094 & -0.8084 & 0.3102 & 1.0 & 0.307 & -0.810 \\ -0.8094 & 0.8084 & 0.3102 & -1.0 & 0.307 & 0.810 \\ 0.309 & 0.309 & -0.810 & 1.000 & -0.81 & 0.303 \\ 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 & 1.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\frac{d\vec{\tau}_2}{d\eta} = \begin{bmatrix} 4.0 & 9.0 & 16.0 & 25.0 & 36.0 & 49.0 \\ 3.236 & 4.854 & 4.0 & -0.01 & -6.05 & -11.2 \\ 1.235 & -1.856 & -3.998 & 0.008 & 5.999 & 4.31 \\ -1.235 & -1.856 & 3.998 & 0.008 & -5.999 & 4.31 \\ -3.236 & 4.854 & -4.0 & -0.01 & 6.05 & -11.2 \\ -4.0 & 9.0 & -16.0 & 25.0 & -36.0 & 49.0 \end{bmatrix}; \quad (49)$$

$$\frac{d^2\vec{\tau}_2}{d\eta^2} = \begin{bmatrix} 4.0 & 24.0 & 80.0 & 200.0 & 420.0 & 784.0 \\ 4.0 & 19.42 & 46.83 & 72.32 & 70.2 & 17.2 \\ 4.0 & 7.409 & -6.851 & -27.63 & -10.17 & 45.33 \\ 4.0 & -7.409 & -6.851 & 27.63 & -10.17 & -45.33 \\ 4.0 & -19.42 & 46.83 & -72.32 & 70.2 & -17.2 \\ 4.0 & -24.0 & 80.0 & -200.0 & 420.0 & -784.0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Da eq.(47),

$$\vec{\Psi} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.691 & -1.118 & -1.119 & -0.694 & 0.01 & 0.702 \\ -1.809 & -1.117 & 1.120 & 1.809 & -0.003 & -1.810 \\ -1.809 & 1.117 & 1.120 & -1.809 & -0.003 & 1.810 \\ -0.691 & 1.118 & -1.119 & 0.694 & 0.01 & -0.702 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\frac{d\vec{\Psi}}{d\eta} = \frac{d\vec{\tau}_2}{d\eta} - \frac{d\vec{\tau}_0}{d\eta} = \begin{bmatrix} 4.0 & 8.0 & 12.0 & 16.0 & 20.0 & 24.0 \\ 3.236 & 3.854 & 0.76 & -4.86 & -10.0 & -11.3 \\ 1.235 & -2.856 & -5.233 & 1.864 & 9.998 & 4.31 \\ -1.235 & -2.856 & 5.233 & 1.864 & -9.998 & 4.31 \\ -3.236 & 3.854 & -0.76 & -4.86 & 10.0 & -11.3 \\ -4.0 & 8.0 & -12.0 & 16.0 & -20.0 & 24.0 \end{bmatrix}; \quad (52)$$

$$\frac{d^2 \vec{\Psi}}{d\eta^2} = \frac{d^2 \vec{\tau}_2}{d\eta^2} - \frac{d^2 \vec{\tau}_0}{d\eta^2} = \begin{bmatrix} 4.0 & 24.0 & 76.0 & 176.0 & 340.0 & 584.0 \\ 4.0 & 19.42 & 42.83 & 52.9 & 23.4 & -55.7 \\ 4.0 & 7.409 & -10.85 & -35.04 & -3.32 & 73.01 \\ 4.0 & -7.409 & -10.85 & 35.04 & -3.32 & -73.01 \\ 4.0 & -19.42 & 42.83 & -52.9 & 23.4 & 55.7 \\ 4.0 & -24.0 & 76.0 & -176.0 & 340.0 & -584.0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Substituindo u nos pontos de colocação $[u(\eta_0), \dots, u(\eta_N)] = \vec{\mu} = \vec{\alpha} \bullet \vec{\Psi}$ na eq.(45),

$$\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\Psi}}{d\eta^2} - 4\vec{\alpha} \bullet \frac{d\vec{\Psi}}{d\eta} + 4\vec{\alpha} \bullet \vec{\Psi} = \vec{K} \quad (54)$$

onde \vec{K} é um vetor constante dado por $e^\eta - \frac{4e}{1+e^2}$ nos seus respectivos pontos de colocação

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 1.4226 & 0.9496 & 0.06598 & -.5619 & -.8508 & -.9282 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

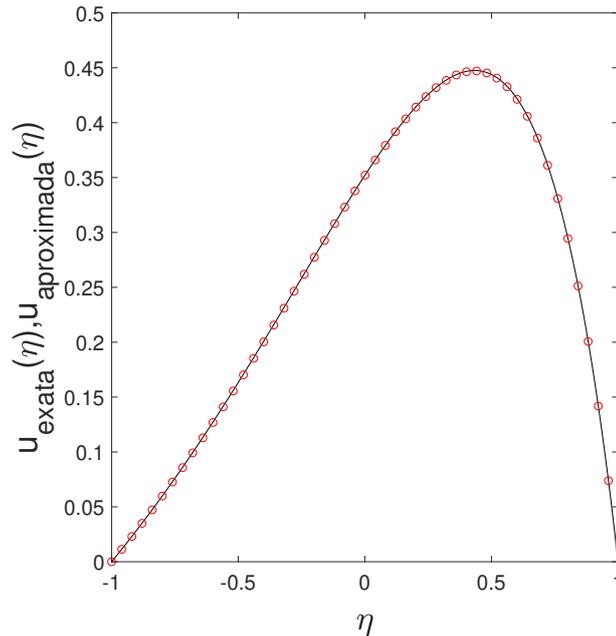
Com isso,

$$\vec{\alpha} \bullet \left(\frac{d^2 \vec{\Psi}}{d\eta^2} - 4 \frac{d\vec{\Psi}}{d\eta} + 4\vec{\Psi} \right) = \vec{K} \quad (56)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{K} \bullet \left(\frac{d^2 \vec{\Psi}}{d\eta^2} - 4 \frac{d\vec{\Psi}}{d\eta} + 4\vec{\Psi} \right)^{-1}. \quad (57)$$

$$\left(\frac{d^2 \vec{\Psi}}{d\eta^2} - 4 \frac{d\vec{\Psi}}{d\eta} + 4\vec{\Psi} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 15.406 & -18.828 & 2.122 & 1.324 & 0.039 & -0.001 \\ -18.828 & 23.210 & -2.676 & -1.658 & -0.049 & 0.001 \\ 2.122 & -2.676 & 0.351 & 0.197 & 0.006 & -0.0 \\ 1.324 & -1.658 & 0.197 & 0.133 & 0.003 & -0.0 \\ 0.039 & -0.049 & 0.006 & 0.003 & 0.0 & 0 \\ -0.0 & 0.0 & -0.0 & -0.0 & -0.0 & 0.0. \end{bmatrix}, \quad (58)$$

Figura 5 - Gráfico comparativo entre a solução exata eq.(46) e a solução aproximada



Fonte: O autor, 2019.

Substituindo a eq.(55) e a eq.(58) na eq.(57), encontramos os coeficientes $\vec{\alpha}$,

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} -0.2035 & -0.09966 & -0.0284 & -0.0059 & -0.0011 & -0.00017 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

tendo por fim a solução aproximada:

$$u_{aproximada}(\eta) = \vec{\alpha} \bullet \begin{bmatrix} 2\eta^2 - 2 \\ 4\eta^3 - 4\eta \\ 8\eta^4 - 10\eta^2 + 2 \\ 16\eta^5 - 24\eta^3 + 8\eta \\ 32\eta^6 - 56\eta^4 + 26\eta^2 - 2 \\ 64\eta^7 - 128\eta^5 + 76\eta^3 - 12\eta \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$= -0.1508\eta^2 + 0.3517 - 0.2694\eta^3 + 0.3528\eta - 0.1666\eta^4 - 0.07279\eta^5 - 0.03427\eta^6 - 0.01066\eta^7.$$

Podemos observar qualitativamente na Figura 5 que a solução aproximada, eq.(60), é coerente com a solução exata, eq.(46). O problema anterior possui o domínio de $D(\eta) : [-1, 1]$, e com isso não foi necessário o uso de mapeamentos. Porém para o caso da resolução de uma equação diferencial onde haja necessidade de realizar algum tipo mapeamento, teremos que calcular as matrizes $\frac{d\vec{\tau}}{dx}$ e $\frac{d^2\vec{\tau}}{dx^2}$. Tendo em vista que a maior ordem das derivadas

presentes nesse trabalho são as derivadas de segunda ordem, iremos nos limitar apenas à determinação dessas duas. Derivando as relações de recorrência eq.(21) em relação a x ,

$$\frac{dT_0}{dx}(\eta_i) = 0, \quad (61)$$

$$\frac{dT_1}{dx}(\eta_i) = \frac{d\eta}{dx}(\eta_i), \quad (62)$$

$$\frac{dT_{k+2}}{dx}(\eta_i) = \frac{d\eta}{dx}(\eta_i) \frac{dT_{k+2}}{d\eta}(\eta_i). \quad (63)$$

Derivando novamente em relação a x ,

$$\frac{d^2T_0}{dx^2}(\eta_i) = 0, \quad (64)$$

$$\frac{d^2T_1}{dx^2}(\eta_i) = \frac{d^2\eta}{dx^2}(\eta_i), \quad (65)$$

$$\frac{dT_{k+2}}{dx}(\eta_i) = \frac{d^2\eta}{dx^2}(\eta_i) \frac{dT_{k+2}}{d\eta}(\eta_i) + \left[\frac{d\eta}{dx}(\eta_i) \right]^2 \frac{d^2T_{k+2}}{d\eta^2}(\eta_i) \quad (66)$$

Note que a escolha de um mapeamento específico não interfere nos valores da matriz $\vec{\tau}$, mas sim nas suas derivadas $\frac{d\vec{\tau}}{dx}$ e $\frac{d^2\vec{\tau}}{dx^2}$. Na seção a seguir, iremos exemplificar o uso dessas matrizes na resolução de uma equação diferencial parcial.

1.4 Resolução de equações diferenciais parciais com o método pseudoespectral.

Estaremos concluindo nessa seção o capítulo sobre os métodos pseudoespectrais, constituindo basicamente todos os recursos numéricos necessários para as resoluções das equações parciais presentes nesse trabalho. As equações de nosso interesse possuem a forma (LINHARES; OLIVEIRA, 2007),

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (67)$$

podendo depender de uma ou mais coordenadas espaciais e uma coordenada temporal. Como observamos até o momento, as funções de base são utilizadas para a descrição da parte espacial da solução, e a novidade é que os coeficientes modais deixarão de ser constantes e serão funções do tempo,

$$a_k \rightarrow a_k(t) \therefore \vec{a} \rightarrow \vec{a}(t). \quad (68)$$

Com isso, a solução aproximada para uma coordenada espacial passará a ser

$$\phi(x(\eta), t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) \psi_k(x(\eta)) = \vec{\alpha}(t) \bullet \vec{\Psi}(x(\eta)). \quad (69)$$

Chamaremos de $\vec{\varphi}$ o vetor

$$\vec{\varphi} = \left[\phi(\eta_0) \quad \dots \quad \phi(\eta_N) \right] = \vec{\alpha} \bullet \vec{\tau}, \quad (70)$$

Para um problema de uma dimensão espacial x , $\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Usaremos $\vec{\Psi}(\eta(x)) = \vec{\tau}(\eta(x))$ na eq.(69) e substituímos na eq.(67),

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad (71)$$

$$\ddot{\vec{\alpha}} \bullet \vec{\tau} - \vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\tau}}{dx^2} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (72)$$

substituindo nos pontos de colocação, $\vec{\tau} \rightarrow \vec{\tau}$,

$$\ddot{\vec{\alpha}} \bullet \vec{\tau} = \vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\tau}}{dx^2} - \frac{\partial V \cdot (\vec{\varphi})}{\partial \phi},$$

$$\ddot{\vec{\alpha}} = \ddot{\vec{\alpha}}(\alpha) = \left[\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\tau}}{dx^2} - \frac{\partial V \cdot (\vec{\varphi})}{\partial \phi} \right] \bullet \vec{\tau}^{-1}, \quad (73)$$

Chamaremos de “vetor de evolução temporal” a função $\ddot{\vec{\alpha}}$, que fisicamente dependerá do potencial e computacionalmente dependerá da escolha das funções de base, mapeamento e da ordem de truncagem N . Dispondo do vetor de evolução temporal $\ddot{\vec{\alpha}} = \ddot{\vec{\alpha}}(\alpha)$ e das condições iniciais $\vec{\alpha}(t_0)$ e $\dot{\vec{\alpha}}(t_0)$, podemos obter através do método de Runge-Kutta de 4ª

ordem (FORSYTHE et al., 1977) na sua forma vetorial, os coeficientes $\vec{\alpha}(t)$,

$$\vec{L}_1 = h\dot{\vec{\alpha}}(t_i) \quad (74)$$

$$\vec{K}_1 = h\vec{\alpha}(t_i) \quad (75)$$

$$\vec{L}_2 = h[\dot{\vec{\alpha}}(t_i) + 0.5\vec{K}_1] \quad (76)$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{\alpha}(\vec{\alpha}(t_i) + 0.5\vec{L}_1) \quad (77)$$

$$\vec{L}_3 = h[\dot{\vec{\alpha}}(t_i) + 0.5\vec{K}_2] \quad (78)$$

$$\vec{K}_3 = h\vec{\alpha}(\vec{\alpha}(t_i) + 0.5\vec{L}_2) \quad (79)$$

$$\vec{L}_4 = h[\dot{\vec{\alpha}}(t_i) + \vec{K}_3] \quad (80)$$

$$\vec{K}_4 = h\vec{\alpha}(\vec{\alpha}(t_i) + \vec{L}_3) \quad (81)$$

$$\vec{\alpha}(t_{i+1}) = \frac{1}{6} \left(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4 \right) \quad (82)$$

$$\vec{\alpha}(t_{i+1}) = \frac{1}{6} \left(\vec{L}_1 + 2\vec{L}_2 + 2\vec{L}_3 + \vec{L}_4 \right) \quad (83)$$

sendo chamado de “passo” o valor de h que é dado pelo intervalo temporal entre duas iterações. Quanto menor for o valor de h , mais precisão teremos na descrição temporal de nossa solução. Após determinar um conjunto de valores para os coeficientes $\vec{\alpha}(t_i)$, substituímos na eq.(69), determinando finalmente a solução aproximada da nossa EDP.

2 COLISÕES DE KINKS EM $\lambda\phi^4$ VIA MÉTODOS PSEUDOESPECTRAIS

2.1 Introdução

É definida como *onda solitária* ou *kink* uma função localizada não singular de qualquer equação não linear (ou equações acopladas se temos vários campos) cuja densidade de energia, além de ser bem localizada, tem uma dependência da forma:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x} - \vec{u}t), \quad (84)$$

onde \vec{u} é um vetor velocidade de deslocamento da onda solitária (RAJARAMAN, 1989). Esta equação é equivalente a ter uma solução que viaja mantendo sua forma. Podemos observar que qualquer solução estática representa uma solução de onda solitária para $\vec{u} = 0$. E também observamos que quando temos uma invariância relativística, uma solução estática pode-se transformar numa solução viajante para qualquer velocidade inferior a velocidade da luz, fazendo um “boost”, ou seja, realizando uma transformação para um sistema de referência em movimento. São chamados de sólitons os tipos de ondas solitárias que conseguem se recompor após colidirem entre si (LEMOS, 2003). Os estudos numéricos sobre kinks em $\lambda\phi^4$ já não são novidade, porém é interessante estabelecer essa sequência, para pontuar aspectos básicos que serão fundamentais para a compreensão de potenciais mais sofisticados, mas que carregam em sua essência grandes similaridades. Além disso, iremos validar a eficácia do método, obtendo resultados presentes na literatura.

2.2 Obtenção de soluções estáticas do tipo kink em $\lambda\phi^4$

Para o estudo dos kinks nesse capítulo utilizaremos o potencial $\lambda\phi^4$ sendo (RAJARAMAN, 1982):

$$V(\phi) = \frac{1}{4}(1 - \phi^2)^2, \quad (85)$$

A equação de movimento pode ser obtida a partir de uma densidade de lagrangiana utilizando-se o princípio variacional, onde para um campo escalar $\phi(x, t)$, essa densidade de lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi). \quad (86)$$

A não-linearidade do problema está contida no potencial $V(\phi)$. Considerando sem perda de generalidade que $V(\phi)$ é sempre positivo e igual a zero nos seus mínimos e que essa densidade de lagrangiana é um invariante de Lorentz, temos a seguinte equação de movimento a partir do princípio variacional de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (87)$$

Analisando essa densidade de lagrangiana $\mathcal{L}(x, t)$, podemos ver que a energia é uma quantidade conservada e a mesma é dada por:

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (88)$$

Os mínimos de $V(\phi)$ são suas raízes e ocorrem em M pontos, $M \geq 1$. Ou seja:

$$V(\phi = g^i) = 0 \quad \text{para } i = 1..M. \quad (89)$$

Com isso, a energia é nula nos pontos onde o campo é constante e igual a $\phi = g^i$. Interessados em obter soluções estáticas, temos que $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ e assim eq.(87) passa a ser:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}(x, t). \quad (90)$$

impondo a condição de se ter uma solução com energia finita a fim de obter ondas solitárias é necessário que $\phi \rightarrow g^i$ e que $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 = 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$. Desta maneira, as soluções são trajetórias que ligam mínimos de potencial. Por isso, geralmente, elas têm forma de S e são chamadas de kinks. para o qual estamos interessados em obter soluções temporais aproximadas. Precisaremos encontrar os coeficientes iniciais $\vec{\alpha}(0)$, $\dot{\vec{\alpha}}(0)$ e o vetor de evolução $\ddot{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha})$. Para obter o dado inicial do campo, substituímos na eq.(87) a solução estática $\phi_0(x)$,

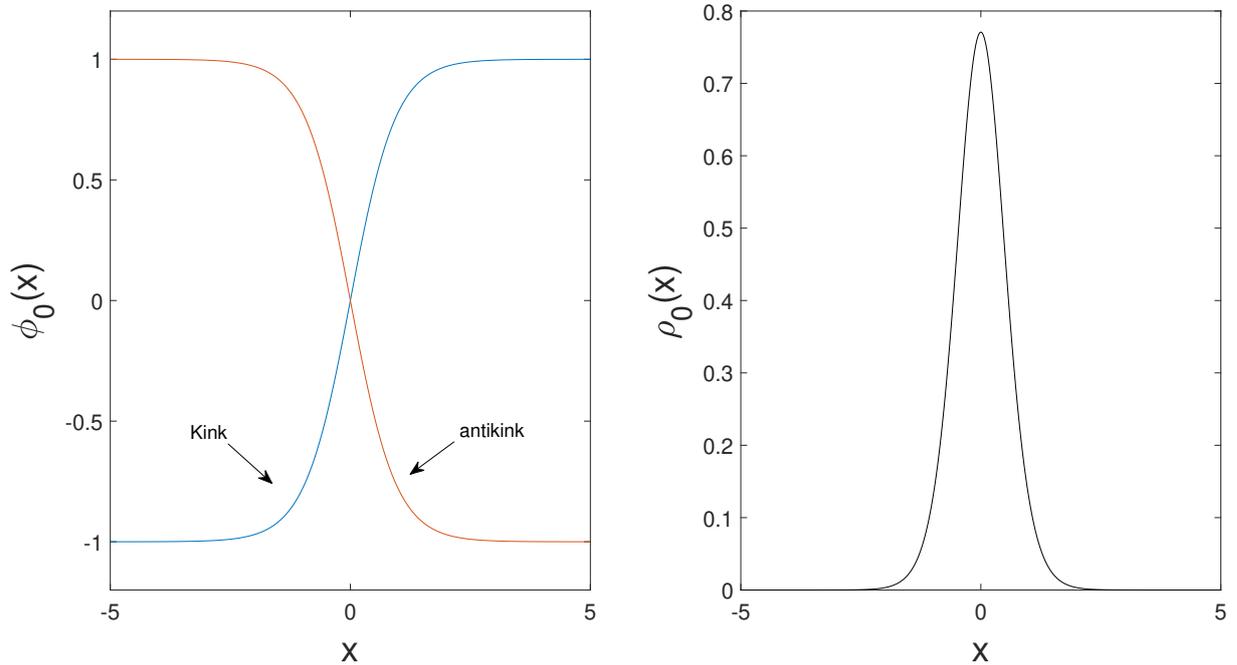
$$\underbrace{-\frac{d^2 \phi_0}{dx^2}}_{\frac{d}{dx} \frac{d\phi_0}{dx}} + \frac{dV}{d\phi}(\phi_0) = 0 \therefore \underbrace{\frac{d\phi}{dx} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d\phi_0}{dx} \right)}_{\frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_0}{dx} \right)^2 \right)} = \frac{dV}{d\phi}(\phi_0) \therefore \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_0}{dx} \right)^2 = V(\phi_0)$$

$$\therefore x - x_0 = \pm \int \frac{d\phi_0}{\sqrt{2V}}, \quad (91)$$

Como estamos interessados em soluções de ondas solitárias viajantes e nossa teoria é invariante sob transformações de Lorentz, podemos fazer $x \pm x_0 \rightarrow \frac{x \pm x_0 \mp ut}{\sqrt{1-u^2}}$, sendo u a velocidade de translação da onda,

$$\pm \frac{x \pm x_0 \mp ut}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{d\phi_0}{\sqrt{2V}}. \quad (92)$$

Figura 6 - Perfil inicial campo e densidade de energia do kink e do antikink com $x_0 = 0$ e $u = 0.1$



Fonte: O autor, 2019.

Ao substituir o potencial da eq.(85) na eq.(92), com algumas manipulações algébricas obtemos a solução viajante do kink (solução com sinal de +) e do antikink (solução com sinal de -).

$$\phi_{K\bar{K}}(x, t) = \pm \tanh\left(\frac{x \pm x_0 \mp ut}{\sqrt{1 - u^2}}\right), \quad (93)$$

com densidade de energia,

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + V(\phi) \quad (94)$$

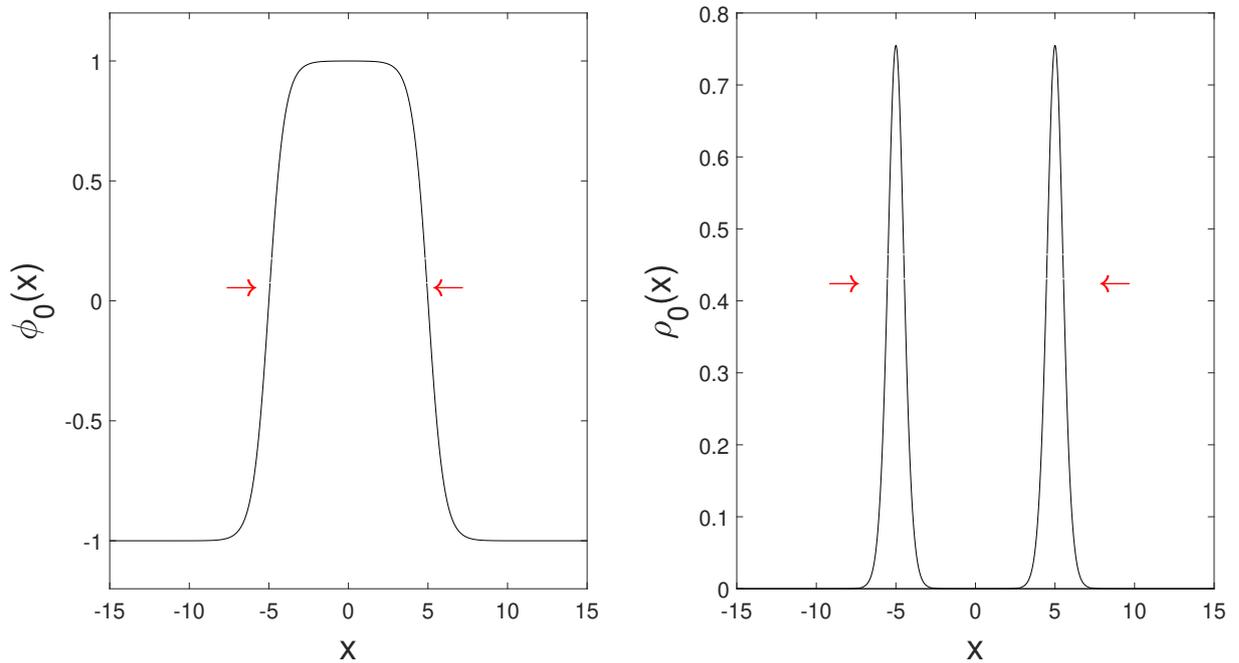
$$\rho(x, 0) = \frac{1 - u^2 - 3}{4u^2 - 1} \operatorname{sech}^4\left(\frac{x \pm x_0}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \quad (95)$$

Na Figura 6, temos o perfil do campo e da densidade de energia do kink e do antikink para posição $x_0 = 0$ e $u = 0.1$. Dispondo de eq.(93), temos que o dado inicial que representa a colisão de um kink com um antikink será (ANNINOS; OLIVEIRA; MATZNER, 1991):

$$\phi_{K+\bar{K}}(x, 0) = -1 + \phi_K(x, 0) - \phi_{\bar{K}}(x, 0). \quad (96)$$

Na Figura 7 temos o perfil inicial do campo e da densidade referente à colisão kink+antikink.

Figura 7 - Perfil inicial campo e densidade de energia da colisão kink + antikink com $x_0 = 5$ e $u = 0.1$



Fonte: O autor, 2019.

2.3 Vetor de evolução temporal

Relembrando o nosso objetivo de obter os coeficientes modais no instante inicial $\vec{\alpha}(0)$, repetimos o procedimento da seção anterior chamando de $f \cdot(\vec{\eta})$,

$$f \cdot(\vec{\eta}) = \left[\phi_{K+\bar{K}}(x(\eta_0), 0) \quad \dots \quad \phi_{K+\bar{K}}(x(\eta_N), 0) \right], \quad (97)$$

com isso, para $N = 300$ e $L_0 = 10$, substituindo o valor de $f \cdot(\vec{\eta})$ na eq.(18), encontramos os coeficientes modais,

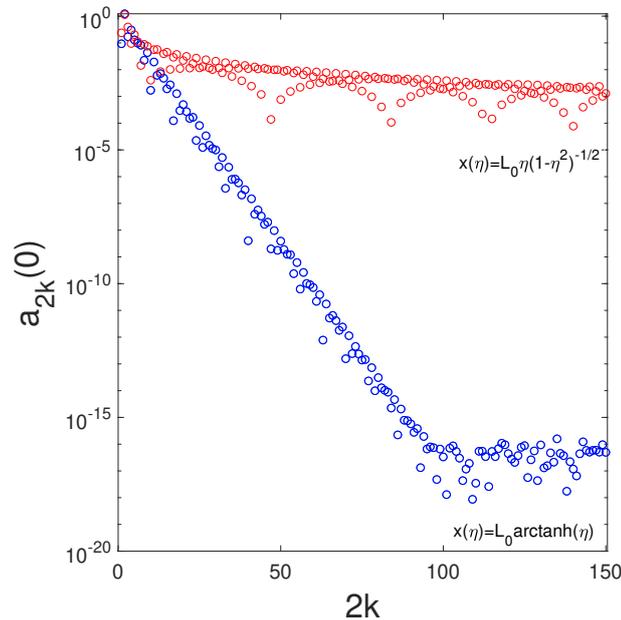
$$\vec{\alpha}(0) = \begin{bmatrix} 0.093 & 0.0 & -1.227 & 0.0 & -0.170 \\ 0.0 & -0.097 & 0.0 & -0.082 & 0.0 & 0.022 & \dots \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Analogamente,

$$\dot{f} \cdot(\vec{\eta}) = \left[\dot{\phi}_{K+\bar{K}}(x(\eta_0), 0) \quad \dots \quad \dot{\phi}_{K+\bar{K}}(x(\eta_N), 0) \right], \quad (99)$$

$$\dot{\vec{\alpha}}(0) = \begin{bmatrix} -0.041 & 0.0 & -0.009 & 0.0 & 0.072 & 0.0 & 0.025 & 0.0 & -0.048 \\ 0.0 & -0.03 & 0.0 & 0.024 & 0.0 & 0.026 & \dots \end{bmatrix} \quad (100)$$

Figura 8 - Decaimento dos coeficientes não-nulos a_{2k} para o dado inicial da colisão kink+antikink com $N = 300$, $L_0 = 10$. $x_0 = 5$ e $u = 0.1$



Fonte: O autor, 2019.

Antes de prosseguir para a próxima etapa, é interessante notar duas características dos resultados acima. A primeira é que os coeficientes de ordem ímpar são nulos. Isso se deve à simetria do dado inicial, implicando que a solução aproximada seja uma função par. A segunda observação é que os coeficientes não-nulos decaem exponencialmente com sua ordem e saturam no limite da precisão dupla 10^{-16} , vide Figura 8.

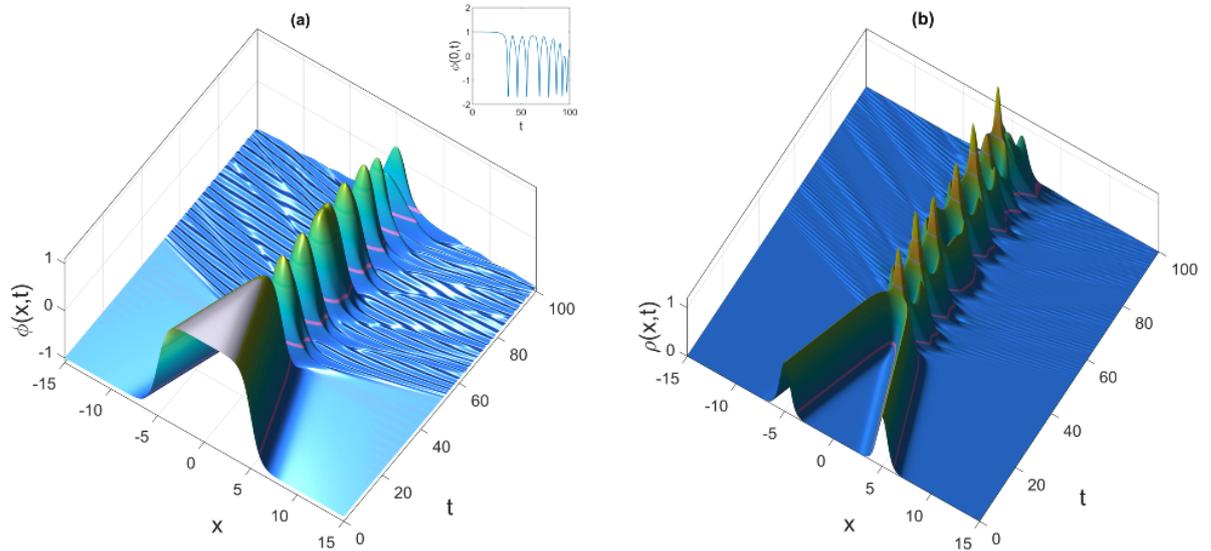
1. Para determinar o vetor de evolução temporal $\ddot{\vec{\alpha}}$, basta substituir o potencial eq.(85) na eq.(73),

$$\ddot{\vec{\alpha}}(\alpha) = \left[\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\tau}}{dx^2} - \vec{\varphi} \bullet (1 - \vec{\varphi}^2) \right]_{\vec{\varphi} = \vec{\alpha} \bullet \vec{\tau}} \bullet \vec{\tau}^{-1}, \quad (101)$$

2. A partir das condições iniciais, dada pela eq.(98) e pela eq.(100), do vetor de evolução temporal da eq.(101), repetimos iterativamente (loop) as instruções das eqs.(74-83), estabelecendo finalmente a solução aproximada da equação.

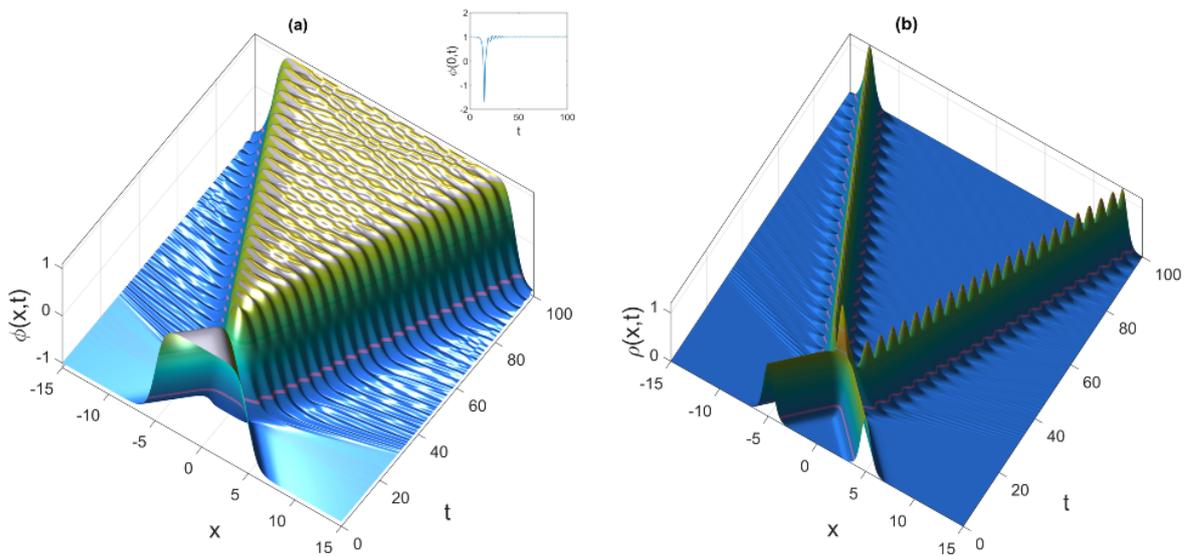
Podemos observar na Figura 9 que com a velocidade inicial $u = 0.1$ os kinks são incapazes de escapar da sua atração mútua, formando uma estrutura oscilante chamada de “óscilon”; tendo em vista que o sistema não apresenta energia suficiente para alterar essa configuração, a chamaremos também de “estado ligado”. A partir disso, experimentamos repetir o procedimento para o triplo da velocidade, $u = 0.3$, com a finalidade de verificar

Figura 9 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$: Colisão em $\lambda\phi^4$, $u = 0.1, x_0 = 5$ com formação de óscilon.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 10 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$: Colisão em $\lambda\phi^4$, $u = 0.3, x_0 = 5$ com formação de kinks.



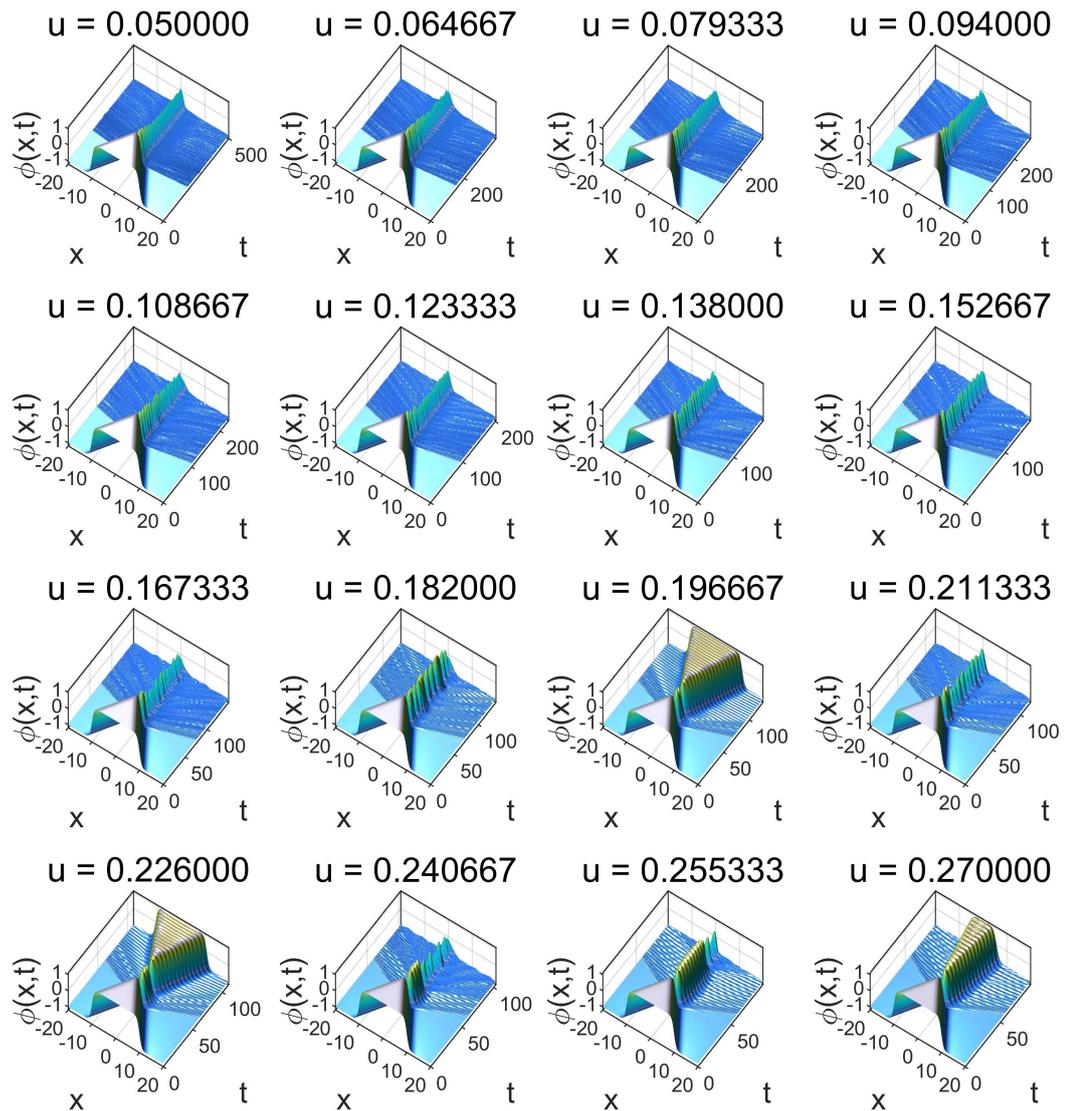
Fonte: O autor, 2019.

se os kinks irão escapar ou formar novamente uma estrutura do tipo óscilon. Nesse caso, vemos a Figura 10, que os kinks escapam imediatamente após a colisão, apresentando uma velocidade de translação final u_{out} consideravelmente alta em relação à velocidade de entrada u , tendo em vista que se trata de uma colisão inelástica, onde parte da energia é irradiada e que a energia cinética também é distribuída com seu movimento de vibração (excitação de modos vibracionais). É natural intuir que qualquer colisão cuja velocidade de translação seja maior que $u = 0.3$ apresente o comportamento de escape ou que exista uma dada velocidade limite u_{lim} que seria a velocidade a partir da qual os kinks sempre irão escapar ao colidir. Para encontrar essa velocidade limite é feita uma sequência de integrações para um dado intervalo de velocidade, no caso $0.05 < u < 0.27$, como podemos ver na Figura 11. Notamos que a partir de $u > 0.26$ os kinks sempre escapam, e para velocidades significativamente inferiores, os kinks escapam realizando “bounces”, como temos com mais detalhes na Figura 12. Esse fenômeno é justificado pela existência de modos internos de vibração, que serão melhor discutidos na seção seguinte. Podemos citar algumas principais características para colisões com esse potencial.

- Caso de escape com $\phi(0, t \rightarrow \infty) \approx 1$.
- Caso de formação de óscilon com $\phi(0, t \rightarrow \infty) < 1$.
- Velocidade limite $u_{lim} \approx 0.2598$: Menor velocidade possível para que $\phi(0, t)$ apresente apenas um ponto de mínimo.
- Existência de fractalidades (transições de comportamento ao diminuir determinados intervalos de velocidade) mediadas pelo fenômeno de bounces, podendo ser identificadas como o número de pontos de mínimos de $\phi(0, t)$ para o caso de escape que não ocorre imediatamente após a colisão.

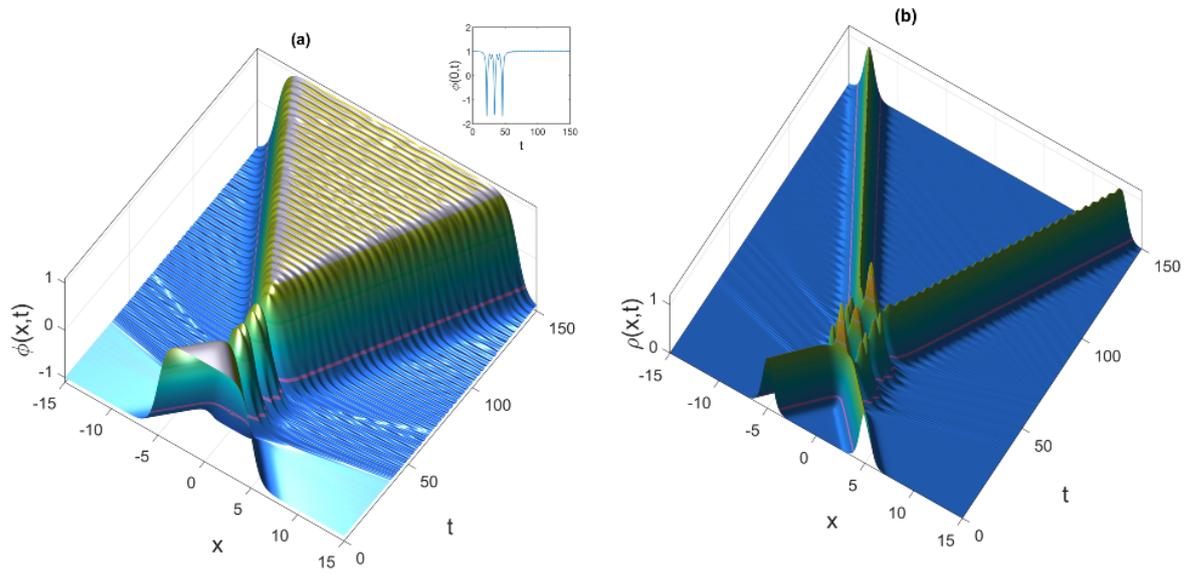
Na Figura 13 podemos observar um exemplo do decaimento do erro máximo em relação a conservação de energia $E(\%)$ versus ordem de truncagem N para a colisão de kinks em $\lambda\phi^4$, referente a colisão da Figura 10, onde obtemos um erro menor que $10^{-2}\%$, justificando a eficácia do método.

Figura 11 - Campos escalares $\phi(x, t)$ para colisão de kinks em $\lambda\phi^4$ com velocidade entre $u = 0.05$ e $u = 0.27$.



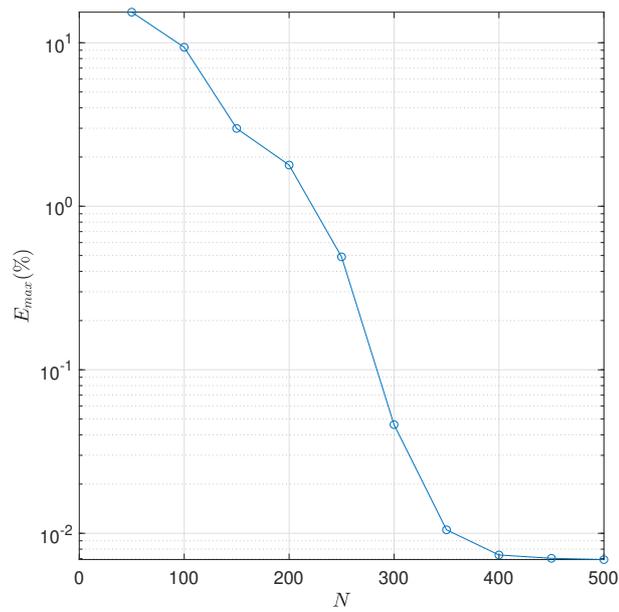
Fonte: O autor, 2019.

Figura 12 - Campo escalar $\phi(x, t)$: Colisão em $\lambda\phi^4$, $u = 0.19125, x_0 = 5$, 3 Bounces.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 13 - Decaimento do erro máximo $E(\%)$ versus ordem de truncagem N .



Fonte: O autor, 2019.

2.4 Modos Internos e Modos Contínuos

Os modos internos e os modos contínuos são obtidos substituindo $\phi(x, t) \rightarrow \phi(x) + \chi(x)e^{-i\omega t}$ na eq.(67), obtendo a seguinte equação de autovalores (MENDONÇA; OLIVEIRA, 2015).

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right] \chi_m = \omega_m^2 \chi_m \quad (102)$$

Nem sempre é simples encontrar os valores de ω_m^2 , para alguns potenciais $V(\phi)$ não é possível obtê-los analiticamente. Em $\lambda\phi^4$ temos os autovalores, $\omega_0 = 0$ (modo translacional), $\omega_1 = \sqrt{3}$ (modo vibracional) e a partir de $\omega \geq 2$ os modos contínuos (modos de radiação). A existência desses modos internos influencia na dinâmica dos kinks, onde ao excitar mais os modos de vibração do que os modos de translação obtemos estruturas do tipo óscilon. Do mesmo modo, ao excitar mais os modos de translação teremos casos de escape e quando ocorre troca de energia entre esses modos podemos ter efeitos como bounce, que sempre estará ligado a alguma janela de fractalidade. Iremos apresentar duas formas de obter os modos internos de vibração numericamente e os modos de radiação analiticamente.

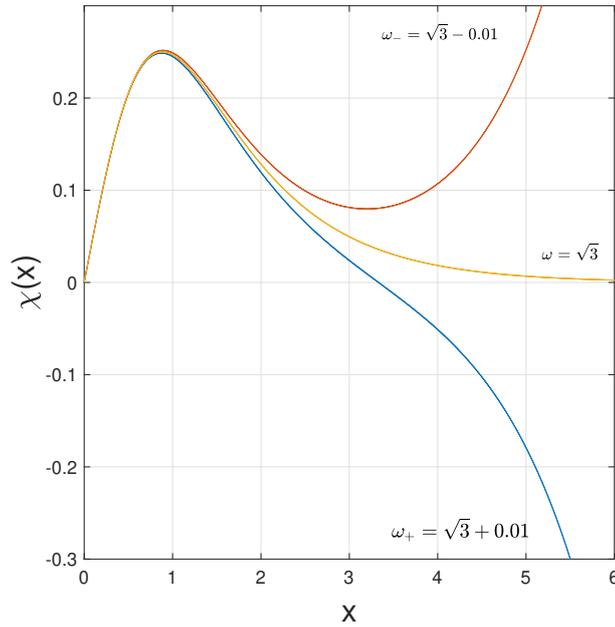
2.4.1 Modos de vibração

Decorrente da dificuldade de se obter os valores de ω_m mencionado anteriormente, iremos usar algumas propriedades da função $\chi_m(x)$ para estimar numericamente os valores de ω_m . A função $\chi_m(x)$ associada à um dado modo interno ω_m obedece ao seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi_m(x) = 0. \quad (103)$$

Desta forma, basta testar diversos valores para ω_m e resolver numericamente a eq.(102) através do método de Runge-Kutta, para o maior valor de x_f (posição final) possível. Algo interessante é que, ao fazer esse procedimento, observamos, que quando o autovalor correto ω_m está entre dois pontos vizinhos $\omega_- = \omega_m - \delta$ e $\omega_+ = \omega_m + \delta$, as autofunções associadas a esses dois pontos tendem a valores de $\chi_m(x = x_f)$ com sinais opostos, ou seja, o ω_m correto pode ser entendido como o valor onde ocorre a troca de sinal como visto na Figura 14. Com isso, concluímos que um dado modo interno ω_m está contido num intervalo entre $[\omega_-, \omega_+]$, e para fornecer uma razoável estimativa numérica de ω_m

Figura 14 - Autofunção $\chi_m(x)$ em $\lambda\phi^4$ para $\omega = \sqrt{3}$ e $\omega = \sqrt{3} \pm 0.01$.



Fonte: O autor, 2019.

estabelecemos os seguintes critérios:

$$1) \quad \text{sign}(\chi(x = x_f)|_{\omega_-}) + \text{sign}(\chi(x = x_f)|_{\omega_+}) = 0 \quad (104)$$

$$2) \quad |\omega_- - \omega_+| < 10^{-15} \quad (105)$$

$$3) \quad \omega_m = \frac{\omega_- + \omega_+}{2} \quad (106)$$

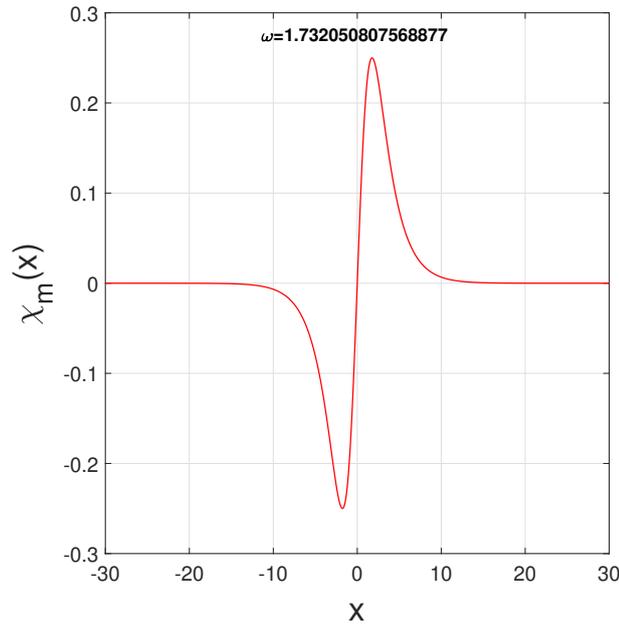
Ao realizar o procedimento numérico para encontrar o modo interno $\omega_1 = \sqrt{3}$ que se trata de um valor obtido analiticamente, obtemos o valor

$$\omega_m = 1.732050807568877 \quad (107)$$

$$\text{Erro : } \delta\omega_m(\%) = 100 \times \frac{|1.732050807568877 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3}} \approx 5 \times 10^{-4}\%, \quad (108)$$

o gráfico da autofunção $\chi(x)$ está apresentado na Figura 15.

Figura 15 - Autofunção numérica $\chi_m(x)$ em $\lambda\phi^4$ com $\omega = 1.732050807568877$ (modo discreto).



Fonte: O autor, 2019.

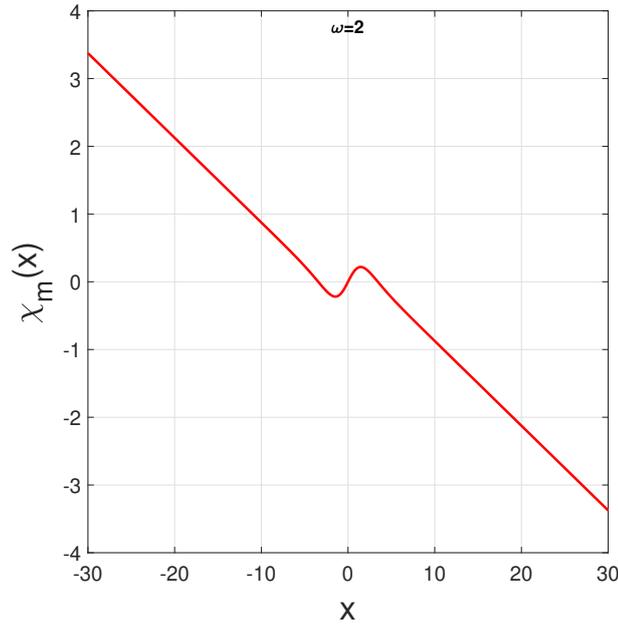
2.4.2 Modos contínuos

Os modos contínuos ou modos radiativos são responsáveis pelo surgimento de porções do campo que se dissipam com o tempo, não sendo considerados defeitos topológicos. Em alguns potenciais como $V_p(\phi)$, como veremos a seguir, o efeito desses modos é altamente expressivo e em outros, como $V_n(\phi)$, esses efeitos são mais sutis. Ao obter um óscilon em $\lambda\phi^4$ a partir da colisão de kinks, temos que, a cada oscilação, parte da energia é ejetada em forma de radiação, porém esse processo é bastante lento para ser apreciado. Uma das justificativas da ocorrência de bounces é a competição entre os modos internos de translação e vibração.

Para calcular os modos contínuos, não é necessário conhecer a autofunção $\chi(x)$, já que eles podem ser escritos explicitamente em termos do potencial $V(\phi)$ e suas derivadas $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2}$, quando aplicamos a regra da cadeia na eq.(102)

$$\left[- \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}}_{\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{d}{d\phi} \right)} + \underbrace{\left(\frac{d^2 V_n}{d\phi^2} \right)}_{\frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2}} \right] \chi_m = \omega_m^2 \chi_m \therefore \left[- \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} \frac{d}{d\phi} \right)}_{\frac{d^2 \phi}{dx^2} \frac{d}{d\phi} + \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \frac{d^2}{d\phi^2}} + \frac{d^2 V(\phi)}{d\phi^2} \right] \chi_m = \omega_m^2 \chi_m$$

Figura 16 - Autofunção numérica $\chi_m(x)$ em $\lambda\phi^4$ com $\omega = 2$ (modo contínuo).



Fonte: O autor, 2019.

$$\therefore \left[-\underbrace{\frac{d^2\phi}{dx^2}}_{\frac{dV}{d\phi}} \frac{d}{d\phi} - \underbrace{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2}_{2V} \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right] \chi_m = \omega_m^2 \chi_m$$

$$\therefore \left[-\frac{dV(\phi)}{d\phi} \frac{d}{d\phi} - 2V(\phi) \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right] \chi_m = \omega_m^2 \chi_m. \quad (109)$$

Em $\lambda\phi^4$ temos que

$$V(\pm 1) = \left[\frac{dV(\phi)}{d\phi} \right]_{\phi=\pm 1} = 0 \quad \& \quad \left[\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right]_{\phi=\pm 1} = 4 \quad (110)$$

e ao substituir na eq.(109) encontramos finalmente o modo contínuo mínimo. Vide Figura 16

$$4 = \omega_m^2 \rightarrow \omega_m = 2. \quad (111)$$

3 KINKS PARA O POTENCIAL $V_p(\phi)$

A busca por defeitos topológicos é de grande interesse para a física de altas energias e gravitação, partindo disso, Bazeia et al. (BAZEIA; MENEZES; MENEZES, 2003) apresentaram uma nova classe de defeitos topológicos descritos por um campo escalar real em $(D, 1)$ dimensões, onde para $D = 1$, temos a seguinte família de potenciais:

$$V_p(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 \left(\phi^{-p-1} - \phi^{p-1} \right)^2. \quad (112)$$

onde o parâmetro p é um número inteiro positivo e está relacionado à forma com que o campo auto-interage. Primeiramente estamos interessados em obter soluções do tipo onda solitária, substituindo eq. (112) na eq. (92),

$$x - x_0 = \int \frac{d\phi_0}{\phi_0 \left(\phi_0^{-p-1} - \phi_0^{p-1} \right)} = p \arctan \left(\phi_0^{p-1} \right) \quad (113)$$

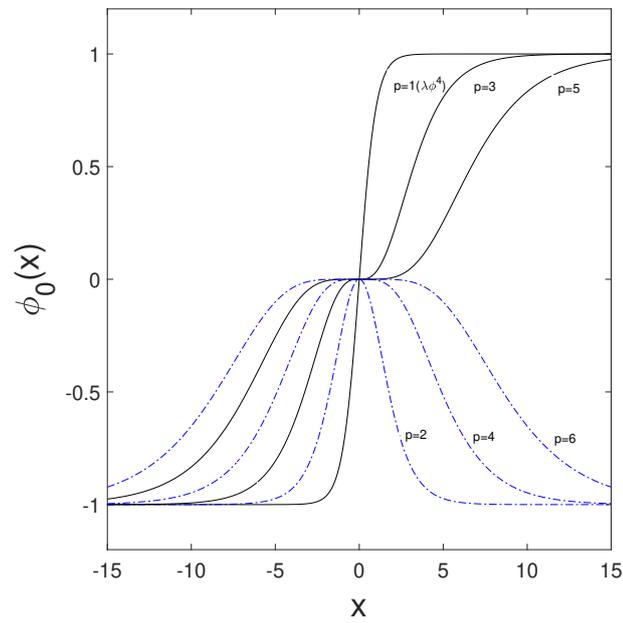
$$\rightarrow \phi_0 = \pm \tanh^p \left(\frac{x - x_0}{p} \right), \quad (114)$$

observamos que a carga topológica Q , que é proporcional a

$$Q \propto \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_0(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_0(x) \right], \quad (115)$$

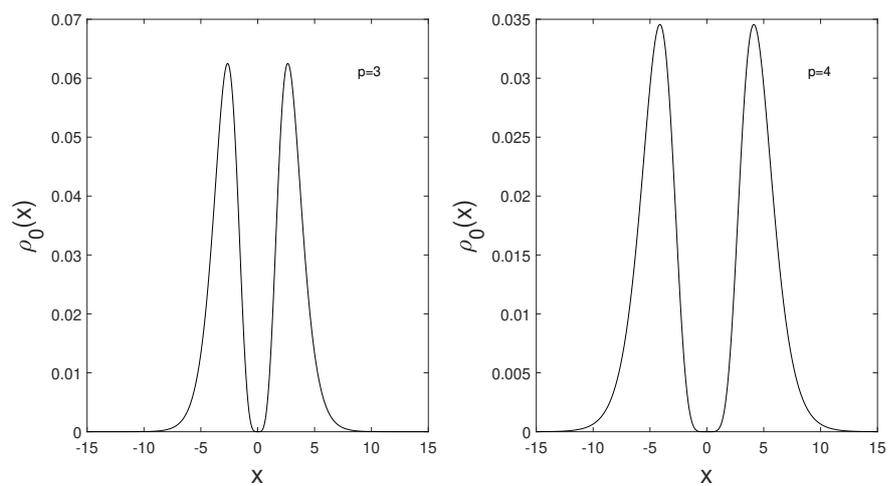
é igual a $Q = 0$ quando p for par e $Q > 0$ quando p for ímpar. Isso implica que quando p for ímpar o potencial permite soluções topologicamente estáveis do tipo kink e quando p for par o potencial permitirá apenas soluções topologicamente instáveis denominada “lumps”, cuja tradução do inglês significa “caroço” em referência à forma do campo. Por conta disso, os lumps são considerados defeitos não-topológicos, vide Figura 17. As soluções do tipo kink para esse potencial são chamadas de *2-kinks* ou *kink-duplo*, por conta das duas cristas do gráfico da densidade de energia e seu formato de S, como pode ser visto nas Figuras 17 e 18. Apesar dos campos $\phi_0(x)$ para os 2-kinks e os lumps serem nitidamente diferentes, seus perfis de densidade de energia são similares, como podemos ver na Figura 18. Na Figura 19 podemos observar um lump ($p = 4$) sendo destruído rapidamente com uma perturbação gaussiana central da ordem de 0.01. Por conta do lump ser um objeto instável, não existe uma grande atenção da comunidade em estudá-lo, porém iremos apresentar nesse capítulo situações onde é possível obter estados metaestáveis a partir de perturbações especiais e que os lumps podem ser criados através de colisões de 2-kinks.

Figura 17 - Solução da eq.(114): lumps e 2-kinks .



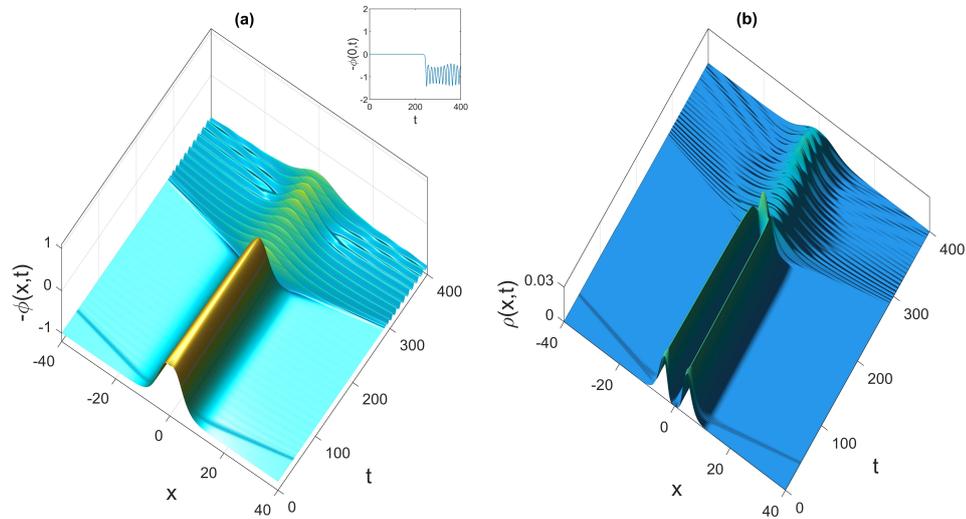
Fonte: O autor, 2019.

Figura 18 - Perfil da densidade de energia $\rho(x, 0)$ de um 2-kink com $p = 3$ (à direita) e de um lump com $p = 4$ (à esquerda). (18): 2-kinks e lumps .



Fonte: O autor, 2019.

Figura 19 - Evolução de uma solução do tipo lump com $n = 4$ sendo adicionada uma perturbação gaussiana central de amplitude 0.01



Fonte: O autor, 2019.

3.1 Modos Internos e Modos Contínuos para kinks com potencial $V_p(\phi)$

Como vimos na Seção 2.4, os modos internos e os modos contínuos determinam diversos comportamentos dinâmicos ao se estudar a colisão de kinks. Primeiramente iremos obter o valor do modo contínuo repetindo o procedimento apresentado na Subseção 2.4.2,

$$V_p(\pm 1) = \left[\frac{dV_p(\phi)}{d\phi} \right]_{\phi=\pm 1} = 0 \quad \& \quad \left[\frac{d^2V_p(\phi)}{d\phi^2} \right]_{\phi=\pm 1} = \frac{4}{p^2} \quad (116)$$

que ao substituir na eq.(109) encontramos.

$$\omega_c = \frac{2}{p}. \quad (117)$$

Esse resultado é interessante pois indica que o valor dos modos contínuos tendem a decair com o aumento do parâmetro p . Com isso, intui-se que os modos de radiação são mais facilmente excitados e as colisões deverão apresentar grande perda do campo escalar sobre uma dada região limitada.

Interessados em encontrar o modo de vibração ω_1 , repetimos o procedimento da Subseção 2.4.1 para o intervalo $0 < \omega_1 < 2/p$, e encontramos os modos apresentados na Tabela 1 com suas respectivas autofunções na Figura 20.

Tabela 1 - Modos Internos ω_1 para $V_p(\phi)$

p	ω_1
1	$\sqrt{3}$
3	0.49243
5	0.29287
7	0.20870
9	0.16216
11	0.13261
13	0.11218
15	0.09720
17	0.08585

Fonte: O autor, 2019.

3.2 Dissipação adiabática

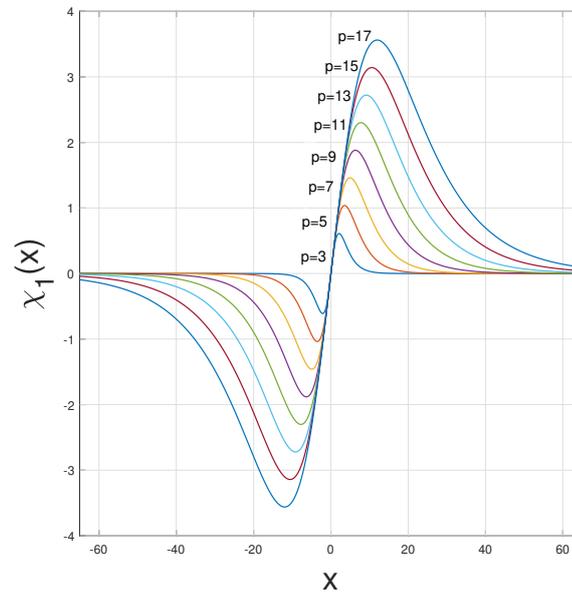
Para um mapeamento infinito ou semi-infinito a densidade dos pontos de colocação decai com a distância. Para longas integrações, porções que se distanciam da origem tendem a ser refletidas ao chegarem a uma região com poucos pontos de colocação, provocando erros numéricos. Para resolver esse problema, utilizaremos a chamada dissipação adiabática (GLEISER; SORNBORGER, 2000), $\gamma(x)\frac{\partial\phi}{\partial t}$, que irá dissipar porções do campo a partir de uma dada posição $x_{abs} \gg 1$, evitando o efeito de reflexão e preservando a solução dentro do nosso intervalo espacial de interesse. Quando a dissipação é distribuída simetricamente, temos:

$$\gamma_{abs}(x) = K_{abs}^2(|x| - x_{abs})^2 \left[\frac{1}{2} \tanh(x - x_{abs}) - \frac{1}{2} \tanh(x + x_{abs}) + 1 \right], \quad (118)$$

sendo K_{abs}^2 uma pequena constante associada à magnitude da dissipação, x_{abs} é a posição a partir da qual possuirá a maior contribuição da dissipação. Vale ressaltar que o termo dentro dos colchetes é unitário e responsável unicamente pela delimitação suave da dissipação. Na Figura (21) podemos ver como é distribuída a dissipação. Sendo assim a eq.(73) com a adição desse termo, o vetor de evolução passará a ser

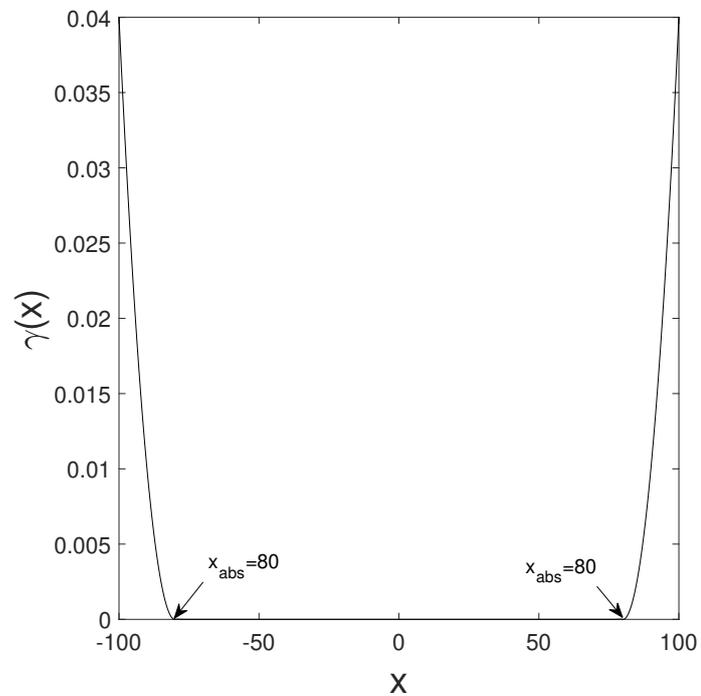
$$\ddot{\vec{\alpha}} = \left[\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2\vec{\tau}}{dx^2} - \frac{\partial V \cdot (\vec{\varphi})}{\partial \phi} - (\dot{\vec{\alpha}} \bullet \vec{\tau}) \cdot (\gamma \cdot (\vec{\eta})) \right] \bullet \vec{\tau}^{-1}, \quad (119)$$

Figura 20 - Autofunção $\chi_1(x)$ para $p = 3, 5, \dots, 15$ e $p = 17$



Fonte: O autor, 2019.

Figura 21 - Dissipação dada por eq.(118) com $x_{abs} = 80$ e $K_{abs}^2 = 0.0001$.



Fonte: O autor, 2019.

3.3 Procedimento numérico e discussões

Os coeficientes iniciais $\vec{\alpha}(0)$ serão ajustados ao dado inicial,

$$\phi_{K\bar{K}}(x, t) = \pm \tanh^p \left(\frac{x \pm x_0 \mp ut}{p\sqrt{1-u^2}} \right).$$

$$\phi_{K+\bar{K}}(x, 0) = -1 + \phi_K(x, 0) - \phi_{\bar{K}}(x, 0). \quad (120)$$

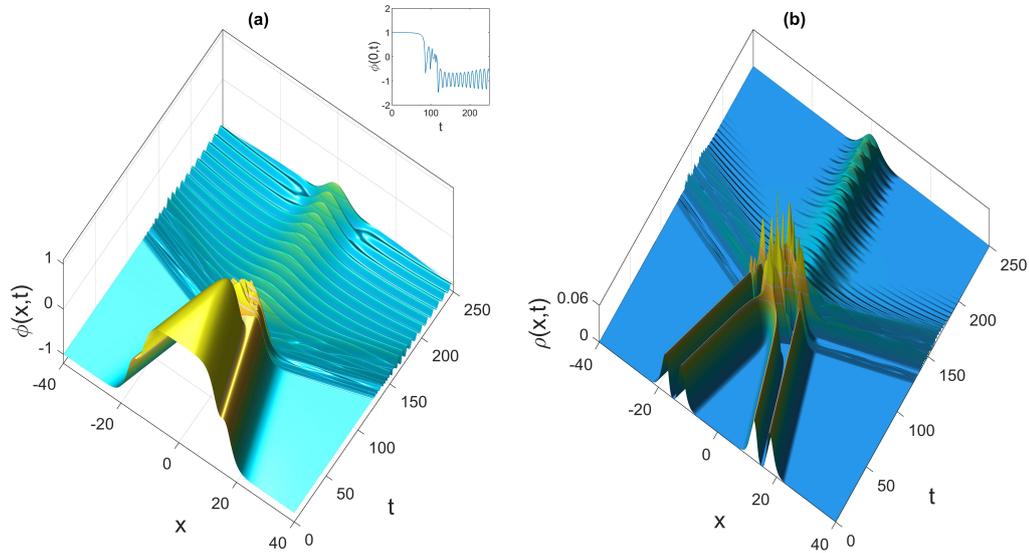
O vetor de evolução temporal para esse potencial, já incluindo o termo de dissipação, é dado substituindo eq.(112) na eq.(155), obtendo

$$\ddot{\vec{\alpha}}(\alpha) = \left[\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\tau}}{dx^2} - \vec{\varphi} \cdot * \left(\vec{\varphi}^{-2p-1} p - 2p + \vec{\varphi}^{2p-1} p + \vec{\varphi}^{2p-1} - \vec{\varphi}^{-2p-1} \right) p^{-1} - \gamma \cdot (\vec{\eta}) \right] \bullet \vec{\tau}^{-1}. \quad (121)$$

Iniciamos nossa investigação para o potencial $V_p(\phi)$ com $p = 3$ com uma velocidade baixa $u = 0.1$ e uma velocidade mais alta $u = 0.41$, onde esperamos encontrar soluções do tipo estado ligado e escape, mas com um olhar atento de como eles ocorrem e o que há de qualitativamente diferente em relação ao nosso potencial de referência $\lambda\phi^4$. A primeira observação mais evidente é a quantidade excessiva do campo escalar que é irradiado no caso de estado ligado com $u = 0.10$, visto na Figura 22. Na Figura 23 comparamos esse óscilon com um óscilon formado em $\lambda\phi^4$ (Figura 9) até o instante $t = 5000$, onde notamos a perda cerca de 25% de energia na região limitada $x_{lim} = [-40, 40]$ para o óscilon em $\lambda\phi^4$, enquanto no caso do óscilon para o potencial $V_p(\phi)$ com $p = 3$, a energia perdida na região foi superior à 60%. Da mesma forma, na Figura 24 observamos também que boa parte do campo é irradiado no caso de escape com $u = 0.41$ em comparação com o que era visto em $\lambda\phi^4$. Outro ponto importante é que o escape ocorre com o campo na origem oscilando em torno de $\phi(0, t \rightarrow \infty) \approx 0$ diferentemente de $\lambda\phi^4$, onde o campo oscila em torno de $\phi(0, t \rightarrow \infty) \approx 1$. Na Figura 25 observamos o decaimento do erro percentual máximo da conservação de energia (sem dissipação) $E_{max}(\%)$ para cada valor de N no caso da Figura 22, onde observamos um comportamento satisfatório, tendo como erro máximo percentual $E(\%) \approx 0.3579\%$ para $N = 400$.

Conhecendo basicamente o que há de novo com esse potencial, partimos para um refinamento com alguns valores de velocidade entre $u = [0.05, 0.46]$, a fim de obter outras estruturas, fractalidades, velocidades limite de escape e etc, como podemos ver na Figura 26. O caso de escape será melhor discutido na próxima seção.

Figura 22 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.1$.



Legenda: A principal diferença entre as colisões em $\lambda\phi^4$ para o caso de estado ligado é que grande parte do campo é irradiado sobrando apenas um pequeno óscilon na origem.

Fonte: O autor, 2019.

3.4 Formação de soluções do tipo kink ($\lambda\phi^4$) como produto da colisão de 2-kinks

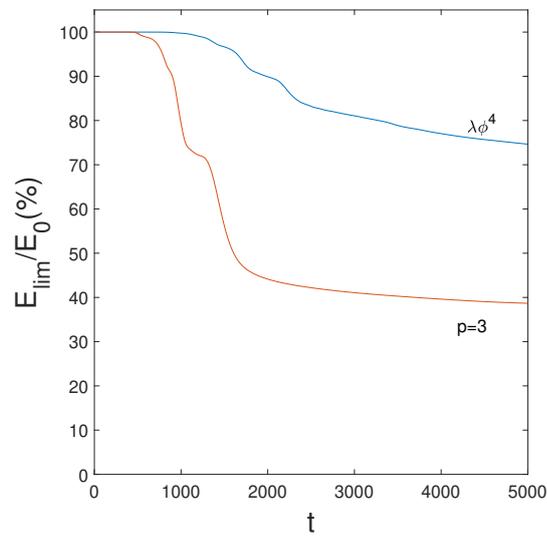
O objetivo dessa seção é descrever as estruturas viajantes formadas após colisões de 2-kinks, como os da Figura 24, como kinks em $\lambda\phi^4$. A principal diferença da estrutura formada nas colisões de 2-kinks como os da Figura 24 e das colisões de kinks simples como os da Figura 10 é que a solução viajante passa de $-1 < \phi(x, t) < 1$ ($\lambda\phi^4$) para $-1 < \phi(x, t) < 0$ ($V_p(\phi)$). Deste modo buscaremos obter soluções de kinks em $\lambda\phi^4$ que tivessem também a contidas em $-1 < \phi(x, t) < 0$ e para isso, o potencial $\lambda\phi^4$ escolhido foi,

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} - \phi \right)^2 \right]^2, \quad (122)$$

que possui como solução viajante de um kink+antikink se afastando com $-1 < \phi(x, t) < 0$,

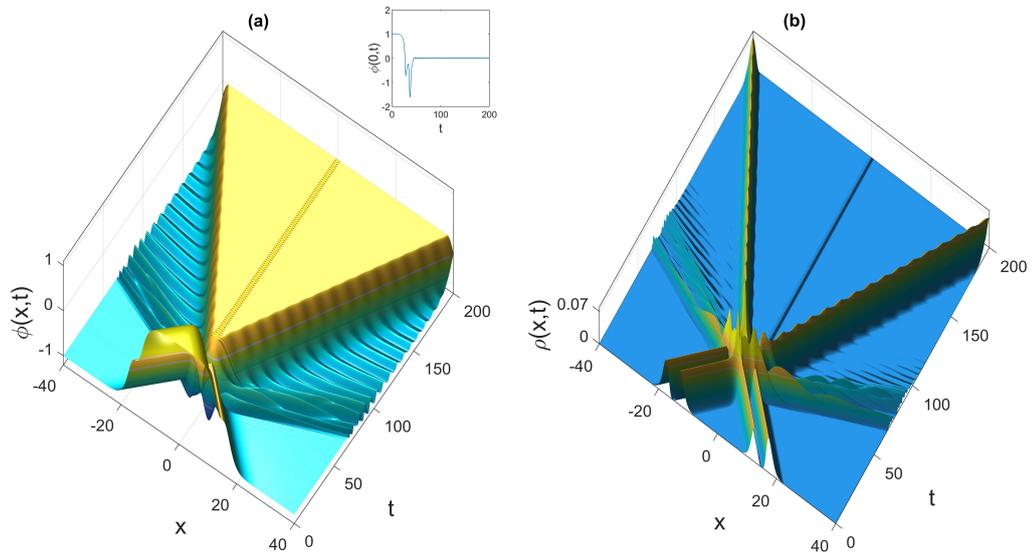
$$\phi(x, \bar{t}) = -1 - \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{u}\bar{t} + x - \bar{x}_0}{\sqrt{1 - \bar{u}^2}} \right) + \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{1}{2} \frac{-\bar{u}\bar{t} + x + \bar{x}_0}{\sqrt{-\bar{u}^2 + 1}} \right), \quad (123)$$

Figura 23 - Fração de energia nos limites $x_{lim} = [-40, 40]$ para o óscilon formado com a velocidade $u = 0.1$ para $\lambda\phi^4$ (Figura 9) e $p = 3$ (Figura 22).



Fonte: O autor, 2019.

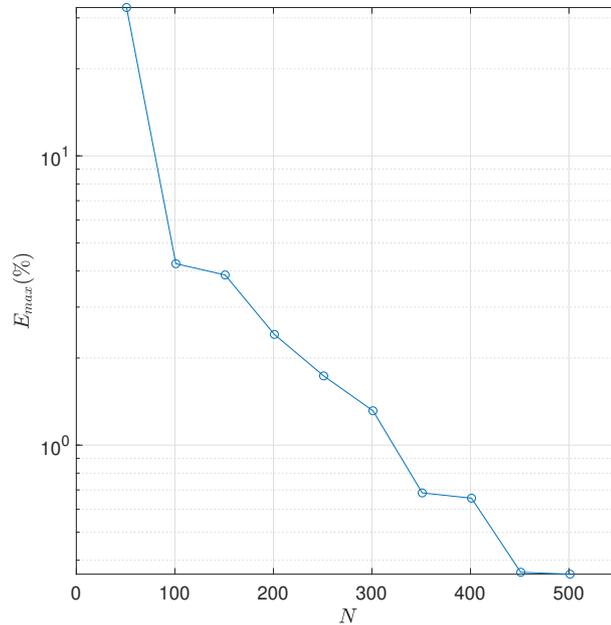
Figura 24 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.41$.



Legenda: Colisão entre 2-kinks com $p = 3$ resultando em escape. Note que apesar de ser um caso de escape, uma parcela significativa é irradiada.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 25 - Decaimento do erro máximo $E(\%)$ (sem dissipação) versus ordem de truncagem N para a colisão da Figura 22.



Fonte: O autor, 2019.

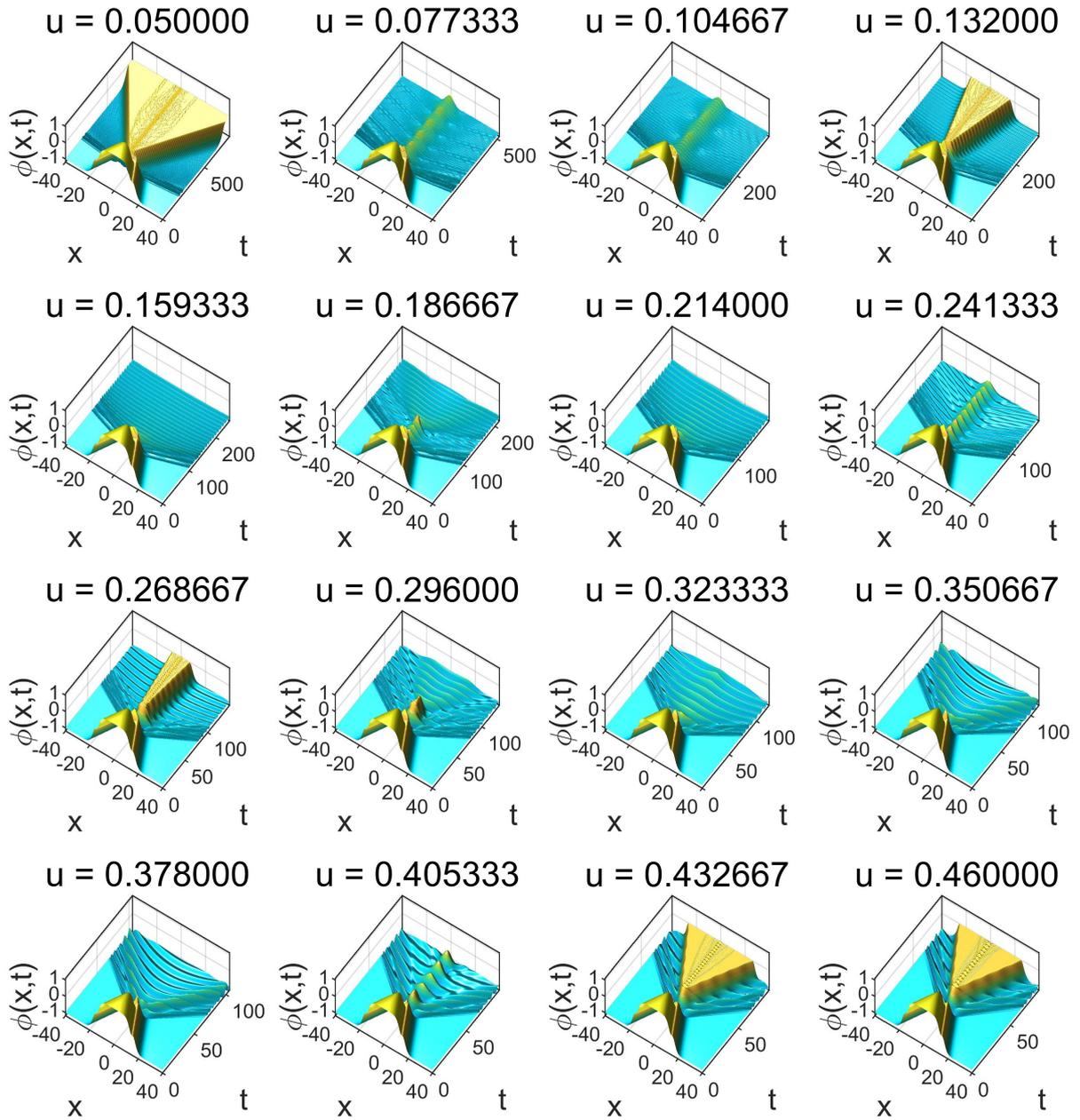
sendo \bar{u} , \bar{t} e \bar{x} os parâmetros a serem determinados para o ajuste da solução pós-colisão de 2-kinks. Para obter esses parâmetros utilizaremos a expressão do perfil estático do campo e da densidade de energia. Primeiramente substituindo a eq.(123) e a eq.(122) na eq.(95) no ponto de máximo $x = \bar{x}_0$ em $\bar{t} = 0$, encontramos a altura $H = H(\bar{x}_0, \bar{u})$ do pico da crista da densidade de energia,

$$H = \frac{1}{32}\zeta^2(2\zeta^2 - 4\zeta + 4) \quad (124)$$

$$\zeta = \tanh\left(\frac{\bar{x}_0}{\sqrt{1 - \bar{u}^2}}\right). \quad (125)$$

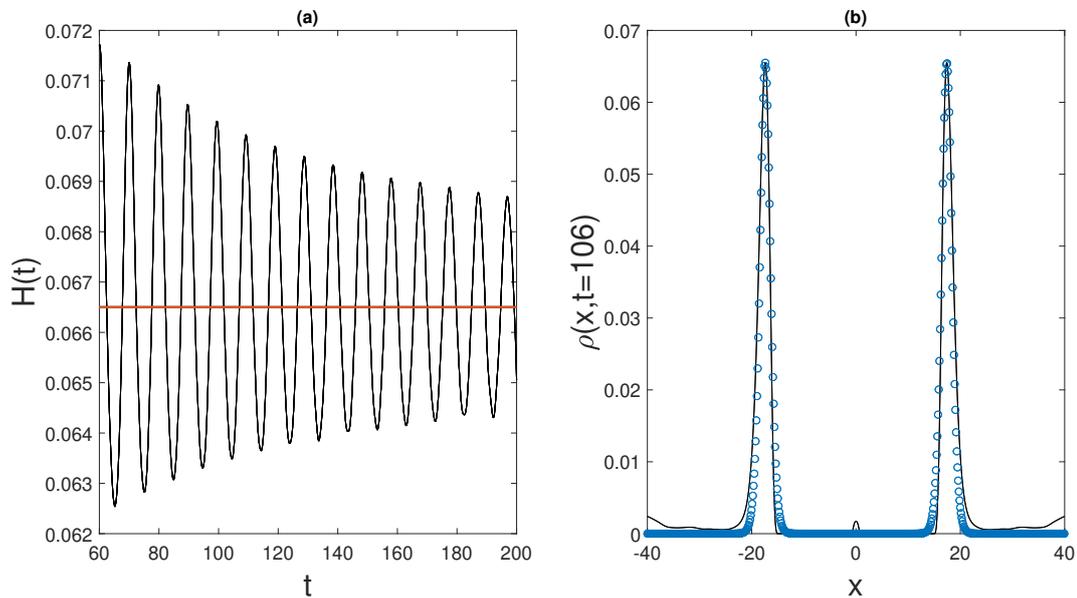
Desse modo, tendo como entrada os valores numéricos da posição inicial do kink \bar{x}_0 (pós colisão) e de sua altura média H , levando em consideração que existem oscilações sobre esse dado valor como podemos ver na Figura 27(a), ajustamos eq.(125) para o caso da Figura 24 com $\bar{x}_0 = 17.410$, $H = 0.0655$ em $t = 106$ obtendo aproximadamente velocidade de saída $\bar{u} \approx 0.297$, vide Figura 27(b).

Figura 26 - Campo escalar $\phi(x, t)$ para $p = 3$ com 16 velocidades entre $u = [0.05, 0.46]$



Fonte: O autor, 2019.

Figura 27 - Oscilação do valor da altura de um kink pós-colisão e kink criado a partir da colisão de 2-kinks com $p = 3$ sendo descrito por um kink em $\lambda\phi^4$



Fonte: O autor, 2019.

3.5 Formação de soluções do tipo lump como produto da colisão de 2-kinks

Ao realizar o refinamento entre os valores de u com o propósito de investigar as estruturas formadas entre duas velocidades onde ocorre transição de comportamento (estado ligado \rightarrow escape), encontramos uma estrutura que a partir da interação inicial pós-colisão possui uma forma semelhante ao lump visto na Figura 19. Para entender melhor a natureza dessa estrutura crítica formada, iremos compará-lo com uma solução do tipo lump. Para isso, iremos generalizar a solução eq.(114) (MENDONÇA; OLIVEIRA, 2015),

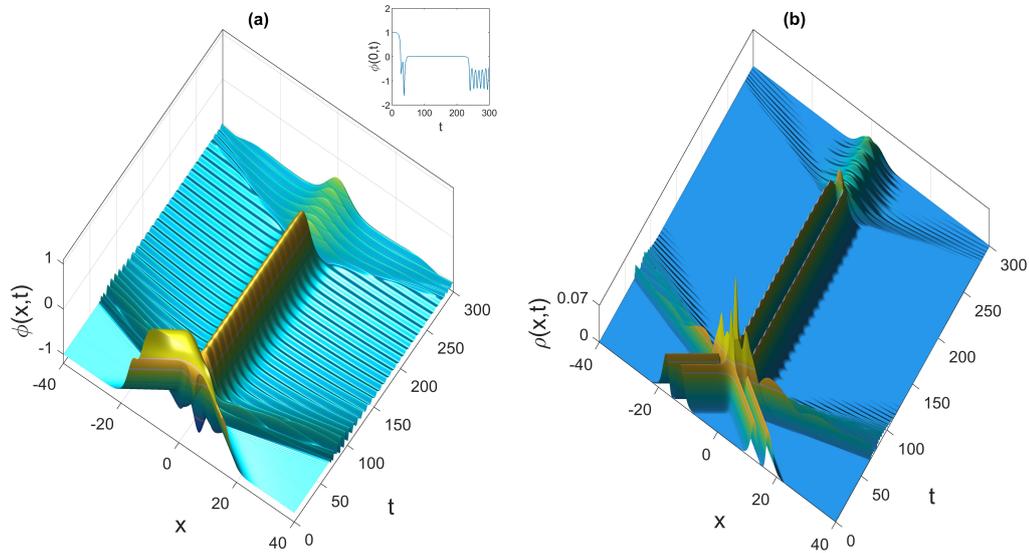
$$\phi_q = -\tanh^q(bx), \quad (126)$$

que ao substituir na eq.(95) encontramos a densidade de energia

$$\rho_q(x) = \frac{b^2 q^2 \tanh^{2q}(bx) [1 - \tanh^2(bx)]^2}{\tanh^2(bx)}. \quad (127)$$

Iremos verificar se realmente o objeto formado na Figura 28 caracteriza uma solução do tipo lump, apenas tendo como entrada um ponto que é o valor de sua altura $H \approx 0.0617$ em ($t = 150$). Para estimar os valores de b e q , primeiramente encontramos os pontos críticos de eq. (127)

Figura 28 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 3$ e $u = 0.407292$



Legenda: Na busca da velocidade crítica, entre dois comportamentos encontramos uma estrutura que não é um kink e nem um óscilon, mas que possui o campo e densidade de energia similares ao objeto da Figura 19, um lump.

Fonte: O autor, 2019.

$$x_{max} = \pm \frac{1}{b} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{q-1}{q+1}} \right) \quad (128)$$

e substituimos em (127) obtendo a altura máxima,

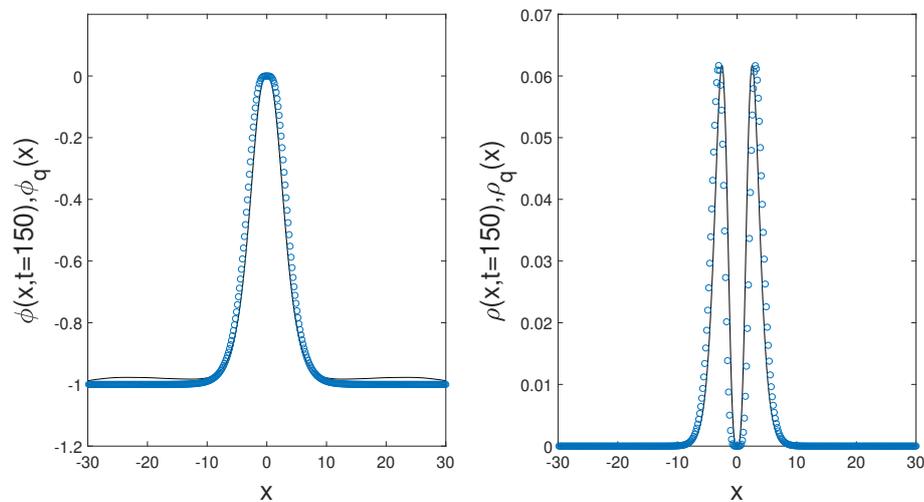
$$H = H(b, q) = 4 b^2 q^2 \left(\frac{q-1}{q+1} \right)^q (q^2 - 1)^{-1} \quad (129)$$

Então o parâmetro b em termos da altura H e de q é dado por

$$b = b(q, H) = \frac{1}{2} \frac{(q+1)^q \sqrt{H (q^2 - 1)^{1-q}}}{q}. \quad (130)$$

Testando o primeiro valor possível para q obtemos $b(q = 2, H = 0.0617) \approx 0.3227$, como podemos ver na Figura 29. Possíveis desvios em relação ao lump associado se devem ao fato da estrutura formada não ser totalmente estática, podendo oscilar em torno da eq. (127),

Figura 29 - Ajuste da solução crítica da Figura 28 (linha contínua) com uma solução do tipo lump (círculos).



Fonte: O autor, 2019.

3.6 Colisões em $V_p(\phi)$ com $p = 5$ e $p = 7$

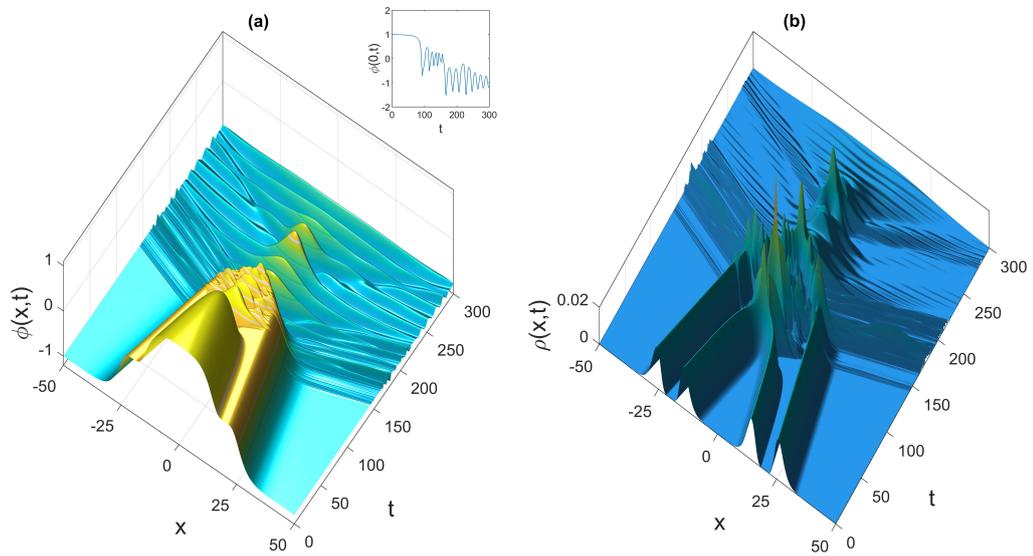
As colisões para $p = 5$ e $p = 7$ são significativamente análogas às colisões para $p = 3$, por conta disso, iremos brevemente pontuar alguns aspectos.

Levando em consideração o espaçamento entre as cristas com o aumento de p , usaremos a posição inicial $x_0 = 5p$, para garantir que os kinks se desloquem livremente a partir do dado inicial. Na Figura 30 e Figura 31 temos estado ligado e escape respectivamente, para $p = 5$. Na Figuras 32 e Figura 33 temos o estado ligado e escape respectivamente para $p = 7$.

Na Figura 34 para $p = 5$ e na Figura 35 para $p = 7$ temos um refinamento em 16 partes. Observamos um número de ocorrências maior de casos de escape abaixo da velocidade limite com $p = 5$ e essa característica é acentuada para $p = 7$, uma hipótese é que isso se deve ao fato dos modos de vibração ω_1 se aproximar cada vez mais do modo translacional ω_0 , como visto na Tabela 1. Desta forma, após a colisão das cristas internas onde é formado um oscillion, o mesmo rapidamente troca energia do modo vibracional do óscilon com a componente translacional das cristas externas, gerando diversos casos de escape para velocidade abaixo da velocidade limite u .

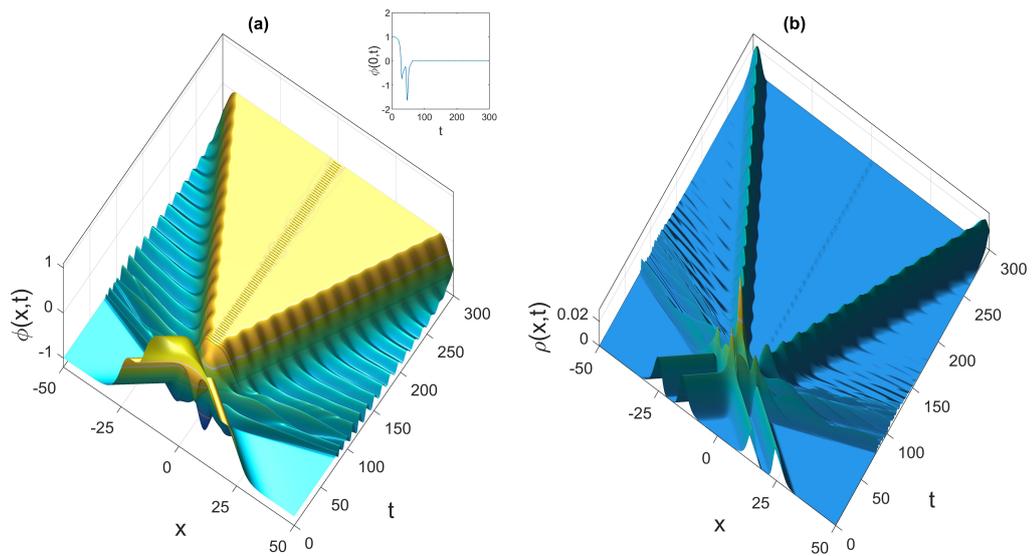
Também encontramos estruturas do tipo lump para $p = 7$ com velocidade de impacto $u = 0.473927$, como visto na Figura 36 e sendo ajustada a um lump estático na Figura 37.

Figura 30 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 5$ e $u = 0.08$.



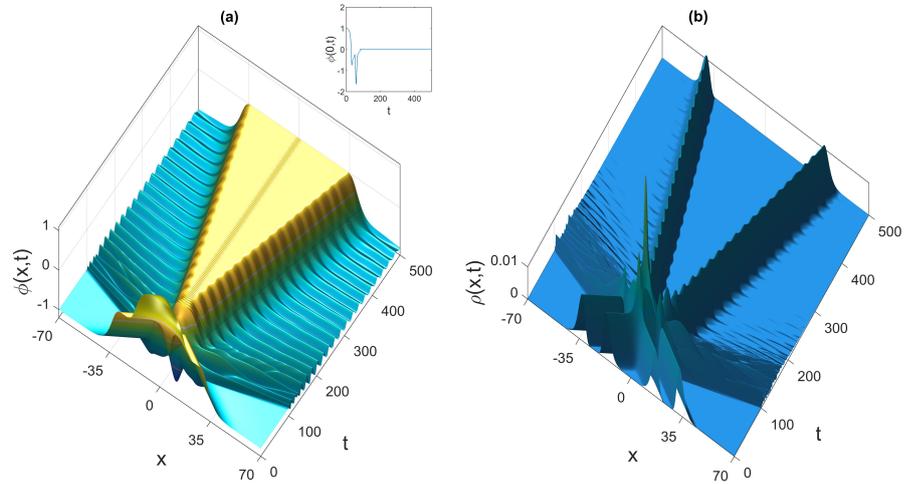
Fonte: O autor, 2019.

Figura 31 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 5$ e $u = 0.45$.



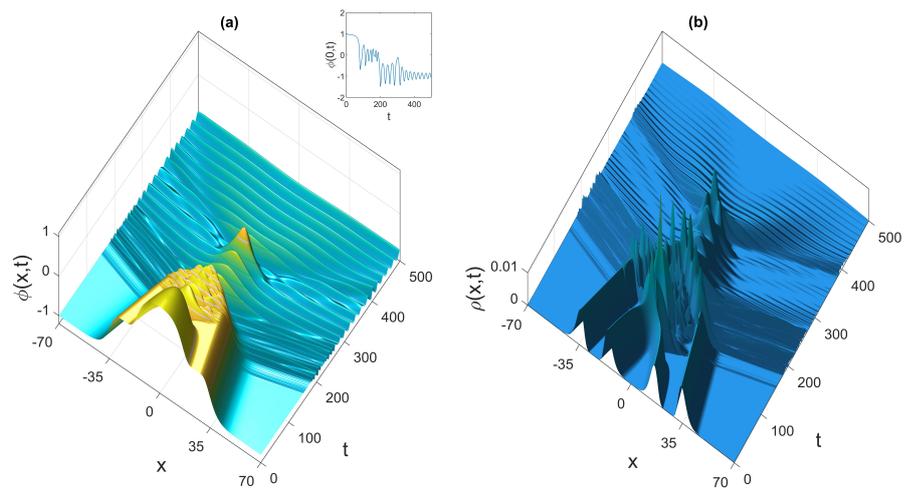
Fonte: O autor, 2019.

Figura 32 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 7$ e $u = 0.474$.



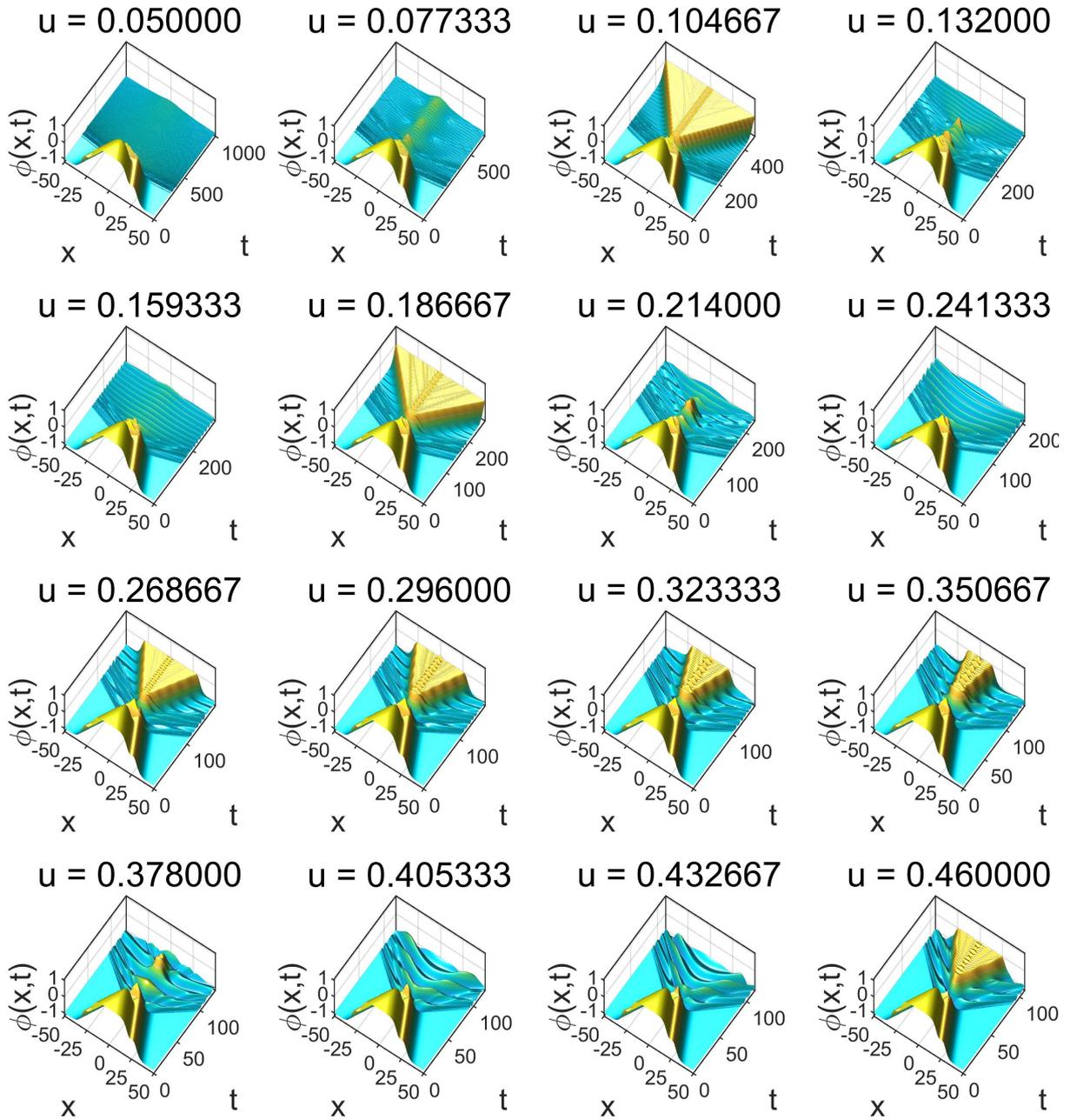
Fonte: O autor, 2019.

Figura 33 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 7$ e $u = 0.08$.



Fonte: O autor, 2019.

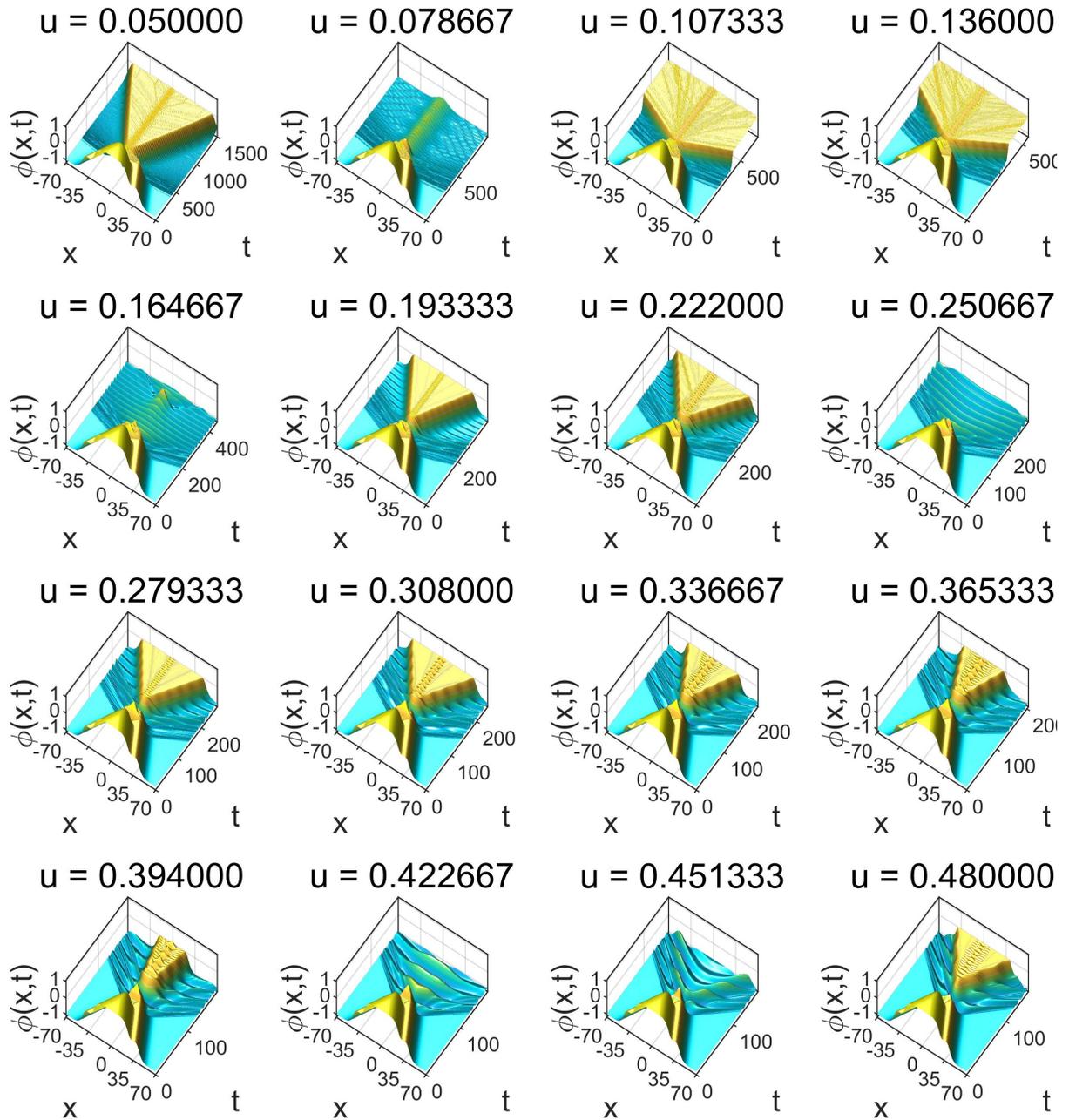
Figura 34 - Campo escalar $\phi(x, t)$ para $p = 5$ com 16 velocidades entre $u = [0.05, 0.46]$



Legenda: Seis ocorrências de escape abaixo da velocidade crítica $u_{c;p=5} \approx 0.45004$ com um simples refinamento de 16 partes.

Fonte: O autor, 2019.

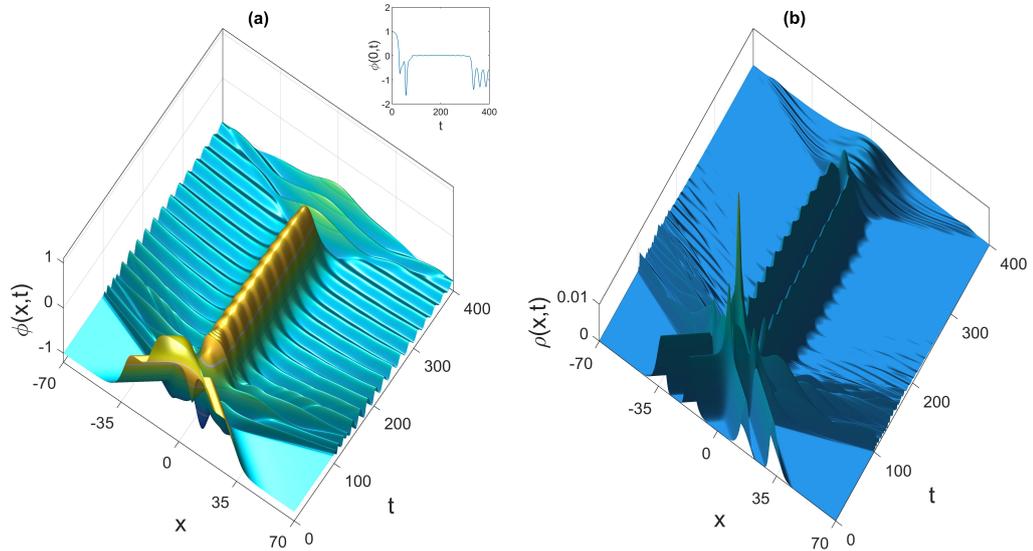
Figura 35 - Campo escalar $\phi(x, t)$ para $p = 7$ com 16 velocidades entre $u = [0.05, 0.48]$



Legenda: Dez ocorrências de escape abaixo da velocidade crítica $u_{c:p=7} \approx 0.47647$ com um simples refinamento de 16 partes.

Fonte: O autor, 2019.

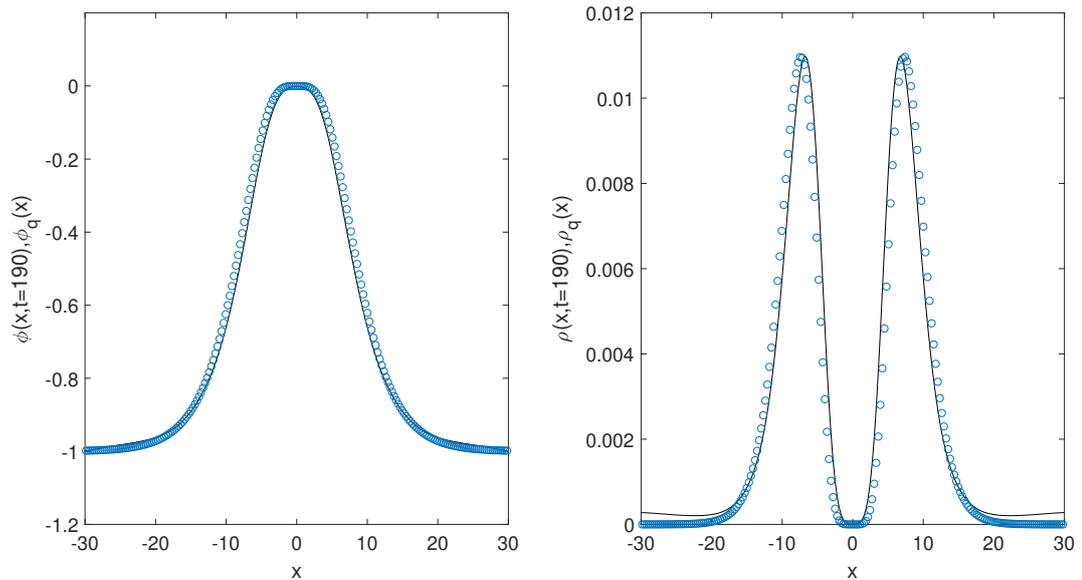
Figura 36 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_p(\phi)$ com $p = 7$ e $u = 0.473927$



Legenda: Solução do tipo lump sendo obtidas a partir da colisão de 2-kinks com $p = 7$

Fonte: O autor, 2019.

Figura 37 - Ajuste do lump criado na Figura 36 com $q = 4$ e $b = 0.1409$.



Fonte: O autor, 2019.

3.7 Formação de Lumps metaestáveis através de perturbações especiais

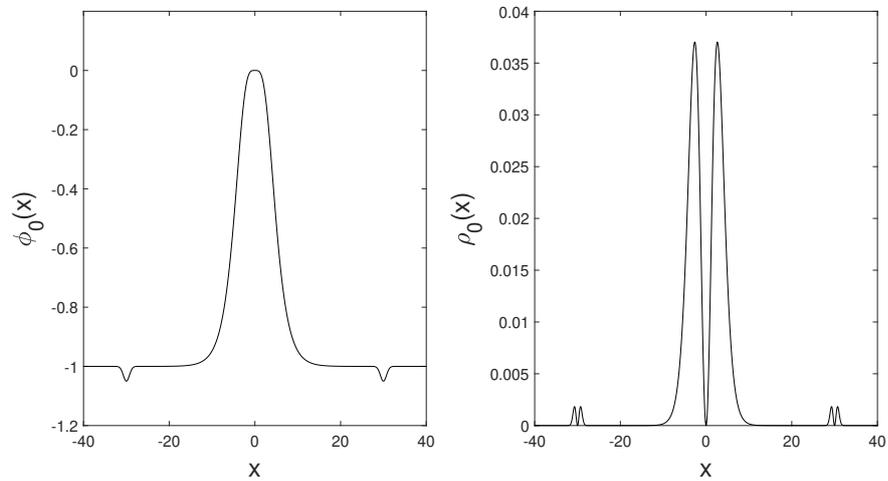
Motivados pela formação de estruturas do tipo lump na colisão de 2-kinks, resolvemos verificar se é possível obter outras estruturas a partir da perturbação do lump ou algum caso específico onde exista estabilidade. Uma das possibilidades foi adicionar uma perturbação simétrica na solução estática do lump,

$$\phi(0, t) = -\tanh^p\left(\frac{x}{p}\right) - B_0 \left[e^{-(x+x_p)^2} + e^{-(x-x_p)^2} \right], \quad (131)$$

sendo B_0 uma constante proporcional à intensidade da perturbação e x_p o módulo da posição da perturbação, como pode ser visto na Figura 38 para $B_0 = 0.05$ e $x_p = 30$ (MENDONÇA; OLIVEIRA, 2019). Em sequência, fixando o valor $x_p = 30$ para $p = 4$ evoluímos esse dado inicial para $B_0 = [0.1, 0.6]$ em 10 partes, vide Figura 39. Ao analisar os resultados observamos comportamentos além do esperado pela Figura 19, que acontece dentro dos resultados apresentados entre $B_0 = [0.1000, 0.4333]$. Já para valores maiores que $B_0 > 0.4333$ (resultado não refinado) temos a formação de kinks. E refinando entre $B_0 = [0.4333, 0.4889]$, encontramos a solução crítica da Figura 40, que a partir das equações eq.(126) e eq.(130) obtemos o ajuste dessa solução com o lump estático com $p = 4$ e $b_0 = 0.255986$.

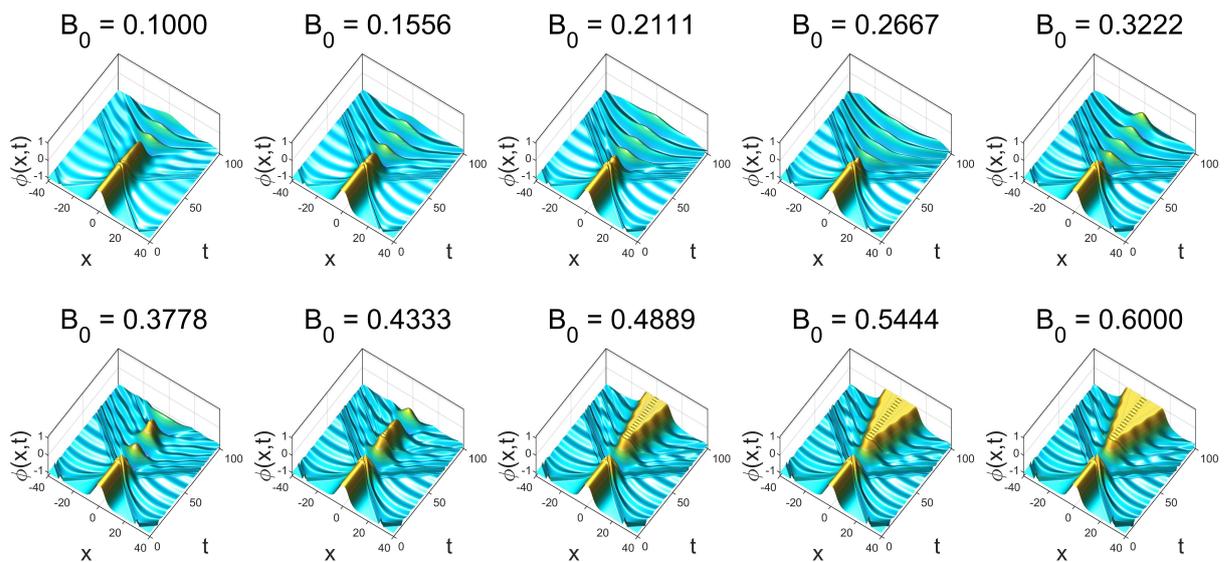
Ao obter esses resultados, concluímos que é possível ter soluções metaestáveis ao perturbar um defeito não-topológico como um lump, onde a estrutura formada vive mais de 200 instantes de tempo. Trata-se de um resultado intrigante pois objetos dessa natureza, a princípio, não manteriam sua forma durante tanto tempo.

Figura 38 - Perfil inicial do campo escalar $\phi(x, 0)$ e da densidade de energia $\rho(x, 0)$ do lump simetricamente perturbado.



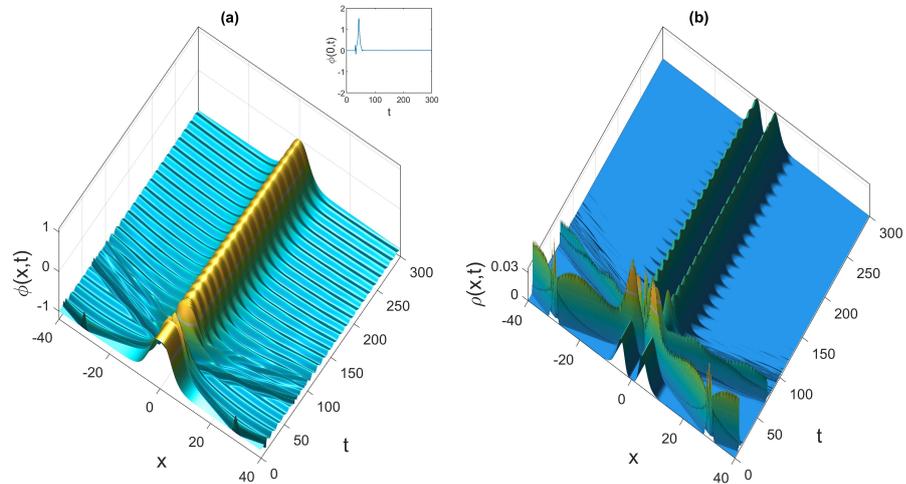
Fonte: O autor, 2019.

Figura 39 - Perturbação simétrica do lump $p = 4$ com $B_0 = [0.1, 0.6]$ em 10 partes.



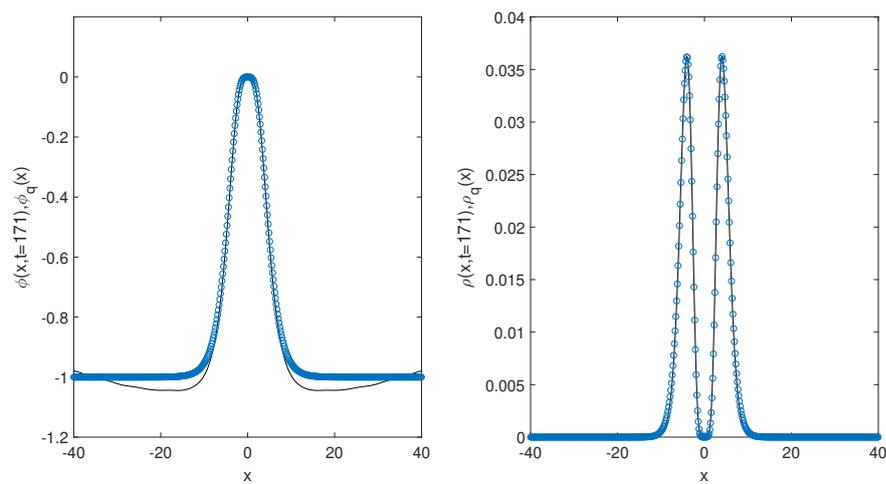
Fonte: O autor, 2019.

Figura 40 - Perturbação simétrica do Lump com $B_0 = 0.438796$, $x_p = 30$ e $b_0 = 1$.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 41 - Estado final do Lump perturbado ajustado com um lump $b_0 = 0.255986$ e $q = 4$.



Fonte: O autor, 2019.

4 COLISÕES DE KINKS DO TIPO COMPACTO

Em 1993 P. Rosenau e J.M. Hyman, publicaram um trabalho chamado: “Compactons: Sólitos with Finite Wavelength” (ROSENAU; HYMAN, 1993), que foi a primeira aparição na literatura sobre o assunto, sendo utilizado em modelos de dispersão não-linear (Korteweg–de Vries). As soluções do tipo compacton são defeitos topológicos similares aos kinks, diferindo pelo fato da sua densidade de energia decair assintoticamente a partir de uma dada região compacta, enquanto a densidade de energia de um kink convencional decai assintoticamente a partir do seu eixo de simetria. Em 2014 foi publicado um artigo chamado “From Kinks to Compactons” (BAZEIA et al., 2014), um potencial que fornece soluções estáticas de um kink cada vez mais compactadas, sendo dado por:

$$V_n(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^{2n})^2, \quad (132)$$

onde n é um número inteiro positivo que intensifica o caráter compacto do kink e para $n = 1$, resgatamos o potencial $\lambda\phi^4$, ver Figura 42.

Nas seções seguintes iremos encontrar as soluções estáticas, posteriormente os modos internos e realizar as colisões.

4.1 Soluções estáticas

As soluções estáticas do tipo kink para $V_n(\phi)$ são obtidas substituindo o potencial na eq.(96)

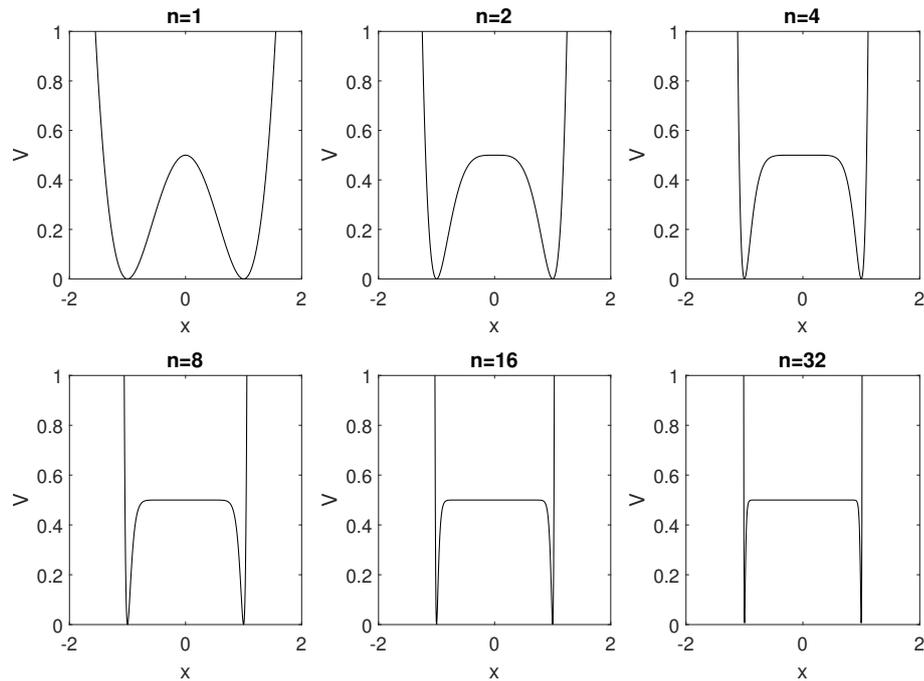
$$\pm \frac{x \pm x_0 \mp ut}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{d\phi_0}{\sqrt{2V}} = \int \frac{d\phi_0}{1 - \phi_0^{2n}}. \quad (133)$$

Para $n = 1$ podemos facilmente escrever $\phi_0 = \phi_0(x) = \tanh[(x \pm x_0 \mp ut)/\sqrt{1 - u^2}]$, porém para valores onde $n > 1$, não é simples escrever $\phi = \phi(x)$, tendo em vista que:

$$\int \frac{d\phi_0}{1 - \phi_0^{2 \times 2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}(\phi_0) + \frac{1}{2} \operatorname{arctan}(\phi_0) \quad (134)$$

$$\int \frac{d\phi_0}{1 - \phi_0^{2 \times 3}} = \frac{1}{12} \left[-\log(\phi_0^2 - \phi_0 + 1) + \log(\phi_0^2 + \phi_0 + 1) - 2\log(1 - \phi_0) + 2\log(\phi_0 + 1) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctan}\left(\frac{2\phi_0 - 1}{\sqrt{3}}\right) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctan}\left(\frac{2\phi_0 + 1}{\sqrt{3}}\right) \right] \quad (135)$$

Figura 42 - Gráfico do potencial $V_n(\phi) \times \phi$ para $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$



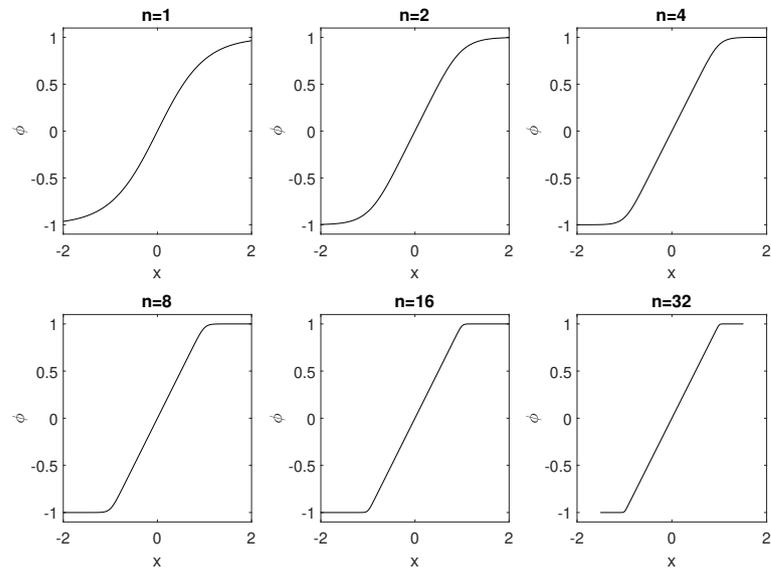
Fonte: O autor, 2019.

$$\int \frac{d\phi_0}{1 - \phi_0^{2 \times 4}} = \frac{1}{16} \left[-\sqrt{2} \log(\phi_0^2 - \sqrt{2}\phi_0 + 1) + \sqrt{2} \log(\phi_0^2 + \sqrt{2}\phi_0 + 1) - 2 \log(1 - \phi_0) \right. \\ \left. + 2 \log(\phi_0 + 1) + 4 \arctan(\phi_0) - 2\sqrt{2} \arctan(1 - \sqrt{2}\phi_0) + 2\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}\phi_0 + 1) \right]$$

(136)

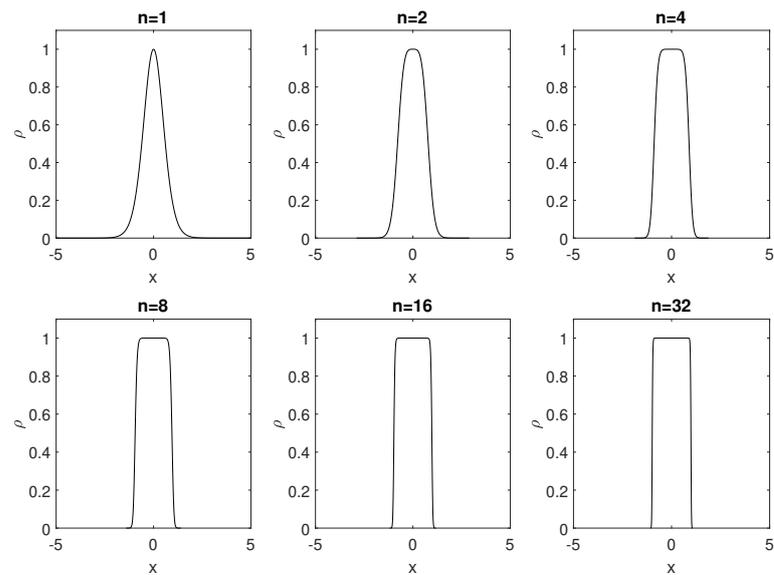
são expressões inviáveis de serem invertidas em termos de funções elementares. Como alternativa podemos inverter a eq.(133) numericamente nos pontos de nosso interesse, $\phi_i = \phi(x_i)$, com auxílio de métodos como Newton–Raphson ou similares. Esse procedimento será importante, pois conseguiremos estabelecer a condição inicial de um kink do tipo compacto, assim como o perfil do campo $\phi_{K\bar{K}}$ referente à colisão com uma precisão próxima dos limites da precisão dupla dado pela equação eq.(92). Nas Figuras 43 e 44 temos o perfil estático do campo $\phi(x, 0)$ e da densidade de energia $\rho(x, 0)$, onde observamos que com o aumento do parâmetro n as soluções tendem a ficar cada vez mais compactas.

Figura 43 - Solução da eq.(133): Perfil estático do campo $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$



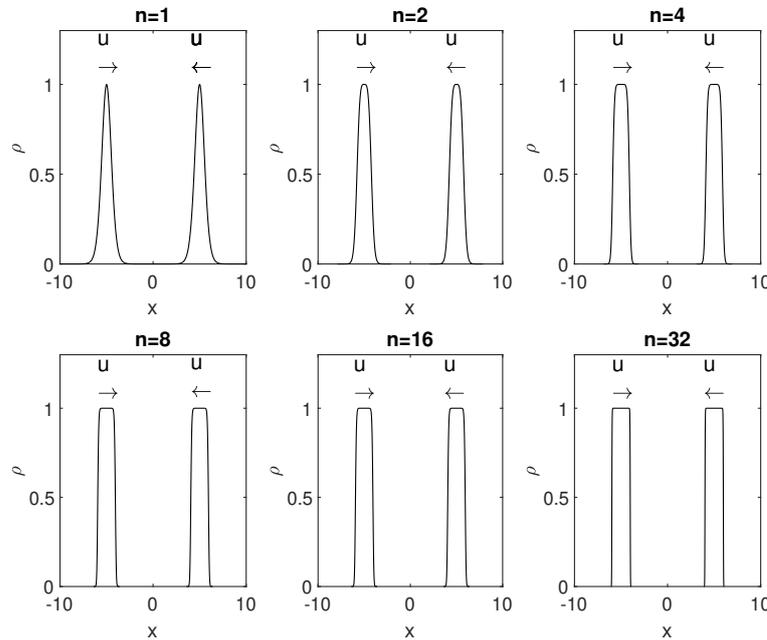
Fonte: O autor, 2019.

Figura 44 - Perfil estático da densidade de energia ρ_0 para $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$



Fonte: O autor, 2019.

Figura 45 - Dado inicial da densidade de energia da colisão de dois compactons ρ_0 para $n = 1, 2, 4, 8, 16$ e $n = 32$



Fonte: O autor, 2019.

4.2 Modos Internos e Modos Contínuos para kinks com potencial $V_n(\phi)$

Aproveitando a discussão realizada na Seção 2.4 e Seção 3.1, iremos calcular os modos contínuos e os modos discretos. Primeiramente iremos obter o valor do modo contínuo repetindo o procedimento apresentado na Subseção 2.4.2,

$$V_n(\pm 1) = \left[\frac{dV_n(\phi)}{d\phi} \right]_{\phi=\pm 1} = 0 \quad \& \quad \left[\frac{d^2V_n(\phi)}{d\phi^2} \right]_{\phi=\pm 1} = 4n^2 \quad (137)$$

que ao substituir na eq.(109) encontramos.

$$\omega_c = 2n. \quad (138)$$

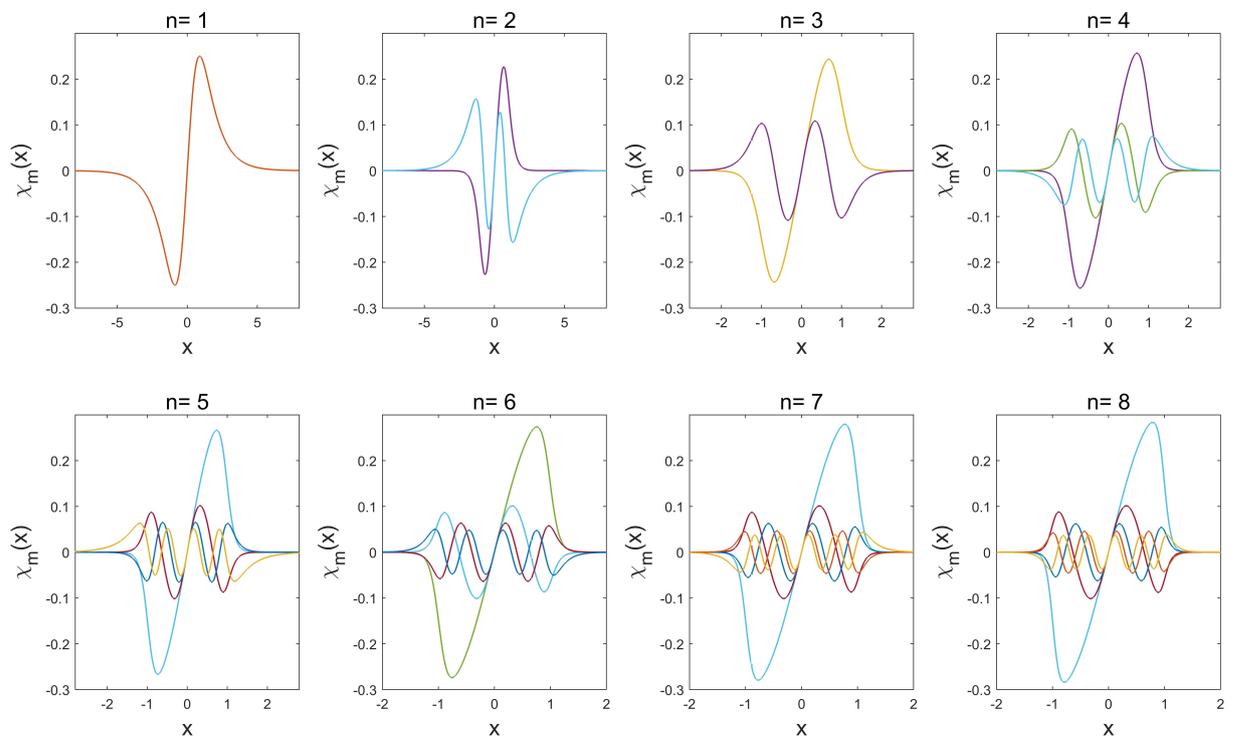
Esse resultado indica que, diferentemente do potencial $V_p(\phi)$, as frequências dos modos contínuos para $V_n(\phi)$ aumentam com o dobro do valor do parâmetro n , com isso será necessário excitar frequências cada vez mais altas para obter o efeito da radiação, implicando colisões cada vez mais elásticas com aumento de n e do espectro de ω para os modos de oscilação.

Os modos internos de vibração podem ser obtidos a através do procedimento da Subseção 2.4.1 para o intervalo $0 < \omega < 2n$, dispostos na Tabela 2 e as autofunções na Figura 46.

Tabela 2 - Modos Internos ω_n para $V_n(\phi)$

n	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
1	$\sqrt{3}$	—	—	—	—	—
2	1.84207	3.83661	—	—	—	—
3	1.78965	4.60365	—	—	—	—
4	1.74719	4.84648	7.16873	—	—	—
5	1.71704	4.92307	7.64378	9.69026	—	—
6	1.69519	4.94262	7.86619	10.3842	—	—
7	1.67881	4.94111	7.97690	10.7318	13.0878	—
8	1.66615	4.93177	8.03306	10.9271	13.5649	15.7128

Fonte: O autor, 2019.

Figura 46 - Autofunções χ para as autofrequências da Tabela 2 para $n = 1, 2, \dots, 7$ e $n = 8$ 

Fonte: O autor, 2019.

Com a existência de mais modos de vibração, esperamos padrões de oscilação cada vez mais complicados em relação ao nosso potencial de comparação $\lambda\phi^4$. Por conta das prováveis consequências disso, iremos organizar as próximas seções caso a caso, para explorar os aspectos correlatos ao parâmetro n .

4.3 Colisões de Kinks do Tipo Compacto (KTC)

Diferentemente das seções anteriores, que seguiam uma sequência ordenadamente investigativa sobre a colisão dos kinks, norteadas pela varredura das velocidades de impacto u , será mais inteligível, num primeiro momento, apresentar os casos mais característicos e primordiais sobre um dado aspecto da colisão de KTC e que permitam contribuir para o caso subsequente. O vetor de evolução temporal para $V_n(\phi)$, já incluindo o termo de dissipação, é dado substituindo eq.(132) na eq.(155), obtendo

$$\ddot{\vec{\alpha}}(\alpha) = \left[\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2 \vec{\tau}}{dx^2} - \vec{\varphi} \bullet n (4n\vec{\varphi}^{4n-2} - 2n\vec{\varphi}^{2n-2} - \vec{\varphi}^{4n-2} + \vec{\varphi}^{2n}) - \gamma \cdot (\vec{\eta}) \right] \bullet \vec{\tau}^{-1}. \quad (139)$$

Partindo disso, prosseguimos com nossas integrações numéricas.

4.3.1 Óscilon do tipo compacto (OTC)

O primeiro caso, certamente o mais importante, por conta de estar presente em todas as colisões de não-escape na colisão KTC, é o surgimento de uma estrutura pós-colisão, que chamaremos de *óscilon do tipo compacto* (OTC), onde seu nome se deve ao fato de o objeto estar cada vez mais tendendo a uma estrutura oscilante compacta com o aumento do parâmetro n , ou seja, se concentrando em uma dada região. O aparecimento dessa nova estrutura é reflexo da existência de mais de um modo de oscilação, implicando em uma maior complexidade com o aumento do parâmetro n . Com a velocidade $u \approx 0.080622$ com $n = 4$ na Figura 47 e $u \approx 0.134285$ com $n = 2$ na Figura 48 temos uma apreciável formação desse tipo de estrutura.

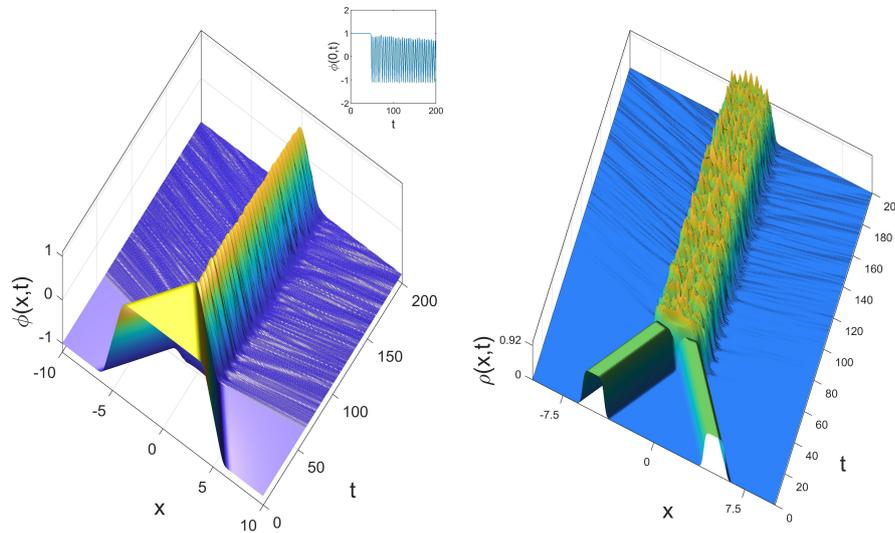
4.3.2 Fragmentação do OTC

A competição dos modos de vibração apresentados na Tabela 2 interfere diretamente na dinâmica dos OTC, geralmente não sendo caracterizado como o estado final (estado ligado) do sistema, com a exceção apenas de valores pontuais da velocidade de

impacto u que podem, através de refinamento, estender o quanto possível essa estrutura. Por conta disso, o OTC tenderá a decair em outras estruturas como veremos a seguir. Fora dos valores de u que estendem a duração do OTC, encontramos o fim dessa estrutura com um violento efeito que a fragmenta em defeitos mais simples com comportamento similar aos óscilons em $\lambda\phi^4$, com a formação de um óscilon central e/ou óscilons viajantes como podemos ver na Figura 49 para velocidade $u = 0.201673$ com $n = 2$. Os instantes onde acontecem a fragmentação do OTC, a densidade de energia se concentra em uma pequena região do espaço formando um grande pico em relação à altura dos defeitos no seu instante inicial, similar a uma função Delta de Dirac quando definida como $\delta_a(x) = 1/\sqrt{\pi a} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$, que instantes depois, a estrutura se fragmenta. Isso certamente está associado à presença de mais de um modo de oscilação, onde podemos ter fenômenos como a ressonância, que dependendo da forma que esses modos forem excitados, podem acarretar violentas consequências dinâmicas. A principal forma de distinguir um OTC e um óscilon central gerado pela colisão é que as oscilações na origem do óscilon assumem valores negativos $\text{sign}(\phi(0, t)) = -1$, diferente do OTC que assume tanto valores positivos como negativos, $\text{sign}(\phi(0, t)) = \pm 1$. Não é simples determinar a duração do OTC ou as prováveis estruturas formadas em função da velocidade de impacto u , pois a configuração após o OTC é extremamente sensível à variação de u , mas podemos afirmar que, com o aumento do parâmetro n , o OTC tende a se dividir cada vez mais. Para exemplificar isso, foram realizadas algumas integrações no intervalo $u = [0.05, 0.28]$ para os valores $n = 2, 4, 6$ e $n = 8$, apresentadas nas Figuras 50-53. Existe uma rica diversidade de configurações que o sistema poderá ter após a divisão do OTC. Por serem muito sensíveis à variação da velocidade de impacto u , não é viável apresentar uma graduação suave das transições de comportamento com uma variação Δu extremamente pequena, mas com os conjuntos de integrações feitas nas Figuras 50-53, podemos observar:

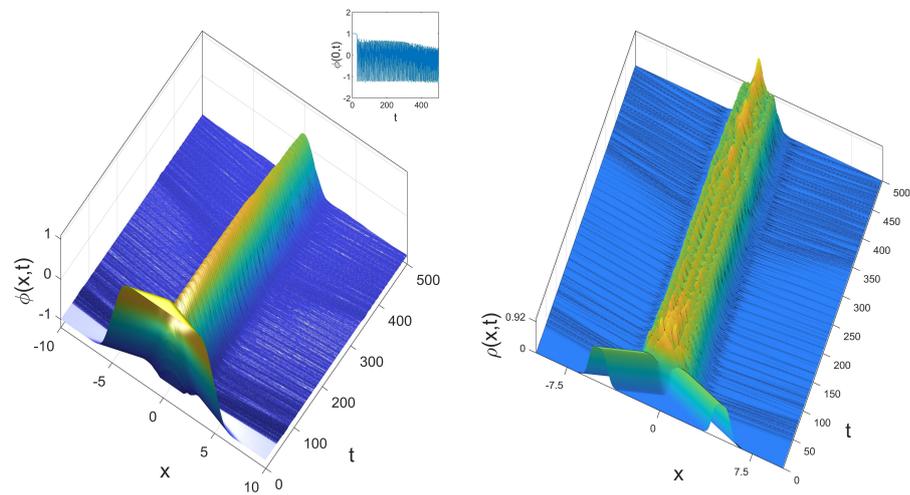
- Podem adquirir grandes velocidades, ex: $u = 0.177777$, $n = 2$; Figura 50
- Podem adquirir velocidades moderadas, ex: $u = 0.075556$, $n = 6$; Figura 52
- Interações com outros óscilons quando formados assincronamente, ex: $u = 0.254444$, $n = 8$; Figura 53
- Executar bounces de óscilons. Ex: $u = 0.050000$, $n = 8$, ex: Figura 53
- Óscilon central ausente. Ex: $u = 0.101111$, $n = 6$, ex: Figura 52
- Escape de kinks (Não formação de OTC), ex: $u = 0.28000$, $n = 2, 4, 6$ e $n = 8$

Figura 47 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_n(\phi)$ com $n = 4$ e $u = 0.080622$.



Fonte: O autor, 2019.

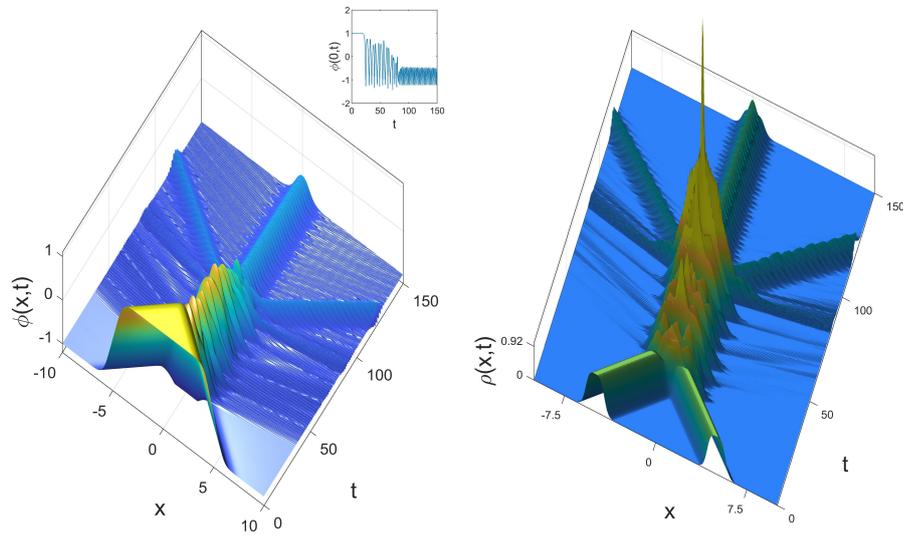
Figura 48 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $u = 0.134285$.



Legenda: OTC com duração de mais de 450 unidades de tempo.

Fonte: O autor, 2019.

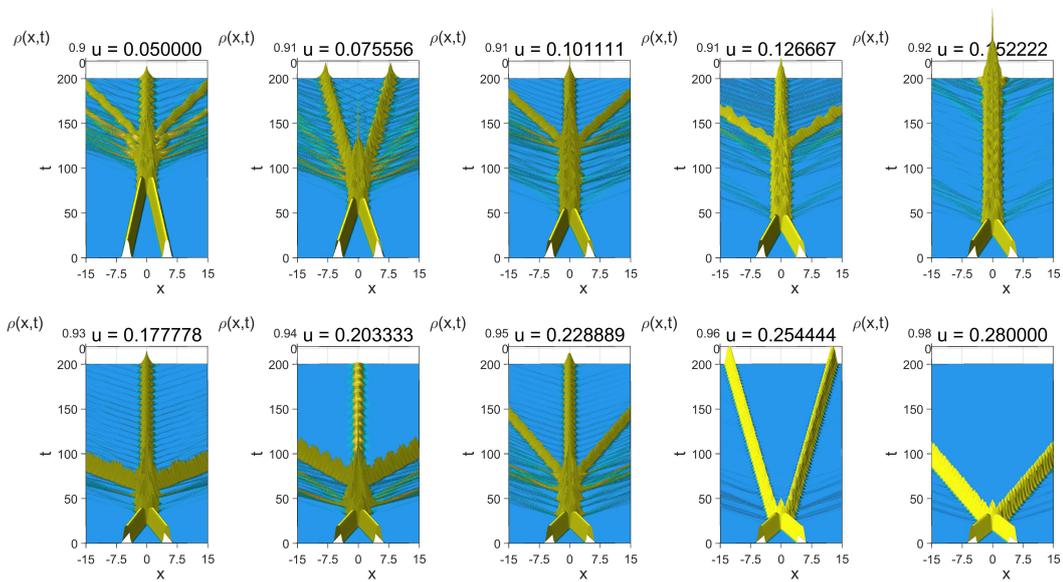
Figura 49 - Campo escalar $\phi(x, t)$ e densidade de energia $\rho(x, t)$ para colisão de kinks em $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $u = 0.16733$.



Legenda: A principal diferença entre as colisões em $\lambda\phi^4$ para o caso de estado ligado é que grande parte do campo é irradiada sobrando apenas um pequeno óscilon na origem.

Fonte: O autor, 2019.

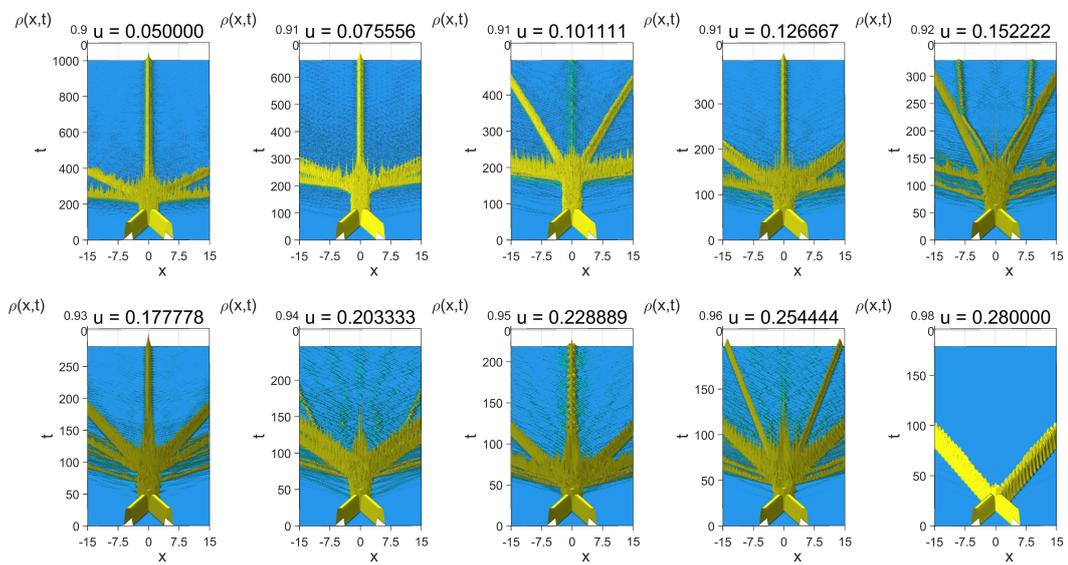
Figura 50 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 2$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$



Legenda: Formação de óscilons viajantes, óscilons centrais e kinks viajantes.

Fonte: O autor, 2019.

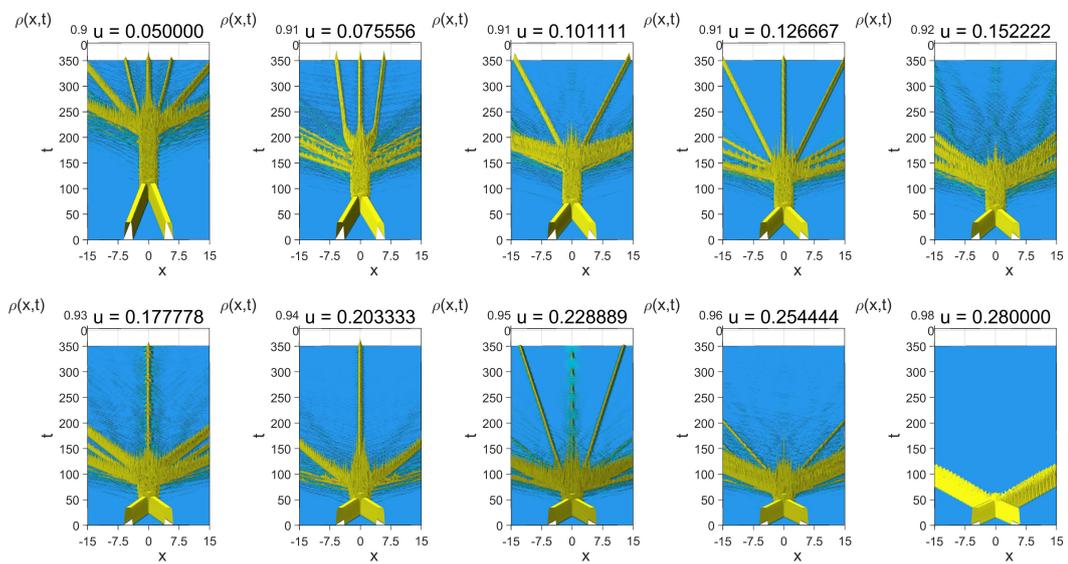
Figura 51 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 4$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$



Legenda: Formação de óscilons viajantes, óscilons centrais e kinks viajantes.

Fonte: O autor, 2019.

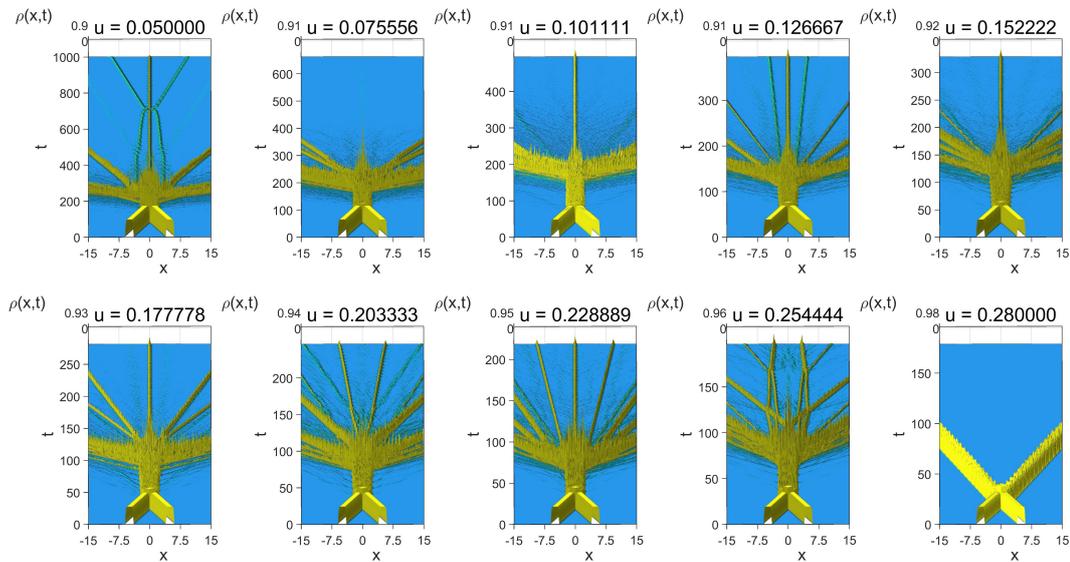
Figura 52 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 6$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$



Legenda: Formação de óscilons viajantes, óscilons centrais e kinks viajantes.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 53 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 8$ com 10 velocidades entre $u = [0.05, 0.28]$



Legenda: Formação de óscilons viajantes, óscilons centrais e kinks viajantes.

Fonte: O autor, 2019.

4.4 Escape de KTC, bounces e fractalidade

Os casos de escape para os KTC são majoritariamente similares do ponto de vista qualitativo aos escapes em $\lambda\phi^4$ com a diferença de a oscilação do kinks não ocorrer verticalmente em relação ao seu eixo de simetria, mas tender a um padrão de oscilação ao longo da “base” retangular que se forma com aumento do parâmetro n , como podemos ver na Figura 54. Na Tabela 3 apresentamos os valores da velocidade limite u_{lim} , onde acima da mesma, sempre teremos casos de escape.

Assim como em $\lambda\phi^4$, ocorre também o fenômeno de bounce, que é um indicativo de se obter um comportamento fractal sobre os valores da velocidade de impacto u , como podemos ver na Figura 55 para $n = 2$, Figura 56 para $n = 4$ e na Figura 57 para $n = 8$ e $n = 16$.

A ocorrência de bounces indica janelas fractais, partindo disso, através de centenas de integrações para cada valor do parâmetro n analisado, determinamos aproximadamente as janelas fractais de escape em função da velocidade de impacto u , como visto na Figura 58, existem pequenos intervalos de velocidade u onde ocorre escape abaixo da velocidade de escape (velocidade onde a partir da qual sempre teremos escape). Ao refinar cada vez mais esses intervalos encontramos novamente janelas com transições de comportamento e

Tabela 3 - Velocidade limite u_{lim} para $V_n(\phi)$

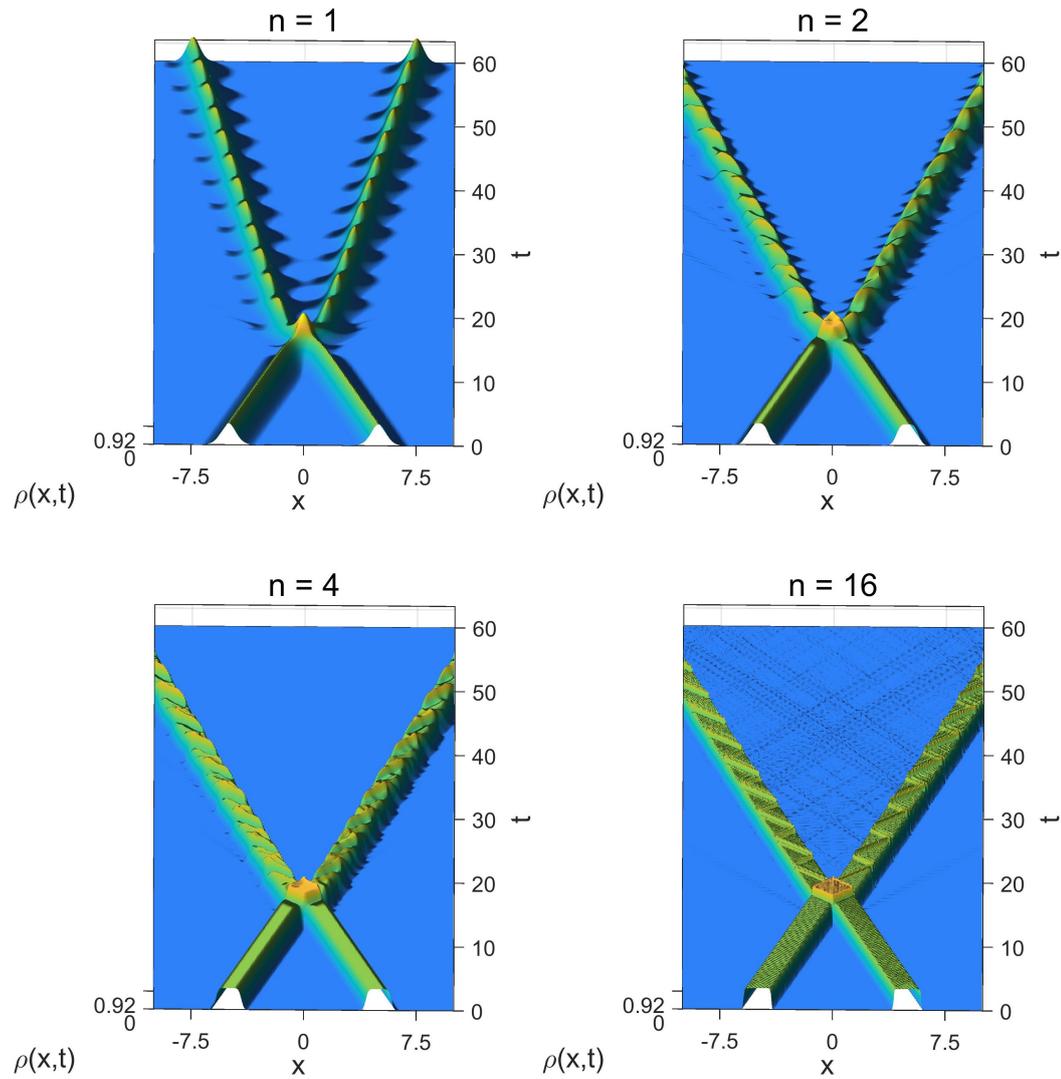
n	u_{lim}
1	0.2598
2	0.25104
3	0.26052
4	0.26357
5	0.26573
6	0.26733
7	0.26851
8	0.26941

Fonte: O autor, 2019.

todos esses casos de escape que ocorrem abaixo da velocidade crítica vem acompanhado de bounces.

Um resultado curioso ocorre próximo às velocidades limite u_{lim} , onde é formada uma estrutura com velocidade de translação nula, ou seja, algo que se assemelha a um “lump do tipo compacto” ou simplesmente um caso metaestável, como podemos ver na Figura 59.

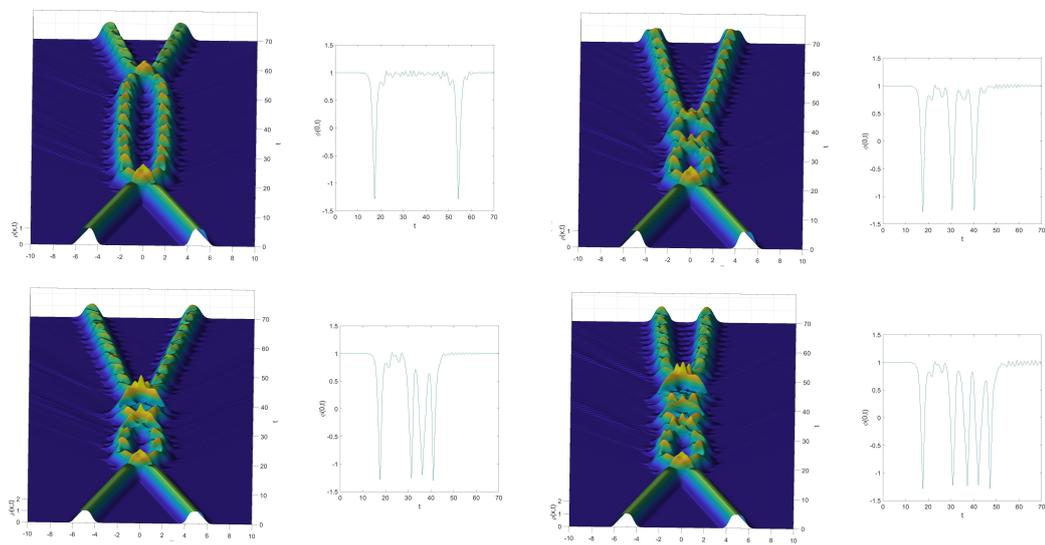
Figura 54 - Densidade de energia $\rho(x, t)$ para $n = 1, 2, 8$ e $n = 16$ para velocidade $u = 0.30$



Legenda: Formação de kinks viajantes.

Fonte: O autor, 2019.

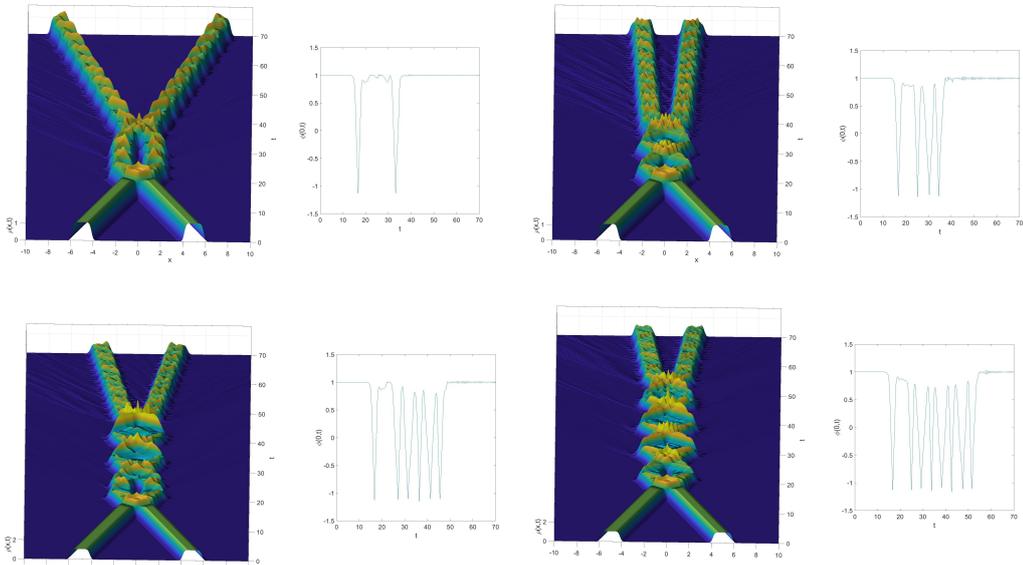
Figura 55 - 2,3,4 e 5 Bounces para $V_n(\phi)$ com $n = 2$



Legenda: 2 bounces ($u = 0.2505188$), 3 bounces ($u = 0.2459567$), 4 bounces ($u = 0.2468733$) e 5 bounces ($u = 0.2462793$) com $n = 2$.

Fonte: O autor, 2019.

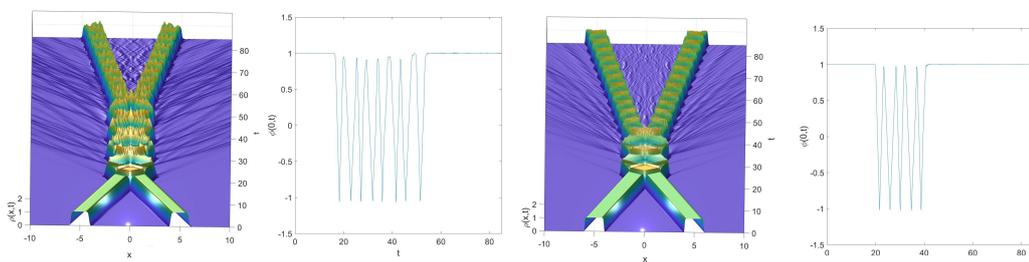
Figura 56 - 2,4,6 e 8 bounces para $V_n(\phi)$ com $n = 4$



Legenda: 2 bounces ($u = 0.2634594$), 4 bounces ($u = 0.2630744$), 6 bounces ($u = 0.2632100$) e 8 bounces ($u = 0.2630701$) com $n = 4$.

Fonte: O autor, 2019.

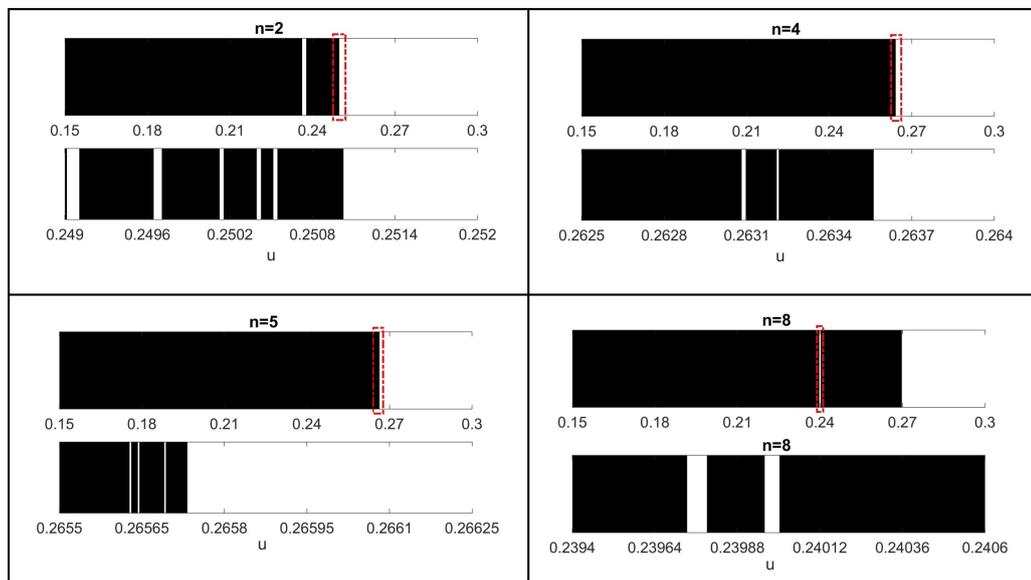
Figura 57 - 8 bounces para $V_n(\phi)$ com $n = 8$ e 6 bounces para $n = 16$



Legenda: 8 bounces ($u = 0.23999568$, $n = 8$) e 6 bounces ($u = 0.20000000$, $n = 16$).

Fonte: O autor, 2019.

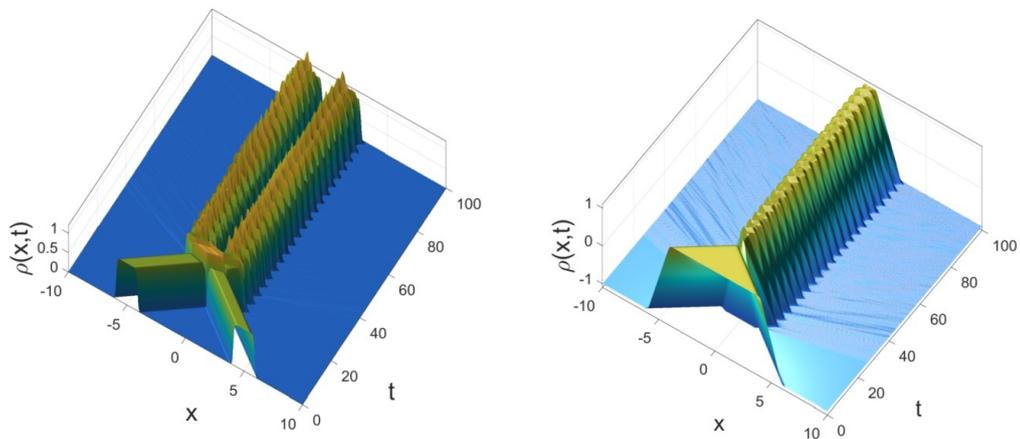
Figura 58 - Janelas de escape para $V_n(\phi)$ com $n = 2, 4, 5$ e $n = 8$



Legenda: Cor preta indicando o não-escape de kinks e cor branca indicando escape de kinks.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 59 - Estrutura metaestável para $V_n(\phi)$ com $n = 8$ e $u = 0.26940$



Legenda: Estrutura metaestável que apresenta velocidade de translação praticamente nula.

Fonte: O autor, 2019.

5 ÓSCILONS EM (3+1) DIMENSÕES.

Interessados em obter soluções estáticas topologicamente estáveis, tais como os kinks discutidos na seção anterior, porém em (3+1) dimensões, nos deparamos com o Teorema de Derick (BERESTYCKI; LIONS, 1983),

Teorema 1. *Soluções estacionárias localizadas para uma equação não linear ou para uma equação não linear de Klein Gordon em três ou mais dimensões espaciais são instáveis.*

Demonstração. Dada a equação de Klein Gordon em 3 dimensões:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \nabla^2 \theta = f'(\theta), \quad (140)$$

sendo $\theta = \theta(\vec{r})$ uma solução localizada independente do tempo, temos:

$$\nabla^2 \theta + f'(\theta) = 0, \quad (141)$$

definindo $\theta_\lambda = \theta(\lambda \vec{r})$, substituindo em $\nabla^2 \theta + f'(\theta) = 0$ e integrando,

$$\underbrace{\int (\nabla \theta_\lambda)^2 d^3 \vec{r}}_{I_1} + \underbrace{\int f(\theta_\lambda) d^3 \vec{r}}_{I_2} = E_\lambda. \quad (142)$$

A condição para que a solução $\theta(\vec{r})$ seja estável é que $\delta^2 E > 0$, então,

$$E_\lambda = \int (\nabla \theta_\lambda)^2 d^3 \vec{r} + \int f(\theta_\lambda) d^3 \vec{r} = \frac{I_1}{\lambda} + \frac{I_2}{\lambda^3}. \quad (143)$$

Derivando em relação a λ e substituindo $\lambda = 1$, obtemos

$$\left[\frac{dE_\lambda}{d\lambda} \right]_{\lambda=1} = -I_1 - 3I_2 = 0 \text{ sendo } I_1 > 0. \quad (144)$$

Derivando novamente em relação a λ e substituindo $\lambda = 1$,

$$\left[\frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2} \right]_{\lambda=1} = 2I_1 + 12I_2 = -2I_1 < 0. \quad (145)$$

Com isso $\delta^2 E < 0$, provando que qualquer solução localizada com três dimensões espaciais é instável \square

Apesar disso, podemos estudar objetos “pseudoestáveis”, como o modelo que descreve bolhas (representado por óscilons) apresentado em Copeland, Gleiser e Müller (1995), onde essas bolhas (óscilons) podem viver por um longo intervalo de tempo. Iremos investigar a dinâmica desses óscilons para os potenciais $V_p(\phi)$ e $V_n(\phi)$, mas antes

disso iremos verificar a validade do nosso procedimento, comparando com os resultados já conhecidos para o potencial de teste $V_L(\phi)$ e $\lambda\phi^4$. Para óscilons em (3+1) dimensões, temos a equação de Klein Gordon em coordenadas esféricas com simetria esférica,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (146)$$

onde sabemos que $r \geq 0$. Desta forma, utilizaremos o seguinte dado inicial, com as seguintes condições de contorno

$$\phi(r, 0) = -2e^{-\frac{r^2}{R_0^2}} - 1 \quad (147)$$

$$\phi(r \rightarrow \infty, t) = -1 \quad (148)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} \phi(r, t) \right]_{r=0} = 0 \quad (149)$$

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \phi(r, t) \right]_{t=0} = 0. \quad (150)$$

Iremos investigar a formação dos óscilons primeiramente confirmando os resultados conhecidos na literatura para $\lambda\phi^4$ e em seguida para os potenciais $V_n(\phi)$ e $V_p(\phi)$.

5.1 Procedimento numérico e sua validação

A eq. (146) junto a suas condições de contorno eqs.(148-150) apresentam novidades em relação à equação de movimento com uma dimensão espacial, eq.(67):

- O domínio da variável espacial de integração passará a ser não negativo, $0 \neq r < \infty$, onde iremos utilizar uma modificação do mapeamento eq.(26), que foi recorrentemente aplicado nos capítulos anteriores, que será o mapeamento $r(\eta) = L_0 \operatorname{arctanh}(\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2})$, como foi apresentado na Seção 1.2.
- Para satisfazer as condições eq.(149-150) escolhemos uma função de base $\Psi_k(r(\eta))$ sendo uma combinação dos polinômios de Chebyshev $T_k(r(\eta))$, dada por:

$$\Psi_k(\eta) = \frac{1}{2} \left[\frac{2k+1}{(k+2)^2} T_{k+2}(\eta) + T_{k+1}(\eta) + T_k(\eta) \right], \quad (151)$$

e quando calculados nos pontos de colocação η_i ,

$$\vec{\kappa} \equiv \left[\frac{2 \times 0 + 1}{(0+2)^2} \quad \dots \quad \frac{2 \times N + 1}{(N+2)^2} \right] \quad (152)$$

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{2} \left[\vec{\kappa} * \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_0 \right] \quad (153)$$

O cálculo das matrizes $\frac{\vec{\partial}\Psi}{\partial r}$ e $\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}$ segue o procedimento apresentado na Seção 1.3.

- O termo de dissipação deixará de estar distribuído simetricamente, passando a ser distribuído unilateralmente,

$$\gamma_{abs}(x) = \frac{1}{2}K_{abs}^2(|r| - r_{abs})^2 [\tanh(r - r_{abs}) + 1]. \quad (154)$$

- O vetor de evolução temporal será dado por:

$$\ddot{\vec{\alpha}} = \left[\vec{\alpha} \bullet \frac{d^2\vec{\tau}}{dr^2} + 2\vec{\alpha} \bullet [r \cdot (\vec{\eta})]^{-1} \frac{d\vec{\tau}}{dr} - \frac{\partial V \cdot (\vec{\varphi})}{\partial \phi} - \dot{\vec{\alpha}} \bullet \vec{\tau} \bullet \gamma \cdot (\vec{\eta}) \right] \bullet \vec{\tau}^{-1},, \quad (155)$$

onde vale ressaltar que,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right]_{r=0}. \quad (156)$$

Dispondo disso, poderemos iniciar nossa investigação sobre os óscilons.

5.1.1 Validação do código $V_L(\phi)$

No artigo Copeland, Gleiser e Müller (1995) foi realizada a verificação do método através do potencial de teste,

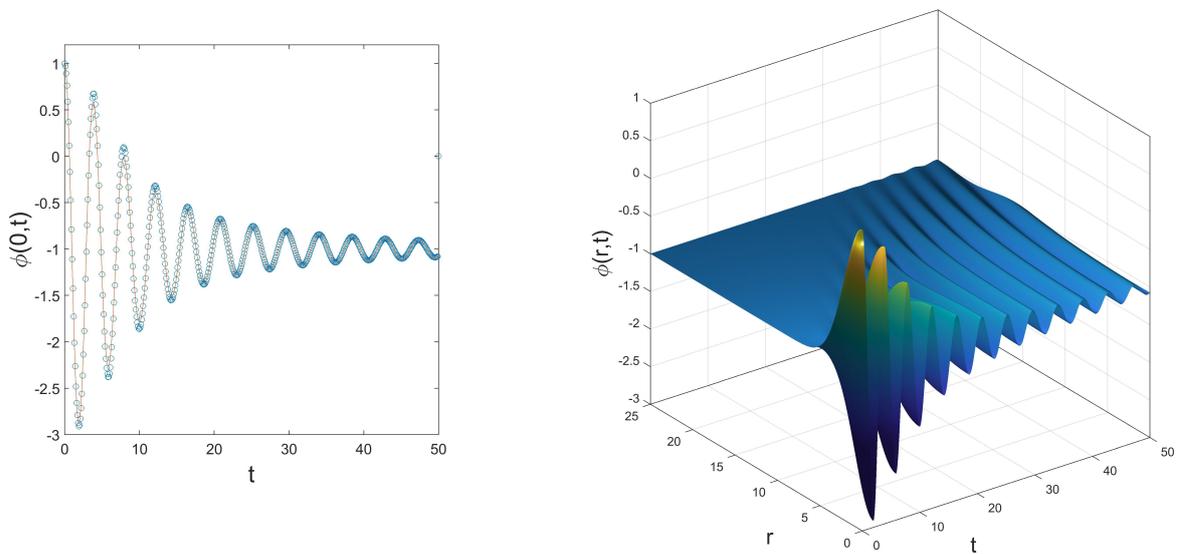
$$V_L(\phi) = (\phi + 1)^2, \quad (157)$$

que possui a solução (aproximação para $R_0 > 1$) para $\phi(0, t)$ dada por:

$$\phi(0, t) = -1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{2t^2}{R_0^4}\right)^{3/4}} \cos \left[\sqrt{2}t + \frac{3}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}t}{R_0^2} \right) \right] \quad (158)$$

Refazemos o mesmo teste para o nosso código como pode ser visto na Figura 60, a que mostra o resultado, confirmando qualitativamente o resultado de referência. A solução eq.(158) é derivada de uma aproximação onde $R_0 > 2$, impossibilitando testes mais severos de convergência, tendo em vista que o procedimento numérico não é restrito à mesma condição onde teríamos outros parâmetros de validação quantitativa, como o decaimento do erro sobre a conservação de energia com o aumento da ordem de truncagem N . E a Figura 60b é equivalente à figura obtida no artigo Copeland, Gleiser e Müller (1995).

Figura 60 - Óscilons para o potencial teste, $V_L(\phi)$. Comparação da solução eq.(158) com a solução numérica. Campo $\phi(r, t)$



Fonte: O autor, 2019.

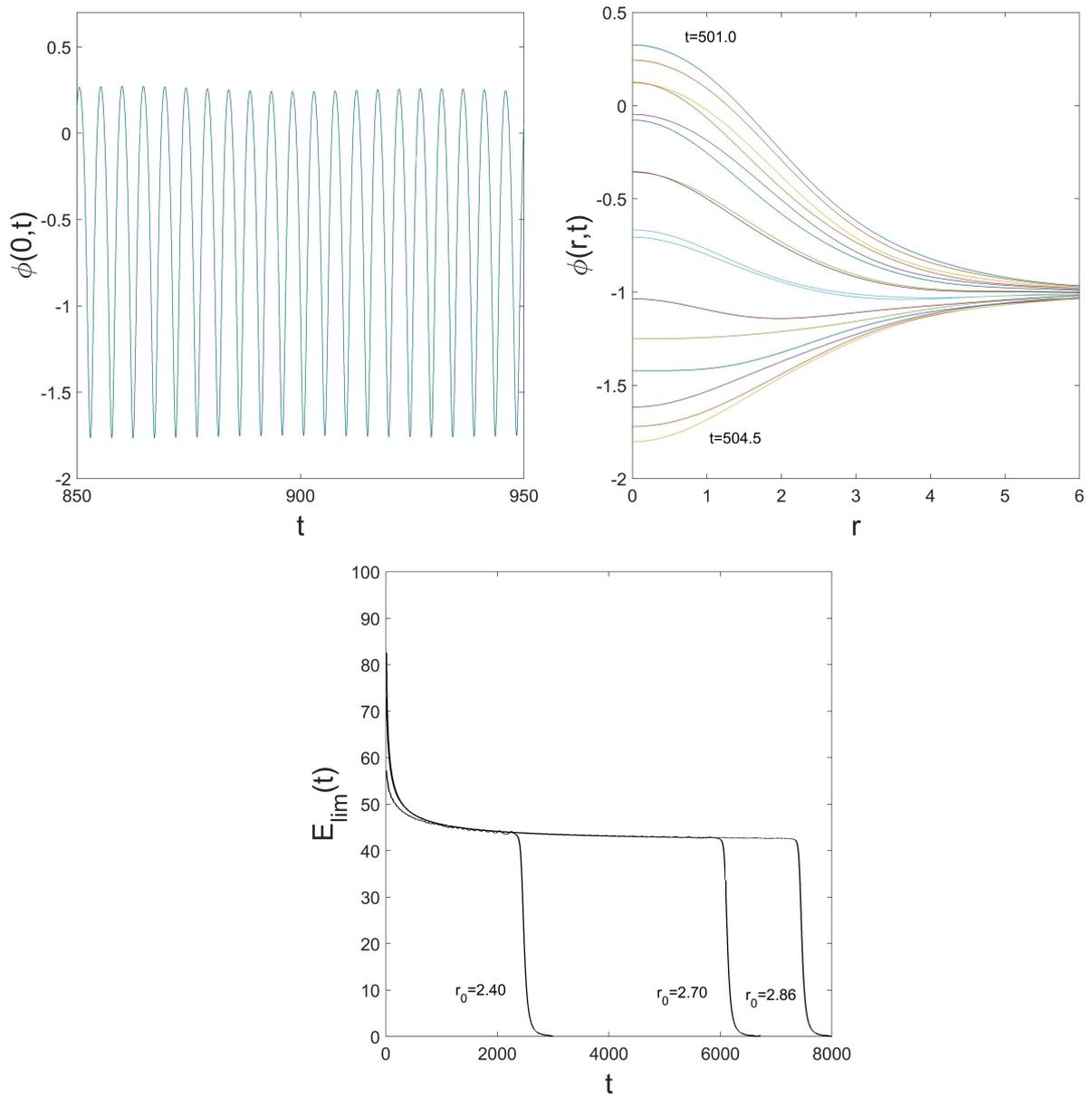
5.2 Óscilons em (3+1) dimensões em $\lambda\phi^4$

Investigando brevemente os óscilons formados em $\lambda\phi^4$ com propósito comparativo com os resultados do artigo Copeland, Gleiser e Müller (1995) e de melhor introduzir a discussão para os potenciais $V_p(\phi)$ e $V_n(\phi)$ realizamos a integração com $r_0 = 2.7$, vide Figura 61. Nesses resultados encontramos o perfil do campo na origem $\phi(0, t)$, o valor do campo nos instantes de tempo indicado $\phi(r, t)$ e para $r_0 = 2.40, 2.70$ e $r_0 = 2.86$ e o decaimento da energia limitada a posição $x = 10$, $E_{lim_{x < 10}}$, que é bastante representativo, tendo em vista que informa objetivamente o tempo de vida do óscilon para r_0 diferentes. Na Figura 62, realizamos algumas integrações entre $r_0 = [0.0, 6.0]$ onde obtemos a formação de óscilons com uma apreciável duração, aproximadamente no intervalo $2.4 \lesssim r_0 \lesssim 4.5$ como esperado pela literatura.

5.3 Óscilons em (3+1) dimensões em $V_p(\phi)$ e $V_n(\phi)$

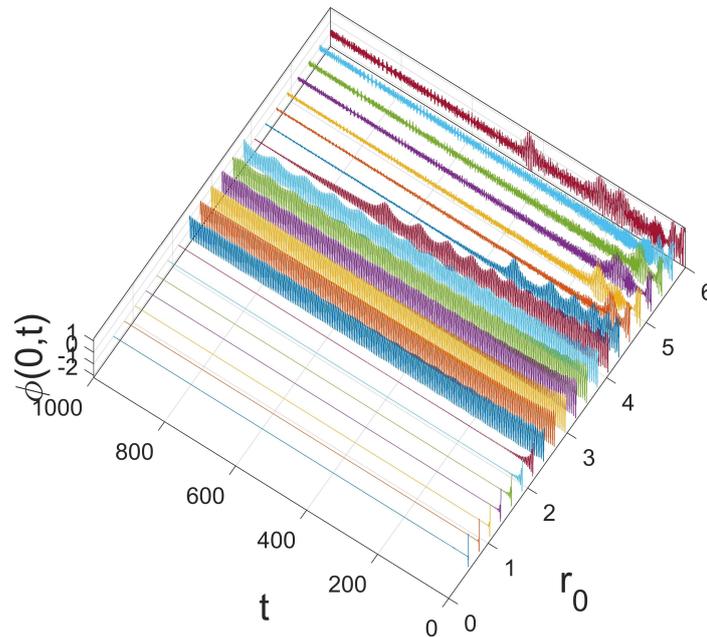
Iniciamos nossa investigação para o potencial $V_p(\phi)$, onde realizamos integrações para $r_0 = [0.0, 12.0]$ com $p = 3$, apresentadas na Figura 63. Apesar de ter escolhido apenas uma amostra sobre esses resultados, ela é bem representativa do que acontece para esse potencial. Os óscilons surgem com valores cada vez maiores de r_0 , com o

Figura 61 - Óscilon para o potencial $\lambda\phi^4$. Comparação da solução exata eq.(158) com a solução numérica. Campo $\phi(r, t)$



Fonte: O autor, 2019.

Figura 62 - Campo $\phi(0, t)$ para óscilon para o potencial $\lambda\phi^4$.

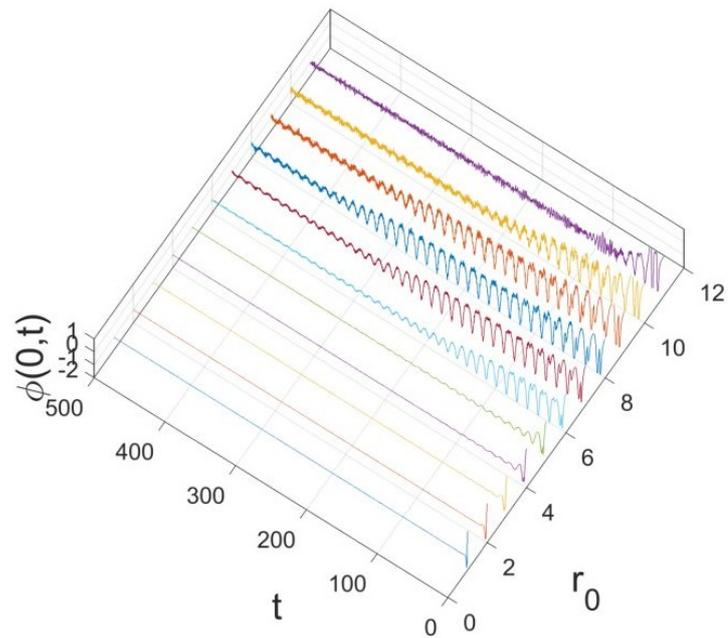


Fonte: O autor, 2019.

aumento do parâmetro p , em relação a $\lambda\phi^4$ e sempre com pouca tendência a grandes fases de “pseudoestabilidade”, predominantemente realizando oscilações do tipo amortecida. Talvez seja pois do modo discreto decai com aumento de p .

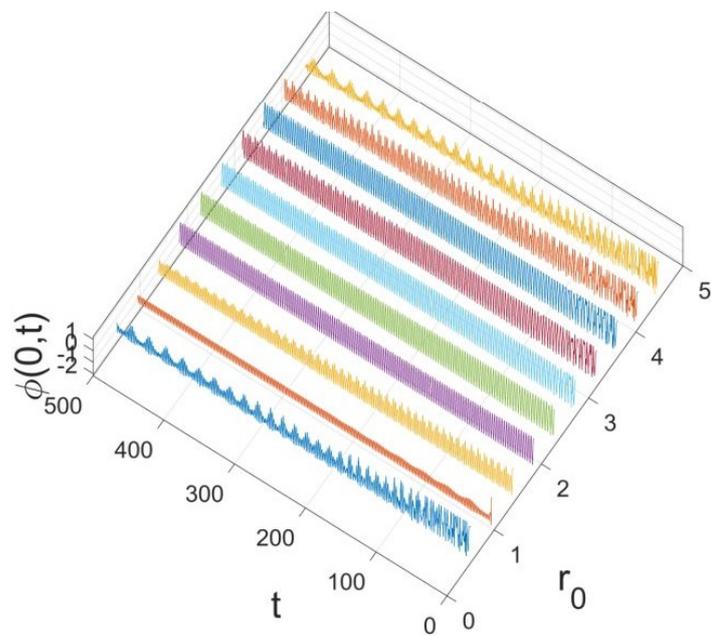
Prosseguindo para o potencial $V_n(\phi)$, foram realizadas integrações para $n = 2$ para os valores $r_0 = [0.0, 4.8]$ apresentados na Figura 64. Em oposição ao que é visto para $V_p(\phi)$, em $V_n(\phi)$ observamos uma grande facilidade na formação de estruturas com longa duração. O comportamento é bastante similar a $\lambda\phi^4$, porém na etapa final temos que o óscilon não é irradiado por completo, mas sim decaindo em um pequeno óscilon estável que vive por intervalos de tempo aparentemente indeterminados, como podemos ver na Figura 65, onde o óscilon final vive por mais de 25 mil instantes de tempo. Essa facilidade de obter estruturas com maior duração para $V_n(\phi)$ certamente se deve ao primeiro modo contínuo aumentar com o valor de n e à existência de mais modos de vibração.

Figura 63 - Campo $\phi(0, t)$ para óscilon para o potencial $V_p(\phi)$ com $p = 3$.



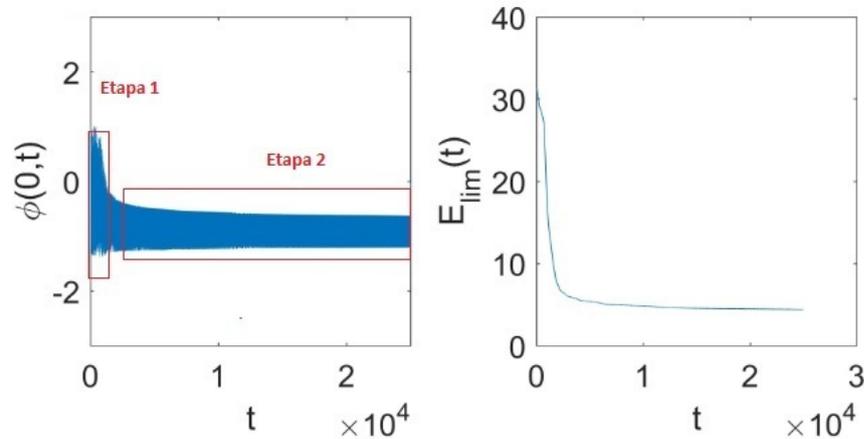
Fonte: O autor, 2019.

Figura 64 - Campo $\phi(0, t)$ para óscilon para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 65 - “Óscilon perpétuo” para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$ com $r_0 \approx 1.56688$.

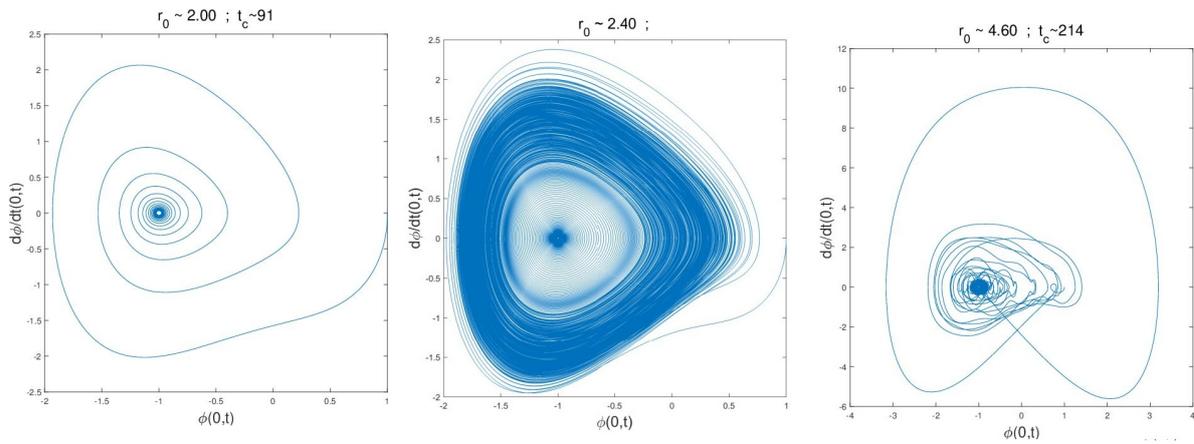


Fonte: O autor, 2019.

5.4 Espaço de fase e colapso dos óscilons

Uma forma fácil e rápida de interpretar a dinâmica dos óscilons é através da análise do seu espaço de fase. Ao fim da vida de um óscilon, seu campo na origem tende ao vácuo inferior do potencial $\phi(0,t) \rightarrow -1$ e sua derivada $\dot{\phi}(0,t) \rightarrow 0$. Podemos ver na, Figura 66, três espaços de fase com valores de r_0 dentro e fora do intervalo $2.4 \lesssim r_0 \lesssim 4.5$ para $\lambda\phi^4$. Para $r_0 = 2.00$ o sistema rapidamente tende a $(\phi(0,t), \dot{\phi}(0,t)) \rightarrow (-1, 0)$; para $r_0 = 2.40$ o sistema demora cerca de 3 mil unidades de tempo para atingir $(\phi(0,t), \dot{\phi}(0,t)) \rightarrow (-1, 0)$ formando uma trajetória com “formato oval”; e para $r_0 = 4.6$ o sistema rapidamente tende ao ponto $(\phi(0,t), \dot{\phi}/dt(0,t)) \rightarrow (-1, 0)$. A análise para $r_0 = 2.4$, presente no trabalho de Hindmarsh e Salmi (2006), com o intervalo de pontos $\Delta t = 50$ é apresentada na Figura 67. Todos os óscilons formados em $\lambda\phi^4$ são caracterizados pela trajetória oval no espaço de fase. Ao analisar o espaço de fase para o potencial $V_p(\phi)$ não encontramos tal comportamento. Já para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$ encontramos a trajetória oval, mas também encontramos trajetórias “fechadas” com outros formatos, como podemos ver na Figura 68 com $r_0 = 1.6$. Como pode ser visto, o intervalo aproximado onde encontramos óscilons similares aos obtidos em $\lambda\phi^4$ é de $0.97 \lesssim r_0 \lesssim 1.46$. Um ponto interessante é que os óscilons com trajetórias ovais no espaço de fase para $n > 1$, possuem tempo de vida indeterminadamente grande, como podemos ver na Figura 69 um “óscilon eterno” que vive por mais de 20 mil instantes de tempo. Para valores acima de $r_0 = 1.46$ temos a formação de outros tipos de óscilons que fogem da trajetória oval no espaço de fase, devido à complexidade dessa nova estrutura formada, deixaremos sua descrição para nosso próximo trabalho. Prosseguindo

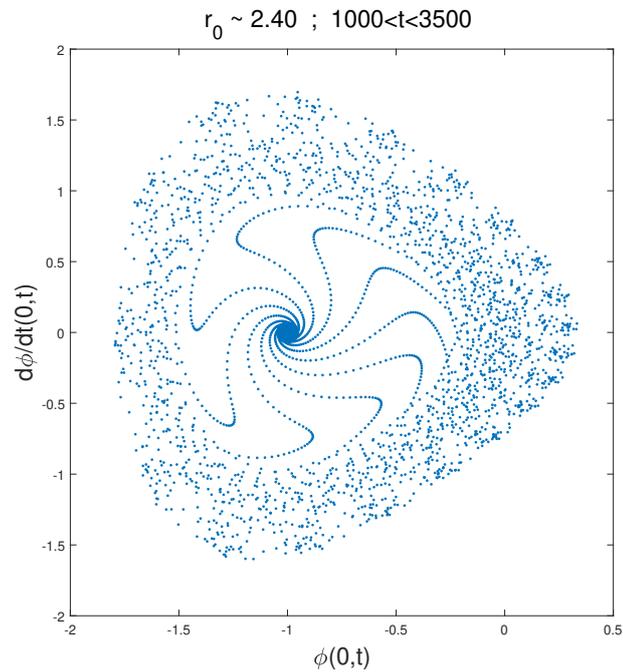
Figura 66 - Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $\lambda\phi^4$.



Fonte: O autor, 2019.

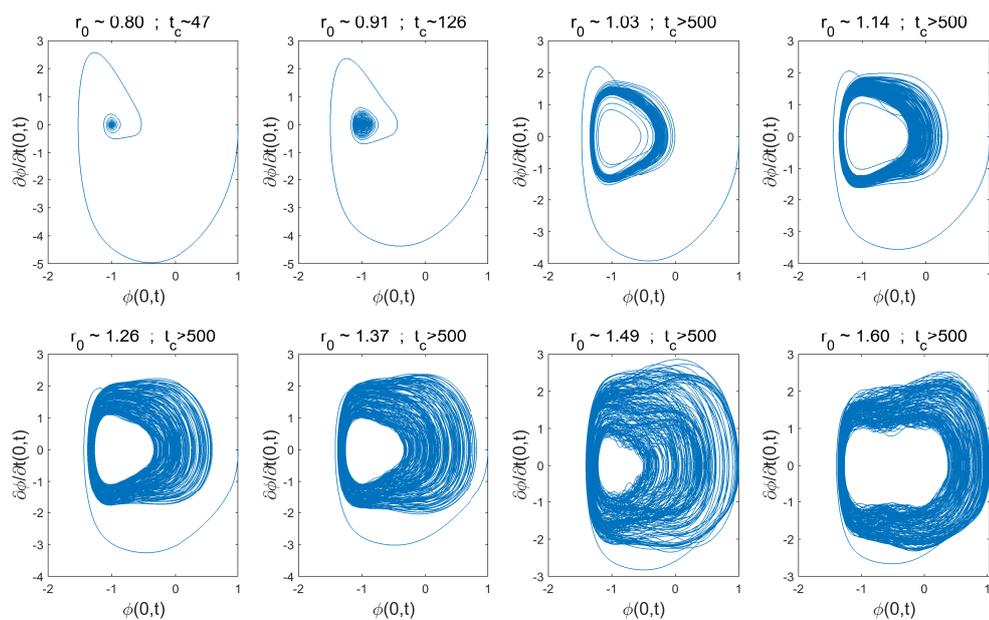
para $n = 3$, encontramos um comportamento parecido com $n = 2$, porém o intervalo de formação de óscilons com espaço de fase oval é reduzido. Veremos na Figura 70 que o intervalo aproximado para formação desses óscilons é de $0.59 \lesssim r_0 \lesssim 0.66$ e que o raio dos óscilons formados será cada vez menor com o aumento de n .

Figura 67 - Espaço de fase $\phi(0,t) \times \partial\phi/\partial t(0,t)$ para o potencial $\lambda\phi^4$ com $r_0 = 2.4$.



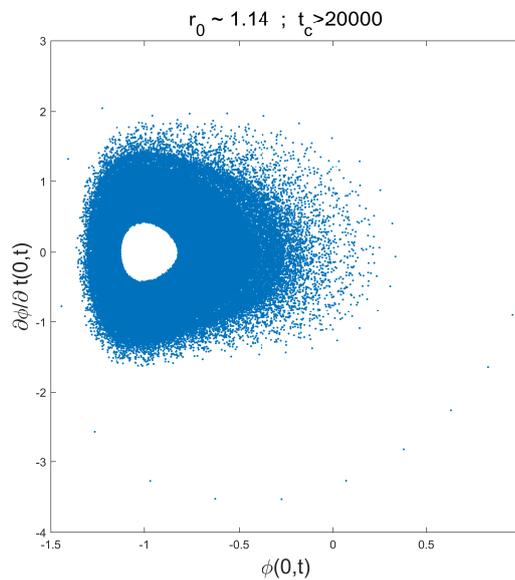
Fonte: O autor, 2019.

Figura 68 - Espaço de fase $\phi(0,t) \times \partial\phi/\partial t(0,t)$ para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$.



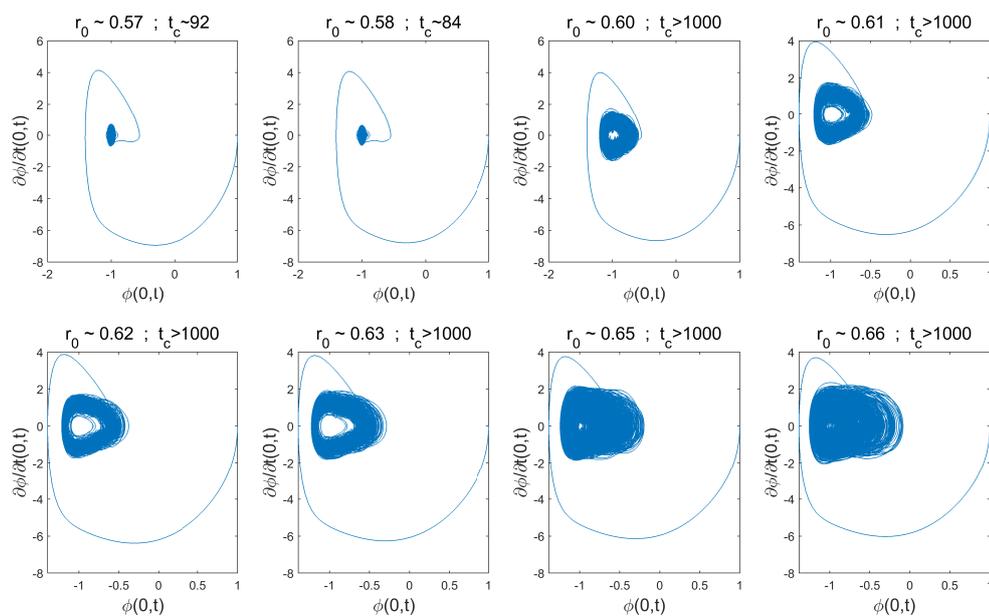
Fonte: O autor, 2019.

Figura 69 - “Óscilon eterno” Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $r_0 = 1.14$.



Fonte: O autor, 2019.

Figura 70 - Espaço de fase $\phi(0, t) \times \partial\phi/\partial t(0, t)$ para o potencial $V_n(\phi)$ com $n = 3$.

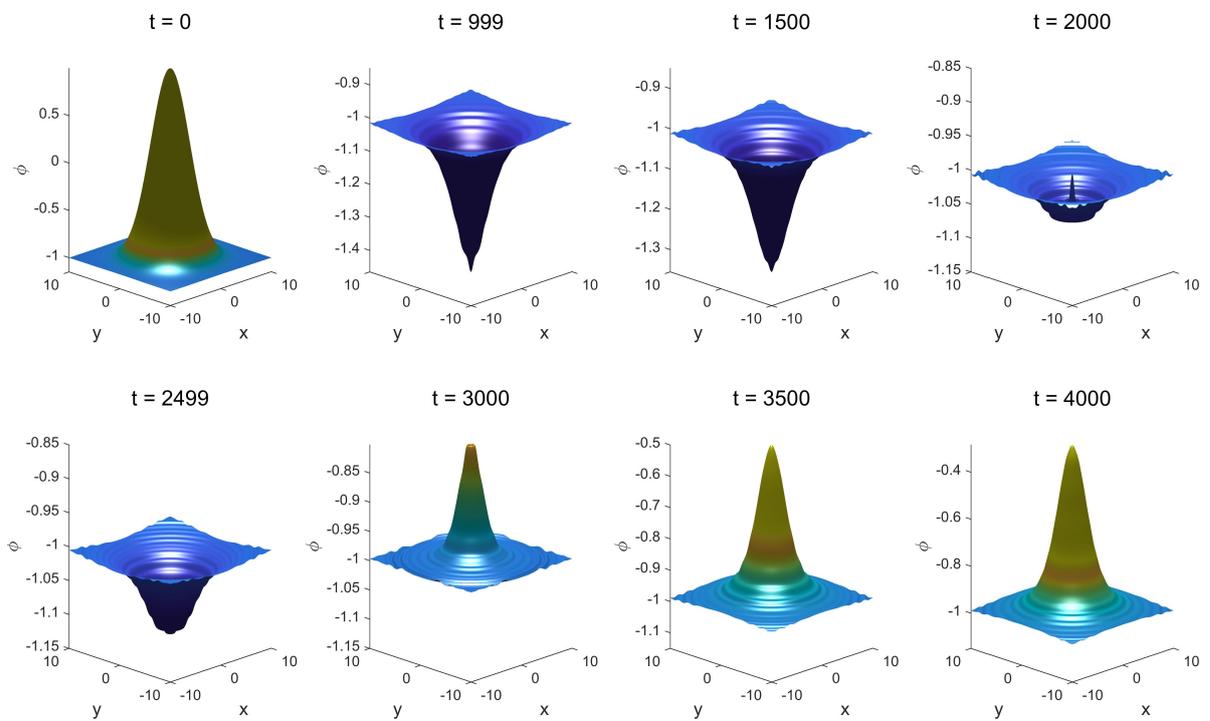


Fonte: O autor, 2019.

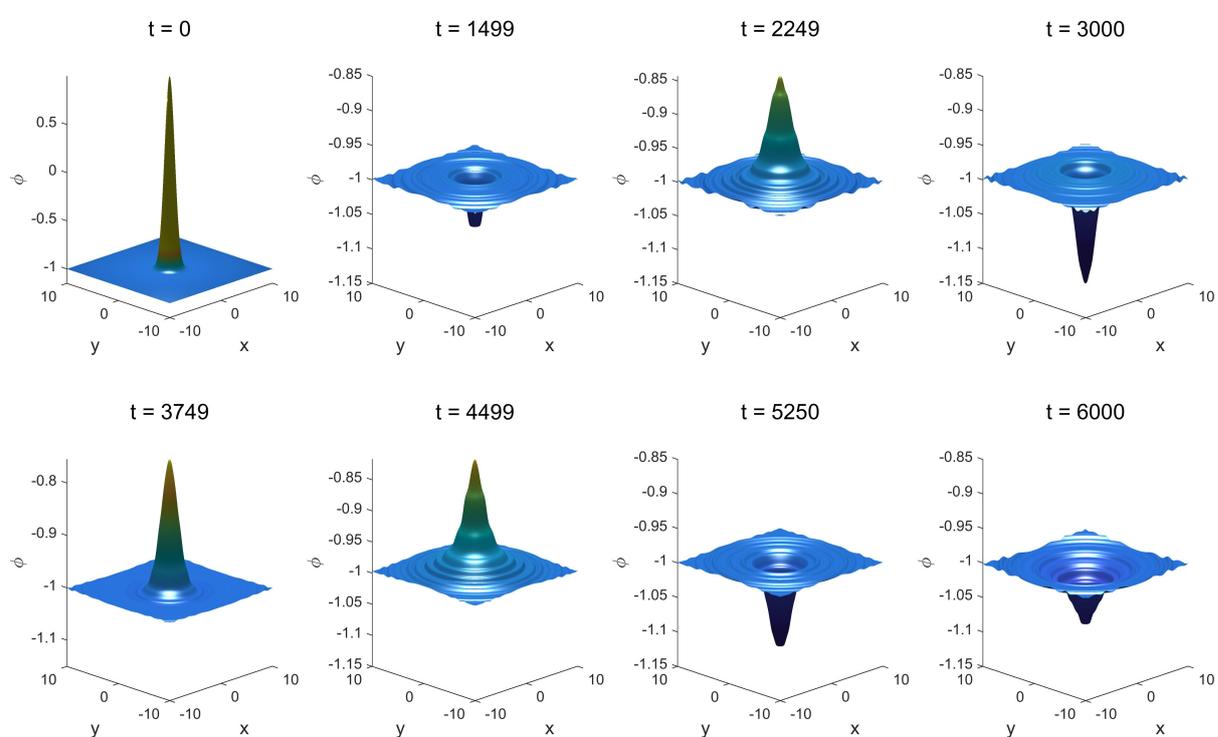
5.5 Resultados com óscilons em (2+1) Dimensões

O teorema de Derrick não impede a existência de soluções topologicamente estáveis com 2 dimensões espaciais. Iremos ilustrar brevemente os óscilons em (2+1) dimensões com simetria cilíndrica. Para o potencial $\lambda\phi^4$ encontramos uma estrutura mais definida e que vive por mais tempo, como podemos ver na Figura 71 para $r_0 = 3.9$. E com potencial $V_n(\phi)$ encontramos também óscilons que vivem por muito tempo, como apresentado na Figura 73. Apesar do óscilon final ser menor do que o óscilon em $\lambda\phi^4$ em sua fase pseudoestável, o seu tempo de duração é expressivamente longo ou talvez perpétuo como podemos ver na Figura 72 com $n = 2$ e na Figura 73 com $n = 3$, nesse último caso, o óscilon vive mais que 20 mil unidades de tempo.

Figura 71 - Óscilon em $\lambda\phi^4$ com $r_0 = 3.9$.

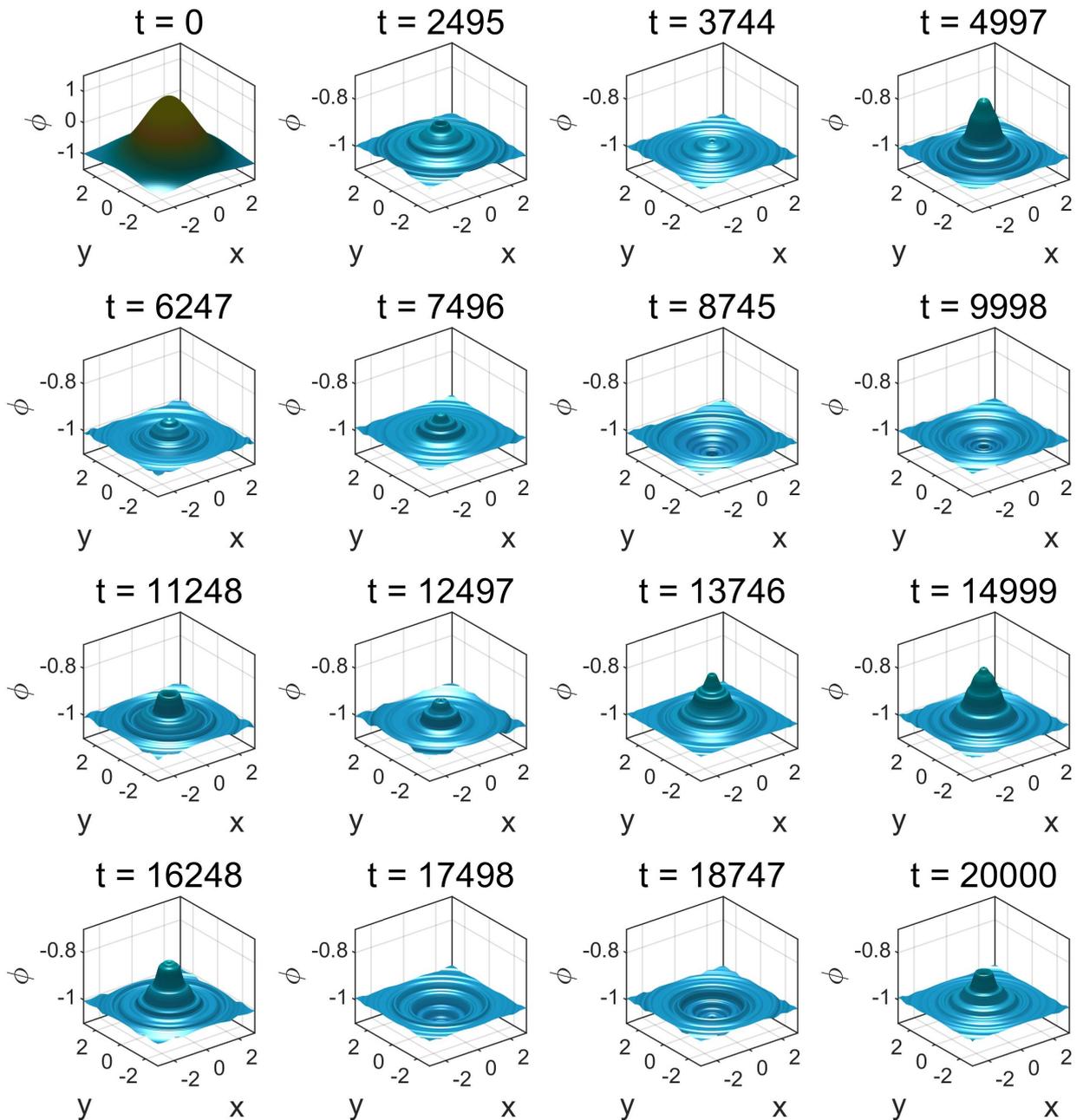


Fonte: O autor, 2019.

Figura 72 - Óscilon em $V_n(\phi)$ com $n = 2$ e $r_0 = 1.0$.

Fonte: O autor, 2019.

Figura 73 - Óscilon em $V_n(\phi)$ com $n = 3$ e $r_0 = 1.857143$.



Fonte: O autor, 2019.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta central do texto é desenvolver formas de grande eficácia para aplicação dos métodos pseudoespectrais. A estratégia utilizada foi escrever todo o algoritmo em termos de matrizes, devido aos recursos nativos de multiprocessamento do Python (Numpy) para operações matriciais. Além da simplicidade do código e a facilidade de adaptá-lo para outras linguagens de programação, obtivemos um baixíssimo custo computacional. Isso permitindo grandes volumes de integrações como nos refinamentos das janelas de fractalidade e integrações de milhares de instantes para os óscilons em (3+1) dimensões.

A primeira aplicação do método em um problema físico de interesse foi realizada no Capítulo 3 nas colisões de kinks em $\lambda\phi^4$. Nesse caso conseguimos obter os resultados já conhecidos pela literatura e introduzir os aspectos genéricos à colisão de kinks a outros potenciais, como escape, formação de óscilons e janelas de escape. Aproveitamos também o procedimento numérico para determinação dos modos internos e do primeiro modo contínuo para um dado potencial e discutimos suas possíveis implicações dinâmicas após a colisão.

Posteriormente analisamos as colisões para o potencial $V_p(\phi)$, que é o potencial que apresenta as soluções estáticas dos chamados *2-kinks*. O potencial depende de um parâmetro inteiro p , onde para p ímpar temos soluções de 2-kinks e para p par temos defeitos não-topológicos chamados de *lumps*. Encontramos que o valor do primeiro modo de radiação decai com $\omega_c = 2/p$ e conseqüentemente o valor do único modo interno de vibração também, $0 < \omega_v < 2/p$. Com o aumento de p o valor do modo de vibração tende ao valor do modo de translação através da ressonância entre os modos, atribuímos a hipótese da ocorrência de largas e numerosas janelas de escape com aumento de p . Além disso, um importante resultado da colisão de 2-kinks é a formação de lumps, similares a soluções estáticas com p par e que esse resultado obtido foi numericamente descrito por uma solução desse tipo. Por fim, ao perturbar simetricamente a solução estática de um lump, obtemos a formação de kinks, estados ligados e lumps metaestáveis.

Investigamos as colisões para o potencial $V_n(\phi)$, que também depende de um parâmetro inteiro n que “compactifica” suas soluções estáticas com o aumento de n . Diferentemente de $V_p(\phi)$, a frequência do primeiro modo contínuo aumenta com o dobro do parâmetro n , $\omega_c = 2n$. A principal característica desse potencial é que o número de modos de vibração tende a aumentar com n , e com isso temos a formação de estruturas oscilantes cada vez mais complicadas e que tendem com muita facilidade a entrar em ressonância. Essas estruturas oscilantes foram os “óscilons compactons” e no final desse processo, temos a fragmentação da estrutura em óscilons menores mais simples. Apresentamos também a evidência de fractalidade sobre os valores da velocidade de impacto através das janelas de escape (bounces) e de estruturas metaestáveis.

No último Capítulo, analisamos brevemente os óscilons em mais de uma dimensão espacial. Foi possível validar o código com os resultados presentes na literatura e prosseguimos com a investigação de óscilons para os potenciais $V_n(\phi)$ e $V_p(\phi)$. Em (3+1) dimensões para o potencial $V_p(\phi)$ não foi possível encontrar óscilons. Porém para o potencial $V_n(\phi)$ óscilons pseudoestáveis ocorriam facilmente e para alguns parâmetros é possível obter estruturas com duração indefinidamente longa.

Desta forma mostramos que os métodos espectrais são adequados para descrição de defeitos topológicos e óscilons. Temos como perspectiva futura abordar outros defeitos em mais de uma dimensão espacial como vortex, strings e q-balls. Outra perspectiva é a melhoria do código com uso de tensores para ampliar o paralelismo das operações.

REFERÊNCIAS

- ABDULLAEV, F. K. Dynamical chaos of solitons and nonlinear periodic waves. *Physics reports*, [S. l.], v. 179, n. 1, p. 1–78, 1989.
- ANDERSEN, S. S.; JACKSON, A. D.; HEIMBURG, T. Towards a thermodynamic theory of nerve pulse propagation. *Progress in neurobiology*, [S. l.], v. 88, n. 2, p. 104–113, 2009.
- ANNINOS, P.; OLIVEIRA, S.; MATZNER, R. A. Fractal structure in the scalar $\lambda(\varphi^2 - 1)^2$ theory. *Physical Review D*, APS, v. 44, n. 4, p. 1147, 1991.
- APOSTOLOPOULOS, P. S.; SIOPSIS, G.; TETRADIS, N. Cosmology from an anti-de sitter–schwarzschild black hole via holography. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 15, p. 151301, 2009.
- BAZEIA, D. et al. From kinks to compactons. *Physics Letters B*, [S. l.], v. 736, p. 515–521, 2014.
- BAZEIA, D. et al. Scattering of compactlike structures. *The European Physical Journal C*, [S. l.], v. 79, n. 12, p. 1–11, 2019.
- BAZEIA, D.; MENEZES, J.; MENEZES, R. New global defect structures. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 24, p. 241601, 2003.
- BERESTYCKI, H.; LIONS, P.-L. Nonlinear scalar field equations. pt. 1. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 82, n. 4, p. 313–346, 1983.
- BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. [S.l.]: Courier Corporation, 2001.
- BULLOUGH, R. K. “The wave” “par excellence”, the solitary progressive great wave of equilibrium of the fluid: an early history of the solitary wave. In: LAKSHMANAN, M. (Ed.). In: *Solitons: Introduction and Applications*. [S.l.]: Berlin: Springer, 1988. p. 7–42.
- CAMPBELL, D. K.; PEYRARD, M. Solitary wave collisions revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, [S. l.], v. 18, n. 1-3, p. 47–53, 1986.
- CAMPBELL, D. K.; PEYRARD, M.; SODANO, P. Kink-antikink interactions in the double sine-gordon equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, [S. l.], v. 19, n. 2, p. 165–205, 1986.
- CAMPBELL, D. K.; SCHONFELD, J. F.; WINGATE, C. A. Resonance structure in kink-antikink interactions in φ^4 theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, [S. l.], v. 9, n. 1-2, p. 1–32, 1983.
- CANUTO, C. et al. *Spectral methods*. [S.l.]: Springer, 2006.
- COPELAND, E. J.; GLEISER, M.; MÜLLER, H.-R. Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse. *Physical Review D*, APS, v. 52, n. 4, p. 1920, 1995.
- CUNDIFF, S. T. et al. Observation of polarization-locked vector solitons in an optical fiber. *Physical review letters*, APS, v. 82, n. 20, p. 3988, 1999.

FORSYTHE, G. E. et al. *Computer methods for mathematical computations*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 1977. Prentice-Hall Series in Automatic Computation, v. 259.

GLEISER, M. Oscillons in scalar field theories: Applications in higher dimensions and inflation. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 16, n. 02n03, p. 219–229, 2007.

GLEISER, M.; SORNBORGER, A. Long-lived localized field configurations in small lattices: application to oscillons. *Physical Review E*, APS, v. 62, n. 1, p. 1368, 2000.

GOODMAN, R. H.; HABERMAN, R. Kink-antikink collisions in the ϕ^4 equation: The n-bounce resonance and the separatrix map. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, SIAM, v. 4, n. 4, p. 1195–1228, 2005.

HEIMBURG, T.; JACKSON, A. D. On soliton propagation in biomembranes and nerves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 102, n. 28, p. 9790–9795, 2005.

HEIMBURG, T.; JACKSON, A. D. On the action potential as a propagating density pulse and the role of anesthetics. *Biophysical Reviews and Letters*, World Scientific, v. 2, n. 01, p. 57–78, 2007.

HINDMARSH, M.; SALMI, P. Numerical investigations of oscillons in 2 dimensions. *Physical Review D*, APS, v. 74, n. 10, p. 105005, 2006.

IWATA, Y.; STEVENSON, P. Conditional recovery of time-reversal symmetry in many nucleus systems. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 21, n. 4, p. 043010, 2019.

KAWASAKI, M.; NAKANO, W.; SONOMOTO, E. Oscillon of ultra-light axion-like particle. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2020, n. 01, p. 047, 2020.

LEE, T. *Particle physics and introduction to field theory*. [S. l.]: Harwood Academic. 1981. (Contemporary Concepts in Physics, vol. 1).

LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

LINHARES, C.; OLIVEIRA, H. de. Galerkin-method approach to nonlinear soliton classical stability. *Brazilian journal of physics*, v. 37, n. 2A, p. 368–377, 2007.

MASON, J. C.; HANDSCOMB, D. C. *Chebyshev polynomials*. [S.l.]: CRC press, 2002.

MATHWORKS. *Element-wise power - MATLAB power .^*. 2019a. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/times.html>. Acesso em: 1 dez. 2019a.

MATHWORKS. *Multiplication- MATLAB times .**. 2019b. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/times.html>. Acesso em: 1 dez. 2019b.

MENDONÇA, T.; OLIVEIRA, H. D. The collision of two-kinks revisited: the creation of kinks and lump-like defects as metastable states. *Brazilian Journal of Physics*, [S. l.], v. 49, n. 6, p. 914–922, 2019.

MENDONÇA, T.; OLIVEIRA, H. de. The collision of two-kinks defects. *Journal of High Energy Physics*, [S. l.], v. 2015, n. 9, p. 1–17, 2015.

OLIPHANT, T. *Python for Scientific Computing*. [S.l.]: Computing in Science & Engineering., 2007.

PEYRARD, M.; CAMPBELL, D. K. Kink-antikink interactions in a modified sine-gordon model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, [S. l.], v. 9, n. 1-2, p. 33–51, 1983.

RAJARAMAN, R. *Introduction to solitons and instantons in quantum field theory*. [s. l.]: North-Holland Publishing Company. 1982.

REBBI, C.; SOLIANI, G. *Solitons and particles*. [S.l.]: World Scientific, 1984.

ROSENAU, P.; HYMAN, J. M. Compactons: solitons with finite wavelength. *Physical Review Letters*, APS, v. 70, n. 5, p. 564, 1993.

SINKALA, Z. Soliton/exciton transport in proteins. *Journal of theoretical biology*, [S. l.], v. 241, n. 4, p. 919–927, 2006.

TANG, D. et al. Observation of high-order polarization-locked vector solitons in a fiber laser. *Physical review letters*, APS, v. 101, n. 15, p. 153904, 2008.

TAPPERT, F. D. *Reminiscences on optical soliton research with Akira Hasegawa*. [S.l.]: [s. n.], 1998. PDF.
