



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

João Paulo Alves Barros

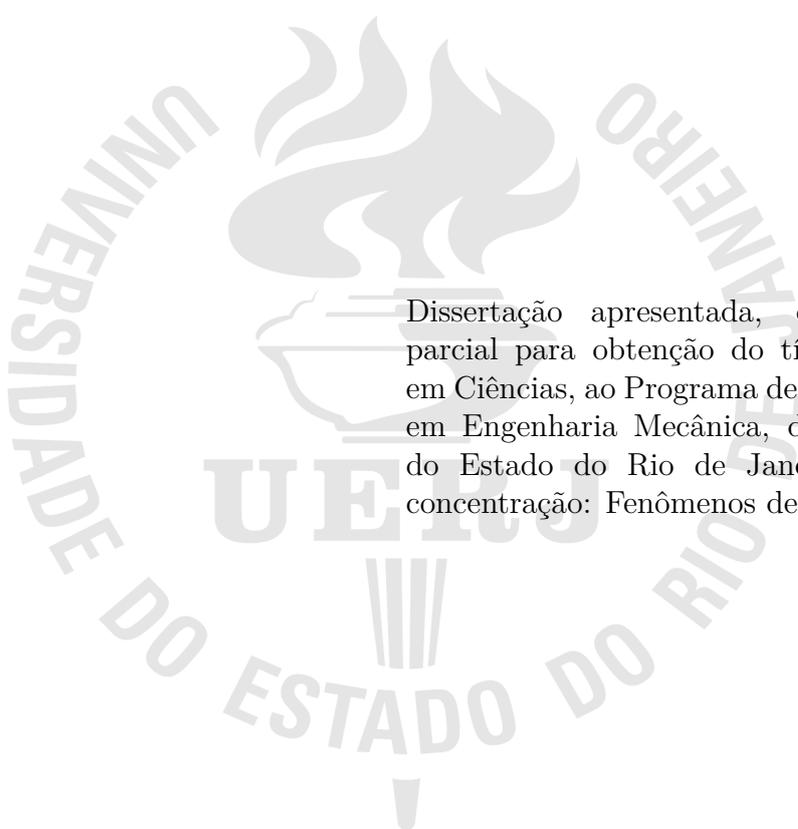
**Soluções Numéricas para o Problema de Dispersão de Poluição
na Lagoa Rodrigo de Freitas**

Rio de Janeiro

2019

João Paulo Alves Barros

**Soluções Numéricas para o Problema de Dispersão de Poluição na Lagoa
Rodrigo de Freitas.**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Orientador: Cristiane Oliveira de Faria (IME/UERJ)

Coorientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer (IMECC/UNICAMP)

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

B277 Barros, João Paulo Alves.
Soluções numéricas para o problema de dispersão de poluição na Lagoa Rodrigo de Freitas / João Paulo Alves Barros. – 2019.
77f.

Orientador: Cristiane Oliveira de Faria.
Coorientador: João Frederico da Costa Azevedo Meyer.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Poluição - Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. 4. Métodos de simulação - Teses. I. Faria, Cristiane Oliveira de. II. Meyer, João Frederico da Costa Azevedo. III. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 621:504.5-045.52

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

João Paulo Alves Barros

**Soluções Numéricas para o Problema de Dispersão de Poluição na Lagoa
Rodrigo de Freitas.**

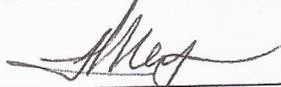
Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

Aprovado em: 19 de Dezembro de 2019

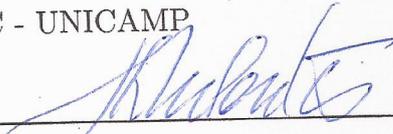
Banca Examinadora:



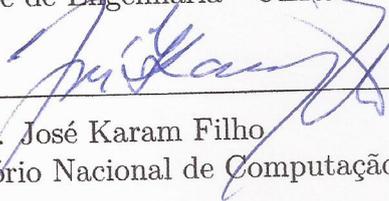
Profa. Dra. Cristiane Oliveira de Faria (Orientadora)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ



Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer (Coorientador)
IMECC - UNICAMP



Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes
Faculdade de Engenharia - UERJ



Prof. Dr. José Karam Filho
Laboratório Nacional de Computação Científica

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Dedico esta minha dissertação a todos que de alguma forma contribuíram, a Deus, meus pais, meus amigos, aos meus professores e aos meus queridos orientadores. Dedico também aos que vieram a falecer durante essa jornada.

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradeço a Deus, por tudo que fez ao longo desse caminho. Agradeço a minha família que me apoiou durante esse trajeto e aos meus amigos. Agradeço a todos que de certa forma contribuíram um pouco. A seguir irei citar os professores que foram muito importantes nesta conquista.

Agradeço a professora Jeanne de Barros, por ter sido a minha primeira orientadora, por ter me dado a primeira experiência de pesquisa na UERJ. Agradeço também por ter sido minha orientadora na monitoria de Cálculo IV e ter sido a pessoa que me fez querer trilhar o caminho do mestrado.

Agradeço ao professor Carlos Frederico, o Fred, por ter me despertado o interesse em querer estudar assuntos voltados a área de análise matemática. Agradeço também a ele por todo auxílio que me deu ao longo dessa jornada, por todas as vezes que foi paciente comigo e confiou no meu potencial.

Agradeço ao professor João Frederico Meyer, o Joni, professor da UNICAMP, por ter sido o meu coorientador neste projeto, por ter sido uma pessoa excepcional em todos os sentidos, por ter me auxiliado na execução do programa de Elementos Finitos, por ter me ajudado a frequentar o restaurante universitário durante a minha visita a UNICAMP na parte final da pesquisa e também ter me liberado acesso ao laboratório durante minha estadia.

Agradeço em especial, devido a toda importância desse estudo, a minha querida orientadora, Cristiane, por toda paciência, por todo suporte, por todas as cobranças e por nunca deixar eu me abater, muitas vezes sendo exigente ou reclamando para tentar me motivar. Apesar de todos terem seus méritos, agradeço em especial a minha orientadora por ter sido a principal motivadora, a que me fez ter interesse em aprender mais, me deu experiências em congresso, que me fez ver que nada é impossível e soube extrair meu melhor apesar das dificuldades do meu percurso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPG-EM) da UERJ pelo suporte dado na ida a congressos e na minha viagem a UNICAMP para a pesquisa.

RESUMO

BARROS, João Paulo Alves. *Soluções Numéricas para o Problema de Dispersão de Poluição na Lagoa Rodrigo de Freitas*. 77 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

Como sabemos, um dos maiores problemas do século 21 é a poluição. Portanto, neste trabalho será modelado o processo de dispersão da poluição em uma lagoa e suas conseqüências. Em particular, foi escolhido como cenário a Lagoa Rodrigo de Freitas. Para analisar o processo de poluição, a equação difusão-advectão-reação foi considerada como modelo matemático. Simulações numéricas são mostradas considerando o Método dos Elementos Finitos para as discretizações espaciais (usando elementos triangulares lineares) combinadas ao método de Crank-Nicolson para que a discretização de tempo seja mostrada.

Palavras-chave: Lagoa Rodrigo De Freitas; Dispersão de Poluição; Método de Elementos Finitos; Crank-Nicolson; Simulação Computacional.

ABSTRACT

BARROS, João Paulo Alves. *Numerical Solutions for the Pollution Dispersion Problem in Rodrigo de Freitas Lagoon*. 77 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2019.

As we know, one of the major problems of the 21st century is the pollution. Therefore, in this work, we have studied the process of evolution dispersing pollution in a lagoon and their consequences. In particular, it was choose as a scenario the Rodrigo de Freitas Lagoon. In order to analyze the pollution process, the diffusion-advection-reaction equation was considered as the mathematical model. Numerical simulations considering the Finite Element Method is employed for the spatial discretizations (using linear triangular elements) combined to the Crank-Nicolson method for the timing discretization will be shown.

Keywords: Rodrigo de Freitas Lagoon; Pollution Dispersion; Finite Element Method; Computational Simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Lagoa Rodrigo De Freitas.	12
Figura 2 Árvore de natal da Lagoa Rodrigo De Freitas.	14
Figura 3 Índices de toneladas de peixe mortos e coliformes fecais (CEDAE).	15
Figura 4 Representação da transformação que leva as coordenadas do triângulo T de referência a um triângulo qualquer, K.	25
Figura 5 Exemplo de divisão da malha Retangular.	29
Figura 6 Localização dos nós utilizados na lagoa retangular para sumidouro e fontes de poluição.	31
Figura 7 Dispersão de poluição na Lagoa de Domínio Retangular ao longo de 3 dias (Primeiro teste).	32
Figura 8 Concentração ao longo dos passos do tempo dos nós no primeiro teste de Domínio Retangular.	33
Figura 9 Dispersão de poluição na Lagoa de Domínio Retangular ao longo de 3 dias (Segundo teste).	34
Figura 10 Concentração ao longo dos passos do tempo dos nós no segundo teste de Domínio Retangular.	35
Figura 11 Dispersão de poluição na Lagoa de Domínio Retangular ao longo de 3 dias (Terceiro teste).	36
Figura 12 Concentração ao longo dos passos do tempo dos nós no terceiro teste de Domínio Retangular.	37
Figura 13 Análise dos testes de Refinamento da malha.	39
Figura 14 Matriz global gerada pelo programa do caso de Domínio Retangular.	40
Figura 15 Matriz global, ampliada, gerada pelo programa do caso de Domínio Re- tangular.	40
Figura 16 Exemplo de condição de estabilidade extrapolada.	42
Figura 17 Imagem retirada do programa <i>Google Earth Pro</i> [®]	43
Figura 18 Exemplo de uma malha gerada pelo <i>GMSH</i>	44
Figura 19 Esquema realizado para a Lagoa Rodrigo de Freitas.	45
Figura 20 Primeiro teste realizado na Lagoa Rodrigo de Freitas.	46

Figura 21 Concentração ao longo dos passos do tempo nos nós do primeiro teste na Lagoa Rodrigo De Freitas.	47
Figura 22 Dispersão de poluição na Lagoa de Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias (Segundo teste).	48
Figura 23 Concentração ao longo dos passos do tempo nos nós do segundo teste na Lagoa Rodrigo De Freitas.	49
Figura 24 Dispersão de poluição na Lagoa de Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias (Terceiro teste).	50
Figura 25 Concentração ao longo dos passos do tempo nos nós do terceiro teste na Lagoa Rodrigo De Freitas.	51
Figura 26 Matriz global gerada pelo programa do caso de Domínio aproximado da Lagoa Rodrigo de Freitas.	52
Figura 27 Matriz global, ampliada, gerada pelo programa do caso de Domínio aproximado da Lagoa Rodrigo de Freitas.	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros no domínio retangular utilizados no primeiro teste	31
Tabela 2	Parâmetros no domínio retangular utilizados no segundo teste	34
Tabela 3	Parâmetros no domínio retangular utilizados no terceiro teste	36
Tabela 4	Parâmetros que não se alteram utilizados durante o teste de refinamento. .	38
Tabela 5	Parâmetros que se alteram utilizados durante o teste de refinamento.	38
Tabela 6	Parâmetros no domínio retangular utilizados extrapolados	41
Tabela 7	Dispersão de poluição na Lagoa de Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias (Primeiro teste).....	46
Tabela 8	Parâmetros na Lagoa Rodrigo de Freitas utilizados no segundo teste	48
Tabela 9	Parâmetros na Lagoa Rodrigo de Freitas utilizados no terceiro teste	50

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	PROBLEMA MODELO	17
2	DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA	19
2.1	Preliminares	19
2.2	Formulação Variacional	20
2.3	Método de Galerkin	21
2.4	Método de Crank-Nicolson	22
2.5	Número de Pécelet	23
2.6	Metodologia para a Elaboração do Programa	24
2.7	Problema modelo em um Domínio Retangular	29
2.8	Cenários para o Domínio Retangular	30
2.8.1	Primeiro teste	30
2.8.2	Segundo Teste	33
2.8.3	Terceiro Teste	36
2.9	Refinamento da Malha	38
2.10	Análise da Matriz Global do Domínio Retangular	40
2.11	Estabilidade	41
3	PROBLEMA MODELO APLICADO À LAGOA RODRIGO DE FREITAS	43
3.1	Cenários para a Lagoa Rodrigo De Freitas	44
3.1.1	Primeiro Teste	46
3.1.2	Segundo Teste	47
3.1.3	Terceiro Teste	50
4	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	56
	Apêndice	58

INTRODUÇÃO

A poluição ambiental é um dos maiores problemas deste século. Um dos principais fatores que influenciam este tipo de problema é o rápido crescimento industrial em escala global aliado à emissão de poluentes. A influência da poluição ocorre de diversas formas como: efeito estufa, alteração em taxas de mortalidades e natalidades de algumas espécies, destruição da camada de ozônio, chuvas ácidas, toxicidade. Os fatores citados prejudicam não só a vida do planeta como também a longevidade humana.

É importante ressaltar que as pesquisas relacionadas a problemas ambientais não são recentes. Esses estudos vêm sendo realizados desde 1980 com série de pesquisas realizadas pela extinta União Soviética, principalmente pelo Observatório Geofísico do Comitê Hidrometeorológico de Estado. Esses problemas foram, inicialmente, discutidos em 1970 através do “International Environmental Protection Symposium”, ocorrido na antiga Tchecoslováquia, que se caracterizou mais adiante como precursor da pesquisa no campo e sendo reportado subsequentemente através do “Internazionale Simposio in Italia”, em Roma no ano de 1973, na França em 1975 e na Alemanha em 1977 (Marchuck [1]).

Diante de tantos problemas oriundos da poluição ambiental, fica claro ver o porquê que este assunto vem se tornando cada vez mais pesquisado e debatido na mídia. Dentre as principais medidas que ocorreram como uma tentativa de frear a emissão de poluentes se destacam o Protocolo de Kyoto e mais recentemente o Acordo de Paris.

O Protocolo de Kyoto, que foi redigido e assinado no Japão em 1997 e que entrou em vigor em 2005, é um acordo internacional entre os países integrantes da ONU (Organizações das Nações Unidas) que visava reduzir a emissão de gases causadores do efeito estufa e conseqüentemente o aquecimento global. Este acordo durou até 2012 e posteriormente veio o Acordo de Paris que tem também o objetivo de reduzir a emissão de gases causadores do efeito estufa a partir de 2020.

O objetivo deste trabalho é monitorar o processo de dispersão da poluição de uma lagoa por seus efluentes. Especificamente estudaremos a lagoa Rodrigo de Freitas (veja Figura 1).

Figura 1: Lagoa Rodrigo De Freitas.



Fonte: <<https://oglobo.globo.com/rio/no-coracao-da-zona-sul-historia-da-lagoa-rodrigo-de-freitas-13906205>>. Acesso em 3 dez. 2019.

Antes de abordar o histórico da lagoa, é necessário primeiro definir o que é lagoa para depois se adentrar nos fatos históricos e culturais relacionados a ela.

Definição de Lagoa

Uma lagoa é um corpo de água com pouco fluxo, mas geralmente sem água estagnada, podendo ser natural ou artificial, e é usualmente menor que um lago¹. Diversos corpos d'água feitos pelo homem são classificados como lagoas, incluindo jardins d'água desenhados para ornamentação; tanques para a produção comercial de peixes e tanques solares para o armazenamento de energia térmica.

Lagoas e lagos diferenciam-se dos rios, córregos e outros cursos d'água em razão da velocidade da corrente. Enquanto as correntezas são facilmente observadas, lagoas e lagos possuem microcorrentezas, conduzidas termicamente, e correntes provocadas pelo vento. Essas características distinguem uma lagoa de muitos outros acidentes geográficos com características de terreno aquático, como as piscinas naturais formadas pelas marés.

A distinção técnica entre uma lagoa e um lago ainda não foi padronizada universalmente. Limnologistas² propuseram definições formais para lagoa, em parte para incluir "as massas d'água em que a luz penetra até o fundo do corpo de água, corpos d'água rasos o bastante para plantas enraizadas crescerem nela e massas de água em que falta ação de ondas na margem". Cada uma dessas definições tem encontrado resistência ou

¹Lago é uma porção de água cercada de terra, sem comunicação imediata com um mar.

²Limnologistas são os estudiosos de limnologia, a ciência que estuda os fenômenos físicos e biológicos relativos aos lagos.

desaprovação, já que as características definidoras são difíceis de se medir ou verificar. Assim, algumas organizações e pesquisadores se fixaram nas definições técnicas em que "lago" e "lagoa" dependem apenas do tamanho [5].

Lagoa Rodrigo de Freitas

Ao longo da história, a lagoa Rodrigo de Freitas possuiu diversos nomes. Inicialmente habitada pelos índios Tamoios³, ela recebeu o nome "Piraguá", que significa "enseada de peixe". Após os indígenas serem expulsos, o local foi adquirido pelo vereador Amorim Soares, e assim passou a se chamar "Lagoa de Amorim Soares".⁴ Com a expulsão do vereador da cidade em 1609, as terras foram vendidas ao seu genro, Sebastião Fagundes Varela, e daí a lagoa passou a se chamar "Lagoa de Fagundes". Por fim, sua bisneta Petrolina Fagundes casou-se com o jovem oficial da cavalaria portuguesa, Rodrigo de Freitas de Carvalho e nomeou a lagoa com seu nome para homenageá-lo. No fim de sua vida, quando sua esposa já havia falecido, Rodrigo foi para Portugal e veio a falecer em 1748.

A área da lagoa Rodrigo de Freitas é aproximadamente de 2,2 km², ela se encontra na zona sul da cidade do Rio de Janeiro e é carinhosamente apelidada de "Coração do Rio de Janeiro" devido ao seu formato parecer um coração. Analisando a Figura 1, pode-se observar duas ilhas: Ilha Piraguê, próxima à margem oeste, que abriga o Clube Naval e a Ilha dos Caiçaras, que se localiza mais ao sul, onde foram realizadas algumas provas dos jogos Pan-Americanos de 2007.

Outro fator importante é o entorno da lagoa onde encontram-se os mais importantes clubes da cidade, como por exemplo: o Clube de Regatas do Flamengo, o Clube de Regatas Vasco da Gama (sede náutica) e o Botafogo de Futebol e Regatas (sede náutica).

A lagoa é considerada como um dos principais pontos turísticos da cidade. Em seu entorno encontram-se parques e áreas de lazer para a população. Em épocas festivas, como no período natalino uma árvore de natal flutuante é construída no meio da lagoa, o que traz mais turistas para a localização. É interessante ressaltar que a cada ano seus organizadores tentam fazê-la maior e este evento está se tornando um marco turístico para a cidade.

³O termo "tamoio" vem de "ta'môi", que, em língua tupi, significa "avós", indicando que eles eram o grupo tupi que há mais tempo se havia instalado no litoral brasileiro

⁴Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Lagoa_Rodrigo_de_Freitas>. Acesso em 3 dez. 2019.

Figura 2: Árvore de natal da Lagoa Rodrigo De Freitas.



Fonte: < <https://g1.globo.com/rj/rio-de-janeiro/noticia/2018/11/06/arvore-de-natal-da-lagoa-sera-inaugurada-dia-1o-de-dezembro.ghtml>>. Acesso em 3 dez. 2019.

Poluição e Planos Governamentais

É de notório saber que a lagoa se encontra poluída e num estágio em que se banhar nela chega a ser um grave perigo contra a saúde. A história mais famosa com relação a poluição da lagoa se deu nos jogos olímpicos. Durante o evento ocorreram alertas de biólogos e pessoas mais renomadas da área alertando que suas águas não eram propícias a prática de atividades olímpicas pois a mesma possuía um número alto de bactérias. A lagoa chegou a ser comparada a um "esgoto puro".

Mesmo com o alerta, alguns atletas americanos realizaram testes antes da Olimpíada. Os remadores americanos tiveram problemas estomacais e mal estar⁵.

A CEDAE (*Companhia Estadual de Águas e Esgotos do Rio de Janeiro*) possui um projeto chamado Lagoa Limpa onde desde 2006 vem realizando estratégias para conter a poluição da lagoa. Houve inúmeras intervenções com o objetivo de proporcionar melhorias nos sistemas de esgotos sanitários de todas as sub-bacias contribuintes para a Lagoa e com isso iniciar uma recuperação ambiental, já verificada pelos órgãos de fiscalização ambiental do estado.

É possível observar que foram obtidas melhoras com relação a baixa mortalidade

⁵Disponível em :<<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2015/07/atletas-podem-contrair-doencas-nas-aguas-olimpicas-do-rio-diz-agencia.html>>. Acesso em 3 dez. 2019.

de peixes e uma diminuição de coliformes fecais por mililitros de água ⁶ (*nmp/ml*), com isso gerando uma melhora substancial na qualidade das águas. Importante ressaltar que segundo a CEDAE o número registrado no gráfico de 1300 (*nmp/ml*) já pode permitir uma recreação secundária nas águas da lagoa, porém isso ainda não é suficiente para recreações primárias, como o banho.

Figura 3: Índices de toneladas de peixe mortos e coliformes fecais (CEDAE).



Fonte: <https://www.cedae.com.br/lagoa_limpa>. Acesso em 3 dez. 2019.

A CEDAE especula que o banho na lagoa num futuro próximo poderá ser uma realidade se continuar nesse nível de tratamento. Outro ponto importante a se destacar é que a empresa possui outros programas para combater a poluição como a despoluição da Baía de Guanabara e o Programa Sena Limpa⁷. A Figura 3, retirada do site da CEDAE do programa Lagoa Limpa, nos mostra os índices de toneladas de peixes mortos (de 2000 a 2009) e coliformes fecais (de 1980 a 2009) que comprova essa redução e eficácia dos programas.

Estrutura do texto

No Capítulo 1 será apresentado o modelo matemático de dispersão de poluição para este tipo de problema com as hipóteses que serão consideradas neste trabalho. No

⁶O método do NMP permite calcular o número de um microorganismo específico numa amostra de água, utilizando tabelas de probabilidade. NMP significa o "número mais provável".

⁷Disponível em :<https://www.cedae.com.br/programas_projetos>. Acesso em 3 dez. 2019.

Capítulo 2 serão propostos os métodos numéricos para este estudo. Será utilizado na discretização para a variável espacial o método de Galerkin com elementos triangulares lineares e para a variável temporal o método de Crank-Nicolson. Também será explicitado a importância do número adimensional de Péclet.

Será abordado também como foi a implementação da parte computacional. Também serão apresentados os testes realizados e resultados computacionais para o problema da lagoa considerando um domínio retangular e da Lagoa Rodrigo de Freitas. Por fim, serão apresentadas as conclusões.

1 PROBLEMA MODELO

O problema de tratamento e dispersão da poluição será modelado pela equação do transporte com difusão-advecção-reação com transporte, uma equação diferencial parcial muito utilizada em problemas relacionados a ecologia, principalmente no caso de poluição de lagoas. Neste trabalho, dadas as dimensões do domínio em estudo, com medidas horizontais extremamente maiores do que a vertical, será considerado o caso bidimensional, ou seja, o domínio como sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Considere $c(t, x, y)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a concentração do poluente em um instante $t \in I = (0, T]$. Temos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \epsilon \Delta c + \beta \cdot \nabla c + \delta c = f \text{ em } \Omega, \quad (1.1)$$

onde cada termo acima modela um fenômeno físico :

- **Transporte por difusão:** O termo $\epsilon \Delta c$ representa o fenômeno da difusão, um importante mecanismo existente em sistemas bioecológicos, sendo o processo pelo qual uma substância é transferida de uma parte do sistema para outra, como por exemplo a osmose. Define-se ϵ como a constante de difusibilidade do poluente, que será considerada constante.
- **Transporte por convecção:** O termo $\beta \cdot \nabla c$ representa a convecção natural e β é a velocidade da superfície da água relacionado a sua velocidade e é definido como $\beta = (u, w)$, duas componentes do plano 2D.
- **Fenômenos de decaimento:** O termo δc é definido como o termo do decaimento, isto é, a perda do poluente no sistema, aquela fração de partículas da substância poluente que reage com o meio externo, isto pode ocorrer de diversos modos: reação com a biota (biotransformação e biodegradação), evaporação, etc. A constante δ é definida como a taxa de decaimento no meio aquático.
- **Termo fonte:** O termo fonte conhecido em Ω é dado por f . Pode ser uma ou várias fontes de poluição ou sumidouros, pontuais ou não.

As condições de fronteira, de forma geral, são dadas por:

$$-\epsilon \frac{\partial c}{\partial \eta} = k_p c \text{ em } \Gamma_p . \quad (1.2)$$

As condições acima está atrelada ao fato da lagoa perder poluentes em suas bordas Γ_p , onde p representa o índice de absorção de água que varia de acordo com o agregado, que pode ser por exemplo: terra, mata, cascalhos, entre outros e η derivada normal exterior a fronteira. Nesta dissertação consideraremos apenas o caso de um agregado, sendo este o concreto, que foi utilizado para revestir borda de toda a lagoa. Sendo assim, a expressão (1.2) se torna:

$$-\epsilon \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \Gamma, \quad (1.3)$$

As hipóteses assumidas serão:

- $\epsilon > 0$,
- $\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$ e
- $\delta \geq 0$.

De uma forma mais compacta pode-se escrever o problema modelo como:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} - \epsilon \Delta c + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla c + \delta c = f \text{ em } \Omega \\ -\epsilon \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 \text{ em } \Gamma \end{cases} \quad (1.4)$$

A próxima seção tem como objetivo realizar a discretização do problema e apresentar os dois métodos numéricos que serão utilizados: Método de Galerkin e Método de Crank Nicolson. Além disso, será também introduzido o núcleo de Péclet e a sua relação com a estabilidade.

2 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

Durante este capítulo será utilizado o Método de Galerkin para a discretização no espaço e posteriormente o método de Crank-Nicolson para a discretização temporal. Inicialmente iremos recordar algumas definições necessárias para efetuarmos a discretização do problema modelo. Estas definições foram retiradas de RINCON [7], LIONS [11] e WOLMUTH [3].

2.1 Preliminares

Observando o Problema Modelo, (1.4), percebe-se que c deve pertencer ao espaço das funções de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que são C^2 , isto é, possuem primeira e segunda derivada e são contínuas. O próximo passo consiste em procurar a solução num espaço mais abrangente com a vantagem que as funções de C^2 também pertençam a esse espaço. Sendo Ω , um aberto limitado, é um domínio pertencente \mathbb{R}^2 , define-se o espaço das funções quadrado integráveis no sentido de Lebesgue, sobre o domínio de Ω , denotado por

$$L^2(\Omega) = \{v; \int_{\Omega} |v|^2 dx < \infty\}, \quad (2.1)$$

onde o produto interno é dado por:

$$(c, v) = \int_{\Omega} (cv) dx \quad (2.2)$$

para c e v pertencentes a $L^2(\Omega)$. Porém para prosseguir é necessário que as derivadas parciais com relação a x e y também sejam quadrado integráveis e por isso será utilizado o espaço $H^1(\Omega)$. Define-se este espaço como o espaço de Hilbert onde as funções são quadrado integráveis, bem como as derivadas no sentido de distribuição, dado por:

$$H^1(\Omega) = \{v(x, y) \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)\} \quad (2.3)$$

. Por fim, seja $c \equiv c(x, y, t) \in V$, onde:

$$V = \{c \in L^2((0, T], H^1(\Omega)) : \frac{\partial c}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in (0, T]\}. \quad (2.4)$$

Feita esta seção preliminar, na próxima seção pode-se dar início ao processo de discretização da aproximação espacial.

2.2 Formulação Variacional

Seja $v \in H^1(\Omega)$, multiplicando (1.4) pela função peso v em ambos os lados e integrando em todo o domínio, obtemos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} v - \epsilon \Delta c v + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla c v + \delta c v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx . \quad (2.5)$$

Observando apenas o segundo termo da equação acima, podemos reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} -\epsilon \Delta c v \, dx = -\epsilon \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\nabla c) \, dx . \quad (2.6)$$

A próxima etapa será utilizar a Identidade de Green:

$$-\epsilon \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\nabla c) \, dx = -\epsilon \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla c) \, dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla c \, dx . \quad (2.7)$$

Utilizando o Teorema da Divergência temos:

$$-\epsilon \int_{\partial\Omega} v \nabla c \cdot \vec{n} \, dS + \epsilon \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla c \, dx . \quad (2.8)$$

Utilizando a condição de fronteira dada em (1.3), obtemos:

$$\int_{\Omega} \epsilon \nabla c \cdot \nabla v \, dx . \quad (2.9)$$

Reescrevendo com todos os termos, temos a seguinte formulação variacional:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}, v \right) + \epsilon (\nabla c, \nabla v) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla c, v) + (\delta c, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) . \quad (2.10)$$

A Formulação Variacional do problema é dada acima e impõe uma condição de regularidade: ambas as funções devem ser quadrado-integráveis e ter derivadas primeiras também quadrado integráveis.

2.3 Método de Galerkin

O Método de Elementos Finitos envolve a divisão do domínio da solução em um número finito de subdomínios ou elementos, e em cada domínio será utilizada uma função conveniente (dita função teste) que será útil na aproximação global da solução procurada. A discretização de Ω se dará através de Elementos Finitos triangulares de primeira ordem.

Para definir o domínio geométrico Ω_h do problema será utilizado o software *Google Earth*[®] para se mapear a região de estudo. Mapeando a região e obtendo as coordenadas necessárias, obtem-se a fronteira aproximada da original através de segmentos de retas. Com o auxílio do software livre *GMSH*⁸, um gerador de malha de elementos finitos, foi obtido o contorno e a triangularização satisfatória da região de estudo.

Dado H_h , um subespaço vetorial de $H^1(\Omega)$, de dimensão finita N , define-se a base $K = \{\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_N(x, y)\}$. A partir de agora e utilizando separação de variáveis, a solução será construída neste novo espaço definido. Com isso tomamos a seguinte aproximação no domínio discreto:

$$c(x, y, t) \approx c_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) \phi_j(x, y), \quad (2.11)$$

e as derivadas parciais

$$\frac{\partial c_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \phi_j, \quad \frac{\partial c_h}{\partial x} = \sum_{j=1}^N c_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial c_h}{\partial y} = \sum_{j=1}^N c_j(t) \frac{\partial \phi_j}{\partial y}. \quad (2.12)$$

Com o espaço H_h e a aproximação dada por (2.11) e (2.12) pode se definir para a solução aproximada um novo subespaço V_h de V .

Sendo assim, queremos encontrar $c_h \in H_h$ tal que:

$$\left(\frac{\partial c_h}{\partial t}, v_h \right) + \epsilon (\nabla c_h, \nabla v_h) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla c_h, v_h) + (\delta c_h, v_h) = (f, v_h) \quad , \forall v_h \in V_h. \quad (2.13)$$

⁸Disponível em: <<http://gmsh.info/>>. Acesso em 3 dez. 2019.

Como a expressão acima vale para todo $v_h \in V_h$, podemos substituir v_h por $\sum_{i=1}^N c_i(t)\phi_i(t)$. Fazendo este procedimento e substituindo β , obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial c_j}{\partial t}(\phi_j, \phi_i) + \epsilon \sum_{j=1}^N c_j(\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + u \sum_{j=1}^N c_j\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i\right) + w \sum_{j=1}^N c_j\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i\right) + \right. \\ & \left. + \delta \sum_{j=1}^N c_j(\phi_j, \phi_i) \right\} = \sum_{i=1}^N (f, \phi_i). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Reorganizando os termos de (2.3), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial c_j}{\partial t}(\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^N c_j \left[\epsilon(\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + u\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i\right) + w\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i\right) + \delta(\phi_j, \phi_i) \right] \right\} \\ & = \sum_{i=1}^N (f, \phi_i). \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.4 Método de Crank-Nicolson

Neste estudo para a discretização da variável temporal, será utilizado o método de Crank-Nicolson. Tome $t \in (0, T]$ e considere n passos no tempo, tal que o intervalo de tempo Δt seja dado por:

$$t_{n+1} = (n+1)\Delta t \quad \text{onde} \quad \Delta t = \frac{T}{n}. \quad (2.16)$$

Assim temos as seguintes diferenças:

$$\frac{\partial c_j}{\partial t}(t_{n+1/2}) = \frac{c_j(t_{n+1}) - c_j(t_n)}{\Delta t} = \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} \quad (2.17)$$

e

$$c_j(t_{n+1/2}) = \frac{c_j(t_{n+1}) + c_j(t_n)}{2} = \frac{c_j^{n+1} + c_j^n}{2}. \quad (2.18)$$

Substituindo (2.17) e (2.18) em (2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{c_j^{n+1}}{\Delta t} (\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^N \frac{c_j^{n+1}}{2} \left[\epsilon (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + u \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right) + w \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i + \delta(\phi_j, \phi_i) \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{c_j^n}{\Delta t} (\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^N -\frac{c_j^n}{2} \left[\epsilon (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + u \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right) + w \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right) + \delta(\phi_j, \phi_i) \right] \right. \\
&\quad \left. + (f, \phi_i) \right\}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Que pode ser simplificado :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N c_j^{n+1} \left[\left(1 + \frac{\delta \Delta t}{2}\right) (\phi_j, \phi_i) + \frac{\epsilon \Delta t}{2} (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + \frac{u \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right) + \frac{w \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N c_j^n \left[\left(1 - \frac{\delta \Delta t}{2}\right) (\phi_j, \phi_i) - \frac{\epsilon \Delta t}{2} (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) - \frac{u \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right) - \frac{w \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \Delta t (f, \phi_i) \right\}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Com as equações da discretização acima é possível definir um sistema linear. Reescrevendo (2.20) na forma matricial, obtemos:

$$Ac^{n+1} = Bc^n + d \tag{2.21}$$

onde:

- $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $d = [d_i]$,
- $a_{ij} = \left[\left(1 + \frac{\delta \Delta t}{2}\right) (\phi_j, \phi_i) + \frac{\epsilon \Delta t}{2} (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) + \frac{u \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right) + \frac{w \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right) \right]$,
- $b_{ij} = \left[\left(1 - \frac{\delta \Delta t}{2}\right) (\phi_j, \phi_i) - \frac{\epsilon \Delta t}{2} (\nabla \phi_j, \nabla \phi_i) - \frac{u \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \phi_i \right) - \frac{w \Delta t}{2} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \phi_i \right) \right]$,
- $d_i = \Delta t (f, \phi_i)$.

O sistema acima será resolvido iterativamente no tempo, a partir da condição inicial c_0 , previamente fornecida.

2.5 Número de Péclet

Esta condição é dada através do número adimensional de Péclet, \mathbb{P} , que relaciona a razão do efeito convectivo pelo efeito difusivo. Durante este estudo, é importante ressaltar que sempre que os processos de convecção são dominantes é necessário respeitar a seguinte

condição (PRESTES [12]), que é dada por :

$$\mathbb{P}_x = \frac{\beta_i \Delta x}{\epsilon} < 2 \quad (2.22)$$

e

$$\mathbb{P}_y = \frac{\beta_i \Delta y}{\epsilon} < 2, \quad (2.23)$$

onde

- β_i : é a componente do termo convectivo⁹,
- Δx e Δy : representam os espaçamentos da malha na horizontal e na vertical, respectivamente.
- ϵ : difusibilidade do meio que é dada em km^2/h .

Se as condições (2.22) e (2.23) não forem respeitadas podem ocorrer algumas oscilações numéricas que são indesejáveis para a resolução do problema, e alguns efeitos que podem conduzir a instabilidades ou até a não convergência. Porém existem algumas técnicas para lidar com os problemas de oscilações e instabilidades. Recomenda-se ler Brooks(1982) [8] para um aprofundamento maior sobre como utilizar estas técnicas para lidar com estes tipos de situação.

Diante de toda metodologia feita neste capítulo, foi possível realizar testes computacionais do problema modelo e obter resultados. No próximo capítulo serão apresentados, primeiramente, fatores importantes e relevantes para a elaboração do código computacional. Em seguida serão mostrados resultados computacionais considerando dois domínios: um cenário do problema modelo aplicado a um domínio retangular com o intuito de validação e um cenário aplicado à Lagoa Rodrigo de Freitas. Este capítulo tem como objetivo explicar a metodologia para a elaboração do programa e logo depois apresentar os dois programas realizados neste estudo: o programa de dispersão de poluição em uma lagoa de domínio retangular e na Lagoa Rodrigo de Freitas.

2.6 Metodologia para a Elaboração do Programa

Um resumo da metodologia utilizada para a elaboração do programa computacional será explicada abaixo esta é baseada na dissertação de Wolmuth [3], que utilizou a mesma

⁹Neste estudo será considerado $\beta = (u,w)$, onde $u = \frac{\Delta t}{2} * 0.3$ e $w = \frac{\Delta t}{2} * 0.3$

metodologia para modelar o comportamento evolutivo de poluentes na represa do Rio Manso.

Considere Ω dividido em N_e triângulos, tal que T_1, T_2, \dots, T_{N_e} , são dois a dois disjuntos. A escolha das funções testes se deu por utilizar elementos finitos triangulares de primeira ordem, onde cada ϕ_i satisfaz a seguinte condição:

$$\phi(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

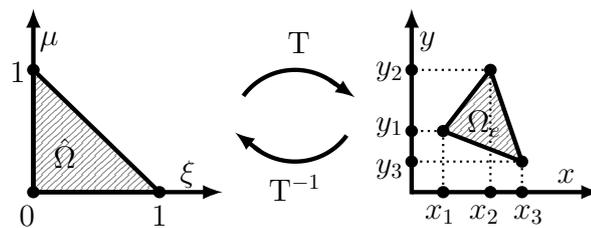
em que:

1. $\phi(x_i, y_i)$ é linear sobre cada triângulo e
2. (x_i, y_i) são as coordenadas de cada nó da malha - correspondendo aos vértices de cada elemento triangular.

Na montagem das matrizes de rigidez A e B, dadas por (2.21), cada elemento pode ser encontrado através de sucessões de produtos internos entre as funções base ou suas derivadas.

Com o objetivo de calcular as integrais localmente em cada elemento da malha, será utilizada uma transformação que leve do triângulo padrão, que será definido por T , com coordenada (ξ, η) para um triângulo qualquer de coordenadas (x, y) . Assim:

Figura 4: Representação da transformação que leva as coordenadas do triângulo T de referência a um triângulo qualquer, K.



Fonte: O autor.

$$\phi_1(x, y) = 1 + \frac{(y_2 - y_3)(x - x_1) - (x_2 - x_3)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}, \quad (2.24)$$

$$\phi_2(x, y) = 1 + \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} e \quad (2.25)$$

$$\phi_3(x, y) = 1 + \frac{(x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}. \quad (2.26)$$

A transformação de variáveis de T para K é dada por:

$$x(\xi, \eta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \quad (2.27)$$

e

$$y(\xi, \eta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta . \quad (2.28)$$

Define-se $\phi_i(\xi, \eta) = \phi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, que leva funções globais em locais. Pela transformação dada acima temos:

$$\phi_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta , \quad (2.29)$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \xi, \quad (2.30)$$

e

$$\phi_3(\xi, \eta) = \eta . \quad (2.31)$$

As derivadas das funções globais em funções das derivadas locais serão dadas por:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\xi} \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\eta} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\eta} \quad (2.33)$$

O que resulta em:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{1}{|\det J|} \cdot \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \cdot \frac{dy}{d\eta} - \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \cdot \frac{dy}{d\xi} \right\} \quad (2.34)$$

e

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial y} = \frac{1}{|\det J|} \cdot \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \cdot \frac{dx}{d\xi} - \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \cdot \frac{dx}{d\eta} \right\} . \quad (2.35)$$

J é definido como a matriz Jacobiana da transformação (2.32) e (2.33), então:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\xi} & \frac{dx}{d\eta} \\ \frac{dy}{d\xi} & \frac{dy}{d\eta} \end{bmatrix} .$$

A utilização da mudança de variável será importante na resolução das integrais

sobre um triângulo qualquer K para os cálculos relativos as submatrizes de rigidez (*smr*):

$$I_1 = (\phi_i | \phi_j) = \int \int_{\Omega} \phi_i(x, y) \cdot \phi_j(x, y) dy dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\phi_i(\xi, \eta) \cdot \phi_j(\xi, \eta)) d\eta d\xi, \quad (2.36)$$

$$I_2 = (\nabla \phi_i | \nabla \phi_j) = \int \int_{\Omega} \nabla \phi_i(x, y) \cdot \nabla \phi_j(x, y) dy dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\nabla \phi_i(\xi, \eta) \cdot \nabla \phi_j(\xi, \eta)) d\eta d\xi, \quad (2.37)$$

$$I_3 = (\phi_i | \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_j) = \int \int_{\Omega} \phi_i(x, y) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y) dy dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\phi_i(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(\xi, \eta)) d\eta d\xi \quad (2.38)$$

e

$$I_4 = (\phi_i | \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j) = \int \int_{\Omega} \phi_i(x, y) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y) dy dx = |J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (\phi_i(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(\xi, \eta)) d\eta d\xi . \quad (2.39)$$

De forma mais geral, resolvendo-se as integrais e as submatrizes de rigidez (*smr*) do sistema sobre o triângulo de referência T, obtém-se:

$$smr1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix},$$

dada pela resolução de (2.36).

A seguir será dada a submatriz de rigidez referente à resolução de (2.37):

$$smr2 = \begin{bmatrix} h_1 + h_2 - 2h_3 & -h_1 + h_3 & -h_2 + h_3 \\ -h_1 + h_3 & h_1 & -h_3 \\ -h_2 + h_3 & -h_3 & h_2 \end{bmatrix}$$

onde se define:

- $h_1 = ((y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2)$,
- $h_2 = ((y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2)$ e
- $h_3 = ((y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_1))$.

A resolução da integral de (2.38) é dada por:

$$smr3 = \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & -y_1 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}.$$

E, por fim, resolvendo a integral (2.39), encontra-se $smr4$, que é dada por:

$$smr4 = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Como neste estudo a perda de poluente na fronteira é nula, não é necessário realizar uma análise das integrais de fronteira. Porém para problemas em que seja necessário este tipo de análise recomenda-se ler a o estudo utilizado como base para escrever esta sessão (WOLMUTH [3]).

Pode-se então escrever o algoritmo para a resolução do problema da seguinte forma:

```

1)Defina os parâmetros de entrada
2)Ache as submatrizes de rigidez smr1,smr2,smr3,smr4 em cada elemento
, ou seja, para k de 1 ao número total de elementos.
3)Para ilocal de 1 até 3
    iglobal=malha2fer(itr,ilocal);
    Para jlocal de 1 até 3
        jglobal=malha2fer(itr,jlocal);
        soma=(dt*e/2*|jac|)*smr2(ilocal,jlocal) +(u*smr3(ilocal,jlocal)+...
            ...w*smr4(ilocal,jlocal))*|jac|*mdt/6*jac;
        A(iglobal,jglobal)=A(iglobal,jglobal)+stm*|jac|*smr1(ilocal,jlocal)+soma;
        B(iglobal,jglobal)=B(iglobal,jglobal)+stn*|jac|*smr1(ilocal,jlocal)-soma;
    fim
fim
fim

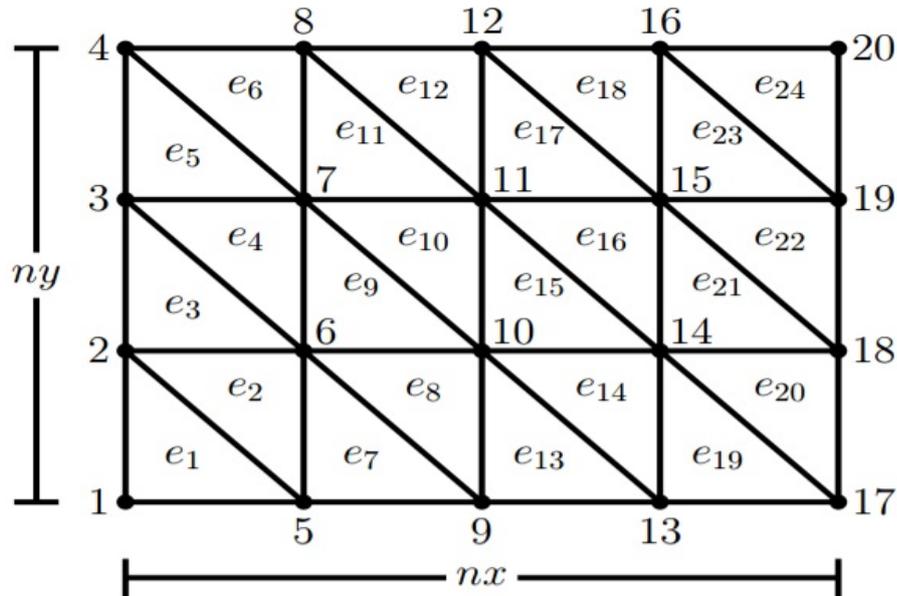
```

É importante ressaltar que os valores da constante de difusibilidade, da velocidade do vento, do decaimento e da condição de fronteira utilizados ao longo deste estudo foram retirados de WOLMUTH [3], PRESTES [12] e DINIZ [2].

2.7 Problema modelo em um Domínio Retangular

Como uma primeira abordagem para a elaboração do programa, foi adotada uma lagoa retangular com condição de fronteira análoga à do problema modelo. A discretização da lagoa deu-se de acordo com o exemplo abaixo.

Figura 5: Exemplo de divisão da malha Retangular.



Fonte: O autor.

A Figura 5 possui 20 nós, indicados em cada vértice, e na figura existem 24 elementos triangulares de primeira ordem. A largura do retângulo acima será indicada por L , a altura por H e N_e como o número total de elementos. Será definido neste estudo cada elemento triangular como $e_i, \forall i=1,2,\dots,N_e$.

Na Figura 5 é possível observar a nomenclatura nx e ny , com nx sendo o número de nós na horizontal que no exemplo é 5. O ny será indicado como o número de nós na vertical que no exemplo é 4. Com isso é possível achar o número total de nós da lagoa, que será definido como o número de nós na horizontal vezes o número de nós na vertical.

Outro recurso utilizado durante a implementação desse programa foi também definir uma distância entre os nós da horizontal, que foi definida como Δx e na vertical como Δy . Esse dado é importante para avaliar a condição de convergência do problema.

A matriz de coordenadas, definida como uma matriz com o número de linhas igual ao número total de nós e com 2 colunas, tem a função de armazenar as coordenadas de cada nó, onde o primeiro nó, o nó 1, tem coordenada $(0,0)$. O nó 7 da Figura 5, por exemplo, tem coordenada $(\Delta x, 2\Delta y)$. Além da matriz de coordenadas, é necessário destacar também a matriz de elementos ou matriz malha, que é a matriz que armazena cada elemento, que, no caso aqui adotado de elementos triangulares de primeira ordem, tem o número de elementos igual ao número de linhas e tem 3 colunas.

2.8 Cenários para o Domínio Retangular

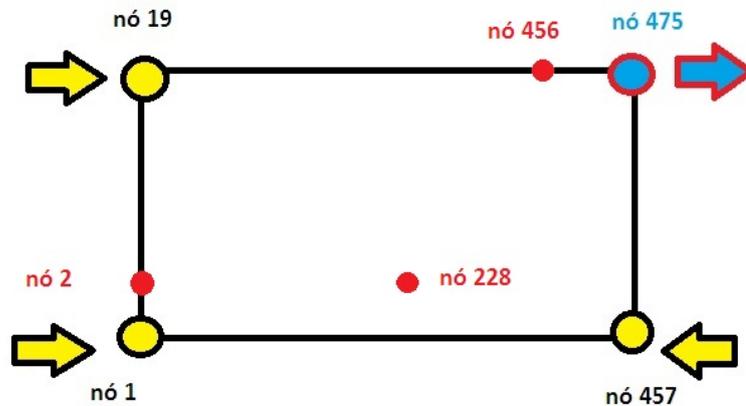
Com o intuito de validar a metodologia e o programa implementado, o problema modelo será resolvido em um cenário fictício, considerando um domínio retangular. O problema modelo será análogo ao da Seção 2 e com a mesma condição de fronteira, durante esta seção será utilizado um domínio retangular de largura 3 km e altura 2 km.

Para entender melhor o esquema de fonte de poluição deste estudo, na figura abaixo (Figura 6) tem-se um esquema de mapeamento do cenário. Os nós que serão utilizados como fontes de poluição serão os pontos marcados de amarelo, os nós que estão relacionados ao sumidouro estão indicados em azul, que é onde ocorre a saída de poluente e os nós em vermelho serão os analisados. Note que durante a análise da concentração de nós foi utilizado medida de massa diferente de kg, por isso a proporcionalidade.

2.8.1 Primeiro teste

Para este primeiro teste foi utilizado apenas o nó 1 como fonte de poluição e o sumidouro localizado no nó 475. Na Tabela 1 é apresentado os dados relativos ao primeiro teste.

Figura 6: Localização dos nós utilizados na lagoa retangular para sumidouro e fontes de poluição.



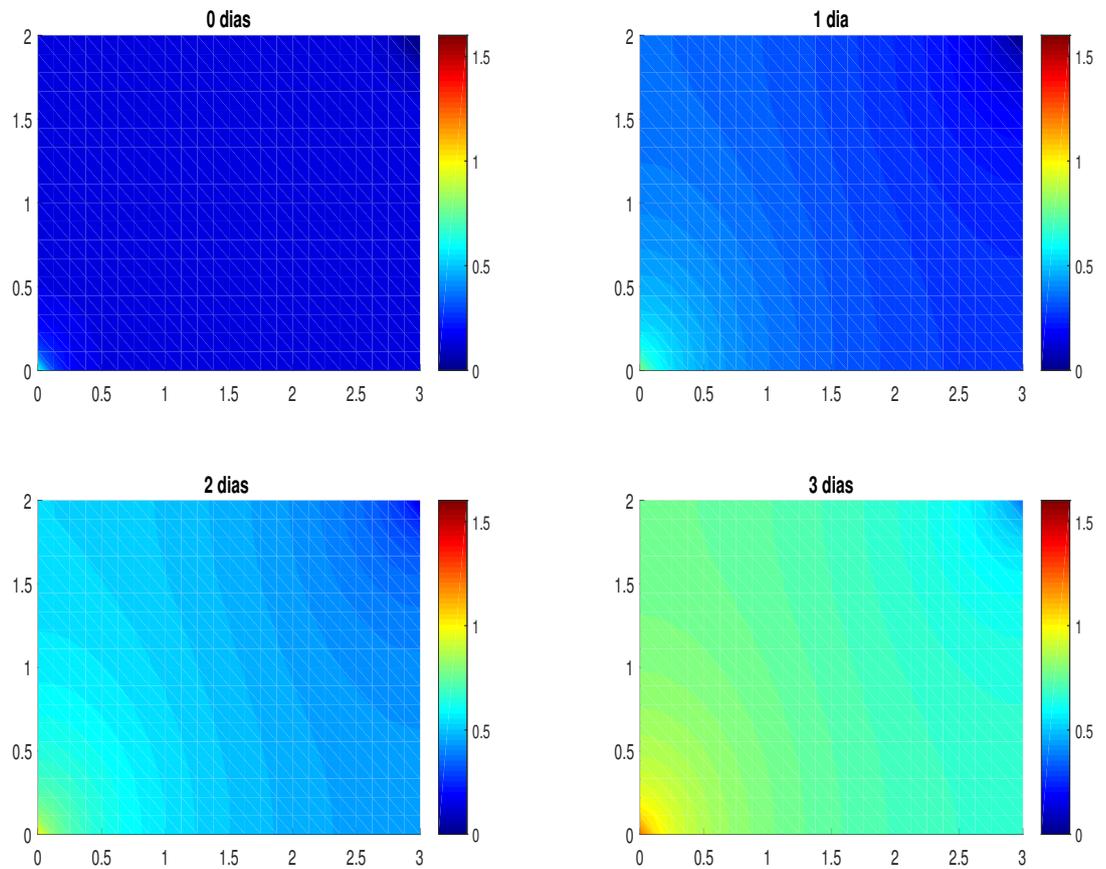
Fonte: O autor.

Tabela 1: Parâmetros no domínio retangular utilizados no primeiro teste

ϵ	0.4 km ² /h	nx	25 nós
w	0.0108 km/h	ny	19 nós
u	0.0108 km/h	N_e	864
δ	$10^{-10}h^{-1}$	nn	475 nós
C_0	0.14	Número de Dias	3
Velocidade	1.9 km/h	Tempo Final	72 h
Δx	0.125 km	Δy	0.111 km
Δt	0.072 h	Iteração máxima(itmax)	1000
Fonte de Poluição(nó 1)	0.14 kg/h	Sumidouro(nó 475)	-0.10 kg/h

A Figura 7 mostra o processo de dispersão de poluição ao longo de 3 dias, com os dados da Tabela 1. Pode-se observar que os nós próximos à única fonte de poluição aumentam sua concentração ao longo do tempo, o que pode ser constatado pela palheta de cores. Os nós próximos ao sumidouro apresentaram concentração menor que o restante da lagoa, o que era esperado.

Figura 7: Dispersão de poluição na Lagoa de Domínio Retangular ao longo de 3 dias (Primeiro teste).

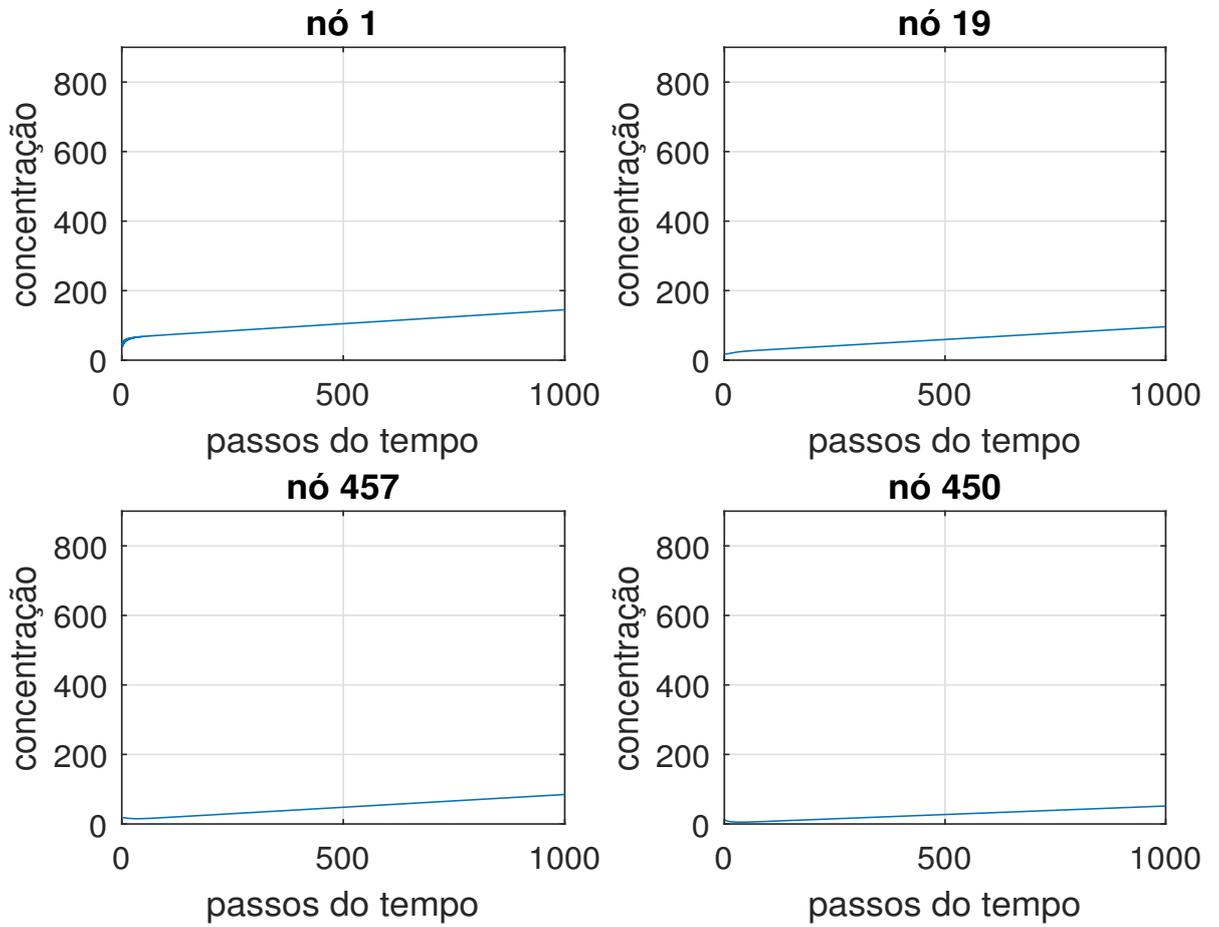


Fonte: O autor.

Para uma análise mais detalhada, também foi realizado um teste em relação à concentração do nó ao longo do tempo nos pontos destacados de vermelho na Figura 6. Na figura a seguir, é dado o comportamento da concentração do poluente ao longo dos passos do tempo e será analisado este fator.

Podemos observar que na Figura 8, o nó 1 e 19 apresentaram um aumento de concentração total maior que os outros dois casos, o que era esperado pois em um se encontra a fonte de poluição e o outro se encontra próximo. No nó 450 ocorre uma queda inicial da concentração assim como no nó 457, devido a proximidade do sumidouro, e logo em seguida ocorre um aumento.

Figura 8: Concentração ao longo dos passos do tempo dos nós no primeiro teste de Domínio Retangular.



Fonte: O autor.

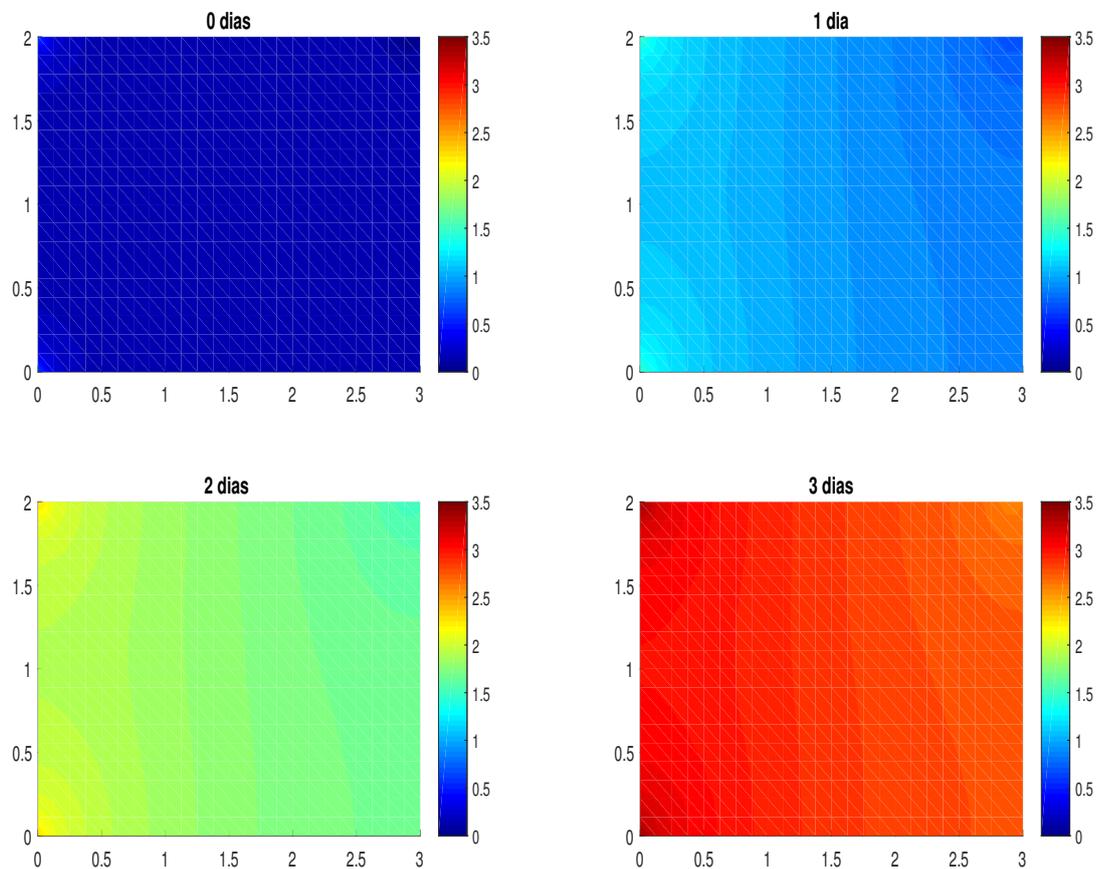
2.8.2 Segundo Teste

Para um segundo teste gerado para o domínio Retangular, a ideia foi utilizar os nós das duas fontes de poluição: nó 1 e nó 19 e além disso o nó 475 como sumidouro, sendo assim:

Tabela 2: Parâmetros no domínio retangular utilizados no segundo teste

ϵ	0.4 km ² /h	nx	25 nós
w	0.0108 km/h	ny	19 nós
u	0.0108 km/h	N_e	864
δ	$10^{-10}h^{-1}$	nn	475 nós
C_0	0.14	Número de Dias	3
Velocidade	1.9 km/h	Tempo Final	72 h
Δx	0.125 km	Δy	0.111 km
Δt	0.072 h	Iteração máxima(itmax)	1000
Fonte de Poluição(nó 1 e 19)	0.14 kg/h	Sumidouro(nó 475)	-0.10 kg/h

Figura 9: Dispersão de poluição na Lagoa de Domínio Retangular ao longo de 3 dias (Segundo teste).

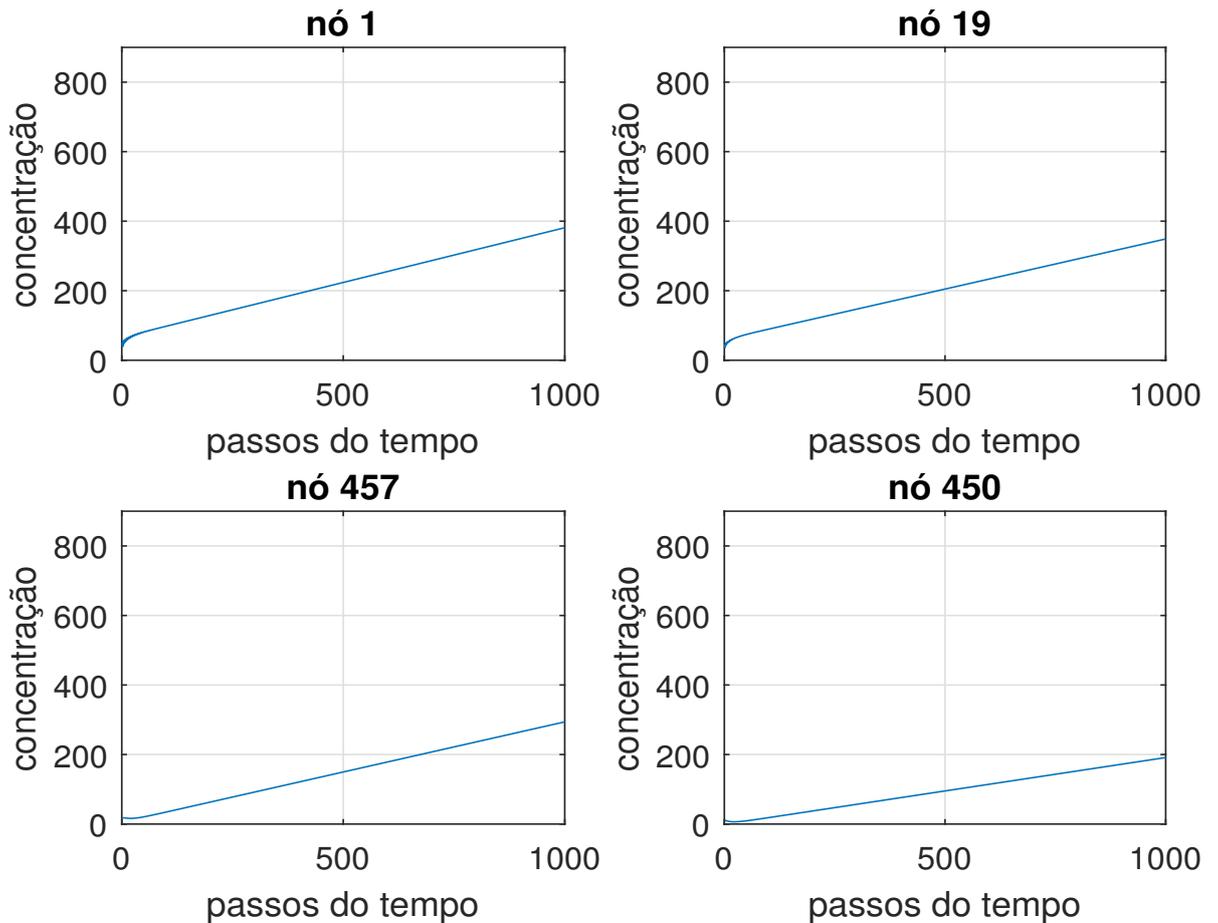


Fonte: O autor.

No segundo cenário foi acrescentada mais uma fonte de poluição, esta fonte se encontra no nó 19. É possível observarmos na Figura 9 que a concentração da lagoa foi maior que no primeiro teste, o que era esperado.

Para uma análise mais detalhada e comparativa com relação ao primeiro caso, também foi realizado um teste em relação a concentração dos nós ao longo do tempo nos pontos destacados de vermelho na Figura 6. Na Figura 10, é dado o comportamento da concentração do poluente ao longo dos passos do tempo:

Figura 10: Concentração ao longo dos passos do tempo dos nós no segundo teste de Domínio Retangular.



Fonte: O autor.

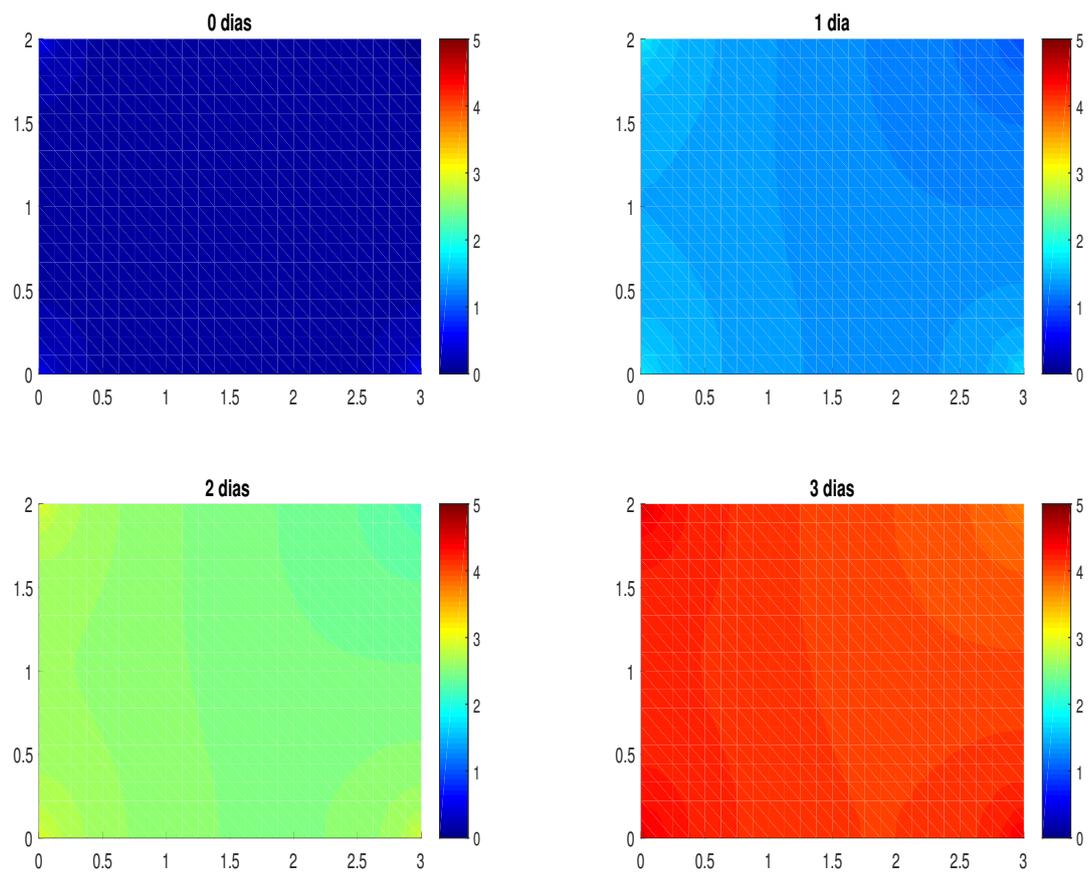
Comparando os dois cenários, observamos que a concentração no segundo cenário nos nós 1, 457 e 450, foi quase o dobro daquilo que ocorreu no primeiro caso. Observando o nó 19 é possível também observar um aumento significativo, pois agora o nó 19 é uma fonte de poluição. Observa-se também que os pontos próximos ao sumidouro, o nó 457 e o nó 450, obtiveram concentrações menores que os outros dois, o que também era esperado no teste.

2.8.3 Terceiro Teste

Tabela 3: Parâmetros no domínio retangular utilizados no terceiro teste

ϵ	0.4 km ² /h	nx	25 nós
w	0.0108 km/h	ny	19 nós
u	0.0108 km/h	N_e	864
δ	10 ⁻¹⁰ h ⁻¹	nn	475 nós
C_0	0.14	Número de Dias	3
Velocidade	1.9 km/h	Tempo Final	72 h
Δx	0.125 km	Δy	0.111 km
Δt	0.072 h	Iteração máxima(itmax)	1000
Fonte de Poluição(nó 1, 19 e 457)	0.14 kg/h	Sumidouro(nó 475)	-0.10 kg/h

Figura 11: Dispersão de poluição na Lagoa de Domínio Retangular ao longo de 3 dias (Terceiro teste).

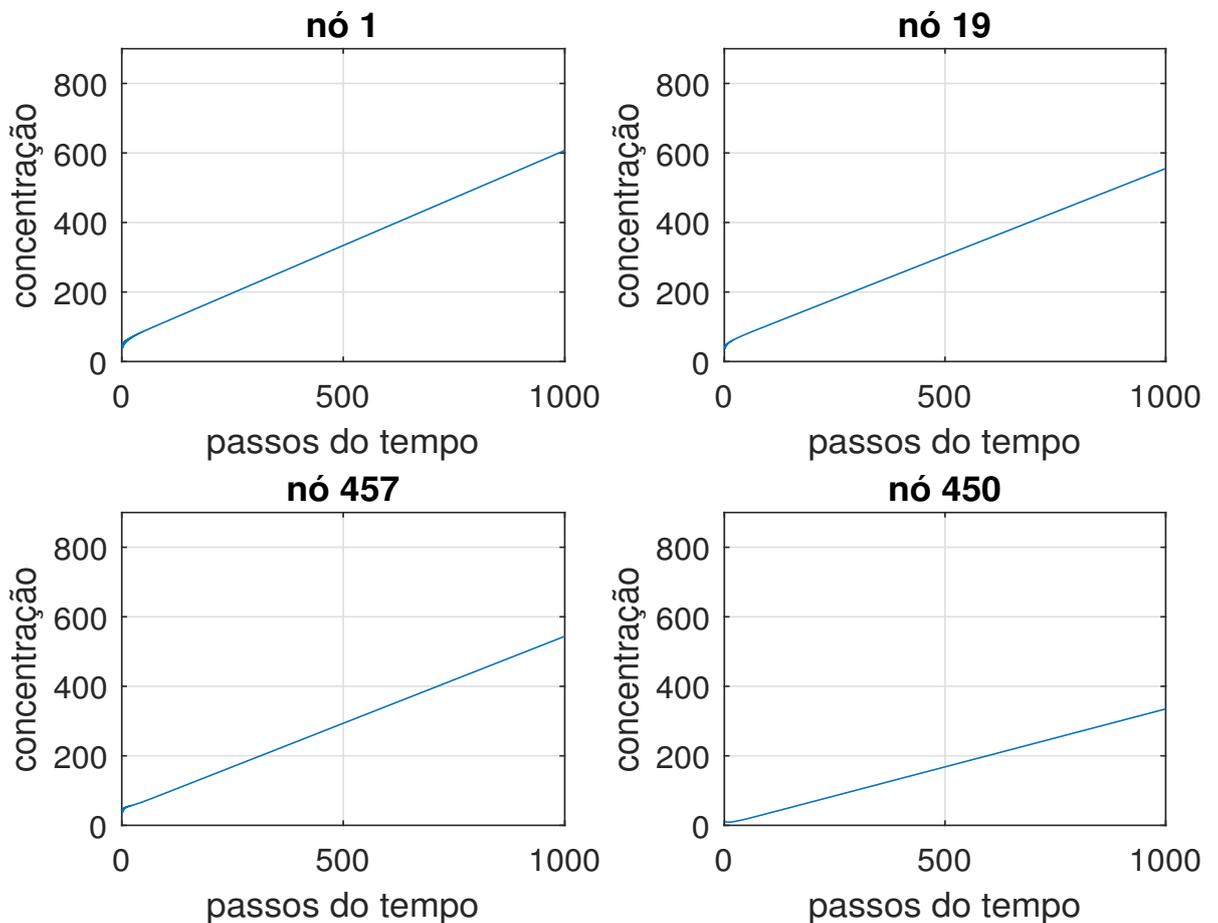


Fonte: O autor.

Neste terceiro cenário foi acrescentada mais uma fonte de poluição, esta fonte se encontra no nó 457. É possível observarmos que a concentração da lagoa foi maior nos testes anteriores, o que era esperado.

Para uma análise mais detalhada e comparativa com relação ao primeiro e segundo casos, também foi realizado um teste em relação a concentração dos nós ao longo do tempo. Na Figura 12, pode-se observar o desempenho da concentração ao longo do tempo:

Figura 12: Concentração ao longo dos passos do tempo dos nós no terceiro teste de Domínio Retangular.



Fonte: O autor.

Comparando os nós, observamos que a concentração no cenário 3 do nó 1 foi aproximadamente o triplo da concentração no primeiro cenário. Observando o nó 19 e o nó 457, pode-se observar que ambos obtiveram um aumento significativo. Observa-se também que nos nós próximos ao sumidouro, o nó 457 e o nó 450, houve concentrações menores que nos outros dois, o que também era esperado.

2.9 Refinamento da Malha

Com o objetivo de analisar o que ocorre à medida que se aumenta a quantidade de pontos da malha, será feito um refinamento da malha. Neste teste será utilizada uma única fonte de poluição, que se encontra no nó 1.

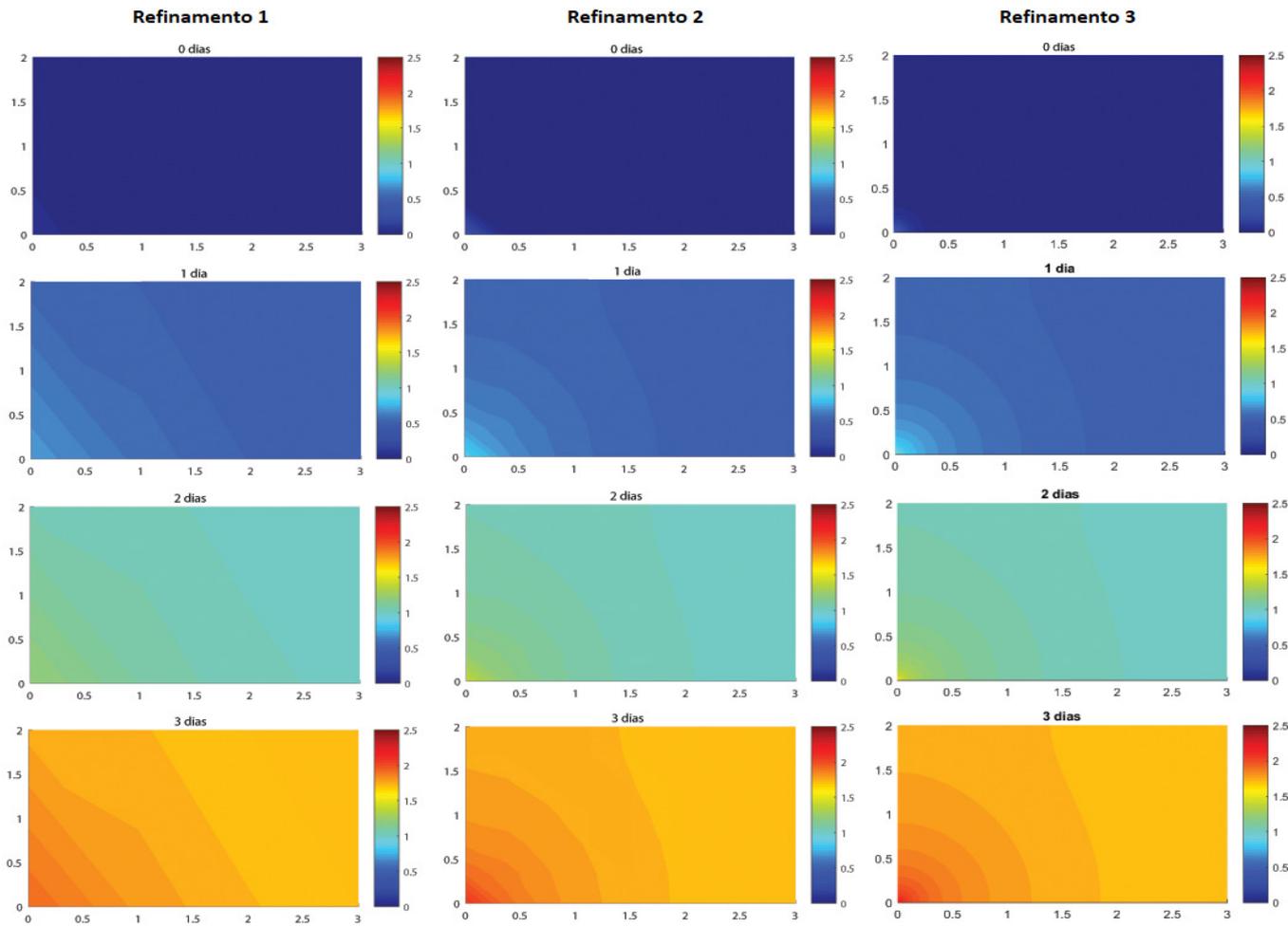
Tabela 4: Parâmetros que não se alteram utilizados durante o teste de refinamento.

ϵ	0.4 km ² /h	w	0.0108 km/h
u	0.0108 km/h	δ	$10^{-10}h^{-1}$
C_0	0.14	Número de Dias	3
Velocidade	1.9 km/h	Tempo Final	72 h
Δt	0.072 h	Iteração máxima(itmax)	1000
Fonte de Poluição(nó 1)	0.14 kg/h	Sumidouro	-

Tabela 5: Parâmetros que se alteram utilizados durante o teste de refinamento.

	Refinamento 1	Refinamento 2	Refinamento 3
N_e	6	96	9322
nx	4	9	80
ny	2	7	60
nn	8	63	4800
Δx	1 km	0.375 km	0.03797 km
Δy	2 km	0.333 km	0.03389 km
Tempo de Processamento	8 segundos	16.28 segundos	15 minutos

Figura 13: Análise dos testes de Refinamento da malha.



Fonte: O autor.

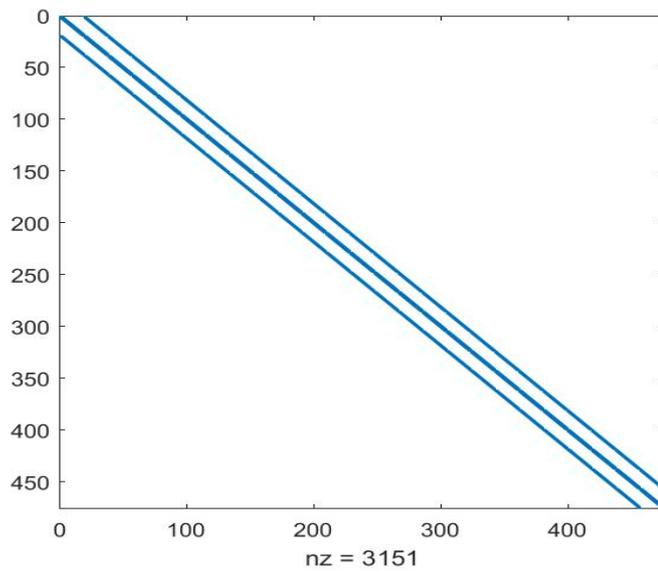
Comparando os testes, que possuem 9322 elementos apresentaram uma dispersão de poluição com um visual mais definido se comparados aos outros testes. A segunda comparação a ser feita é com relação ao tempo de processamento. Com poucos elementos se obtém o resultado de forma rápida, porém à medida que se aumenta o número de elementos, o programa demora mais para dar os resultados.

Pode-se notar que a partir de 96 elementos, a visualização da dispersão praticamente não se altera. Com isso conclui-se que quanto mais elementos melhor a qualidade dos resultados porém não é necessário utilizar muitos elementos como no caso 3, visto que a partir de determinado número de elementos se mantém uma boa solução.

2.10 Análise da Matriz Global do Domínio Retangular

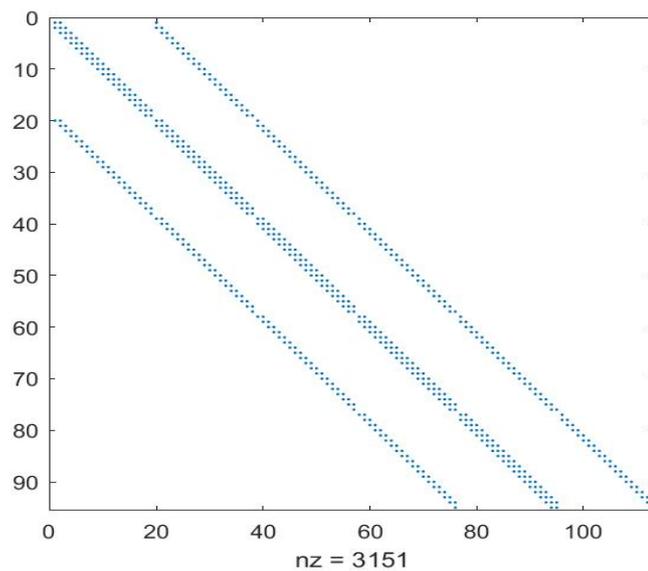
Com o objetivo de analisar a matriz global, foi utilizado o comando "spy" no MATLAB. Abaixo segue também como a matriz global do programa foi gerada.

Figura 14: Matriz global gerada pelo programa do caso de Domínio Retangular.



Fonte: O autor.

Figura 15: Matriz global, ampliada, gerada pelo programa do caso de Domínio Retangular.



Fonte: O autor.

Nas figuras acima pode-se notar pontos azuis que simbolizam pontos em que a matriz global tem valor, os pontos restantes são 0.

2.11 Estabilidade

Pode-se analisar também o número de Péclet aplicando os valores de w , u , Δt e Δx em (2.22) e (2.23), temos:

$$\Delta t * \Delta x < 5,333 \quad (2.40)$$

e

$$\Delta t * \Delta y < 5,333, \quad (2.41)$$

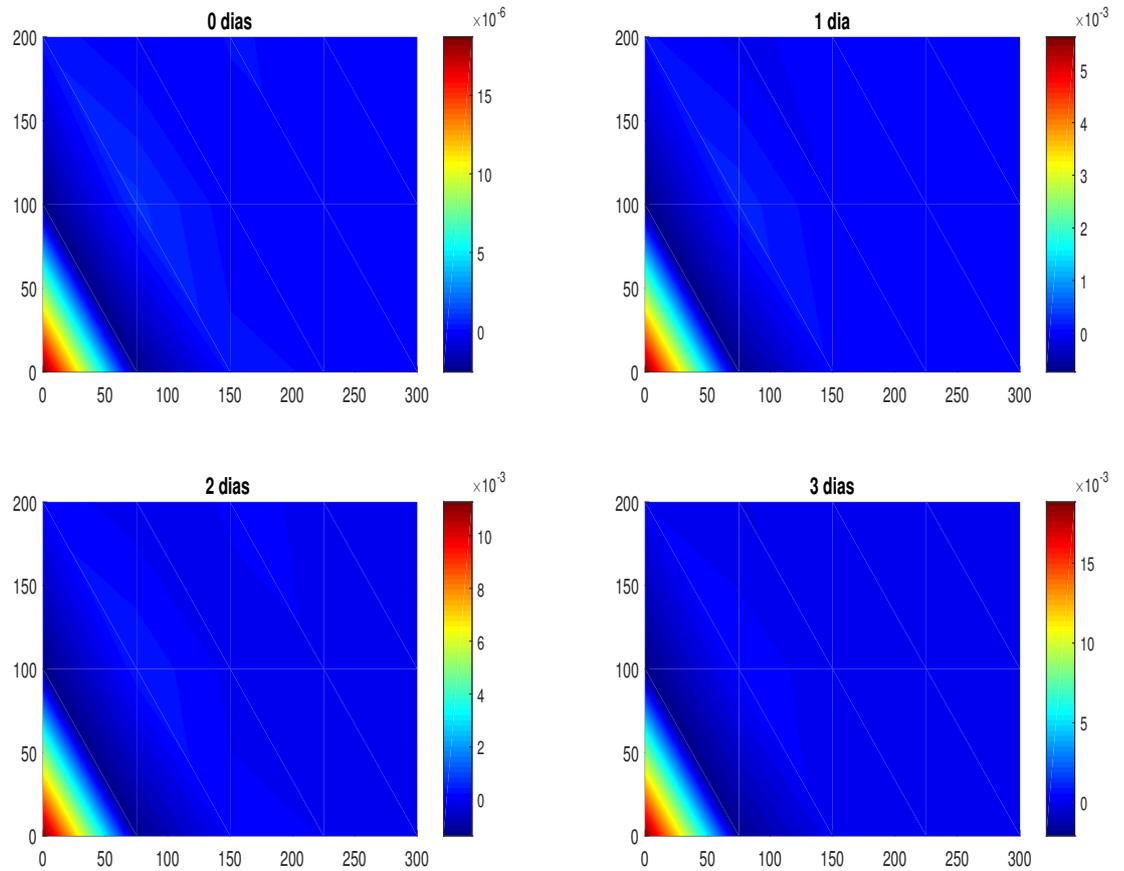
para a condição de estabilidade.

A seguir será apresentado um exemplo de um caso em que essa condição é extrapolada. Desta vez será tomada a largura como 300 km e a altura como 200 km, com os seguintes parâmetros:

Tabela 6: Parâmetros no domínio retangular utilizados extrapolados

ϵ	0.4 km ² /h	nx	5 nós
w	0.0108 km/h	ny	3 nós
u	0.0108 km/h	N_e	16
δ	$10^{-10}h^{-1}$	nn	15 nós
C_0	0.14	Número de Dias	3
Velocidade	1.9 km/h	Tempo Final	72 h
Δx	75 km	Δy	100 km
Δt	0.072 h	Iteração maxima(itmax)	1000
Fonte de Poluição(nó 1)	0.14 kg/h	Sumidouro	-

Figura 16: Exemplo de condição de estabilidade extrapolada.



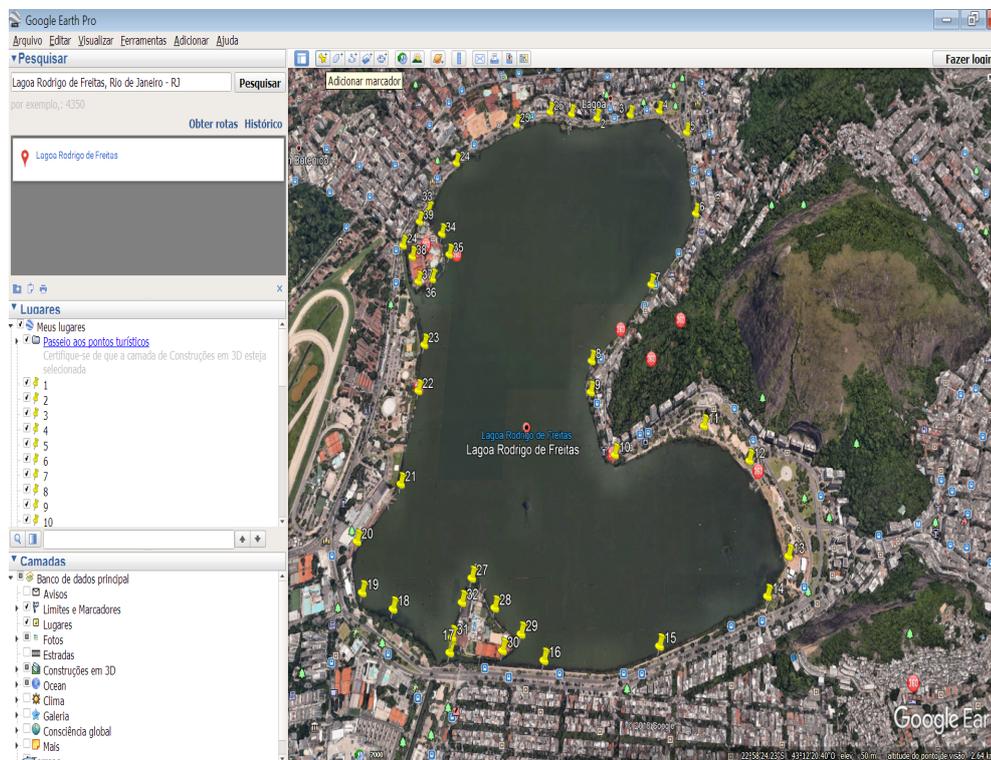
Fonte: O autor.

Na Figura 16 pode-se observar um caso em que a condição de convergência se encontra extrapolada, primeiramente observa-se que a dispersão se concentrou apenas próxima ao nó 1, uma pequena parte apresentou concentração negativa e o restante da lagoa ficou sem poluição. Pode-se observar que no ultimo dia também, além da concentração negativa inicial que continuou se mantendo, houve uma concentração negativa no meio da lagoa, um resultado totalmente incoerente.

3 PROBLEMA MODELO APLICADO À LAGOA RODRIGO DE FREITAS

Nesta primeira etapa dos resultados numéricos relativos à lagoa tema deste estudo, o objetivo era obter o contorno da lagoa e as ilhas de forma aproximada. Para se obter a melhor aproximação foi utilizado o programa *Google Earth Pro*^{®10} para identificar pontos adequados para o esboço do domínio, em seguida as coordenadas destes pontos foram usadas no software *GMSH* para gerar a figura aproximada da lagoa.

Figura 17: Imagem retirada do programa *Google Earth Pro*[®]

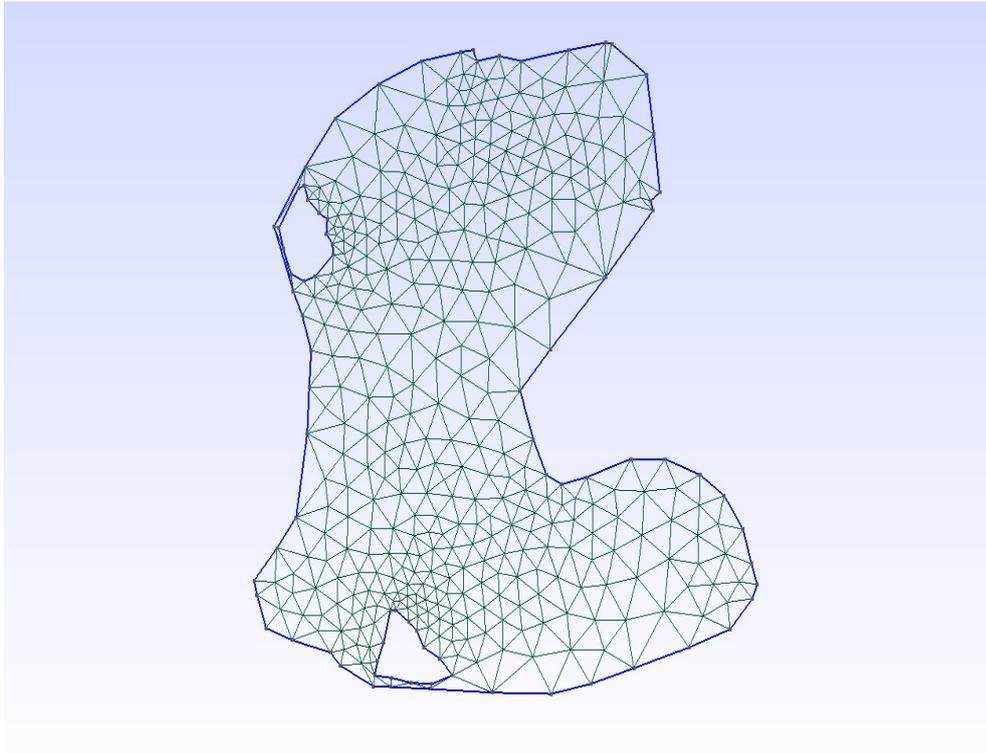


Fonte: O autor.

Feito isso, foi necessário ainda definir as etapas básicas que podem ser encontradas no manual do programa para gerar a domínio e a etapa seguinte foi dividir a lagoa em elementos triangulares de primeira ordem. Sendo assim, temos:

A malha gerada pelo *GMSH* no esquema abaixo é uma malha que aproxima a Lagoa Rodrigo de Freitas com 519 elementos triangulares de ordem P1 e 415 vértices. Na figura abaixo também é possível observar duas "manchas" na parte interior da lagoa onde não há elementos. Essas "manchas" correspondem às ilhas dos Caiçaras e Piraquê.

¹⁰Disponível em: <<https://www.google.com/intl/pt-BR/earth/versions/>>. Acesso em 3 dez. 2019.

Figura 18: Exemplo de uma malha gerada pelo *GMSH*

Fonte: O autor.

Pode-se refinar a malha de acordo com a preferência do usuário até um determinado número de triângulos, mas para este estudo esta será a malha (Figura 18) utilizada. O *GMSH* facilita na hora de realizar a simulação de dispersão de poluentes da lagoa, pois dentro do arquivo de saída é possível encontrar de forma organizada dados importantes para realizar a simulação computacional. Recomenda-se a utilização do manual¹¹, que pode ser obtido no site, para poder entender a codificação do arquivo de saída, como por exemplo, a matriz de coordenadas, matriz de elementos, linhas, número de nós, vértices, elementos, entre outros dados de que o usuário necessite.

3.1 Cenários para a Lagoa Rodrigo De Freitas

Por fim, chega-se ao objetivo principal deste estudo que é realizar a simulação de um cenário de dispersão de poluição na lagoa, abaixo será dada uma tabela com os respectivos dados utilizados no teste.

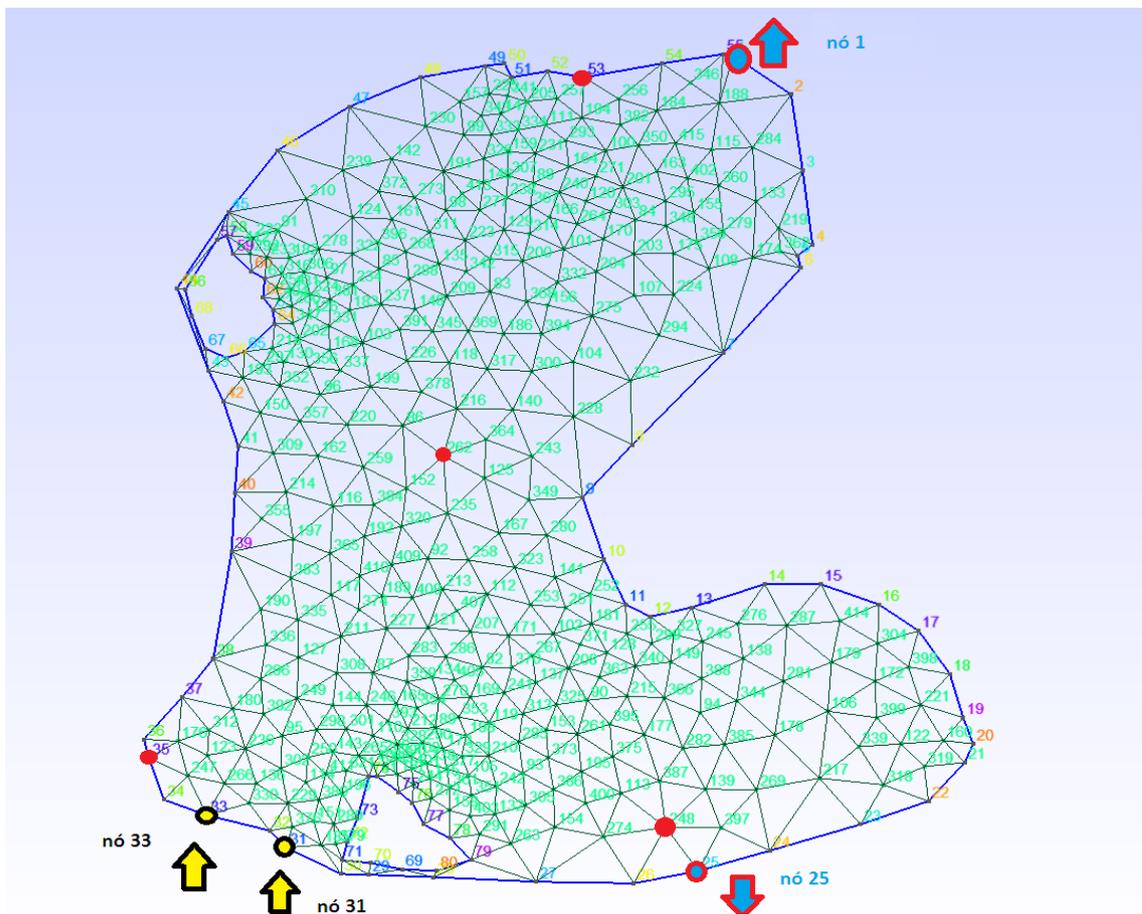
Os nós na tabela denominados sumidouros são locais nos quais ocorre saída de poluente. O primeiro teste abordado deu-se utilizando apenas as fontes de poluição da

¹¹Disponível em: <<http://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html>>. Acessado em 3 dez. 2019.

tabela (Tabela 7) como agentes poluidores.

Na figura abaixo pode-se ver a distribuição de nós sobre a lagoa, que será de grande auxílio para localizar os nós que serão fontes de poluição ou sumidouros. Abaixo seguem destacados em vermelho os nós que serão utilizados para análise de concentração de poluição neste estudo, as flechas azuis são os nós onde ocorre saída de poluente e as flechas em amarelo são os nós que são fonte de poluição. Importante ressaltar que todos os testes de concentração de nós ao longo do tempo, se encontram em medida de massa diferente de kg, devido a isso os resultados se encontram de forma proporcional aos casos em kg (o cenário da lagoa). A segunda observação é que em todos os testes, devido a limitação numérica, a velocidade foi reduzida para 0.3.

Figura 19: Esquema realizado para a Lagoa Rodrigo de Freitas.



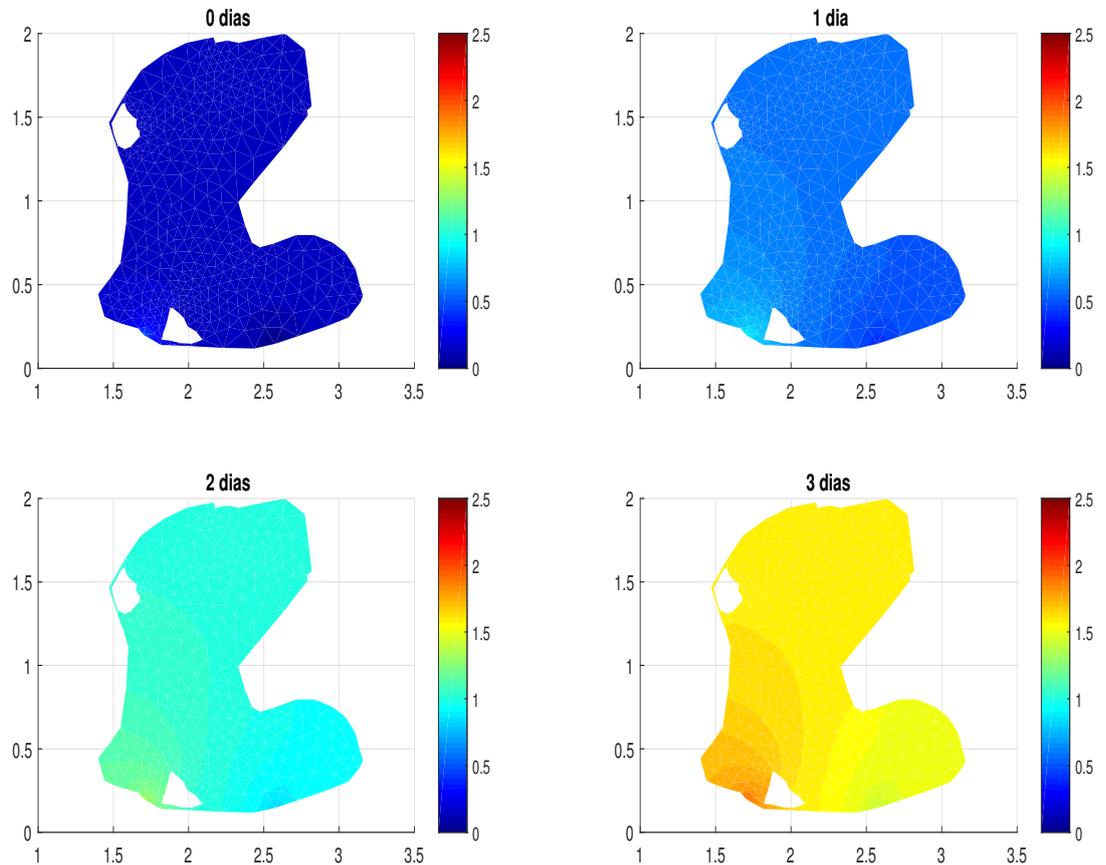
Fonte: O autor.

3.1.1 Primeiro Teste

Tabela 7: Dispersão de poluição na Lagoa de Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias (Primeiro teste).

ϵ	0.4 km ² /h	Velocidade	1.9 km/h
w	0.00360 km/h	Número de Dias	3
u	0.00360 km/h	N_e	751
δ	$10^{-10}h^{-1}$	nn	415 nós
C_0	0.14	Tempo Final	72 h
Δt	0.072 h	Passos de tempo	1000
Fonte de Poluição(nó 31)	0.14 kg/h	Sumidouro(nó 25)	-0.10 kg/h

Figura 20: Primeiro teste realizado na Lagoa Rodrigo de Freitas.

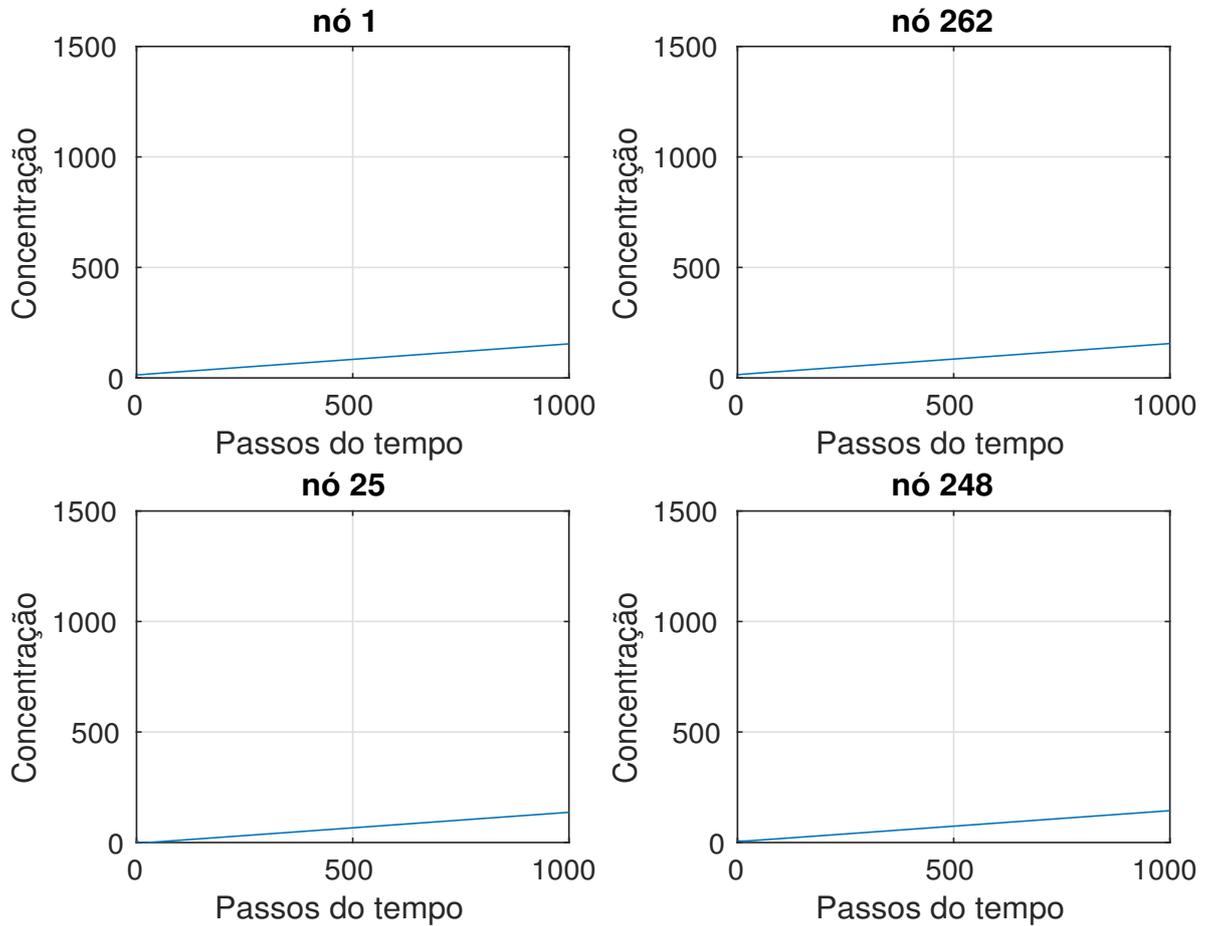


Fonte: O autor.

A Figura 20 acima representa o processo de dispersão de poluição ao longo de 3 dias. Observando a figura acima é possível observar o aumento de concentração de poluente na lagoa.

Para uma análise mais detalhada, será apresentada a seguir uma análise da concentração ao longo do tempo dos nós destacados em vermelho na Figura 19.

Figura 21: Concentração ao longo dos passos do tempo nos nós do primeiro teste na Lagoa Rodrigo De Freitas.



Fonte: O autor.

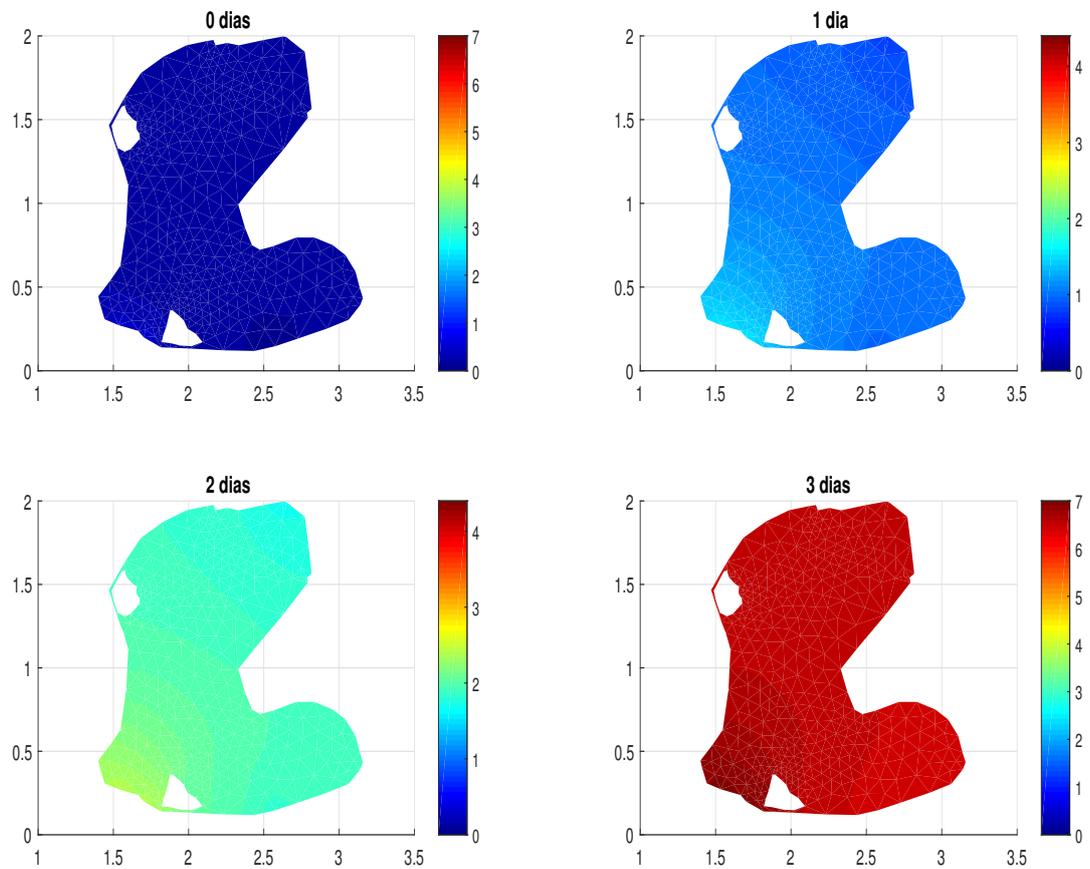
Observando Figura 21 é possível constatar que ocorreu o esperado, o aumento de concentração ao longo do tempo que se apresenta na Figura 20. É possível notar que os nós próximos ao sumidouro apresentaram uma pequena queda inicial seguida de um aumento.

3.1.2 Segundo Teste

Tabela 8: Parâmetros na Lagoa Rodrigo de Freitas utilizados no segundo teste

ϵ	$0.4 \text{ km}^2/h$	Velocidade	1.9 km/h
w	0.00360 km/h	Número de Dias	3
u	0.00360 km/h	N_e	751
δ	$10^{-10} h^{-1}$	nn	415 nós
C_0	0.14	Tempo Final	72 h
Δt	0.072 h	Passos de tempo	1000
Fontes de Poluição(nó 31 e 33)	0.14 kg/h	Sumidouro(nó 25)	-0.10 kg/h

Figura 22: Dispersão de poluição na Lagoa de Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias (Segundo teste).



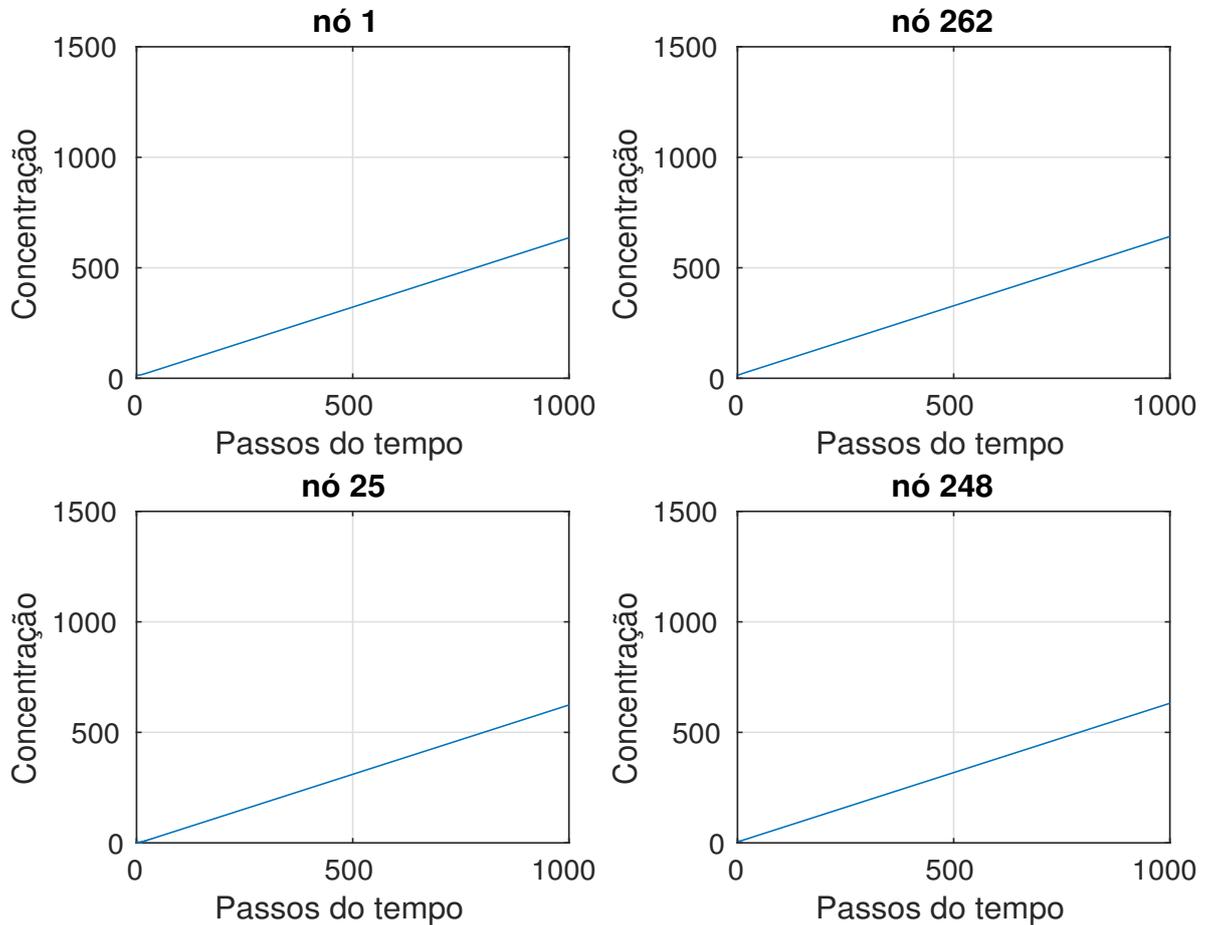
Fonte: O autor.

Com o aumento do número de fontes de poluição, a lagoa apresentou um aumento de concentração com relação ao primeiro teste, aproximadamente o quádruplo da concentração.

No segundo teste também foi realizada uma análise da concentração ao longo do

tempo dos nós destacados em vermelho na Figura 19.

Figura 23: Concentração ao longo dos passos do tempo nos nós do segundo teste na Lagoa Rodrigo De Freitas



Fonte: O autor.

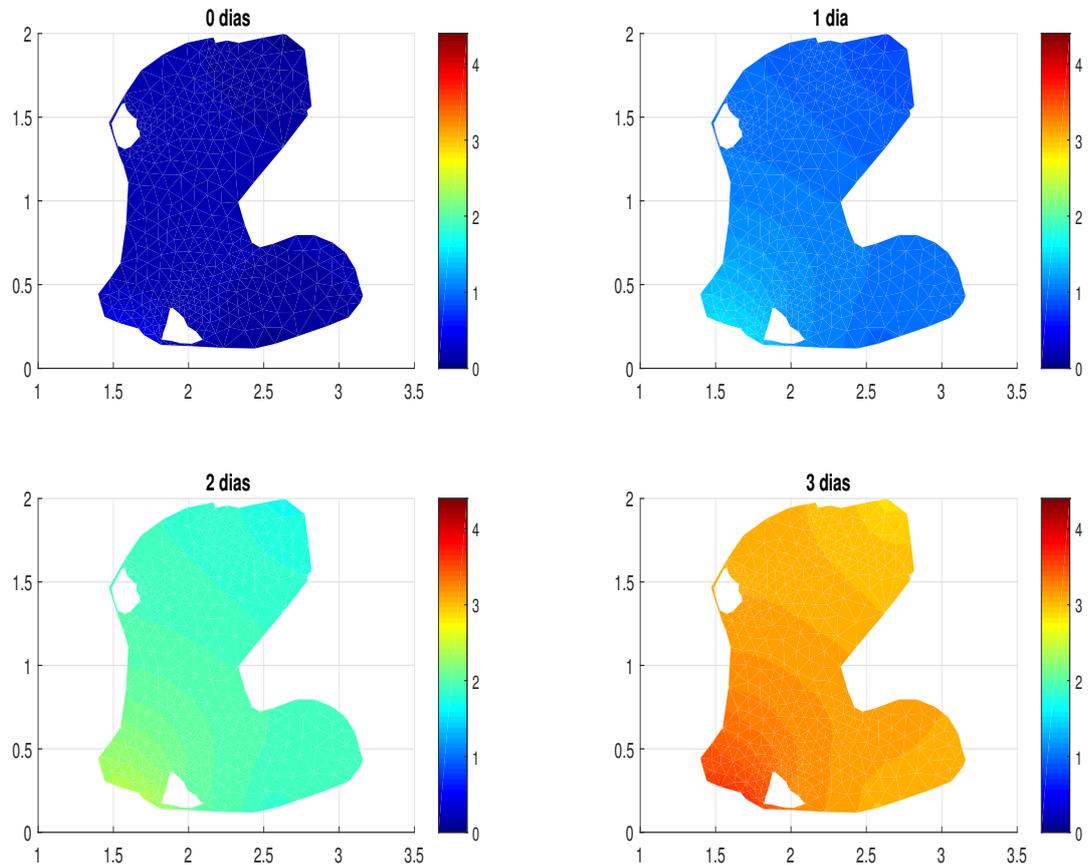
O primeiro fato a ser notado é que todos os nós apresentaram aumento de concentração, o que era esperado devido ao resultado anterior. Realizando uma breve análise é possível ver que todos os nós obtiveram uma concentração aproximadamente quatro vezes maior que o caso anterior.

3.1.3 Terceiro Teste

Tabela 9: Parâmetros na Lagoa Rodrigo de Freitas utilizados no terceiro teste

ϵ	0.4 km ² /h	Velocidade	1.9 km/h
w	0.00360 km/h	Número de Dias	3
u	0.00360 km/h	N_e	751
δ	$10^{-10} h^{-1}$	nn	415 nós
C_0	0.14	Tempo Final	72 h
Δt	0.072 h	Passos de tempo	1000
Fontes de Poluição(nó 31 e 33)	0.14 kg/h	Sumidouros (nó 1 e 25)	-0.10 kg/h

Figura 24: Dispersão de poluição na Lagoa de Rodrigo de Freitas ao longo de 3 dias (Terceiro teste).

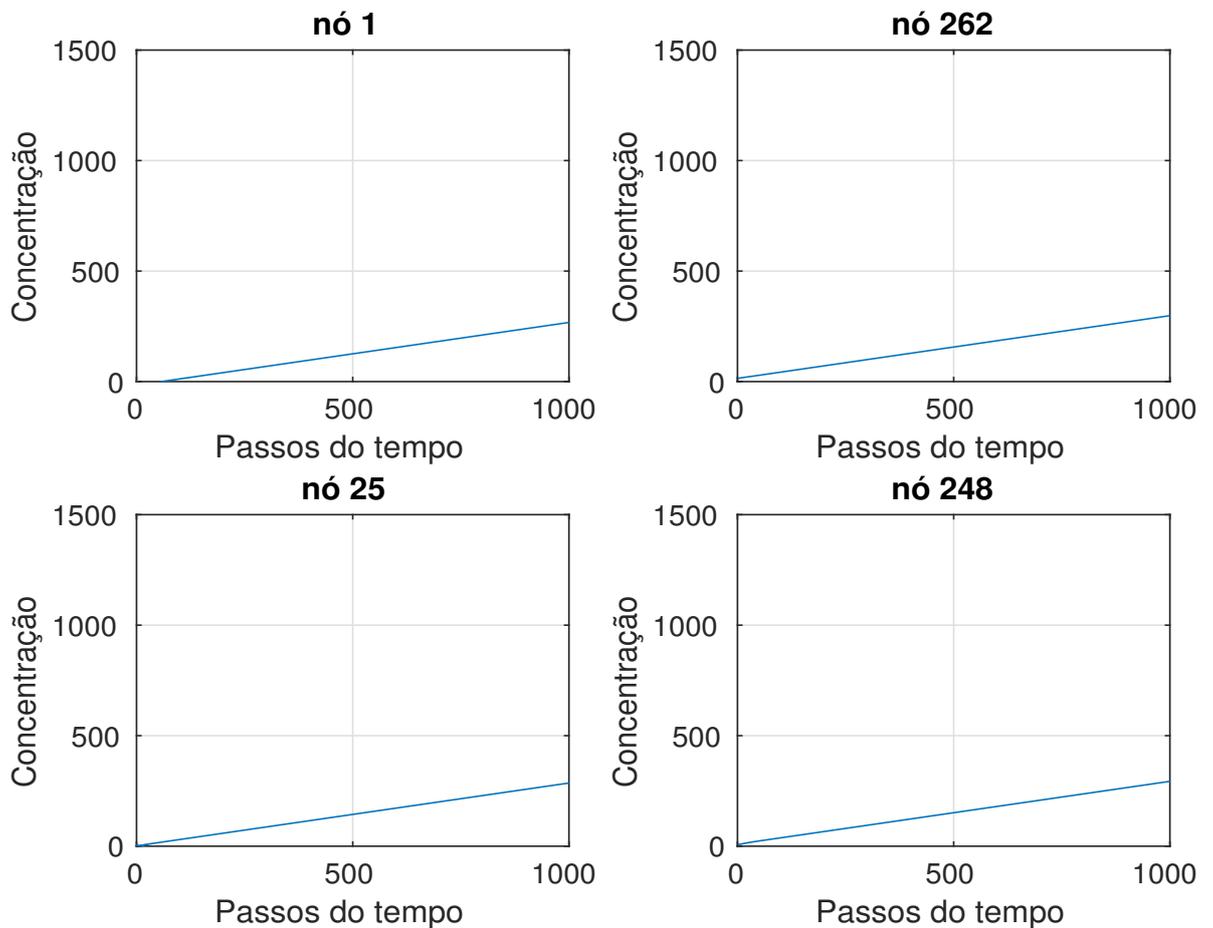


Fonte: O autor.

Comparando este último teste com os anteriores, primeiro podemos notar que o processo de dispersão de poluição foi menor; os dois sumidouros diminuíram a concentração total da lagoa em torno de 50%.

Com o intuito de explorar melhor o que ocorreu com as concentrações à medida que evoluiu o tempo, foi proposta também uma análise dos nós destacados na Figura 19. Feito isso temos os seguintes gráficos:

Figura 25: Concentração ao longo dos passos do tempo nos nós do terceiro teste na Lagoa Rodrigo De Freitas.

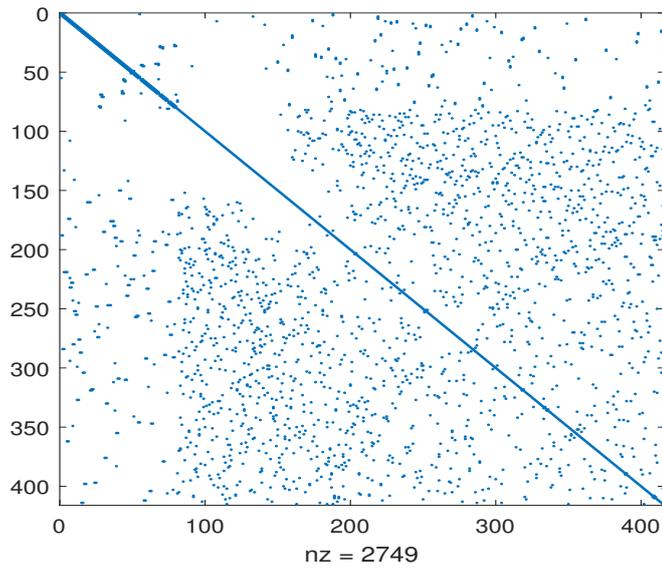


Fonte: O autor.

Observando a concentração ao longo dos tempos nos nós, observamos que a introdução de mais um sumidouro fez com que os nós também perdessem em torno de 50% da concentração em relação ao teste anterior.

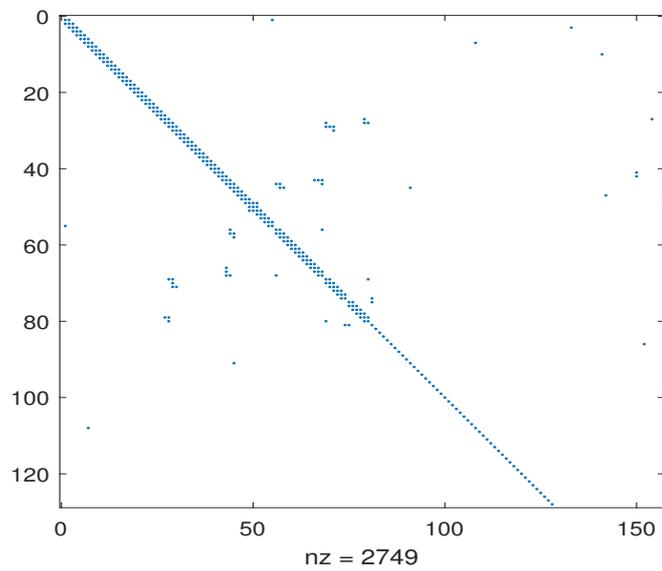
Assim como foi feito no domínio Retangular, foi realizada uma análise também da matriz global gerada:

Figura 26: Matriz global gerada pelo programa do caso de Domínio aproximado da Lagoa Rodrigo de Freitas.



Fonte: O autor.

Figura 27: Matriz global, ampliada, gerada pelo programa do caso de Domínio aproximado da Lagoa Rodrigo de Freitas.



Fonte: O autor.

Para a análise do número de Péclet foi aplicado Δt , u e w de todos os casos, que são iguais, em (2.22) e (2.23), temos:

$$\Delta x < 222,2222 \text{ km} \quad (3.1)$$

$$\Delta y < 222,2222 \text{ km} \quad (3.2)$$

4 CONCLUSÃO

A primeira conclusão a ser dada é que a medida que se aumenta o número de fontes de poluições, a dispersão de poluição na lagoa é mais efetiva. O inverso ocorre com sumidouros, aumentando-se o número de sumidouros, aumenta a filtragem de poluente.

Uma ressalva importante com relação aos testes, deve-se ter alguns cuidados, o primeiro é com relação ao domínio. Os dados utilizados estão dentro do critério de estabilidade e o domínio, mesmo que fosse o menor possível, estaria funcionando o programa deste estudo, porém se fosse utilizar um domínio maior com os mesmos dados, o programa poderia apresentar falhas. Aumentar o domínio sem aumentar o número de nós, implica de certa forma aumentar as distâncias entre eles, o que pode implicar na não estabilidade.

Uma outra análise importante a ressaltar é que sem o software *GMSH*, seria muito mais custoso fazer a partição da lagoa. O caso retangular por exemplo, é um caso que é possível realizar de forma manual mas um caso em que a área de estudo é um polígono irregular, se torna mais custoso realizar um procedimento manual.

Considera-se também, que com a utilização do *GMSH* é possível vislumbrar algumas novas possibilidades de estudos futuros como a possibilidade de trabalhar no \mathbb{R}^3 , utilizar diferentes condições de fronteira não só concreto, entre outras ideias que possam expandir esse trabalho a estudos afins. De forma geral esse algoritmo pode ser utilizado em um estudo de uma outra lagoa, com a condição que a matriz malha, a matriz coordenada, fronteiras e parâmetros sejam adequadas a simulação que o usuário deseja.

Um segundo aspecto destas conclusões é, também, de fundamental importância. O algoritmo aqui produzido pode se prestar, em primeiro lugar, para avaliar no computador e com muita antecedência, decisões ligadas a possíveis políticas públicas seja de descarte de material impactante vindo da região circunvizinha à Lagoa Rodrigo de Freitas bem como a desejáveis estratégias de redução de impacto, de melhoria de qualidade de vida, de uma revitalização do bioma.

A importância de ter um algoritmo que faça essas simulações evitam que consequências indesejáveis tenham que ser absorvidas pelo ecossistema da própria Lagoa, podendo serem realizados teste apenas quando o algoritmo indicar possíveis melhorias.

Um outro aspecto é que, do modo como o programa está estruturado, este algoritmo se presta a corpos aquáticos de mesmo porte e de mesmas características, bastando o uso

do *GMSH* para a triangulação desse novo domínio, multiplicando assim o efeito preventivo no tocante à adoção de medidas de contenção e correção de situações de impacto ambiental seja em regiões urbanas, seja em meios peri-urbanos e rurais. Assim, esta dissertação visa, a rigor, criar um instrumento matemático e algorítmico que possa contribuir de modo efetivo para a melhoria da qualidade de vida no entorno de meios aquáticos como o da Lagoa Rodrigo de Freitas.

REFERÊNCIAS

- [1] MARCHUCK, Guriï Ivanovich. **Mathematical Models in Environmental Problems, Studies in Mathematics and its Applications**, North Holland, 2008.
- [2] DINIZ, Geraldo Lúcio. **Dispersão de Poluentes num sistema ar-água: Modelagem, Aproximação e Aplicações**, Campinas: Unicamp, Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. 2003
- [3] WOLMUTH, Leidy Diane. **Modelagem e simulações do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: O caso da represa do Rio Manso**, Campinas: Unicamp, Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP.
- [4] CÉRÉGHINO, Régis et al. **The ecology of European ponds: Defining the characteristics of a neglected freshwater habitat**, In: **Pond Conservation in Europe. Hydrobiologia**, Dordrecht, Fevereiro de 2008. p. 1-6.
- [5] BIGGS, Williams P. et al. **15 anos de avaliação de lagoas na Grã-Bretanha: resultados e lições aprendidas com o trabalho de conservação da lagoa**. *Aquatic Conservation: Marine and Freshwater Ecosystems* 15: 693-714, 2005.
- [6] INFORZATO, Nelson Fernando et al. **Dispersão de Poluentes num sistema ar-água: Modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional**. Campinas: Unicamp, Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. 2008
- [7] RINCON, Mauro A.; ISHII, L.I.U. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Computação e Análise em Equações Diferenciais Parciais**, UFRJ, 2013.
- [8] BROOKS, Alexander N.; HUGHES, Thomas JR. **Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on**

the incompressible Navier-Stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 32, n. 1-3, p. 199-259, 1982.

- [9] MOTA, Fernanda Santos; FERREIRA, Marcilene Dantas; PEJON, Osni José. Análise das relações entre absorção de água e condutividade hidráulica dos solos em estudo de erosão. In: 14º SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA–(SIIC) do Departamento de Geotecnia da Escola de Engenharia de São Carlos - EESC-USP, 2010.
- [10] LEVEQUE, Randall J. **Finite difference methods for differential equations**, University of Washington, 1998.
- [11] LIONS, Jacques Louis. **Equations Différentielles Opérationnelles et Problèmes Aux Limites**, Springer-Verlag, 2013.
- [12] Prestes, Manoel Fernando Biagioni. **Dispersão de material impactante em meio aquático = modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional - Lagoa do Taquaral**. Campinas: UNICAMP, Dissertação de mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP. 2011.

APÊNDICE A

CÓDIGOS FONTE:

Domínio Retângular programa 1:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Aluno: João Paulo Alves Barros      Mestrado: Engenharia Mecânica      %
%Orientador: Cristiane Oliveira de faria  co-orientador: João Frederico %
%Dispersão de Poluentes Domínio Retângular( AO LONGO DE 3 DIAS)      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;          %para resetar e limpar tudo ao rodar o programa
format long;       %maior número de casas numéricas no resultado
%-----PARÂMETROS DE sig=1e-10;          %onde sig(delta) é o co
a=0.4;             %onde a(epsylon) é o coeficiente de difusão do poluente.
L=3; H=2;
nsx=24; nnx=nsx+1;
nsy=18; nny=nsy+1;
nn=nnx*nny; ntr=2*nsx*nsy;
dx=L/nsx; dy=H/nsy;
%-----MALHA DO DOMÍNIO-----%
ind=0;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        ind=ind+1;
        malha2fer(ind,1)=(i-1)*nny+j;
        malha2fer(ind,2)=i*nny+j;
        malha2fer(ind,3)=(i-1)*nny+j+1;
        ind=ind+1;
        malha2fer(ind,1)=i*nny+j+1;
        malha2fer(ind,2)=(i-1)*nny+j+1;
        malha2fer(ind,3)=i*nny+j;
    end
end
for i=1:nnx

```

```

xx=(i-1)*dx;
for j=1:nny
    yy=(j-1)*dy;
    ind=(i-1)*nny+j;
    coord(ind,1)=xx;
    coord(ind,2)=yy;
end
end
n=3
tfinal=24*n%12;           %tempo final em horas, 24 h x dias.
itmax =1000%64;          %número máximo de iterações do tempo.
%-----PARÂMETROS DA DISCRETIZAÇÃO-----%
dt=tfinal/itmax;        %intervalo de tempo.
mdt= dt/2;              %facilitar implementação em Crank.
%-----PARÂMETROS QUE INDEPENDEM DAS COORDENADAS-----%
c1=mdt*sig;             %Coeficiente de (phi_i|phi_j).
c2=mdt*a;               %Coeficiente de (grad phi_i|grad phi_j).
Vx=mdt*0.3;             %Coeficiente de (d phi_i/dx |phi_j).
Vy=mdt*0.3;;           %Coeficiente de (d phi_i/dy |phi_j).
stm=(1+c1);             %Coeficiente a esquerda (fi_i| fi_j).
stn=(1-c1);             %Coeficiente a direita (fi_i| fi
%-----SUBMATRIZES DE RIGIDEZ-----%
%1) (Phi_i)(phi_i):
mfi=[1/12 1/24 1/24;
     1/24 1/12 1/24;
     1/24 1/24 1/12];
%%-----AUXÍLIO PARA A MONTAGEM DE MATRIZES DO SISTEMA-----%%
%sparse = preencher a matriz
A= sparse(nn,nn);
B= sparse(nn,nn);
c=zeros(nn,1);
x=zeros(3,1);

```

```

y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr = 1:ntr          %REPETINDO: ntr é o numero total de triângulos
  for il=1:3;           %índices locais, 3 de 3 vértices.
    ig=malha2fer(itr,il); %ig é o índice global
    x(il)=coord(ig,1);
    y(il)=coord(ig,2);
  end
  jac=det([(x(2)-x(1)) (x(3) - x(1)); %Jacobiano
           (y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
  s=abs(jac);          %valor absoluto do Jacobiano.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%------CALCULO DAS ENTRADAS PARA AS SUBMATRIZES RESTANTES-----%
  dfdx(1)=y(2)-y(3) ; dfdy(1)=x(3)-x(2);
  dfdx(2)=y(3)-y(1) ; dfdy(2)=x(1)-x(3);
  dfdx(3)=y(1)-y(2) ; dfdy(3)=x(2)-x(1);
%------OBTENDO AS SUBMATRIZES DE RIGIDEZ RESTANTES-----%
%3) ( grad phi_i | grad phi_i):
  gra1 =[(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));
         (dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2) (dfdx(2)*dfdx(3));
         (dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
  gra2 =[(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));
         (dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2) (dfdy(2)*dfdy(3));
         (dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
  mgf=gra1 + gra2;
%4) ( d phi_i/dx | phi_i):
  mdx= [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
        dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
        dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%5) ( d phi_i/dy | phi_i):
  mdy= [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];

```

```

        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%%-----ACHANDO A E B-----%
    for il=1:3
        ig=malha2fer(itr,il);
        for jl=1:3
            jg=malha2fer(itr,jl);
            soma=(c2/s)*mgf(il,jl)+(Vx*mdx(il,jl)+(Vy*mdy(il,jl)))*s*mdt/(6*jac);
            A(ig,jg)= A(ig,jg) + stm*s*mfi(il,jl)+soma;
            B(ig,jg)=B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
        end
    end
end
%%-----%
%6) Poluição inicial:
for i =1:nn
    c0(i,1)=0.14;
end

%7) termo fonte:
d=zeros(nn,1)
for i =1:nn
    d(i,1)=0;
end
%Fontes de poluição da tabela
d(1,1)=0.14;

d=dt*d;

for it = 1:itmax
    c=A\(B*c0+d);
    c0=c;
    if it==1

```

```
subplot(2,2,1)
trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c), title(' 0 dias'),view(0,90),...
...,colormap('jet'),shading interp,colorbar,axis([0 1500 0 1600]),...
,...caxis([-0.5 2.5]);
end
pause(0.1)
if it==3000
subplot(2,2,2)
trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c),title(' 80 dias'),view(0,90),...
...,colormap('jet'),shading interp,colorbar,axis([0 1500 0 1600]),...
,...caxis([-0.5 2.5]);
end
if it==6000
subplot(2,2,3)
trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c),title(' 160 dias'),view(0,90),...
...,colormap('jet'),shading interp,colorbar,axis([0 1500 0 1600]),...
,...caxis([-0.5 2.5]);
end
if it==9000
subplot(2,2,4)
trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c),title('240 dias'),view(0,90),...
...,colormap('jet'),shading interp,colorbar,axis([0 1500 0 1600]),...
,...caxis([-0.5 2.5]);
end
end
```

Domínio Retângular programa 2:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Aluno: João Paulo Alves Barros      Mestrado: Engenharia Mecânica      %
%Orientador: Cristiane Oliveira de faria  co-orientador: João Frederico %
%Dispersão de Poluentes Domínio Retângular( AO LONGO DE 3 DIAS)      %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;          %para resetar e limpar tudo ao rodar o programa
format long;       %maior número de casas numéricas no resultado
%-----PARÂMETROS DE Entrada-----%
sig=1e-10;         %onde sig(delta) é o coeficiente de decaimento do poluente.
a=0.4;            %onde a(epsylon) é o coeficiente de difusão do poluente.
L=3; H=2;
nsx=24; nnx=nsx+1;
nsy=18; nny=nsy+1;
nn=nnx*nny; ntr=2*nsx*nsy;
dx=L/nsx; dy=H/nsy;
%-----MALHA DO DOMÍNIO-----%
ind=0;
for i=1:nsx
    for j=1:nsy
        ind=ind+1;
        malha2fer(ind,1)=(i-1)*nny+j;
        malha2fer(ind,2)=i*nny+j;
        malha2fer(ind,3)=(i-1)*nny+j+1;
        ind=ind+1;
        malha2fer(ind,1)=i*nny+j+1;
        malha2fer(ind,2)=(i-1)*nny+j+1;
        malha2fer(ind,3)=i*nny+j;
    end
end
end
for i=1:nnx
    xx=(i-1)*dx;

```

```

for j=1:nny
    yy=(j-1)*dy;
    ind=(i-1)*nny+j;
    coord(ind,1)=xx;
    coord(ind,2)=yy;
end
end
n=3
tfinal=24*n;           %tempo final em horas, 24 h x dias.
itmax =1000%64;       %número máximo de iterações do tempo.
%-----PARÂMETROS DA DISCRETIZAÇÃO-----%
dt=tfinal/itmax;      %intervalo de tempo.
mdt= dt/2;
%-----PARÂMETROS QUE INDEPENDEM DAS COORDENADAS-----%
c1=mdt*sig;           %Coeficiente de (phi_i|phi_j).
c2=mdt*a;             %Coeficiente de (grad phi_i|grad phi_j).
Vx=mdt*0.3;          %Coeficiente de (d phi_i/dx |phi_j).
Vy=mdt*0.3*;         %Coeficiente de (d phi_i/dy |phi_j).
stm=(1+c1);          %Coeficiente a esquerda (fi_i| fi_j).
stn=(1-c1);          %Coeficiente a direita (fi_i| fi_j) .
% verificando núcleo de Péclet
Pe=[Vx*dx/a Vy*dy/a]
%-----SUBMATRIZES DE RIGIDEZ-----%
%1) (Phi_i)(phi_i):
mfi=[1/12 1/24 1/24;
     1/24 1/12 1/24;
     1/24 1/24 1/12];
%%-----AUXÍLIO PARA A MONTAGEM DE MATRIZES DO SISTEMA-----%%
A= sparse(nn,nn);
B= sparse(nn,nn);
c=zeros(nn,1);
x=zeros(3,1);

```

```

y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr = 1:ntr
    for il=1:3;
        ig=malha2fer(itr,il);
        x(il)=coord(ig,1);
        y(il)=coord(ig,2);
    end
    jac=det([(x(2)-x(1)) (x(3) - x(1));
             (y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s=abs(jac);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----CALCULO DAS ENTRADAS PARA AS SUBMATRIZES RESTANTES-----%

    dfdx(1)=y(2)-y(3) ; dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1) ; dfdy(2)=x(1)-x(3);
    dfdx(3)=y(1)-y(2) ; dfdy(3)=x(2)-x(1);
%-----OBTENDO AS SUBMATRIZES DE RIGIDEZ RESTANTES-----%
%3) ( grad phi_i | grad phi_i):
    gra1 =[(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));
           (dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2) (dfdx(2)*dfdx(3));
           (dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
    gra2 =[(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));
           (dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2) (dfdy(2)*dfdy(3));
           (dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
    mgf=gra1 + gra2;
%4) ( d phi_i/dx | phi_i):
    mdx= [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
          dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
          dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%5) ( d phi_i/dy | phi_i):
    mdy= [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);

```

```

        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%%-----ACHANDO A E B-----%
    for il=1:3
        ig=malha2fer(itr,il);
        for jl=1:3
            jg=malha2fer(itr,jl);
            soma=(c2/s)*mgf(il,jl)+(Vx*mdx(il,jl)+(Vy*mdy(il,jl)))*s*mdt/(6*jac);
            A(ig,jg)= A(ig,jg) + stm*s*mfi(il,jl)+soma;
            B(ig,jg)=B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;

        end
    end
end
%%-----FONTE DE POLUIÇÃO-----%

d=zeros(nn,1)
%Fontes de poluição da tabela
d(1,1)=0.14;
d(9,1)=-0.5;
d(19,1)=0.4;
d(227,1)=-0.5;
d(192,1)=-0.6;
d(457,1)=0.4;
d(465,1)=-0.4;
d(475,1)=0.4;
d=dt*d;
for it = 1:itmax
    c=A\ (B*c0+d);
    c0=c;
    ver1(it)=p1(9);
    ver2(it)=p1(227);

```

```
ver3(it)=p1(192);
ver4(it)=p1(465);
ver5(it)=p1(2);
ver6(it)=p1(228);
ver7(it)=p1(456);
ver8(it)=p1(475);
figure(2);
subplot(2,2,1)
plot(ver5), title('nó 2'),ylabel ('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...
...,grid on ;
subplot(2,2,2)
plot(ver6),title('nó 228'),ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...
...,grid on ;
subplot(2,2,3)
plot(ver7),title('nó 456'),ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...
...,grid on ;
subplot(2,2,4)
plot(ver8),title('nó 475'),ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...
...,grid on ;
end
```

APÊNDICE B

Lagoa Rodrigo de Freitas programa 1:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Aluno: João Paulo Alves Barros      Mestrado: Engenharia Mecânica      %
%Orientador: Cristiane Oliveira de faria  co-orientador: João Frederico %
%Projeto: Dispersão de Poluentes na lagoa rodrigo de freitas          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;          %para resetar e limpar tudo ao rodar o programa
t0=cputime;
format long;       %maior número de casas numéricas no resultado
%-----PARÂMETROS DE ENTRADA-----%
%dados para testes
sig=1e-8;          %onde sig(delta) é o coeficiente de decaimento do poluente.
a=0.4;            %onde a(epsylon) é o coeficiente de difusão do poluente.
%-----MALHA DO DOMÍNIO-----%
%Matriz coordenada
coord= %insira sua matriz coordenada
%matriz malha:
malha2fer = %insira sua matriz malha ou de elementos
ntr= lenght(malha2fer)
nn = lenght(coord)
%-----PARÂMETROS DA DISCRETIZAÇÃO-----%
n=3
tfinal=24*n;      %tempo final em horas, 24 h x dias.
itmax =1000;      %número máximo de iterações do tempo.
dt=tfinal/itmax;  %intervalo de tempo.
mdt= dt/2;        %facilitar implementação em Crank.

%-----PARÂMETROS QUE INDEPENDEM DAS COORDENADAS-----%

c1=mdt*sig;       %Coeficiente de (phi_i|phi_j).

```

```

c2=mdt*a; %Coeficiente de (grad phi_i|grad phi_j).
Vx=mdt*0.3; %Coeficiente de (d phi_i/dx |phi_j).
Vy=mdt*0.3; %Coeficiente de (d phi_i/dy |phi_j).
stm=(1+c1); %Coeficiente a esquerda (fi_i| fi_j).
stn=(1-c1); %Coeficiente a direita (fi_i| fi_j) .
%-----SUBMATRIZES DE RIGIDEZ-----%

%1) (Phi_i)(phi_i):
mfi=[1/12 1/24 1/24;
      1/24 1/12 1/24;
      1/24 1/24 1/12];
%%-----AUXÍLIO PARA A MONTAGEM DE MATRIZES DO SISTEMA-----%%
%sparse = preencher a matriz
A= sparse(nn,nn);
B= sparse(nn,nn);
c=zeros(nn,1);
x=zeros(3,1);
y=x;
tt=cputime;
for itr = 1:ntr
    for il=1:3;
        ig=malha2fer(itr,il);
        x(il)=coord(ig,1);
        y(il)=coord(ig,2);
    end
    jac=det([(x(2)-x(1)) (x(3) - x(1));
              (y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s=abs(jac);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----CALCULO DAS ENTRADAS PARA AS SUBMATRIZES RESTANTES-----%
    dfdx(1)=y(2)-y(3) ; dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1) ; dfdy(2)=x(1)-x(3);

```

```

dfdx(3)=y(1)-y(2) ; dfdy(3)=x(2)-x(1);
%%-----OBTENDO A SUBMATRIZ DE RIGIDEZ RESTANTES-----%
%3) ( grad phi_i| grad phi_i):
gra1 =[(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));
        (dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2) (dfdx(2)*dfdx(3));
        (dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
gra2 =[(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));
        (dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2) (dfdy(2)*dfdy(3));
        (dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
mgf=gra1 + gra2;
%4) ( d phi_i/dx| phi_i):
mdx= [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
        dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
        dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%5) ( d phi_i/dy| phi_i):
mdy= [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%%-----ACHANDO A E B-----%
for il=1:3
    ig=malha2fer(itr,il);
    for jl=1:3
        jg=malha2fer(itr,jl);
        soma=(c2/s)*mgf(il,jl)+(Vx*mdx(il,jl)+ (Vy*mdy(il,jl)))*s*mdt/(6*jac);
        A(ig,jg)= A(ig,jg) + stm*s*mfi(il,jl)+soma;
        B(ig,jg)=B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
    end
end
end
end
%6) Poluição inicial:
for i =1:nn

```

```

        c0(i,1)=0.14;
    end
%7) Fontes de poluição\sumidouros:

d=zeros(nn,1)

d(1,1)=-0.10;
d(25,1)=-0.10;
d(31,1)=0.14;
d(33,1)=0.14;
d=dt*d;
ugt=itmax/4
for it = 1:itmax
    c=A\(B*c0+d);
    c0=c;
    if it==1
        subplot(2,2,1)
        trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c), title(' 0 dias'),view(0,90),...
        ,...colormap('jet'),shading interp,colorbar,...
        ...,caxis([0 4.5]));
        pause(0.1)
    end
    pause(0.1)
    if it==300
        subplot(2,2,2)
        trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c), title(' 80 dias'),view(0,90),...
        ,...colormap('jet'),shading interp,colorbar,...
        ...,caxis([0 4.5]));
        pause(0.1)
    end
    if it==600
        subplot(2,2,3)

```

```
trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c), title(' 160 dias'),view(0,90),...
,...colormap('jet'),shading interp,colorbar,...
...,caxis([0 4.5]));
pause(0.1)
end
if it==1000
subplot(2,2,4)
trisurf(malha2fer,coord(:,1),coord(:,2),c), title('240 dias'),view(0,90),...
,...colormap('jet'),shading interp,colorbar,...
...,caxis([0 4.5]));
end
end
e=cputime-tt;
disp('tempo de processamento=')
disp(e)
```

Lagoa Rodrigo de Freitas programa 2:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Aluno: João Paulo Alves Barros      Mestrado: Engenharia Mecânica      %
%Orientador: Cristiane Oliveira de faria  co-orientador: João Frederico %
%Projeto: Dispersão de Poluentes na lagoa rodrigo de freitas          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;          %para resetar e limpar tudo ao rodar o programa
t0=cputime;
format long;       %maior número de casas numéricas no resultado
%-----PARÂMETROS DE ENTRADA-----%
%dados para testes
sig=1e-8;          %onde sig(delta) é o coeficiente de decaimento do poluente.
a=0.4;            %onde a(epsylon) é o coeficiente de difusão do poluente.
%-----MALHA DO DOMÍNIO-----%
%Matriz coordenada
coord= %insira sua matriz coordenada
%matriz malha:
malha2fer = %insira sua matriz malha ou de elementos
ntr= lenght(malha2fer)
nn = lenght(coord)
%-----PARÂMETROS DA DISCRETIZAÇÃO-----%
n=3
tfinal=24*n;      %tempo final em horas, 24 h x dias.
itmax =1000;      %número máximo de iterações do tempo.
dt=tfinal/itmax;  %intervalo de tempo.
mdt= dt/2;        %facilitar implementação em Crank.

%-----PARÂMETROS QUE INDEPENDEM DAS COORDENADAS-----%

c1=mdt*sig;       %Coeficiente de (phi_i|phi_j).
c2=mdt*a;         %Coeficiente de (grad phi_i|grad phi_j).
Vx=mdt*0.3;      %Coeficiente de (d phi_i/dx |phi_j).

```

```

Vy=mdt*0.3;                                %Coeficiente de (d phi_i/dy |phi_j).
stm=(1+c1);                                %Coeficiente a esquerda (fi_i| fi_j).
stn=(1-c1);                                %Coeficiente a direita (fi_i| fi_j) .
%-----SUBMATRIZES DE RIGIDEZ-----%.
%1) (Phi_i)(phi_i):
mfi=[1/12 1/24 1/24;
      1/24 1/12 1/24;
      1/24 1/24 1/12];
%%-----AUXÍLIO PARA A MONTAGEM DE MATRIZES DO SISTEMA-----%%
%sparse = preencher a matriz
A= sparse(nn,nn);
B= sparse(nn,nn);
c=zeros(nn,1);
x=zeros(3,1);
y=x;
tt=cputime;
for itr = 1:ntr
    for il=1:3;
        ig=malha2fer(itr,il);
        x(il)=coord(ig,1);
        y(il)=coord(ig,2);
    end
    jac=det([(x(2)-x(1)) (x(3) - x(1));
             (y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s=abs(jac);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%-----CALCULO DAS ENTRADAS PARA AS SUBMATRIZES RESTANTES-----%
    dfdx(1)=y(2)-y(3) ; dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1) ; dfdy(2)=x(1)-x(3);
    dfdx(3)=y(1)-y(2) ; dfdy(3)=x(2)-x(1);
%-----OBTENDO AS SUBMATRIZES DE RIGIDEZ RESTANTES-----%
%3) ( grad phi_i| grad phi_i):

```

```

gra1 =[(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));
        (dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2) (dfdx(2)*dfdx(3));
        (dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
gra2 =[(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));
        (dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2) (dfdy(2)*dfdy(3));
        (dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
mgf=gra1 + gra2;
%4) ( d phi_i/dx| phi_i):
mdx= [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
        dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
        dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%5) ( d phi_i/dy| phi_i):
mdy= [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
        dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%%-----ACHANDO A E B-----%
for il=1:3
    ig=malha2fer(itr,il);
    for jl=1:3
        jg=malha2fer(itr,jl);
        soma=(c2/s)*mgf(il,jl)+(Vx*mdx(il,jl)+ (Vy*mdy(il,jl)))*s*mdt/(6*jac);
        A(ig,jg)= A(ig,jg) + stm*s*mfi(il,jl)+soma;
        B(ig,jg)=B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
    end
end
end
%6) Poluição inicial:
for i =1:nn
    c0(i,1)=0.14;
end
%7) Fontes de poluição\sumidouros:

```

```

d=zeros(nn,1)

d(1,1)=-0.10;
d(25,1)=-0.10;
d(31,1)=0.14;
d(33,1)=0.14;
d=dt*d;

ugt=itmax/4
for it = 1:itmax
    c=A\(B*c0+d);
    c0=c;

    ver1(it)=p1(1);
    ver2(it)=p1(262);
    ver3(it)=p1(25);
    ver4(it)=p1(248);

figure(2);
subplot(2,2,1)
plot(ver1), title('nó 1'), ylabel ('Concentração'),xlabel('Passos do tempo'),...
...,grid on,axis([0 1000 0 1500])
    subplot(2,2,2)
plot(ver2), title('nó 262'), ylabel ('Concentração'),xlabel('Passos do tempo'),...
...,grid on,axis([0 1000 0 1500])
    subplot(2,2,3)
plot(ver3), title('nó 25'), ylabel ('Concentração'),xlabel('Passos do tempo'),...
...,grid on,axis([0 1000 0 1500])
    subplot(2,2,4)

```

```
plot(ver4), title('nó 248'), ylabel ('Concentração'),xlabel('Passos do tempo'),...  
...,grid on,axis([0 1000 0 1500])  
  
figure(2);  
subplot(2,2,1)  
plot(ver1), title('nó 1'),ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...  
...,grid on, axis([0 1000 0 1500]) ;  
subplot(2,2,2)  
plot(ver2),title('nó 262'),ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...  
...,grid on, axis([0 1000 0 1500]) ;  
subplot(2,2,3)  
plot(ver3), title('nó 25'), ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...  
...,grid on, axis([0 1000 0 1500]) ;  
subplot(2,2,4)  
plot(ver4),title('nó 248'),ylabel('concentração'),xlabel('passos do tempo'),...  
...,grid on, axis([0 1000 0 1500]) ;  
  
end  
e=cputime-tt  
disp('tempo de processamento=');  
disp(e)
```