



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Jonatas Motta Quirino

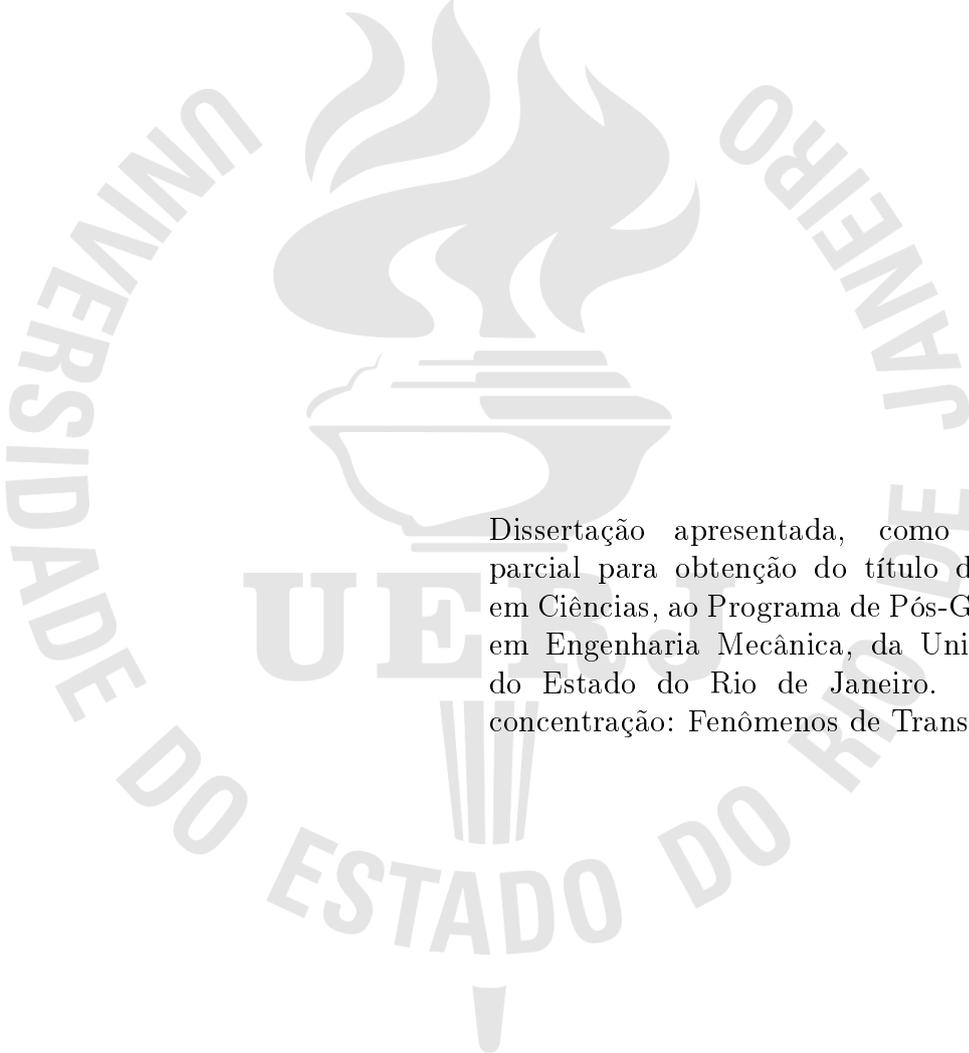
**Transferência de Calor com interação de aletas e condutividade
térmica variável**

Rio de Janeiro

2018

Jonatas Motta Quirino

**Transferência de Calor com interação de aletas e condutividade térmica
variável**



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa

Coorientador: Prof. Dr. Rodolfo do Lago Sobral

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Q8 Quirino, Jonatas Motta.
Transferência de calor com interação de aletas e
condutividade térmica variável / Jonatas Motta Quirino. –
2018.
90f.

Orientador: Eduardo Dias Corrêa.
Coorientador: Rodolfo do Lago Sobral.
Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Rio
de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Calor - Transmissão
- Teses. 3. Método dos elementos finitos - Teses. 4.
Permutadores térmicos - Teses. I. Corrêa, Eduardo Dias.
II. Sobral, Rodolfo do Lago. III. Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia. IV. Título.

CDU 536.24

Bibliotecária: Júlia Vieira – CRB7/6022

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total
ou parcial desta tese, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Jonatas Motta Quirino

**Transferência de Calor com interação de aletas e condutividade térmica
variável**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Fenômenos de Transportes.

Aprovado em: 6 de Março de 2018

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Dias Corrêa (Orientador)

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Dr. Rodolfo do Lago Sobral (Co-orientador)

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da
Fonseca - CEFET/RJ

Prof. Dr. Rogério Martins Saldanha da Gama

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

Prof. Dr. Nide Geraldo do Couto Ramos Fico Júnior

Escola Naval - EN

Rio de Janeiro

2018

AGRADECIMENTO

Ao meu Deus, detentor de toda a sabedoria, que me concede Sua sabedoria e me permitiu alcançar êxito até aqui.

Ao mestre Eduardo Dias Corrêa, um mentor e amigo que ganhei na UERJ, que espero trabalhar junto por vários projetos, e que me motivou a desenvolver o potencial máximo deste projeto.

Ao mestre Rodolfo do Lago Sobral, outro grande amigo que ganhei durante o curso e que me ajuda muito, como orientador, engenheiro e mentor.

À minha revisora, editora, ouvinte, incentivadora e namorada Hellen Teixeira Barbosa, que foi uma das principais conquistadoras do meu êxito.

Ao meu irmão Tiago, que trabalhou comigo, como meu mestre, onde suas orientações e companheirismo ecoarão em meu conhecimento para sempre.

Ao meu pai Eliezer, meu maior mentor e fonte de inspiração. Dedico a ele todo o meu sucesso, pois o seu suor me fez alcançá-lo.

A minha mãe Lilian, que sempre me motivou a continuar me aperfeiçoando.

A minha irmã Lília, e meus padrastos Dalva e Armando, que sofreram comigo e certamente celebrarão a minha vitória.

À minha colega de mestrado Thamires Paixão, que foi colega em quase todas as disciplinas e com quem tive o privilégio de ser parceiro de estudo.

Aos meus amigos Marcos Guilherme, Raphael, Filipe, Lucas e tantos outros aos quais o apoio e companheirismo eu sempre serei grato.

À UERJ e seu corpo de docentes, que me concederam o conhecimento técnico e as ferramentas necessárias para que eu alcançasse o êxito máximo.

À CAPES pelo financiamento do estudo.

*A fim de conhecerem plenamente o mistério de Deus, a saber, Cristo.
Nele estão escondidos todos os tesouros da sabedoria e do conhecimento.*

Colossenses 2:2-3

Bíblia Sagrada

RESUMO

QUIRINO, Jonatas Motta. *Transferência de Calor com interação de aletas e condutividade térmica variável*. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

O presente trabalho descreve o perfil térmico de uma superfície estendida retangular simples, perpendicular à sua superfície primária e em regime permanente, que dissipa calor considerando condução, convecção e radiação térmicas. São estabelecidas condições de contorno de Neumann e Dirichlet, caracterizando que a dissipação de calor se dê apenas pelas faces da aleta, além de considerar que a temperatura do ambiente seja homogênea. A análise da transferência de calor é realizada por simulações computacionais, utilizando métodos numéricos apropriados para tal. À formulação do problema é aplicado o Método de Diferenças Finitas. Uma vez que há grande diferença de temperatura entre a superfície primária e o fluido do ambiente, é necessário considerar os efeitos de transferência de calor. Para a aproximação de situação real, considera-se a condutividade térmica do material variável em função da temperatura em cada ponto, o que torna a equação que modela o problema não-linear. Considera-se a utilização de aletas duplas, onde suas superfícies interagem termicamente, gerando efeitos mútuos. Por fim a comparação dos resultados obtidos com resultados típicos prova que as premissas de condutividade térmica variável, dissipação de calor por radiação térmica e interação mútua são cruciais para a obtenção de resultados mais próximos da realidade.

Palavras-chave: Simulação Numérica; Método de Diferenças Finitas; Condutividade Térmica; Transferência de Calor; Interação mútua.

ABSTRACT

QUIRINO, Jonatas Motta. *Heat transfer with fin interaction and variable thermal conductivity*. 90 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

The present work describes the thermal profile of a simple rectangular extended surface, perpendicular to its primary surface and in steady state, which dissipates heat considering thermal conduction, convection and radiation. Neumann and Dirichlet contour conditions are established, characterizing that heat dissipation occurs only on the fin faces, in addition to considering that the ambient temperature is homogeneous. Heat transfer analysis is performed by computational simulations using appropriate numerical methods. The Finite Difference Method is applied to the problem formulation. Since there is a great temperature difference between the primary surface and the ambient fluid, it is necessary to consider the thermal transfer effects. For the real situation approximation, the thermal conductivity of the material is considered as a function of temperature at each point, which makes the equation that model the nonlinear problem. It is considered the use of double fins, where their surfaces interact thermally, generating mutual effects. Finally, the comparison of the results obtained with typical results proves that the assumptions of variable thermal conductivity, heat dissipation by thermal radiation and mutual interaction are crucial to obtain results that are closer to reality.

Keywords: Numerical Simulation; Finite Differences Method; Thermal Conductivity; Heat transfer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Fatores ambientais na taxa de falhas	17
Figura 2	Taxa de falhas	18
Figura 3	Efeitos de condução térmica	21
Figura 4	Efeitos de convecção natural.....	22
Figura 5	Efeitos de radiação térmica	24
Figura 6	Circuitos térmicos	30
Figura 7	Trocador de calor tipo Casco-Tubos	31
Figura 8	Vista explodida de um trocador de calor tipo compacto	32
Figura 9	Aleta longitudinais com seção retangular.....	34
Figura 10	Tipos de aletas	35
Figura 11	Processo térmico em aletas	36
Figura 12	Eficiência típica de uma aleta com seção e perfil retangulares	41
Figura 13	Aleta simples	45
Figura 14	Condição de contorno de Dirichlet	47
Figura 15	Condição de contorno de Neumann	48
Figura 16	Contorno e domínio	49
Figura 17	Dissipação do calor nas faces	55
Figura 18	Representação de efeito interação térmica	57
Figura 19	Diagrama de dispersão	60
Figura 20	MMQ para diversos materiais	63
Figura 21	Ajuste de curva por MMQ do tipo exponencial	64
Figura 22	Malha	66
Figura 23	Pontos nodais.....	66
Figura 24	Perfil térmico de aleta simples, sem radiação e k constante.....	71
Figura 25	Perfil térmico de aleta simples, sem radiação e k variável.....	73
Figura 26	Perfil térmico de aleta simples, com radiação e k constante.....	74
Figura 27	Perfil térmico de aleta simples, com radiação e k variável.....	75
Figura 28	Perfil térmico de aleta dupla, com radiação e k constante	76
Figura 29	Perfil térmico de aleta dupla, com radiação e k variável	78

Figura 30 Comparação de perfis térmicos	80
Figura 31 Eficiência de cada caso	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Valores de condutividade térmica (W/m.K).....	52
Tabela 2	Temperaturas típicas de componentes aeroespaciais	53
Tabela 3	Dados ajustados	61
Tabela 4	Parâmetros	70
Tabela 5	Resultados numéricos de aletas simples, sem radiação, k constante	72
Tabela 6	Resultados numéricos de aletas simples, sem radiação, k variável	73
Tabela 7	Resultados numéricos de aletas simples, com radiação, k constante	74
Tabela 8	Resultados numéricos de aletas simples, com radiação, k variável	76
Tabela 9	Resultados numéricos de aletas duplas, com radiação, k constante	77
Tabela 10	Resultados numéricos de aletas duplas, com radiação, k variável	78
Tabela 11	Resultados	79
Tabela 12	Erro percentual relativo.....	81
Tabela 13	Número de iterações em cada caso	82
Tabela 14	Tempo de processamento em cada caso.....	84

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CGT	Coefficiente Global de Transferência de calor
FDT	Fator de Deterioração Térmica
NASA	National Aeronautics and Space Administration
MDF	Método de Diferenças Finitas
MMIC	Monolithic Microwave Integrated Circuit
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados

LISTA DE SÍMBOLOS

Latinos

A	Área
c_0	Velocidade da luz no vácuo
C	Constante
$^{\circ}C$	Grau Celsius
d	Distância entre aletas
dx	Comprimento do elemento diferencial
E	Desvio
E_r	Energia emitida por radiação
G_{λ}	Taxa de irradiação
h	Coefficiente convectivo
h_p	Constante de Plank
I	Radiância espectral
k_b	Constante de Boltzmann
k	Condutividade térmica
K	Kelvin
L	Comprimento
N	Efetividade
O_L	Operador diferencial linear
P	Perímetro
q	Fluxo de calor
Q	Energia térmica
R	Resistência térmica
t	Tempo
T	Temperatura
\bar{T}	Temperatura média
tol	Tolerância
U	Coefficiente total de transferência de calor
x	Posição em uma das dimensões do corpo

Gregos

α_λ	Absortividade hemisférica espectral
δ	Espessura
Δ	Varição média
Γ	Fronteiras da aleta
ϵ	Incremento
ε	Emissividade
η	Eficiência
θ	Excesso de temperatura
λ	Comprimento de onda
ξ	Elemento diferencial de mutualidade
ρ_λ	Refletividade hemisférica espectral
σ	Constante de Stefan
τ_λ	Transmissividade hemisférica espectral
φ	Função do MMQ
Ω	Faces da aleta

Subescritos

0	Referência
∞	Ambiente
<i>a</i>	Aleta
<i>abs</i>	Absorvido
<i>b</i>	Base
<i>conv</i>	Convecção
<i>j</i>	Iteração vertical
<i>m</i>	Médio
<i>mut</i>	Mutualidade
<i>rad</i>	Radiação
<i>ref</i>	Refletido
<i>tot</i>	Total
<i>tr</i>	Transmitido

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	17
1	DESCRIÇÃO FÍSICA	20
1.1	Condução térmica	20
1.1.1	Lei de Fourier	21
1.2	Convecção térmica	22
1.2.1	Lei do resfriamento de Newton	23
1.3	Radiação térmica	23
1.3.1	Emissividade	24
1.3.2	Radiação de corpo negro	25
1.3.3	Absortividade	26
1.3.4	Refletividade	27
1.3.5	Transmissividade	27
1.3.6	Lei de Stefan-Boltzmann	28
2	TROCADORES DE CALOR	29
2.1	Coefficiente global de transferência de calor	29
2.2	Tipos de trocadores de calor	30
2.3	Superfícies estendidas	33
2.4	Transferência de calor em aletas	34
2.4.1	Dissipação por radiação	39
2.5	Eficiência em aletas	40
3	ABORDAGEM MATEMÁTICA	44
3.1	Modelagem do problema	44
3.1.1	Condições de contorno	45
3.1.1.1	Condição de Dirichlet	46
3.1.1.2	Condição de Neumann	47
3.2	Métodos analíticos	50
3.2.1	Solução analítica com condutividade térmica constante e sem radiação	50
3.2.2	Inserção analítica da variação da condutividade térmica	52

3.2.3	Inserção analítica dos efeitos de radiação	53
3.2.4	Inserção analítica dos efeitos de interação térmica	56
3.3	Métodos numéricos	58
3.3.1	Curva de condutividade térmica	58
3.3.2	Geração de malha e diferenciação numérica	64
3.3.3	Inserção numérica dos efeitos de radiação	67
4	RESULTADOS	69
4.1	Parâmetros e resultados de simulação	70
4.1.1	Aleta simples, sem radiação e k constante para qualquer T	71
4.1.2	Aleta simples, sem radiação e k variável em função de T	72
4.1.3	Aleta simples, com radiação e k constante para qualquer T	73
4.1.4	Aleta simples, com radiação e k variável em função de T	75
4.1.5	Aleta dupla, com radiação e k constante para qualquer T	76
4.1.6	Aleta dupla, com radiação com k variável em função de T	77
4.2	Resultados adjuntos ao problema	82
4.2.1	Número de iterações	82
4.2.2	Critério de parada	82
4.2.3	Espaçamento entre aletas duplas	83
4.2.4	Tempo de processamento	83
4.3	Eficiência em cada caso	84
	CONCLUSÃO	86
	TRABALHOS FUTUROS	87
	REFERÊNCIAS	88

INTRODUÇÃO

O uso de superfícies estendidas como forma de otimizar ou simplesmente controlar a troca de calor existe mesmo antes da interferência humana na natureza. A aplicação de tais superfícies, doravante também denominadas aletas, pode ser observada na natureza, como por exemplo as orelhas dos Fenecos (ou raposa do deserto) [1], as quais funcionam como aletas a fim de dissipar calor do sangue corrente nelas.

A partir da observação natural, a humanidade passou a utilizar esse mecanismo de troca de calor em suas tecnologias. Notou-se a ampla necessidade de aperfeiçoar os processos de transferência de calor com diversos objetivos, como otimizar, preservar, diminuir custos dos processos industriais, entre outros.

O baixo ou equivocado controle térmico é a razão da falha de uma enorme parte de componentes industriais. A Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (*NASA - National Aeronautics and Space Administration*) estima que 100% das falhas dos seus *Circuitos integrados de microondas monolíticas* (MMIC) poderiam ser evitadas se houvesse um controle térmico adequado [2]. A temperatura é o fator ambiental que mais causa falha no componentes eletrônicos, como mostra a Figura 1 [3].



Figura 1 Fatores ambientais na taxa de falhas

Os componentes eletrônicos são equipamentos que sofrem a maioria das falhas em função do equivocado ou subdimensionado controle térmico. A taxa de falhas de um dado componente eletrônico está diretamente relacionada com a temperatura na qual tal

componente opera [4], como apresentado na Figura 2, na qual é possível observar que o Fator de Deterioração Térmica (FDT) num componente submetido a uma temperatura de 100°C é aproximadamente três vezes maior que o FDT do mesmo componente ao ser submetido a uma temperatura de 75°C.

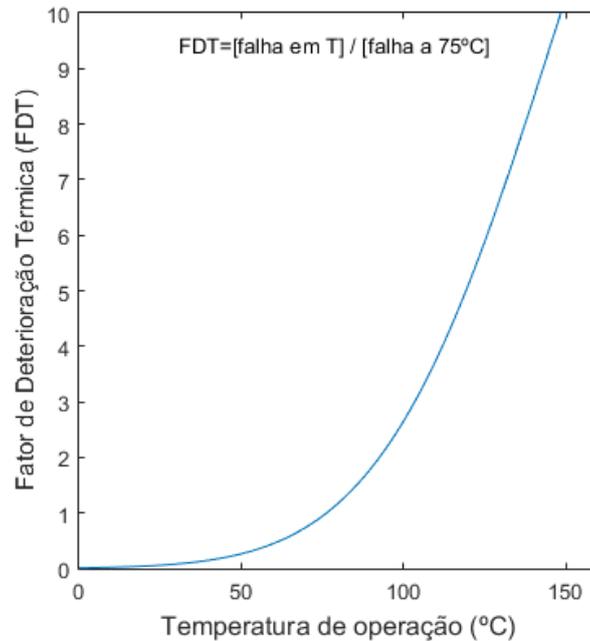


Figura 2 Taxa de falhas

Baseado nessa ampla necessidade, a indústria investe fortemente no aprimoramento do controle térmico de seus equipamentos e processos. Este estudo visa apresentar uma análise e uma solução viável para a modelagem térmica da dissipação.

Portanto aqui será apresentada a proposta de uma modelagem matemática que descreve a distribuição térmica ao longo de duas aletas longitudinais, com perfil geométrico retangular ligadas à mesma base, e por isso, à mesma fonte térmica. Diversas considerações devem ser levadas em conta para a viabilidade preliminar deste trabalho.

O objetivo central desta análise gira em torno da observação do comportamento térmico de aletas que dissipam calor de uma dada superfície primária através dos conhecidos processos de transferência de calor de condução, convecção e radiação térmica.

A análise de tal perfil de temperaturas visa apresentar a importância da consideração dos efeitos da radiação térmica na dissipação do calor e da mutualidade dos efeitos entre duas aletas, de maneira que, se comparado ao comportamento térmico na ausência de tais efeitos, há uma considerável discrepância nos resultados.

Uma vez que a maioria dos trabalhos que envolve o tema abordado considera o parâmetro de condução térmica constante, este estudo propõe considerar a variação de tal parâmetro para que se traga ainda maior aplicabilidade e aproximação da realidade.

Dado o exposto, a intenção deste trabalho é realizar uma análise aprofundada do ponto de vista de engenharia, no qual estuda-se um problema termofísico, envolvendo elementos de Transferência de Calor e Termodinâmica; do ponto de vista matemático, no qual há o desenvolvimento de problemas que apresentam certo nível de complexidade; e do ponto de vista computacional, visto que algumas das propostas matemáticas presentes neste trabalho apresentam solução analítica extremamente complexa, o que impossibilitaria sua análise, portanto os dados serão tratados a partir do desenvolvimento de um algoritmo próprio que auxilie na realização dos cálculos necessários, exposição gráfica e numérica das soluções.

1 DESCRIÇÃO FÍSICA

Uma vez que este trabalho estuda os efeitos de transferência de calor por condução, convecção e radiação térmica, deve-se observar as leis físicas que regem tais efeitos. Para cada um dos fenômenos térmicos associados à transferência de calor, existe uma lei correspondente que trata matematicamente cada efeito.

1.1 Condução térmica

É o fenômeno de transferência de calor no interior de um corpo (sólido ou não), ou em uma interface entre corpos, no qual a energia térmica é transmitida entre as partículas do meio material através da agitação das moléculas presentes no sistema [5]. Tal efeito se dá quando, ao longo desse meio material, há um gradiente de temperaturas e as moléculas que estão em maior temperatura transferem parte de sua energia para moléculas de menor temperatura, buscando assim o equilíbrio térmico [6].

A condução térmica pode se dar também através de contato físico, onde corpos sólidos trocam calor entre si desde estejam conectados. Nesse caso geralmente observa-se uma queda de temperatura na junção entre os corpos, fenômeno este conhecido como resistência térmica de contato ou interfacial.

É possível observar o fenômeno de condução térmica em regime transiente ou permanente, este segundo em cujo presente estudo está baseado. Na condução transiente existe alteração no fluxo térmico ao longo do tempo, que pode ser ocasionada pela inserção, remoção ou alteração de fontes de calor no interior do sistema, ou por condição inicial fora do equilíbrio térmico. Em geral tais alterações ocorrem até que haja um novo equilíbrio térmico.

Em condução permanente o gradiente térmico do interior do sistema é mantido constante ao longo do tempo, ou seja, a diferença de temperaturas que gera o fenômeno é imutável.

A Figura 3 apresenta uma simples ilustração visual do comportamento térmico de uma aleta simples quando submetida aos efeitos descritos nesta seção. Pode se observar que o fluxo térmico se dá a partir da superfície primária, onde a temperatura é mais elevada, para o topo, onde é mais baixa.

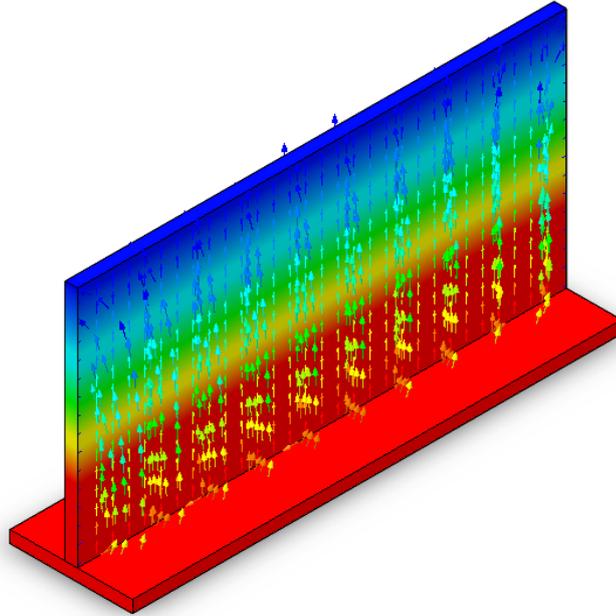


Figura 3 Efeitos de condução térmica

1.1.1 Lei de Fourier

A condução térmica foi modelada experimentalmente pelo matemático francês Jean-Baptiste Fourier (1768-1830), criando-se assim a *Lei de Fourier* [7], a qual diz que o fluxo de calor através de um material é proporcional ao negativo do gradiente de temperaturas, ou seja:

$$\dot{Q} = -kA \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1)$$

Onde:

\dot{Q} → Energia térmica

t → Tempo

k → Condutividade térmica do material

A → Superfície de transferência de calor

T → Temperatura

x_i → Posição em uma das dimensões do corpo

1.2 Convecção térmica

Trata da dissipação de calor de um corpo com o ambiente que o envolve, desde que o ambiente tenha algum fluido em movimento e haja diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente [8]. Baseando-se nessa definição, pode-se dizer que é apenas uma convênencia de engenharia, pois toma um caso particular de situações de condução térmica.

Essa situação leva à dependência das propriedades do fluido do ambiente e não do corpo em questão, onde a energia térmica interage entre o corpo e o ambiente. Portanto em se tratando de dissipação de calor, o ambiente remove calor do corpo.

A convecção térmica pode ser dividida em convecção forçada ou natural, as quais diferem entre si por naquela o movimento do fluido ser gerado por uma fonte externa ao sistema (tal como uma bomba, ventilador, dispositivo de sucção, etc.), enquanto essa ser provocada exclusivamente por apresentar diferenças de densidade no fluido ocorrendo devido a gradientes de temperatura [9].

Este trabalho considera regime de convecção natural para todos os casos estudados, quer seja com a influência da radiação térmica, ou não. O efeito gerado pela convecção é simplesmente ilustrado na Figura 4.

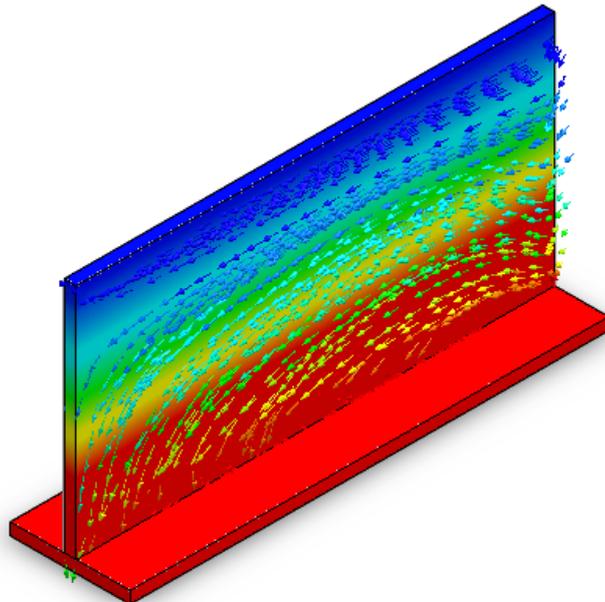


Figura 4 Efeitos de convecção natural

1.2.1 Lei do resfriamento de Newton

A transferência de calor por convecção térmica é descrita pela Lei atribuída a Isaac Newton, sendo posteriormente aperfeiçoada até a forma atualmente conhecida. Tal lei determina que a taxa de perda de calor de um corpo para o meio material que o envolve [10] é modelada pela equação:

$$\dot{Q} = hA[T(t) - T_{\infty}] \quad (2)$$

Onde:

\dot{Q} → Quantidade de calor

t → Tempo

h → Coeficiente de transferência de calor

A → Superfície de transferência de calor

T → Temperatura

T_{∞} → Temperatura do ambiente

1.3 Radiação térmica

Descreve o fenômeno existente em qualquer corpo em que suas moléculas apresentem qualquer nível de agitação, ou seja, estando acima do zero absoluto. Partículas que estejam carregadas na matéria produzem ondas eletromagnéticas que transportam energia térmica oriunda de qualquer meio. Diferentemente dos fenômenos de condução e convecção térmica, a radiação não depende de haver um meio material para a propagação da energia térmica, uma vez que o fluxo eletromagnético pode se dar inclusive no vácuo.

Tal agitação molecular é provocada pela maior ou menor variação da energia cinética presente nas substâncias existentes no universo, e tal variação produz uma aceleração das partículas presentes nessas substâncias, que por sua vez gera oscilações nas cargas dos átomos. Essas oscilações produzem o efeito eletromagnético de radiação, portanto a variação da energia cinética dos átomos é transformada no processo em energia térmica que será emitida pelos átomos. A Figura 5 representa a influência da radiação na transferência de calor do sistema.

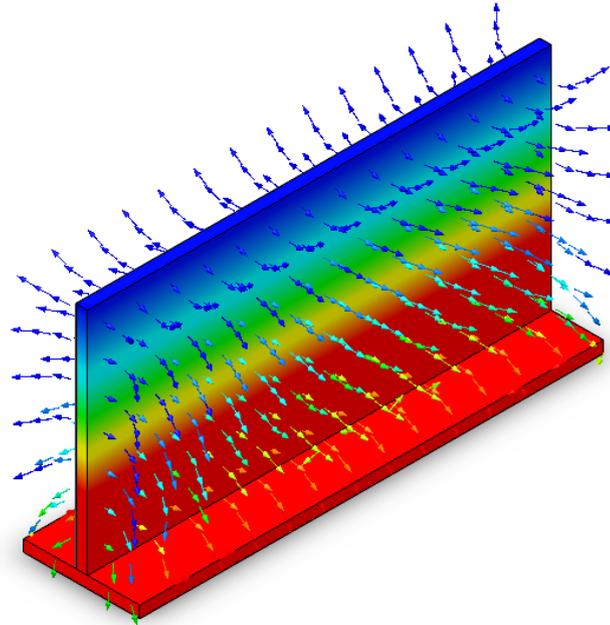


Figura 5 Efeitos de radiação térmica

Visto que esse fenômeno físico é objeto tema deste estudo, deve-se dedicar maior atenção à descrição, modelagem e os efeitos na formulação do problema. Portanto apresentar-se-ão alguns conceitos correlacionados com a radiação térmica.

1.3.1 Emissividade

Representada pela letra grega ε (*epsilon*), é a razão entre a radiância de um corpo numa dada temperatura e a radiância de um corpo negro na mesma temperatura. Portanto descreve a capacidade de um corpo de transmitir energia pelo processo de radiação, variando entre 0 e 1 e é intrinsecamente dependente das propriedades do corpo em questão, como do material que o compõe e da rugosidade superficial do mesmo.

Todo corpo que apresente temperatura acima de $0K$ possui emissividade diferente de zero, onde o cálculo para obtenção do valor da emissividade do corpo é um relação entre a energia transmitida pelo corpo em questão (Q') e a energia transmitida se houvesse emissividade total (Q) quando comparados para um mesmo comprimento de onda ($\varepsilon = 1$), como mostra a equação (3).

$$\varepsilon = \frac{Q'}{Q} \quad (3)$$

As conclusões das investigações do físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-

1887) caracterizam a radiação térmica de acordo com as propriedades do corpo emissor [11]. Em 1860 ele comprovou que um corpo apresenta exatamente a mesma capacidade de emitir e absorver energia.

1.3.2 Radiação de corpo negro

Em 1862 Kirchhoff sugeriu o termo "radiação de corpo negro", caracterizando a emissividade do corpo como fator preponderante para a radiação térmica.

O conceito de *corpo negro* representa um padrão estabelecido que será utilizado para comparações com outros sistemas de radiação térmica, visto que o corpo negro é aquele que:

- Absorve completamente a radiação que incide sobre ele para todos os comprimentos de onda;
- Nenhum corpo emite mais radiação que ele, se comparados com os mesmos valores de temperatura e comprimento de onda;
- É um emissor difuso, ou seja, a radiação emitida não depende da direção de emissão.

Para a melhor compreensão da influência do comprimento de onda na transmissão de calor em corpos negros, deve-se aprofundar a investigação do comprimento de onda (λ) e a emissão de radiação eletromagnética, e a sua relação com a temperatura.

Em 1893 Wilhelm Wien (1864-1928) publicou um modelo que descrevia seus resultados empíricos que demonstram que quanto mais alta a temperatura de um corpo, menor é o comprimento de onda cuja emissão é máxima, como é descrito na equação (4).

$$(\lambda T)_{max} = C_3 \quad (4)$$

Onde: C_3 é a terceira constante de radiação ($2898\mu m.K$).

Para exemplificar a aplicação dessa formulação, comumente utiliza-se a superfície solar, na qual a fotosfera se encontra numa temperatura de $5780K$, para a qual a máxima emissão situa-se num comprimento de $4,75\mu m$ e num corpo negro a uma temperatura de $1000K$, a máxima emissão se dá em torno de $2,9\mu m$.

Atualmente a *Lei de Wien* é deduzida através da *Lei de Plank*, que foi publicada em 1901 pelo físico alemão Max Planck (1858-1947). Tal lei diz que a distribuição espectral

na radiação em corpos negros é uma função dependente do comprimento de onda e da temperatura, como está exposto na equação

$$I(\lambda, T) = \frac{2h_p c_0}{\lambda^5 [\exp(h_p c_0 / \lambda k_b T) - 1]} \quad (5)$$

Onde:

I → Radiância espectral

λ → Comprimento de onda

T → Temperatura

h_p → Constante de Plank ($6,626 \times 10^{-34} J.s$)

c_0 → velocidade da luz no vácuo ($2,998 \times 10^8 m/s$)

k_b → Constante de Boltzmann ($1,381 \times 10^{-23} J/K$)

Essa formulação avalia inclusive que distribuição da energia eletromagnética pode se dar em diversos comprimentos de onda, o que aprimorou a Lei de Wien.

Neste estudo será utilizada a característica de corpo negro para a dissipação de calor por radiação térmica, ou seja, $\epsilon = 1$.

1.3.3 Absortividade

Representa a parcela de radiação total incidente que é absorvida pela superfície. Este parâmetro apresenta dificuldades para ser estabelecido com precisão, visto que sua magnitude é dependente da direção da emissão e ainda varia de acordo com o comprimento de onda. Portanto, o parâmetro de absortividade estará em função do comprimento de onda e da direção, contudo as aplicações de engenharia consideram uma média direcional, tratando o conceito pela desconsideração das variações na direção da radiação, como é apresentado na equação (6).

$$\alpha_\lambda(\lambda) = \frac{G_{\lambda,abs}(\lambda)}{G_\lambda(\lambda)} \quad (6)$$

Onde G_λ é a Taxa de irradiação.

Variando de 0 a 1, se a absortividade for menor do que 1, tem-se que alguma parcela da radiação foi refletida ou transmitida.

1.3.4 Refletividade

Ao contrário da absortividade, o conceito de refletividade é a quantificação da parcela de radiação incidente que uma superfície reflete. Este conceito leva em conta o índice de radiação incidente e refletida, portanto a refletividade é considerada bidirecional [12].

Para fins matemáticos e de aplicação, comumente considera-se a *refletividade hemisférica espectral*, modelada na equação (7), a qual representa a parcela da radiação espectral que uma superfície reflete, sendo essa uma função exclusivamente do comprimento de onda.

$$\rho_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,ref}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \quad (7)$$

Este conceito caracteriza as superfícies em questão como sendo *difusas* ou *especulares*, onde esta diz respeito às superfícies onde toda a reflexão forma um ângulo reto com a radiação incidente e aquela engloba as superfícies em que a intensidade da radiação refletida não depende do ângulo de reflexão. Em engenharia é amplamente aceito o conceito de reflexão difusa para a maior parte das aplicações [13].

1.3.5 Transmissividade

É a parcela da radiação incidente que é capaz de atravessar o corpo sobre o qual incide. Nenhuma superfícies real é capaz de absorver e refletir a totalidade da radiação sobre ele imposta. O conceito de corpo negro é aplicado para a comparação dos valores entre os casos ideais e reais, como apresentado na equação .

$$\tau_{\lambda}(\lambda) = \frac{G_{\lambda,tr}(\lambda)}{G_{\lambda}(\lambda)} \quad (8)$$

Cada corpo real apresenta um dado grau de transparência, que é o parâmetro que determina a capacidade de uma superfície de permitir a passagem da radiação através dela.

1.3.6 Lei de Stefan-Boltzmann

Descoberta pelo físico austríaco Joseph Stefan (1835-1893) e posteriormente formulada pelo também físico austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906) em 1879, segundo essa formulação, a energia térmica emanada de um corpo por unidade de área é diretamente proporcional à quarta potência de sua temperatura absoluta, ou seja:

$$E_r = \varepsilon A \sigma T^4 \quad (9)$$

Onde:

E_r → Energia emitida por radiação

ε → Emissividade (em corpo negro, $\varepsilon = 1$)

σ → Constante de Stefan ($\sigma = 5,6697 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$)

T → Temperatura

2 TROCADORES DE CALOR

Incontáveis processos industriais demandam um melhor controle térmico, seja pelo fornecimento ou pela remoção de calor de um equipamento ou procedimento, e por isso constantemente são desenvolvidos na indústria os trocadores de calor.

Sua função é realizar a transferência térmica entre dois fluidos que estão em diferentes temperaturas. No caso de trocadores fechados, os fluidos estão separados entre si por algum anteparo, os quais permitem a troca térmica. Em trocadores abertos, como torres de resfriamento e evaporadores, os fluidos estão em contato e também realizam troca térmica.

Deve-se, portanto ser possível estimar a eficiência do equipamento à troca de calor que se propõe de a atender às necessidades de projeto. E além disso contemplar fatores como: dimensões, tipo de operação, custo de montagem, manutenção e operação.

2.1 Coeficiente global de transferência de calor

Doravante também denominado CGT, esse é um parâmetro que caracteriza a transferência de calor num sistema composto, onde a análise é feita avaliando a performance de dissipação de calor através de todo o trocador.

Matematicamente a modelagem do coeficiente global de transferência de calor (U) é dado pela equação (10) [14].

$$U = \frac{q_x}{A\Delta T} \quad (10)$$

Outra forma matemática de avaliar o CGT de um sistema é a partir da análise da resistência térmica (R) de cada componente ou de todo o sistema, formando, então a equação (11).

$$U = \frac{1}{R_{total}A} \quad (11)$$

O modelo de resistência térmica é análogo ao estudo de resistências elétricas [13], no qual é possível alterar as condições de resistência de um sistema através de configuração dos resistores, propriedades termoquímicas dos materiais envolvidos no sistema ou mesmo o posicionamento de fontes térmicas. A Figura 6 ilustra um exemplo de transferência de

calor pela modelagem de circuitos térmicos.

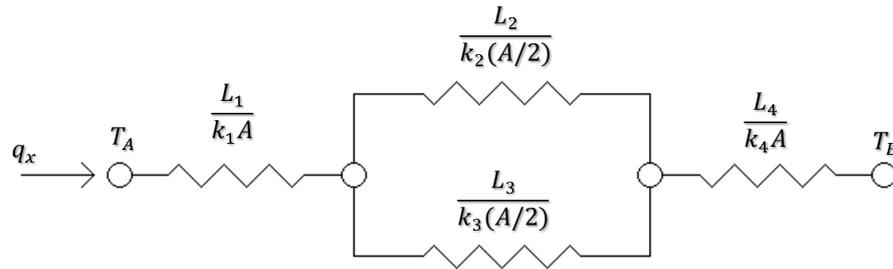


Figura 6 Circuitos térmicos

Essa figura demonstra a transferência de calor entre determinados pontos supondo que haja diferença de temperatura entre tais pontos.

2.2 Tipos de trocadores de calor

Existem muitos tipos de trocadores de calor utilizados na indústria, os quais diversos autores os dividem de várias maneiras em diversas categorias.

Basicamente em um trocador de calor estão presentes: um fluido quente, que é o que fornece calor ao sistema e, se não houver mudança de fase no fluido, o mesmo se resfriará; e um fluido frio, que é o que recebe calor do sistema e, em não havendo mudança de fase, se aquecerá [14]. A Figura 7 ilustra o funcionamento de um trocador de calor do tipo *Casco-Tubos*, muito comum em diversas aplicações. Nele um fluido escoando por um casco é resfriado quando um outro fluido em temperatura mais baixa escoar por tubos, havendo entrão troca térmica entre eles.

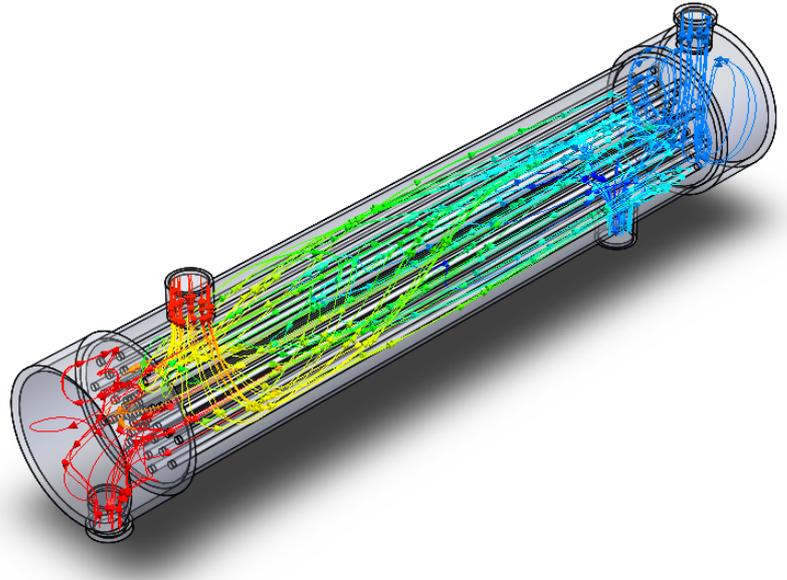


Figura 7 Trocador de calor tipo Casco-Tubos

Uma das várias categorizações de trocadores de calor [15] é definida por:

- Processo de transferência de calor
- Compacticidade
- Tipo de montagem
- Disposição das correntes
- Mecanismo de transferência de calor

A Figura 8 apresenta a vista explodida de um trocador de calor compacto de placas, o qual consiste em placas metálicas independentes fixadas por compressão. No vão existente entre placas adjacentes formam-se canais por onde os fluidos escoam.

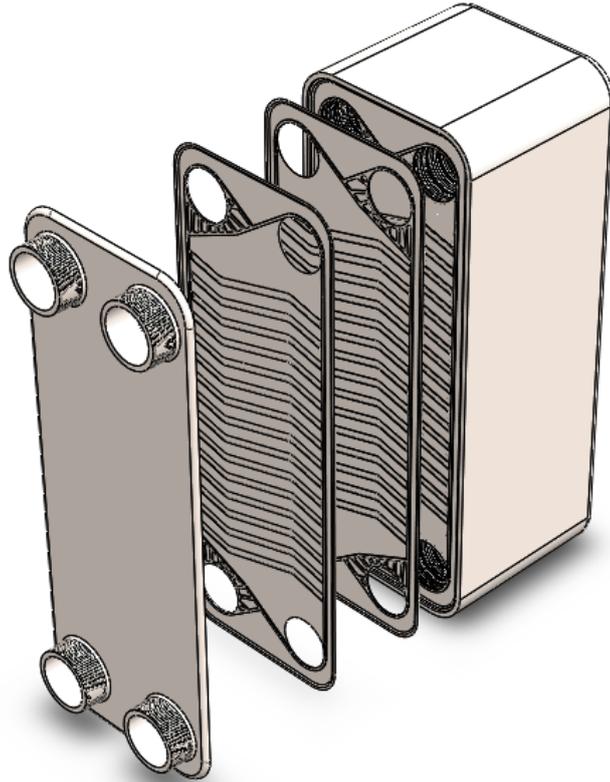


Figura 8 Vista explodida de um trocador de calor tipo compacto

Outra divisão separa de acordo com a natureza da função realizada dentro de um processo, sempre baseado no fluido principal do processo [16]:

- Recuperadores
- Condensadores
- Resfriadores
- Aquecedores
- Refervedores
- Evaporadores
- Vaporizadores

É possível também classificar os trocadores de acordo com sua geometria, material de construção e forma de montagem [17]:

- Tubular
- De placa
- De materiais altamente resistentes à corrosão
- Especiais

Uma categoria de trocador de calor muito utilizada é a de *trocadores de calor compactos*, os quais são geralmente aplicados para superfícies de troca térmica muito grandes. A relação que define sua aplicabilidade é $\gtrsim 400m^2/m^3$ em líquidos e $\gtrsim 700m^2/m^3$ em gases [13]. Existem vários tipos de trocadores compactos, entre os quais as superfícies estendidas serão o destaque deste estudo.

2.3 Superfícies estendidas

Para analisar a dissipação térmica ao longo de uma superfície estendida partindo de uma determinada superfície primária, deve-se considerar tal superfície estendida com geometria característica que a diferencie de sua superfície primária.

Existem diversos tipos de aletas que variam de acordo com sua aplicação, posicionamento, geometria, entre outros fatores. A fim de dividir os tipos de aletas, é possível categorizar de diversas formas. A Figura 9 apresenta os principais exemplos de aletas longitudinais com seção retangular, onde cada uma se diferencia das demais por apresentar perfis: (a) retangular; (b) trapezoidal; (c) parabólico; e (d) retangular adaptado a um tubo.

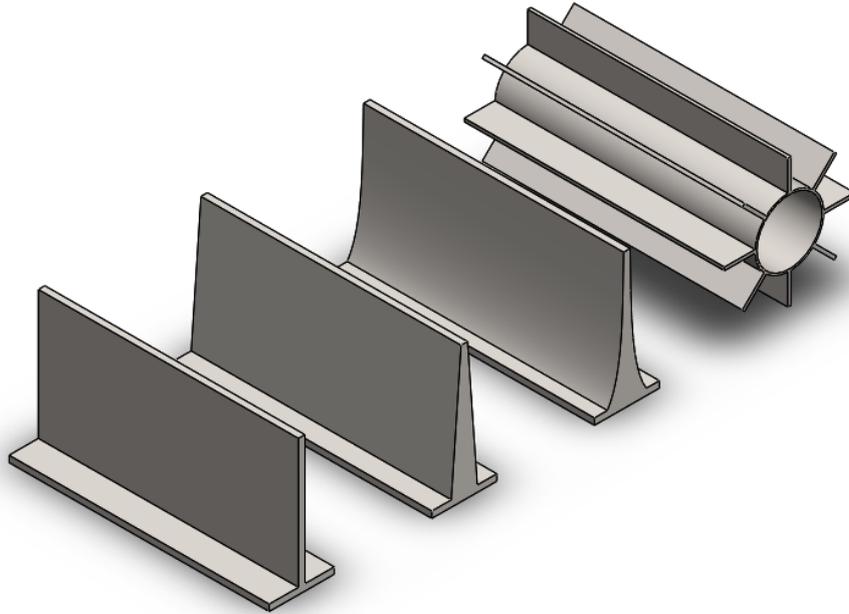


Figura 9 Aleta longitudinais com seção retangular

É chamada superfície primária aquela à qual a aleta está fixada com o propósito de remover calor dela e rejeitá-lo para o ambiente no qual o corpo está inserido. Comumente é considerado para fins matemáticos que a superfície primária seja de comprimento infinito, visto que a análise se dá apenas no segmento específico em que a aleta se encontra.

2.4 Transferência de calor em aletas

Este trabalho apresentará diversas comparações pertinentes aos resultados esperados. Nomeia-se *Aleta simples* ilustrada na Figura 10(a) aquela que apresenta apenas uma superfície estendida ligada à superfície primária. A *Aleta dupla*, que pode ser vista na Figura 10(b), é aquela que possui duas superfícies estendidas ligadas à superfície primária.

Considera-se que o corpo em questão e, conseqüentemente, as aletas analisadas estão em estado permanente em relação a um referencial externo, ou seja, sua velocidade relativa a um ponto fora do corpo é nula. Outrossim o transiente térmico será desprezado, ou seja, a análise será realizada no mapeamento térmico de uma condição já em equilíbrio térmico.

Atribui-se ao sistema a característica de regime térmico permanente, no qual a aleta não é considerada uma fonte própria de calor, sendo a mesma portanto observada exclusivamente como dissipador do calor gerado pela superfície primária. Contudo tal pres-

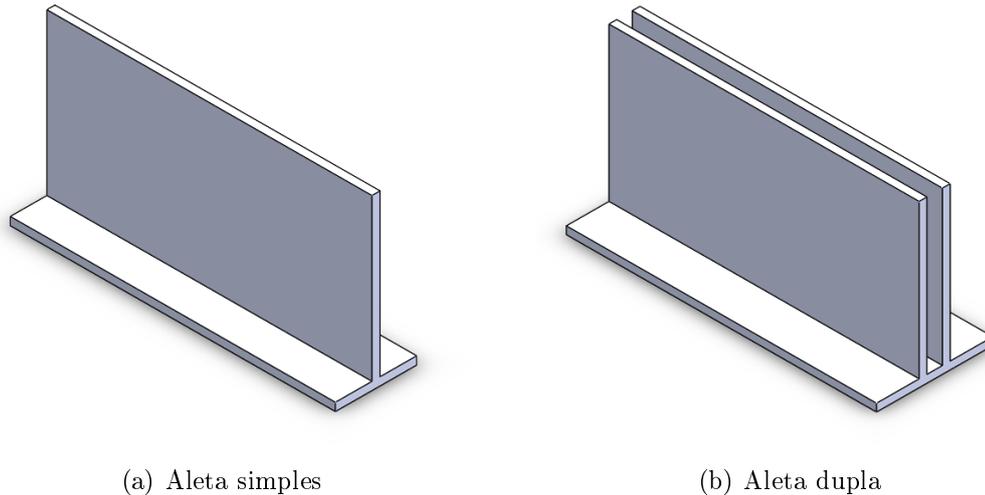


Figura 10 Tipos de aletas

suposto não desqualifica a caracterização de compartilhamento térmico visto que numa situação de aleta dupla, considera-se que uma aleta é geradora de calor apenas para sua vizinha, como será explicado mais à frente. Além disso não é considerada nenhuma troca térmica por convecção ou radiação entre a superfície primária e a aleta.

A caracterização da superfície estendida se dá principalmente por considerar-se em sua geometria, as dimensões de profundidade (x) e altura (y) muito maiores que a espessura (z) da aleta. Tal premissa é fundamental para a considerar a superfície uma aleta.

No problema proposto considera-se também o material tanto da superfície primária, quanto da aleta, do mesmo material, homogêneo e de condutividade térmica (k) variável, sendo esta uma função da temperatura em cada ponto. Ademais considera-se que toda a superfície primária encontra-se numa mesma temperatura em toda a sua extensão.

Uma vez que na análise de duas aletas que interagem termicamente, considera-se que as aletas possuem exatamente as mesmas dimensões geométricas e se encontram em posições paralelas.

Para esta primeira análise preliminar do processo térmico, as simplificações usuais serão admitidas, a saber: aletas simples, desprezando efeitos de radiação e variação da condutividade térmica.

Baseado em todas essas conclusões, procura-se, portanto descrever o fenômeno de dissipação do calor ao longo de superfícies estendidas, como ilustrado na Figura 11.

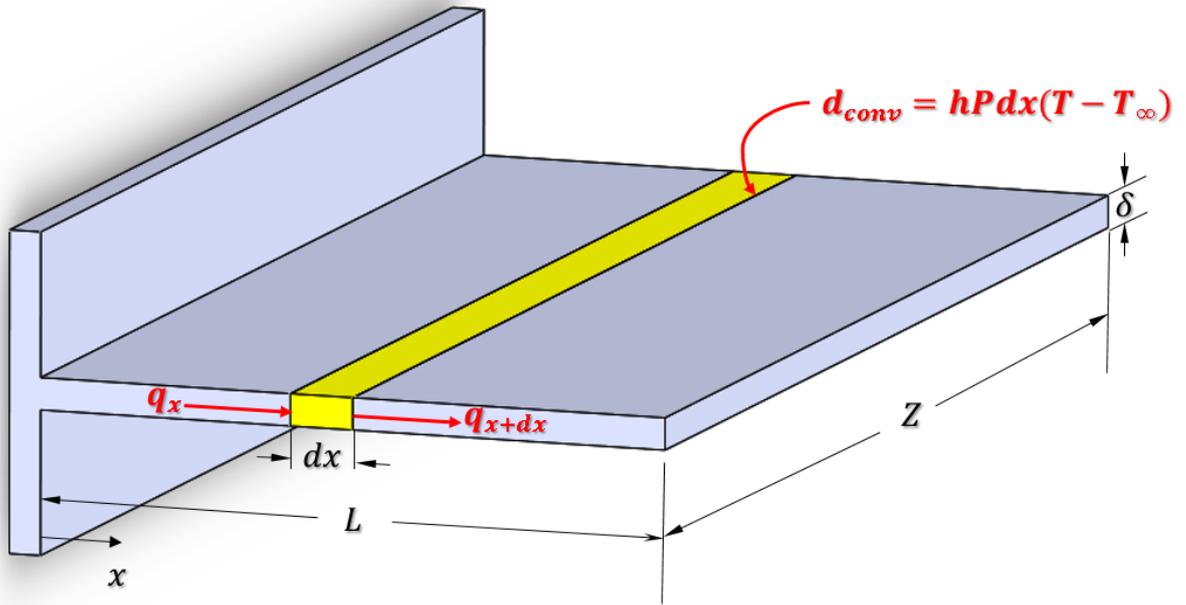


Figura 11 Processo térmico em aletas

A partir dessa análise é possível estabelecer o balanço de energia ao longo da seção transversal de uma aleta, desde que respeitadas as descrições dadas no capítulo anterior que facilitam, ou mesmo possibilitam a análise do ponto de vista matemático. As quantidades de energia [18] ilustradas na Figura 11 são:

- **Entrando pela base da aleta**, temos por condução térmica:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

- **Saindo pelo topo** a variação após o elemento diferencial:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx = -kA \left(\frac{dT}{dx} \right) \Big|_{x+dx} = -kA \left(\frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right)$$

- **Dissipada por convecção** no elemento diferencial:

$$dq_{conv} = hP dx (T - T_\infty)$$

- **Dissipada por radiação** no elemento diferencial:

$$dq_{rad} = 2\sigma\epsilon LT^4 dx$$

Agregando as definições e aplicando a *Lei de conservação de energia*, o processo de transferência de calor no elemento diferencial exposto na Figura 11 é descrito por

$$\frac{d}{dx} \left(A \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h P dx}{k} (T - T_\infty) = 0 \quad (12)$$

Ao acrescentar o termo convectivo do elemento diferencial à equação (12) e após realizar os ajustes algébricos, tem-se que

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A} \frac{h P dx}{k} \right) (T - T_\infty) = 0 \quad (13)$$

A área diferencial para a convecção é o produto do perímetro (P) da superfície estendida pelo comprimento do elemento diferencial dx . Ao associar tais quantidades de energia, o balanço toma a seguinte forma:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA} (T - T_\infty) = 0 \quad (14)$$

A fim de facilitar os cálculos algébricos, considera-se que $\theta(x) = T(x) - T_\infty$, onde θ é o excesso de temperatura.

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{hP}{kA} \theta = 0 \quad (15)$$

Baseado no fato que a 15 é uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem com coeficientes constantes, e considerando $m^2 = hP/kA$, caracteriza-se sua solução geral [19] como:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (16)$$

Para solucionar a equação (16) faz-se necessário incluir condições de contorno a fim de encontrar os valores de C_1 e C_2 .

Propõe-se, portanto, quatro condições de contorno na extremidade da aleta ($x = L$) que podem facilitar o procedimento matemático de descrição do processo térmico. Para

todas as hipóteses valem as relações:

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad , \quad \theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty \quad , \quad m^2 \equiv \frac{hP}{kA} \quad , \quad M \equiv \sqrt{hPkA}\theta_b$$

- Convecção

Deve-se analisar um balanço energético em um volume de controle que compreenda o topo da aleta, onde há convecção natural, ou seja, $h\theta(L) = -kd\theta/dx|_{x=L}$.

$$h(C_1e^{mL} + C_2e^{-mL}) = km(C_2e^{-mL} - C_1e^{mL})$$

$$\theta/\theta_b = \frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk)\sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (h/mk)\sinh(mL)} \quad (17)$$

$$q_a = M \frac{\sinh(mL) + (h/mk)\cos(mL-x)}{\cosh(mL) + (h/mk)\sinh(mL)} \quad (18)$$

- Adiabática

A dissipação de calor através do topo da aleta é desprezível se comparada à dissipação nas faces, tornando o topo isolado de maneira que $d\theta/dx|_{x=L} = 0$.

$$C_1e^{mL} - C_2e^{-mL} = 0$$

$$\theta/\theta_b = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad (19)$$

$$q_a = Mtgh(mL) \quad (20)$$

- Temperatura prescrita

O topo da aleta apresenta uma temperatura homogênea prescrita, o que se resume em $\theta(L) = \theta_L$.

$$\theta/\theta_b = \frac{(\theta_L/\theta_b)\sinh(mx) + \sinh[m(L-x)]}{\sinh(mL)} \quad (21)$$

$$q_a = M \frac{\cosh(mL) - (\theta_L/\theta_b)}{\sinh(mL)} \quad (22)$$

- Comprimento infinito

A aleta é infinitamente longa ($L \rightarrow \infty$), de maneira que não haja o excesso de

temperatura, portanto $\theta(L) = 0$.

$$\theta/\theta_b = e^{-mx} \quad (23)$$

$$q_a = M \quad (24)$$

As soluções da equação (15) para o caso deste estudo serão discutidas no próximo capítulo.

2.4.1 Dissipação por radiação

Um novo balanço de energia ao longo do elemento diferencial é feito para contemplar a transferência de calor exclusivamente por radiação, considerando a condutividade térmica constante, onde a equação (25) modela a dissipação.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2\sigma\varepsilon}{k\delta}T^4 \quad (25)$$

A solução da equação (25) se dá pelo método de *substituição de variáveis*, onde $p = dT/dx$.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dT} \frac{dT}{dx} = p \frac{dp}{dT} \quad (26)$$

Substituindo o resultado acima na equação (25), é gerada a equação

$$p \frac{dp}{dT} = \frac{2\sigma\varepsilon}{k\delta}T^4 \quad (27)$$

Através do método de *separação de variáveis*.

$$p = \frac{d\theta}{dx} = -2 \left(\frac{\sigma\varepsilon}{5k\delta}T^5 + C \right)^{1/2} \quad (28)$$

Onde C é uma constante de integração que é definida por condições de contorno, as quais nesse caso são aplicadas sendo onde $x = b$, $dT/dx = 0$ e $T = T_a$. Portanto conclui-se a equação

$$\frac{dT}{dx} = -2 \left(\frac{\sigma\varepsilon}{5k\delta} \right)^{1/2} (T^5 - T_a^5)^{1/2} \quad (29)$$

2.5 Eficiência em aletas

Baseado nas relações de transferência de calor através de superfícies estendidas, faz-se necessário apresentar justificativas que defendam que a aplicação de aletas atenderá à dissipação de calor necessária a tal sistema.

É caracterizado um parâmetro que representa o incremento de transferência de calor em um sistema devido a aleta quando comparado ao mesmo sistema sem esse incremento. Isso significa uma comparação entre dissipação de calor pela superfície estendida e a dissipação que aconteceria se toda a aleta estivesse na mesma temperatura da superfície primária.

Tal parâmetro é chamado de eficiência de aleta (η_a) e é descrito pela razão entre o calor realmente transferido pela aleta e o calor que seria transferido se toda a superfície estendida estivesse à mesma temperatura da superfície primária.

$$\eta_a = \frac{q_a}{q_{max}} = \frac{q_a}{hA\theta_b} \quad (30)$$

Para o caso com aletas longitudinais com perfil e seção retangular, com condutividade térmica constante, sem radiação e utilizando as soluções apresentadas na seção anterior, a eficiência da aleta é dada pela equação (31).

$$\eta_a = \frac{Mtgh(mL)}{hA\theta_b} = \frac{\sqrt{\frac{hP}{kA}}\theta_0 tgh(mL)}{hPL\theta_b} = \frac{tgh(mL)}{mL} \quad (31)$$

Como foi mencionado, a definição de aleta caracteriza que a mesma deve ser considerada delgada, ou seja, a dimensão de espessura é muito menor que as demais dimensões. Além disso considera-se que toda a superfície primária se encontra em temperatura homogênea. Tais definições permitem considerar o sistema de dissipação de calor como unidimensional.

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA}}L = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}}L \quad (32)$$

Portanto tem-se que a equação final que descreve a eficiência de aletas nas condições apresentadas é dada por

$$\eta_a = \frac{\operatorname{tgh}\left(\sqrt{\frac{2h}{k\delta}}L\right)}{\sqrt{\frac{2h}{k\delta}}L} \quad (33)$$

O parâmetro calculado na equação (32) permite a confecção de um gráfico que relaciona a eficiência de uma superfície aletada em função de $\sqrt{L^2h/k\delta}$, o qual está ilustrado na Figura 12.

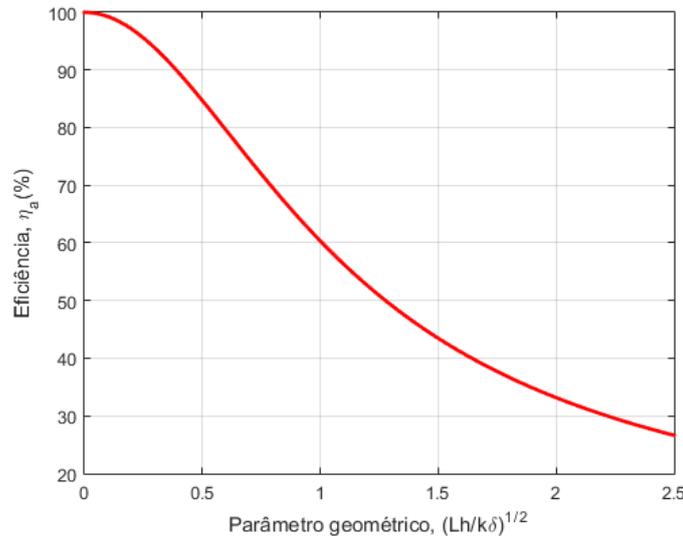


Figura 12 Eficiência típica de uma aleta com seção e perfil retangulares

Portanto nota-se o efeito das características geométricas (comprimento e espessura) e propriedades termofísicas da aleta (condutividade térmica e coeficiente convectivo do fluido que a cerca) sobre a sua dissipação

Uma proposta para a estimativa do cálculo da eficiência total (η_{tot}) de uma superfície aletada é apresentada por meio da equação (34) [20].

$$\eta_{tot} = 1 - \frac{A_a}{A}(1 - \eta_a) \quad (34)$$

Onde A_a é a área superficial de cada aleta do sistema e A é soma das áreas das aletas do sistema.

Portanto é possível aplicar a equação (34) para uma definição de eficiência de um sistema com mais de uma aleta, caso esse que é extremamente interessante para este trabalho.

A avaliação dos efeitos de radiação se dá utilizando a equação (29), considerando em $x = 0$ onde $T = T_b$, gerando a equação (35).

$$q_b = 2k\delta L \left(\frac{\sigma\varepsilon}{5k\delta} \right)^{1/2} (T_b^5 - T_a^5)^{1/2} \quad (35)$$

Tal formulação leva a concluir, de acordo com os conceitos e parâmetros de eficiência expostos até aqui, que a razão entre o calor realmente dissipado quando considera-se a radiação térmica e aquele que seria dissipado num caso de dissipação de calor com toda a superfície estendida numa mesma temperatura, como é descrito pela equação (36).

$$\eta_{rad} = \frac{2k\delta L(\sigma\varepsilon/5k\delta)^{1/2}(T_b^5 - T_a^5)^{1/2}}{2\sigma\varepsilon bLT^4} \quad (36)$$

Diferentemente do conceito de eficiência, existe outra forma de mensurar a performance da aplicação de superfícies estendidas para a dissipação de calor, que avalia o desempenho de uma aleta relacionando a quantidade de calor dissipada pela aleta e a quantidade de calor que seria transferido se não houvesse a aleta. Esse conceito é conhecido como efetividade de aleta. Sua formulação é descrita pela equação (37).

$$N_a = \frac{q_a}{hA_b\theta_b} \quad (37)$$

A literatura defende comumente que em qualquer projeto real em que se cogite o uso de superfícies estendidas apenas justifica-se se o valor calculado da efetividade da aleta for $N_a \geq 2$ [13].

A aplicação de aletas se dá ao relacionar um dos casos expostos de condição de contorno, onde o valor calculado de transferência de calor na aleta (q_a) é substituído na equação (37) e, embora o coeficiente de convecção do sistema seja alterado ao se acrescentar uma superfície estendida, comumente tal alteração é desprezada. Portanto para o caso de aleta de comprimento infinito, a efetividade toma por descrição a equação (38).

$$N_a = \sqrt{\frac{kP}{hA}} \quad (38)$$

Além do exposto até aqui, pode-se compreender o desempenho de superfícies por meio do conceito de resistências térmicas exposto na seção 2.1. Nesse caso avalia-se a diferença de temperaturas entre a base e o fluido como o potencial motriz e as resistências

térmicas são dadas pelas Equações 39a e 39b.

$$R_a = \frac{\theta_b}{q_a} \quad (39a)$$

$$R_b = \frac{1}{hA_b} \quad (39b)$$

Através da relação das duas equações, é possível estimar a efetividade de uma aleta.

$$N_a = \frac{R_b}{R_a} \quad (40)$$

3 ABORDAGEM MATEMÁTICA

A formulação matemática se dará de forma que todas as considerações citadas, tais como as leis físicas expostas sejam admitidas num ambiente de tratamento numérico do problema. Por isso alguns métodos matemáticos foram adotados e aplicados com o auxílio computacional de plataformas adequadas.

A investigação do perfil térmico gerado pela dissipação de calor em uma aleta depende de uma série de dados, definições e considerações que alteram significativamente o resultado obtido. Por isso, a fim de produzir uma comparação entre os perfis gerados ao fim desta análise, procura-se a unificação e isonomia de tais fatores que possibilitam uma comparação adequada.

Para analisar todo o processo de dissipação de calor em aletas, faz-se necessário entender fisicamente sobre o que se trata o problema.

3.1 Modelagem do problema

Sendo uma das hipóteses do problema a condição de regime térmico permanente, a distribuição térmica nas direções de cada eixo cartesiano da aleta é descrita pela equação (41).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (41)$$

Utilizando a *Lei de Leibniz*, também conhecida como *Regra do Produto*, a equação (41) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial k(T)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ & + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

Como serão realizadas análises em diversas situações, busca-se modelar desde já a situação mais complexa, onde a condutividade térmica em questão (k) é considerada variável em função da temperatura.

Como dito na seção 2.4, através das definições geométricas de aletas retangulares, a

largura e altura da aleta são muito maiores que sua espessura. Além disso, como também já exposto na seção 2.4, toda a superfície primária se encontra numa mesma temperatura.

De posse de tais informações pode-se concluir que, se comparadas às demais direções no eixo cartesiano, apenas no eixo y as diferenças de temperatura entre seus pontos são consideráveis, portanto as diferenças de temperatura nos demais eixos são desprezíveis, se avaliados pontos ao longo do eixo.

Essa conclusão sugere que o problema seja analisado numa abordagem unidimensional, o que será discutido mais à frente. Para melhor visualização do efeito descrito, a Figura 13 apresenta as definições básicas de uma aleta simples.

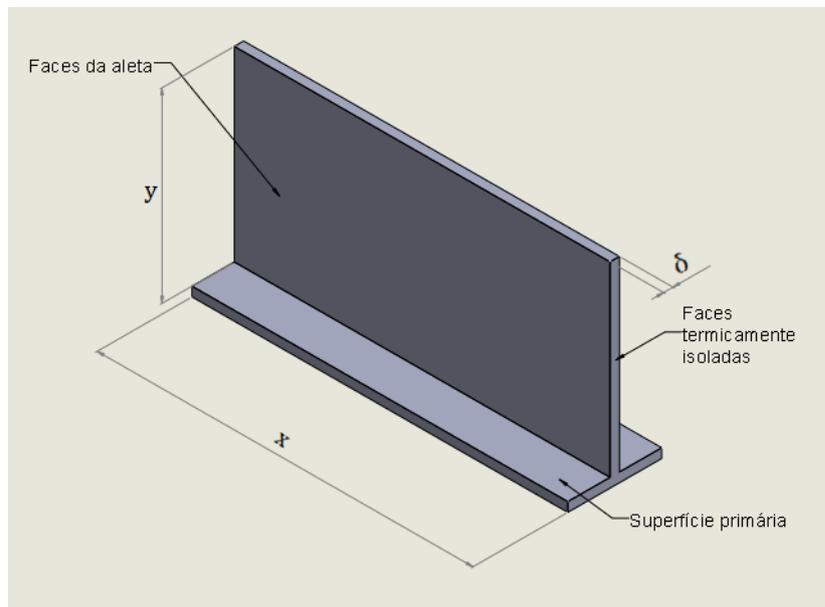


Figura 13 Aleta simples

Entende-se, portanto, que a dissipação térmica ao longo das faces da aleta (quer seja simples ou dupla) serão o objeto principal das análises que seguem.

3.1.1 Condições de contorno

Uma vez exposta a equação diferencial parcial de segunda ordem que modela o perfil térmico, deduz-se a necessidade de duas condições de contorno aplicáveis em cada uma das direções [21].

Utilizou-se portanto dois tipos de condições de contorno matemáticas para viabilizar a análise e facilitar a modelagem. Essas condições são muito comuns nos problemas matemáticos que envolvam equações diferenciais.

3.1.1.1 Condição de Dirichlet

Também conhecida como *Condição de Primeiro Tipo*, esta premissa recebe o nome de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) [22]. A condição uma vez aplicada em uma equação diferencial estabelece os valores necessários a uma função no contorno do domínio. Ou seja, em um caso geral:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (43)$$

onde α e β são constantes, f é uma função conhecida no domínio $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a primeira derivada de u orientada na direção normal a $\partial\Omega$.

Para satisfazer a condição de Dirichlet, tem-se que $\beta = 0$, ou seja, num intervalo $[0, 1]$:

$$u(0) = \alpha_1 \quad (44a)$$

$$u(1) = \alpha_2 \quad (44b)$$

A condição de contorno de *Dirichlet* é implementada neste estudo para garantir uma geração de calor uniforme ao longo da base da aleta. Essa premissa é fundamental para a análise, pois tal consideração permite a abordagem unidimensional à solução do problema, uma vez que se não há variação térmica ao longo da base da aleta, todo o eixo x apresenta temperatura homogênea. O efeito da c.c de Dirichlet para aleta simples é ilustrado na Figura 14 representando a temperatura prescrita por uma cor homogênea.

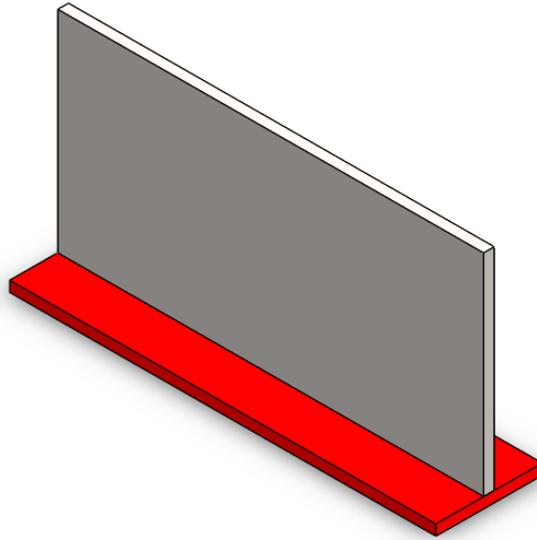


Figura 14 Condição de contorno de Dirichlet

3.1.1.2 Condição de Neumann

Semelhante à condição de Dirichlet, esta é conhecida como *Condição de Segundo Tipo*, e leva o nome do matemático alemão Carl Neumann (1832-1925) [22]. Sendo esta aplicada em uma equação diferencial estabelece os valores necessários à derivada de função no domínio, sendo portanto a descrição de um fluxo. Ou seja, em

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), x \in \partial\Omega \quad (45)$$

onde α e β são constantes, f é uma função conhecida no domínio $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a primeira derivada de u orientada na direção normal a $\partial\Omega$.

Para satisfazer a condição de Neumann, tem-se que $\alpha = 0$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0) = \alpha_1 \quad (46a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(1) = \alpha_2 \quad (46b)$$

A condição de contorno de *Neumann* é empregada neste trabalho a fim de limitar a transferência térmica do sistema, de maneira que se criem bordas isoladas na superfície estendida, formando uma fronteira no sistema que garanta a transferência de calor por convecção e radiação exclusivamente nas faces da aleta. É ilustrado na Figura 15 uma

representação do efeito que a condição de contorno de Neumann gera na análise de aleta simples.

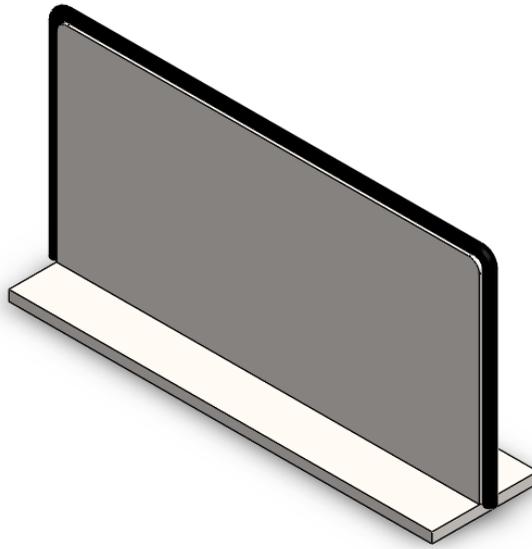


Figura 15 Condição de contorno de Neumann

Como o foco deste trabalho é apresentar, dentre outros, uma análise da influência dos efeitos da transferência de calor no sistema, em especial a radiação térmica, faz-se necessário definir condições de contorno que descrevam os efeitos da radiação na dissipação de calor nas superfícies estendidas.

Dadas as condições de contorno expostas até aqui, cabe apenas acrescentar aquelas que descrevem o processo de transferência de calor através das faces da aleta.

Tais condições de contorno utilizarão as leis físicas e equações apresentadas no capítulo 1, onde as equações (2) e (9) serão associadas para descrever o processo de dissipação através da face da aleta por convecção [23] e radiação [24], respectivamente.

Como apresentado anteriormente, este trabalho compreenderá comparações entre resultados típicos de perfis térmicos, onde casos que desconsideram a transferência de calor por radiação também serão avaliados.

Para o caso em que é considerada a transferência de calor por radiação, a caracterização dos valores de temperatura dissipados por radiação térmica se dá como uma função do valor de temperatura em cada ponto.

O fato da equação (9) apresentar um termo não linear de temperatura (T^4), faz com que as condições de contorno nas faces da aleta para esse caso se tornem não lineares.

Considerando o eixo x , analisa-se o segmento compreendido entre a origem ($x = 0$)

e a extremidade da aleta ($x = L$). No eixo y , a representação da altura da aleta se dá entre $y = 0$ e $y = H$. Para o eixo z , a espessura da aleta é compreendida entre $z = 0$ e $z = \delta$, como é apresentado na Figura 16.

Admite-se, portanto, determinadas hipóteses que viabilizem, ou mesmo facilitem a análise. Então resumindo as condições de contorno utilizadas:

1. A face Γ_1 ($y = 0$) é condicionada com determinada temperatura imposta a ela, que seria igual ao valor da temperatura na superfície primária. (condição de contorno de Dirichlet)
2. As faces Γ_2 ($x = 0$), Γ_3 ($x = L$) e Γ_4 ($y = H$) estão termicamente isoladas, ou seja, não há interação térmica com o meio e o fluxo de calor é igual a zero. (condição de contorno de Neumann)
3. Nas faces $z = 0$ e $z = \delta$, considera-se a dissipação de calor por convecção térmica e posteriormente por radiação térmica.

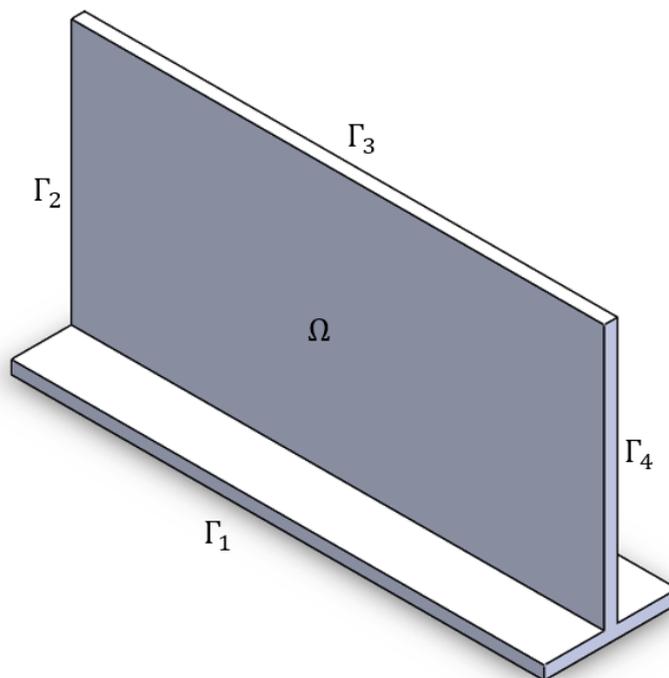


Figura 16 Contorno e domínio

3.2 Métodos analíticos

A fim de investigar analiticamente o fenômeno da dissipação de calor que envolve superfícies estendidas nas configurações expostas até aqui, faz-se necessário particionar o problema, gerando uma abordagem gradativa desde situações mais simples, até às mais complexas.

3.2.1 Solução analítica com condutividade térmica constante e sem radiação

A análise inicial apresenta a situação na qual as condições de contorno do problema não consideram os efeitos da variação da condutividade térmica, tampouco a dissipação de calor por radiação térmica.

Para tais considerações a formulação do problema se dá por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (47)$$

Utilizando os pressupostos já expostos de desconsiderar a variação térmica ao longo de x , considerando preliminarmente k como constante, e a condição de contorno de dissipação de calor nas faces exclusivamente por convecção térmica, tem-se que

$$\frac{2h}{\delta k} = \alpha^2$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \alpha^2 (T - T_\infty) = 0 \quad (48)$$

Para o desenvolvimento da equação (48), tomar-se-ão duas condições de contorno que descrevem o problema.

$$T(y = 0) \equiv T_b \quad , \quad \frac{dT}{dy}(y = H) \equiv 0$$

A fim de simplificar os termos vistos até então, tem-se que $\theta = T - T_\infty$ e conseqüentemente $d\theta = dT$. Dado o exposto, a equação (48) resulta em

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - \alpha^2 \theta = 0 \quad (49)$$

A equação (49) é classificada como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem linear homogênea com coeficientes constantes, a qual apresenta solução analítica a

partir do método de solução de *coeficientes a determinar* [25]. A equação característica associada é dada por

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (50)$$

Encontrar as raízes da equação característica acima é o mesmo que obter os autovalores do operador diferencial linear O_L .

$$O_L = aD^2 + bD + c \quad (51)$$

Após a utilização dos métodos matemáticos apropriados e já discutidos neste trabalho, tem-se a solução geral da equação (49) para o caso onde $\alpha \neq 0$.

$$\theta(y) = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y} \quad (52)$$

Ou mesmo

$$\theta(y) = A \cosh(\alpha y) + B \sinh(\alpha y) \quad (53)$$

Para a qual utiliza-se a condição de contorno que diz que $\theta(y = 0) \equiv T_b - T_\infty$. Dessa maneira torna-se possível determinar o coeficiente A .

$$T_b - T_\infty = A + 0 \Rightarrow A = T_b - T_\infty \quad (54)$$

Substituindo o valor calculado de A na equação (53), resta apenas a determinação de B .

$$\theta = (T_b - T_\infty) \cosh(\alpha y) + B \sinh(\alpha y) \quad (55)$$

Utilizando por fim a condição de contorno derivada dessa primeira, tem-se que $\frac{d\theta}{dy}(H) = 0$ e portanto é possível determinar o coeficiente B .

$$\begin{aligned} \alpha(T_b - T_\infty) \sinh(\alpha H) + B \cosh(\alpha H) &= 0 \\ B &= -\frac{\alpha(T_b - T_\infty) \sinh(\alpha H)}{\alpha \cosh(\alpha H)} \Rightarrow B = -(T_b - T_\infty) \tanh(\alpha H) \end{aligned} \quad (56)$$

De posse de tais parâmetros, pode-se dizer que

$$\theta = (T_b - T_\infty)(\cosh(\alpha H) - \operatorname{tgh}(\alpha H)\operatorname{senh}(\alpha H)) \quad (57)$$

Substituindo de volta $\theta = T - T_\infty$ e evidenciando T , conclui-se que

$$T = T_\infty + (T_b - T_\infty)(\cosh(\alpha y) - \operatorname{tgh}(\alpha H)\operatorname{senh}(\alpha y)) \quad (58)$$

Para o caso amplamente utilizado em aletas, em que a altura (H) tende ao infinito:

$$\operatorname{tgh}(\alpha H) \rightarrow 1$$

$$T = T_\infty + (T_b - T_\infty)e^{\alpha y} \quad (59)$$

3.2.2 Inserção analítica da variação da condutividade térmica

A maior parte da literatura referente à dissipação de calor em aletas simplifica suas definições ao considerar que a condutividade térmica do sistema é constante em função da temperatura. Tal fundamentação se torna inadequada à realidade ao observar algumas situações, como as que serão apresentadas em seguida.

Analisando a Tabela 1, observa-se que dos materiais listados na tabela, todos eles apresentam significativas variações dos valores de condutividade térmica principalmente ao se trabalhar em baixas temperaturas [26].

Tabela 1 Valores de condutividade térmica (W/m.K)

Temperatura (K)	10	20	40	60	80	100	150	200	250	300	800
	Materiais										
Alumínio	38000	13000	2400	850	430	300	250	237	235	237	218
Cobre	24500	10800	2170	830	560	480	429	413	406	401	366
Ferro	1480	1540	625	285	175	134	104	94	87	80	43
Silício	2330	4980	3530	2110	1340	884	410	260	190	150	42
Tungstênio	9700	4050	690	310	230	208	192	185	180	174	125

A maioria dos trabalhos que desprezam as variações da condutividade térmica, consideram que todos os materiais possuem como condutividade térmica, geralmente utilizando os valores equivalentes àqueles quando submetidos a $T = 300K$, como uma constante.

Essa premissa é falha em diversas aplicações, especialmente com operações em baixas temperaturas, como é o caso das engenharias aeronáutica e espacial, por exemplo.

Valores de temperatura típicos de componentes aeroespaciais [27] são expostos na Tabela 2, onde é possível observar que diversos equipamentos fundamentais na indústria espacial operam em baixíssimas temperaturas, o que mostra a importância da consideração de condutividade térmica variável.

Componente ou Subistema	Temperatura de operação (°C)	Temperatura de sobrevivência (°C)
Eletrônica geral	-10 a 45	-30 a 60
Baterias	0 a 10	-5 a 20
Detectores infravermelhos	-269 a -173	-269 a 35
Detectores de partículas de estado sólido	-35 a 0	-35 a 35
Motores	0 a 50	-20 a 70
Painéis solares	-100 a 125	-100 a 125

Ao estabelecer que as diferenças de temperatura entre pontos ao longo dos eixos x e z são desprezíveis, tem-se que haja apenas diferença de temperatura em pontos no eixo y . Uma vez que a variação da condutividade térmica se dá em função da variação da temperatura, essa premissa leva a concluir que as variações da condutividade térmica existirão apenas no eixo em que a temperatura também varia, ou seja, o eixo y , portanto a modelagem toma a forma da equação (60).

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial k(T)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\
 & + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \\
 & \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left(k(T) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (60)
 \end{aligned}$$

3.2.3 Inserção analítica dos efeitos de radiação

Ao considerar os efeitos de radiação térmica, tem-se que as condições de contorno nas faces da aleta serão alteradas, pois é justamente em ambas as faces da aleta que se

dá a dissipação térmica. Até a seção anterior foi exposta a solução analítica apenas com os efeitos de convecção e condução.

Tal inserção se dá acrescentando a equação (9), que é a *Lei de Stefan-Boltzmann*, a qual representa o fluxo de calor transferido por radiação térmica.

Na situação que envolve dissipação por radiação térmica e condutividade térmica variável, o fenômeno térmico se apresenta como não linear, dificultando consideravelmente uma solução analítica.

Faz-se necessário modelar o processo de transferência de calor através das faces da aleta, sendo respeitados os parâmetros estabelecidos.

Para tal, será considerado que em cada face ($z = 0$ e $z = \delta$), a dissipação de calor se dá por convecção natural, visto que a face está exposta ao ambiente que a envolve, e radiação térmica, já que o fato de haver valores de temperatura acima de $0K$ gera tal dissipação.

Para a análise total do problema, partindo dos pressupostos expostos, tem-se que:

$$z = 0 \Rightarrow k(T) \frac{dT}{dz} = h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma T^4 \quad (61a)$$

$$z = \delta \Rightarrow -k(T) \frac{dT}{dz} = h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma T^4 \quad (61b)$$

As Equações (61) são analogamente simétricas, visto que as condições geométricas impostas ao problema produzem uma dissipação de calor também simétrica em ambas as faces da aleta, como pode ser visualizado na Figura 17.

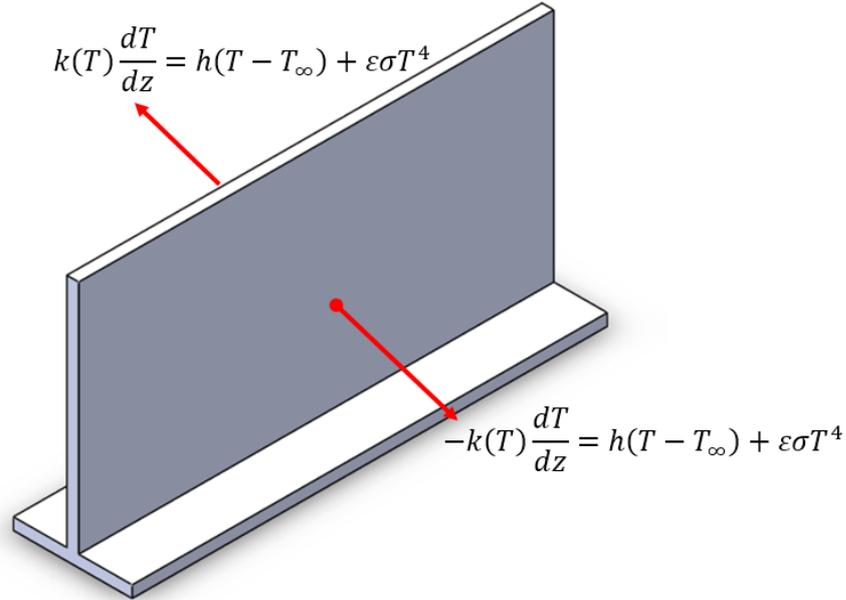


Figura 17 Dissipação do calor nas faces

Ao trabalhar com superfícies estendidas, deve-se considerar uma característica essencial de aletas, que é sua geometria como uma placa muito fina. De tal forma, ao integrar as equações diferenciais acima, conclui-se através do *Teorema do Valor Médio* [28] que

$$\bar{T} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T dz \quad (62)$$

Portanto

$$\frac{d}{dz} \left(k(T) \frac{d\bar{T}}{dz} \right) = \frac{1}{\delta} \{ -h[(\bar{T} - T_{\infty}) + \epsilon\sigma T^4] - h[(\bar{T} - T_{\infty}) + \epsilon\sigma T^4] \} = -\frac{2}{\delta} [h(\bar{T} - T_{\infty}) + \epsilon\sigma T^4] \quad (63)$$

Ao substituir a equação (63) na equação (60), que descreve o perfil de temperaturas da aleta, conclui-se que:

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{2}{\delta} [h(T - T_{\infty}) + \epsilon\sigma T^4] = 0 \quad (64)$$

A equação (64), portanto, é a equação que modela a distribuição térmica com radiação na aleta, ainda numa abordagem bidimensional. Como exposto anteriormente, a situação estudada considera que toda a superfície primária esteja numa temperatura

homogênea prescrita, ou seja, ao longo dessa superfície, todos os pontos estão na mesma temperatura, o que leva a concluir que ao longo do eixo x da aleta, não há variação de temperatura, portanto a derivada da temperatura em relação a x é igual a zero.

$$\cancel{k(T)} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial x^2} + k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{2}{\delta} [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma T^4] = 0$$

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{2}{\delta} [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma T^4] = 0 \quad (65)$$

Onde k é uma função de T , que por sua vez é função de y , por isso k será tratado como uma variável em função de y .

3.2.4 Inserção analítica dos efeitos de interação térmica

Uma vez que um dos principais objetivos deste estudo é apontar a importância em se considerar efeitos térmicos combinados, é fundamental analisar o comportamento de uma superfície estendida quando exposta a outra superfície estendida, assumindo que haja troca de calor entre elas. Esse fenômeno denominar-se-á *mutualidade*.

Embora, como já foi dito, a aleta não seja considerada uma fonte própria de calor, tal premissa se refere a fontes de calor internas à aleta, contudo admite-se que uma aleta seja considerada uma fonte de calor para sua vizinha, gerando assim um efeito mútuo.

A análise de transferência mútua de calor através de radiação entre duas superfícies estendidas muito próximas (aletas duplas) requer uma certa atenção ao ambiente no qual essa troca é realizada, visto que tais condições impactam consideravelmente o fenômeno estudado.

As considerações necessárias para validar a compreensão do ambiente que se encontra entre as duas aletas são expressas de um caso mais simples (desconsiderando os fenômenos de radiação térmica, variação de condutividade térmica e mutualidade) ao mais complexo (considerando todos esses fatores), passando por outros casos intermediários (considerando apenas alguns desses efeitos).

Este trabalho analisa o caso em que a absorção de calor por uma superfície estendida será exclusivamente o calor dissipado pela aleta vizinha através dos efeitos de radiação.

O ambiente, quando considerado vácuo, é chamado como espaço livre e as características próprias do vácuo são utilizadas, ou seja, o ar é tão rarefeito, que o mesmo é desconsiderado, sendo assim não há fluido presente. Além dos pressupostos acima, admiti-se para Espaço livre, que as faces da aleta não recebam calor provenientes de nenhuma outra fonte externa, senão da aleta vizinha.

Uma vez que a radiação térmica não depende de fluido para sua propagação, o vácuo é um meio viável para dissipação de calor nesse caso e a garantia da viabilidade da propagação de ondas térmicas se dá pela condição de *Espaço Livre*, o qual significa uma atmosfera homogênea e isotrópica, sem a existência de qualquer empecilho para a propagação eletromagnética.

Considera-se que o calor oriundo de radiação emitido por uma aleta é exatamente o calor recebido pela outra aleta e os pressupostos de simetria garantem que os efeitos em ambas as aletas seja os mesmos.

Vale ressaltar que a interação mútua de transferência de calor entre as faces da aleta não gera cancelamento por emissão idêntica em posição simétrica, visto que a interação térmica não se dá exclusivamente em pontos simétricos. A Figura 18 exemplifica como um dado ponto em uma das superfícies interage com todos os pontos da superfície vizinha.

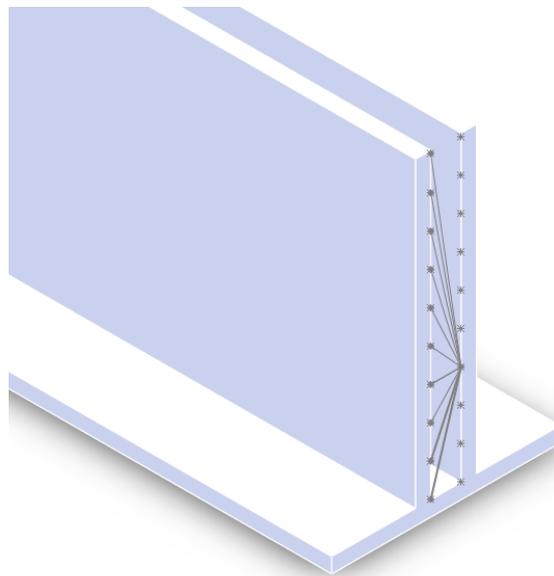


Figura 18 Representação de efeito interação térmica

Matematicamente tal interação acontece com um efeito de constante dissipação e absorção de calor. Portanto, o resultado matemático do efeito da interação entre as aletas

numa perspectiva unicamente de radiação, se dá pela seguinte integral [29]:

$$Q_{mut} = \int_0^b \sigma \bar{T}^4(\xi) \left(\frac{d^2}{2[(y - \xi)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \right) d\xi \quad (66)$$

Para considerar o efeito descrito pela equação (66), deve-se agregar tal equação à equação do perfil térmico, gerando portanto a equação (67) apresentada abaixo.

$$k(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial k(T)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{1}{\delta} [2h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma T^4 - \int_0^b \sigma \bar{T}^4(\xi) \left(\frac{d^2}{2[(y - \xi)^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} \right) d\xi] = 0 \quad (67)$$

Essa é a equação final que modela todo o fenômeno estudado neste trabalho contemplando as premissas e considerações expostas, sendo não transiente, com condutividade térmica variável, problema unidimensional, com efeitos convectivos e radiativos.

3.3 Métodos numéricos

Este trabalho é focado na utilização de métodos numéricos apropriados para a análise matemática de problemas que apresentem difícil solução analítica, principalmente devido a condições de contorno não lineares. A exposição dos métodos empregados também visa a generalização da aplicação para que haja a possibilidade de ampliar a abrangência dos problemas.

3.3.1 Curva de condutividade térmica

Visando aprimorar os métodos de descrição de transferência de calor, procura-se analisar um modelo mais próximo da realidade ao considerar que a condutividade térmica de um material não é constante, como é considerado na maior parte da bibliografia existente.

A consideração da variação de condutividade térmica é um fator fundamental para que o modelo se aproxime de uma situação real, onde cada material possui, de acordo com suas propriedades mecânicas, uma curva característica que descreve os valores de condutividade térmica em função da temperatura num dado ponto.

A substituição do conceito de condutividade térmica constante de qualquer material pelo conceito de condutividade térmica variável em função da temperatura acarreta mudança significativa na análise de dissipação de calor nas aletas, visto que ao longo da aleta existirão grandes diferenças térmicas entre pontos e, portanto, variações consideráveis de valores de condutividade térmica.

Portanto para a caracterização do perfil de condutividade térmica, faz-se necessário traçar parâmetros que relacionem a condutividade térmica (k) e dados de temperatura (T) para cada ponto.

De posse de valores discretos obtidos empiricamente, pode-se estimar o traçado de uma curva que consiga prever quantos mais valores forem requeridos, salvo uma margem de erro.

O método usado foi o *Método de Mínimos Quadrados* (MMQ), que aproxima uma curva à determinados pontos estipulados com a menor distância ao quadrado entre os valores dados e os pontos na curva obtida, onde os dados empíricos foram estipulados [30].

Em suma esse método consiste em escolher valores de α_i ($i=1,2,\dots,n$) de maneira que atenda à equação (68) se aproximando da função $f(x)$.

$$\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x) \quad (68)$$

Onde:

$f(x) \rightarrow$ pontos discretos

$g(x) \rightarrow$ pontos aproximados por estimativa

Portanto pode-se resumir que o MMQ busca a estipulação de tais parâmetros a fim de que a soma dos quadrados das distâncias entre os pontos discretos dados e os pontos estimados seja mínima, como mostra a equação (69).

$$E = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 \quad (69)$$

Para que se possa garantir que o desvio E seja mínimo, é necessário se certificar que:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (70)$$

Justifica-se a utilização deste método no lugar de uma aproximação por interpolação polinomial quando busca-se um valor que exceda o intervalo de pontos dados, ou quando tais dados foram obtidos empiricamente, pois nesse caso os erros contidos na obtenção dos pontos podem ser difíceis de se rastrear e determinar [31].

Basicamente o método de mínimos quadrados ajusta uma curva a uma tabela de pontos como pares ordenados do tipo $(x_1, f(x_1)), x_2, f(x_2), \dots, x_n, f(x_n)$, sendo que os valores de x_i pertencem a um intervalo conhecido [32].

A generalização do método é descrita pelo sistema de equações (71) [33].

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{k=1}^n g_1(x_k)g_1(x_k) \right] \alpha_1 + \dots + \left[\sum_{k=1}^n g_n(x_k)g_1(x_k) \right] \alpha_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^n g_1(x_k)g_2(x_k) \right] \alpha_1 + \dots + \left[\sum_{k=1}^n g_n(x_k)g_2(x_k) \right] \alpha_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)g_2(x_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left[\sum_{k=1}^n g_n(x_k)g_1(x_k) \right] \alpha_1 + \dots + \left[\sum_{k=1}^n g_n(x_k)g_n(x_k) \right] \alpha_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)g_n(x_k) \end{array} \right. \quad (71)$$

Para diversos casos, ao analisar um diagrama de dispersão de dados, conclui-se que as funções que compõe o problema são não lineares, como é o caso deste trabalho que pode ser visualizado na Figura 19, o que gera a necessidade de linearização do problema.

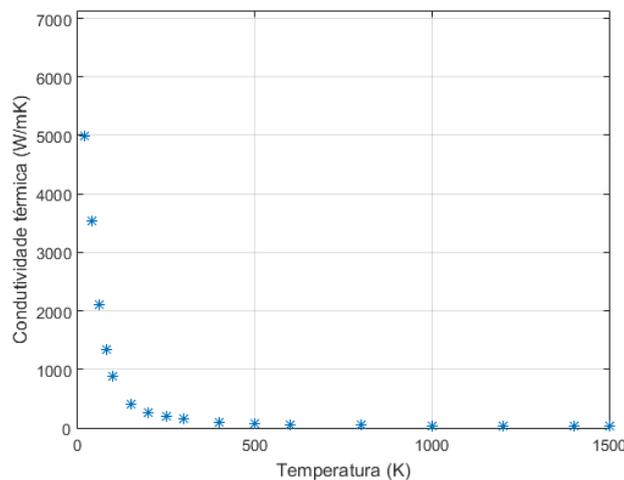


Figura 19 Diagrama de dispersão

Para o problema deste estudo verificou-se que os pontos determinados por uma grande gama de materiais utilizados industrialmente para condução térmica caracterizam aproximadamente uma curva descrita por uma equação exponencial do tipo

$$y \approx f(x) = \varphi(x) = \alpha_1 e^{-\alpha_2 x} \quad (72)$$

Onde y representa nesse caso os valores de condutividade térmica, x representa os valores de temperatura associados a cada ponto e os coeficientes α_1 e α_2 são garantidamente positivos [33].

Esse método demanda que sejam estabelecidos os coeficientes α_1 e α_2 a fim de generalizar a curva para valores de T [34].

Para o caso, utilizando o sistema de equações (71), é estabelecido $g_1(x) = 1$ e $g_2(x) = x$ para a substituição no sistema de equações [33].

A partir da Tabela 1 selecionou-se como material o Silício, que é o semicondutor mais utilizado na indústria de equipamentos eletrônicos. Além de apresentar boas propriedades de condutividade elétrica, também possui boa condutividade térmica, ademais é encontrado em abundância na natureza, sendo o segundo elemento químico mais abundante na crosta terrestre [35].

Para as características do silício, os dados de condutividade térmica foram ajustados conforme a descrição do MMQ para o caso exponencial exposta anteriormente e tais dados ajustados são expostos na Tabela 3

Tabela 3 Dados ajustados

x	20	40	60	80	100	150	200	250	...
$z = \ln(y)$	8,5131	8,169	7,6544	7,2	6,7844	6,0161	5,5606	5,247	...
x	300	400	500	600	800	1000	1200	1400	1500
$z = \ln(y)$	5,0106	4,5951	4,3307	4,1271	3,7376	3,4339	3,258	3,178	3,1354

De posse de dezessete valores de condutividade térmica associados a seus respectivos valores de temperatura, tem-se a partir do sistema de equações (71) que

$$\begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{17} g_1(x_k) g_1(x_k) \right] a + \left[\sum_{k=1}^{17} g_2(x_k) g_1(x_k) \right] b = \sum_{k=1}^{17} z(x_k) g_1(x_k) \\ \left[\sum_{k=1}^{17} g_1(x_k) g_2(x_k) \right] a + \left[\sum_{k=1}^{17} g_2(x_k) g_2(x_k) \right] b = \sum_{k=1}^{17} z(x_k) g_2(x_k) \end{cases} \quad (73)$$

Analogamente ao processo de linearização, o ajuste dos pontos da curva para a dispersão avaliada como um caso exponencial é dado por:

$$\ln(Ae^{-Bx}) = \ln(A) - Bx = \varphi(x) \quad (74)$$

Portanto o ajuste dos mínimos quadrados não será feito de maneira a contemplar y , mas sim no ajuste em $z = \ln(y)$. E essa formulação se dá na forma da equação (75).

$$\varphi(x) = a + bx \quad (75)$$

Onde $a = \ln(A)$ e $b = -B$.

A equação (75) mostra o processo de linearização do problema, o qual permite a busca pelo desvio mínimo, como foi exposto na equação (70), portanto o desvio mínimo se dá na formulação das equações (76).

$$\frac{\partial E}{\partial a} = -2 \sum_{k=1}^n [y_i - (a + bx_i)] = 0 \quad (76a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum_{k=1}^n [y_i - (a + bx_i)]x_i = 0 \quad (76b)$$

A simplificação das equações (76) se dá pelas equações conhecidas como *equações normais*, dadas por

$$an + b \sum_{k=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n y_i \quad (77a)$$

$$a \sum_{k=1}^n x_i + b \sum_{k=1}^n x_i^2 = \sum_{k=1}^n x_i y_i \quad (77b)$$

A forma matricial do sistema das equações (77):

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^n x_i \\ \sum_{k=1}^n x_i & \sum_{k=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n y_i \\ \sum_{k=1}^n x_i y_i \end{bmatrix} \quad (78)$$

A solução do sistema representado pela equação matricial (78) é dada pelas equa-

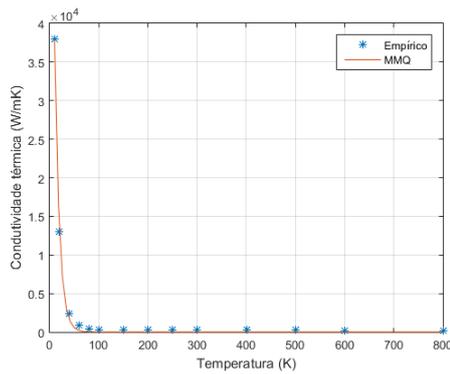
ções (79).

$$A = \frac{\sum(\ln y) - b \sum(\ln x)}{n} \quad (79a)$$

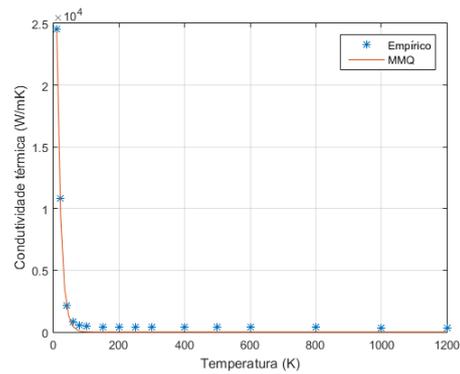
$$B = \frac{n \sum(\ln x \ln y) - \sum(\ln x) \sum(\ln y)}{n \sum[(\ln x)^2] - (\sum(\ln x))^2} \quad (79b)$$

Onde $a = \exp(A)$ e $b = B$.

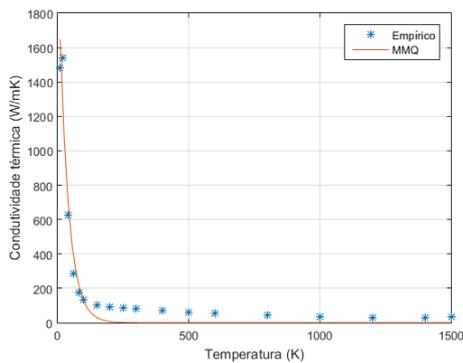
Para demonstrar que a aproximação através da equação (72) atende com certa eficiência para vários materiais amplamente comuns na indústria, algumas aproximações são ilustrada na Figura 21, que mostra que diversos materiais industriais apresentam comportamento semelhante.



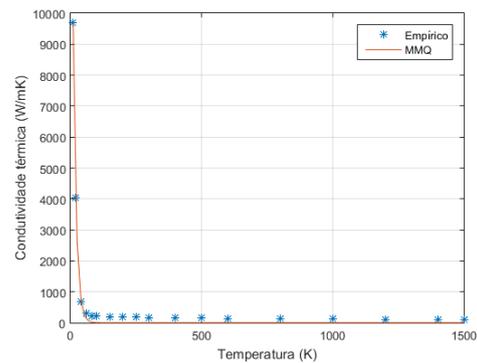
(a) MMQ Alumínio



(b) MMQ Cobre



(c) MMQ Ferro



(d) MMQ Tungstênio

Figura 20 MMQ para diversos materiais

A Figura 21 apresenta um gráfico com resultados plotados

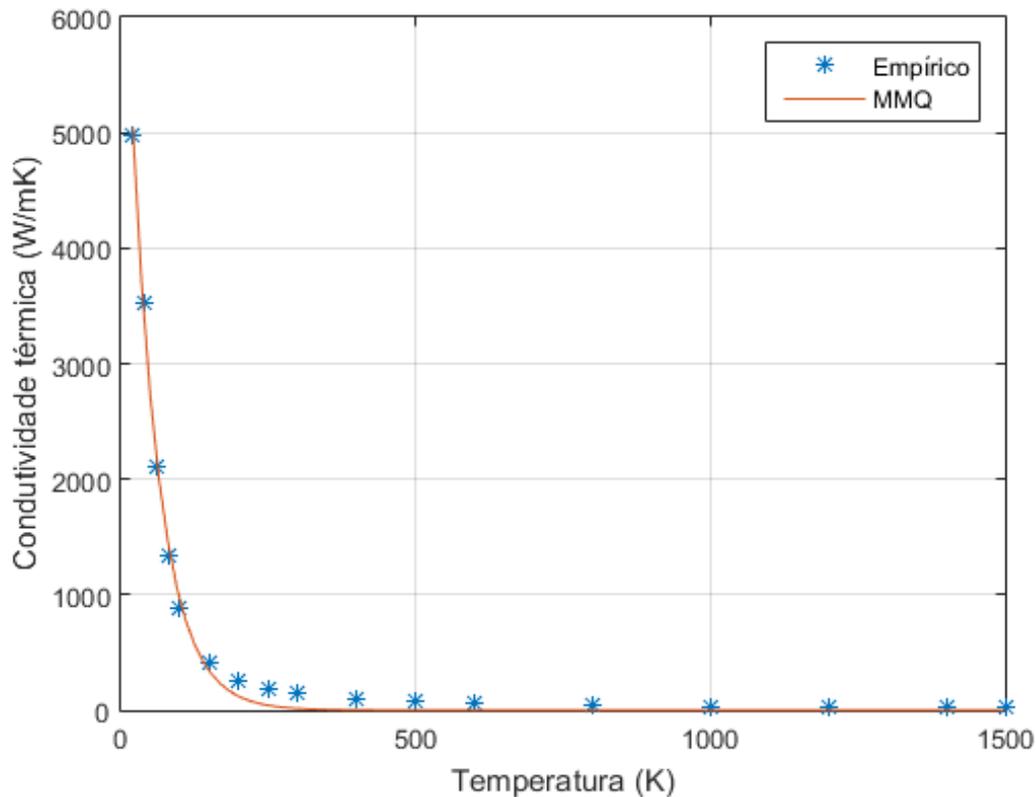


Figura 21 Ajuste de curva por MMQ do tipo exponencial

3.3.2 Geração de malha e diferenciação numérica

Uma vez que este trabalho propõe que o perfil de temperaturas na condição de que k seja variável, faz-se necessário avaliar tal variação. A equação (65) demanda uma avaliação em que k varie em função de y . Portanto, como dito anteriormente, se k é uma função de T , que por sua vez é uma função de y , conclui-se que exista uma relação entre k e y .

Além disso, uma vez que a equação que descreve o perfil de temperaturas ao longo da aleta apresenta um termo diferencial de quarta ordem, fez-se necessário desmembrar a equação de forma a possibilitar um tratamento fragmentado entre o termo de radiação térmica (que é de quarta ordem) e o restante da equação (que se torna de segunda ordem). Outrossim, os cálculos para a variação da condutividade térmica se processam de forma análoga numa equação diferencial de segunda ordem.

Para resolver numericamente as derivadas presentes no problema estudado na equação (65) (de primeira e segunda ordem) recorreu-se ao método de soluções numéricas de

Diferenças Finitas (MDF), o qual é oriundo da *Série de Taylor*, com truncamento de mesma grandeza da ordem da equação diferencial em questão [18].

A série de Taylor truncada descreve que

$$f(x + \epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon + \frac{f''(x)\epsilon^2}{2} + o(\epsilon^3) \quad (80a)$$

$$f(x - \epsilon) = f(x) - f'(x)\epsilon + \frac{f''(x)\epsilon^2}{2} + o(\epsilon^3) \quad (80b)$$

A utilização das Equações 80a e 80b para o desenvolvimento do MDF pode ser dado de três formas: Diferenças progressivas, onde utiliza-se o valor atribuído à função na iteração atual e posterior; Diferenças regressivas, que avaliam da derivada com as iterações atual e anterior; e Diferenças centradas, que são utilizadas para calcular numericamente a derivada usando as iterações anterior e posterior. A escolha da forma se dá pela conveniência em cada caso, de maneira que seja possível, ou mais simples o processamento numérico e pela necessidade de maior acurácia.

Portanto o método, de posse dessas equações, estabelece soluções para as derivadas de primeira e segunda ordem. Para o presente estudo se mostrou mais conveniente utilizar diferenças centradas para a derivada de primeira ordem e segunda ordem, como exposto abaixo.

$$f'(x) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)}{2\epsilon} + o(\epsilon^2) \quad (81a)$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \epsilon) - 2f(x) + f(x - \epsilon)}{\epsilon^2} + o(\epsilon^2) \quad (81b)$$

Esse método utiliza modelo nodal [18], o qual consiste em dividir a aleta em pontos nodais, que serão convenientemente posicionados, de maneira que facilite a análise. A situação deste estudo propõe que seja elaborada uma malha, conforme o exemplo ilustrativo na Figura 22 apresentada abaixo.



Figura 22 Malha

Sendo considerado o pressuposto de malha unidimensional, com variação exclusivamente ao longo do eixo vertical y , as iterações serão realizadas a cada nó, o qual encontra-se espaçado do próximo em Δy .

É comumente utilizado em métodos numéricos iterativos índices que descrevam a variação das iterações, sendo utilizado nesse trabalho o índice j para representar variações iterativas em k e ao longo do eixo y . A Figura 23 representa a disposição dos pontos nodais ao longo de uma malha bidimensional, dada apenas como ilustração.

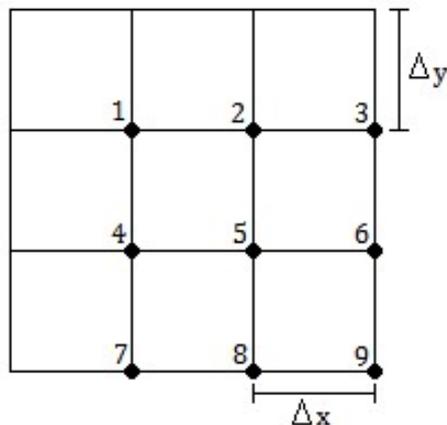


Figura 23 Pontos nodais

Já que todas as derivadas da equação (65) são apenas em função de y , as mesmas

podem ser consideradas derivadas totais em y [36]. Então a aplicação do MDF de diferenças finitas para a solução da derivada de k em função de y e de T em relação a y , expostas na equação (65) se dão da seguinte forma:

$$\frac{dk}{dy} = \frac{k_{j+1} - k_{j-1}}{2l} \quad (82a)$$

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2l} \quad (82b)$$

Analogamente é descrita a solução da derivada de segunda ordem exposta na equação (65), considerando que apenas há variação térmica ao longo de y .

$$\frac{d^2T}{dy^2} = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{l^2} \quad (83)$$

De posse de tais relações, é possível substituir na equação da distribuição térmica os termos diferenciais pelas expressões em diferenças finitas, e em seguida será analisado o termo de radiação térmica.

$$\begin{aligned} \frac{k}{l^2} (T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}) + \left[\left(\frac{k_j - k_{j-1}}{l} \right) \left(\frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2l} \right) \right] - \frac{2}{\delta} [h(T_j - T_\infty) + \varepsilon\sigma T_{rad_j}] &= 0 \\ \frac{T_{j+1}k_j - T_{j+1}k_{j-1} - T_{j-1}k_j + T_{j-1}k_{j-1}}{2l^2} + \frac{T_{j+1}k_j - 2T_jk_jl^2 + T_{j-1}k_j}{l^2} - \frac{2h(T_j + T_\infty) - 2\varepsilon\sigma T_{rad}}{\delta} &= 0 \\ T_j \left(\frac{2k_j + 2hl^2}{\delta l^2} \right) = \frac{1}{l^2} \left[T_{j+1} \left(\frac{k_j - k_{j-1}}{2} + k_j \right) - T_{j-1} \left(\frac{k_j - k_{j-1}}{2} - k_j \right) \right] + \frac{2hT_\infty - 2\varepsilon\sigma T_{rad}}{\delta} \\ T_j = \frac{\delta}{2k_j + 2hl^2} \left[T_{j+1} \left(\frac{k_j - k_{j-1}}{2} + k_j \right) - T_{j-1} \left(\frac{k_j - k_{j-1}}{2} - k_j \right) \right] + \\ + \frac{2hl^2T_\infty - 2\varepsilon\sigma T_{rad}}{2k_j + 2hl^2} \end{aligned} \quad (84)$$

A equação (84) foi resolvida aplicando a forma explícita do MDF, a qual calcula o estado do sistema numa iteração posterior ao estado atual do sistema.

3.3.3 Inserção numérica dos efeitos de radiação

Ao estabelecer as equações que modelam o fenômeno excetuando os efeitos de radiação térmica, sua inclusão é simples, pois tais efeitos se dão em condições vetoriais

idênticas, uma vez que ainda pode-se tratar o problema como unidimensional, com mesmas condições de contorno e variando a temperatura exclusivamente do eixo y , que representa a altura da aleta.

Numericamente, o procedimento será de sobremaneira simples, pois com o argumento das iterações definido em cada iteração, basta definir o valor de T_{rad} na mesma iteração, que será uma função de T_j , ou seja:

$$T_{rad_j} = f(T_j)$$

A solução se encontra em calcular o valor de T_{rad} em cada iteração posteriormente ao cálculo do restante da equação (84). Uma vez que são atualizados os valores obtidos sem o termo de radiação, esse valor é utilizado para atualizar o valor de T_{rad} .

Para cada iteração j , a equação (84) irá considerar que

$$T_{rad_j} = T_j^4$$

uma vez que T_j já está definido para a iteração j .

4 RESULTADOS

Este trabalho realizou a investigação do perfil térmico caso a caso, do mais simples ao mais complexo, onde foram avaliados diversos parâmetros e situações a fim de comparar a performance das superfícies estendidas em cada caso e, desta forma, ser possível compreender a relevância da aplicação de tais parâmetros.

Como este é um trabalho que propõe uma análise numérica, onde todo cálculo realizado numericamente carrega consigo erros de diversas naturezas [37]. Vale ressaltar alguns tipos de erros numéricos existentes.

1. Erros de modelo: Qualquer modelagem matemática apresenta imperfeições conceituais, às quais a ciência procura sempre aprimorar, visto que a representação de fenômenos reais nunca é exata. Simplificações ao modelo são constantemente utilizadas para facilitar ou até possibilitar os cálculos.
2. Erros de dados: Todos os parâmetros utilizados numa análise numérica são oriundos de medições empíricas e, em alguns casos, dedução orientada. Tais origens não podem ser consideradas totalmente precisas e fiéis, mesmo que possuam alta taxa confiabilidade.
3. Erros de truncamento: Diversos cálculos realizados possuem potencial para serem realizados infinitamente devido à quantidade de casas decimais, ou mesmo comprimento numérico [38]. A fim de viabilizar um cálculo finito, é realizado um truncamento numérico, onde o comprimento numérico é limitado de maneira que não se percam valores essenciais ao resultado.
4. Erros de arredondamento: Uma análise numérica frequentemente é induzida a uma aritmética de precisão infinita, gerando infinitos dígitos, tal como no caso de truncamento [39]. O arredondamento realiza uma aproximação do número em questão a um valor próximo o suficiente para não comprometer o resultado.

A análise e processamento de todos os dados, métodos e processos expostos neste trabalho resultaram em algumas conclusões extremamente relevantes.

Uma vez que este trabalho defende que determinados fenômenos não podem ser desprezados, todos os procedimentos de simulação ocorrem contemplando as mais vari-

adas situações para que desta forma seja possível realizar comparações dos resultados e determinar a relevância do estudo.

O ambiente de simulação foi mantido em todas as situações, exceto pelos parâmetros que caracterizam as diferenças preponderantes que serão comparadas.

4.1 Parâmetros e resultados de simulação

Foi utilizado para a realização deste trabalho o software comercial Matlab®, que permitiu a confecção de um algoritmo que contenha todos os dados matemáticos e processe as informações e cálculos necessários.

Símbolo	Significado	Valor
T_{∞}	Temperatura ambiente	300K
T_{base}	Temperatura da superfície primária	500K
j_{max}	Quantidade de nós orientados verticalmente	50
L_y	Altura da aleta	10mm
δ	Espessura da aleta	1mm
tol_T	Precisão especificada	10^{-6}

Os dados expostos na Tabela 4 permitem as análises de natureza numérica, as quais serão esmiuçadas nas subseções que seguem. De acordo com o exposto na 2.5, a partir dos dados colocados até aqui, é possível estimar a eficiência da aplicação de aletas, mesmo que de forma preliminar, neste trabalho. Uma vez utilizando as propriedades do ar como fluido circundante e do silício como material base da constituição das aletas, baseado na equação (33), pode-se definir que

Vale ressaltar que os parâmetros estipulados acima podem ser manipulados de maneira conveniente de forma a se investigar resultados em outras circunstâncias.

A fim de permitir melhor visualização e entendimento dos resultados obtidos, foram gerados gráficos de representação do perfil térmico.

Para avaliar o comportamento da condutividade térmica em diferentes valores de temperaturas, o processamento dos dados foi feito de seis maneiras diferentes a partir das combinações:

1. Aleta simples, sem radiação e k constante para qualquer T .
2. Aleta simples, sem radiação e k variável em função de T .

3. Aleta simples, com radiação e k constante para qualquer T .
4. Aleta simples, com radiação e k variável em função de T .
5. Aleta dupla, com radiação e k constante para qualquer T .
6. Aleta dupla, com radiação e k variável em função de T .

4.1.1 Aleta simples, sem radiação e k constante para qualquer T

Os primeiros resultados estudados foram avaliando aletas simples, seguindo conceitos propostos por Murray (1938) e Gardner (1945), os quais desenvolveram uma lista de pressupostos conhecida como *Hipóteses de Murray-Gardner* [40]. Essas afirmações procuram simplificar tanto quanto possível os cálculos diferenciais que modelam os efeitos estudados. Dentre essas hipóteses, uma delas é a avaliação da dissipação de calor em superfícies estendidas considerando sua condutividade térmica constante em todos os pontos e desprezando os efeitos de radiação. Os resultados obtidos nessa avaliação seguem na Figura 24.

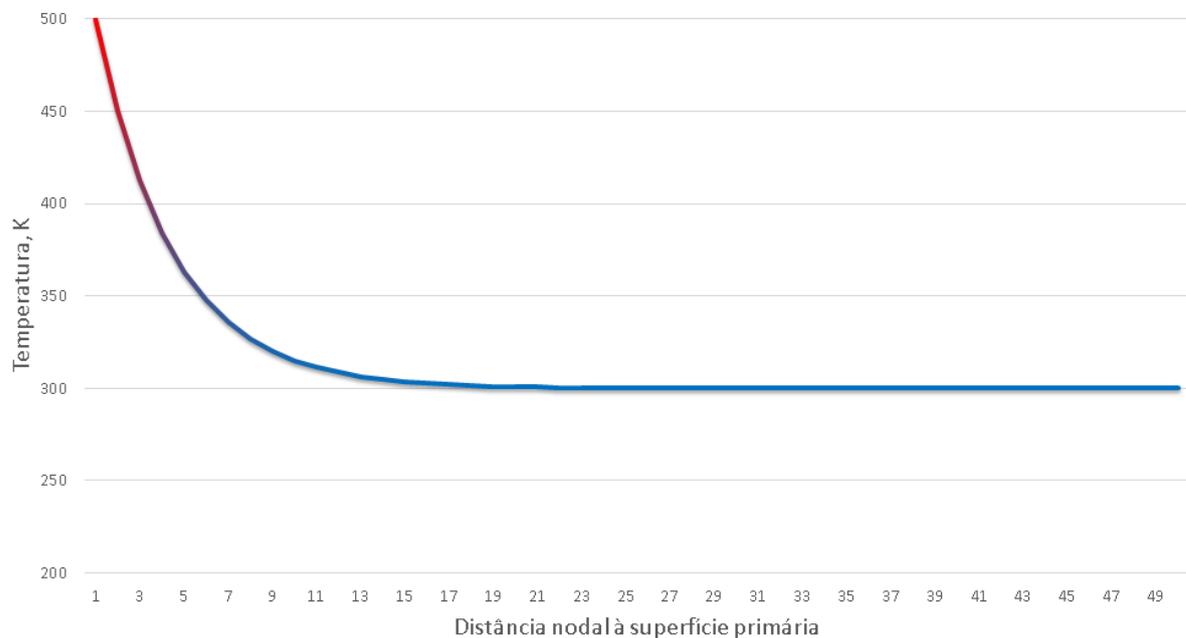


Figura 24 Perfil térmico de aleta simples, sem radiação e k constante

A Tabela 5 expõe os valores de temperatura nos primeiros dez e nos últimos dez nós que compõe o eixo vertical da malha da aleta.

Tabela 5 Resultados numéricos de aletas simples, sem radiação, k constante

Nó			Nó	
1	500		41	300
2	450		42	300
3	412,5		43	300
4	384,4		44	300
5	363,3		45	300
6	347,5		46	300
7	335,6		47	300
8	326,7		48	300
9	320		49	300
10	315		50	300
Legenda de cores				
	500	T	300	

4.1.2 Aleta simples, sem radiação e k variável em função de T

Um dos parâmetros propostos neste trabalho é a inserção dos efeitos gerados pelo fenômeno de variação de condutividade térmica, em função da temperatura. Tal análise foi descrita na seção 3.3. Kraus et al. [40] sugeriram que a hipótese de Murray-Gardner que avalia a condutividade térmica constante em todas as direções, ao ser desconsiderada, propõe resultados mais próximos a um modelo real. A Figura 25 apresenta os resultados na avaliação de aletas simples, incluindo apenas os efeitos da variação na condutividade térmica.

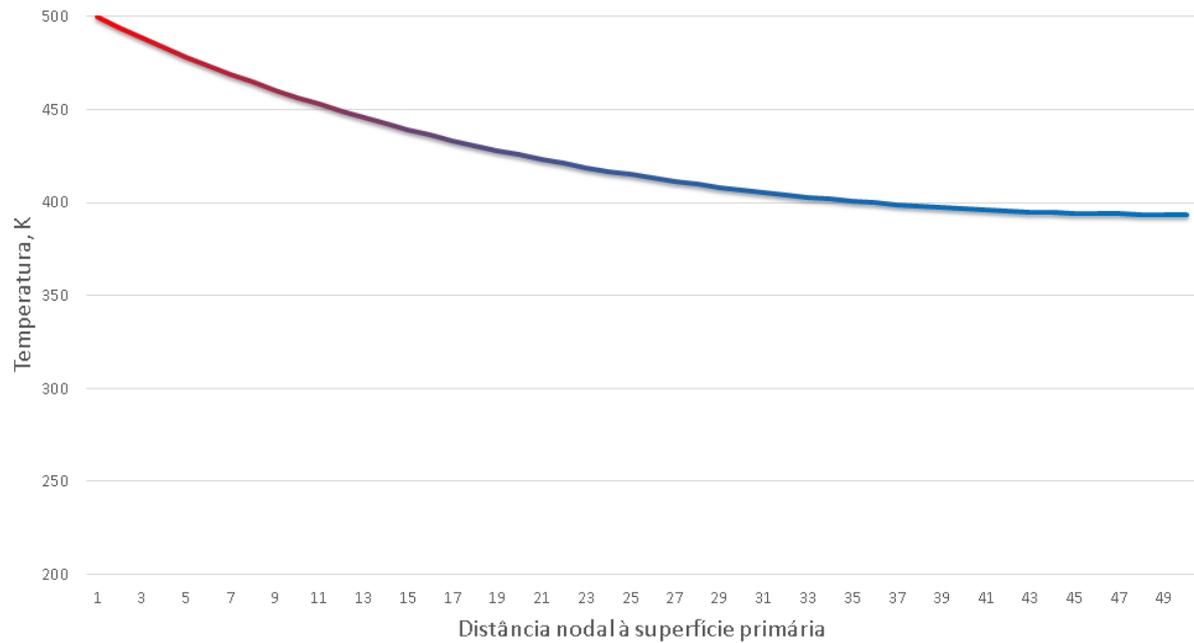


Figura 25 Perfil térmico de aleta simples, sem radiação e k variável

A Tabela 6 apresenta os valores nos primeiros dez e nos últimos dez nós que compõe o perfil térmico deste caso.

Tabela 6 Resultados numéricos de aletas simples, sem radiação, k variável

Nº		Nº	
1	500	41	396,012
2	494,2	42	395,475
3	488,7	43	395,007
4	483,4	44	394,607
5	478,4	45	394,274
6	473,6	46	394,009
7	469	47	393,81
8	464,6	48	393,68
9	460,5	49	393,61
10	456,5	50	393,61
Legenda de cores			
	500	T	394

4.1.3 Aleta simples, com radiação e k constante para qualquer T

Muitos autores já propuseram estudos de superfícies estendidas considerando os efeitos de radiação térmica na dissipação do calor. Callinan e Berggren [41] trouxeram uma das primeiras publicações a respeito de tais considerações com aplicação em aletas.

A relevância desta consideração pode ser comprovada por diversas situações, uma vez que a radiação térmica não depende de um meio material, portanto aplicações no vácuo, ou atmosfera rarefeita podem ser analisadas. A Figura 26 apresenta os resultados da inserção desses efeitos nas situações expostas.

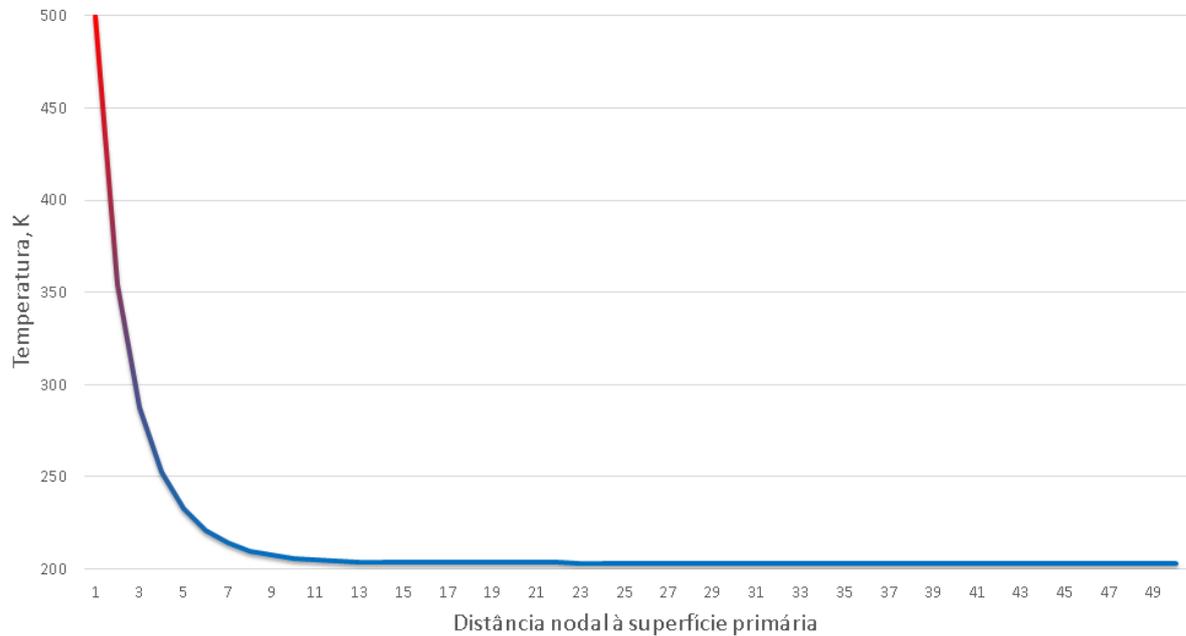


Figura 26 Perfil térmico de aleta simples, com radiação e k constante

Na Tabela 7 é possível ver os valores dos primeiros dez e dos últimos dez nós do perfil térmico, onde acrescenta-se a dissipação de calor por radiação.

Tabela 7 Resultados numéricos de aletas simples, com radiação, k constante

Nó		Nó	
1	500	41	203,25
2	354,4	42	203,25
3	287,8	43	203,25
4	252,6	44	203,25
5	232,7	45	203,25
6	221	46	203,25
7	214,1	47	203,25
8	209,9	48	203,25
9	207,3	49	203,25
10	205,7	50	203,25

Legenda de cores

500	T	203
-----	---	-----

Vale ressaltar um importante fragmento desta parte da análise onde identificou-se

que, uma vez inseridos os efeitos de dissipação por radiação térmica, o último termo da equação (61) garante que tais efeitos não dependem da temperatura ambiente. Isso leva a concluir que essa consideração permite que o perfil de temperaturas da aleta alcance valores mais baixos do que a temperatura ambiente.

4.1.4 Aleta simples, com radiação e k variável em função de T

A combinação dos efeitos gerados pela dissipação de calor por radiação térmica, além da considerar os efeitos de variação da condutividade térmica em função da temperatura em cada ponto foi proposta por Cohen [42] e traz uma maior aproximação a resultados reais. À equação diferencial com condições de contorno não lineares (em função do termo de radiação) é agregado o cálculo aproximado de valores de condutividade térmica através dos métodos numéricos já descritos. A Figura 27 apresenta os resultados obtidos nessa situação.

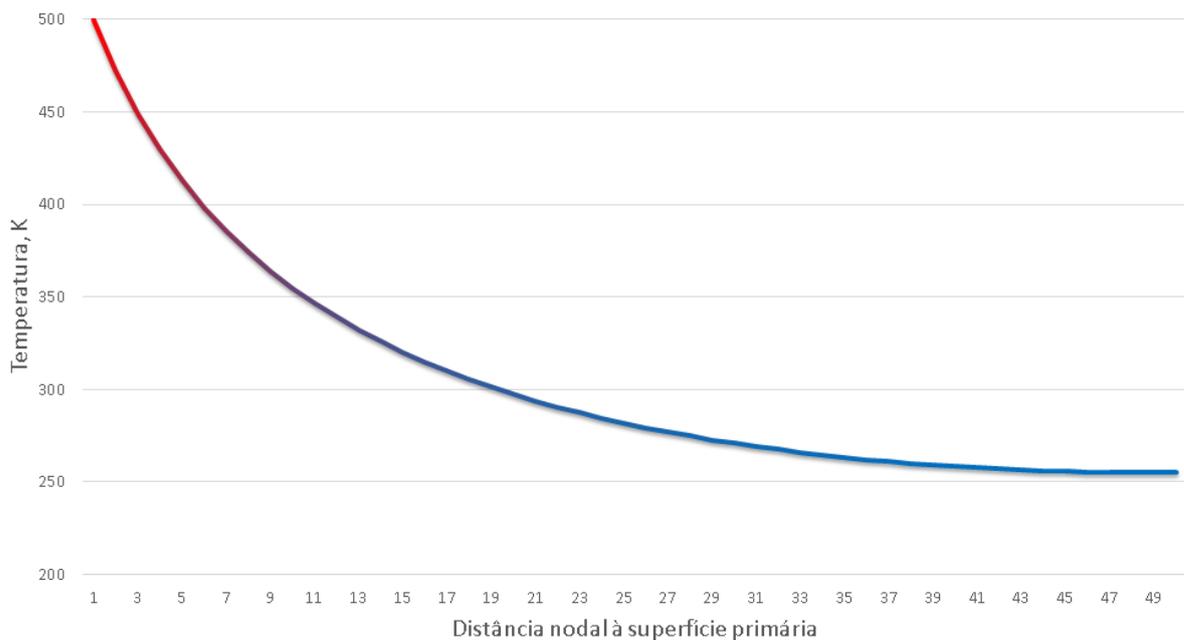


Figura 27 Perfil térmico de aleta simples, com radiação e k variável

Na Tabela 8 apresentam-se os valores dos primeiros dez e dos últimos dez nós que compõe o perfil térmico deste caso.

Tabela 8 Resultados numéricos de aletas simples, com radiação, k variável

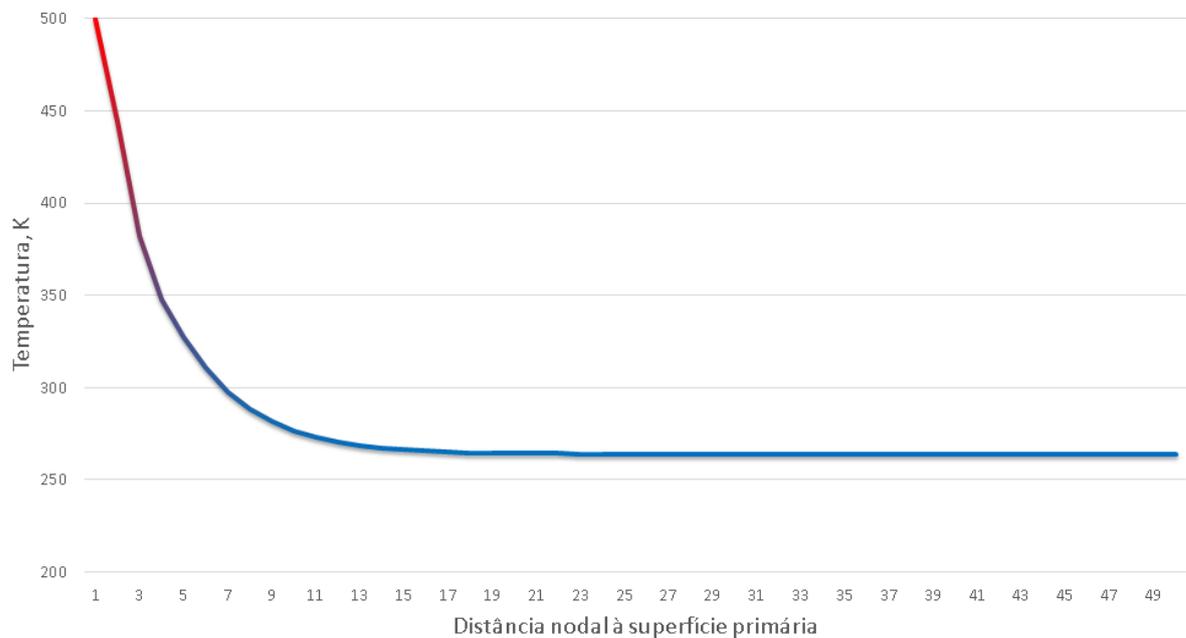
Nó		Nó	
1	500	41	257,69
2	472,4	42	257,06
3	449,3	43	256,52
4	429,8	44	256,06
5	413	45	255,67
6	398,4	46	255,37
7	385,5	47	255,14
8	374,1	48	254,99
9	363,9	49	254,92
10	354,7	50	254,92

Legenda de cores

500 T 255

4.1.5 Aleta dupla, com radiação e k constante para qualquer T

Esta situação provê uma interessante aproximação de um modelo real, pois a consideração em duas aletas traz consigo o conceito de interação térmica, ou seja, uma aleta, além de dissipar calor, como já foi dito, também recebe calor da aleta vizinha, sendo essa uma relação mútua. Eckert et al. [43] propuseram a análise dos efeitos gerados pela interação térmica entre aletas. A Figura 28 traz os resultados de tal análise.

Figura 28 Perfil térmico de aleta dupla, com radiação e k constante

Na Tabela 9 apresentam-se os valores dos primeiros dez e dos últimos dez nós

que descrevem o comportamento térmico em uma superfície estendida no caso de aletas duplas.

Tabela 9 Resultados numéricos de aletas duplas, com radiação, k constante

Nº			Nº		
1	500		41	263,96	
2	444,3		42	263,96	
3	382,2		43	263,96	
4	347,5		44	263,95	
5	327,6		45	263,94	
6	310,4		46	263,92	
7	297,8		47	263,89	
8	288,3		48	263,82	
9	281,4		49	263,73	
10	276,4		50	263,73	
Legenda de cores					
	500	T		264	

4.1.6 Aleta dupla, com radiação com k variável em função de T

Por fim os principais resultados, os quais que se espera deste trabalho, são do perfil de temperaturas numa situação apresentando aleta dupla, as quais interagem mutuamente com dissipação de calor por radiação térmica, onde essa é absorvida pela aleta vizinha, cuja condutividade térmica varia em função da temperatura em cada ponto.

Como o real propósito deste trabalho consiste em apresentar um modelo que se aproxime da realidade, o resultado do processamento é apresentado na Figura 29 por meio de plotagem gráfica.

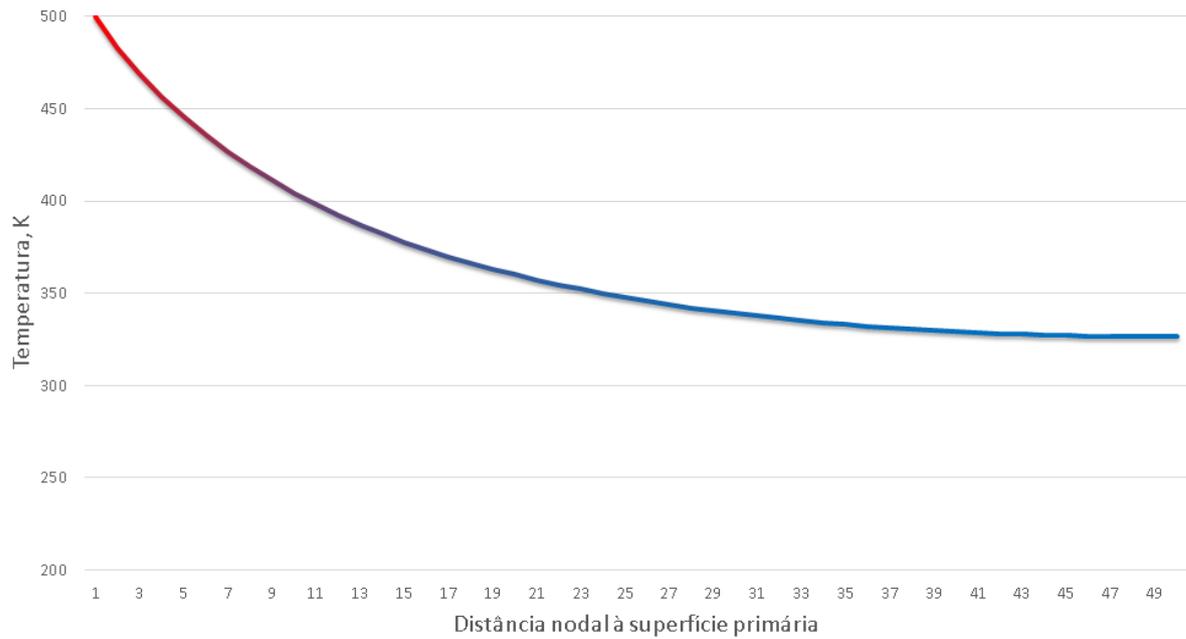


Figura 29 Perfil térmico de aleta dupla, com radiação e k variável

Na Tabela 10 apresentam-se os valores dos primeiros dez e dos últimos dez nós de aletas duplas que interagem termicamente.

Tabela 10 Resultados numéricos de aletas duplas, com radiação, k variável

Nó		Nó	
1	500	41	328,7
2	482,6	42	328,21
3	468,8	43	327,78
4	456,5	44	327,41
5	445,5	45	327,11
6	435,5	46	326,86
7	426,6	47	326,68
8	418,4	48	326,56
9	411	49	326,49
10	404,2	50	326,49

Legenda de cores

500	T	326
-----	---	-----

A fim de demonstrar a importância deste estudo e as análises em situações propostas, todos os resultados numéricos foram organizados na Tabela 11 de maneira que fosse possível entender a variação térmica em todas as situações contempladas neste estudo para todos os nós do processamento.

Tabela 11 Resultados

Nº	Simplex, sem radiação, k constante	Simplex, sem radiação, k variável	Simplex, com radiação, k constante	Simplex, com radiação, k variável	Dupla, com radiação, k constante	Dupla, com radiação, k variável
	1	500	500	500	500	500
2	450,009	494,187	354,391	472,352	444,281	482,642
3	412,513	488,653	287,807	449,331	382,204	468,81
4	384,39	483,38	252,613	429,807	347,513	456,491
5	363,296	478,356	232,703	413,006	327,599	445,458
6	347,475	473,567	221,036	398,374	310,428	435,527
7	335,608	469	214,065	385,504	297,787	426,553
8	326,708	464,644	209,853	374,088	288,337	418,412
9	320,032	460,489	207,291	363,89	281,425	411,001
10	315,025	456,524	205,726	354,724	276,415	404,236
11	311,269	452,74	204,768	346,442	272,813	398,041
12	308,453	449,129	204,181	338,924	270,238	392,356
13	306,34	445,684	203,821	332,072	268,404	387,127
14	304,755	442,395	203,6	325,805	267,103	382,307
15	303,567	439,258	203,464	320,056	266,181	377,857
16	302,675	436,265	203,381	314,767	265,529	373,741
17	302,006	433,41	203,329	309,889	265,068	369,93
18	301,505	430,687	203,298	305,383	264,742	366,395
19	301,129	428,092	203,278	301,211	264,513	363,114
20	300,847	425,62	203,267	297,343	264,351	360,065
21	300,635	423,265	203,259	293,752	264,236	357,229
22	300,476	421,024	203,255	290,415	264,156	354,591
23	300,357	418,893	203,252	287,312	264,099	352,135
24	300,268	416,868	203,25	284,423	264,059	349,848
25	300,201	414,945	203,249	281,734	264,031	347,718
26	300,151	413,122	203,249	279,229	264,011	345,734
27	300,113	411,394	203,248	276,896	263,997	343,887
28	300,085	409,76	203,248	274,725	263,987	342,167
29	300,064	408,217	203,248	272,704	263,98	340,567
30	300,048	406,761	203,248	270,825	263,975	339,081
31	300,036	405,391	203,248	269,079	263,972	337,7
32	300,027	404,105	203,248	267,46	263,969	336,42
33	300,02	402,901	203,248	265,961	263,967	335,235
34	300,015	401,777	203,248	264,575	263,966	334,141
35	300,011	400,73	203,248	263,299	263,965	333,133
36	300,008	399,76	203,248	262,126	263,965	332,207
37	300,006	398,865	203,248	261,052	263,964	331,359
38	300,005	398,044	203,248	260,075	263,964	330,588
39	300,004	397,296	203,248	259,19	263,963	329,889
40	300,003	396,619	203,248	258,394	263,963	329,26
41	300,002	396,012	203,248	257,685	263,961	328,7
42	300,002	395,475	203,248	257,061	263,96	328,206
43	300,001	395,007	203,248	256,519	263,956	327,776
44	300,001	394,607	203,248	256,057	263,95	327,41
45	300,001	394,274	203,248	255,675	263,94	327,106
46	300,001	394,009	203,248	255,37	263,92	326,863
47	300	393,81	203,248	255,143	263,885	326,68
48	300	393,678	203,248	254,992	263,824	326,557
49	300	393,612	203,248	254,916	263,728	326,495
50	300	393,612	203,248	254,916	263,728	326,495

Legenda de cores

500 T 200

Além disso foi gerado um gráfico na Figura 30 que sobrepusesse todos os resultados analisados por este trabalho a fim de demonstrar a discrepância entre os resultados dos perfis térmicos em todas as situações analisadas neste trabalho.

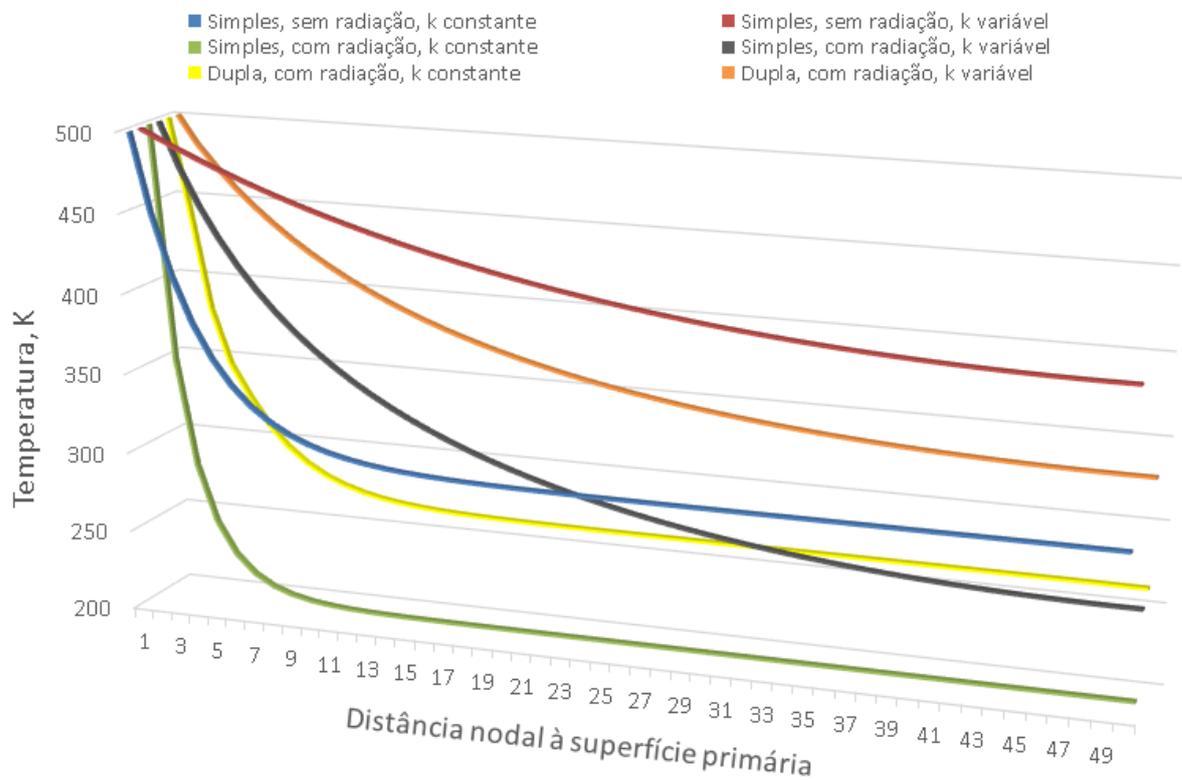


Figura 30 Comparação de perfis térmicos

Já que o objetivo fim desta análise é descrever os resultados na situação de aletas dupla, com dissipação por radiação térmica e condutividade térmica variável, todos os outros resultados numéricos foram comparados a esse, apresentados na Tabela 12, onde tais comparações são expressas na diferença percentual ao resultado conclusivo deste trabalho.

Tabela 12 Erro percentual relativo

Nó	Simplex, sem radiação, k constante	Simplex, sem radiação, k variável	Simplex, com radiação, k constante	Simplex, com radiação, k variável	Dupla, com radiação, k constante	Dupla, com radiação, k variável
1	0	0	0	0	0	0
2	6,76142448	2,391995294	26,57279655	2,131999507	7,948222365	0
3	12,00838582	4,232559843	38,60891357	4,155070266	18,47354635	0
4	15,79463595	5,890410657	44,66200265	5,845543161	23,87290502	0
5	18,44423159	7,385391878	47,76084154	7,285042926	26,45787932	0
6	20,21742083	8,734125841	49,24857832	8,530737113	28,72375645	0
7	21,32083493	9,951168012	49,81508586	9,623541754	30,18761732	0
8	21,91715264	11,04948105	49,84534249	10,59337621	31,08777594	0
9	22,13357917	12,04064911	49,56443917	11,46258561	31,52702591	0
10	22,06897755	12,93504205	49,10735118	12,24817514	31,62038018	0
11	21,79974799	13,74195666	48,55599932	12,96330296	31,46121221	0
12	21,38460713	14,46974032	47,96025995	13,61830177	31,12444544	0
13	20,86843139	15,12589959	47,35037647	14,22139318	30,66766947	0
14	20,28532039	15,71719545	46,74447778	14,77919695	30,13402949	0
15	19,66102123	16,24972665	46,15319977	15,29710056	29,555175	0
16	19,01483526	16,72900274	45,58254911	15,77953152	28,9539175	0
17	18,36110986	17,16000811	45,03568468	16,230161	28,34643012	0
18	17,71040046	17,54725806	44,51402697	16,65205801	27,74398357	0
19	17,07037175	17,89484807	44,01794868	17,04780751	27,15427473	0
20	16,44649443	18,20649721	43,5472035	17,41960196	26,58242271	0
21	15,84258177	18,48558623	43,10119164	17,76931288	26,03170469	0
22	15,26120182	18,73519133	42,67912322	18,09854738	25,50409397	0
23	14,70399292	18,95811389	42,28011817	18,40869317	25,00065009	0
24	14,17190472	19,15690686	41,90326665	18,70095465	24,52180007	0
25	13,66538154	19,33389813	41,54766496	18,97638213	24,06753979	0
26	13,1845017	19,49121132	41,21243631	19,23589558	23,63757776	0
27	12,72908285	19,63078422	40,89674244	19,48030414	23,23143696	0
28	12,29876147	19,75438523	40,59978947	19,71032209	22,84852686	0
29	11,89305263	19,86362808	40,32083047	19,92658223	22,48819388	0
30	11,51139469	19,95998484	40,05916597	20,12964694	22,14975657	0
31	11,15318256	20,04479762	39,81414337	20,32001742	21,8325299	0
32	10,81779243	20,11928902	39,58515567	20,49814157	21,53584187	0
33	10,5045999	20,18457141	39,37164001	20,66442055	21,25904478	0
34	10,21299322	20,24165527	39,17307597	20,8192144	21,00152265	0
35	9,942382864	20,29145658	38,98898394	20,96284683	20,76269627	0
36	9,692208398	20,33480347	38,81892357	21,09560929	20,54202659	0
37	9,461943246	20,37244207	38,66249229	21,21776449	20,3390174	0
38	9,251098023	20,40504173	38,51932394	21,32954944	20,15321812	0
39	9,059222747	20,43319961	38,38908755	21,43117807	19,98422764	0
40	8,885908274	20,45744478	38,27148626	21,52284352	19,831701	0
41	8,730787186	20,47824169	38,16625634	21,60472008	19,69536148	0
42	8,593534301	20,49599326	38,07316634	21,676965	19,57502279	0
43	8,473866939	20,51104343	37,99201638	21,73971996	19,47062984	0
44	8,371545076	20,52367934	37,92263763	21,79311251	19,38233271	0
45	8,286371496	20,53413293	37,86489184	21,83725733	19,31061892	0
46	8,218192176	20,54258186	37,81867127	21,87225759	19,2565421	0
47	8,166897723	20,54914868	37,78389936	21,89820714	19,22208171	0
48	8,132429954	20,553893	37,76053504	21,91519685	19,2104824	0
49	8,114826579	20,5567534	37,7486028	21,9233532	19,22438547	0
50	8,114826576	20,55675346	37,74860284	21,92335326	19,22438548	0

*comparado aos resultados de Aletas duplas, com radiação e k variável

4.2 Resultados adjuntos ao problema

Na elaboração deste estudo diversos testes e experimentos computacionais foram realizados a fim de dar maior convicção à análise.

O algoritmo, como mencionado anteriormente foi todo desenvolvido neste estudo, baseando-se na bibliografia também mencionada.

Embora o objetivo central do estudo já tenha exposto seus resultados neste capítulo, durante a análise dados secundários também foram obtidos.

4.2.1 Número de iterações

Como foram analisadas seis situações com parâmetros próprios que as caracterizam, cada uma das seis estão expostas na tabela Tabela 13.

Tabela 13 Número de iterações em cada caso

Tipo de análise	Número de iterações
Simples, sem radiação, k constante	215
Simples, sem radiação, k variável	10469
Simples, com radiação, k constante	78
Simples, com radiação, k variável	6724
Dupla, com radiação, k constante	126
Dupla, com radiação, k variável	8913

Esse resultados mostram que a variação da condutividade térmica aumenta consideravelmente a quantidade de ciclos.

A explicação para isso se dá, pois a cada ponto nodal a condutividade térmica para aquele ponto é refeita. Uma vez que a variação da condutividade térmica também foi definida por procedimento iterativo, esse aumento é esperado.

4.2.2 Critério de parada

A utilização de métodos iterativos demanda que haja um parâmetro que interrompa os ciclos realizados.

No algoritmo desenvolvido neste trabalho estabeleceu-se que o parâmetro que interrompe o processamento está relacionado com a convergência do algoritmo. Isso significa que considera-se satisfatório quando a variação do resultado é pequena o bastante.

Para todos os casos foi estabelecido que o processamento para quando o resultado atual apresenta diferença de 10^{-6} em relação ao resultado do ciclo anterior, o que chamouse de tolerância.

Esse critério observou que quando a tolerância é imposta com o valor de 10^{-5} , a discrepância entre os resultados com tolerância de 10^{-6} chegou a valores de ordem de grandeza 10^{-4} e tal valor foi arbitrado como ruim.

Tal fato foi observado nos casos nos quais a condutividade térmica varia. Nos demais a tolerância de 10^{-5} atenderia o mínimo arbitrado.

4.2.3 Espaçamento entre aletas duplas

O espaço contido entre as superfícies no caso de aletas duplas (d) foi investigado de forma simples, onde pôde-se estabelecer as distâncias mínima e máxima que esse algoritmo poderia processar.

Como já exposto ao longo deste estudo, se a distância entre as superfícies for muito pequeno, a aleta dupla passará a ser avaliada termicamente como uma aleta simples. Por outro lado, se tal distância for muito grande a interação térmica entre as superfícies diminui até ser desprezível.

Investigando o caso exposto notou-se que mais do que apenas a distância d , deve-se analisar a razão entre d e a altura da aleta (L_y).

O resultado dessa investigação apresentou que a razão $\frac{L_y}{d}$ está contido entre os valores mínimo de 50 e máximo de 100.

4.2.4 Tempo de processamento

Para avaliar o tempo que o processamento de cada caso levou, utilizou-se uma ferramenta presente no MATLAB®.

Essa ferramenta consiste em escrever o termo "*tic*" no início do código e "*toc*" no fim. O resultado é apresentado na tela do programa estimando o tempo consumido pelo processamento.

A tabela Tabela 14 apresenta os resultados dessa investigação.

Tabela 14 Tempo de processamento em cada caso

Tipo de análise	Tempo de processamento
Simples, sem radiação, k constante	0.130871 segundos
Simples, sem radiação, k variável	9.466319 segundos
Simples, com radiação, k constante	0.132953 segundos
Simples, com radiação, k variável	6.027746 segundos
Dupla, com radiação, k constante	0.215457 segundos
Dupla, com radiação, k variável	14.054319 segundos

Vale ressaltar que o tempo exposto acima é fortemente influenciado pelo desempenho de *hardware* do computador utilizado.

Notou-se, assim como na análise do número de iterações, que o tempo de processamento aumenta consideravelmente quando se processa os dados com condutividade térmica variável.

4.3 Eficiência em cada caso

Assim como exposto na seção 2.5, dá-se a possibilidade de determinar quantitativamente a eficiência da dissipação de calor em aletas. Tal determinação é dada por η_a e significa a razão entre o calor realmente transferido pela aleta e o calor que seria transferido se toda a superfície estendida estivesse à mesma temperatura da superfície primária.

Portanto, a equação (31) já exposta naquela seção descreve tal parâmetro, onde para os casos de condutividade térmica variável, estima-se um valor médio da condutividade térmica.

$$\eta_a = \frac{Mtgh(mL)}{hA\theta_b} = \frac{\sqrt{\frac{hP}{kA}}\theta_0 tgh(mL)}{hPL\theta_b} = \frac{tgh(mL)}{mL} \quad (31)$$

Onde

$$mL = \sqrt{\frac{hP}{kA}}L = \sqrt{\frac{2h}{k\delta}}L \quad (32)$$

Na avaliação de eficiência com aletas que dissipam calor por radiação, a seção 2.5 descreveu a equação (36).

$$\eta_{rad} = \frac{2k\delta L(\sigma\epsilon/5k\delta)^{1/2}(T_b^5 - (T_a^5))^{1/2}}{2\sigma\epsilon bLT^4} \quad (36)$$

Para o caso de múltiplas aletas, deve-se considerar a área total de superfície estendida. Tal formulação foi exposta na seção 2.5 como através da equação (34).

$$\eta_t = 1 - \frac{A_a}{A}(1 - \eta_a) \quad (34)$$

A Figura 31 apresenta os valores de eficiência que foram calculados de acordo com as equações acima.

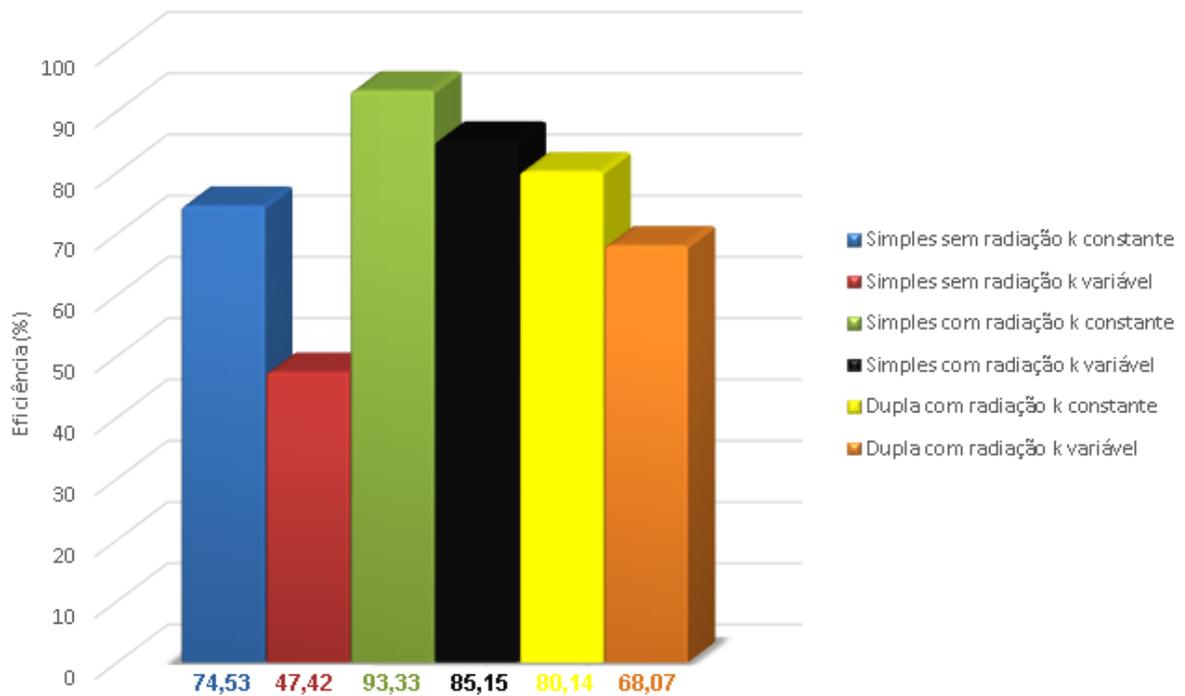


Figura 31 Eficiência de cada caso

Vale ressaltar que este trabalho não busca o caso de melhor eficiência, mas sim o caso mais próximo à realidade, portanto a análise das eficiências mostra a magnitude do desvio que comumente são considerados com eficiências irreais para o dimensionamento de aletas.

CONCLUSÃO

Este trabalho se mostrou relevante quanto a uma investigação aprofundada com fundamentação física, analítica e numérica, onde foi possível perceber a gama de parâmetros e fatores que influenciam direta ou indiretamente a descrição térmica dos problemas propostos.

A utilização de superfícies estendidas demanda uma perspectiva mais cuidadosa quanto a seu dimensionamento e aplicação, onde a dissipação térmica necessita de maior controle. Os modelos obtidos foram propostos numa disposição progressiva de casos para que a análise fosse facilmente rastreável.

Vale ressaltar que as variações de valores de k são muito mais evidentes num contexto em que se trabalhe com baixas e médias temperaturas, pois quanto maiores os valores de T , mais o perfil de condutividade térmica se aproxima de uma reta, de maneira assintótica.

Neste estudo notou-se a enorme importância da avaliação de fenômenos comumente desprezados, os quais geram discrepâncias muito consideráveis aos resultados finais em diversas aplicações. Foi realizada uma análise para comparar o caso de aletas duplas, com condutividade térmica variável e interação térmica por radiação com todos os demais e assim mostrar as consideráveis diferenças quando se despreza determinados parâmetros.

A Tabela 12 apresenta que as defasagens relativas ao resultado esperado alcançou valores máximos de 49,84%, quando comparados nó a nó de todas as situações estudadas.

Pode-se concluir, portanto, que a análise de dissipação térmica, para se aproximar de um modelo real, nunca deve negligenciar a variação da condutividade térmica, os efeitos de radiação térmica e de interação mútua.

TRABALHOS FUTUROS

- Realizar a análise considerando angulação entre as superfícies em aletas duplas;
- Evoluir a análise para os métodos de elementos finitos e volumes finitos;
- Analisar matematicamente a coercividade e convexidade da solução;
- Adição do transiente térmico na análise;
- Comparação da eficiência do MMQ com outros métodos, inclusive estatísticos;
- Analisar n aletas;
- Realizar análise variacional para a modelagem não linear;
- Limitar o comprimento da aleta;
- Trabalhar com aletas não convexas.

REFERÊNCIAS

- [1] HILL, R. W.; VEGHTE, J. H. Jackrabbit ears: surface temperatures and vascular responses. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 194, n. 4263, p. 436–438, 1976.
- [2] STARK, B. Mems reliability assurance guidelines for space applications. 1999.
- [3] RAMOS, R. A. V. et al. Analise da convecção natural em superfícies com fontes de calor protuberantes. 1998.
- [4] PETERSON, G.; ORTEGA, A. Thermal control of electronic equipment and devices. *Advances in heat transfer*, v. 20, p. 181–314, 1990.
- [5] PÉREZ, J.-P. Thermodynamique, fondements et applications. Masson, 1993.
- [6] YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A.; FORD, L. *University Physics Vol 2 (Chapters 21-37)*. [S.l.]: Pearson Education, 2007.
- [7] FOURIER, J. *Theorie analytique de la chaleur, par M. Fourier*. [S.l.]: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [8] CENGEL, Y. *Heat and mass transfer: fundamentals and applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2014.
- [9] BEJAN, A. *Convection heat transfer*. [S.l.]: John wiley & sons, 2013.
- [10] BURMEISTER, L. C. *Convective heat transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993.
- [11] BLUNDELL, S.; BLUNDELL, K. *Concepts in Modern Physics*. [S.l.]: Blundell K: Oxford University Press, 2006.
- [12] HOWELL, J. R.; MENGUC, M. P.; SIEGEL, R. *Thermal radiation heat transfer*. [S.l.]: CRC press, 2010.
- [13] INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; BERGMAN, T. L. *Fundamentos de Transferência de Calor E de Massa* . [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- [14] ARAÚJO, E. C. d. C. Trocadores de calor. *São Carlos: EdUF SCAR*, 2002.

- [15] FRAAS, A. P.; OZISIK, M. N. Heat exchanger design, John Wiley & Sons. *Inc. N York, London, Sydney*, p. 241–255, 1965.
- [16] KERN, D. Q. *Process heat transfer*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 1950.
- [17] SAUNDERS, E. A. D. *Heat exchangers: selection, design & construction*. [S.l.]: Longman, 1988.
- [18] HOLMAN, J. P. *Heat transfer*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2010.
- [19] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; HAINES, C. W. *Elementary differential equations and boundary value problems*. [S.l.]: Wiley New York, 1969.
- [20] KERN, D. Q.; KRAUS, A. D. et al. *Extended surface heat transfer*. McGraw-Hill, 1972.
- [21] QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. *Numerical mathematics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- [22] CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, n. 3, p. 268–302, 2005.
- [23] LI, W. et al. Effect of thermal boundary conditions and thermal conductivity on conjugate heat transfer performance in pin fin arrays. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 95, p. 579–592, 2016.
- [24] DOGONCHI, A.; GANJI, D. Convection–radiation heat transfer study of moving fin with temperature-dependent thermal conductivity, heat transfer coefficient and heat generation. *Applied thermal engineering*, Elsevier, v. 103, p. 705–712, 2016.
- [25] APOSTOL, T. M. *Calculus, volume I*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- [26] NAYAR, A. *The metals databook*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 1997.
- [27] PISACANE, V. L. *Fundamentals of space systems*. [S.l.]: Johns Hopkins University/Appli, 2005.
- [28] APOSTOL, T. M. *Calculus, vol. ii*. *Editora Reverté SA, Barcelona, Buenos Aires, Caracas, México, MCMLXXII*, 1969.

- [29] SOBRAL, R. d. I. *Simulação numérica de aletas num contexto de altas temperaturas*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2017.
- [30] HO, C. Y.; POWELL, R. W.; LILEY, P. E. Thermal conductivity of the elements. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, v. 1, n. 2, p. 279–421, 1972.
- [31] BARROSO, L. et al. *Calculo numerico (com aplicações)*. [s.l]: Harbra, 1987. ISBN 8529400895.
- [32] ARENALES, S.; DAREZZO, A. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. [S.l.]: Cengage Learning, 2008.
- [33] RUGGIERO MÁRCIA A. GOMES; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. [S.l.]: Makron Books do Brasil, 1997.
- [34] HUFFEL, S. V.; VANDEWALLE, J. *The total least squares problem: computational aspects and analysis*. [S.l.]: SIAM, 1991.
- [35] BUTZ, S. D. *Science of earth systems*. [S.l.]: Cengage Learning, 2002.
- [36] ZAITSEV, V. F.; POLYANIN, A. D. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*. [S.l.]: CRC press, 2002.
- [37] CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1998.
- [38] SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. e. *Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. [S.l.]: Prentice Hall, 2003.
- [39] VALENÇA, M. R. *Análise numérica*. [S.l.: s.n.], 1996.
- [40] KRAUS, A. D.; AZIZ, A.; WELTY, J. *Extended surface heat transfer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002.
- [41] CALLINAN, J. P.; BERGGREN, W. P. Some radiator design criteria for space vehicles. *Journal of Heat Transfer (US)*, v. 81, 1959.
- [42] COHEN, B. Heat transfer by conduction and radiation with temperature-dependent thermal conductivity. *Journal of Heat Transfer*, v. 91, n. 1, p. 159–160, 1969.

- [43] ECKERT, E. R. G.; EICHHORN, R.; EDDY, T. L. *Analytic formulation for radiating fins with mutual irradiation*. [S.l.]: Aeronautical Research Laboratories, Air Force Research Division, Air Research and Development Command, United States Air Force, 1960.